وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2018

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques

Systèmes dynamiques fractionnaires dégénérés de contrôle et applications

Option
Équations différentielles et Applications

Par
DERDAR Nedjemeddine

DIRECTEUR DE THÈSE: DEBBOUCHE Amar Prof Univ.8.Mai.45.Guelma
CO-DIRECTEUR: CHORFI Lahcène Prof Univ.B.M.Annaba

Devant le jury

PRESIDENT :	REBBANI Fouzia	Prof	E.S.T.I.Annaba
EXAMINATEUR :	BOUSSETILA Nadjib	Prof	Univ.8.Mai.45.Guelma
EXAMINATEUR :	NISSE Lamine	Prof	Univ.El.Oued

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier le Professeur Amar DEBBOUCHE, mon directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent. Je lui suis infiniment reconnaissant, non seulement parce qu'il a accepté de me prendre en thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible et en venant me chercher très souvent pour que l'on discute, ce qui m'a énormément encouragé.

Je remercie aussi Professeur Lahcène CHORFI, mon Co-directeur de thèse, qui m'a accueilli durant mes stages de formation, ainsi les nembreuses discusions enrichissantes et les collaborations que nous avons eues.

Je remercie en troixième lieu Madame Fouzia REBBANI, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également à mon enseignant Monsieur Nadjib BOUSSETILA, Professeur à l'université de Guelma, d'avoir accepté de juger ce travail.

Je tiens à remercier aussi Monsieur Lamine NISSE, Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba et l'université de El Oued, d'avoir accepté d'examiner ma thèse et faire partie du jury.

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Nedjemeddine Derdar.

ملخـــص

تظهر الانظمة الديناميكية الكسرية للتحكم تلقائيًا في مختلف المجالات العلمية مثل الفيزياء، الكيمياء، الكهرباء، علوم الهندسة، الطب، ..إلخ.
أما المعادلات التفاضلية الكسرية المنحطة الخطية و غير الخطية هي الاخرى بدات تظهر بفعالية كبيرة ايضا في نمذجة العديد من ظواهرالعالم الحقيقي مما حفز العديد من الباحثين في دراسة هذا النوع من المعادلات بجوانبها الكمية والنوعية.
ان الهدف الاساسي من هذه الأطروحة هو المساهمة في تطوير مجال دراسة وجود ووحدانية حلول هذا النوع من المعادلات تحت شروط محلية و غير محلية في فضاءات بناخ.
ان النتائج المحصل عليها في هذا العمل يستند على نظرية المؤثرات: المؤثر الشعاعي القوي ـ (L,p) ، المؤثر القطاعي القوي ـ (L,p) ، المؤثر المحدود ـ (L,σ) ، المؤثر المحدود ـ (L,p) و نصف الزمر المنحطة.
ثم ركزنا على مسألة تحليل استقرار في زمن متنهي لنظام موصوف بواسطة المعادلة التفاضلية الكسرية المنحطة مع التأخر ، حيث ان الاستقرار هو واحد من أكثر المصطلحات شيوعًا ويلعب دورًا أساسيًا في نظرية التحكم. نقدم نتائجنا الرئيسية باستخدام طريقة الاستقرار المقترحة على أساس نظرية قرنوال المعممة.
و بعدها اهتمينا بوصف الوضع الجيد للمعادلات التفاضلية المنحطة مع شروط الحدود الدورية باستخدام تقنية المضاعف لفووري و التي وفرت الشروط الضرورية والكافية لضمان الوضع الجيد لهذه المشكلة في الفضاءات التالية: $L^p(0,2\pi;X)$ ، $B^s_{p,q}(0,2\pi;X)$ ، $F^s_{p,q}(0,2\pi;X)$.
و في الاخير نرفق النتائج المحصل عليها بامثلة توضيحية لتبرير صحتها.

الكلمات المفتاحية: المعادلات المنحطة، الحساب الكسري، نصف الزمرة المنحطة، المحللات المعممة، الشروط غير المحلية، الاستقرار، مضاعف فووري، الوضع الجيد.

Résumé

Les Systèmes dynamiques fractionnaires de contrôle apparaissent automatiquement dans divers domaines scientifiques telles que la physique, la chimie, l'électricité, l'ingénierie, la médecine, etc. Les équations différentielles fractionnaires dégénérées ont également commencé à apparaître très efficacement dans la modélisation de plusieurs phénomènes réels. Elles ont motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

L'objectif principal de cette thèse est de contribuer au développement de la théorie d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires dégénérées linéaire et non linéaire avec des conditions locales et non locales dans des espaces de Banach. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur la théorie des opérateurs résolvants : fortement (L, p)-radial, fortement (L, p)-sectoriel, (L, σ)-borné, (L, p)-borné et les semi-groupes dégénérés.

Ensuite, nous nous attachons à la question de la stabilité en temps fini du système décrit par l'équation différentielle fractionnaire dégénérée avec retard telle que la stabilité est l'un des termes les plus fréquents et joue un rôle clé dans la théorie du contrôle. Nous présentons nos principaux résultats en utilisant la méthode de stabilisation proposée est basée sur une généralisation du lemme de Gronwall.

Enfin, nous nous intéressons à la justification du caractère bien posé des équations différentielles fractionnaires dégénérées avec des conditions aux limites périodiques, en utilisant la technique de l'opérateur multiplicateur de Fourier, on a fourni les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer le caractère bien posé de ce problème dans les espaces de Lebesgue-Bochner $L^p(0, 2\pi; X)$, les espaces de Besov périodiques $B^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$ et les espaces périodiques Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$.Nous concluons les résultats obtenus par des exemples illustratifs.

Mots-clés : Équations dégénérées, calcul fractionnaire, les résolvantes généralisées, semi-groupe dégénéré, condition non locale, stabilité, multipilicateur de Fourier, bien posé.

Abstract

Fractional control dynamic systems automatically appear in various scientific fields such as physics, chemistry, electricity, engineering, medicine, and so on. Degenerate fractional differential equations have also begun to appear very efficiently in the modeling of several real phenomena. They motivated many researchers to study their quantitative and qualitative aspects.

The main objective of this thesis is to contribute to the development of the theory of existence and uniqueness solutions of the linear and nonlinear equations of fractional degenerate evolutions with local and nonlocal conditions in Banach spaces. The results obtained in this work are based on the theory of resolving operators : strongly (L, p)-radial operator, strongly (L, p)-sectorial operator, (L, σ)-bounded operator, (L, p)-bounded operator and the degenerate semigroups.

Thus we focus on the question of the time-finite stability of the system described by the fractional differential equation degenerate with delay, where stability is one of the most common terms and plays a key role in control theory. We present our main results using the proposed stabilization method based on a generalization of the Gronwall lemma.

Finally, we are interested in problems concerning justification of the well-posed of the differential equation equations degenerate fractions with periodic boundary conditions. Using the technique of the Fourier multiplier operator, they provided the necessary and sufficient conditions to ensure the character well-posed of this problem in the spaces of the Lebesgue-Bochner spaces $L^p(0, 2\pi; X)$, the periodic Besov spaces $B^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$ and the periodic spaces Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$. We conclude that the results obtained by illustrative examples.

Keywords : Degenerate equations, fractional calculation, generalized resolvent, degenerate semigroup, nonlocal condition, stability, Fourier multiplier, well posed.

Table des matières

Introduction générale **vi**

1 Préliminaires et résultats fondamentaux **1**
1.1 Espaces de Base 1
1.2 Théorie des opérateurs 6
1.3 Semi-groupes 21
1.4 Calcul fractionnaire 26
1.5 Théorème de point fixe 39

2 Étude des équations différentielles fractionnaires dégénérées avec condition non locale **40**
2.1 Équation fractionnaire non dégénérée avec condition non locale 41
2.2 Équation fractionnaire dégénérée avec condition non locale 47
2.3 Applications 52

3 Analyse de stabilité des systèmes fractionnaires dégénérés avec retard en temps fini **54**
3.1 Équations différentielles fractionnaires dégénérées avec retard 55
3.2 Résultats de stabilité en temps fini 57

4 Équations fractionnaires dégénérées bien posées dans les espaces fonctionnaires vectoriels **61**
4.1 Équations fractionnaires dégénérées bien posées dans les espaces de Lebesgue-Bochner 62
4.2 Équations fractionnaires dégénérées bien posées dans les espaces de Besov et Triebel-Lizorkin. 69
4.3 Applications 77

Conclusion et Perspectives **79**

Bibliographie **80**

Introduction

Dans les domaines des systèmes dynamiques et de la théorie du contrôle, un système d'ordre fractionnaire est un système dynamique qui peut être modélisé par une équation différentielle fractionnaire contenant des dérivées d'ordre non entier. Les systèmes d'ordre fractionnaire sont utiles pour étudier le comportement anormal des systèmes dynamiques en physique, électrochimie, biologie, viscoélasticité et systèmes chaotiques.

Le calcul fractionnaire est une généralisation des équations différentielles ordinaires et de l'intégration à des ordres arbitraires non entiers. Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le calcul fractionnaire est un outil puissant qui a permi de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous. Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques, thermiques et viscoélastiques sont régis par des équations différentielles à dérivées non entières. L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Par ce fait, des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non-entières ont été développés [22] pour certains cas pratiques.

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du $17^{\text{ième}}$ siècle, partant de la réponse de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$. Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du $20^{\text{ième}}$ siècle où de nombreuses applications ont été développées utilisant ce concept.

En 1695, dans une lettre à l'Hôpital, Leibniz écrivit prophétiquement : "Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}$ sera égal à $x\sqrt[2]{dx : x}$ un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences". Sur ces questions, nous retrouvons une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au caclul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{\text{ième}}$ siècle, inclut : P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832- 1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. L'evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erd'elyi (1939- 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949). Pour plus de

