

Modélisation de la roue dessicante

Dans ce chapitre on procède à la modélisation de la roue dessicante et à l'identification des paramètres inconnus du modèle de la roue grâce à l'utilisation des modèles de type boîte noire et de type boîte grise.

3.1 Principes de modélisation

Un modèle peut être obtenu par une approche de type boîte blanche, boîte noire ou boîte grise (Huang et al. 2006; Tashtoush et al. 2005; Wang et Xiao 2004). Les modèles de type boîte blanche (ou les modèles de connaissances) sont fondées sur des considérations théoriques ; on les trouve généralement dans les logiciels de simulation pour les bâtiments tels que TRNSYS (Murray et al. 2009). Ces modèles donnent une réponse précise et fiable si leurs paramètres sont parfaitement connus (Nia 2011). Mais pour des phénomènes complexes, il est difficile de construire un modèle de type boîte blanche en utilisant l'ajustement des paramètres en fonction de mesures in situ. Les modèles de type boîte noire représentent des relations entre les entrées et les sorties établies en utilisant une méthode de minimisation de l'erreur de prédiction ; ils sont généralement utilisés dans des applications pratiques de contrôle. L'avantage de ces modèles est que les paramètres sont ajustables en fonction des mesures expérimentales, mais l'inconvénient est l'absence de signification physique des paramètres qui fait que le modèle n'est pas valable au delà des conditions pour lesquelles les paramètres ont été identifiés Les modèles boîte grise ont la structure et certains des paramètres obtenus à partir de lois physiques et le reste des paramètres est obtenu à partir des expériences. Une approche de type boîte grise réduit le nombre de paramètres à identifier parce que, d'une part, elle révèle les paramètres indépendants et leurs interrelations et, d'autre part, elle met en évidence les paramètres qui ont des valeurs dérivées de considérations physiques.

Les équations qui décrivent les phénomènes de transfert de masse et d'énergie dans la roue dessicante sont non-linéaires. Pour des petites variations des entrées, ces équations peuvent être linéarisées. Les modèles linéaires continus peuvent être représentés dans le domaine temporel par des équations différentielles linéaires, ou dans le domaine des fréquences, par des fonctions de transfert.

Un modèle linéaire avec n entrées et une sortie peut être donné sous la forme :

$$y = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n \quad (3.1)$$

où y est la sortie, x_1, x_2, \dots, x_n sont les entrées, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont les paramètres. Pour déterminer les paramètres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ de l'équation (3.1) on a besoin de faire au moins n expériences. Les paramètres sont alors déterminés en résolvant un système à n équations :

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta_0 + x_{11}\theta_1 + x_{12}\theta_2 + \dots + x_{1n}\theta_n \\ y_2 &= \theta_0 + x_{21}\theta_1 + x_{22}\theta_2 + \dots + x_{2n}\theta_n \\ &\vdots \\ y_n &= \theta_0 + x_{n1}\theta_1 + x_{n2}\theta_2 + \dots + x_{nn}\theta_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $y_i, i = 1, \dots, n$ sont les n mesures de la sortie et $x_{i1}, \dots, x_{in}, i = 1, \dots, n$ sont les n mesures des entrées x_1, \dots, x_n . En notant $\mathbf{y}^T = [y_1 \ \dots \ y_n]^T$ le vecteur des n mesures de la sortie, $\mathbf{a}_1^T = [x_{11} \ \dots \ x_{n1}]^T$ le vecteur des n mesures de l'entrée x_1 , $\mathbf{a}_2^T = [x_{12} \ \dots \ x_{n2}]^T$ le vecteur des n mesures de l'entrée x_2 , ..., $\mathbf{a}_n^T = [x_{1n} \ \dots \ x_{nn}]^T$ le vecteur des n mesures de l'entrée x_n , et $\mathbf{a}_0^T = [1 \ \dots \ 1]^T$ le vecteur des n constantes égales à 1, le système d'équations (3.2) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_C \times \boldsymbol{\theta} \quad (3.3)$$

où $\mathbf{A}_C = [\mathbf{a}_1^T \ \dots \ \mathbf{a}_n^T]$ est la matrice d'information et $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \dots \ \theta_n]^T$ est le vecteur des paramètres à identifier. Quand le nombre d'expériences (c. à d. le nombre de lignes de la matrice \mathbf{A}_C) est plus grand que le nombre des paramètres $\boldsymbol{\theta}$, la matrice \mathbf{A}_C est en général non inversible. C'est le cas quand les résultats des expériences ne vérifient pas exactement l'équation (3.3) à cause des erreurs de mesure ou éventuellement du caractère incomplet du modèle. Pour prendre en compte ces erreurs, un terme d'erreur \mathbf{e} est alors ajouté à l'équation (3.3) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_C \times \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e} \quad (3.4)$$

ou :

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \quad (3.5)$$

où $\hat{\mathbf{y}}$ est la valeur de la sortie calculée par le modèle, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_C \times \boldsymbol{\theta}$, et \mathbf{y} est la valeur de la sortie obtenue expérimentalement.

Les paramètres estimés $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de l'équation (3.3) sont obtenus en minimisant de la somme des carrés des erreurs entre la prédiction du modèle $\hat{\mathbf{y}}$ et les valeurs mesurées de la sortie \mathbf{y} :

$$E(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{e}^T \times \mathbf{e} \quad (3.6)$$

où $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{A}_C \times \boldsymbol{\theta}$ est le vecteur d'erreur produit par un choix spécifique du vecteur des paramètres $\boldsymbol{\theta}$. Si $\mathbf{A}_C^T \times \mathbf{A}_C$ est non singulière, les paramètres estimés $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sont uniques et donnés par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{A}_C^T \times \mathbf{A}_C)^{-1} \times \mathbf{A}_C^T \times \mathbf{y} \quad (3.7)$$

3.1.1 Modèles de type boîte noire

Un modèle dynamique linéaire de type boîte noire peut être exprimé sous la forme de fonctions de transfert ou dans l'espace d'état. Les fonctions de transfert ont la forme générale :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3.8)$$

où H est la fonction de transfert d'un système linéaire avec des paramètres constants, X est la transformée de Laplace associées à des conditions initiales nulles de l'entrée, Y est la transformée de Laplace associée à des conditions initiales nulles de la sortie, et s est la variable de Laplace.

