Mise en œuvre d'un modèle de PML

Le modèle PML a été proposé par J-P Bérenger en 1994 afin de simuler numériquement un domaine non borné eu vu d'étudier la propagation d'ondes électromagnétiques. Sa relative simplicité de mise en œuvre et ses résultats plus que satisfaisants lui confèrent un grand intérêt.

Cette méthode est une alternative à l'écriture de conditions aux limites absorbantes sur l'approximation de l'opérateur d'impédance adapté (utilisé dans la première partie) pour les simulations numériques en domaine libre. Notons le fait que l'approche PML est exacte contrairement à la méthode utilisée précédemment.

L'idée des PML est d'obtenir, après changement de variables complexe (rendu possible par prolongement analytique à $\mathbb{C}^3$ du noyau de Green de $p^2-\Delta$), un système d'équations défini sur tout l'espace, et tel que:

- La solution vérifie les équations d'Euler "en espace libre" dans Ω (c'est-à-dire coïncide avec la solution φ qui nous intéresse dans Ω).
- La solution décroisse exponentiellement sur $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$, et ce indépendamment de la fréquence et de la direction de propagation des ondes.

On présentera dans un premier temps les principaux arguments permettant d'établir le problème sur tout l'espace pour ensuite mettre en œuvre numériquement la méthode.

4.1 Grandes étapes de la démarche PML

4.1.1 Décroissance exponentielle du noyau de Green

Soit φ la solution des équations d'Euler en domaine libre:

$$\partial_t\varphi + A^i\partial_i\varphi + B\varphi = f$$

avec les mêmes notations que précédemment. On s'intéresse d'abord au cas sans convection ($U_0 = 0$), l'opérateur étant à coefficients constants. On a alors le système simplifié:

$$\partial_t\varphi + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 \end{pmatrix}\varphi = f,$$

qui, par transformation de Laplace en temps, devient:

$$\left(pI_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 \end{pmatrix}\right)\mathcal{L}\varphi = \mathcal{L}f.$$

En notant H_0 l'opérateur de cette dernière équation, et en notant $\boldsymbol{\varphi} = \mathcal{L}\varphi$ et $\mathbf{f} = \mathcal{L}f$, on a donc:

$$H_0\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}.$$

Il est alors intéressant d'inverser l'opérateur H_0, ce qui revient à trouver la solution (dite élémentaire) de l'équation:

$$H_0 = \delta I_3,$$

Or, on a:

$$\begin{aligned} H_0^{-1} &= (\det(H_0))^{-1} \,(\text{matrice des cofacteurs})^T, \\ &= (p^2-\Delta)^{-1}\frac{1}{p}\begin{pmatrix} p^2-\partial_y^2-\partial_z^2 & \partial_x\partial_y & \partial_x\partial_z & -p\partial_x \\ \partial_y\partial_x & p^2-\partial_x^2-\partial_z^2 & \partial_y\partial_z & -p\partial_y \\ \partial_z\partial_x & \partial_z\partial_y & p^2-\partial_x^2-\partial_y^2 & -p\partial_z \\ -p\partial_x & -p\partial_y & -p\partial_z & p^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à expliciter le terme $(p^2-\Delta)^{-1}$, c'est-à-dire à inverser l'opérateur $(p^2-\Delta)$. On peut montrer que le Noyau de Green $G(X,p)$ de l'opérateur $p^2-\Delta$, s'écrit en tridimensionnel:

$$G(X,p) = Cte\ \frac{e^{\pm pr}}{r},$$

avec $X=(x,y,z)$ et $r=\|X\|_2$, le signe dans l'exponentielle dépendant de l'orientation de l'axe du temps.

Remarque 20 *Dans la suite, on supposera l'orientation de l'axe du temps telle que*

$$G(X,p) = Cte\frac{e^{-pr}}{r}.$$

Remarque 21 *En dimension* 2*, le noyau de Green n'est plus une exponentielle mais une fonction de Hankel. Cependant, cette dernière se comportant asymptotiquement comme une exponentielle, la démarche reste la même.*

La solution d'une équation $(p^2-\Delta)\varphi = h$ est alors obtenue par convolution de h avec le noyau de Green G. L'inverse de $(p^2-\Delta)$ est donc:

$$(p^2-\Delta)^{-1} = G(X,p)\ *_X .$$

L'opérateur H_0^{-1} est donc caractérisé.