détails sur la théorie du calcul fractionnaire, on peut voir les monographies ([25], [86], [97], [98]).
Au cours des dernières décennies, la théorie des équations différentielles dégénérées, n'ont pas attiré l'attention d'un grand nombre d'auteurs travaillant dans le domaine des sciences appliquées. R. W. Carroll et R. E. Showalter [20], peut être la première référence dans ce domaine publiée en (1976), mais un grand nombre de résultats et d'applications théoriques importants ont depuis enrichi le champ. De plus, Favini [33], [34], Favini et Yagi [38]- [40], R. E Showalter [99]- [103] et N. A. Sidorov [104] ont donné une grande base solide d'expérience et d'applications sur les problèmes dégénérés de Cauchy de premier ordre dans les espaces de Banach.
Les auteurs suivants ont étudié divers types d'équations differentielles dégénérées de degré (1, 2 et 3), (voir par exemple : G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii [26], I. V. Melnikova, A. Filinkov [84], A. G. Sveshnikov, A. B. Al'shin, M. O. Korpusov et Yu. D. Pletner [105], ainsi que les articles M. Bahaj et R. Bahloul [5], V. Barbu et A. Favini [6], V. Barbu, A. Favini et S. Romanelli [7], S. Bu et G. Cai [13]- [15], G. Cai et S. Bu [19], M. Kostic [64]- [66], [71], [74]) et C. Lizama, R. Ponce [79].
Pour plus d'informations concernant la propension de Sobolev de ce genre d'équations differentielles dégénérées, le lecteur peut consulter les monographies de ([**?**], [33]- [42], [50]- [53], [57], [79], [81], [106]).
De plus, dans ([49]- [52], [61], [67]- [73] et [111]), les auteurs ont fourni une bonne compréhension des équations dégénérées fractionnaires differentielles et les résultats fondamentaux correspondants à ce type d'équations .
Comme dans le calcul classique, l'analyse de stabilité joue un rôle clé dans la théorie du contrôle. L'analyse de stabilité des équations différentielles fractionnaires en temps fini a été réalisée par différents chercheurs [27], [30], [76]- [78], [88]. Denghao Pang et Wei Jiang, Zhixin Zhang et Jiang Wei ont fourni des résultats de stabilité des systèmes décrits par des équations différentielles dégénérées en temps fini.
L'objectif principal de cette thèse est démontrer l'existence et l'unicité de solution de l'équation intégro-différentielle fractionnaire dégénérée non linéaire avec une condition non locale. Si en plus l'opérateur de dérivée temporelle est dégénéré c'est-à-dire non inversible, i.e, en particulier, le noyau de cet opérateur est non trivial. Dans cette étude, nous utilisons la théorie des opérateurs résolvants généralisés : fortement (L,p)-radial, fortement (L,p)-sectoriel, (L,σ)-borné et les semi-groupes dégénérés.
Dans [107], Sviridyuk (1995) était l'un des premiers à considérer ce cas du point de vue de la théorie d'opérateurs radiaux et semi-groupes fortement continus. Ses résultats ont été plus tard développés par Fedorov (1996, 2001), pour aboutir finalement à la théorie des opérateurs résolvants généralisés actuelle :(fortement (L,p)-radial, fortement (L,p)-sectoriel, (L,σ)-borné, (L,p)-borné et semi-groupes dégénérés. Dans leurs traveaux, ils ont établi un lien étroit entre les résolvantes généralisées et la décomposition des espaces de Banach en somme directe des sous espaces $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. En plus, la décomposition des opérateurs L et M comme $L : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $M : domM \cap \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $k = 0, 1$ et l'existence des opérateurs $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$, ainsi que $L_k(M_k)$ était une restriction de l'opérateur $L(M)$ dans $\mathcal{U}^k$ $(domM \cap \mathcal{U}^k)$, $k = 0, 1$. pour plus de détails, nous renvoyons les lecteurs aux références

([43]- [46]).
Dans [107], les auteurs ont étudié le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} Lu(t) = Mu(t) & (0.1) \\ u(0) = u_0, & (0.2) \end{cases}$$

où $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$ et soit $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach.
L'équation (0.1) réduite facilement à une forme standard

$$\dot{u} = Su(t), \tag{0.3}$$

s'il existe $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.
La partie théorique du problème de Cauchy (0.2)–(0.3) est étudiée par plusieurs auteurs, par exemple dans [21], [24], [32], [55], cette situation devient plus compliquée, lorsque l'opérateur L est non inversible, i.e, en particulier, Ker $L \neq \{0\}$ (l'opérateur L est dégénéré).
La résolution du problème de Cauchy abstrait (0.1)–(0.2) avec un opérateur dégénéré L, a été examiné par la décomposition du problème en deux équations indépendantes

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = Su^1 & (0.4) \\ H\dot{u}^0 = u^0, & (0.5) \end{cases}$$

où $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$ est un opérateur nilpotent, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$ et $u = u^0 + u^1$.
R. Showalter [103] a obtenu les premiers résultats de (0.1)–(0.2) avec la résolution des problèmes de valeur initiale pour les équations mathématiques de la physique non classiques.
On peut citer des auteurs travaillant sur cet axe de recherche (voir : V. E. Fedorov et L. V. Borel [47], V. E. Federov et P.N. Davydov [48], V. E. Fedorov et A. Debbouche [49], A. E. Fedorov et D. M. Gordievskikh [50], V. E. Federov, D. M. Gordievskikh, M. V. Plekhanova [51], D.M. Gorddievskikh , V.E. Fedorov [56], M. Kostic, V.E. Fedorov V.E [75], I. V. Melnikova [83], V. I. Nalimov [85] et M. V. Plekhanova [91]- [94].
le nouveauté de ce travail réside dans le cadre de la condition non locale, ce travail est une génération des résultats obtenus dans les travaux de V. E. Federov, D. M. Gordievskikh et M. V. Plekhanova [51], M. V. Plekhanova [91].
La condition non locale est un sujet d'actualité de ces dernières années. Leurs associations aux problèmes a apporté beaucoup d'amélioration au niveau de la modélisation, la rendant ainsi plus réaliste. La condition non locale jointe à l'équation principale au lieu de la condition initiale classique $x(0) = x_0$ s'avère nécessaire pour bien modéliser et décrire mathématiquement, des phénomènes physique comme en électronique, en mécanique des matériaux, où en biomathématique de la manière la plus proche de la réalité de nombreux phénomènes dans de multiples disciplines. La condition non locale signifie que la condition initiale le dépend de certains temps futurs.

Par exemple, $g(x)$ peut être donné par

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x(t_i),$$

où $c_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des constantes, la condition non locale a été initiée par Byszewski [18] lorsqu'il a prouvé l'existence et des solutions mildes et classiques de problèmes de Cauchy non localisés.

D'autres objectifs, est l'étude de la stabilité en temps fini du système d'ordre fractionnaire dégénéré avec retard, la stabilité du système linéaire est un domaine de recherche important dans la théorie du contrôle. La stabilité du système de dimension finie de l'équation différentielle ordinaire et fractionnaire est discutée dans [58] et [90]. Nos résultats d'existence et d'unicité de solution sont des généralisations des résultats obtenus dans les travaux de V. E. Fedorov et E. A. Omelchenko [54] dans le cas $\alpha = 1$. En suite en suivant les résultats obtenus dans les travaux de (voir [27], [30], [77], [78], [82], [88], [108], [110]) pour démonté la stabilité. Nous utilisons l'inégalité intégrale de Gronwall's généralisée [109].

Le dernier objectif, est L'étude du caractère bien posé du probème différentielle fractionnaire dégénéré avec des conditions aux limites périodiques dans les espaces fonctionnels vectoriels. Les résultats obtenus dans ce chapitre récupèrent les résultats obtenus dans les travaux de V. Keyantuo et C. Lizama [62] dans le cas $M = I_X$, $\gamma A = B$ et $\mu = 1$. Ainsi nos résultats sont similaires à ceux des travaux de S. Bu et G. Cai [10]- [15] et [23]. Nos principaux outils dans cette étude sont les théorèmes du multiplicateur de Fourier, sous des hypothèses appropriées sur l'opérateur résolvant modifié, ils ont fourni les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer le caractère bien posé de ce problème dans les espaces de Lebesgue-Bochner $L^p(\mathbb{T}; X)$, les espaces de Besov périodiques $B^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$ et les espaces périodiques Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$. tel que $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$.

Présentation de la thèse

Cette thèse comporte quatre chapitres, organisés comme suit.

❶ Le premier chapitre : est essentiellement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suite de ce travail. Ces rappels sont en grande partie basés sur l'ouvrage [107] et les papiers ([47], [48], [49]- [51], [56], [83], [85], [91]- [94]). Nous rappelons tout d'abord quelques résultats de base concernent les espaces de Base, la théorie des opérateurs résolvants, les semi-groupes, les semi-groupes dégénérés et les théorèmes des opérateurs multiplicateurs de Fourier, qui seront utiles et nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent.

❷ Le deuxième chapitre : L'objet principal du deuxième chapitre est l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions du problème integrodifférentiel fractionnaire non linéaire dégénéré soumis à une condition non locale

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}_{t} Lx(t) = Mx(t) + f(t, W(t)) + \displaystyle\int_0^t g(t, s, V(s))ds, \ t \in [0, T) & (0.6) \\ x^{(k)}(0) + h(x^{(k)}(t)) = x_k, \ k = 0, 1, ..., m-1, & (0.7) \end{cases}$$

où $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ des espaces de Banach, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un opérateur fermé linéaire densément défini de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.

Soient $f : Y_1 \longrightarrow \mathcal{Y}$, $g : Y_2 \longrightarrow \mathcal{Y}$ deux opérateurs non linéaires, tels que Y_1, Y_2 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R}\times\mathcal{X}^d$, $\mathbb{R}^2\times\mathcal{X}^r$ respectivement et soient $W : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{X}^d$, $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{X}^r$, $h : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ sont des fonctions données, telles que $W(t) = (x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(d-1)}(t))$ et $V = (x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(r-1)}(t))$, Y un ensemble tel que $Y = Y_1 \oplus Y_2$ et $m = \max\{d, r\}$, ${}^C D_t^\alpha$ est la dérivée de Caputo d'ordre α, $m - 1 < \alpha < m$.

Nous commençons d'abord par établir notre premier résultat d'existence et d'unicité de l'équation linéaire et non linéaire fractionnaire non dégénérée avec condition locale et non locale. Ensuite, nous présentons dans la deuxième section un autre résultat sur l'existence et l'unicité de l'équation fractionnaire dégénérée avec condition non locale. Le dernier résultat abordant l'existence et l'unicité sur l'équation non linéaire fractionnaire dégénérée avec condition généralisée non locale de Showalter-Sidorov, en utilisant les théorèmes concernant l'opérateur fortement (L, p)-sectoriel, fortement (L, p)-radial et (L, p)-borné, (L, σ)-borné. La validité de ces résultats sera illustrée par des exemples adéquats.

❸ Le troixième chapitre : Dans ce chapitre, nous avons utilisé les résultats du chapitre précédent pour la recherche des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité en temps fini du système d'évolution décrit par l'équation différentielle fractionnaire dégénérée avec retard en temps fini et avec condition initiale

$$\begin{cases} L\,{}^C D_t^\alpha u(t) = Mu(t) + \Phi u_t, \ t \in [0, T] & (0.8) \\ u(t) = \varphi(t), \ t \in [-\tau, 0], \varphi \in C([-\tau, 0]; \mathfrak{U}), & (0.9) \end{cases}$$

où D_t^α représente la dérivée fractionnaire de l'ordre $\alpha \in (0, 1]$. Nous supposons que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ sont les espaces de Banach, les opérateurs $L : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$, $\Phi : C([-\tau, 0]; \mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{F}$ sont linéaires et continus, $\mathrm{Ker} L \neq \{0\}$, l'opérateur $M : domM \longrightarrow \mathcal{F}$ est linéaire, fermé et densément défini dans $\mathcal{U}$ à $\mathcal{F}$, $u_t \in C([-\tau, 0]; \mathcal{U})$, $u_t = u(t + s)$ pour $s \in [-\tau, 0]$.

Dans la première section, nous étudions l'existence et l'unicité de solution du système décrit par une équations différentielle d'ordre fractionnaire dégénéré avec retard (0.8)–(0.9). Dans la deuxième section, nous présentons nos principaux résultats, en utilisant la méthode de stabilisation proposée est basée sur l'inégalité généralisée de Gronwall pour étudier la stabilité de la solution en temps fini .

❹ Le quatrième chapitre : ce chapitre est consacré à l'étude du caractère bien posé du problème différentielle fractionnaire dégénérée avec des conditions aux limites périodiques $(P_{\alpha,\beta})$:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha (Mu)(t) = \gamma A D_t^\beta u(t) + \mu A u(t) + f(t), \ 0 \leq t \leq 2\pi & (0.10) \\ (Mu)(0) = (Mu)(2\pi), \ 0 < \beta < \alpha \leq 1, & (0.11) \end{cases}$$

où A et M sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach complexe X satisfaisant $D(A) \subset D(M)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$. D_t^α est la dérivée fractionnaire

au sens de Caputo.
En utilisant la technique de multiplicateur de Fourier, elle a fourni les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer le caractère bien posé de ce problème dans les espaces de Lebesgue-Bochner $L^p(\mathbb{T};X)$, les espaces de Besov périodiques $B^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$ et les espaces périodiques Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$.
Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés et suggère les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

Mots-clés : Équations dégénérées, calcul fractionnaire, semi-groupe dégénéré, condition non locale, stabilité en temps fini, inégalité généralisée de Gronwall, multipilicateur de Fourier.

