

Effet Lehmann thermique : mesures dynamiques

*Il faut parfois longtemps pour
qu'une vérité démontrée devienne
une vérité acceptée.*

G. LE BON, Les incertitudes de
l'heure présente

Dans ce chapitre, nous présentons trois expériences mettant en jeu une rotation continue du directeur et permettant des mesures quantitatives. La première permet une mesure directe de la rotation Lehmann à la température de compensation. Elle utilise un ancrage particulier, dit glissant, qui sera d'abord décrit au début du chapitre. La deuxième expérience permet de montrer que le coefficient Lehmann ne change pas de signe de part et d'autre du point de compensation. La troisième expérience est similaire à l'expérience initiale de Lehmann, que nous avons reproduite dans des gouttes en suspension dans la phase isotrope.

6.1 Ancrage glissant

6.1.1 Motivations

Nous avons vu que l'effet Lehmann électrique, s'il existe, est souvent en compétition avec d'autres effets flexo-électriques ou électro-hydrodynamiques qui rendent les expériences délicates à interpréter. Nous avons

donc décidé de nous focaliser sur l'effet Lehmann thermique. Or, les mesures statiques du coefficient Lehmann thermique, comme celles de l'expérience d'Éber et Jánossy, font intervenir une combinaison d'autres grandeurs du matériau. Cette correction à apporter est du même ordre de grandeur que le coefficient Lehmann et constitue une source très importante d'incertitudes expérimentales, au point que certains pourraient encore douter de la validité de la mesure¹. Nous avons donc essayé dans un second temps de mettre en évidence directement l'effet Lehmann en réalisant des expériences mettant en jeu une véritable rotation continue du directeur.

Le principal obstacle à la rotation du directeur est la présence des bords. En effet, les lames de verre de la cellule imposent généralement, du fait de l'ancrage fort, une orientation fixe du directeur à leur surface. Dans la géométrie la plus simple, planaire, où le cholestérique prend spontanément une structure en hélice, un ancrage azimutal empêche la rotation continue de cette hélice.

Nous avons donc mis au point un nouveau traitement de la surface des lames de verre des cellules qui permet d'imposer un ancrage zénithal planaire fort tout en laissant au directeur la possibilité de tourner dans le plan des lames de verre. C'est ce que nous appellerons dans la suite un ancrage « glissant ». Le développement de cet ancrage a donné lieu à une publication [Osw08d].

Notons qu'un ancrage homéotrope permettrait aussi une rotation continue dans le plan des lames, mais la structure du directeur n'est généralement pas une simple hélice puisqu'il se forme souvent des doigts. La configuration idéale pour étudier une rotation continue du directeur tout en évitant les problèmes dus à l'ancrage serait le TIC. Malheureusement, seul un cristal liquide cholestérique d'anisotropie diélectrique négative peut être stabilisé dans cette configuration au moyen d'un champ électrique alternatif. Ce n'est pas le cas de notre mélange. Par ailleurs, la détection optique de la rotation requiert que la torsion spontanée ne soit pas trop grande². Or on peut raisonnablement supposer que l'effet Lehmann sera d'autant plus important que la concentration en molécules chirales est grande. L'idéal serait donc d'utiliser un cholestérique compensé, concentré en molécules chirales, d'anisotropie diélectrique négative. Hélas, nous ne disposons pas d'un tel cristal liquide³.

1. Cf. les critiques de Pleiner et Brand.

2. Plus précisément, il faut que $q_0 \lambda \ll \Delta n$ où λ est la longueur d'onde de la lumière.

3. Nous avons essayé de faire cette expérience avec un mélange non compensé de nématique ZLI2806 avec 0,52% en masse de la molécule chirale ZLI811, produits par Merck. Mais aucune rotation n'a été observée pendant 16 heures, avec un gradient de

Nous avons néanmoins réalisé des expériences en ancrage homéotrope, sur des doigts cholestériques, qui seront présentées après celles en ancrage glissant, dans la section 6.3.

6.1.2 Protocole et caractérisation

Venons en maintenant à la méthode que nous avons utilisée pour réaliser un ancrage glissant. Au contact de certains liquides, le directeur s'aligne parallèlement à la surface mais n'a pas d'orientation fixée. L'idée pour obtenir un ancrage glissant a donc consisté à déposer une fine couche d'un tel liquide sur les plaques de verre. Les contraintes imposées pour le choix du liquide sont qu'il ne doit pas se mélanger avec le cristal liquide et qu'il doit rester sur les lames, donc bien mouiller le verre. Évidemment, il doit aussi donner un ancrage planaire, ce qui n'est pas le cas de tous les liquides.

Le protocole qui a été mis au point avec l'aide d'Andrzej Żywociński consiste à utiliser comme liquide le durcisseur d'une colle⁴ époxy, *Structal* 7 d'*Eleco*. Nous ne connaissons pas la composition exacte de ce durcisseur commercial, mais nous savons néanmoins il s'agit d'un polymercap-tan. Le protocole consiste à étaler par spin-coating le durcisseur. Celui-ci a été préalablement dissout à 5% en masse dans de la butanone. Le liquide ainsi obtenu a une viscosité relativement faible et peut être filtré au travers d'un filtre de $0,2\ \mu\text{m}$ pour éliminer les poussières. Une fois la couche liquide étalée, le solvant est évaporé à 60°C sous vide pendant une heure. On obtient ainsi les lames de verre recouvertes d'une fine couche⁵ liquide de durcisseur. Les cellules une fois assemblées sont remplies par capillarité en phase isotrope, puis scellées.

Notons que la température de transition cholestérique-isotrope est environ 1°C plus basse dans les cellules traitées en ancrage glissant que dans les cellules habituelles. Cela provient probablement d'une légère pollution de notre cristal liquide par le durcisseur. En revanche, la température de compensation ne varie pratiquement pas.

température non contrôlé il est vrai, puisque la cellule était seulement posée sur la plaque d'un four à 90°C et refroidie sur le haut par un souffle d'air comprimé à température ambiante. Il est clair que cette expérience doit être tentée de nouveau.

4. Des ancrages plus ou moins glissants ont déjà été reportés dans la littérature avec d'autres produits (colle UV, GLYMO) [Dozoo, Nes07].

5. L'épaisseur de la couche a été mesurée par interférométrie. Elle est d'environ $0,2\ \mu\text{m}$.

Ancrage planaire fort dégénéré

Lors de la transition isotrope-cholestérique, de nombreuses disinclinations se forment, cf figure 6.1. Ce sont surtout des disinclinations de rang $\pm\frac{1}{2}$ qui ne peuvent se former qu'en ancrage planaire dégénéré, c'est-à-dire non orienté. Notons que des disinclinations de rang ± 1 sont aussi présentes, mais moins nombreuses car elles demandent plus d'énergie.

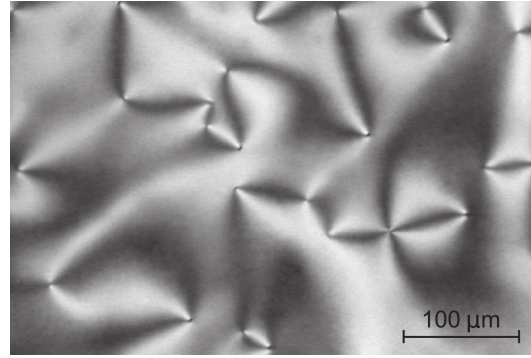


FIGURE 6.1 – Texture observée entre polariseurs croisés à la température de compensation après refroidissement depuis la phase isotrope.

Pour confirmer le caractère planaire de l'ancrage, nous avons mesuré la capacité de cellules d'épaisseur $10\ \mu\text{m}$ en fonction de la tension appliquée, suivant la méthode utilisée dans la section 3.3. On déduit de ces mesures la constante diélectrique moyenne, qui dépend de l'orientation du directeur. L'expérience montre que la constante diélectrique des échantillons mesurée à basse tension⁶ est égale à la constante diélectrique transverse du mélange à 1% près, ce qui confirme bien que l'ancrage est planaire.

Par ailleurs, la comparaison de la totalité de la courbe de capacité en fonction de la tension avec celle mesurée sur une cellule en ancrage planaire fort traditionnel ne montre aucune déviation, cf. figure 6.2. Cela implique que l'ancrage zénithal est relativement fort. Pour estimer l'énergie d'ancrage associée, W_θ , on utilise l'expression du champ électrique nécessaire pour briser l'ancrage et réorienter le directeur sur les lames [Neh76] :

$$E_{\text{seuil}} = \frac{W_\theta}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_a \left(\frac{K_1 + K_3}{2} \right)}} \quad (6.1)$$

6. C'est-à-dire en dessous du seuil de Fréederickz.

Comme à 20 V, ce champ n'est pas atteint sur un échantillon de 10 μm , on en déduit une borne inférieure pour l'énergie d'ancrage :

$$W_\theta > 3 \times 10^{-5} \text{ J m}^{-2} \quad (6.2)$$

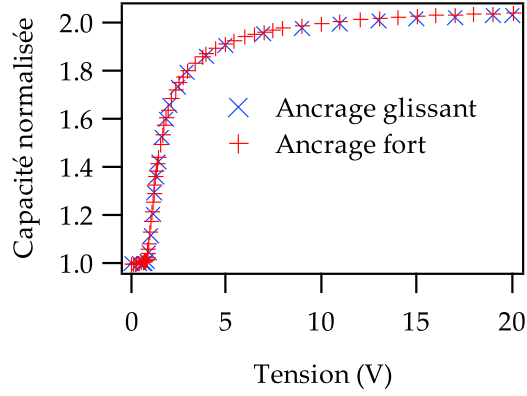


FIGURE 6.2 – Capacité en fonction de la tension appliquée, mesurée à la température de compensation dans un échantillon standard et dans un échantillon traité en ancrage glissant sur une des deux lames. $f = 10$ kHz. Les deux courbes se superposent aux incertitudes expérimentales près.

Remarquons finalement que, même si le cristal liquide est légèrement pollué par le durcisseur, le seuil de la transition de Fréédéricksz n'est pas modifié par rapport à un ancrage traditionnel, ce qui signifie que K_1 n'est pas affecté par cette pollution. D'autre part, la viscosité rotationnelle a également pu être mesurée sur ces échantillons, en utilisant la méthode de la section 3.5. Nous avons trouvé la même valeur que dans les cellules standard, ce qui montre que γ_1 n'est pas affecté non plus par la pollution des échantillons.

Ancrage glissant

L'observation de paires isolées de défauts $\pm \frac{1}{2}$ tels que ceux de la figure 6.1 révèle que ceux-ci se déplacent spontanément l'un vers l'autre jusqu'à se rencontrer et s'annihiler, cf. figure 6.3. Cela indique clairement que l'ancrage est non seulement planaire, mais aussi qu'il permet la réorientation du directeur dans le plan des lames et qu'il est donc glissant.

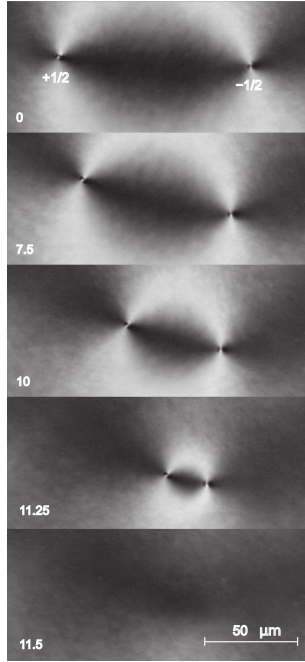


FIGURE 6.3 – Séquence d’images entre polariseurs croisés montrant l’annihilation spontanée de deux disinclinaisons de rang $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ à la température de compensation. L’épaisseur est de $10\ \mu\text{m}$ et le temps est donné en minutes.