Conclusion 22

$$\begin{aligned} H_0\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \ &\Leftrightarrow\ \boldsymbol{\varphi} = H_0^{-1}\mathbf{f} = (p^2-\Delta)^{-1}\tfrac{1}{p}\,[...]\,\mathbf{f} \\ &\Leftrightarrow\ (p^2-\Delta)\boldsymbol{\varphi} = \tfrac{1}{p}\,[...]\,\mathbf{f} \\ &\Leftrightarrow\ \boldsymbol{\varphi} = G(X,p) *_X \tfrac{1}{p}\,[...]\,\mathbf{f} \quad \textit{(convolution faite sur chacune des composantes)} \end{aligned}$$

On peut montrer que $G(.,p)$ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}^3$. On se propose alors de trouver un changement de variable complexe $\widetilde{X}(X)$ tel que:

- $\widetilde{X} = X$ sur Ω (de manière a retrouver la restriction de φ dans Ω).
- $\mathrm{Re}(\widetilde{X}) = X$ sur tout l'espace.

- Le noyau de Green décroisse de manière exponentielle lorsque $\widetilde{X}$ "s'éloigne de Ω" en partie réelle.(et ce dans toutes les directions et indépendamment de la fréquence).

En supposant un tel changement de variables déterminé, on considère alors l'équation en $\widetilde{X}$ dont la solution est $\widetilde{\varphi}$:

$$\partial_t \widetilde{\varphi} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_{\widetilde{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\widetilde{y}} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\widetilde{z}} \\ \partial_{\widetilde{x}} & \partial_{\widetilde{y}} & \partial_{\widetilde{z}} & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\varphi} = \widetilde{f},$$

où $\widetilde{f} = f$ lorsque $\widetilde{X} = X$ et 0 ailleurs. La même démarche que précédemment conduit donc à:

$$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = G(\widetilde{X}, p) *_{\widetilde{X}} \frac{1}{p} [...] \widetilde{\mathbf{f}}.$$

On a donc bien un problème dont la solution $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ vaut $\boldsymbol{\varphi}$ dans Ω car alors $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = G(X, p) *_X \frac{1}{p} [...] \mathbf{f} = \boldsymbol{\varphi}$. De plus, on peut montrer (cf [1]) à l'aide d'une majoration que la décroissance de $G(\widetilde{X}, p)$ est une condition suffisante pour avoir la décroissance exponentielle de $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ à l'infini.

Il reste donc à déterminer un changement de variables permettant cette décroissance indépendamment de la fréquence. Dans notre cas,

$$G(\widetilde{X}, p) = Cte \, \frac{e^{-p\widetilde{r}}}{\widetilde{r}},$$

où $\widetilde{r} = \sqrt{\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2}$. Or, en posant $p = a + i\omega$, et en faisant tendre a vers 0, on a:

$$\left| e^{-p\widetilde{r}} \right| \to \left| e^{-i\omega\widetilde{r}} \right| = \left| e^{\omega \operatorname{Im}(\widetilde{r}) - i\omega \operatorname{Re}(\widetilde{r})} \right| = e^{\omega \operatorname{Im}(\widetilde{r})}.$$

Par conséquent, si l'on parvient à trouver un changement de variables tel que $\operatorname{Im}(\widetilde{r}) < 0$ et décroissante lorsque l'on s'éloigne de Ω, on aura bien une décroissance exponentielle du noyau de Green. On choisit de faire le changement de variables suivant:

$$d\widetilde{X} = \left(1 + \frac{\sigma(X)}{i\omega}\right) dX,$$

avec $\sigma(X) = 0$ sur Ω, $\sigma(X) > 0$ sur $\mathbb{R}^3 \backslash \Omega$. Alors:

$$\widetilde{X}(X) = X - \frac{i}{\omega} \int \sigma(\xi) d\xi.$$

On a bien $\widetilde{X} = X$ sur Ω et $\operatorname{Re}(\widetilde{X}) = X$ d'une part. De plus, on peut montrer que $\operatorname{Im}(\widetilde{r})$ est bien négative décroissante.