Les fonctions de transfert sont largement utilisées dans le domaine de l'analyse et du contrôle des systèmes à une entrée et à une sortie. La méthode des fonctions de transfert est plutôt avantageuse pour les études dans le domaine fréquentiel, l'analyse de stabilité et le contrôle des systèmes en boucle fermée (Petrausch et Rabenstein 2005).

La représentation dans l'espace d'état quant à elle se présente comme une alternative aux fonctions de transfert. L'avantage de cette méthode par rapport aux fonctions de transfert est la facilité du passage entre les modèles SISO (une seule entrée et à une seule sortie), aux modèles MIMO (plusieurs entrées et à plusieurs sorties) (Schmid 2005).

Dans une représentation d'état, le système est décrit par deux équations, dont une détermine l'état du système et l'autre détermine la valeur de sortie du système (Romero et al. 2011).

Supposons un système avec le vecteur des entrées $\mathbf{u}(t)$ et avec le vecteur des sorties $\mathbf{y}(t)$. L'état du système est donné par la première dérivée du vecteur des variables d'état, notée $\dot{\mathbf{x}}(t)$, qui dépend de l'état actuel du système et de l'entrée actuelle. La forme générale de cette présentation est alors :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{3.9}$$

où \mathbf{x} est la variable d'état, \mathbf{A} est la matrice du système qui montre comment l'état actuel $\mathbf{x}(t)$ affecte le changement de l'état $\dot{\mathbf{x}}(t)$, \mathbf{B} est la matrice de contrôle qui détermine l'effet des entrées du système sur le changement d'état, \mathbf{C} est la matrice de sortie qui donne la relation entre l'état du système et sa sortie, \mathbf{D} est la matrice de connexion directe qui montre comment l'entrée du système influence directement la sortie ou la réponse du système étudié.

3.1.2 Modèles de type boîte grise

Un modèle de type boîte grise est un modèle mathématique qui s'appuie sur des connaissances physiques afin de déterminer certains de ses paramètres tandis que d'autres sont obtenus par identification en utilisant des données expérimentales.

Pour un système linéaire représenté par un modèle continu et en considérant que le bruit est négligeable, un modèle de type boîte grise peut être alors exprimé par le système d'équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{3.10}$$

Il est mis sous la forme discrète suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t + T_s) &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t|\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{3.11}$$

où T_s est le temps d'échantillonnage, \mathbf{F} et \mathbf{G} sont des matrices qui résultent de \mathbf{A} et \mathbf{B} , respectivement, par la discrétisation du modèle d'état continu.

Nous nous concentrons uniquement sur la roue dessicante. Son modèle pour un coté (dessiccation ou régénération) a deux entrées (température et humidité) et deux sorties (température et humidité); il peut être exprimé par un système d'équations dans l'espace d'état.

3.2 Modèle de la roue dessicante

3.2.1 Hypothèses

La Figure 3.1 montre la roue dessicante qui est un cylindre circulaire de profondeur L et de rayon r . Cette roue est constituée de canaux contenant un gel de silice, qui est un matériau dessicant (Figure 3.1b).

La roue dessiccante tourne continuellement autour de son axe ; lors d'une rotation complète, chaque canal de la roue passe successivement du côté dessiccation (adsorption-dessiccation) et du côté régénération (désorption- régénération) (Figure 3.1a).

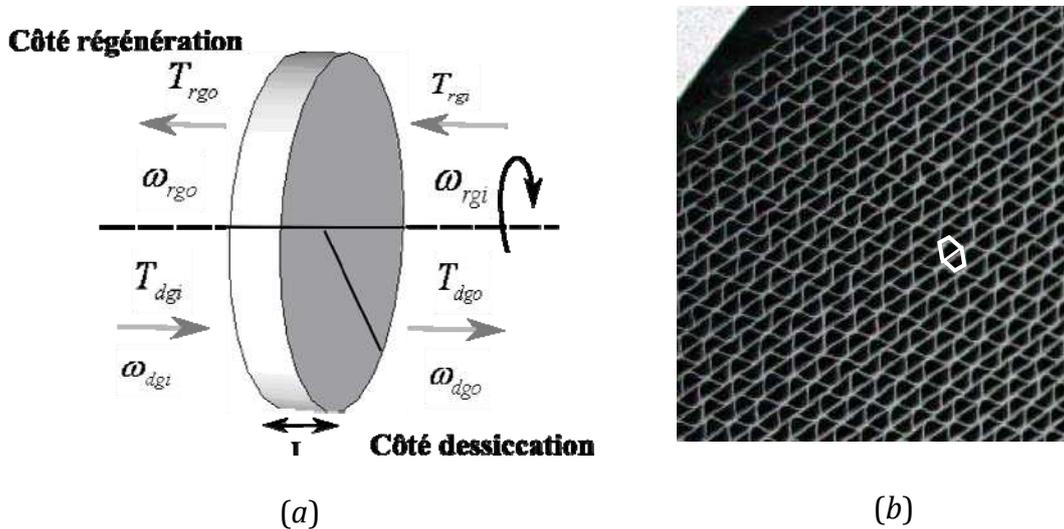


Figure 3.1. Roue dessiccante : a) représentation simplifiée d'une roue ; b) détail de la vue latérale de la roue avec les canaux