Il est probable que le directeur qui tourne sur les lames de verre soit tout de même soumis à un couple visqueux de surface. Pour le mesurer, nous avons réalisé l’expérience qui suit :

Nous avons construit une cellule mixte avec une lame traitée en ancrage planaire fort⁷ et l’autre en ancrage glissant. Le directeur dans l’épaisseur de la cellule prend alors une structure en hélice dont le pas correspond à la torsion spontanée du cholestérique.

Dans un premier temps, nous avons changé la température très doucement. Dans cette limite quasistatique, la torsion spontanée du cholestérique change et le directeur tourne sur la lame glissante jusqu’à ce que l’hélice atteigne la nouvelle torsion spontanée. L’intensité lumineuse transmise entre polariseurs croisés est enregistrée en fonction de la température, la direction du polariseur d’entrée étant alignée avec la direction d’ancrage fixe. Le calcul de l’intensité transmise conduit, pour une hélice parfaite, à

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} - \cos(2q_0d) \frac{\kappa^2 + \cos(2q_0d \sqrt{1 + \kappa^2})}{2(1 + \kappa^2)} - \sin(2q_0d) \frac{\sin(2q_0d \sqrt{1 + \kappa^2})}{2\sqrt{1 + \kappa^2}} \quad (6.3)$$

7. réalisé en utilisant du polyimide frotté

avec $\kappa = \frac{\pi \Delta n}{q_0 \lambda} = \frac{k \Delta n}{2q_0}$, $\lambda = 546$ nm. L'ajustement de la courbe expérimentale par cette expression permet de détecter le minimum d'intensité correspondant à la température d'inversion, mais aussi de mesurer l'épaisseur de l'échantillon. Un exemple est donné sur la figure 6.4.

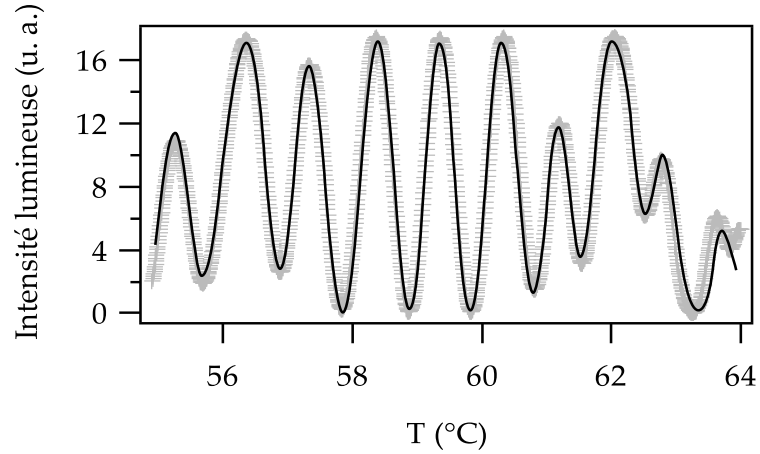


FIGURE 6.4 – Transmission optique entre polariseurs croisés en fonction de la température. Les points correspondent à l'expérience et la ligne continue à l'équation (6.3). Épaisseur $23,8 \mu\text{m}$.

Dans un second temps, nous avons cherché à mesurer la viscosité de surface. Pour ce faire, il faut changer la température suffisamment vite et détecter un retard du directeur par rapport à son orientation d'équilibre. Sur la figure 6.5 sont représentées des mesures de l'intensité transmise en fonction de la température en chauffant et en refroidissant. Notons que la température est mesurée *in situ* et en temps réel en mesurant par la méthode 4 fils la résistance d'un fil de tungstène de $10 \mu\text{m}$ de diamètre tendu à l'intérieur du cristal liquide. Sans cela, le temps de réponse du four *Mettler* utilisé devrait être pris en compte, ce qui rendrait la mesure très imprécise et, de ce fait, irréalisable. Près de la température de compensation T_0 l'état est presque uniformément aligné. Dans ces conditions, le plan de polarisation de la lumière suit l'hélice du directeur — il y a rotation adiabatique. Le minimum T_m de la courbe enregistrée en chauffant ou en refroidissant l'échantillon à une vitesse contrôlée (rampe de température) correspond donc exactement à un état où le directeur sur la lame glissante est parallèle à la direction d'ancrage fixe et donc perpendiculaire à l'analyseur.

Sur le plan théorique, l'équation régissant l'évolution du directeur au

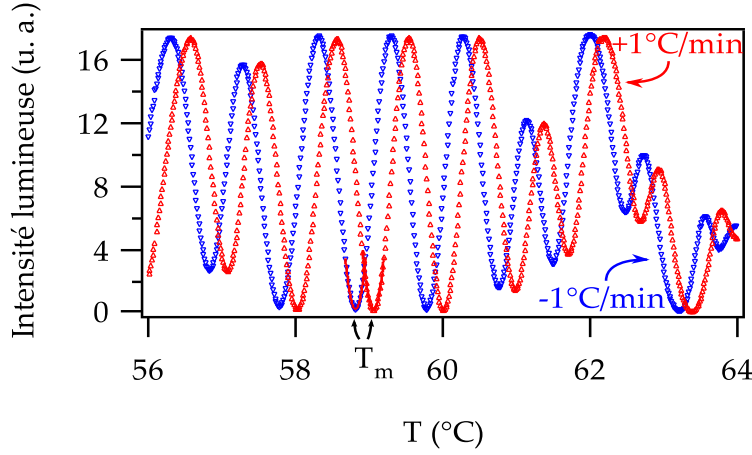


FIGURE 6.5 – Courbe de transmission optique entre polariseurs croisés pour deux rampes de température d’amplitudes égales mais de signes opposés. Les températures T_m sont obtenues en ajustant les courbes par des paraboles autour des minima locaux. Épaisseur $23,8 \mu\text{m}$.

cours d’une rampe de température est la suivante :

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (6.4)$$

Les conditions aux limites sur les lames du bas, où l’ancrage est fixe, et sur la lame du haut, où l’ancrage est glissant, sont respectivement

$$\varphi = 0 \quad (6.5a)$$

$$\gamma_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - q_0[T(t)] \right) \quad (6.5b)$$

où $q_0[T(t)]$ est la torsion d’équilibre du cholestérique et γ_S une viscosité de surface phénoménologique [Gen95].

Expérimentalement, nous imposons une rampe de température constante $r = dT/dt$, de sorte que

$$T(t) = T_0 + r t \quad (6.6)$$

La solution de ces équations est donnée par

$$\varphi(z, t) = \frac{\omega}{3\omega_B} \left(\frac{z}{d} \right)^3 + \omega \left[t - \left(\frac{1}{\omega_B} + \frac{1}{\omega_S} \right) \right] \quad (6.7)$$

où $\omega = r d \frac{dq}{dT}$ est la vitesse angulaire de rotation du directeur imposée par la rampe de température, $\omega_B = \frac{2K_2}{\gamma_1 d^2}$ le taux de relaxation volumique et $\omega_S = \frac{K_2}{\gamma_S d}$ le taux de relaxation surfacique.

Près de T_0 , la transmission optique s'annule (extinction) lorsque $\varphi(d, t) = 0$. Cette condition est remplie au temps $t_0 = \frac{1}{\omega_S} + \frac{2}{3\omega_B}$, correspondant à la température $T_m = T_0 + r \left(\frac{1}{\omega_S} + \frac{2}{3\omega_B} \right)$. Ainsi, en mesurant la variation de T_m en fonction de la rampe de température r , on peut déterminer ω_S et donc γ_S puisque :

$$\frac{dT_m}{dr} = \frac{1}{\omega_S} + \frac{2}{3\omega_B} = \frac{\gamma_S}{K_2} d + \frac{\gamma_1}{3K_2} d^2 \quad (6.8)$$

De cette façon, on trouve, en ajustant les données expérimentales représentées sur les figures 6.6 et 6.7, et compte tenu des incertitudes sur γ_1 et sur K_2 ,

$$\gamma_S = 3,2 \pm 0,8 \times 10^{-7} \text{ Pa s m}$$

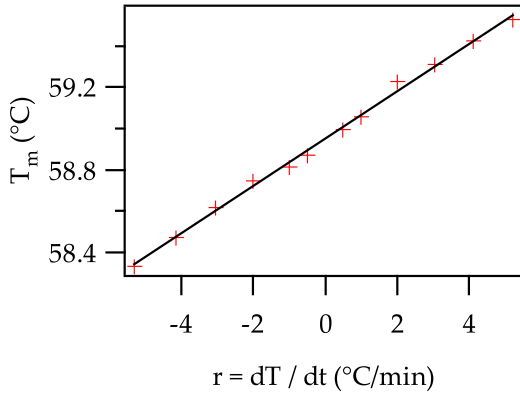


FIGURE 6.6 – Température T_m en fonction de la rampe de température r pour un échantillon d'épaisseur $23,8 \mu\text{m}$ et son ajustement par une loi linéaire.

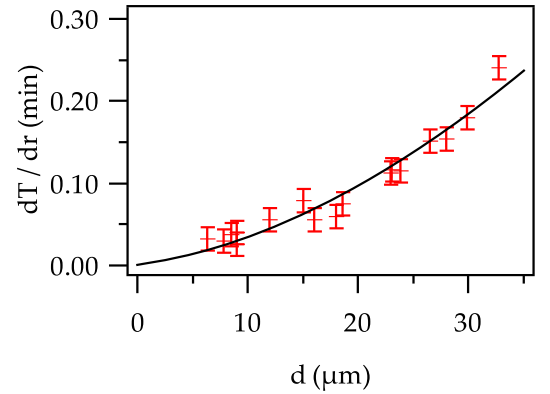


FIGURE 6.7 – Dérivée $\frac{dT_m}{dr}$ en fonction de l'épaisseur de l'échantillon d . La ligne continue est le meilleur ajustement par l'équation (6.8) en prenant $\gamma_1 = 0,075 \text{ Pa s}$ et $K_2 = 2,8 \times 10^{-12} \text{ N}$.

Soulignons pour conclure cette section que ces cellules mixtes avec un ancrage glissant et un ancrage fort permettent également de mesurer simplement le signe de la torsion spontanée. Il suffit pour cela de mesurer la direction de polarisation de la lumière à la sortie de la cellule, qui coïncide avec le directeur pour des faibles torsions. Nous avons ainsi vérifié que pour notre mélange, $\frac{dq_0}{dT}$ est positif. Le cholestérique est donc droit pour $T > T_0$ et gauche pour $T < T_0$.

6.2 Mesure directe du coefficient Lehmann à la température de compensation

Le travail présenté dans cette section a donné lieu à une publication [Oswo8a].

6.2.1 Dispositif expérimental

Pour imposer aux échantillons un gradient de température vertical, nous avons conçu le dispositif suivant, qui a été réalisé à l'atelier de mécanique par Franck Vittoz, cf. figure 6.8.

Dans ce montage, la cellule est placée entre deux fours transparents en verre contrôlés en température à $\pm 0,01^\circ\text{C}$ grâce à la circulation d'eau de deux bains thermostatés indépendants⁸. Un système de vannes permet d'aiguiller l'eau de chaque bain soit vers le four du bas, soit vers le four du haut, ce qui permet d'inverser rapidement la température des fours. Deux fines couches de glycérol améliorent les contacts thermiques entre les plaques de verre des fours et celles de la cellule. Nous avons vérifié que la température de l'échantillon est bien donnée par $\frac{1}{2}(T_b + T_h)$ à $\pm 0,1^\circ\text{C}$ quelles que soient les valeurs des températures du bain du bas, T_b , et du haut, T_h . Un microscope polarisant *Leica* et une caméra⁹ permettent d'observer l'échantillon et d'enregistrer des images. Dans la suite, nous noterons $\Delta T = T_h - T_b$. Cette quantité est directement proportionnelle au gradient de température.