Publications

On donne ici un article, une comunication et deux posters réalisés sur les travaux de cette thèse.

- Articles publiés :

  ① Nonlinear Degenerate Fractional Evolution equations with Nonlocal Conditions, Fundamenta Informaticae 151(2017), 473–485. DOI 10.3233/FI-2017-1505, IOS Press.

- Comunications :

  ① Impulsive Fractional Dynamic Inclusions with Nonlocal Control : International Conference Mathematical Conputational Modelling in Science and Technology. ICMCMST'2015, August 02-07, 2015. Izmir University-Turkey. http :// icmcmst.alpha-publishing.net.

  ② Analyse de stabilité des systèmes fractionnaires dégénérés avec retard en temps fini : Journnées Jeunes Chercheurs En Mathématiques Et Applications. JJCMA'2018, 11-12, décembre 2018. Université de Badji Mokhtar-Annaba, Algérie.

- Posters :

  ① Existence and controllability for a class of degenerate impulsive fractional differential with nonlocal condition : 3èmes journnées "Problèmes Inverses et Applications", JIP'15, 26-28, octobre 2015. Université de Badji Mokhtar-Annaba, Algérie.

Notation

Notations et conventions

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$.
$\overline{\mathbb{R}}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\}$.
$\mathbb{R}_- = \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}$.
$\mathbb{R}_{a,+} = \{c \in \mathbb{R} : c > a\}$.
$\mathbb{R}_a = \{c \in \mathbb{R} : |c| > a\}$.
$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes,
Ω : Sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega = \Gamma =$ La frontière de Ω.
X : Espace de Banach.
$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$.
A^{-1} : Opérateur inversible.
$D(A)$: Domaine de définition de l'opérateur A.
$G(A)$: Graphe de l'opérateur A.
$N(A)$: Noyau de l'opérateur A.
$\mathcal{L}(X, Y)$: Espase des operateurs linéaires continus de X dans Y.
$\mathcal{C}l(X, Y)$: Espase des operateurs linéaires fermés de X dans Y.
$\mathbb{I}$ et $\mathbb{O}$: Les opérateurs d'identité et nul respectivement.
$\langle u, v\rangle$: Produit scalaire.
$\{X^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$: Semi-groupe.
$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C}/(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(F; X)\}$: Résolvant de l'opérateur M par rapport à l'opérateur L.
$\sigma^L(M) = \mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$: Spectre de l'opérateur M par rapport à l'opérateur L.
$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$: La somme directe des espaces $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$.

$H = M_0^{-1}L_0$ où $G = L_0M_0^{-1}$: Opérateur nilpotent.
$S_1 = L_1^{-1}M_1$: Opérateur généralisé.
$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu^L(M)d\mu$, $Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L_\mu^L(M)d\mu$: sont des opérateurs de projection.
$C_c(\Omega)$: Fonctions continues à support compact dans Ω.
$C^k(\Omega)$: Fonctions k fois continûment differentiales sur Ω (k entier ≥ 0).
$C([a,b],X)$: Espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace de Banach X.
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$ = grad u.
$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}\ldots x_N^{\alpha_N}}u$.
$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$.
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ = Laplacien de u.
$\Gamma(.)$: La fonction Gamma.
$B(.)$: La fonction Bêta.
$E_{\alpha,\beta}(.)$: La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres α et β.
$\hat{f}$: La transformée de Fourier d'une fonction f.
γ_j : Le j^{ieme} La fonction Rademarcher sur $[0,1]$.
$\gamma_j \otimes x$: La fonction vectorielle $t \longrightarrow r_j(t)x$ sur $[0,1]$.
$\mathscr{S}(\mathbb{R})$: Espace de Schwartz de toutes les fonctions lisses décroissantes rapidement sur $\mathbb{R}$.
$\mathscr{D}(\Omega)$: Ensemble des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ à support compact inclus dans un ouvert Ω.
$\mathscr{D}'(\Omega)$: Les distributions sur Ω et par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ les distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$.
$L^p(\Omega)$: Espace des fonctions p-integrable de lebesgue sur Ω.
$L^p(0,2\pi;X)$: Espace 2π-périodique de Lebesgue-Bochner.
$B_{p,q}^s(0,2\pi;X)$: Espace 2π-périodique de Besov.
$F_{p,q}^s(0,2\pi;X)$: Espace 2π-périodique de Triebel-Lizorkin.
$\mathcal{D}(\mathbb{T})$: Espace des fonctions infiniment différentiables sur $\mathbb{T}$.
$\mathcal{D}'(\mathbb{T},X)$: Espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ dans X.
$(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$: Une séquence scalaire.
$W^{1,p}$, $W_0^{1,p}$, $W^{m,p}$, H^1, H_0^1, H^m : Espaces de Sobolev.
$W_{per}^{1,p}(\mathbb{T};X)$: Espace périodique de Sobolev d'ordre 1.
$W_{per}^{\alpha,p}(\mathbb{T};X)$: Espace périodique de Sobolev fractionnaire d'ordre α.
L^p-Fourier : Multiplicateur de Fourier dans l'espace de Lebesgue-Bochner.
$B_{p,q}^s$-Fourier : Multiplicateur de Fourier dans l'espace de Besov $B_{p,q}^s$.
$F_{p,q}^s$-Fourier : Multiplicateur de Fourier dans l'espace de Triebel-Lizorkin $F_{p,q}^s$.

Chapitre 1

Préliminaires et résultats fondamentaux

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les notions essentielles, de même que les résultats fondamentaux, qui concernent les espaces de base, la théorie des opérateurs, les semi-groupes, la théorie du calcul fractionnaire, théorème de point fixe et différents théorèmes utilisés dans ce travail.

1.1 Espaces de Base

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx, et de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. X et Y sont deux espaces de Banach des normes respectives $\|.\|_X$, $\|.\|_Y$.

Définition 1.1.1. *Un espace de Banach est un espace véctoriel normé, complet pour une distance associée à la norme*

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ (i.e., $\int_\Omega |u| < +\infty$). On pose

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|dx,$$

p.p. = presque partout.

Définition 1.1.2. *Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose :*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}.$$

On vérifie que :

$$\|u\|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

définit une norme dans $L^p(\Omega)$.

Définition 1.1.3. *On définit l'espace des fonctions* $L^\infty(\Omega)$ *par*
$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *u mesurable et* $\exists$ *une constante C telle que* $|u(x)| \leq C$ *p.p. sur* $\Omega\}$, *sa norme est*

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C : |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Définition 1.1.4. *Soient X un espace de Banach,* $1 \leq p \leq +\infty$ *et* $[0,T]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$.

(i) Si $1 \leq p < +\infty$, *alors on appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X et on le note* $L^p(0,T;X)$ *l'espace des fonctions u tel que*
$L^p(0,T;X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X$, *t.q. la fonction* $t \longrightarrow \|u(t)\|^p$ *soit Lebesgue intégrable* $\}$
Sa norme est

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \Big(\int_0^T \|u\|_X^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Si $p = \infty$, *alors on note*
$L^\infty(0,T;X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X$, *t.q. l'application* $t \longrightarrow \|u(t)\|$ *soit mesurable,* $\sup ess_{t\in[0,T]}\|u\|_X$ *soit fini* $\}$, *sa norme est*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup ess_{t\in[0,T]}\|u\|_X.$$

Proposition 1.1.1. $L^p(0,T;X)$ *muni de la norme* $\|u\|_{L^p(0,T;X)}$, $1 \leq p \leq \infty$ *est un espace de Banach.*

Théorème 1.1.1. *(voir [4], Inégalité de Hölder) Soient* $u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors* $u.v \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si $p = q = 2$ *on aura l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

1.1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.5. *Un espace de Hilbert est un espace vectotiel H muni d'un produit scalaire* (u,v) *et qui est complet pour la norme* $(u,u)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1.1.1. *L'espace* L^2 *muni du produit scalaire*

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx,\ u,\ v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

1.1.3 Espaces de Sobolev

1.1.3.1 Dérivée faible

Définition 1.1.6. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}$, *et* $1 \leq i \leq n$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *une fonction à une i-ème dérivée faible dans* $L^1_{loc}(\Omega)$, *s'il existe* $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ *telle que pour toute* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ *on ait*

$$\int_\Omega f(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens des distributions, on écrira

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i,\ 1 \leq i \leq n.$$

1.1.3.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in \mathbb{R}$, où $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) :\ tel\ que\ \partial_i f \in L^p(0,T;X),\ 1 \leq i \leq n\},$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible de $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.
On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

1.1.3.3 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$ on définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega)\ tel\ que\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq m\},$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $D^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens de la Définition 1.1.6.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|f\|_{L^p} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|Df\|_{L^p}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.1.1. *Les espaces H^m sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(f,g)_{H^m} = (f,g)_{L^2} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} (Df, Dg)_{L^2},\ pour\ f,g \in H^m(\Omega).$$

1.1.4 Espaces de Besov.

Nous rappelons briévement la définition des espaces 2π-périodiques de Besov dans le cas vectoriel comme présenté dans [3]. Soit $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz de toutes les fonctions régulières et rapidement décroissantes sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{D}(0,2\pi)$ l'espace de toutes les fonctions infiniment dérivables sur $[0,2\pi]$ avec la topologie localement convexe donnée par la famille des semi-normes.

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f^{(\alpha)}(x)|,$$

pour $\alpha \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Soit $\mathscr{D}'(0,2\pi;X) := \mathcal{L}(\mathscr{D}(0,2\pi;X))$ l'espace de tous les opérateurs linéaires continus de $\mathscr{D}([0,2\pi])$

dans X. Afin de définir les espaces de Besov, nous considérons les sous-ensembles dyadiques de $\mathbb{R}$:

$$I_0 = \{t \in \mathbb{R} : |t| \leq 2\}, \quad I_k = \{t \in \mathbb{R} : 2^{k-1} < |t| \leq 2^{k+1}\}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $\phi(\mathbb{R})$ l'ensemble de tous les systèmes $\phi = (\phi_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ satisfaisant $\text{supp}(\phi_k) \subset \bar{I}_k$ pour chaque $k \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \phi_k(x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$, et pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\sup_{x\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}_0} 2^{k\alpha}|\phi_k^{(\alpha)}(x)| < \infty$. Pour $f \in \mathscr{D}'(0, 2\pi; X)$, nous fixons $\hat{f}(k) = f(e_k)$. nous appelons $\hat{f}(k)$ $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f.
Soit $\phi = (\phi_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \phi(\mathbb{R})$ est fixé. Pour $1 \leq p, q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, l'espace 2π-périodique de Besov à valeurs dans X est noté par $B^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$ et défini par l'ensemble

$$\left\{ f \in \mathscr{D}'(0, 2\pi; X) : \|f\|_{B^s_{p,q}} := \Big(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq} \| \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k \otimes \phi_j(k)\hat{f}(k)\|_p^q \Big)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

avec la modification usuelle si $q = \infty$, alors on a

$$\|f\|_{B^s_{p,\infty}(0,2\pi;X)} = \sup_{j\geq 0} 2^{sj} \| \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k \otimes \phi_j(k)\hat{f}(k)\|_p,$$

l'expression $\|f\|_{B^s_{p,q}(0,2\pi;X)}$ est une norme. Il est connu que $B^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$ est indépendant du choix de ϕ et différent choix de ϕ conduisent à des normes équivalentes $\|.\|_{B^s_{p,q}(0,2\pi;X)}$, muni de la norme $\|.\|_{B^s_{p,q}(0,2\pi;X)}$, $B^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$ est un espace de Banach.
On sait aussi que si $s_1 \leq s_2$, alors $B^{s_2}_{p,q}(0, 2\pi; X) \subset B^{s_1}_{p,q}(0, 2\pi; X)$ (injection continue) [3]. Lorsque $s > 0$, il est prouvé dans [3] que $B^s_{p,q}(0, 2\pi; X) \subset L^p_{p,q}(0, 2\pi; X)$ (injection continue). De plus, $f \in B^{s+1}_{p,q}(0, 2\pi; X)$ si et seulement si f est différentiable p.p. sur $[0, 2\pi]$ et $f' \in B^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$.
Dans le cas où $p = q = \infty$ et $0 < s < 1$, alors $B^s_{\infty,\infty}(0, 2\pi; X)$ correspond à l'espace des fonctions continues Höldiriennes avec la norme équivalente

$$\|f\|_{C^s(0,2\pi;X)} = \sup_{t_1\neq t_2} \frac{\|f(t_2) - f(t_1)\|_X}{|t_2 - t_1|^s} + \|f\|_\infty.$$