Le modèle est construit pour une structure en nid d'abeille (Figure 3.2b). Considérant un volume de contrôle délimité par la section d'entrée de l'air, la section de sortie de l'air et les parois du canal (Figure 3.2a), des hypothèses préliminaires peuvent être prises pour le modèle de la roue dessiccante (Heidarinejad et Pasharshahi 2010; Narayanan et al. 2011; Zhang et al. 2003) :

- la diffusion et la dispersion de la vapeur d'eau dans la direction de l'écoulement de l'air sont négligées devant le transport convectif, ce qui implique que la teneur en eau dans le canal est homogène dans le volume de contrôle ;
- la diffusion moléculaire axiale dans le dessiccant est négligeable, ce qui implique que l'humidité absolue de l'air est en équilibre avec le dessiccant à saturation ;
- la diffusion de la chaleur et de la masse dans la direction radiale sont négligeables ;

- les propriétés thermodynamiques telles que le coefficient de transfert de masse et le coefficient de transfert de chaleur de l'air sont considérées constantes ;
- la géométrie du canal est identique tout au long de la roue cylindrique ;
- les parois du canal sont considérées adiabatiques et imperméables ;
- le nombre de Lewis pour l'air est pris égal à 1 ; par conséquent, les diffusivités thermique et massique sont égales ;
- les propriétés de l'air sont spatialement uniformes à l'entrée de la roue ;
- l'hystérésis de l'isotherme de sorption pour le revêtement dessicant est négligée et la chaleur d'adsorption est supposée constante ;
- la chute de pression dans la roue est faible par rapport à la pression atmosphérique et n'affecte pas la pression absolue de l'air ;
- le transfert de masse d'air entre les côtés de dessiccation et de régénération de la roue dessicante est négligeable.

Compte tenu de ces hypothèses, le modèle dynamique de la roue dessicante est unidimensionnel et les équations décrivant les phénomènes sont les mêmes pour les deux côtés de la roue : dessiccation et régénération. Par conséquent, la procédure de modélisation et la forme des modèles sont les mêmes pour les deux parties de la roue. Pour éviter les répétitions, les équations présentées ci-après sont considérées comme valables pour la régénération, notées avec l'indice « r », et pour la dessiccation, notées avec l'indice « d ».

3.2.2 Équations de bilan d'énergie et de masse de la roue dessicante

Le modèle de la roue dessicante est basé sur les équations de bilan d'énergie et de masse écrites pour un canal (Figure 3.2).

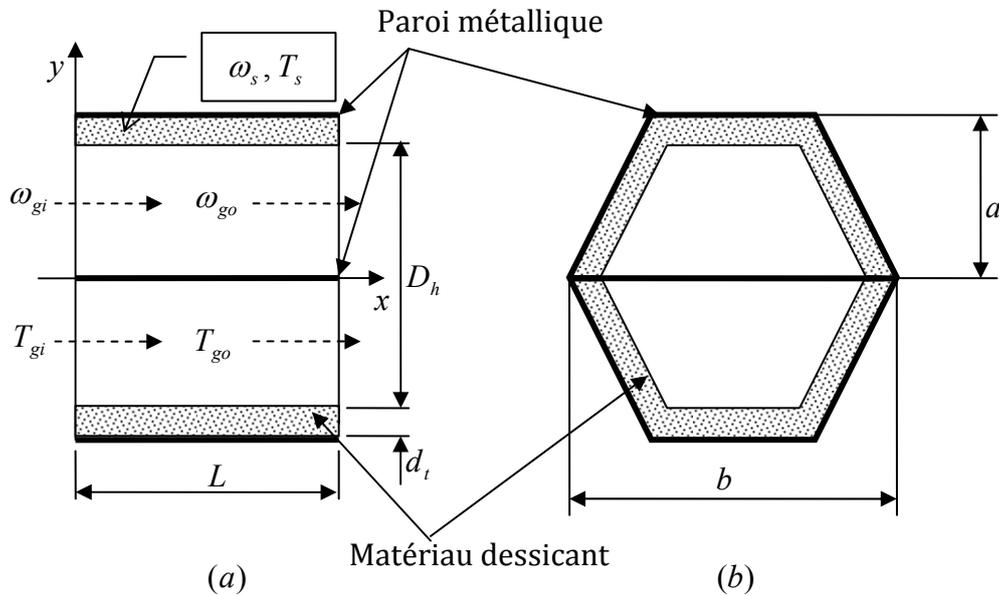


Figure 3.2. Vue d'un canal : a) latérale et b) en coupe

Équation de transfert de masse pour le courant d'air

L'équation de bilan de masse pour la teneur en eau de l'air à l'intérieur du canal s'écrit (Nia 2011) :

$$\frac{d(\rho_g \omega_{go} A_g L)}{dt} = U_g A_g \rho_g (\omega_{gi} - \omega_{go}) + h_m A_c (\omega_s - \omega_{go}) \quad (3.12)$$

où le terme de gauche est la variation de la masse de vapeur contenue dans le volume du canal et les termes du côté droit contiennent la différence entre la masse de vapeur entrant et sortant du canal (le premier terme) et la différence entre la masse de vapeur adsorbée (ou désorbée) par le matériau dessicant de la roue. En divisant l'équation (3.12) par le terme constant $\rho_g A_g L$, on obtient :

$$\frac{d\omega_{go}}{dt} = \frac{U_g}{L} (\omega_{gi} - \omega_{go}) + \frac{h_m A_c}{\rho_g A_g L} (\omega_s - \omega_{go}) \quad (3.13)$$

où h_m est le coefficient de transfert de masse (Heidarinejad et Pasdarsahri 2010):

$$h_m = \frac{h}{Le \cdot c_g} \quad (3.14)$$

où h est le coefficient de transfert de chaleur donné par (Heidarinejad et Pasdarsahri 2010):

$$h = \frac{Nu \cdot \kappa}{D_h} \quad (3.15)$$

Dans le cas où la géométrie du canal est en forme de nid d'abeille, l'expression suivante est utilisée pour estimer le diamètre hydraulique du canal (Narayanan et al. 2011):

$$D_h = a \left[1,0542 - 0,466 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) - 0,1180 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,1794 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,043 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right] \quad (3.16)$$