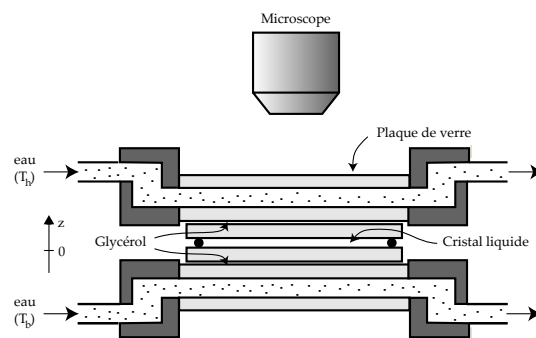


FIGURE 6.8 – Dispositif expérimental permettant d'imposer un gradient de température vertical, tout en permettant l'observation de l'échantillon.

8. Julabo MH et Lauda MGW.

9. Pike F 145B

Le gradient de température est donné par

$$G = \frac{\Delta T}{4e} \frac{\lambda_V}{\lambda_C} \quad (6.9)$$

où e est l'épaisseur de chaque lame de verre, qui sont au nombre de 4, cf. figure 6.8, tandis que λ_V et λ_C sont respectivement les conductivités thermiques du verre et du cristal liquide. En pratique, $e = 1,1$ mm et $\lambda_V \sim 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Nous avons négligé ici l'influence des couches de glycérol et de cristal liquide car elle sont beaucoup plus fines que les plaques de verre — typiquement $25 \mu\text{m}$ dans les expériences.

Pour mesurer le rapport $\frac{\lambda_V}{\lambda_C}$, nous avons remplacé la couche supérieure de glycérol par une couche de 8OCB pur. Ce dernier présente une transition nématique-smectique A à la température $T_{AN} = 66,2^\circ\text{C}$. Cette transition est repérable au microscope. Elle peut donc être utilisée comme référence de température. La méthode pour mesurer le rapport des conductivités a donc consisté à faire varier les températures des bains, T_b et T_h , tout en maintenant la couche de 8OCB exactement à T_{AN} . Dans ces conditions, les températures des bains doivent satisfaire l'équation suivante :

$$T_b = \frac{4x+1}{x} T_{AN} - \frac{3x+1}{x} T_h \quad (6.10)$$

où $x = \frac{e}{d} \frac{\lambda_C}{\lambda_V}$. Ainsi, en mesurant comment T_b varie avec T_h , on peut en principe déduire le rapport des conductivités. Évidemment, lorsque la couche de cristal liquide est trop fine, $x \gg 1$, et la mesure n'est pas précise car la variation de T_b avec T_h devient indépendante de x . Pour cette raison, nous avons utilisé dans cette expérience une épaisseur de cristal liquide de $500 \mu\text{m}$ au lieu de $25 \mu\text{m}$.

Nos résultats expérimentaux sont représentés sur la figure 6.9. Le meilleur ajustement par l'équation (6.10) donne $x = 0,29$, ce qui entraîne

$$\frac{\lambda_V}{\lambda_C} \sim 7 \quad (6.11)$$

Après ces préliminaires, voyons maintenant comment mesurer le coefficient Lehmann.

6.2.2 Mesures

La première étape de la mesure est de repérer la température de compensation T_0 . Comme on connaît cette dernière $\pm 0,5^\circ\text{C}$, on commence par

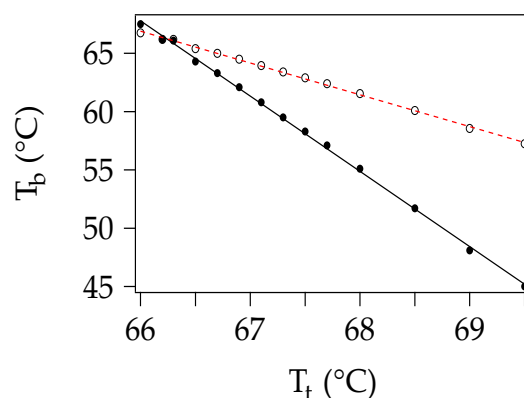


FIGURE 6.9 – Température du bain inférieur en fonction de la température du bain supérieur et le meilleur ajustement par l'équation (6.10). Les cercles vides donnent la température au centre de la cellule.

fixer les températures des fours à la température de compensation présumée. La cellule est traitée en ancrage glissant des deux côtés et l'une des lames de la cellule est recouverte de deux électrodes transparentes en ITO séparées par une bande large de 2 mm. Une différence de potentiel électrique est appliquée de part et d'autre de cette bande, créant un champ électrique parallèle aux lames de verre. Un fort champ électrique — correspondant typiquement à une tension de 500 V_{RMS} à 10 kHz — permet d'orienter le cristal liquide et de dérouler l'hélice cholestérique dans la région située entre les électrodes. Dans ces conditions, le cristal liquide apparaît noir entre polariseurs croisés lorsque le polariseur est parallèle au champ électrique. On coupe ensuite le champ électrique ; si la température est différente de T_0 , l'hélice se reforme et l'extinction n'est plus totale. En revanche, l'extinction persiste si la température est égale à T_0 , car le cristal liquide est spontanément déroulé à cette température. On détermine ainsi T_0 en cherchant la température pour laquelle l'extinction persiste après coupure du champ. Dans ces expériences, nous avons obtenu $T_0 = 57,8 \pm 0,1^\circ\text{C}$.

Une fois T_0 déterminée, la différence de température est progressivement augmentée tout en maintenant l'échantillon à une température moyenne égale à T_0 . Ce faisant, on observe que l'intensité lumineuse transmise entre les polariseurs croisés commence à osciller régulièrement dans le temps dès que le champ électrique est coupé. *Cette oscillation provient clairement de la rotation du directeur due à l'effet Lehmann.* Remarquons que l'intensité lumineuse oscille à une fréquence quatre fois plus grande que la fréquence de rotation du directeur, car elle passe par un minimum

chaque fois que le directeur est parallèle ou perpendiculaire à l'analyseur, soit quatre fois par tour. La figure 6.10 montre l'intensité en fonction du temps. Comme prévu, l'ajustement par une sinusoïde est très bon, ce qui indique que le directeur tourne de façon régulière sur les deux lames de verre.

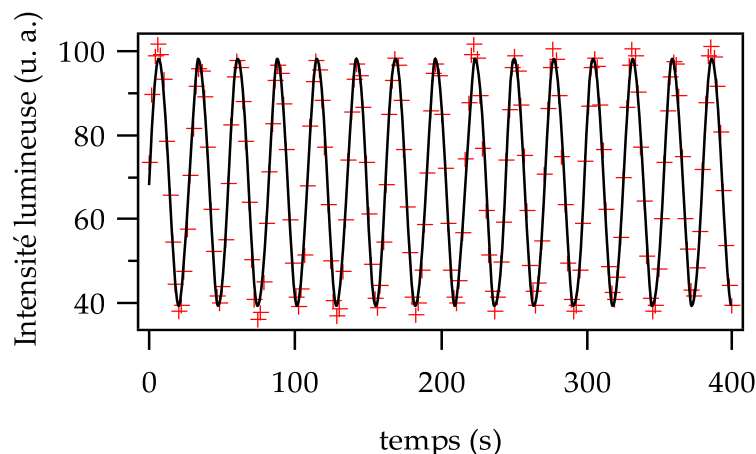


FIGURE 6.10 – Intensité mesurée entre polariseurs croisés en fonction du temps après avoir coupé le champ électrique. La ligne continue est le meilleur ajustement par une sinusoïde. $T = T_0$ et $\Delta T = 40^\circ\text{C}$. $d = 25\ \mu\text{m}$.

La figure 6.11 représente la vitesse angulaire ω du directeur en fonction de la différence de température ΔT . Ce graphe montre que la vitesse angulaire est proportionnel à ΔT , et donc à G . Enfin, nous avons mesuré ω en fonction de la température moyenne de l'échantillon, à ΔT constant. Les mesures sont reportées sur la figure 6.12

6.2.3 Valeur du coefficient Lehmann

La conclusion immédiate des observations précédentes est que la vitesse angulaire du directeur, et donc le coefficient Lehmann ne s'annulent pas à la température de compensation, contrairement à la torsion spontanée. Cela confirme par une mesure directe et éclatante le résultat des expériences statiques, à savoir que la présence de molécules chirales suffit à briser la symétrie miroir de la phase à l'échelle macroscopique. La légère augmentation de la vitesse de rotation avec la température peut avoir deux origines : une augmentation de l'efficacité du mécanisme à l'origine de l'effet Lehmann, ou la diminution de la viscosité rotationnelle, les deux mécanismes pouvant s'ajouter.

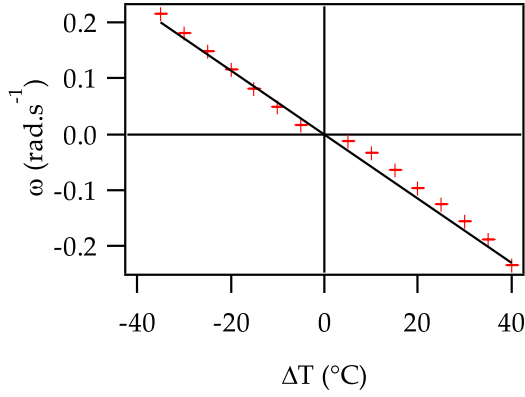


FIGURE 6.11 – Vitesse de rotation angulaire en fonction de la différence de température. $d = 25 \mu\text{m}$ et $T = T_0$.

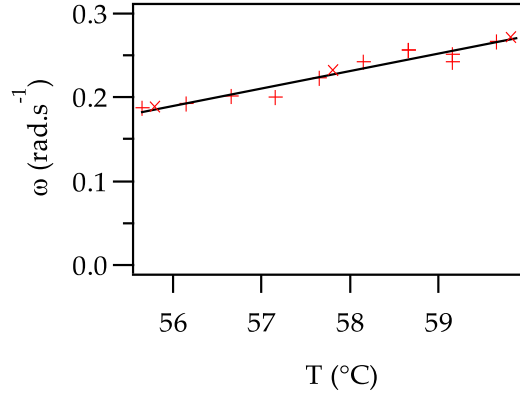


FIGURE 6.12 – Vitesse angulaire en fonction de la température moyenne de l'échantillon. $\Delta T = 40^\circ\text{C}$ Les différents symboles correspondent à différents échantillons d'épaisseur $d = 25 \mu\text{m}$.

Valeur absolue du coefficient Lehmann

Estimons à présent le coefficient Lehmann au point de compensation. L'équation d'évolution du directeur dans cette expérience est

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \nu G \quad (6.12)$$

Dans une « hélice » non déformée, $\varphi = q_0 z + \varphi_0(t)$. Pour satisfaire l'équation précédente, on doit avoir $\varphi_0(t) = \omega t$ avec

$$\omega = -\frac{\nu G}{\gamma_1} \quad (6.13)$$

En réalité, on doit compléter l'équation (6.12) par des conditions aux limites qui tiennent compte de la viscosité de surface γ_s . De plus, on peut prendre en compte la variation de la torsion avec la température dans l'épaisseur de l'échantillon, donc avec z . Dans ce cas, l'équation des couples en volume donne

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - K_2 \frac{\partial q_0}{\partial z} - \nu G \quad (6.14)$$

Les conditions aux limites sur les lames du bas, en $z = 0$ et du haut, en $z = d$, sont respectivement

$$\gamma_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - q_0(0) \right) \quad (6.15a)$$

$$\gamma_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - q_0(d) \right) \quad (6.15b)$$

La variation de la torsion spontanée avec z est due au gradient de température : $\frac{\partial q_0}{\partial z} = G \frac{dq_0}{dT}$ où l'on peut considérer en première approximation que $\frac{dq_0}{dT}$ est une constante. Dans ce cas, la solution des équations (6.14) et (6.15) est de la forme $\varphi(z, t) = A z^2 + B z + \omega t$ où A et B sont des constantes et

$$\omega = \frac{-\nu G}{\gamma_1 + 2 \frac{\gamma_s}{d}} \quad (6.16)$$

Cette expression montre que tenir compte de la viscosité de surface revient donc à remplacer γ_1 dans l'équation (6.13) par une viscosité effective $\gamma_1^* = \gamma_1 + 2 \frac{\gamma_s}{d}$. En revanche, la variation de la torsion spontanée avec la température n'intervient pas dans cette expression.