Remarque 23 *On veut que cette décroissance exponentielle soit indépendante de $i\omega$, c'est à dire indépendante de la forme du signal en temps. C'est pourquoi on divise $\sigma(X)$ par $i\omega$. Ainsi, la décroissance se fait indépendamment de la variable de Laplace p, ce qui permet de conserver la propriété en repassant au domaine temporel.*

Au final, on a obtenu l'équation:

$$i\omega\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_{\widetilde{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\widetilde{y}} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\widetilde{z}} \\ \partial_{\widetilde{x}} & \partial_{\widetilde{y}} & \partial_{\widetilde{z}} & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \widetilde{f} \quad \text{avec } \widetilde{X} = \widetilde{X}(X),$$

qui est, par construction, telle que sa solution $\widetilde{\varphi}$ vérifie $\widetilde{\varphi} = \varphi$ sur Ω et décroisse exponentiellement lorsque l'on s'éloigne de Ω.
En repassant au variable X, on obtient le problème en X sur tout l'espace:

$$i\omega\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_x}{S_x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_y}{S_y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_y}{S_z} \\ \frac{\partial_x}{S_x} & \frac{\partial_y}{S_y} & \frac{\partial_y}{S_z} & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}, \tag{15}$$

où $S_x = (1 + \frac{\sigma_x}{i\omega})$ (de même pour S_y et S_z) et $\sigma(X) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$.
On montre alors que ce problème est bien posé ([3]).

4.1.2 Etude du caractère bien posé du problème temporel associé

L'étude menée dans le paragraphe précédent conduit à un nouveau problème harmonique dont la restriction de la solution à Ω est également solution du problème harmonique initial. Ce nouveau problème, que nous considérerons maintenant dans le cas d'un domaine spatial à 2 dimensions:

$$i\omega\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial_x}{S_x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial_y}{S_y} \\ \frac{\partial_x}{S_x} & \frac{\partial_y}{S_y} & 0 \end{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}, \tag{16}$$

nécessite d'être formulé différemment afin d'établir le caractère bien posé du problème temporel qui lui est associé.

On note tout d'abord que (16) se met sous la forme:

$$(i\omega I_3 + \frac{1}{S_x} A^1 \partial_x + \frac{1}{S_y} A^2 \partial_y)\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}, \tag{17}$$

avec $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On admet alors le résultat suivant ([4]), qui permet de se ramener à l'opérateur spatial initial $A^1\partial_x + A^2\partial_y$:

Lemme 24 *Il existe deux opérateurs inversibles M et N, tels que:*

$$\frac{1}{S_x} A^1 \partial_x + \frac{1}{S_y} A^2 \partial_y = M(A^1 \partial_x + A^2 \partial_y)N,$$

et qui de plus vérifient:

$$A^1\partial_x M + A^2\partial_y N = 0$$

et

$$\lim_{\sigma_x,\sigma_y\to 0} N = I_3.$$

Le couple d'opérateurs M et N n'étant pas unique, on les choisit diagonaux:

$$M = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_y S_x} \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme précédent, l'équation (17) s'écrit donc:

$$i\omega\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + M(A^1\partial_x + A^2\partial_y)N\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f},$$

qui, en posant $\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} = N\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$, et en multipliant l'égalité par M^{-1}, devient:

$$i\omega M^{-1}N^{-1}\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} + (A^1\partial_x + A^2\partial_y)\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} = M^{-1}\mathbf{f}. \tag{18}$$

Remarque 25 *Sur Ω, on a $S_x = S_y = 1$ et donc $M^{-1} = I_3$. De plus,* $\mathbf{f}$ *est à support compact dans Ω. Par conséquent, on pourra mettre indifféremment* $\mathbf{f}$ *ou* $M^{-1}\mathbf{f}$ *comme second membre de l'équation.*

On décompose alors $i\omega M^{-1}N^{-1}$ de la manière suivante:

$$i\omega M^{-1}N^{-1} = i\omega I_3 + C + RU_\omega,$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y - \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x + \sigma_y \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sigma_y(\sigma_y - \sigma_x) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x(\sigma_x - \sigma_y) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x\sigma_y \end{pmatrix}$$

$$\text{et } U_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega+\sigma_y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega+\sigma_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i\omega} \end{pmatrix}.$$