Équation de transfert de chaleur pour le courant d'air

L'équation de chaleur sensible à l'équilibre pour le courant d'air est :

$$\frac{d(\rho_g c_g A_g T_{go} L)}{dt} = U_g A_g \rho_g c_g (T_{gi} - T_{go}) + h A_c (T_s - T_{go}) \quad (3.17)$$

où le terme du côté gauche est la chaleur accumulée dans l'air contenu dans le volume du canal, le premier terme du côté droit est la variation de la chaleur sensible de l'air traversant le canal et le deuxième terme est la chaleur transférée du matériau dessicant à l'air. En divisant l'équation (3.17) par le terme constant $\rho_g c_g A_g L$, on obtient :

$$\frac{dT_{go}}{dt} = \frac{U_g}{L}(T_{gi} - T_{go}) + \frac{hA_c}{\rho_g c_g A_g L}(T_s - T_{go}) \quad (3.18)$$

Équation de transfert de masse pour la couche dessicante

La masse d'eau absorbée ou adsorbée par le matériau dessicant dans l'unité de temps s'exprime par :

$$\frac{d(\rho_d w A_d L)}{dt} = h_m A_c (\omega_{go} - \omega_s) \quad (3.19)$$

En divisant l'équation (3.19) par le terme $\rho_d A_d L$, on obtient :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{h_m A_c}{\rho_d A_d L} (\omega_{go} - \omega_s) \quad (3.20)$$

Équation de transfert de chaleur pour la couche dessicante

La chaleur dégagée par l'adsorption ou la désorption d'eau s'exprime par :

$$\frac{d(\rho_d A_d L c_d T_s)}{dt} = Q_{sor} \rho_d A_d L \frac{dw}{dt} + hA_c (T_{go} - T_s) \quad (3.21)$$

où le premier terme du côté droit de l'équation (3.21) représente la chaleur générée dans le matériau dessicant en raison de l'adsorption et le second terme représente la chaleur transférée à l'air par le matériau dessicant. En introduisant l'équation (3.20) dans l'équation (3.21), on obtient :

$$\frac{d(\rho_d A_d L c_d T_s)}{dt} = Q_{sor} \rho_d A_d L \frac{h_m A_c}{\rho_d A_d L} (\omega_{go} - \omega_s) + hA_c (T_{go} - T_s) \quad (3.22)$$

Et finalement, en divisant l'équation (3.22) par le terme $\rho_d c_d A_d L$, on obtient :

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{h_m A_c Q_{sor}}{\rho_d A_d c_d L} (\omega_{go} - \omega_s) + \frac{h A_c}{c_d \rho_d A_d L} (T_{go} - T_s) \quad (3.23)$$

Équation de transfert de masse pour la couche dessicante en fonction de l'humidité d'équilibre ω_s

La capacité d'adsorption d'un matériau dessicant ne dépend pas uniquement de l'humidité relative de l'air extérieur, mais aussi de la température de l'air. Pour cette raison, il faut que la relation entre la température de la couche d'adsorption et l'humidité relative de l'air soit connue en vue de déterminer la capacité d'adsorption.

Dans cette section, nous déduisons pour une combinaison donnée de température-humidité, une fonction de la capacité d'adsorption qui est écrite en fonction des paramètres $\omega_s, T_s, \omega_{go}$ et T_{go} .

La teneur en eau dans le matériau dessicant, w , dépend du potentiel d'adsorption, A , (G. Steich 1994):

$$w = 0,106 \exp \left[- \left(\frac{A}{8590} \right)^2 \right] + 0,242 \exp \left[- \left(\frac{A}{3140} \right)^2 \right] \quad (3.24)$$

Le potentiel d'adsorption, A , dépend de la température de la couche d'adsorption et de l'humidité relative de l'air, φ , (Cal 1995; Sheng et al. 1997) :

$$A = -RT_s \ln \varphi \quad (3.25)$$

La relation entre l'humidité absolue en équilibre avec le dessiccant, ω_s , et l'humidité relative, φ , est exprimé par (Zhang et al. 2003) :

$$\varphi = \frac{\omega_s P_0}{(0,622 + \omega_s) P_s} \quad (3.26)$$

où la pression de vapeur saturante, P_s , est donnée par (Niu et Zhang 2002) :

$$P_s = 10^6 P_0 \left(\frac{1 + 1,61\omega_s}{0,622 + \omega_s} \right) \exp\left(\frac{-5294}{T_s + 273,15} \right) \quad (3.27)$$

L'équation (3.24) permet le calcul de la teneur en eau du matériau dessiccant en fonction de la température et l'humidité relative de l'air. De l'équation (3.24) il en résulte que la différentielle $w = f(T_s, \omega_s, \varphi)$ est une fonction de la température de saturation T_s , de l'humidité absolue de l'air en équilibre avec le dessiccant à saturation ω_s et de l'humidité relative de l'air φ . Donc, la différentielle de w est :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_s} d\omega_s + \frac{\partial \varphi}{\partial T_s} dT_s \right) + \frac{\partial w}{\partial T_s} dT_s \quad (3.28)$$

ou bien :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_s} d\omega_s + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial T_s} + \frac{\partial w}{\partial T_s} \right) dT_s \quad (3.29)$$