1.1.5 Espaces Triebel-Lizorkin.

Soit $\phi = (\phi_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \phi(\mathbb{R})$ a fixé avec ϕ et $\phi(\mathbb{R})$ comme ci-dessus. Pour $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, l'espace 2π-périodique de Triebel-Lizorkin à valeur dans X avec des paramètres s, p et q est dénoté par $F^s_{p,q}(0, 2\pi; X)$ et défini par l'ensemble

$$\left\{ f \in \mathscr{D}'(0, 2\pi; X) : \|f\|_{F^s_{p,q}} := \left\| \Big(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq} \| \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k \otimes \phi_j(k)\hat{f}(k)\|_X^q \Big)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < \infty \right\},$$

avec la modification usuelle si $q = \infty$, alors on a

$$\|f\|_{F^s_{p,\infty}(0,2\pi;X)} = \left\| \sup_{j\geq 0} 2^{sj} \| \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k \otimes \phi_j(k)\hat{f}(k)\|_X \right\|_p,$$

l'expression $\|f\|_{F^s_{p,q}(0,2\pi;X)}$ est une norme. Il est connu que $F^s_{p,q}(0,2\pi;X)$ est indépendant du choix de ϕ et différent choix de ϕ conduisent à des normes équivalentes $\|.\|_{F^s_{p,q}(0,2\pi;X)}$, muni de la norme $\|.\|_{f^s_{p,q}(0,2\pi;X)}$, $F^s_{p,q}(0,2\pi;X)$ est un espace de Banach.
On sait aussi que si $s_1 \leq s_2$, alors $F^{s_2}_{p,q}(0,2\pi;X) \subset F^{s_1}_{p,q}(0,2\pi;X)$ (injection continue) [16]. Lorsque $s > 0$, il est prouvé dans [16] que $F^s_{p,q}(0,2\pi;X) \subset L^p_{p,q}(0,2\pi;X)$ (injection continue). De plus, comme dans le cas de $B^s_{p,q}(0,2\pi;X)$, $f \in F^{s+1}_{p,q}(0,2\pi;X)$ si et seulement si f est différentiable p.p. sur $[0,2\pi]$ et $f' \in F^s_{p,q}(0,2\pi;X)$.
Le cas exceptionnel $p = \infty$ ne sera pas considéré ici.

1.1.6 Espaces UMD.

Les espaces de Banach fournissent un cadre de travail parfois insuffisant. Il faut alors se placer dans un espace ayant des propriétés supplémentaires, il s'agit des espaces UMD (Unconditional Martingale Difference). A l'origine, ces espaces font intervenir la théorie des martingales à valeurs vectorielles. Cependant, on utilise ici une autre définition équivalente. Celle-ci utilise la transformée de Hilbert. L'équivalence entre les deux définitions est démontrée dans Burkholder [17] et Bourgain [9].
Soit X un espace de Banach et $1 < p < \infty$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R};X)$ et $0 < \varepsilon < R$, soit

$$(H_{\varepsilon,R}f)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\leq|t-s|\leq R}\frac{f(s)}{t-s}ds = (\psi_{\varepsilon,R} * f)(t),\ t \in \mathbb{R},$$

où

$$\psi_{\varepsilon,R}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi t} \quad si \quad \varepsilon \leq t \leq R. \\ \\ 0 \quad autrement. \end{cases}$$

Puisque, $\psi_{\varepsilon,R} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $H_{\varepsilon,R} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X))$ par l'inégalité de Young. Pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, les transformations de Hilbert de f sont données par

$$Hf = \lim_{\varepsilon\downarrow 0 R\longrightarrow\infty} H_{\varepsilon,R}f.$$

On dit qu'un espace de Banach X est UMD, si la transformée de Hilbert s'étend à un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R};\mathbb{X})$ pour certains (et ensuite tous) $1 < p < \infty$.
Une autre notion importante dans la théorie de l'espace de Banach est celle de type de Fourier pour un espace de Banach. Les conditions pour les multiplicateurs de Fourier dans $B^s_{p,q}(0,2\pi;X)$ sont simplifiées lorsque l'espace de Banach impliqué a un type de Fourier non trivial. Pour le plus détails sur la notion d'espaces UMD Banach, nous renvoyons le lecteur à [2].

Exemple 1.1.2. *1. Tout espace de Hilbert est un espace UMD.*

2. *Soient Ω un espace mesuré σ-fini et $p \in]1,+\infty[$. Si X est un espace UMD, alors $L^p(\Omega,X)$ est un espace UMD.*
3. *Tout sous-espace fermé d'un espace UMD est un espace UMD.*

4. Tout espace isomorphe à un espace UMD est un espace UMD.

1.2 Théorie des opérateurs

Soient $(\mathcal{X}, \|.\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|.\|_{\mathcal{Y}})$ deux espaces de Banach.

1.2.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.2.1. *Un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ est une application linéaire $A : D(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, tel que pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a*

- $A(x + y) = Ax + Ay$,
- $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

(On écrit toujours $A(x) = Ax$ pour tout $x \in D(A)$).

Remarque 1.2.1. *$D(A)$ est appelé le domaine de A. On dit que A est à domaine dense (ou densément défini) si $\overline{D(A)} = \mathcal{X}$, i.e. si pour tout $x \in \mathcal{X}$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que $x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n$.*

Remarque 1.2.2. *Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, nous noterons par :*

$$imA = \{y \in \mathcal{Y},\ \exists x \in D(A) :\ y = A(x)\},$$

l'image de A.

$$kerA = \{x \in D(A) :\ A(x) = 0\},$$

le noyan de A,

$$G(A) = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} :\ x \in D(A),\ y = Ax\},$$

le graphe de A.

Remarque 1.2.3. *Si A est injectif, on peut définir l'inverse de A, noté A^{-1} par*

$$\begin{aligned} A^{-1} :\ A(D(A)) &\longrightarrow D(A) \\ y &\longmapsto A^{-1}y = x \end{aligned}$$

où $x \in D(\mathcal{X})$ est défini par $Ax = y$.

Définition 1.2.2. *Soient A et B deux opérateurs linéaires de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \quad et \\ \forall x \in D(A),\ Ax = Bx. \end{cases}$$

1.2.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.3. *On dit qu'un opérateur linéaire A défini de $\mathcal{X}$ tout entier dans $\mathcal{Y}$ est borné s'il est continu, i.e., si pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$,*

$$\Big(\lim_{x\longrightarrow x_0} \|x - x_0\|_{\mathcal{X}} = 0\Big) \Rightarrow \Big(\lim_{x\longrightarrow x_0} \|Ax - Ax_0\|_{\mathcal{Y}} = 0\Big).$$

Ce qui est équivalent à $\lim_{x\longrightarrow x_0} \|Ax\|_{\mathcal{Y}} = 0$.
On note $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. On pose $\mathcal{L}(\mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{X})$.

Proposition 1.2.1. *On définit alors une norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ notée $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})}$ et définie pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ par*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} := \sup_{x\in\mathcal{X},\ x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}\leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Ax\|_{\mathcal{Y}}.$$

On a l'équivalence suivante

$$A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}) \Leftrightarrow \Big(\exists M > 0,\ \forall x \in \mathcal{X},\ \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq M\|x\|_{\mathcal{X}}\Big).$$

Proposition 1.2.2. *Si $\mathcal{Y}$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ est un espace de Banach.*

Remarque 1.2.4. *Une suite des opérateurs $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ est appelée uniformément convergente à un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ si $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})} = 0$, Cette suite est fortement convergente vers A si $\forall x \in \mathcal{X}; \lim_{n\longrightarrow\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{Y}}$. tel que la convergence est indiquée comme suit : $A = s\text{-}\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n$.*

Théorème 1.2.1. *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $imA = \mathcal{Y}$ et A est inversible. Alors A est un opérateur inversible continu .*

Théorème 1.2.2. *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach et soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ tel que $\|A\| < 1$. Alors $I - A$ est un opérateur inversible continu et*

$$\|(I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}.$$

1.2.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.2.4. *Un opérateur linéaire de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ est fermé si son graphe est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

Définition 1.2.5. *Un opérateur linéaire est dit fermable s'il admet une extension fermée.*

Proposition 1.2.3. *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est fermé si et seulement si*

pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* $D(A)$ *telle que*

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \text{ dans } \mathcal{X}, \\ Ax_n \longrightarrow y \text{ dans } \mathcal{Y}, \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ *et* $Ax = y$.

L'ensemble des opérateurs fermés $A : D(A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ avec domaine de définition dense dans l'espace $\mathcal{X}$ sera notée par $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$.
L'ensemble des opérateurs $\mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{X})$ seront désignés par $\mathcal{C}l(\mathcal{X})$.

Théorème 1.2.3. *Si un opérateur* A *est fermé et inversible, alors l'opérateur* A^{-1} *est fermé.*

Définition 1.2.6. *Soit* A *un opérateur linéaire fermé sur* $\mathcal{X}$. *L'ensemble résolvant* $\rho(A)$ *de* A *est définit par*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(\mathcal{X})\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$ *on définit la résolvante* $R_\lambda(A)$ *de* A *au point* λ *par*

$$R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Le spectre de A, *noté* $\sigma(A)$ *est défini par* $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$.

Proposition 1.2.4. *Soit* A *un opérateur linéaire fermé sur* $\mathcal{X}$. *On a la formule de l'identité de la résolvante, i.e., pour tout* $\lambda, \mu \in \rho(A)$

$$R_\lambda(A)R_\mu(A) = \frac{R_\lambda(A) - R_\mu(A)}{\mu - \lambda}.$$

Proposition 1.2.5. *Soit* A *un opérateur linéaire fermé sur* $\mathcal{X}$. *Alors l'application* $R : \lambda \in \rho(A) \longmapsto R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *est analytique sur* $\rho(A)$.