Le système (18) s'écrit alors:

$$i\omega\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} + C\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} + RU_\omega\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} + (A^1\partial_x + A^2\partial_y)\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} = \mathbf{f},$$

ce qui, après transformation de Fourier inverse (en temps), donne:

$$\partial_t\widetilde{\widetilde{\varphi}} + C\widetilde{\widetilde{\varphi}} + RK *_t \widetilde{\widetilde{\varphi}} + (A^1\partial_x + A^2\partial_y)\widetilde{\widetilde{\varphi}} = f,$$

avec $K = \mathcal{F}_t^{-1}(U_\omega) = \begin{pmatrix} e^{-\sigma_y t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\sigma_x t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $T = K *_t \widetilde{\widetilde{\varphi}}$, on obtient alors:

$$\partial_t\widetilde{\widetilde{\varphi}} + C\widetilde{\widetilde{\varphi}} + RT + (A^1\partial_x + A^2\partial_y)\widetilde{\widetilde{\varphi}} = f.$$

De plus, après transformation de Fourier (en temps) de l'égalité $T = K *_t \widetilde{\widetilde{\varphi}}$, on a:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T} = U_\omega \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} i\omega + \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & i\omega + \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \mathbf{T} = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}} \\
\Leftrightarrow \quad & i\omega \mathbf{T} + \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T} = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}},
\end{aligned}$$

ce qui, en revenant au domaine temporel, amène à l'équation en T:

$$\partial_t T + \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \widetilde{\widetilde{\varphi}}.$$

On aboutit finalement au système couplé suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \widetilde{\widetilde{\varphi}} + A^i \partial_i \widetilde{\widetilde{\varphi}} + C \widetilde{\widetilde{\varphi}} + RT = f \\ \partial_t T + DT = \widetilde{\widetilde{\varphi}}, \end{array} \right. \tag{19}$$

où $D = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui peut également se mettre sous la forme d'un système de Friedrich:

$$\partial_t \Phi + \begin{pmatrix} C & R \\ -I_3 & D \end{pmatrix} \Phi + \begin{pmatrix} A^1 \partial_x + A^2 \partial_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $\Phi = \begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{\varphi}} \\ T \end{pmatrix}$.

Le problème temporel étant mis sous cette forme, on a alors le théorème d'existence suivant ([4]):

Théorème 26 *Le modèle (19) est un modèle PML pour les équations d'Euler linéarisées. De plus, le problème de Cauchy associé à ce modèle est fortement bien posé, la solution étant de même régularité que les données.*

4.1.3 Cas avec convection

La démarche précédente concernait le cas particulier où $U_0 = 0$. On s'intéresse désormais au cas où U_0 n'est plus nul, cas dans lequel le problème temporel que l'on considère est le suivant:

$$\partial_t \widetilde{\varphi} + A^1 \partial_x \widetilde{\varphi} + A^2 \partial_y \widetilde{\varphi} = f, \tag{20}$$

avec $A^1 = U_0^1 I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = U_0^2 I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le lemme (24) n'étant alors plus valable, on ne peut appliquer ici la même démarche que précédemment. Cependant, en effectuant le changement de variables:

$$\begin{cases} \eta(t) = x + U_0^1 t \\ \xi(t) = y + U_0^2 t, \end{cases}$$

et en posant $\widetilde{\varphi_\chi} = \widetilde{\varphi}(\overrightarrow{\chi}, t)$, avec $\overrightarrow{\chi} = (\eta, \xi)$ et $\widetilde{\varphi}$ solution de (20), on montre que $\widetilde{\varphi_\chi}$ vérifie l'équation:

$$\partial_t \widetilde{\varphi_\chi} + A^1 \partial_x \widetilde{\varphi_\chi} + A^2 \partial_y \widetilde{\varphi_\chi} = f.$$

Ce problème ressemble de par sa structure aux équations considérées précédemment. Cependant, celui-ci fait intervenir des dérivées en ∂_x et ∂_y alors que les fonctions sont en (η, ξ). Il n'y a donc à priori aucune raison pour que le modèle PML précédent puisse s'appliquer ici. Cependant, les simulations numériques semblent correctes.

4.2 Approximation

4.2.1 Schéma d'approximation

Le système (19) étant bien posé, on en cherche maintenant une approximation. Contrairement au cas précédent, il nous faut ici considérer un couple d'équations, qui seront chacune approchées par un schéma numérique convergent et stable. Cependant, la stabilité de chacun des deux schémas ne permet pas de conclure quant à celle de leur couplage. C'est pourquoi on préférera utiliser, lorsque cela n'est pas trop contraignant, la formulation implicite des schémas, beaucoup plus stable que l'explicite.