En notant :

$$S_1(\omega_s, T_s) = \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_s} \quad (3.30)$$

et

$$S_2(\omega_s, T_s) = \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial T_s} + \frac{\partial w}{\partial T_s} \quad (3.31)$$

L'équation (3.29) devient :

$$dw = S_1(\omega_s, T_s) d\omega_s + S_2(\omega_s, T_s) dT_s \quad (3.32)$$

La dérivée de la teneur en eau dans le matériau dessicant, w , en fonction de temps est alors de la forme :

$$\frac{dw}{dt} = S_1(\omega_s, T_s) \frac{d\omega_s}{dt} + S_2(\omega_s, T_s) \frac{dT_s}{dt} \quad (3.33)$$

Forme finale des coefficients $S_1(\omega_s, T_s)$ et $S_2(\omega_s, T_s)$

La forme précédente pour les coefficients $S_1(\omega_s, T_s)$ et $S_2(\omega_s, T_s)$ ne peut pas être utilisée telle quelle dans le modèle dynamique final de la roue dessicante. Nous allons alors la réécrire sous une forme algébrique utilisable dans le modèle dynamique en utilisant l'équation (3.24) pour le calcul de la teneur en eau pour un gel de silice.

- Pour $S_1(\omega_s, T_s)$:

On prend l'équation (3.24) obtenue précédemment, puis on remplace la valeur de A de l'équation (3.25) dans l'équation (3.24) :

$$w = 0,106 \exp\left[-\left(\frac{R^2 T_s^2 \ln^2 \varphi}{(8590)^2}\right)\right] + 0,242 \exp\left[-\left(\frac{R^2 T_s^2 \ln^2 \varphi}{(3140)^2}\right)\right] \quad (3.34)$$

Dans l'équation précédente, nous remplaçons la valeur de φ de l'équation (3.26) en obtenant :

$$w = 0,106 \exp \left[- \left(\frac{R^2 T_s^2 \ln^2 \frac{\omega_s P_0}{(0,622 + \omega_s) P_s}}{(8590)^2} \right) \right] + 0,242 \exp \left[- \left(\frac{R^2 T_s^2 \ln^2 \frac{\omega_s P_0}{(0,622 + \omega_s) P_s}}{(3140)^2} \right) \right] \quad (3.35)$$

La dérivée partielle de l'équation (3.35) en fonction de φ et de ω_s est sous la forme suivante :

$$S_1(\omega_s, T_s) = -0,106 \times \frac{2R^2 T_s^2 \ln \varphi}{(8590)^2 \varphi} \times \frac{P_0(0,622 + \omega_s)P_s - P_s \omega_s P_0}{(0,622 + \omega_s)^2 P_s^2} \times \exp \left[- \left(\frac{R^2 T_s^2 \ln^2 \frac{\omega_s P_0}{(0,622 + \omega_s) P_s}}{(8590)^2} \right) \right] \\ - 0,242 \times \frac{2R^2 T_s^2 \ln \varphi}{(3140)^2 \varphi} \times \frac{P_0(0,622 + \omega_s)P_s - P_s \omega_s P_0}{(0,622 + \omega_s)^2 P_s^2} \times \exp \left[- \left(\frac{R^2 T_s^2 \ln^2 \frac{\omega_s P_0}{(0,622 + \omega_s) P_s}}{(3140)^2} \right) \right] \quad (3.36)$$

En réécrivant l'équation précédente on obtient :

$$S_1(\omega_s, T_s) = -2,9 \times 10^{-9} \times \frac{R^2 T_s^2}{\varphi} (\ln \varphi) \times \frac{0,622 P_0}{(0,622 + \omega_s)^2 P_s} \times \exp \left[- \left(\frac{R^2 T_s^2 \ln^2 \varphi}{(8590)^2} \right) \right] \\ - 4,9 \times 10^{-8} \times \frac{R^2 T_s^2}{\varphi} (\ln \varphi) \times \frac{0,622 P_0}{(0,622 + \omega_s)^2 P_s} \times \exp \left[- \left(\frac{R^2 T_s^2 \ln^2 \varphi}{(3140)^2} \right) \right] \quad (3.37)$$

d'où la forme finale pour le coefficient $S_1(\omega_s, T_s)$:

$$S_1(\omega_s, T_s) = \left(2,9 \times 10^{-9} A \frac{RT_s}{\varphi} \exp \left[- \left(\frac{A}{8590} \right)^2 \right] + 4,9 \times 10^{-8} A \frac{RT_s}{\varphi} \exp \left[- \left(\frac{A}{3140} \right)^2 \right] \right) \left(\frac{0,622 P_0}{(0,622 + \omega_s)^2 P_s} \right) \quad (3.38)$$

- Pour $S_2(\omega_s, T_s)$

On exprime la dérivée partielle de l'équation (3.24) en fonction de φ :

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{-0,106}{(8590)^2} \times \frac{2R^2T_s^2}{\varphi} (\ln \varphi) \times \exp \left[- \left(\frac{R^2T_s^2 \ln^2 \varphi}{(8590)^2} \right) \right] - \frac{0,242}{(3140)^2} \times \frac{2R^2T_s^2}{\varphi} (\ln \varphi) \times \exp \left[- \left(\frac{R^2T_s^2 \ln^2 \varphi}{(3140)^2} \right) \right] \quad (3.39)$$