En utilisant les valeurs des viscosité mesurées précédemment, on en déduit, d'après les mesures de vitesses angulaires représentées sur la figure 6.12, que

$$\nu \approx 1 \times 10^{-7} \text{ kg K}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (6.17)$$

Cette valeur est deux à trois fois plus faible que celle trouvée par la méthode statique d'Éber et Jánossy. Cette différence peut provenir d'une surestimation du gradient de température. Notons que le rapport des conductivités thermiques a été mesuré à température plus haute que T_0 et dans un échantillon épais, donc mal orienté, ce qui entraîne une erreur supplémentaire. Par ailleurs, ce n'est pas le même échantillon de durcisseur qui a été utilisé pour mesurer la viscosité de surface et le coefficient Lehmann. Pour ces raisons, nous pensons que la valeur donnée ci-dessus n'est pas très précise — moins précise en tout cas que celle obtenue par la méthode statique — bien qu'elle donne le bon ordre de grandeur.

Signe du coefficient Lehmann

La simple observation des oscillations d'intensité lumineuse ne permet pas de savoir dans quel sens tourne le directeur. En revanche, la présence de défauts $\pm \frac{1}{2}$ dans l'échantillon peut être mise à profit pour

déterminer le signe de ν . En effet, le sens de rotation des branches d'extinction des disinclinaisons entre polariseurs croisés permet de déduire simplement le sens de rotation du directeur.

Calculons comment sont reliées les vitesses de rotation des branches d'extinction et du directeur. En désignant par ϑ l'angle polaire autour de la disinclinaison, l'orientation du directeur est donnée par

$$\varphi = m \vartheta + \omega t \quad (6.18)$$

où m est un demi-entier représentant le rang de la disinclinaison¹⁰. Choisissons comme origine des angles la direction du polariseur. Les branches d'extinction correspondent à $\varphi = 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$. Elles ont donc pour équation

$$\vartheta = \frac{1}{m} \left(-\omega t + n \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.19)$$

où n est un entier. La vitesse de rotation angulaire des branches d'extinction est donc $-\frac{\omega}{m}$.

Expérimentalement, la vitesse de rotation des branches des disinclinaisons de rang $-\frac{1}{2}$ est négative quand $G > 0$, cf. figure 6.13. On en déduit que la vitesse de rotation du directeur est également négative et que par conséquent, le coefficient Lehmann ν est positif.

Dans la section suivante, nous proposons une autre expérience mettant en évidence l'effet Lehmann thermique par une rotation continue du directeur.

6.3 Dérive des doigts cholestériques

La deuxième solution pour ne pas bloquer la rotation du directeur à la surface est d'utiliser un ancrage homéotrope. L'expérience décrite dans cette section est une preuve supplémentaire de la non annulation du coefficient Lehmann à la température de compensation. Le dispositif expérimental utilisé est le même que celui de la section précédente, mais cette fois, nous allons travailler avec des cellules traitées en ancrage homéotrope. L'expérience décrite ci-après a donné lieu à une publication [Oswo8c].

6.3.1 Rappels sur les doigts cholestériques

Lorsqu'un cholestérique est confiné entre deux plaques traitées en ancrage homéotrope, il ne peut pas prendre sa structure naturelle en hé-

10. Si on fait un tour autour de la disinclinaison, le directeur tourne de m tours.

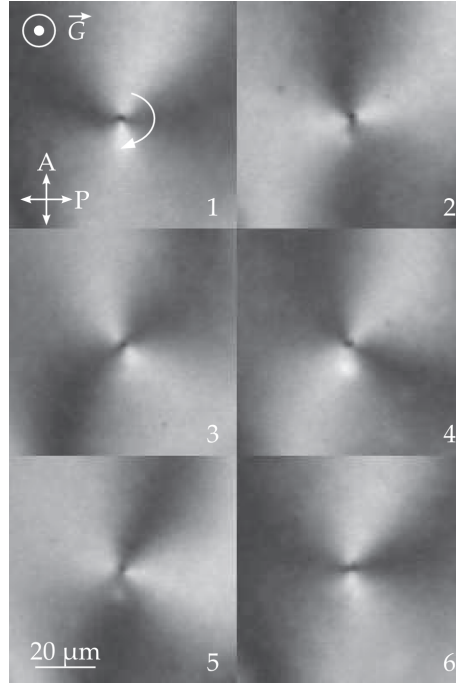


FIGURE 6.13 – Les deux branches d’extinction de cette disinclinaison de rang $-\frac{1}{2}$ tournent dans le sens des aiguilles d’une montre quand le gradient de température est positif. L’intervalle de temps entre deux images est de 11 s. $T = T_0$ et $\Delta T = 38,5^\circ\text{C}$.

lice. Pour satisfaire les conditions aux limites tout en étant torsadé dans l’épaisseur, le système doit subir en plus des déformations en flexion et en éventail, qui lui coûtent de l’énergie. Si la torsion spontanée est faible, le pas est grand par rapport à l’épaisseur de l’échantillon et la configuration stable du directeur est uniformément perpendiculaire aux lames de verres, comme dans un nématique. La torsion est alors nulle partout. En revanche, lorsque le produit $q_0 d$ est grand ¹¹, la configuration précédente est instable. Le système gagne davantage d’énergie en se torsadant qu’il ne lui en coûte pour se déformer en flexion et en éventail. La structure du champ de directeurs est alors complexe, et prend la forme d’objets allongés, appelés doigts cholestériques. Nous avons déjà mentionné qu’il existe plusieurs espèces de doigts qui diffèrent notamment par leurs symétries. Nous ne nous intéresserons qu’aux doigts de première espèce, appelés CF1, dont la structure est représentée sur la figure 6.14 [Oswoo].

Rappelons encore qu’il existe un rapport de confinement $q_0 d = C^*$ tel que la configuration déroulée et les doigts ont la même énergie. Dans ce cas, des doigts isolés peuvent coexister avec l’état déroulé. En pratique, dans notre mélange compensé, il existe donc pour chaque épaisseur d’échantillon deux valeurs de la température, de part et d’autre de T_0 , qui satisfont ce critère. Notons que la moindre variation de tempé-

11. typiquement, supérieur à 2π .

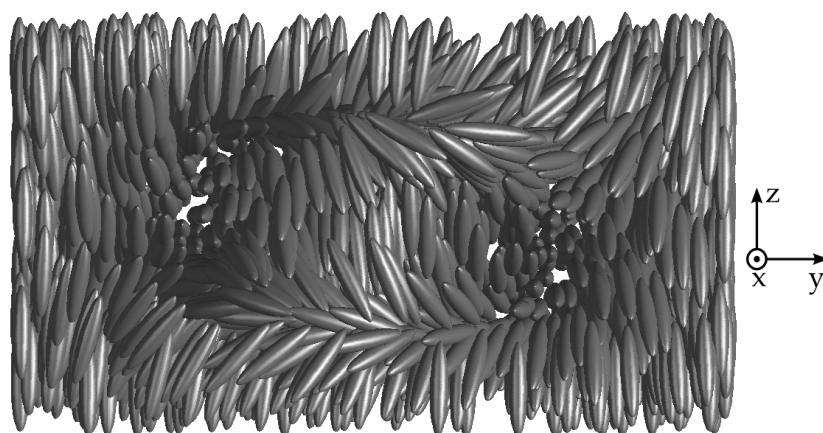


FIGURE 6.14 – Représentation de la structure d'un CF1. Cette structure ne comporte pas de disinclinaison. L'axe du doigt est perpendiculaire à l'image. Les CF1 sont invariants par rotation de π autour de leur axe. Remarquons qu'au milieu de l'échantillon et dans la direction perpendiculaire à l'axe du doigt, la structure se rapproche de celle d'une hélice presque parfaite.

rature favorise soit les doigts, soit l'état uniformément déroulé, ce qui se traduit par un allongement ou un raccourcissement des doigts. Il est donc expérimentalement important de se placer le plus près possible de la température d'équilibre. Notons enfin que les CF1 se terminent par deux bouts qui ne sont pas identiques, l'un étant arrondi et l'autre pointu. Ces doigts sont donc orientés.

6.3.2 Vitesse et sens de la dérive

Gil et Thiberge ont montré que l'effet Lehmann pouvait provoquer une dérive des CF1 perpendiculairement à leur axe, dans un champ électrique continu [Gil97]. Évidemment, l'effet Lehmann thermique peut, de la même manière, entraîner une dérive.

Rappelons le principe et le résultat de leur démonstration que nous avons simplifiée. La configuration du directeur est invariante par translation le long de l'axe du doigt cholestérique, x . On cherche une solution de l'équation des couples telle que la configuration du directeur soit à chaque instant identique à elle-même mais translatée selon y à la vitesse constante v .

Dans ce cas, l'énergie élastique par unité de longueur suivant l'axe du

doigt est constante, ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF_e}{dt} = \frac{d}{dt} \iint f_e \, dy \, dz = \iint \frac{\partial f_e}{\partial t} \, dy \, dz \\ &= \iint \frac{\delta f_e}{\delta \vec{n}} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \, dy \, dz = - \iint \vec{h}_{\text{mol}} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \, dy \, dz \end{aligned} \quad (6.20)$$

Or l'équation des couples est, cf. chapitre 2

$$\gamma_1 \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \vec{h}_{\text{mol}} \perp + \nu \, \vec{n} \times \vec{G} \quad (6.21)$$

Comme $\vec{n}$ est unitaire, $\iint \vec{h}_{\text{mol}} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \, dy \, dz = \iint \vec{h}_{\text{mol}} \perp \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \, dy \, dz$. Multiplier scalairement l'équation (6.21) par $\frac{\partial \vec{n}}{\partial t}$ et intégrer sur l'espace conduit donc, d'après l'équation (6.20), à

$$\begin{aligned} \gamma_1 \iint \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \right)^2 \, dy \, dz &= \nu \iint \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \cdot (\vec{n} \times \vec{G}) \, dy \, dz \\ &= \nu \, \vec{G} \cdot \iint \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \times \vec{n} \, dy \, dz \end{aligned} \quad (6.22)$$

Si le doigt avance à vitesse v dans la direction y , on a

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = -v \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \quad (6.23)$$

En reportant dans l'équation (6.22), il vient que la vitesse de dérive vaut

$$v = A \frac{\nu \, G}{\gamma_1} d \quad (6.24)$$

où A est un facteur géométrique sans dimension ne dépendant que de la topologie du doigt et valant

$$A = \frac{1}{d} \, \vec{e}_z \cdot \frac{\iint \vec{n} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \, dy \, dz}{\iint \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \right)^2 \, dy \, dz} \quad (6.25)$$

Notons que dans un calcul limité à l'ordre 1 en G , il convient de faire les intégrales précédentes sur le champ de directeurs à l'équilibre. L'équation (6.24) montre que la vitesse de dérive est proportionnelle au produit $\nu \, G$, comme on pouvait l'attendre d'un couplage linéaire.

Remarquons aussi que, du fait que les CF1 sont orientés, les doigts représentés sur la figure 6.15 ne dérivent pas dans le même sens dans le même gradient de température. On peut retrouver ce résultat d'après l'équation (6.25). En effet, tourner un doigt de π autour de z est équivalent à faire la transformation $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $n_x \rightarrow -n_x$, et $n_y \rightarrow -n_y$. Cette transformation change A en $-A$, donc la vitesse change de signe comme prévu.

