Introduction Générale

Les équations différentielles avec retards dépendant de l'état attirent l'intérêt des spécialistes car elles proviennent largement de modèles d'application, tels que le problème à deux corps de l'électrodynamique classique [11, 12], le contrôle de position [6, 7], les modèles mécaniques [17], transmission de maladies infectieuses [30], modèles de population [4, 23], la dynamique des systèmes économiques [5], etc. En tant que type spécial d'équations différentielles avec retard dépendant de l'état, les équations différentielles itératives ont des caractéristiques distinctives et ont été étudiées ces dernières années, par ex. lissage [11, 25], équivariance [31], analyticité [27, 32, 33], monotonicité ([16, 28]), convexité [26] ainsi que solution numérique [22]. Dans la théorie des équations différentielles, l'un des problèmes fondamentaux et importants est le problème de la valeur initiale, il existe de nombreux résultats d'existence [1, 2, 8, 13, 15, 16, 17, 19, 29] sur les équations différentielles itératives spéciales. En 1984, Eder [8] a prouvé l'existence de la solution monotone unique pour la 2-ème équation différentielle itérative

$$\begin{cases} y'(x) = y(y(x)), \\ y(x_0) = x_0,\ x_0 \in [-1,1], \end{cases} \tag{1}$$

par principe de contraction. Plus tard, M. Fečkan ([15]) a étudié l'équation différentielle général 2-ème itérative

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(y(x))), \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

et obtenu la solution locale appliquant le principe de contraction. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, Wang [29] a obtenu les solutions de l'équation (2) associées à $y(a) = a$, où a est un point final d'un intervalle bien défini. Par conséquent, Ge et Mo [17] ont fourni les conditions suffisantes pour le problème de valeur initiale de (2) associé à

$$y(x_0) = y_0,$$

sur un intervalle compact donné, où les extrémités de l'intervalle sont deux points nuls adjacents de f. La 2-ème équation non autonome

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(y(x))), \\ y(0) = c, \ c > 0, \end{cases} \tag{3}$$

a été étudié par P. Andrzej ([1]) en utilisant l'approximation successive de Picard, où 0 est l'extrémité gauche du domaine.

Dans notre mémoire, nous nous intéressons à l'article de *Vasile Berinde* ([8]) où il a appliqué des opérateurs non expansivs pour étudier

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(y(x))), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

L'idée principale est d'utiliser la technique puissante et plus fiable des opérateurs non expansifs et d'adapter et d'utiliser plusieurs théorèmes de convergence issus de la théorie de l'itération approximation des points fixes des fonctions non expansives.

Le mémoire est organisé comme suit : dans le chapitre 1, nous présentons des notations préliminaires, quelques résultats de la théorie du point fixe, des applications non expansives. Dans le chapitre 2, nous présentons les principaux résultats du mémoire concernant l'existence et l'approximation des solutions de certaines équations différentielles itératives. Le document se termine par quelques exemples illustratifs.

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

1.1 Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

K	:	Un corps.
$\mathbb{N}$	:	L'ensemple des entiers naturales.
$\mathbb{N}^*$	:	L'ensemple des entiers naturales non nuls.
$\mathbb{C}$	:	L'ensemple nombres complexes .
$\mathbb{R}$	:	L'ensemple des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	L'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}_+^*$	:	L'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
[a,b]	:	Un intervalle de $\mathbb{R}$.
$\mathbf{C}([a,b],[a,b])$	:	Espace des fonctions continues de [a,b] dans [a,b].
(X,d)	:	Un espace métrique.
E	:	L'espace vectoriel normé muni de la norme $\|\|.\|\|_E$.
$\langle\cdot;\cdot\rangle$	:	Produite de dualité .

max	:	Fonction maximum .
min	:	Fonction minimum .
sup	:	Fonction supremum .
$\lvert . \rvert$	:	La valeur absolue sur un corps K.
d	:	La distance sur un corps K.