Proposition 1.2.6. *Soit* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *un opérateur linéaire.*

1. *Si* A *est un opérateur fermé, alors pour tout* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ *l'opérateur* $A + B : D(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *est fermé.*
2. *Si* A *est un opérateur fermé et injectif alors* A^{-1} *est fermé.*
3. *Si* A *est un opérateur fermé à valeurs dans* $\mathcal{X}$ *et* $D(A)$ *est fermé dans* $\mathcal{X}$ *alors* A *est continu de* $D(A)$ *dans* $\mathcal{X}$ *(Application directe du théorème du graphe fermé).*
4. *Si* A *est un opérateur continu de* $D(A)$ *dans* $\mathcal{X}$, *alors* A *est fermé si et seulement si son domaine est fermé.*
5. *Si* $\rho(A) \neq \emptyset$ *alors* A *est fermé.*

Théorème 1.2.4. *L'ensemble résolvant* $\rho(A)$ *est ouvert, et le spectre* $\sigma(A)$ *est fermé.*

Définition 1.2.7. *Soit* $A : D(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *un opérateur linéaire, on peut munir* $D(A)$ *d'une norme notée* $\|.\|_{D(A)}$ *et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout* $x \in D(A)$ *par*

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|Ax\|_{\mathcal{Y}}.$$

Proposition 1.2.7. *Si A est un opérateur linéaire fermé, alors $\left(D, \|.\|_{D(A)}\right)$ est un espace de Banach.*

Théorème 1.2.5. *Le spectre d'un opérateur continu A réside dans le cercle*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}\}.$$

Théorème 1.2.6. *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach et soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Alors Il existe une limite finie*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{L}(\mathcal{X})},$$

appelé rayon spectral de l'opérateur A et $r_\sigma(A) \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}$.

Théorème 1.2.7. *Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach, l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, et $|\lambda| > r_\sigma(A)$. Alors $\lambda \in \rho(A)$.*

Théorème 1.2.8. *$R_\lambda(A)$ est une fonction analytique au tout point $\lambda \in \rho(A)$.*

Remarque 1.2.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ avec $|\lambda| > r_\sigma(A)$. Alors, d'aprés le Théorème 1.2.2, on obtient*

$$R_\lambda(A) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Un opérateur A est appelé idempotent si $A^2 = A$. Le projecteur est un idempotent d'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Sur un espace $\mathcal{X}$ il existe un projecteur A si et seulement si $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, ou $A|_{\mathcal{X}^0} = \mathbb{O}$, $A|_{\mathcal{X}^1} = \mathbb{I}$.

1.2.1.3 Opérateurs radials

Définition 1.2.8. *Un opérateur $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$ satisfaisant les conditions*

$$\exists a \in \mathbb{R}, \ \forall \mu \in \mathbb{R}_{a,+}, \ \mu \in \rho(A),$$

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \ \forall \mu \in \mathbb{R}_{a,+}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \|(R_\mu(A))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^n},$$

est appelé radial.

1.2.1.4 Opérateurs sectoriels

Définition 1.2.9. *Un opérateur $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{V})$ est applé sectoriel si il satisfait les conditions*

$$\exists a \in \mathbb{R}, \ \exists \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi),$$

$$S_{a,\theta}(A) = \left\{\mu \in \mathbb{C}, \ |\arg(\mu - a)| < \theta, \mu \neq a\right\} \subset \rho(A),$$

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall \mu \in S_{a,\theta}(A), \|(R_\mu(A))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq \frac{K}{|\mu - a|}.$$

1.2.2 Résolvantes généralisées

1.2.2.1 Notion de M-L résolvante

Dans cette partie, on rappelle quelques notions qui seront utiles dans notre analyse. Ces notions sont bien exposées et repertorées dans le livre [107].
Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces de Banach, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\ \mathcal{F})$ et $M : domM \subset \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un opérateur linéaire et fermé.

Définition 1.2.10. *On appelle ensemble résolvant de l'opérateur M par rapport à L l'ensemble défini par*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} \setminus (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\},$$

(ou brièvement, M-L résolvant).
L'ensemble $\sigma^L(M) = \mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$ est appelé le spectre de l'opérateur M par rapport à L (ou brièvement, M-L spectre), et la résolvante de M par rapport à L est définie par

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L,\ L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1},$$

(ou brièvement, M-L résolvante).

Remarque 1.2.6. *L'ensemble M-L résolvant est ouvert, et l'ensemble M-L spectre est fermé.*

Définition 1.2.11. *Les opérateurs $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ sont appelés respectivement une résolvante, résolvante à droite et résolvante à gauche d'un opérateur M par rapport à l'opérateur L (ou brièvement, M-L résolvante, M-L résolvante droite et M-L résolvante gauche respectivement).*

Remarque 1.2.7. *Lorsqu'il existe un opérateur $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, M-L résolvante à droite (resp. à gauche) coincide avec la résolvant de $L^{-1}M$ (ML^{-1}).*

Soit $\mu \in \rho^L(M)$, alors

$$\begin{aligned}(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} &= I + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1},\\ (\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) &= I + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}L.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Lemme 1.2.1. *Soient l'opérateur $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\ \mathcal{F}))$, et $M : domM \subset \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un opérateur linéaire et fermé. Alors M-L résolvante, et M-L résolvante droite (resp. gauche) respectivement sont continues sur $\rho^L(M)$.*

Théorème 1.2.9. *Dans les conditions du lemme précédent, les M-L résolvantes droite et gauche sont analytiques dans $\rho^L(M)$.*

En écrivant, maintenant les identités (1.1) sous la forme

$$\begin{aligned}M(\mu L - M)^{-1} &= \mu L^L_\mu(M) - I,\\ (\mu L - M)^{-1}M &= \mu R^L_\mu(M) - I.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Il en résulte évidemment une identité

$$M(\mu L - M)^{-1}L = L(\mu L - M)^{-1}M. \tag{1.3}$$

Remarque 1.2.8. *D'après les expréssions de* (1.2)*, il s'ensuit immédiatement que pour chaque* $\mu \in \rho^L(M)$*, les opérateurs* $M(\mu L - M)^{-1}$ *et* $(\mu L - M)^{-1}M$ *sont linéaires et peuvent être étendus aux continus dans les espaces* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{U}$*, respectivement,*

Lemme 1.2.2. *Soient les points* $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$*. Alors*
(i) $im\ R^L_\lambda(M) = im\ R^L_\mu(M)$, $im\ L^L_\lambda(M) = im\ L^L_\mu(M)$,
(ii) $ker\ R^L_\lambda(M) = ker\ L$, $ker\ L^L_\lambda(M) = \{Mu \mid u \in domM \cap ker\ L\}$.

Définition 1.2.12. *Soient* $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0, 1, \ldots, p$*. Les opérateurs*

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_p}(M) \quad et \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_p}(M),$$

sont appelés respectivement le p-résolvant droit et le p-résolvant gauche de l'opérateur M *par rapport à l'opérateur* L *(ou brièvement,* (L,p)*-résolvant droit,* (L,p)*-résolvant grauche de* M*).*

Définition 1.2.13. *L'ensemble* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathcal{U}$ *s'appelle une chaîne du vecteur propre* $\varphi_0 \in ker\ L$ *adjoint à l'opérateur* M *(ou simplement,* M*-adjoint) si*

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad \varphi_q \notin kerL, \quad q = 0, 1, \ldots$$

Une chaîne est finie s'il existe un tel M-adjoint vecteur φ_p, si que $\varphi_q \notin$ dom M, où $M\varphi_q \notin$ im L. En particulier, le vecteur propre φ_0 n'a pas M-adjoint vecteur si $\varphi_0 \notin$ dom M où $M\varphi_0 \notin$ im L.
La puissance de la chaîne finie est appelée sa longueur. Quand une chaîne est infinie, nous disons qu'elle a une longueur nulle.

1.2.2.2 Opérateurs p-radials

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ des espaces de Banach, et $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$.
Supposons que $\mathcal{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M)$, $\mathcal{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M)$. On désigne par $M_0(L_0)$ la restriction de l'opérateur $M(L)$ à $domM_0 = \mathcal{U}^0 \cap domM(\mathcal{U}^0)$.

Lemme 1.2.3. $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$, $M_0 : domM_0 \longrightarrow \mathcal{F}^0$.

Définition 1.2.14. *On dit qu'un opérateur* M *est p-radial par rapport à l'opérateur* L *(ou brièvement,* (L,p)*-radial), si*
(i) $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall \mu \in \mathbb{R}_{a,+}$, $\mu \in \rho^L(M)$,
(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+$, $\forall \mu_k \in \mathbb{R}_{a,+}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^{p}(\mu_k - a)^n},$$

où $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p)$.

Remarque 1.2.9. *Sans perte de généralité, il peut être supposé dans la Defénition 1.2.14 que* $a = 0$. *En prenant cela en compte dans la discussion suivante, nous supposons que* $a = 0$.

Définition 1.2.15. *L'opérateur* M *est appelé faiblement* (L, p)*-radial, si la condition (i) est satisfaite ainsi que la condition (ii) lorsque* $n = 1$ *dans la Définition 1.2.14.*

Evidemment, si M est un opérateur (L, p)-radial, alors il est faiblement (L, p)-radial. L'inverse n'est pas vrai lorsque que $K \leq 1$.

Lemme 1.2.4. *Soit* M *un opérateur faiblement* (L, p)*-radial. Alors*

$$ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap im R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\},$$

$$ker L^L_{(\mu,p)}(M) \cap im L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}.$$

Lemme 1.2.5. *Soit* M *un opérateur faiblement* (L, p)*-radial. Alors il existe un opérateur* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

Soit M un opérateur faiblement (L, p)-radial. Alors ils existe deux opérateurs $H = M_0^{-1} L_0$ et $G = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$.

Lemme 1.2.6. *Soit* M *un opérateur faiblement* (L, p)*-radial. Alors les opérateurs* H *et* G *sont nilpotents d'une puissance n'excédant pas* p.

Lemme 1.2.7. *Soit* M *un opérateur faiblement* (L, p)*-radial . Alors* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$.

Théorème 1.2.10. *Soit* $\mathcal{U}(\mathfrak{F})$ *un espace réflexif et* M *un opérateur faiblement* (L, p)*-radial. Alors* $\mathfrak{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1)$.

Définition 1.2.16. *L'opérateur* M *est appelé fortement* (L, p)*-radial à droite (resp. à gauche) si il est* (L, p)*-radial et*

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\|_{\mathfrak{U}} \leq \ const(u)[\lambda \prod_{k=0}^{p} u_k]^{-1}, \ \forall \ u \in domM,$$

(il existe $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ *linéaire dense dans* $\mathcal{F}$ *tel que*

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathcal{F}} \leq \ const(f)[\lambda \prod_{k=0}^{p} u_k]^{-1}, \ \forall \ f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}),$$

pour chaque $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}_+$.

Corollaire 1.2.1. *Soit* M *un opérateur fortement* (L, p)*-radial à droite et à gauche. Alors*

(i) $\forall u \in \mathfrak{U}, \ \ LPu = QLu,$

(ii) $\forall u \in domM, \ \ Pu \in domM$ *et* $MPu = QMu.$

On note $L_1(M_1)$ la restriction de l'opérateur $L(M)$ dans $\mathcal{U}^1(\mathcal{U}^1 \cap domM = domM_1)$.

Corollaire 1.2.2. *Dans les conditions du Corollaire 1.2.1, l'opérateur $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$, et les opérateurs $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$.*

Remarque 1.2.10. *Soit L un opérateur continu inversible et l'opérateur $S = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$ est radial alors l'opérateur M est fortement (L,p)-radial.*

Théorème 1.2.11. *Soit M un opérateur fortement (L,p)-radial à droite (resp. à gauche). Alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1)$.*

Considérons la condition sous laquelle il existe un opérateur continu $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

Définition 1.2.17. *L'opérateur M est appelé fortement (L,p)-radial, si il est fortement (L,p)-radial sur la gauche et*

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq K[\lambda \prod_{k=0}^{p} u_k]^{-1},\ \forall\ \lambda, \mu_0, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}_+.$$

Théorème 1.2.12. *Soit M un opérateur fortement (L,p)-radial. Alors il existe un opérateur $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

1.2.2.3 Opérateurs p-sectoriels

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ des espaces de Banach, et soit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$.