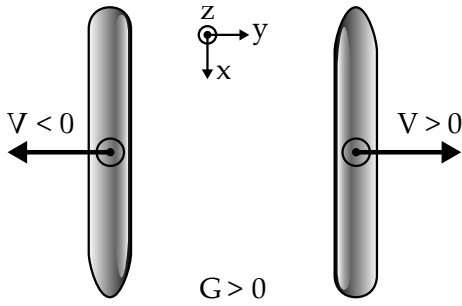


FIGURE 6.15 – Les deux doigts se transforment l'un en l'autre par une rotation de π autour de z . Ils dérivent dans deux directions opposées sous l'action du même gradient de température.

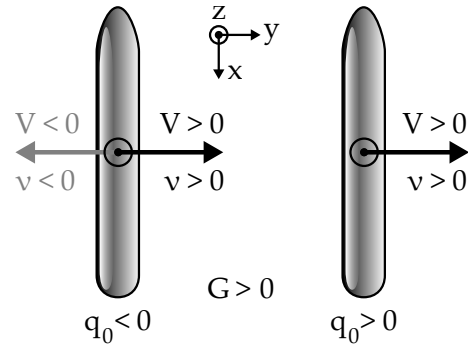


FIGURE 6.16 – CF1 gauche et droit orientés dans la même direction. Les doigts dérivent dans la même direction quel que soit q_0 si v ne change pas de signe, tandis qu'ils dérivent dans des directions opposées si v change de signe en même temps que q_0 .

Voyons à présent ce qu'il arrive à un CF1 quand la torsion spontanée change de signe. Cette situation est représentée sur la figure 6.16. À gauche, il s'agit d'un doigt cholestérique gauche, $q_0 < 0$, et à droite, d'un doigt cholestérique droit, $q_0 > 0$. Puisque ces deux doigts sont symétriques par rapport au plan xz , on passe de l'un à l'autre par la transformation $y \rightarrow -y$ et $n_y \rightarrow -n_y$. Or A ne change pas de signe sous cette transformation. Par conséquent, le signe de v , donc le sens de la dérive, dépend seulement du signe de v et pas du signe de la torsion. Les doigts cholestériques doivent donc dériver dans le même sens de part et d'autre de la température de compensation si v ne change pas de signe, ou dans des sens opposés si v change de signe. Dans la suite, nous allons utiliser ce critère pour vérifier que le coefficient Lehmann ne change pas de signe à la température T_0 .

6.3.3 Mesure de la vitesse de dérive

Venons en maintenant aux expériences.

Expérimentalement, les CF1 n'ont pas toujours la forme simple que l'on a décrite jusqu'à présent. Ils peuvent être ramifiés. Dans ce cas, les ramifications se terminent toujours par des bouts ronds. De plus, le bout pointu peut se connecter à un autre CF1, soit sur le côté, soit par un bout rond de ce dernier. C'est d'ailleurs pour cette raison que les CF1 peuvent se refermer sur eux-mêmes pour former des boucles orientées. Si le rayon d'une telle boucle diminue trop, elle peut conduire par une transformation irréversible à une « sphérulite » de laquelle peuvent éventuellement partir des ramifications si l'on essaye de la faire grandir de nouveau [Pir93].

En pratique, les CF1 isolés qui dérivent perpendiculairement à leur axe finissent inévitablement par former des spirales. Cela a déjà été montré lorsqu'ils dérivent sous champ électrique [Pir96]. La dérive transverse se traduit dans ce cas par une rotation de la spirale. Plusieurs types de spirales peuvent se former : des spirales simples avec le bout rond au centre et le bout pointu à l'extérieur, ou des spirales à plusieurs branches avec des bouts ronds à l'extérieur connectées à une sphérulite ou à une boucle, généralement accrochée à une particule de poussière.

La figure 6.17 montre une spirale triple connectée à une sphérulite. Dans cet exemple, le gradient de température est positif et la température de l'échantillon est supérieure à T_0 , de sorte que la torsion spontanée du mélange est positive. Du sens de rotation de la spirale, on déduit que ν est positif au-dessus de T_0 . La figure 6.18 montre que deux spirales dans le même échantillon, à la même température mais pour des gradients de température opposés tournent dans deux directions opposées, en accord avec l'équation (6.24). La variation de la vitesse de dérive avec la différence de température des fours est représentée sur la figure 6.19. On observe que la vitesse de dérive des doigts est proportionnelle à ΔT , donc à G , conformément à la théorie.

Comparons maintenant le sens de dérive pour des températures choisies de part et d'autre de T_0 . La figure 6.20 montre deux spirales simples observées dans le même échantillon, pour le même gradient de température à des températures supérieure et inférieure à T_0 . On voit que les deux spirales tournent dans le même sens bien que la torsion spontanée ait changé de signe. La vitesse de dérive mesurée rapportée à l'épaisseur et à la différence de température entre les fours est représentée sur la figure 6.21. Rappelons que l'on ne peut observer des doigts isolés que pour un rapport de confinement $q_0 d$ bien précis, égal à C^* . De ce fait,

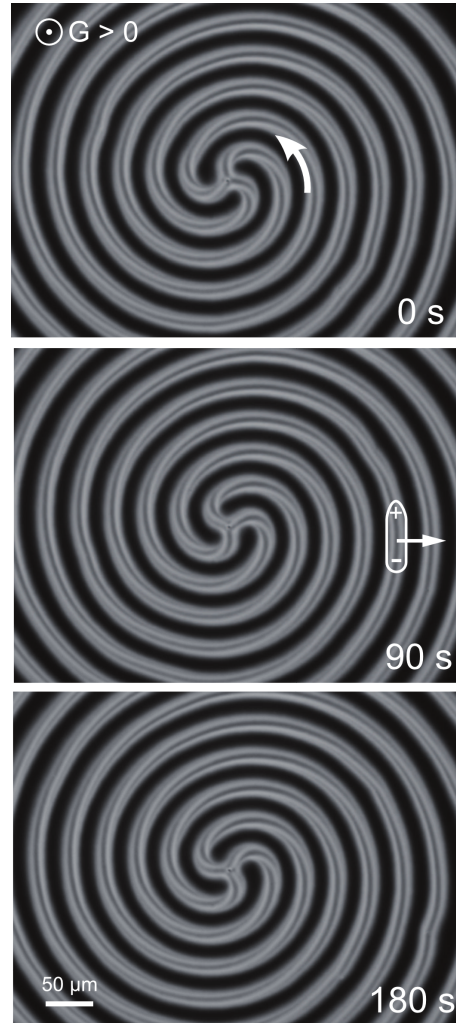


FIGURE 6.17 – Spirale triple tournant en sens inverse des aiguilles d’une montre à $T = 60,8^\circ\text{C} > T_0$, $d = 10\ \mu\text{m}$, $\Delta T = 36,6^\circ\text{C}$.

pour mesurer la vitesse de dérive à différentes températures, il faut faire des échantillons d’épaisseurs différentes. Les épaisseurs que nous avons utilisées sont 10, 25 et 40 μm .

6.3.4 Estimation du coefficient Lehmann et conclusion

L’inconvénient de ces expériences est qu’elles ne permettent pas de mesurer le coefficient Lehmann exactement à T_0 car les doigts ne peuvent exister que si $q_0 \neq 0$. Cependant, elles montrent que le sens de dérive des doigts cholestériques est le même de part et d’autre de la température de

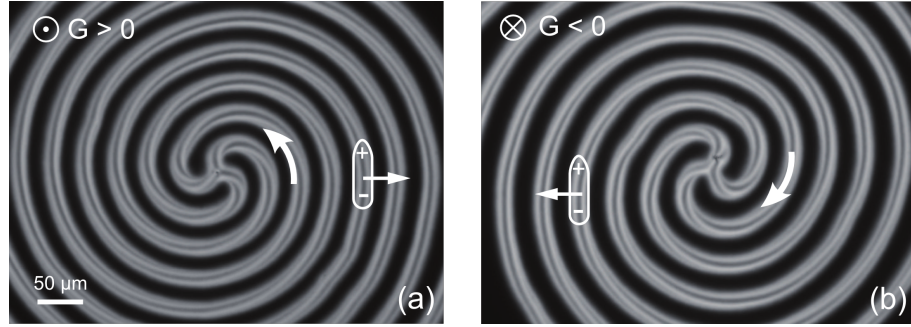


FIGURE 6.18 – Deux spirales triples tournant en sens opposés à $T = 60,8^\circ\text{C} > T_0$, $d = 10 \mu\text{m}$. (a) $\Delta T = 36,6^\circ\text{C}$, (b) $\Delta T = -43,6^\circ\text{C}$.

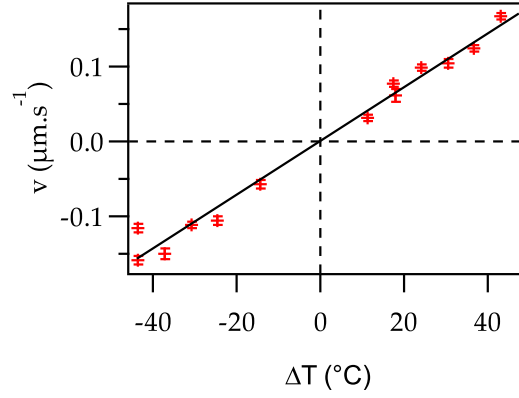


FIGURE 6.19 – Vitesse de dérive perpendiculaire à l'axe en fonction de la différence de température entre les deux fours. $d = 10 \mu\text{m}$, $T = 60,8^\circ\text{C} > T_0$.

compensation. Cela prouve une nouvelle fois que le coefficient Lehmann ne change pas de signe à cette température et que par conséquent, la phase reste chirale à cette température.

Essayons de déduire des mesures que nous avons faites une estimation de v . D'après (6.24)

$$\frac{v}{d \Delta T} = A \frac{v}{\gamma_1} \frac{G}{\Delta T} \quad (6.26)$$

L'extrapolation des mesures de la courbe figure 6.21 à la température T_0 donne $\frac{v}{d \Delta T} = 2,2 \pm 0,5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$. L'augmentation de cette quantité avec la température peut s'expliquer par l'augmentation de v ou la diminution de γ_1 .

La constante A a été calculée numériquement par Gil et Thiberge. Ils ont trouvé $A = 0,14$.

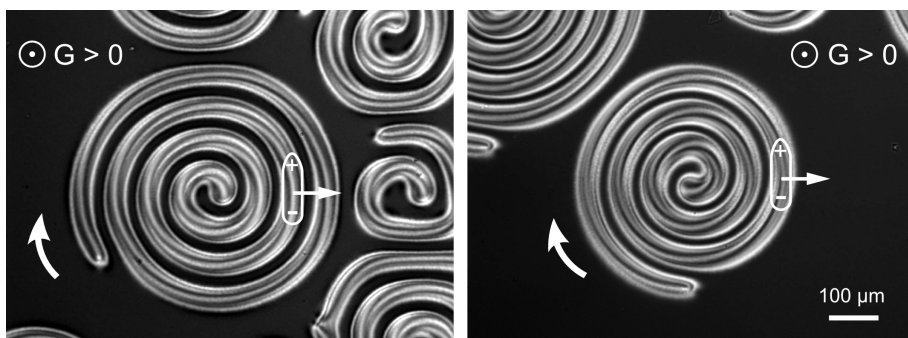


FIGURE 6.20 – Deux spirales simples tournant dans le même sens observées dans un échantillon de $25\ \mu\text{m}$ soumis à un gradient de température positif : $\Delta T = 47,2^\circ\text{C}$. À gauche, $T = 58,9^\circ\text{C} > T_0$, à droite, $T = 56,4^\circ\text{C} < T_0$.