1.2 Quelques définitions

Définition 1.2.1. ***(Espace vectoriel normé)*** *Un espace* $(E, ||.||)$ *est dit espace vectoriel normé sur le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *s'il est muni d'une application* $||.|| : E \to \mathbb{R}$ *qui vérifie*

1. $\forall x \in E, ||x|| \geq 0$ *et* $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ x \in E,$
$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$$
où $|\lambda|$ *désigne respectivement la valeur absolue si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou le module si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
3. $\forall x, y \in E,\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(l'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.2.1. *Si* $(E, ||.||)$ *est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une nome par :*
$$d(x, y) = ||x - y||.$$

1. *Sur* $\mathbb{R}^n$*, on peut définir plusieurs normes*
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
la norme euclidienne ;
$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$
2. *L'espace vectoriel* $\mathbf{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{T : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, T \text{ continue}\}$*. Peut être muni des normes :*
$$||T||_1 = \int_0^1 |Tx| dx.$$
$$||T||_2 = \sqrt{\int_0^1 (Tx)^2 dx};$$
$$||T||_\infty = \max_{x \in [0,1]} |Tx|;$$

3. *Sur l'espace des suites numériques bornées (à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on peut définir la norme*

$$||u|| = \sup_{n\geq 0} |u_n|.$$

Définition 1.2.2. ***(Espace métrique)*** *Un espace métrique (X, d) est un ensemble X muni d'une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ appelée distance ou métrique, possédant les trois propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in X : \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation) ;*
2. $\forall x, y \in X : \ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie) ;*
3. $\forall x, y, z \in X : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.3. ***(Suite de Cauchy)*** *On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (X, d) est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon > 0 \ \ \textit{tel que}\, n, m > N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

ou écrire

$$d(x_n, x_m) \to 0, \ \textit{quand}\, n, m \to +\infty$$

Définition 1.2.4. ***(Espace métrique complet)*** *L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ une suite de X. On dit que cette suite converge vers $a \in X$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \ \textit{tel que}\, n \geq N_\varepsilon, \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

et on écrit alors : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ou encore $x_n \to a$ quand $n \to \infty$.
Notons que si cette limite existe, alors elle est unique. En effet. Si on a l et l' dans X tels que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, l) < \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \text{ tel que } n > N'_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, l') < \varepsilon.$$

Alors, pour :

$$n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$$

on a

$$d(l,l') \leq d(l,x_n) + d(x_n,l') < 2\varepsilon,$$

et donc $d(l,l') < 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. D'où $d(l,l') = 0$ et il en suit que $l = l'$.

Définition 1.2.5. ***(Espace de Banach)*** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance induite par la norme* $||.||$.

Définition 1.2.6. ***(Limite d'une application)*** *Soient* (X,d) *un espace métrique et* $T : X \longrightarrow X$ *une application, et* $a, b \in X$, *On dit que* Tx *tend vers* b *lorsque* x *tend vers* a *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon \ \textit{tel que}\ \ d(x,a) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d(Tx,b) < \varepsilon,$$

et on écrit alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} Tx = b$, *ou encore* $Tx \longrightarrow b$ *si* $x \longrightarrow a$.

Définition 1.2.7. ***(Application continue)*** *Soient* (X,d) *un espace métrique et* $T : X \to X$ *une application et* $a \in X$, *On dit que* T *est continue au point* a *ssi*

$$\lim_{x \to a} Tx = Ta.$$

C'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X, d(x,a) \leq \delta \Longrightarrow d(Tx,Ta) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.8. ***(La convexité d'un espace)***

1. *On dit que l'espace de Banach* $(E, ||.||)$ *est strictement convexe s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

   (a) $||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1$, $x \neq y$ *et* $0 < t < 1$ *implique que* $||(1-t)x + ty|| < 1$,

   (b) $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ *implique l'existence de deux scalaire* $\alpha \geq 0$ *et* $\beta \geq 0$ *tels que*

   $$\alpha + \beta > 0 \ \textit{et}\ \alpha x = \beta y.$$

2. On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } x, y \in E, ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1 \text{ et } ||x-y|| > \epsilon$$

alors

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1 - \delta.$$

1.3 Théorème du point fixe de Banach Picard

Le Théorème du Point Fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Définition 1.3.1. ***(Point fixe)*** *Soient $(E, ||.||_E)$ un espace de Banach, et $T : E \to E$ une application. On appelle point fixe de T tout point $x \in E$ tel que*

$$Tx = x.$$

Ce qui est équivalent à dire que l'équation :

$$Tx - x = 0$$

possède une solution.

Définition 1.3.2. *Soit (X, D) deux espaces métriques, une application $T : X \to D$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

$$\forall (x, y) \in (X \times D), \;\; d_D(Tx, Ty) \leq \alpha d_X(x, y) \tag{1.1}$$

Remarque :

1. Tout application α lipschitzienne est uniformément continue sur son domaine de définitions.
2. Avec les hypothèses précédentes, on dit que T est contractante si T est α lipschitzienne avec une constante $\alpha \in]0,1[$.