Définition 1.2.18. *L'opérateur M est appelé p-sectoriel par rapport à l'opérateur L avec un nombre $p \in \mathbb{N}_0$ (ou brièvement, (L,p)-sectoriel) si*

(i) il existe des constantes $a \in \mathbb{R}$ et $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tel que le secteur

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\arg(\mu - a)| < \theta,\ \mu \neq a\} \subset \rho^L(M),$$

(ii) il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\max\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{K}{\prod_{q=0}^{p} |\mu_q - a)|},$$

pour chaque $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$.

On voit facilement qu'un opérateur (L,p)-sectoriel est faiblement (L,p)-radial.

Lemme 1.2.8. *Soit M un opérateur (L,p)-sectoriel. Alors Il existe des constantes C, $R \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $\mu \in S^L_\theta(M) \backslash \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| > R\}$,*

$$\|(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq C(1 + |\mu|^p).$$

Théorème 1.2.13. *Soit M un opérateur (L,p)-sectoriel. Alors*

(i) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) \cap im\ R^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$,

(ii) $ker\ L^L_{(\mu,p)}(M) \cap im\ L^L_{(\mu,p)}(M) = \{0\}$.

Lemme 1.2.9. *Soit M un opérateur (L,p)-sectoriel. Alors les opérateurs $L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$ et $M_0 : domM \cap \mathcal{U}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^0$.*

Lemme 1.2.10. *Soit M un opérateur (L,p)-sectoriel. Alors $\sigma^L_0(M) = \emptyset$.*

Corollaire 1.2.3. *([107]) Dans les conditions du Lemme 1.2.10, il existe un opérateur $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.*

Théorème 1.2.14. *Si l'opérateur M est (L,p)-sectoriel. Alors $\mathcal{U}^0 = ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ et $\mathcal{F}^0 = ker L^L_{(\mu,p)}(M)$.*

Corollaire 1.2.4. *Dans les conditions du Théorème 1.2.14, $\mathcal{U}^0 \cap \mathcal{U}^1 = \{0\}$ et $\mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}^1 = \{0\}$.*

Supposons $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $G = L_0M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$.

Corollaire 1.2.5. *Dans les conditions du Théorème 1.2.14, les opérateurs H et G sont nilpotents et leur degré de nilpotence ne dépasse pas le nombre p.*

Définition 1.2.19. *L'opérateur M est appelé fortement (L,p)-sectoriel à droite (resp. à gauche) si il est (L,p)-sectoriel et*

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\|_{\mathcal{U}} \leq C_1/|\lambda| \prod_{q=0}^{p} |u_q|,\ \forall\ u \in domM,$$

où $C_1 = const(u)$ (il existe un linéaire $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ dense dans $\mathcal{F}$ tel que

$$\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathcal{F}} \leq C_2/|\lambda| \prod_{k=0}^{p} |u_q|,\ \forall\ f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}},$$

où $C_2 = const(f))$; $\lambda, \mu_q \in S^L_\theta(M)$, $q = 0,1,\ldots,p$.

Corollaire 1.2.6. *Soit M un opérateur fortement (L,p)-sectoriel à droite et à gauche. Alors*
(i) $\forall u \in \mathcal{U}$, $LPu = QLu$,
(ii) $\forall u \in domM$, $Pu \in domM$ et $MPu = QMu$.

Notons $L_1(M_1)$ la restriction d'un opérateur $L(M)$ sur U^1 ($domM_1 = M \cap \mathcal{U}^1$). Par $domM_0$, on désignera respectivement $domM \cap U^0$. En vertu du Corollaire 1.2.6 est vrai.

Corollaire 1.2.7. *Dans les conditions du Corollaire 1.2.6, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\ \mathcal{F}^1)$ et $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^k;\ \mathcal{F}^k)$, $k = 0,1$.*

Remarque 1.2.11. *Il résulte du Corollaire 1.2.6 que l'opérateur M_0 est bijectif.*

Définition 1.2.20. *Soit M un opérateur fortement (L,p)-sectoriel, si il est fortement (L,p)-sectoriel sur la gauche et*

$$\|(\lambda L - M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\ \mathcal{U})} \leq const/(|\lambda|\Pi_{q=0}^{p}|\mu_q|),$$

pour chaque $\lambda, \mu_q \in S^L_\theta(M)$, $q = 0,\ldots,p$.

Théorème 1.2.15. *Soit M un opérateur fortement (L,p)-sectoriel. Alors il existe un opérateur $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.*

1.2.2.4 Opérateurs σ-bornés

Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ des espaces de Banach, et les opérateurs $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$.

Définition 1.2.21. *Un opérateur M est appelé spectralement borné par rapport à l'opérateur L (ou brièvement, (L,σ)-borné), si*

$$\exists a \in \mathbb{R}_+,\ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Remarque 1.2.12. *Soit $domM = \mathcal{U}$ et soit il existe un opérateur $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$. L'opérateur M est (L,σ)-borné précisément lorsque l'opérateur $L^{-1}M$ (ou, ML^{-1}) est borné.*

Soit M un opérateur (L,σ)-borné, et le contour $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\mu| = r > a\}$. Considérons les intégrales du type $F.\ Riss$

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu^L(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L_\mu^L(M)d\mu.$$

Lemme 1.2.11. *Soit M un opérateur (L,σ)-borné. Alors les opérateurs $P : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ et $Q : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ sont des projecteurs.*

Supposons $\mathcal{U}^0 = \ker P$, $\mathcal{F}^0 = \ker Q$, $\mathcal{U}^1 = \mathrm{im}P$, $\mathcal{F}^1 = \mathrm{im}Q$. Soit la restriction de l'opérateur $L(M)$ dans $\mathcal{U}^k(domM \cap \mathcal{U}^k)$, $k = 0,1$, on le note par $L_k(M_k)$.

Théorème 1.2.16. *Soit M un opérateur (L,σ)-borné. Alors*
(i) $L_k : \mathcal{U}^k \longrightarrow \mathcal{F}^k$, $M_k : domM \cap \mathcal{U}^k \longrightarrow \mathcal{F}^k$, $k = 0,1$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0;\mathcal{F}^0)$, et $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1;\mathcal{F}^1)$,
(ii) il existe un opérateur $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$,
(iii) il existe un opérateur $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

Définition 1.2.22. *Si M un opérateur (L,σ)-borné et soit les opérateurs $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$.*
• Si $H = \mathbb{O}$, alors le point ∞ est appelé une singularité amovible de M-L résolvante et M un opérateur $(L,0)$-borné.
• Si $H^p \neq \mathbb{O}$ et $H^{p+1} = \mathbb{O}$ alors le point ∞ est appelé pôle d'ordre $p \in \mathbb{N}$ de M-L résolvante et M un opérateur (L,p)-borné.
• Si $\forall p \in \mathbb{N}$, $H^p \neq \mathbb{O}$, alors le point ∞ est appelé singularité essentielle de M-L résolvante et M un opérateur (L,∞)-borné.

L'identité pseudo résolvante et le théorème de l'intégrale de Cauchy implique l'affirmation suivante.

Lemme 1.2.12. *Soient $\alpha,\beta > 0$, M un opérateur (L,σ)-borné, $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$,*

$$U_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)E_{\alpha,\beta}(\mu t^\alpha)d\mu,\ t \geq 0,$$

$$(V_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} L_{\mu}^{L}(M)E_{\alpha,\beta}(\mu t^{\alpha})d\mu,\ t \geq 0).$$

Alors pour tout $t \geq 0$, $U_{\alpha,\beta}(t)P = PU_{\alpha,\beta}(t) = U_{\alpha,\beta}(t)$ *et* $(V_{\alpha,\beta}(t)P = PV_{\alpha,\beta}(t) = V_{\alpha,\beta}(t))$.

Corollaire 1.2.8. *Soient* $\alpha, \beta > 0$, M *un opérateur* (L,σ)*-borné. Alors pour tout* $t \geq 0$, $\mathcal{X}^0 \subset$ *Ker* $U_{\alpha,\beta}(t)$, *im* $U_{\alpha,\beta}(t) \subset \mathcal{X}^1$, $(\mathcal{Y}^0 \subset$ *Ker* $V_{\alpha,\beta}(t)$, *im* $V_{\alpha,\beta}(t) \subset \mathcal{Y}^1)$.

Lemme 1.2.13. *Soient* $\alpha, \beta > 0$, *si l'opérateur* M *est* (L,σ)*-borné. Alors pour tout* $t \geq 0$, $U_{\alpha,\beta}(t) = E_{\alpha,\beta}(L_1^{-1}M_1 t^{\alpha})P$.

Corollaire 1.2.9. *Soit* M *un opérateur* (L,σ)*-borné. Alors pour tout* $t \geq 0$.

(i) $S_1 \equiv L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$ *est un générateur infinitesimal de* $\mathcal{C}_0$ *semi-groupe analytique* $\{U^1_{\alpha,\beta}(t)|_{\mathcal{X}^1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1) : t \geq 0\}$,

(ii) $\sigma^L(M) = \sigma(L_1^{-1}M_1)$.

1.2.2.5 Relation entre les opérateurs (L,σ)-bornés et (L,p)-sectoriels

Soit M un opérateur (L,σ)-borné. Alors d'aprés le Théorème 1.2.16, il existe des opérateurs $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ et $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, on peut écrire M-L résolvante par

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k H^k M_0^{-1}(I-Q) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}L_1^{-1}Q,$$

dans l'anneau $|\mu| > a$. En outre, l'existence des opérateurs $G = L_0M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$ et $T = M_1L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$, on peut réécrire l'expression précédente sous la forme

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k M_0^{-1}G^k(I-Q) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}L_1^{-1}T^{k-1}Q.$$

Comme on peut facilement le voir, le sens de la définition 1.2.21 ne changera pas si l'opérateur H est remplacé par l'opérateur G.

Théorème 1.2.17. *Soit* M *un opérateur* (L,σ)*-borné, et soit le point* ∞ *un singularité amovible ou pôle d'ordre* $p \in \mathbb{N}$ *de* $(\mu L - M)^{-1}$. *Alors* M *est un opérateur fortement* (L,p)*-sectoriel.*

1.2.3 Opérateurs Multiplicateurs de Fourier

Soit X un espace de Banach complexe. Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{T};X)$ telle que $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$, nous notons par $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ son k^{ieme} coefficient de Fourier, c'est

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{-k}(t)f(t)dt,$$

où $e_k(t) = e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$.