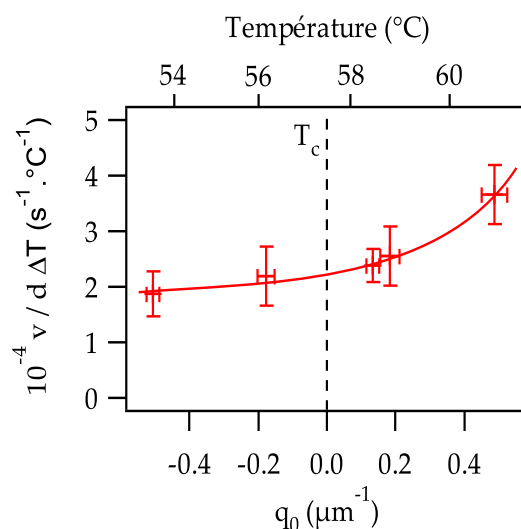


FIGURE 6.21 – Vitesse de dérive divisée par l'épaisseur et la différence de température en fonction de la torsion spontanée, échelle du bas, ou de la température, échelle du haut. Cette quantité est proportionnelle au coefficient Lehmann. Les mesures correspondent à des épaisseurs d de 10, 25 et $40\ \mu\text{m}$.

En ce qui concerne le rapport $\frac{G}{\Delta T}$, on peut l'estimer connaissant le rapport de conductivités du verre et du cristal liquide et les épaisseurs des lames. On obtient, en négligeant l'influence de la couche de cristal liquide, $\Delta T = d^* G$ avec $d^* = 1,1 \pm 0,2\ \text{mm}$.

Avec ces valeurs et en supposant que la valeur de A soit exacte, on

calcule $\frac{\nu}{\gamma_1} = 1,7 \pm 0,7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1} \text{ m}$ et finalement, sachant que $\gamma_1 = 0,075 \pm 0,009 \text{ Pa s}$,

$$\nu = 1,3 \pm 0,9 \times 10^{-7} \text{ kg K}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (6.27)$$

Cette valeur est, là aussi deux fois plus faible que celle obtenue par la méthode statique d'Éber et Jánossy. Néanmoins, il faut remarquer que nous ne connaissons pas la valeur exacte de la constante A pour notre mélange. En effet, les rapports des constantes élastiques utilisés par Gil et Thiberge dans leur calcul numérique sont différents de ceux trouvés dans notre cristal liquide, ce qui devrait changer la valeur de A , mais pas son ordre de grandeur. En outre, les vitesses de dérive sont peut-être légèrement sous-estimées car les doigts ne sont pas rectilignes dans les spirales, ce qui pourrait ralentir leur propagation. Pour ces raisons, il convient de considérer cette estimation du coefficient Lehmann comme donnant seulement un bon ordre de grandeur.

Dans la section suivante, nous montrons comment reproduire l'expérience initiale de Lehmann avec notre matériau. Cela nous conduira à une estimation du coefficient Lehmann au point de fusion, une quantité inaccessible par les méthodes présentées jusqu'à présent.

6.4 Rotation des gouttes cholestériques

6.4.1 Description de l'expérience

Pour finir, nous nous sommes attelés à reproduire l'expérience originale de Lehmann, à savoir la rotation de la texture de gouttes de cristal liquide cholestérique, ce qui a donné lieu à la publication d'un article [Oswo8b]. Le dispositif expérimental utilisé pour créer le gradient de température et observer l'échantillon est le même que dans les deux expériences précédentes.

Dans le mélange 8OCB/CC que nous avons utilisé, la transition cholestérique-isotrope a lieu sur quelques dixièmes de degrés. Dans cette plage de température, les deux phases coexistent. Près du *liquidus*, la phase cholestérique forme des gouttes isolées dans la phase isotrope. Dans un gradient de température, les gouttes sont plaquées contre la lame la plus froide de la cellule. Si la lame est traitée en ancrage planaire glissant, l'effet Lehmann entraîne la rotation de la texture rayée des gouttes, cf. figure 6.22.

Notons que c'est la première fois que l'expérience de Lehmann est reproduite, bien que la texture des gouttes soit différente dans notre cas.

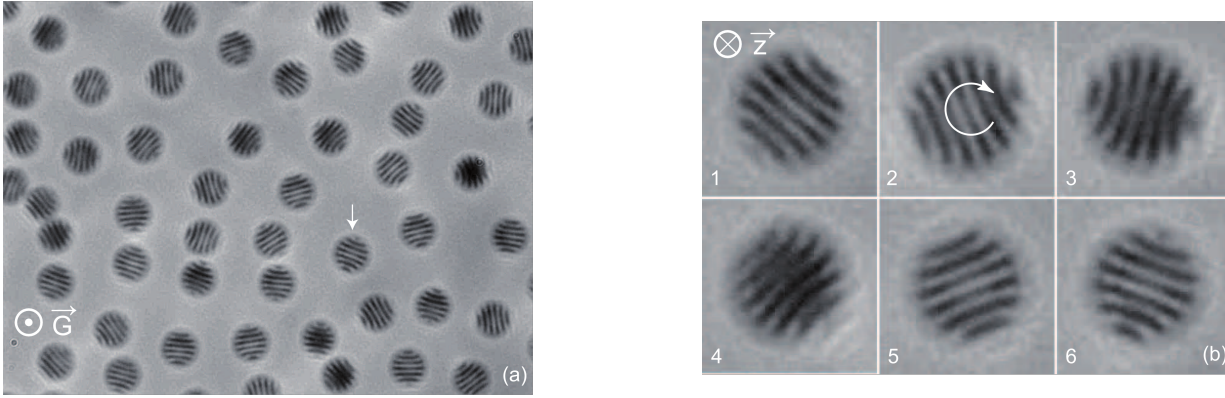


FIGURE 6.22 – Gouttes observées en lumière naturelle, sans polariseur ni analyseur. (b) Séquence d’images montrant la rotation de la goutte marquée par une flèche sur (a). Pour ce gradient de température, toutes les gouttes tournent dans le même sens. $\Delta T = -6,3^\circ\text{C}$, diamètre $D \approx 12,5 \mu\text{m}$ et vitesse angulaire $\omega = 0,024 \text{ rad s}^{-1}$. Remarquons que les gouttes sont remarquablement monodisperses.

Cette expérience nous donnera aussi des informations quantitatives qui font défaut dans le travail de Lehmann.

6.4.2 Mesure de la vitesse de rotation

Nous avons vérifié expérimentalement que le sens de rotation de la texture des gouttes s’inverse quand on renverse le gradient de température, en accord avec un effet linéaire.

Pour mesurer la vitesse de rotation, nous avons légèrement défocalisé le microscope pour ne pas être gênés par la présence des bandes et nous avons placé un polariseur avant l’entrée de la cellule. Dans ces conditions les gouttes apparaissent comme des tâches sombres ou claires, selon l’orientation des bandes par rapport au polariseur¹². Nous enregistrons ensuite une séquence d’images de plusieurs gouttes pendant plusieurs périodes de rotation, cf. figure 6.23.

À Partir de cette séquence d’images, nous calculons la fonction d’auto-corrélation

$$C(t) = \sum_{i=1}^N I_i(0) I_i(t) \quad (6.28)$$

où la somme porte sur les N pixels de l’image et où $I_i(t)$ est l’intensité

12. Les gouttes apparaissent claires quand les bandes sont parallèles au polariseur.

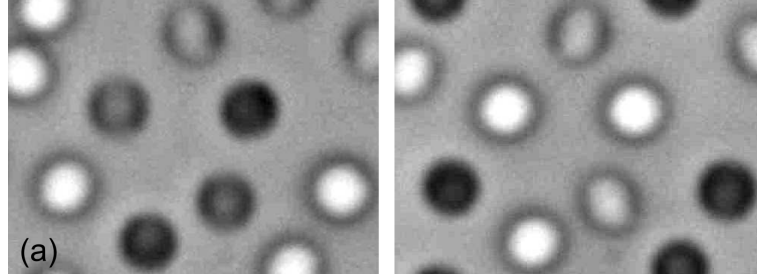


FIGURE 6.23 – Gouttes observées en lumière polarisée après défocalisation. Elles apparaissent comme des ronds blancs ou noirs suivant l’orientation des bandes par rapport au polariseur.

du $i^{\text{ème}}$ pixel. Notons que l’intensité de chaque image a été préalablement normalisée pour que $\sum_{i=1}^N I_i(t) = 0$. Cette fonction d’autocorrélation est représentée sur la figure 6.24. Elle oscille avec une fréquence double de la fréquence de rotation de la texture puisque l’alignement des bandes avec le polariseur se produit deux fois par tour. On peut ainsi déduire la vitesse angulaire de la texture des gouttes. Notons que la perte de corrélation peut être due au déplacement, à la coalescence ou à la nucléation de nouvelles gouttes. La dispersion des vitesses de rotation entraîne aussi une décorrélation.

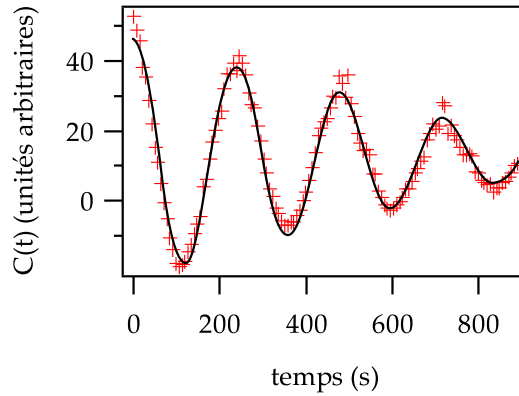


FIGURE 6.24 – Fonction d’autocorrélation $C(t)$. Sa fréquence est le double de la fréquence de rotation de la texture. La ligne continue est un ajustement par une fonction cosinus dont l’amplitude décroît linéairement avec le temps. $\Delta T = -2,7^\circ\text{C}$.

Pour étudier l’influence de la taille des gouttes sur la vitesse de rotation, on peut changer la température moyenne de l’échantillon de quelques

centièmes de degrés tout en maintenant constant le gradient de température. De cette façon, il est possible de changer le diamètre des gouttes typiquement entre 3 et 10 μm . Dans cette plage de diamètres, les gouttes sont bien séparées et bien visibles au microscope. En revanche, nous n'avons pas pu faire de mesures sur des gouttes plus grosses car elles coalescent et nucléent en permanence. Sur la figure 6.25, la période de rotation est tracée en fonction du diamètre des gouttes D pour un gradient de température intermédiaire correspondant à $\Delta T = -14,65^\circ\text{C}$. Cette courbe montre que la période de rotation augmente systématiquement avec la taille des gouttes et peut être ajustée par une loi du type $a + b D^2$. Cette dépendance sera justifiée au paragraphe suivant. L'ajustement donne

$$a = 1,8 \pm 0,8 \text{ s} \quad (6.29a)$$

$$b = 0,64 \pm 0,02 \text{ s } \mu\text{m}^2 \quad (6.29b)$$

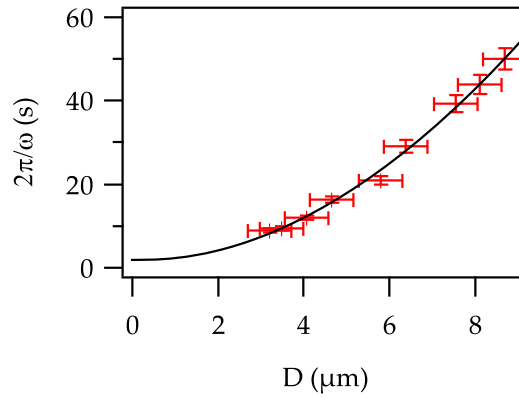


FIGURE 6.25 – Période de rotation de la texture des gouttes en fonction de leur diamètre. $\Delta T = -14,65^\circ\text{C}$.

Pour étudier l'influence du gradient de température sur la vitesse de rotation, il est difficile de travailler à taille de goutte constante. Expérimentalement, plus le gradient est important, plus les gouttes sont petites. Nous avons donc fait les mesures sans nous soucier de la taille des gouttes, pourvu qu'elles soient bien séparées et assez monodisperses. Nous avons ensuite normalisé la fréquence de rotation d'après la mesure précédente en fonction du diamètre. Sur la figure 6.26 nous avons tracé $\frac{\omega}{2\pi} (a + b D^2)$. Cette courbe expérimentale est bien ajustée par une loi linéaire.