La première équation de (19) étant, de par sa structure (de la forme , similaire à l'équation principale du système (12) dont on a approché la solution précédemment, elle sera discrétisée de la même manière par une méthode aux volumes finis. On aura au final, dans le cas sans convection, le schéma suivant:

$\forall e = 1..N$, $\forall k$,

$$\varphi_e^k = \varphi_e^{k-1} - \Delta t (C_e \varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1} + R_e T_e^k) - \tfrac{\Delta t}{\Delta y}(-A_b^2)^-(\varphi_{b,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (A_h^2)^-(\varphi_{h,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1})]$$
$$-\tfrac{\Delta t}{\Delta x}\left[(A_d^1)^-(\varphi_{d,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (-A_g^1)^-(\varphi_{g,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1})\right] - \tfrac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\mathrm{mes}(\partial\Omega \cap \partial\omega_e)\left(M_e \varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1}\right)$$

Remarque 27 *Par souci de lisibilité, on note φ_e^k, au lieu de $\widetilde{\widetilde{\varphi}}_e^k$, la valeur de $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ sur q_e^k.*

Remarque 28 *Le schéma donné ici est complètement explicite. Cependant, on peut passer le terme $C_e \varphi_e^{k-1}$ en implicite, le schéma d'approximation étant alors de la forme:*

$$\forall e = 1..N,\ \forall k,$$
$$\varphi_e^k = (I_3 + \Delta t C_e)^{-1}(\varphi_e^{k-1} - \Delta t(R_e T_e^k - f_e^{k-1}) - \tfrac{\Delta t}{\Delta y}[..] - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}[..] - \tfrac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}(..)).$$

Pour ce qui est de la seconde équation, qui est une équation différentielle temporelle en T, on utilisera une méthode d'Euler implicite. A chaque pas de temps, on calculera ainsi T_e^k grâce au schéma suivant:

$$\forall e = 1..N,\ \forall k,$$
$$T_e^k = (I_3 + \Delta t D_e)^{-1}(T_e^{k-1} + \Delta t \varphi_e^{k-1}).$$

Remarque 29 *Dans le cas d'une simulation de propagation de perturbations aéroacoustiques dans un cylindre infini, il faut se ramener au cas* $1D$. *Dans ce cas là, on a* $\sigma_y = 0$, *et donc* $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x(\sigma_x - \sigma_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Seule la seconde composante* T_2 *de* T *nous intéresse alors;* D *étant diagonale, il suffit de considérer l'équation scalaire en* T_2.

On obtient donc le schéma numérique couplé suivant:
$\forall e = 1..N$, $\forall k$,

▶ $T_e^k = (I_3 + \Delta t D_e)^{-1}(T_e^{k-1} + \Delta t \varphi_e^{k-1})$

▶ $\varphi_e^k = \varphi_e^{k-1} - \Delta t(C_e\varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1} + R_e T_e^k) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left[(-A_b^2)^-(\varphi_{b,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (A_h^2)^-(\varphi_{h,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1})\right]$
$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(A_d^1)^-(\varphi_{d,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (-A_g^1)^-(\varphi_{g,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1})\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\mathrm{mes}(\partial\Omega \cap \partial\omega_e)\left(M_e\varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1}\right).$

4.2.2 Résultats numériques

Les paramètres des simulations avec PML sont quasiment identiques à ceux utilisés précédemment. Le problème de normalisation des ondes ne se posant plus, le domaine peut prendre des dimensions quelconques. Ainsi, le domaine considéré pour ces simulations est $[0,2] \times [0,1]$, et 15 couches de PML (c'est-à-dire l'équivalent de 15 éléments de maillage) ont été ajoutées de part et d'autre du domaine. La couche PML n'étant présente que de part et d'autre du cylindre, tout ce qui a été fait précédemment est à considérer avec $\sigma_y = 0$ (équivalent monodimensionnel).

Les figures 4, 5, 6 montrent les résultats de simulation avec PML dans les mêmes conditions qu'au § 3.2. Lorsque des ondes sortantes atteignent un des bords horizontaux (en x), la couche PML est visible sous forme d'une étroite bande dans laquelle l'extinction exponentielle est matérialisée par une couleur uniforme, correspondant à des valeurs proches de 0. Dans tous les cas, l'absence de réflexion confirme expérimentalement la validité de l'approche.

Enfin, la figure 7 représente un tracé de ρ sur l'axe du guide d'ondes dans la couche PML à 6 temps proches (dans le cadre sans convection). La décroissance exponentielle y est clairement visible lorsque le front d'onde atteind la couche PML.