Nous donnons la définition d'opérateur multiplicateur de Fourier dans chacun des cas qui nous intéressent (voir, [2], [3], [16]). Premièrement, dans le cas des espaces de Lebesgue, nous avons

Définition 1.2.23. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on dit qu'une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ est un multiplicateur de L^p-Fourier, si pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T};X)$ il existe $u \in L^p(\mathbb{T};Y)$ tel que*

$$\hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k),$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas des espaces de Besov, nous avons ce qui suit

Définition 1.2.24. *Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, $1 \leq p$, $q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, on dit qu'une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier, si pour chaque $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$ il existe $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T};Y)$ tel que*

$$\hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k),$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Enfin, dans le cas des espaces Triebel-Lizorkin, nous avons

Définition 1.2.25. *Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ et $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$. Nous disons qu'une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $F^s_{p,q}$-Fourier, si pour chaque $f \in F^p_{p,q}(\mathbb{T};X)$ il existe $u \in F^s_{p,q}(\mathbb{T};Y)$ tel que*

$$\hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k),$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Nous notons $\mathscr{Y} = \mathscr{Y}(X)$, l'un des espaces de fonctions à valeur dans X suivantes : $L^p(\mathbb{T};X)$, $1 \leq p \leq \infty$; $B^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$; $F^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s > 0$.
Nous définissons les ensembles suivants

$$\mathscr{Y}^{(1)} = \{u \in \mathscr{Y} : \ u \ est \ presque \ partout \ diff\acute{e}rentiable \ et \ u' \in \mathscr{Y}\},$$

$$\mathscr{Y}^{(1)}_{per} = \{u \in \mathscr{Y} : \exists v \in \mathscr{Y}, \ tel \ que \ \hat{v}(k) = ik\hat{u}(k) \ pour \ tout \ k \in \mathbb{Z}\},$$

et

$$\mathscr{Y}^{(\alpha)}_{per} = \{u \in \mathscr{Y} : \exists v \in \mathscr{Y}, \ tel \ que \ \hat{v}(k) = (ik)^\alpha \hat{u}(k), \ pour \ tout \ k \in \mathbb{Z}\},$$

Dans le cas où $\mathscr{Y} = L^p(\mathbb{T};X)$, $\mathscr{Y}^{(1)}$ est noté par $W^{1,p}(\mathbb{T};X)$, $\mathscr{Y}^{(1)}_{per}$ par $W^{1,p}_{per}(\mathbb{T};X)$ et $\mathscr{Y}^{(\alpha)}_{per}$ par $W^{\alpha,p}_{per}(\mathbb{T};X)$,
dans le cas où $\mathscr{Y} = B^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$, $\mathscr{Y}^{(1)} = B^{s+1}_{p,q}(\mathbb{T};X)$ et $\mathscr{Y}^{(\alpha)} = B^{s+\alpha}_{p,q}(\mathbb{T};X)$,
dans le cas où $\mathscr{Y} = F^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$, $\mathscr{Y}^{(1)} = F^{s+1}_{p,q}(\mathbb{T};X)$ et $\mathscr{Y}^{(\alpha)} = F^{s+\alpha}_{p,q}(\mathbb{T};X)$.

Remarque 1.2.13. *([23]) En utilisant l'intégration par parties, le fait que $\mathscr{Y} \subset L^1(\mathbb{T};X)$ et le théorème d'unicité des coefficients de Fourier, nous avons*

$$\mathscr{Y}^{(1)}_{per} = \{u \in \mathscr{Y}^{[1]} : u(0) = u(2\pi)\},$$

$$\mathscr{Y}^{(1)}_{per} = \{u \in \mathscr{Y}^{(1)} : \hat{u'}(k) = ik\hat{u}(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Par conséquent, si $u \in \mathscr{Y}^{(1)}_{per}$, alors u a une représentation continue unique, tel que $u(0) = u(2\pi)$. Nous nous identifions toujours u avec cette extension continue.

Remarque 1.2.14. *([23]) Il est clair à partir des définitions que :*

(a) Si $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ sont des multiplicateurs $\mathscr{Y}$-Fourier et α, β sont des constantes, alors $(\alpha M_k + \beta N_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ est un multiplicateur de $\mathscr{Y}$-Fourier aussi.

(b) Si $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(Y,Z)$ sont des multiplicateurs $\mathscr{Y}$-Fourier, alors $(N_kM_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Z)$ est un multiplicateur $\mathscr{Y}$-Fourier aussi.
En particulier, lorsque $X = Y = Z$, si $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des multiplicateurs $\mathscr{Y}$-Fourier, alors $(N_kM_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur $\mathscr{Y}$-Fourier. Donc, dans ce cas, l'ensemble du multiplicateur $\mathscr{Y}$-Fourier est une algèbre.

Remarque 1.2.15. *([23])*

(a) Si $(kM_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur $\mathscr{Y}$-Fourier, alors $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $\mathscr{Y}$-Fourier aussi.

(b) Si $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ est un multiplicateur $\mathscr{Y}$-Fourier, alors il existe un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(\mathscr{Y}(X), \mathscr{Y}(Y))$ satisfaisant $\widehat{(Tf)}(k) = M_k\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ceci implique en particulier que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ doit être bornée.

Nous utilisons les résultats suivants

Proposition 1.2.8. *([2], Théorème de Fejer) Soit $f \in L^p(\mathbb{T};X)$, alors on a*

$$f = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e_k \otimes \hat{f}(k),$$

dans $L^p(\mathbb{T};Y)$.

Lemme 1.2.14. *([2], Lemme 3.1) Soit A un opérateur fermé sur un espace de Banach X et f, $g \in L^p(\mathbb{T};X)$, où $1 \leq p < \infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$f(t) \in D(A)$ et $Af(t) = g(t)$ p.p. $t \in \mathbb{T}$,*
2. *$\hat{f}(k) \in D(A)$ et $A\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Les conditions de Marcinkiewicz sur les suites $(M_k)_{k\in} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ ont été utilisées dans [1], [2], [3], [16] pour étudier l'opérateur multiplicateur de Fourier dans les espaces vectoriels.
La condition de Marcinkiewicz d'ordre 1 est

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}(\|M_k\|) < \infty \quad et \quad \sup_{k\in\mathbb{Z}}(\|k(M_{k+1} - M_k)\|) < \infty. \tag{1.4}$$

La condition de Marcinkiewicz d'ordre 2 est

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}(\|k^2(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1})\| < \infty. \tag{1.5}$$

Enfin, la condition de Marcinkiewicz d'ordre 3 est

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}(\|k^3(M_{k+3}-3M_{k+2}+3M_{k+1}-M_k)\|<\infty. \tag{1.6}$$

Nous énonçons les théorèmes de l'opérateur multiplicateur de Fourier dans les espaces de Besov et Triebel-Lizorkin, les espaces de L^p nous avons besoin du concept de R-borné discuté dans les sections suivantes.

Théorème 1.2.18. *([2], Théorème 4.5)*

1. *Soient X et Y des espaces de Banach arbitraires et $(M_k)_{k\in}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ est une suite satisfaisant la condition de Marcinkiewics d'ordre 2. Alors pour $1\leq p,\ q\leq\infty$, $s\in\mathbb{R}$, $(M_k)_{k\in}$ est un multiplicateur de Fourier de $B^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$ dans $B^s_{p,q}(\mathbb{T};Y)$.*
2. *Soient X et Y des espaces de Banach ayant un type de Fourier non trivial et soit $(M_k)_{k\in}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ une suite satisfaisant la condition de Marcinkiewics d'ordre 1. Alors pour $1\leq p,\ q\leq\infty$, $s\in\mathbb{R}$, $(M_k)_{k\in}$ est un multiplicateur de Fourier de $B^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$ dans $B^s_{p,q}(\mathbb{T};Y)$.*

Pour les espaces de Triebel-Lizorkin, nous avons ce qui suit

Théorème 1.2.19. *([16], Théorème 3.2)*

1. *Si $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ satisfaisant la condition de Marcinkiewics d'ordre deux. Alors $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de Fourier de $F^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$ dans $F^s_{p,q}(\mathbb{T};Y)$ pour $1<p<\infty$, $1<q\leq\infty$ et $s\in\mathbb{R}$.*
2. *Si $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ satisfaisant la condition de Marcinkiewics d'ordre trois. Alors $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de Fourier de $F^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$ dans $F^s_{p,q}(\mathbb{T};Y)$ pour $1\leq p\leq\infty$, $1\leq q\leq\infty$ et $s\in\mathbb{R}$.*

Remarque 1.2.16. *([13]) Si X est B-convexe, alors la condition de premier ordre* (1.4) *est suffisante pour que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit un $B^s_{p,q}$-multiplicateur.*

Rappelons qu'un espace Banach X est B-convexe s'il ne contient pas l_1^n uniformément. Cela revient à dire que X a un type de Fourier $1<p\leq 2$, c'est-à-dire., la transformée de Fourier est un opérateur linéaire borné de $L^p(\mathbb{R},X)$ dans $L^q(\mathbb{R},X)$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
La proposition suivante caractérise les multiplicateurs de Fourier,

Proposition 1.2.9. *([2], Proposition 1.1) Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ une séquence. Alors, $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur L^p-fourier si et seulement s'il existe $M\in\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T};X),L^p(\mathbb{T};Y))$, tel que $\widehat{Mf}=M_k\hat{f}(k)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et tout $f\in L^p(\mathbb{T};X)$. Nous appelons M comme un opérateur associé à $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, on a*

$$f=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}e_k\otimes M_k\hat{f}(k),$$

dans $L^p(\mathbb{T};Y)$ pour tout $f\in L^p(\mathbb{T};X)$.

1.2.4 Suites n-régulières

Nous rappelons le concept de n-régulières pour $n = 1, 2, 3$. Pour plus de détails sur les suites de n-régulières (voir, [63]).

Définition 1.2.26. *Une suite scalaire $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ est appelée*
(i) 1-régulière si la suite $(k(c_{k+1} - c_k)/c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée,
(ii) 2-régulière si la suite $(k^2(c_{k+2} - 2c_{k+1} + c_k)/c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée,
(iii) 3-régulière si la suite $(k^3(c_{k+2} - 3c_{k+1} + 3c_{k-1} - c_{k-2})/c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

Notons que si $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite 1-régulière, alors $\lim_{|k|\longrightarrow\infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} = 1$.

Remarque 1.2.17. *([95]) Notons que si $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite 1-régulière, alors pour tous $j \in \mathbb{Z}$ fixe, la suite $(k(c_{k+j} - c_k)/c_{k+j})_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée. Dans les cas $n = 2, 3$, les propriétés analogues sont valides.*

1.2.5 Familles d'opérateurs R-borné et L^p-multiplicateur

La notion de R-borné s'est avérée être un outil important dans l'étude des opérateurs multiplicateurs. Pour plus de détails (voir, [28], [59]).

Définition 1.2.27. ***(Fonction Rademacher)*** *Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit la fonction de Rademacher (ou brièvement, R-borné) dans $[0, 1]$ par $r_j(t) = sgn(\sin(2^j\pi t))$.*
Pour $x \in X$, nous dénotons par $r_j \otimes x$ la fonction vectorielle $t \longrightarrow r_j(t)x$.

Le concept important de R-borné pour une famille d'opérateurs linéaires bornés est définie comme suit

Définition 1.2.28. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un ensemble $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ est dit R-borné, s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \otimes T_j x_j \Big\|_{L^1([0,1];Y)} \leq C \Big\| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \otimes x_j \Big\|_{L^1([0,1];X)},$$

pour tous $T_1, \ldots, T_n \in \mathbf{T}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $n \in \mathbb{N}$.

Maintenant, nous énonçons le théorème d'opérateur vectoriel du multiplicateur de Marcinkiewicz.

Théorème 1.2.20. *([3]) Soient X, Y deux espaces UMD. Soit $M_k \in \mathcal{L}(X, Y)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Si les ensembles $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ et $\{k(M_{k+1} - M_k) : k \in \mathbb{Z}\}$ sont R-bornés, alors $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de L^p-Fourier pour $1 < p < \infty$.*

nous avons également utilisé les résultats suivants.

Proposition 1.2.10. *([2], Proposition 1.1) Soit X un espace de Banach et $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un multiplicateur de L^p-Fourier pour $1 \leq p < \infty$. Alors l'ensemble $\{M_k : k \in \mathbb{Z}\}$ est R-borné.*

nous énonçons maintenant un principe important de contraction de Kahane.

Lemme 1.2.15 ([2], Lemme 1.7)**.** *Soient X un espace de Banach et $1 \leq q < \infty$. Nous avons*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes \lambda_j x_j \Big\|_{L^q(0,1;X)} \leq 2 \max_{j=1,\dots,m} |\lambda_j| \Big\| \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes x_j \Big\|_{L^q(0,1;X)},$$

pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ où $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.2.18. *([13])*

(i) Soient $\mathbf{S}$, $\mathbf{T} \subset \mathcal{L}(X)$ des ensembles R-bornés. Alors

$$\mathbf{ST} = \{ST : S \in \mathbf{S}, T \in \mathbf{T}\},$$

et

$$\mathbf{S} + \mathbf{T} = \{S + T : S \in \mathbf{S}, T \in \mathbf{T}\},$$

sont aussi R-bornés.