Théorème 1.3.1. *(Schauder)([9]) : Soient E un espace de Banach et $Q \subset E$ un convexe et compact. Alors toute application continue $T : Q \to Q$ possède un point fixe.*

Théorème 1.3.2. *([9]) Soient X un espace métrique complet et T une applications contractante de X, alors : il existe dans X un unique point fixe x, c'est-à-dire*

$$Tx = x.$$

Si x_0 est un point quelconque de X, pour tout entier n on a la suite

$$x_{n+1} = Tx_n \tag{1.2}$$

est appellée la suite itérative de Picard.

Proposition 1.3.1. *La suite récurente (x_n) est une suite de Cauchy convergeant vers l'unique point fixe x de T.*

Démonstration. Examinons d'abord l'unicité en cas d'existence. Supposons que x et y sont deux points fixes distincts pour T, c'est-à-dire

$$Tx = x \text{ et } Ty = y,$$

on aurait alors

$$d(Tx, Ty) = d(x, y); \tag{1.3}$$

et comme T est un application contractante on a

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \text{ avec } \alpha < 1, \tag{1.4}$$

de (1.3) et (1.4) nous avons

$$d(x, y) \leq \alpha d(x, y),$$

et comme $\alpha < 1$, nous obtenons

$$d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Soit maintenant la suite récurrente $(x_n)_n$ construite à partir de x_0 , il résulte de la définition de cette suite que :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}).$$

On voit donc tout de suite par récurrence que :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

Par application de l'inégalité triangulaire généralisée on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

et donc :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= (\alpha^n + \alpha^{n+1} + .. + \alpha^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la suite (x_n) est une suite de Cauchy, donc convergente puisque X est supposé complet. Si x est la limite de la suite (x_n), la relation de récurrence, jointe à la continuité de T entraîne que $Tx = x$, donc x est le point fixe de T. ■

Exemple 1.3.1. *Soit* $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *tel que*

$$Tx = \sqrt{1+x}.$$

Donc T *pocéde un unique point fixe sur* $\mathbb{R}_+$*.*

Tel que :

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1.4 Existence et approximation de solutions pour des applications non expansives

Définition 1.4.1. *Une application non expansive d'un espace normé est une applications α lipschitzienne tell que $\alpha = 1$.*

Définition 1.4.2. *Soit K un sous-ensemble non vide d'un espace linéaire normalisé réel E et soit $T : K \to K$ une application. T est non expansive si*

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y|| \tag{1.5}$$

Remarque : Bien que les applications non expansive sont des généralisations de contractions, ils sont des applications contractive. Plus précisément, si K est un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach E et $T : K \to K$ une application non expansive qui n'est pas une contraction, alors, comme le montre l'exemple suivant, T peut ne pas avoir un point fixe.

Exemple 1.4.1. *:*

1. *Considérons l'intervalle unitaire $[0, 1]$ avec la norme habituelle. La fonction T donné par la formule $Tx = 1 - x$ pour tout x a un point fixe unique, $x^* = \frac{1}{2}$ mais, sauf pour le cas trivial $x_0 = \frac{1}{2}$, l'itération Picard commençant à partir de x_0 donne une suite d'oscillation.*

2. *Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, 1]$. X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus*

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1,$$

alors

$$\sup_{x \in X} |f'(x)| < 1.$$

Donc f est contractante. Mais f n'a pas de point fixe.

Théorème 1.4.1. *Si K est un sous-ensemble convexe fermé non vide et borné d'un espace de Banach uniformément convexe E, alors toutes les applications non expansives*

$$T : K \to K$$

admet un point fixe.

Remarque : Le théorème (1.4.1) ne fournit aucune information sur l'approximation d'un point fixe de T. De l'exemple 1, nous voyons que l'itération Picard ne résout pas cette situation, en général. De ce fait, plusieurs autres procédures d'itération en point fixe ont été envisagées. Les plus courantes seront définies dans la suite en fonction de leur utilisation.

Définition 1.4.3. *:*

Soit K un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire normé E et soit $T : K \to K$ une application. Étant donné un $x_0 \in K$ et un nombre réel $\lambda \in [0,1]$; $x_0 \in K$, la suite x_n définie par la formule :

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.6}$$

est généralement appelée itération Krasnoselskij, ou itération Krasnoselskij–Mann. Clairement, (1.6) *se réduit à l'itération de Picard* (1.2) *pour $\lambda = 1$.*

Pour un $x_0 \in K$, la suite x_n définie par la formule

$$x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.7}$$

où $\{\lambda_n\}_n \subset [0,1]$ est une suite de nombres réels satisfaisant à certaines conditions appropriées, est appelée une itération de Mann.