En remplaçant l'équation (3.25) dans l'équation (3.39), on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = -2,9 \times 10^{-9} \frac{R^2T_s^2}{\varphi} \left(\frac{-A}{RT_s} \right) \times \exp \left[- \left(\frac{A^2}{(8590)^2} \right) \right] - 4,9 \times 10^{-8} \frac{R^2T_s^2}{\varphi} \left(\frac{-A}{RT_s} \right) \times \exp \left[- \left(\frac{A^2}{(3140)^2} \right) \right] \quad (3.40)$$

ou bien :

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 2,9 \times 10^{-9} A \frac{RT_s}{\varphi} \exp \left[- \left(\frac{A}{(8590)} \right)^2 \right] + 4,9 \times 10^{-8} A \frac{RT_s}{\varphi} \exp \left[- \left(\frac{A}{(3140)} \right)^2 \right] \quad (3.41)$$

La dérivée partielle de l'équation (3.24) en fonction de T_s est :

$$\frac{\partial w}{\partial T_s} = \frac{-0,106}{(8590)^2} \times 2R^2T_s \ln^2 \varphi \times \exp \left[- \left(\frac{R^2T_s^2 \ln^2 \varphi}{(8590)^2} \right) \right] - \frac{0,242}{(3140)^2} \times 2R^2T_s \ln^2 \varphi \times \exp \left[- \left(\frac{R^2T_s^2 \ln^2 \varphi}{(3140)^2} \right) \right] \quad (3.42)$$

En remplaçant la valeur de A de l'équation (3.25) dans l'équation (3.42), on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial T_s} = -2,9 \times 10^{-9} R^2T_s (\ln \varphi)(\ln \varphi) \times \exp \left[- \left(\frac{A}{(8590)} \right)^2 \right] - 4,9 \times 10^{-8} R^2T_s (\ln \varphi)(\ln \varphi) \times \exp \left[- \left(\frac{A}{(3140)} \right)^2 \right] \quad (3.43)$$

En remplaçant la valeur de φ de l'équation (3.25) dans l'équation (3.43), on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial T_s} = -2,9 \times 10^{-9} R^2T_s \left(\frac{-A}{RT_s} \right) (\ln \varphi) \times \exp \left[- \left(\frac{A}{(8590)} \right)^2 \right] - 4,9 \times 10^{-8} R^2T_s \left(\frac{-A}{RT_s} \right) (\ln \varphi) \times \exp \left[- \left(\frac{A}{(3140)} \right)^2 \right] \quad (3.44)$$

ou :

$$\frac{\partial w}{\partial T_s} = 2,9 \times 10^{-9} AR \ln \varphi \times \exp \left[- \left(\frac{A}{8590} \right)^2 \right] + 4,9 \times 10^{-8} AR \ln \varphi \times \exp \left[- \left(\frac{A}{3140} \right)^2 \right] \quad (3.45)$$

En utilisant la relation entre l'humidité relative et la pression de vapeur saturante (X.J. Zhang et Y.J. Dai 2003) :

$$\varphi = \frac{10^{-6} \omega_s \exp \left(\frac{5294}{T_s + 273,15} \right)}{(1 + 1,61 \omega_s)} \quad (3.46)$$

la dérivée de l'équation (3.46) pour T_s est :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T_s} = \frac{10^{-6} \omega_s \exp \left(\frac{5294}{T_s + 273,15} \right)}{(1 + 1,61 \omega_s)} \times \frac{5294}{(T_s + 273,15)^2} \quad (3.47)$$

ou bien :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T_s} = \varphi \times \frac{5294}{(T_s + 273,15)^2} \quad (3.48)$$

En remplaçant les équations (3.41), (3.45) et (3.48) dans l'équation (3.31), on obtient la forme finale de $S_2(\omega_s, T_s)$:

$$S_2(\omega_s, T_s) = \left(2,9 \times 10^{-9} A \frac{RT_s}{\varphi} \exp \left[- \left(\frac{A}{8590} \right)^2 \right] + 4,9 \times 10^{-8} A \frac{RT_s}{\varphi} \exp \left[- \left(\frac{A}{3140} \right)^2 \right] \right) \left(\frac{5294 \varphi}{T_s^2} \right) + \left(2,9 \times 10^{-9} AR \ln \varphi \exp \left[- \left(\frac{A}{8590} \right)^2 \right] + 4,9 \times 10^{-8} AR \ln \varphi \exp \left[- \left(\frac{A}{3140} \right)^2 \right] \right) \quad (3.49)$$

Enfin, l'équation du transfert de masse pour la couche dessicante devient (Nia 2011a) :

$$\frac{d\omega_s}{dt} = -\frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} \frac{dT_s}{dt} + \frac{1}{S_1(\omega_s, T_s)} \frac{dw}{dt} \quad (3.50)$$

3.2.3 Description du modèle dynamique

Pour écrire le modèle dynamique de la roue dessicante sous la forme d'un modèle d'état, nous allons utiliser les équations de bilan d'énergie et de masse obtenues précédemment (équations (3.13), (3.18), (3.23) et (3.50)).