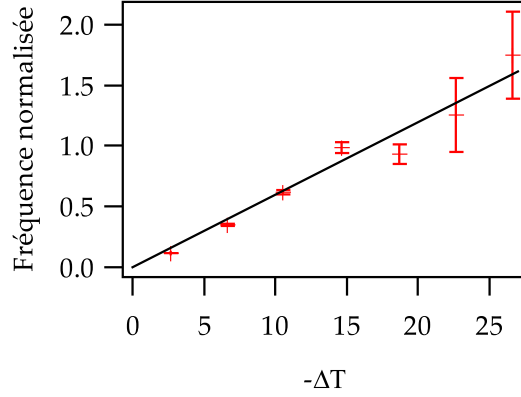


FIGURE 6.26 – Fréquence de rotation des gouttes normalisée à $\Delta T = -14,65^\circ\text{C}$ en fonction de la différence de température.

6.4.3 Expression théorique de la vitesse de rotation

La méthode utilisée pour trouver l'expression de la vitesse de dérive des CF1 peut se transposer directement ici. On a déjà montré au paragraphe 6.3.2 que

$$\gamma_1 \iint \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \right)^2 dy dz = \nu \vec{G} \cdot \iint \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \times \vec{n} dy dz \quad (6.30)$$

pour une structure qui se translate sans se déformer. Dans le cas de la rotation d'une structure tridimensionnelle, cette équation devient simplement

$$\gamma_1 \iiint \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \right)^2 dx dy dz = \nu \vec{G} \cdot \iiint \frac{\partial \vec{n}}{\partial t} \times \vec{n} dx dy dz \quad (6.31)$$

Dans le cas d'une rotation à vitesse angulaire ω autour de z , on a de plus

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \omega \vec{e}_z \times \vec{n} - \omega \frac{\partial \vec{n}}{\partial \vartheta} \quad (6.32)$$

où ϑ est l'angle polaire repérant une orientation autour de l'axe z . On en déduit

$$\omega = -B \frac{\nu G}{\gamma_1} \quad (6.33)$$

avec B une constante sans dimension qui ne dépend que de la configura-

tion du directeur dans la structure en rotation, telle que

$$\frac{1}{B} = 1 + \frac{\iiint \left[\vec{e}_z \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \theta} \times \vec{n} + \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial \theta} \right)^2 \right] dx dy dz}{\iiint \left[\vec{e}_z \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \theta} \times \vec{n} + 1 - (\vec{e}_z \cdot \vec{n})^2 \right] dx dy dz} \quad (6.34)$$

Dans la limite des faibles gradients de température, on peut calculer B en considérant que la configuration du champ de directeurs n'est pas modifiée par la présence du gradient de température. L'équation (6.33) montre que la vitesse angulaire doit être proportionnelle au gradient de température, en accord avec les expériences.

Pour estimer le coefficient B , nous proposons un modèle basique de la configuration du directeur dans les gouttes. Comme les gouttes sont soumises à un gradient de température, on supposera qu'elles sont aplaties¹³ et au contact de la lame de verre la plus froide. Nous la modélisons donc par un cylindre de diamètre D et de hauteur h . Sur la face du cylindre au contact de la lame froide, située en $z = 0$ lorsque $G > 0$, l'ancrage est planaire glissant. Sur l'autre face du cylindre, au contact avec le liquide isotrope, en $z = h$, la texture en bandes indique que l'ancrage est plutôt homéotrope¹⁴, ce que nous allons supposer à partir de maintenant. Dans ces conditions, le directeur prend la configuration suivante [Baug6] :

$$\begin{aligned} n_x &= \cos \beta \sin \gamma \sin ky - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos ky + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ n_y &= -\sin \beta \sin \gamma \sin ky - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \cos ky + \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ n_z &= \sin \alpha \sin \gamma \cos ky + \cos \alpha \cos \gamma \end{aligned} \quad (6.35)$$

où $\beta = -\frac{q_0 h}{K_3/K_2}(\frac{z}{h} - \frac{1}{2})$, $\alpha = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{z}{h})$ et $\gamma = \epsilon \sin(\pi \frac{z}{h})$, avec $\epsilon \ll 1$. Cette configuration correspond à une modulation du TIC d'amplitude ϵ et de vecteur d'onde k suivant l'axe y .

Le calcul de la vitesse de rotation à l'ordre 2 en ϵ donne

$$-\frac{\nu G}{\gamma_1 \omega} = 1 + \frac{1}{16} k^2 \epsilon^2 D^2 \quad (6.36)$$

13. De la même façon, les gouttes macroscopiques dans le champ de pesanteur sont aplaties.

14. Si l'ancrage était planaire, le cholestérique pourrait prendre sa configuration spontanée en hélice, invariante par translation parallèlement aux lames de verre et on ne verrait aucune texture particulière.

Ce résultat est compatible avec la dépendance observée de la période de rotation avec la taille des gouttes car, en pratique, le contraste et la période des bandes ne changent pas avec le diamètre des gouttes, ce qui suggère que k et ϵ sont constants. On peut facilement interpréter la diminution de la vitesse de rotation quand le diamètre augmente, d'après l'équation (6.32). Dans une structure en bandes, la vitesse de rotation du directeur peut être plus grande que la vitesse de rotation de la texture à cause du terme $-\omega \partial \vec{n} / \partial \theta \sim r \omega k$, où r est la distance au centre de la goutte. Plus on s'éloigne du centre, plus ce terme devient prépondérant par rapport au terme $\omega \vec{e}_z \times \vec{n}$. La dissipation visqueuse est donc plus importante dans une goutte plus large ou qui possède une structure plus resserrée — grande valeur de k . En conséquence, la rotation est plus lente.

Le résultat (6.36) prévoit en revanche que ni l'épaisseur des gouttes ni le rapport K_3/K_2 ne détermine directement la vitesse de rotation¹⁵.

Notons enfin que ce modèle néglige le rôle de la viscosité de surface qui devrait ralentir la rotation. Nous avons aussi supposé qu'il n'y avait pas d'écoulement. La rotation du directeur peut en effet générer un écoulement appelé *backflow* qui peut diminuer la dissipation et par conséquent augmenter la vitesse de rotation.

6.4.4 Estimation du coefficient Lehmann

On peut estimer le coefficient Lehmann à partir de l'extrapolation à diamètre nul de la période de rotation. Dans cette limite, le directeur tourne à la vitesse de la texture car $\partial \vec{n} / \partial t \rightarrow \omega \vec{e}_z \times \vec{n}$. Donc on retrouve simplement

$$\omega = -\frac{\nu G}{\gamma_1} \quad (6.37)$$

Notons que le *backflow* disparaît également dans cette limite.

L'ajustement des mesures à $\Delta T = -14,65^\circ\text{C}$ par une parabole, cf. figure 6.25, a donné $\omega \rightarrow 3,5 \pm 1,6 \text{ rad s}^{-1}$. Cette différence de température correspond à un gradient estimé à $G = 26^\circ\text{C mm}^{-1}$ compte tenu de l'épaisseur des lames de verre et du rapport des conductivités thermiques.

On déduit de ces valeurs que

$$\frac{\nu}{\gamma_1} = 1,3 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (6.38)$$

15. Indirectement, h et K_3/K_2 peuvent modifier le vecteur d'onde et l'amplitude de la structure en bandes.

Ici encore, les incertitudes sur la valeur extrapolée de ω et la valeur du gradient de température ne permettent pas d'estimer ce rapport avec précision.

Cependant, le même rapport calculé en prenant les valeurs de ν et γ_1 mesurées à T_0 donne $\frac{\nu}{\gamma_1} = 3,7 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1} \text{ K}^{-1}$, soit une valeur environ 40 fois plus petite que celle que nous venons de trouver à la transition cholestérique isotrope ! Dans les expériences précédentes, nous avons déjà noté une tendance à l'augmentation de l'effet Lehmann avec la température sur quelques degrés autour du point de compensation. À la température de transition avec l'isotrope cette augmentation semble beaucoup plus importante. Il est connu que la viscosité rotationnelle γ_1 chute à cette température, mais un facteur de l'ordre de 40 paraît singulièrement grand [Kne82]. Il est donc probable que le mécanisme microscopique à l'origine du couple Lehmann soit plus efficace à plus haute température. On peut imaginer par exemple que le gradient de paramètre d'ordre S joue un rôle important dans ce mécanisme. Or le paramètre d'ordre décroît de plus en plus vite quand on approche de la transition avec l'isotrope, ce qui pourrait expliquer une augmentation du couple Lehmann.

Conclusion

*Non fa scienza senza lo ritenere,
avere inteso.*

DANTE, La Divina Commedia

Nous nous étions fixé comme objectifs d'estimer par l'expérience l'ordre de grandeur du coefficient Lehmann dans les cristaux liquides cholestériques et de résoudre le paradoxe des expériences apparemment contradictoires d'Éber et Jánossy d'une part, et de Padmini et Madhusudana d'autre part.

Nous avons montré que le signal mesuré dans l'expérience de Padmini et Madhusudana ne peut être dû à l'effet Lehmann électrique et que la flexo-électricité permet au contraire d'interpréter toutes les observations. Cette expérience permet donc seulement de mesurer la différence e_a des coefficients flexo-électriques et ne permet en aucune manière de mettre en évidence l'annulation du coefficient Lehmann à la température de compensation d'un cholestérique compensé. De façon plus générale, aucune expérience faite à ce jour ne prouve indubitablement l'existence de l'effet Lehmann électrique prévu par de Gennes.

Le principal argument de Pleiner et Brand, qui s'appuie sur les travaux sous champ électrique de Madhusudana et ses collaborateurs pour s'opposer à la conclusion d'Éber et Jánossy n'est donc pas recevable. Pour cette raison, nous avons aussi reproduit et développé l'expérience de ces derniers dans notre mélange pour finalement aboutir à la même conclusion qu'eux : le coefficient Lehmann thermique n'est pas nul à la température de compensation. Nos mesures à la température de compensation conduisent à

$$\nu = (2,8 \pm 0,6) \times 10^{-7} \text{ kg K}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

La conclusion qui s'impose est donc qu'un cholestérique compensé est différent de son image dans un miroir. Il est donc chiral à l'échelle

macroscopique bien qu'il ne possède pas de torsion spontanée. On pourrait tenter de reproduire l'expérience d'Éber et Jánossy dans un mélange énantiomère du nôtre. On devrait alors mesurer une torsion spontanée et un coefficient Lehmann opposés. Malheureusement, on ne dispose pas de la molécule miroir du chlorure de cholestéryle pour vérifier cette prédiction.

La présence de molécules chirales dans les cholestériques compensés est donc suffisante pour briser la symétrie miroir de la phase¹⁶, ce qui engendre des effets mesurables à l'échelle macroscopique même si son champ de directeurs à l'équilibre n'est pas chiral puisqu'il n'a pas de structure en hélice¹⁷.

À la réflexion, cette conclusion n'est pas très surprenante, puisqu'il existe même des exemples de milieux à la fois isotropes et chiraux. Ainsi, une solution aqueuse de saccharose naturel, molécule chirale, dévie le plan de polarisation de la lumière dans un sens, proportionnellement à l'épaisseur de solution traversée. Cela montre qu'un milieu qui n'est pas organisé en une structure chirale puisqu'il ne possède pas de champ de directeurs peut tout de même être chiral à cause de sa composition chimique.

Remarquons toutefois que nous n'excluons pas la possibilité d'existence de couplages thermomécaniques dus à la déformation du champ de directeurs — suivant la théorie d'Akopyan et collaborateurs — qui pourraient se manifester y compris dans les nématiques torsadés. À ce sujet, il pourrait être intéressant d'étudier l'équivalent de l'effet Lehmann dans certaines gouttes de vrais nématiques spontanément torsadés pour des raisons énergétiques liées à l'anisotropie élastique [Lav90].