Remarque : Il a été démontré par Krasnoselskij [20] dans le cas où $\lambda = \frac{1}{2}$, et plus tard par Schaefer [24] pour un arbitraire $\lambda \in]0,1[$, que si E est un espace de Banach uniformément convexe et K est un sous-ensemble convexe et compact de E (et donc, par le théorème (1.4.1), T a des points fixes), alors l'itération de Krasnoselskij converge vers un point fixe de T.

De plus, Edelstein [14] a prouvé qu'une stricte convexité de E suffit pour la même conclusion. La question de savoir si l'hypothèse de convexité stricte peut être supprimée a été répondu par l'affirmative par Ishikawa [18] par le résultat suivant.

Théorème 1.4.2. *Soit K un sous-ensemble d'un espace de Banach E et soit $T : K \to K$ une application non expansive où a et b sont des nombres réels tels que $0 \leq a \leq b < 1$. Pour un $x_0 \in K$ arbitraire, considérons le processus d'itération de Mann, $\{x_n\}_n$ donné par (1.7) sous les hypothèses suivantes :*

(a) $x_n \in K$ pour tous les entiers positifs n ;

(b) $0 \leq \lambda_n \leq b < 1$ pour tous les entiers n ;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = +\infty$;

si $\{x_n\}$ est borné, alors

$$x_n - Tx_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Théorème 1.4.3. *([9]) Soit K un sous-ensemble d'un espace linéaire normé réel X et soit T une application non expansive de K vers X. Supposons que pour $x_0 \in K$, il existe une suite $\{x_n\}_n \subseteq K$ qui est bornée. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_{n+1} - x_n|| = 0.$$

De plus, si K est un sous-ensemble borné de X, alors la limite ci-dessus est uniforme.

Théorème 1.4.4. *([9]) Sous les hypothèses du théorème 1.4.3 et $x_0 \in K$, supposons qu'il existe une suite $\{\lambda_n\}_n \subseteq K$ qui est bornée et qui est en fait une suite non croissante, vérifie également $0 < a < \lambda_n < 1$ pour tout $n \geq 1$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| = 0$$

Remarque : Les théorèmes ci-dessus sont des conséquences directes du théorème plus technique suivant.

Théorème 1.4.5. *(9) Soit K un sous-ensemble d'un espace linéaire normé réel X et soit T une application non expansive de K vers X, supposons qu'il existe un ensemble*

$A \subseteq K$ tel que pour chaque $x_0 \in A$ il existe une suite $\{x_n\}_n \subseteq A$, et supposons en outre qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour chaque entier positif N, et pour chaque suite $\{x_n\}_n \subseteq A$,

$$\sup_{k \geq N} ||x_{k+1} - x_k|| > \delta \tag{1.8}$$

Donc, A est non bornée,

Démonstration. Supposons par contraction que A est borné et soit $||x_n|| \leq \rho$ pour chaque n. Soit M un entier positif fixe tel que

$$(M-1)\delta > 2\rho + 1.$$

Choisissons N, avec :

$$N > \max\{M, [(2\rho - \delta)\frac{M}{(1-\lambda_1)^M \lambda_1}]\}$$

(où ici [.] désigne la plus grande fonction entière) telle que pour certains $\delta > 0$ et $x_0 \in A$, la suite correspondante $(x_n)_n$ dans A satisfaite

$$||x_{N+1} - x_N|| > \delta.$$

En utilisant la non expansivité de T, nous obtenons facilement ce qui suit :

$$||x_{n+1} - x_n|| = \lambda_n ||(1-\lambda_{n-1})(x_{n-1} - Tx_{n-1}) + Tx_{n-1} - Tx_n||$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda_n (1-\lambda_{n-1})||x_{n-1} - Tx_{n-1}|| + ||x_{n-1} - [(1-\lambda_{n-1})x_{n-1} + \lambda_{n-1}Tx_{n-1}]|| \\
&= \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}||x_n - x_{n-1}|| \\
&\leq ||x_n - x_{n-1}||.
\end{aligned}$$