En notant :

$$C_1 = \frac{U_g}{L} \quad (3.51)$$

et

$$C_2 = \frac{h_m A_c}{\rho_g L A_g} \quad (3.52)$$

L'équation (3.13) s'écrit (Nia 2011a):

$$\frac{d\omega_{go}}{dt} = C_1(\omega_{gi} - \omega_{go}) + C_2(\omega_s - \omega_{go}) \quad (3.53)$$

La relation entre la surface d'interface A_c et la section transversale d'écoulement d'air A_g du canal est :

$$\frac{A_c}{A_g} = \frac{2L}{D_h} \quad (3.54)$$

D'une manière similaire, on note :

$$C_3 = \frac{hA_c}{\rho_g L A_g C_g} = Le C_2 \quad (3.55)$$

où Le est le nombre de Lewis donné par (J.L. Niu et L.Z. Zhang 2002) :

$$Le = \frac{h}{h_m c_g} \quad (3.56)$$

L'équation (3.18) devient :

$$\frac{dT_{go}}{dt} = C_1(T_{gi} - T_{go}) + C_3(T_s - T_{go}) \quad (3.57)$$

De même, l'équation du bilan thermique pour la couche dessicante solide (équation (3.23)) devient :

$$\frac{dT_s}{dt} = C_4 C_5 (\omega_{go} - \omega_s) + C_6 (T_{go} - T_s) \quad (3.58)$$

où C_4, C_5, C_6 sont :

$$C_4 = \frac{h_m A_c}{\rho_d A_d L} \quad (3.59)$$

et

$$C_5 = \frac{Q_{sor}}{c_d} \quad (3.60)$$

et

$$C_6 = \frac{h A_c}{c_d \rho_d A_d L} \quad (3.61)$$

La relation entre la surface d'interface A_c et la section transversale pour la couche dessicante A_d du canal est :

$$\frac{A_c}{A_d} = \frac{4D_h L}{(D_h + d_t)^2 - D_h^2} \quad (3.62)$$

Finalement, l'équation de bilan de massique pour la couche dessicante solide (équation (3.50)) devient :

$$\frac{d\omega_s}{dt} = -\frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} \left[C_4 C_5 (\omega_{go} - \omega_s) + C_6 (T_{go} - T_s) \right] + \frac{C_4}{S_1(\omega_s, T_s)} (\omega_{go} - \omega_s) \quad (3.63)$$

L'équation (3.63) peut être réécrite comme :

$$f \equiv \frac{d\omega_s}{dt} = a_{11}\omega_s + a_{12}\omega_{go} + a_{13}T_{go} + a_{14}T_s \quad (3.64)$$

où $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ sont les dérivées partielles en fonction de $\omega_s, T_s, \omega_{go}$ et T_{go} , respectivement. Ces paramètres sont donnés par :

$$a_{11} = \frac{\partial f}{\partial \omega_s} = -\frac{C_4}{S_1(\omega_s, T_s)} + \frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} C_4 C_5, \quad (3.65)$$

$$a_{12} = \frac{\partial f}{\partial \omega_{go}} = \frac{C_4}{S_1(\omega_s, T_s)} - \frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} C_4 C_5, \quad (3.66)$$

$$a_{13} = \frac{\partial f}{\partial T_{go}} = -\frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} C_6, \quad (3.67)$$

et

$$a_{14} = \frac{\partial f}{\partial T_s} = +\frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} C_6 \quad (3.68)$$

Les équations (3.53), (3.57), (3.58) et (3.64) forment le modèle dynamique de la roue dessicante.

3.2.4 Représentation dans l'espace d'état de la roue dessicante

La forme générale d'un modèle dans l'espace d'état est :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

où \mathbf{A} est la matrice d'état, \mathbf{B} est la matrice d'entrée, \mathbf{C} est la matrice de sortie, \mathbf{D} est la matrice de transfert direct. Les états \mathbf{x} ainsi que la réponse \mathbf{y} peuvent être calculés une fois que l'état initial et les entrées sont connus.

À partir des équations (3.53), (3.57), (3.58) et (3.64), la représentation d'état peut être obtenue en notant le vecteur d'état :

$$\mathbf{x} = [\omega_s \quad \omega_{go} \quad T_{go} \quad T_s]^T \quad (3.70)$$

le vecteur d'entrée :

$$\mathbf{u} = [\omega_{gi} \quad T_{gi}]^T \quad (3.71)$$

le vecteur de sortie :

$$\mathbf{y} = [\omega_{go} \quad T_{go}]^T \quad (3.72)$$

la matrice d'état **A** :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ C_2 & -(C_1 + C_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(C_1 + C_3) & C_3 \\ -C_4 C_5 & C_4 C_5 & C_6 & -C_6 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

la matrice d'entrée **B** :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

la matrice de sortie **C** :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

et la matrice de transfert direct **D** :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

L'ensemble des équations (3.53), (3.57), (3.58) et (3.64), peut être écrit dans l'espace d'état sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

où

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_s \\ \dot{\omega}_{go} \\ \dot{T}_{go} \\ \dot{T}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ C_2 & -(C_1 + C_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(C_1 + C_3) & C_3 \\ -C_4 C_5 & C_4 C_5 & C_6 & -C_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_s \\ \omega_{go} \\ T_{go} \\ T_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{gi} \\ T_{gi} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

avec l'équation de sortie :

$$\begin{bmatrix} \omega_{go} \\ T_{go} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_s \\ \omega_{go} \\ T_{go} \\ T_s \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Les équations (3.78) et (3.79) donnent la température et l'humidité de l'air à la sortie de la roue dessicante en fonction des variables d'entrées. Les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale de la matrice d'état **A** prouvent que les états sont couplés, c'est à dire que le système est multi-entrée multi-sortie (MIMO). Les équations (3.64) - (3.68) montrent quant à elles, que le modèle est non linéaire.

3.2.5 Représentation d'état de la roue dessicante en fonction du paramètre C_2

Nous pouvons classer les paramètres des équations de bilan dans deux catégories : paramètres constants et paramètres variables. Les paramètres constants sont liés aux caractéristiques géométriques de la roue dessicante telles que C_1 et C_5 . En revanche, les paramètres variables, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, C_3, C_4, C_6$ et C_2 sont liés, quant à eux, aux coefficients de transfert de masse et de chaleur.