Nous avons également réalisé des expériences mettant en jeu une vraie rotation continue du directeur. Ces expériences confirment clairement nos conclusions précédentes. La mise au point d'un ancrage planaire glissant a notamment permis de mettre en évidence directement l'effet Lehmann à la température de compensation. L'estimation du gradient de tempé-

16. Le groupe ponctuel de symétrie d'un nématique est $D_{\infty h}$, ce qui correspond à l'invariance par les transformations suivantes :

1. toute rotation autour de l'axe parallèle au directeur,
2. rotation de π autour de tout axe perpendiculaire au directeur,
3. réflexion par rapport au plan perpendiculaire au directeur.

Dans le cas d'un cholestérique compensé, le groupe ponctuel de symétrie est seulement D_{∞} car le milieu n'est invariant par aucune réflexion — il est chiral.

17. Notons au passage que la structure en hélice d'un cholestérique est une conséquence macroscopique des interactions à l'échelle microscopique entre les molécules chirales.

rature et de la viscosité de surface dans ces expériences constitue une importante source d'incertitudes et nous a seulement permis d'estimer l'ordre de grandeur du coefficient Lehmann dans notre mélange. La géométrie idéale pour l'étude de l'effet Lehmann serait la configuration TIC. Pour cela, il serait intéressant de disposer d'un mélange compensé d'anisotropie diélectrique négative. Nous ne possédons pas un tel mélange, mais il doit probablement en exister.

Enfin, nous avons reproduit — après plus d'un siècle — l'expérience originelle de Lehmann. Bien que nos gouttes cholestériques soit différentes des siennes, nous avons mis en évidence et mesuré la vitesse de rotation continue de leur texture en bandes sous l'action d'un gradient de température. Dans les conditions de cette expérience, la rotation Lehmann est environ 40 fois plus rapide qu'au point de compensation. La chute de la viscosité rotationnelle à la transition avec l'isotrope peut difficilement expliquer une telle augmentation. Il est donc probable que le mécanisme microscopique à l'origine de l'effet Lehmann soit plus efficace près de cette transition. Ces expériences vont être poursuivies au laboratoire, pour étudier en particulier l'influence de la concentration en molécules chirales.

Cela nous amène à conclure sur le manque de modèle microscopique du phénomène. La théorie de Leslie introduit seulement le coefficient Lehmann de manière phénoménologique. Quant aux simulations numériques de Sarman, elles ne donnent que des mesures globales. Il manque donc toujours une compréhension des mécanismes microscopiques.

Souhaitons que les résultats de cette thèse puissent inciter les théoriciens à mener des recherches dans cette direction.

Annexe A

Table des grandeurs mesurées

Températures

Transition cholestérique-isotrope	$T_{CI} \sim 67^{\circ}\text{C}$
Point de compensation	$T_0 = 59,0 \pm 0,3^{\circ}\text{C}$

Torsion spontanée

Variation avec la température	$\frac{dq_0}{dT} = 0,1365 \pm 0,001 \mu\text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$
-------------------------------	---

Constantes élastiques

valeur rapportée à $\varepsilon_0\varepsilon_a$

Déformation en éventail	$\frac{K_1}{\varepsilon_0\varepsilon_a} = 0,081 \pm 0,007 \text{ V}^2$
Torsion	$\frac{K_2}{\varepsilon_0\varepsilon_a} = 0,066 \pm 0,003 \text{ V}^2$
Courbure	$\frac{K_3}{\varepsilon_0\varepsilon_a} = 0,138 \pm 0,01 \text{ V}^2$

valeur absolue

Déformation en éventail	$K_1 = (3,4 \pm 0,4) \times 10^{-12} \text{ N}$
Torsion	$K_2 = (2,8 \pm 0,2) \times 10^{-12} \text{ N}$
Courbure	$K_3 = (5,9 \pm 0,6) \times 10^{-12} \text{ N}$

Constantes diélectriques

Longitudinale	$\varepsilon_{//} = 9,4 \pm 0,5$
Transverse	$\varepsilon_{\perp} = 4,5 \pm 0,2$
Anisotropie	$\varepsilon_a = 4,8 \pm 0,3$

Indices de réfraction

Ordinaire	$n_o = 1,55 \pm 0,01$
Extraordinaire	$n_e = 1,64 \pm 0,01$
Biréfringence	$\Delta n = 0,090 \pm 0,002$

Conductivité électrique

Anisotropie relative	$\frac{\sigma_a}{\sigma_{\perp}} = 0,8 \pm 0,1$
----------------------	---

Conductivité thermique

Moyenne	$\lambda \sim 0,15 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
---------	---

Viscosité

Viscosité rotationnelle	$\gamma_1 = 0,075 \pm 0,009 \text{ Pa s}$
-------------------------	---

Coefficient Lehmann thermique

Valeur rapportée à $\varepsilon_0 \varepsilon_a$	$\frac{\nu}{\varepsilon_0 \varepsilon_a} = (6,6 \pm 1,2) \times 10^3 \text{ V}^2 \text{ K}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Valeur absolue	$\nu = (2,8 \pm 0,6) \times 10^{-7} \text{ kg K}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Coefficients flexo-électriques

$$e_3 - e_1 \sim 9 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-1}$$

Annexe B

Transition de Fréédéricks dans les cholestériques en ancrage planaire parallèle

Un cristal liquide d'anisotropie diélectrique ε_a positive tend à s'aligner dans la direction du champ électrique. Lorsqu'on applique une faible tension à un échantillon traité en ancrage planaire parallèle suivant l'axe x (cf. figure 2.1), l'ancrage s'oppose à l'inclinaison du directeur, mais au-delà d'une tension seuil, le directeur s'incline progressivement au milieu de la cellule. Cette transition est appelée transition de Fréédéricks et est mise à profit dans les afficheurs.

Dans le cas où l'échantillon est invariant par translation dans le plan des lames de verre, l'équation d'équilibre des couples s'écrit en l'absence d'écoulement et en négligeant les couplages linéaires

$$\begin{aligned} \gamma_1 \theta_{,t} = & (K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta) \theta_{,zz} + \\ & \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\varepsilon_0 \varepsilon_a E^2 + (K_3 - K_1) \theta_{,z}^2 + K_2 \varphi_{,z} (\varphi_{,z} - 2q_0) \right) + \\ & \frac{\sin 4\theta}{4} (K_2 - K_3) \varphi_{,z}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 \varphi_{,t} = & (K_2 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta) \varphi_{,zz} + \\ & 2(K_2(q_0 - \varphi_{,z}) + (K_3 - K_2)\varphi_{,z} \cos 2\theta) \theta_{,z} \tan \theta \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

La solution $\theta = \varphi = 0$ existe toujours, mais nous allons voir qu'une autre solution est plus stable au-delà d'un seuil. À haute fréquence ($\omega \gg \frac{\pi^2 K_i}{\gamma_1 d^2}$), θ et φ sont constants. On peut remplacer E^2 par sa moyenne temporelle $(V_{eff}/d)^2$. On cherche les solutions pour θ petit, au voisinage du

seuil. La linéarisation des équations ne permettant pas de trouver l'amplitude de θ , il faut développer les équations jusqu'à l'ordre 3 en θ . Cela donne :

$$0 = (K_1 + (K_3 - K_1) \theta^2) \theta_{,zz} + \left(\theta - \frac{2}{3} \theta^3 \right) \left(\varepsilon_0 \varepsilon_a \left(\frac{V_{eff}}{d} \right)^2 + (K_3 - K_1) \theta_{,z}^2 + K_2 \varphi_{,z} (\varphi_{,z} - 2q_0) \right) + \frac{\sin 4\theta}{4} (K_2 - K_3) \varphi_{,z}^2 \quad (B.3)$$

$$0 = (K_2 + (K_3 - K_2) \theta^2) \varphi_{,zz} + 2 (K_2 (q_0 - \varphi_{,z}) + (K_3 - K_2) \varphi_{,z}) \theta_{,z} \theta \quad (B.4)$$

L'équation (B.4) montre que φ est d'ordre θ^2 . On peut donc encore simplifier :

$$0 = K_1 \theta_{,zz} + (K_3 - K_1) \theta^2 \theta_{,zz} + \left(\theta - \frac{2}{3} \theta^3 \right) \varepsilon_0 \varepsilon_a \left(\frac{V_{eff}}{d} \right)^2 + \left((K_3 - K_1) \theta_{,z}^2 - 2K_2 q_0 \varphi_{,z} \right) \theta \quad (B.5)$$

$$0 = \varphi_{,zz} + 2q_0 \theta \theta_{,z} \quad (B.6)$$

Les conditions aux limites sont $\theta = 0$, $\varphi = 0$ en $z = 0$ et $z = d$.

La solution non triviale à l'ordre 1 en θ est $\varphi = 0$, $\theta = A \sin \frac{\pi z}{d}$ à condition que $V_{eff}^2 = \frac{\pi K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a}$, qui définit le seuil de la transition de Fréédériczkz. À cet ordre d'approximation, l'amplitude A est indéterminée. Posons $V_{eff}^2 = \frac{\pi K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a} (1 + 2\mu)$ où μ est l'écart relatif au seuil, et reportons la solution dans les équations. En se limitant à l'ordre 3 en A , on obtient :

$$0 = -K_1 A \frac{\pi^2}{d^2} \sin \frac{\pi z}{d} - (K_3 - K_1) A^3 \frac{\pi^2}{d^2} \sin^3 \frac{\pi z}{d} + \left(A \sin \frac{\pi z}{d} - \frac{2}{3} A^3 \sin^3 \frac{\pi z}{d} \right) \frac{\pi K_1}{d^2} (1 + 2\mu) + \left((K_3 - K_1) A^2 \frac{\pi^2}{d^2} \cos^2 \frac{\pi z}{d} - 2K_2 q_0 \varphi_{,z} \right) A \sin \frac{\pi z}{d} \quad (B.7)$$

$$0 = \varphi_{,zz} + q_0 A^2 \frac{\pi}{d} \sin \frac{2\pi z}{d} \quad (B.8)$$

L'équation (B.8) se résout immédiatement, ce qui donne :

$$\varphi = A^2 \frac{q_0 d}{4\pi} \sin \frac{2\pi z}{d} \quad (B.9)$$

En reportant dans l'équation sur θ et en ne gardant que le premier harmonique spatial (en $\sin \frac{\pi z}{d}$), on obtient $A = 0$ ou $A = 2 \sqrt{\frac{\mu K_1}{K_3 - K_2 \left(\frac{q_0 d}{\pi}\right)^2}}$ près du seuil. La transition est donc du second ordre sauf pour de grandes valeurs de q_0 . Or le mélange est étudié dans la zone où q_0 est petit, près de la température d'inversion. En se limitant seulement aux effets linéaires avec q_0 , on peut donc encore simplifier A :

$$A = 2 \sqrt{\frac{K_1}{K_3}} \sqrt{\mu} \quad (\text{B.10})$$

L'amplitude de θ varie donc comme la racine carrée de l'écart au seuil. Il est très important de remarquer que φ n'est pas nul au dessus du seuil même en l'absence d'effet Lehmann. D'après les équations (B.9) et (B.10), φ est proportionnel à l'écart au seuil μ et à la torsion spontanée q_0 . Cette dernière dépendance peut se comprendre facilement : quand le directeur est redressé la torsion en sens inverse coûte moins d'énergie. De la torsion positive, c'est à dire du signe de la torsion spontanée, apparaît donc près des parois, où le directeur est quasiment planaire, et, pour satisfaire les conditions aux limites, de la torsion en sens inverse apparaît au milieu de l'échantillon, où le directeur est redressé (cf. figure B.1).