Utilisant l'égalité (1.7) avec n remplacé par (n-1) tandis que la dernière suite $(\lambda_n)_n$ est une suite décroissante. Il s'ensuit donc que

$$||x_{i+1} - x_i|| > \delta$$

pour tout $i \leq N$, et de plus on obtient ce qui suit :

$$\delta < ||x_N - x_{N-1}|| \leq ... \leq ||x_2 - x_1|| \leq 2\rho; \tag{1.9}$$

$$||Tx_{i+1} - Tx_i|| \leq ||x_{i+1} - x_i||$$

pour tous $i = 0, 1, .., N$; et

$$x_{i+1} = (1 - \lambda_i)x_i + \lambda_i T x_i$$

donc

$$Tx_i = \frac{x_{i+1}}{\lambda_i} - \left(\frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i}\right) x_i, \ i = 1, 2, ..., N; \tag{1.10}$$

ce qui implique,

$$\left\| \frac{1}{\lambda_i}\{x_{i+1} - (1 - \lambda_i)x_i\} - \frac{1}{\lambda_{i-1}}\{x_i - (1 - \lambda_{i-1})x_{i-1}\} \right\| = \|Tx_i - Tx_{i-1}\|$$
$$\leq ||x_i - x_{i-1}||,$$

donc

$$\left\| \frac{1}{\lambda_i}[x_{i+1} - x_i] - \left(\frac{1 - \lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1}}\right)[x_i - x_{i-1}] \right\| \leq ||x_i - x_{i-1}|| \tag{1.11}$$

pour tout $i = 1, 2, ..., N$. Maintenant, fixons

$$i = [\frac{(2\rho - \delta)}{(1 - \lambda_1)^M \lambda_1}]$$

et considérons la collection d'intervalles $I = [s_k, s_{k+1}]$ on a

$$s_k = \begin{cases} \delta + k(1 - \lambda_1)^M \lambda_1; \ k = 0, 1, ..., I - 1, \\ \\ 2\rho, \ k = I. \end{cases}$$

Nous affirmons que l'un de ces intervalles doit contenir au moins M des nombres

$$(||x_i - x_{i+1}||)_i \subseteq [\delta, 2\rho].$$

Si ce n'est pas le cas, alors

$$N < MI = M[\frac{2\rho - \delta}{(1 - \lambda_1)^M \lambda_1}]$$

contredisant notre choix de N. Ainsi pour certains r, et certains $s = s_K \in [\delta, 2\rho]$,

$$||x_{r+i+1} - x_{r+i}|| \in [s, s + (1 - \lambda_1)^M \lambda_1].$$

Pour $i = 0, 1, .., (M - 1)$. Considérons

$$\varDelta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, .., N.$$

Remplaçons i dans (1.10) par $r+M-j-1, (j=0,1,..,M-1)$ on voit que (1.10) et (1.11) implique

$$\left\| \frac{1}{\lambda_{r+M-j-1}} \Delta x_{r+M-j} - \left(\frac{1-\lambda_{r+M-j-2}}{\lambda_{r+M-j-2}} \right) \Delta x_{r+M-j-1} \right\| \leq s + (1-\lambda_1)^M \lambda_1. \quad (1.12)$$

Choisissons $T^* \in X^*$ (le dual de X) avec

$$||T^*|| = 1$$

et

$$T^*(\Delta x_{r+M}) = ||\Delta x_{r+M}||.$$

Puis en utilisant (1.12) on obtient,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\lambda_{r+M-j}} T^*(\Delta x_{r+M-j}) - \left(\frac{1-\lambda_{r+M-j-2}}{\lambda_{r+M-j-2}} \right) T^*(\Delta x_{r+M-j-1}) \right| \\ &\leq ||T^*||. \left\| \frac{1}{\lambda_{r+M-j}} \Delta x_{r+M-j} - \left(\frac{1-\lambda_{r+M-j-2}}{\lambda_{r+M-j-2}} \right) \Delta x_{r+M-j-1} \right\| \\ &\leq s + (1-\lambda_1)^M \lambda_1 \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} T^*(\Delta x_{r+M-j-1}) \geq &\left(\frac{\lambda_{r+M-j-2}}{\lambda_{r+M-j-1}} \right) \left(\frac{1}{1-\lambda_{r+M-j-2}} \right) T^*(\Delta x_{r+M-j}) - \\ &\left(\frac{\lambda_{r+M-j-2}}{1-\lambda_{r+M-j-2}} \right) (s + (1-\lambda_1)^M \lambda_1). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Notons que puisque $(\lambda_i)_i$ est non croissante, pour tout $i \geq 1$,

$$(1-\lambda_i)^{-1} \leq (1-\lambda_1)^{-1}$$

et

$$(1-\lambda_i)^{-1} \leq \lambda_1 (1-\lambda_1)^{-1}.$$

Maintenant, pour $j=0$, en utilisant

$$T^*(\Delta x_{r+M}) = ||\Delta x_{r+M}|| \in [s, s + (1-\lambda_1)^M \lambda_1],$$