Nous pouvons écrire tous les paramètres variables en fonction d'un seul paramètre (ex. C_2). En substituant l'équation (3.54) dans l'équation (3.52) on obtient :

$$C_2 = \frac{4h_m}{\rho_g D_h} \quad (3.80)$$

ou bien la forme suivante du coefficient de transfert de masse h_m :

$$h_m = \frac{C_2 \rho_g D_h}{4} \quad (3.81)$$

Nous pouvons écrire les autres paramètres, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, C_3, C_4, C_6$, en fonction de C_2 .

En prenant le nombre de Lewis Le égal à « 1 », l'équation (3.55) devient :

$$C_3 = C_2 \quad (3.82)$$

L'équation (3.59) s'écrit sous la forme :

$$C_4 = \frac{2h_m}{\rho_d d_t} \quad (3.83)$$

En remplaçant l'équation (3.81) dans l'équation (3.83), on obtient :

$$C_4 = \frac{\rho_g D_h C_2}{2\rho_d d_t} \quad (3.84)$$

ou

$$C_4 = k_1 C_2 \quad (3.85)$$

où k_1 est une constante donnée par :

$$k_1 = \frac{\rho_g D_h}{2 \rho_d d_t} \quad (3.86)$$

En remplaçant les équations (3.14) et (3.62) dans l'équation (3.61), on obtient :

$$C_6 = \frac{2 h_m C_g}{C_d \rho_d d_t} \quad (3.87)$$

De la même manière, on substitue l'équation (3.81) dans l'équation (3.87) ce qui donne :

$$C_6 = \frac{\rho_g D_h C_g C_2}{2 C_d \rho_d d_t} \quad (3.88)$$

ou

$$C_6 = k_2 C_2 \quad (3.89)$$

où k_2 est une constante donnée par :

$$k_2 = \frac{\rho_g D_h C_g}{2 \rho_d C_d d_t} \quad (3.90)$$

Les termes de l'équation (3.64) peuvent maintenant être réécrits en tenant compte des paramètres C_3, C_4, C_6 obtenus précédemment. Le terme a_{11} de l'équation (3.64) est obtenu en substituant l'équation (3.85) dans l'équation (3.65) :

$$a_{11} = \left(-\frac{1}{S_1(\omega_s, T_s)} + \frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} C_5 \right) k_1 C_2 \quad (3.91)$$

ou, en forme plus compacte :

$$a_{11} = k_1 k_3 C_2 \quad (3.92)$$

où k_3 est une constante donnée par :

$$k_3 = \left(-\frac{1}{S_1(\omega_s, T_s)} + \frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} C_5 \right) \quad (3.93)$$

De la même manière, le deuxième terme a_{12} de l'équation (3.64) peut être donné par :

$$a_{12} = k_1 k_4 C_2 \quad (3.94)$$

où k_4 est une constante donnée par :

$$k_4 = \left(\frac{1}{S_1(\omega_s, T_s)} - \frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} C_5 \right) \quad (3.95)$$

et le troisième terme a_{13} de l'équation (3.64) peut être écrit en substituant l'équation (3.89) dans l'équation (3.67) :

$$a_{13} = -\frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} k_2 C_2 \quad (3.96)$$

ou sous une forme plus compacte :

$$a_{13} = k_2 k_5 C_2 \quad (3.97)$$

où k_5 est une constante donnée par :

$$k_5 = -\frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} \quad (3.98)$$

Finalement, le coefficient a_{14} de l'équation (3.64) s'écrit :

$$a_{14} = k_2 k_6 C_2 \quad (3.99)$$

où k_6 est une constante donnée par :

$$k_6 = + \frac{S_2(\omega_s, T_s)}{S_1(\omega_s, T_s)} \quad (3.100)$$

Tous les paramètres variables figurants dans les équations de bilan de masse et de chaleur de la roue dessicante peuvent maintenant être exprimés en fonction d'un seul paramètre variable : C_2 .

En analysant les équations (3.14) et (3.80), on observe que le paramètre variable C_2 reflète implicitement des coefficients tels que le coefficient de transfert de masse et du coefficient de transfert thermique. Nous pouvons maintenant représenter l'équation (3.77) en fonction du paramètre variable unique C_2 qui figure dans la matrice d'état A , avec les grandeurs obtenues dans les équations (3.82), (3.85), (3.89), (3.92), (3.94), (3.97), et (3.99). Ainsi, la forme finale du modèle d'état de la roue dessicante devient :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_s \\ \dot{\omega}_{go} \\ \dot{T}_{go} \\ \dot{T}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 k_3 C_2 & k_1 k_4 C_2 & k_2 k_5 C_2 & k_2 k_6 C_2 \\ C_2 & -(C_1 + C_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(C_1 + C_2) & C_2 \\ k_1 C_2 C_5 & k_1 C_2 C_5 & k_2 C_2 & k_2 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_s \\ \omega_{go} \\ T_{go} \\ T_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{gi} \\ T_{gi} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

On pourra utiliser cette représentation d'état de la roue dessicante pour déterminer les coefficients de transfert de masse et de chaleur et le nombre de Nusselt, une fois le coefficient C_2 est identifié expérimentalement.

3.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons obtenu deux formes du modèle d'état de la roue dessicante : la matrice \mathbf{A} de l'équation (3.78) est une première forme du modèle d'état utile pour l'identification des paramètres de connaissance de la roue dessicante, en utilisant des modèles de type boîte noire et boîte grise, tandis que la matrice \mathbf{A} de l'équation (3.101) est une forme du modèle d'état utile pour l'identification des coefficients de transfert thermique et de transfert de masse en utilisant le modèle de type boîte grise.

Ces modèles d'état seront utilisés pour l'identification des paramètres. Ensuite, ils seront validés expérimentalement. Ils serviront également à la simulation d'un système basé sur des modèles identifiables, dans le but d'élaborer une stratégie améliorée de contrôle-commande de la roue dessicante.