nous obtenons de (1.13),

$$\begin{aligned} T^*(\Delta x_{r+M-1}) &\geq \left(\frac{1}{1-\lambda_{r+M-2}} \right) s - \left(\frac{\lambda_{r+M-2}}{1-\lambda_{r+M-2}} \right) \{s + (1-\lambda_1)^M \lambda_1\} \\ &\geq s - \lambda_1^2 (1-\lambda_1)^{M-1}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Nous allons montrer que (1.14) implique

$$T^*(\Delta x_{r+M-j-1} \geq s-(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2 \sum_{i=0}^{j}\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^t. \tag{1.15}$$

pour $j=1,2,..,M-1$. Nous établissons cela par induction. Pour $j=0$,(1.15) réduit à (1.14). Supposons maintenant (1.15) pour $j \leq k$, pour certains $k \in \{1,2,3,..,M-2\}$. Puis à partir de (1.13) et l'hypothése inductive nous obtenir,

$$\begin{aligned}
T^*(\Delta x_{r+M-(k+1)-1}) &= T^*(\Delta x_{r+M-k-2})\\
&\geq \left(\frac{\lambda_{r+m-k-3}}{\lambda_{r+M-k-2}}\right)\left(\frac{1}{1-\lambda_{r+M-k-3}}\right)T^*(\Delta x_{r+M-k-1})\\
&-\left(\frac{\lambda_{r+M-k-3}}{1-\lambda_{1-\lambda_{r+M-k-3}}}\right)s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1\left(\frac{1}{1-\lambda_{r+M-k-3}}\right)\\
&\left[s-(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2\sum_{t=0}^{k}\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^t\right]\\
&-\left(\frac{\lambda_{r+M-k-3}}{1-\lambda_{r+M-k-3}}\right)s+(1-\lambda_1)^M\lambda_1\\
&\geq s-\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2\sum_{t=0}^{k}\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^t-\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\right)(1-\lambda_1)^M\lambda_1\\
&= s-(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2\sum_{t=0}^{k+1}\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^t,
\end{aligned}$$

Qui termine l'induction. Notant que T^* est linéaire résumée (1.15) par imagerie de $j=0$ à $(M-2)$, elle produit :

$$T^*(x_{r+M-1}-x_r) = T^*(x_{r+M-1})-T^*(x_r) \geq (M-1)s-(1-\lambda_1)^{M-1}\lambda_1^2$$
$$\left[1+\left(1+\frac{1}{1-\lambda_1}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{1-\lambda_1}+\ldots+\left(\frac{1}{1-\lambda_1}\right)^{M-2}\right)\right].$$

Supposons que $C=1-\lambda_1$ pour que,

$$\begin{aligned}
T^*(x_{r+M-1}-x_r) &= (M-1)s-\lambda^{M-1}(1-\lambda)^2\left[1+\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)+\ldots+\left(\frac{\lambda^{M-2}+\ldots+\lambda+1}{\lambda^{M-2}}\right)\right]\\
&= (M-1)s-\lambda(1-\lambda)\left[\lambda^{M-1}\left\{\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)+\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1-\lambda^{M-1}}{\lambda^{M-1}}\right)\right\}\right]\\
&\geq (M-1)s-1,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité donne

$$\lambda(1-\lambda)\left[\lambda^{M-1}\left\{\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)+\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}\right)+..+\left(\frac{1-\lambda^{M-1}}{\lambda^{M-1}}\right)\right\}\right|$$
$$< \lambda(1-\lambda)(\lambda^{M-2}+...+\lambda+1)$$
$$\leq 1$$

Mais $s > \delta$ signifie

$$(M-1)s > (M-1)\delta > 2\rho + 1$$

avec

$$T^*(x_{r+M-1} - x_r) > \rho.$$

Aussi,

$$\begin{aligned} T^*(x_{r+M-1} - x_r) &\leq |T^*(x_{r+M-1} - x_r) \\ &\leq ||T^*||.||x_{r+M-1} - x_r|| \\ &= ||x_{r+M-1} - x_r||. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$||x_{r+M-1} - x_r|| > 2\rho$$

contradiction avec l'hypothèse

$$||x_n|| \leq \rho$$

pour chaque n, et en complétant la preuve du Théorème.

■

Démonstration. (Théorème (1.4.3)) Les deux parties découlent immédiatement du théorème (1.4.5) ; le premier en posant $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = A$ dans le théorème et le second en posant $K = A$.

■

Démonstration. (Théorème 1.4.4) : Puisque T est non expansive on obtient,

$$\begin{aligned}
||x_{n+1} - Tx_{n+1}|| &= ||(1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - Tx_{n+1}|| \\
&= ||(1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - Tx_n + Tx_n - Tx_{n+1}|| \\
&= ||x_n - \lambda_n x_n + \lambda_n Tx_n - Tx_n + Tx_n - Tx_{n+1}|| \\
&= ||(1-\lambda_n)(x_n - Tx_n) + Tx_n - Tx_{n+1}|| \\
&\leq (1-\lambda_n)||x_n - Tx_n|| + ||x_n - ((1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n)|| \\
&= ||x_n - Tx_n||.
\end{aligned}$$

Ainsi la suitr $\{||x_n - Tx_n||\}_{n=0}^{\infty}$ est non croissante et bornée. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||x_n - Tx_n||$ existe, mais à partire de

$$x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n,$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n}||x_{n+1} - x_n|| \\
&\leq \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} ||x_{n+1} - x_n|| = 0,
\end{aligned}$$

(Par le théorème 1.4.5 puisque la suite $\{x_n\})_{n=0}^{\infty}$ est bornée), d'où le théorème 1.4.4.

■

Remarque : Les corollaires suivants seront particulièrement importants pour la partie application de notre mémoire.

Corollaire 1.4.1. *Soit K un sous-ensemble convexe et compact d'un espace de Banach E et soit $T : K \to K$ une application non expansive. Si le processus d'itération de Mann $\{x_n\}$ donné par* (1.7) *est satisfait aux hypothèses* $(a)-(c)$ *du théorème* 1.4.2*, alors $\{x_n\}$ converge fortement vers un point fixe de T.*

Démonstration. On a q est un point d'accumulation de $\{T^n q\}$ et que

$$||T^{n+1}q - T^n q|| = ||Tq - q||$$

pour tout n. Ainsi si

$$T^i q = x_i$$

et

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2....$$

alors $||\Delta x_{i+1}|| = ||\Delta x_i||$ pour tout i. Comme dans la démonstration du Théorème (1.4.5), on a,

$$||\Delta x_{i+1}|| = ||x_{i+1} - x_i|| \leq \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} ||x_i - x_{i-1}|| \leq ||x_i - x_{i-1}|| = ||\Delta x_i||.$$

Et cela implique $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ pour tout i puisque $||\Delta x_{i-1}|| = ||\Delta x_i||$. Par conséquent, et à partir de

$$x_{i+1} - x_i = (1 - \lambda_i)x_i + \lambda_i T x_i - (1 - \lambda_{i-1})x_{i-1} - \lambda_{i-1} T x_{i-1}$$

on obtient,

$$\begin{aligned} ||\Delta x_{i+1}|| &\leq (1 - \lambda_i)||\Delta x_i|| + \lambda_i ||\Delta T x_i|| \\ &\leq (1 - \lambda_i)||\Delta x_i|| + \lambda_i ||\Delta x_i|| = ||\Delta x_i|| \end{aligned}$$

et cela implique, $||\Delta x_i|| = ||\Delta T x_i||$. Supposons par contradiction que,

$$||\Delta x_i|| = ||\Delta T x_i|| = \beta > 0, \ i = 1, 2, ., .. \tag{1.16}$$

Choisissez $N, k \in \mathbb{N}^+$ assez grand. De(1.16) nous avons, à $i = N + k$,

$$||\Delta x_{N+k}|| = ||\Delta T x_{N+k}|| = \beta > 0 \tag{1.17}$$

Soit $T^* \in X^*$ tel que $||T^*|| = 1$ et $T^* \Delta x_{N+k} = ||\Delta x_{N+k}||$. Pour $j = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} T^*(\Delta T x_{N+k-j}) &\leq ||T^*||.||\Delta T x_{N+k-j}|| \\ &= ||\Delta T x_{N+k-j}|| = s. \end{aligned} \tag{1.18}$$

A partir de

$$x_{N+k-j+1} = (1 - \lambda_{N+k-j})x_{N+k-j} T x_{N+k-j}$$

en utilisant $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ pour tout i, on obtient

$$\Delta x_{N+k-j+1} = (1 - \lambda_{N+k-j})\Delta x_{N+k-j} + \lambda_{N+k-j}\Delta T x_{N+k-j} \tag{1.19}$$

Nous montrerons que l'application de T^* à cette équation donne :

$$T^*\Delta x_{N+k-j} \geq \beta \text{ pour } j = 0, 1, .. \tag{1.20}$$

On établit (1.20) par induction. Observons que

$$T^*\Delta x_{N+k} = ||\Delta x_{N+k}|| = \beta$$

satisfait (1.20) avec $j = 0$, maintenant pour $j = 1$, en appliquant T^* à (1.19) et en utilisant (1.18) on aura :

$$\begin{aligned} T^*\Delta x_{N+k-1} &= \left(\frac{1}{1 - \lambda_{N+k-j}}\right) T^*\Delta x_{N+k} - \left(\frac{\lambda_{N+k-1}}{1 - \lambda_{N+k-1}}\right) \times T^*(\Delta T(x_{N+k-1})) \\ &\geq \left(\frac{1}{1 - \lambda_{N+k-1}}\right)\beta - \left(\frac{\lambda_{N+k-1}}{1 - \lambda_{N+k-1}}\right)\beta = \beta, \end{aligned}$$

et (1.20) est juste pour $j = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour $j = 0, 1, ...t$. Puis en utilisant (1.18),(1.19) et l'hypothése inductive que nous avons,

$$\begin{aligned} T^*(\Delta x_{N+k-t-1}) &= \left(\frac{1}{1 - \lambda_{N+k-t-1}}\right) T^*(\Delta x_{N+k-t}) - (\frac{\lambda_{N+k-t-1}}{1 - \lambda_{N+k-t-1}})T^*(\Delta T(x_{N+k-t-1})) \\ &\geq \left(\frac{1}{\lambda_{N+k-t-1}}\right)\beta - \left(\frac{\lambda_{N+k-t-1}}{1 - \lambda_{N+k-t-1}}\right)\beta = \beta, \end{aligned}$$

qui complète l'induction. L'utilisation de la technique de la preuve du théorème (1.4.5) et la somme (1.20) de $j = 0$ à $k - 1$ donne :

$$||x_{N+k} - x_N|| \geq T^*(x_{N+k} - x_N) \geq k\beta, \tag{1.21}$$

et cela implique que la suite $\{x_i\}_{n=0}^{\infty}$ ne peut pas avoir de sous-séquence convergente, une contradiction du fait que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ a un point d'accumulation. D'où $\beta = 0$ et $Tq = q$, et que $x_n \to q$ découle maintenant facilement de la non-expansivité de T. ■

Corollaire 1.4.2. *Soit E un espace normé réel, K un sous-ensemble convexe borné fermé de E et soit $T : K \to K$ une application non expansive. Si $I - T$ attribue des sous-ensembles fermés bornés de E en sous-ensembles fermés de E et x_n est l'itération de Mann définie par (1.7) avec $\{\lambda_n\}$ satisfaisant les hypothèses $(a) - (c)$ du théorème 1.4.2, alors $\{x_n\}$ converge fortement vers un point fixe de T en K.*

Démonstration. (i) De

$$x_{n+1} = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n$$

on obtient

$$x_n - Tx_n = \frac{1}{\lambda_n}\{x_n - x_{n-1}\}.$$

Puisque λ, $\{x_n\}_n$ est une suite bornée et aussi $\{\lambda_n\}_n$ borné loin de 0, ce qui implique (par le théorème 1.4.4) que $\{x_n - Tx_n\}$ est convergent vers 0 de sorte que par la demi-compacité de T à 0, $\{x_n\}_n$ a un point d'accumulation en λ. Le résultat est obtenu par le Corollaire 1.4.1.

(ii) si q est un point fixe de T, $\{||x_n - q||\}_{n=0}^{\infty}$ n'augmente pas avec n. Il suffit donc de montrer qu'il existe une sous-suite de $\{x_n\}_n$ qui converge fortement vers un point fixe de T . pour $x_0 \in \lambda$, soit K la forte fermeture de l'ensemble $\{x_n\}_n$. D'après le théorème (1.4.4), $\{(I - T)(x_n)\}$ converge fortement vers 0 car $n \to \infty$, Par conséquent, 0 réside dans la fort fermeture de $(I - T)(K)$ et puisque cette dernière est fermée par hypotése (puisque K est fermé et borné), 0 réside dans $(I - T)(K)$. Il y a une sous-suite $\{x_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ telle que $x_{n_j} \to \mu \in \lambda$, où μ est un point tel que $(I - T)\mu = 0$. D'où $x_n \to \mu$. ■