(ii) Soit X un epace de Banach UMD, et soit $M_k = m_k I_X$ avec $m_k \in \mathbb{C}$, où I_X est un opérateur identité dans X, si

$$\sup_k |m_k| + \sup_k |k(m_{k+1} - m_k)| < \infty,$$

alors $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur L^p-Fourier, lorsque $1 \leq p < \infty$.

1.3 Semi-groupes

Dans cette thèse, nous présentons la théorie des semi-groupes et semi-groupes dégénérés. On trouve les démonstrations et d'autres propriétés dans [89], [107].
Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces de Banach, et soient les opérateurs $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

1.3.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.3.1. *Le semi-groupe des opérateurs linéaires continus est une application $X^{\cdot} : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U})$ tel que $X^s X^t = X^{s+t}$ pour tous $s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Identifions le semi-groupe avec l'ensemble $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$.*

1. *Semi-groupe $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ est appelé non dégénéré si $X^0 = I$.*
2. *Semi-groupe $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ est appelé fortement continus si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{s\longrightarrow t} X^s = X^t$, $\lim_{s\longrightarrow 0^+} X^s = X^0$.*

Un semi-groupe fortement continu non dégénéré est appelé $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupe fortement continu.

Proposition 1.3.1. *Soit $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ un $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupe. Alors il existe des constantes réelles $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$, telles que*

$$\forall t \geq 0, \ \|X^t\| \leq M e^{\omega t}.$$

Si $\omega = 0$ et $M = 1$, alors $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ est appelé $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupe contraction.

Définition 1.3.2. *L'opérateur linéaire A défini par*

$$D(A) = \Big\{x \in \mathcal{U},\ lim_{t\to 0^+} \frac{X^t x - x}{t} \quad existe\Big\},$$

et

$$Ax = lim_{t\to 0^+} \frac{X^t x - x}{t},\ x \in D(A)$$

est le générateur infinitésimal de semi-groupe $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, $D(A)$ est le domaine de A.

Théorème 1.3.1. *([89]) Soit A le générateur infinitésimal d'un $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupe $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, on a les propriétés suivantes*

1. $\forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{U},\ \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} X^s x ds = X^t x,$
2. $\forall t \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{U},\ \int_0^t X^s x ds \in D(A),\ A\Big(\int_0^t X^s x ds\Big) = X^t x - x,$
3. $\forall t \geq 0,\ x \in D(A),\ X^t x \in D(A)$ et $t \longmapsto X^t$ est différentiable sur $\mathbb{R}_+$, de plus

$$\frac{d}{dx} X^t x = X^t A x = A X^t x,$$

4. $\forall s, t \geq 0,\ x \in D(A),\ X^t x - X^s x = \int_s^t A X^\tau x d\tau = \int_s^t X^\tau A x d\tau.$

Corollaire 1.3.1. *([89]) Si A est le générateur infinitésimal d'un $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupe $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, alors $D(A)$ est dense dans $\mathcal{U}$ et A est un opérateur linéaire fermé.*

Proposition 1.3.2. *Soient $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ et $\{Y^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ deux $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupes de générateurs infinitésimaux respectivement A et B. Si $A = B$, on a*

$$\forall t \geq 0,\ X^t = Y^t.$$

Proposition 1.3.3. *Soit A de domaine $D(A)$, le générateur infinitésimal de $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupe. Alors on a*

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} D(A^n)} = \mathcal{U}.$$

Définition 1.3.3. *Un semi-groupe $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ est appelé semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés, si*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \|X^t - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} = 0.$$

Remarque 1.3.1. *Soit A un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{U}$. Alors*

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n,$$

existe et détermine d'une manière unique un semi-groupe uniformément continu $(e^{tA})_{t\geq 0}$ *dont* A *est le générateur infinitésimal.*
Réciproquement, $\{X^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ *étant un semi-groupe uniformément continu, on a pour tout* $x \in \mathcal{U}$, $\frac{1}{t}\int_0^t X^s x ds$ *converge uniformément vers* $X^0 x = x$ *quand* $t \longrightarrow 0^+$. *Donc pour tout* $t > 0$, $\frac{1}{t}\int_0^t X^s x ds$ *est inversible et pour tout* $y \in \mathcal{U}$, *il existe* $x \in \mathcal{U}$ *et* $t > 0$, *tel que*

$$y = \frac{1}{t}\int_0^t X^s x ds,$$

donc, $y \in D(A)$. *Ainsi* $D(A) = \mathcal{U}$ *et* A *est borné.*

Théorème 1.3.2. *[Hille–Yosida] Un opérateur linéaire* A *de domaine* $D(A)$, *est le générateur infinitésimal d'un* $(\mathcal{C}_0)$ *semi groupe* $\{X^t\}_{t\geq 0}$ *sur* $\mathcal{U}$ *qui satisfait* $\|X^t\| \leq Me^{\omega t}$, *ssi*

1. A *est fermé et* $\overline{D(A)} = \mathcal{U}$,
2. $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$, *et pour tout* $\lambda \in]\omega, +\infty[$, $n = 1, 2, ...,$ *on a*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Théorème 1.3.3. *[Hille–Yosida] Un opérateur* A *est radial si et seulement si il génère un* $(\mathcal{C}_0)$ *sous-groupe fortement continu.*

Corollaire 1.3.2. *([107]) Soit* A *le générateur infinitésimal d'un* $(\mathcal{C}_0)$ *sous-groupe de contraction* $\{X^t\}_{t\geq 0}$ *sur* $\mathcal{U}$. *Alors*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\} \subset \rho(A).$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(\lambda) > 0$,

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Théorème 1.3.4. *[Solomyak–Yosida] Un opérateur* A *est le générateur d'un semi-groupe analytique si et seulement s'il est sectoriel.*

1.3.2 Semi-groupes analytiques

Après avoir étudié les $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupes, il est nécessaire d'aborder les semi-groupes analytiques. C'est un outil très puissant pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles.
Dans cette section, on définit pour tout $0 < \delta \leq \pi$, le secteur

$$\triangle_\delta := \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg(z)| < \delta\}.$$

Définition 1.3.4. *Soit* $\{X^t\}_{t\geq 0}$ *un* $(\mathcal{C}_0)$ *semi-groupe sur* $\mathcal{U}$. *Pour* $\delta \in (0, \pi]$. *On dit que* $\{X^t\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe analytique s'il admet une extension à une application* X^t *définie sur* $\triangle_\delta \cup \{0\}$ *et satisfait pour tout* $z \in \triangle_\delta \cup \{0\}$

1. $z \longrightarrow X^z$ *est une application de* $\triangle_\delta \cup \{0\}$ *vers* $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
2. $z \longrightarrow X^z$ *est analytique de* $\triangle_\delta \cup \{0\}$ *vers* $\mathcal{U}$.
3. $X^{z_1+z_2} = X^{z_1}X^{z_2}$ *pour tout* $z_1,\ z_2 \in \triangle_\delta \cup \{0\}$.

On peut aussi définir les semi-groupes analytiques de la manière suivante.

Définition 1.3.5. *Soit* δ *un nombre réel avec* $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$. *Un* $(\mathcal{C}_0)$ *semi-groupe est un semi-groupe analytique d'angle* δ *dans* $\mathcal{X}$ *si et seulement si*

1. $X^\cdot$ *est la restriction d'une fonction holomorphe* $X : \triangle_\delta \longrightarrow \mathcal{U}$.
2. $\forall z_1,\ z_2 \in \triangle_\delta$ *tels que* $z_1 + z_2 \in \triangle_\delta$, $X^{z_1+z_2} = X^{z_1}X^{z_2}$.
3. $\forall \varepsilon > 0\ \ \forall x \in \mathcal{U},\ \lim_{z\longrightarrow 0, z\in\triangle_{\delta-\varepsilon}} X^z x = x$.

1.3.3 Semi-groupes dégérérés fortement continus

Considérons un problème de Cauchy

$$u(0) = u_0 \tag{1.7}$$

pour l'équation linéaire de type Sobolev

$$L\dot{u} = Mu \tag{1.8}$$

Supposons qu'il existe un opérateur $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, Alors le problème (1.7)–(1.8) est réduit à deux problèmes équivalents

$$\dot{u} = Su,\ u(0) = u_0, \tag{1.9}$$

$$\dot{f} = Tf,\ f(0) = f_0, \tag{1.10}$$

où les opérateurs $S = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$, $T = ML^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{F})$; ainsi que les vecteurs $f = Lu$, $f_0 = Lu_0$.
Les problèmes (1.9)–(1.10) avec une précision de notation coïncident avec le problème

$$\dot{v} = Av,\ \ v(0) = v_0, \tag{1.11}$$

où $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V}$ est un espace de Banach et $v_0 \in domA$. Si l'opérateur A est radial, alors d'après le théorème de Hille-Yosida (Hille et Phillips, 1957 ; Yosida, 1965), la solution unique du problème (1.11) est $v(t) = V^t v_0$, où $\{V^t : t \in \bar{\mathbb{R}}_+\}$ est un $(\mathcal{C}_0)$ semi-groupe fortement continu.
Soit $\rho^L(M) \neq \emptyset$, alors l'equation (1.8) réduite à une paire d'équations équivalentes

$$R^L_\lambda(M)\dot{u} = (\lambda L - M)^{-1}Mu, \tag{1.12}$$

et

$$L^L_\lambda(M)\dot{f} = M(\lambda L - M)^{-1}f, \tag{1.13}$$

où $\lambda \in \rho^L(M)$. Ces deux équations seront considérées comme des interprétations de l'équation

$$A\dot{v} = Bv, \tag{1.14}$$

où $A,\ B \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ ($\mathcal{V}$ est un espace de Banach).
La solution de l'équation (1.14) est la fonction $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{V})$ est satisfaisant (1.14) sur $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 1.3.6. *L'application fortement continue $V^\cdot : \overline{\mathbb{R}}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V})$ est appelée un semi-groupe fortement continu des opérateurs résolvants généralisés (où, un semi-groupe dégénéré fortement continu) de l'équation* (1.14)*, si*

(i) $V^s V^t v = V^{s+t} v,\ \forall s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *et pour chaque* $v \in \mathcal{V}$,

(ii) $v(t) = V^t v$ *est une solution de l'équation* (1.14)*, pour tout* v *appartient à sous-espace dense dans* $\mathcal{V}$.

1.3.4 Semi-groupes dégénérérés analytiques

Définition 1.3.7. *L'application $V^\cdot \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{V}))$ est appelée un semi-groupe des opérateurs résolvants généralisés (ou, un semi-groupe dégénéré) de l'équation* (1.14)*, si*

(i) $V^s V^t v = V^{s+t} v,\ \forall s, t \in \mathbb{R}_+$,

(ii) $v(t) = V^t v_0$ *est une solution de l'équation* (1.14)*, pour tout* $v_0 \in \mathcal{V}$.

Un semi-groupe est appelé analytique, si il peut être prolongé dans un secteur contenant le rayon $\mathbb{R}_+$, avec l'accomplissement des propriétés (i), (ii) dans la définition 1.3.7.
Semi-groupe analytique est représenté par des intégrales de type Dunford-Taylor

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R^L_\lambda(M) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$F^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma L^L_\lambda(M) e^{\lambda t} d\lambda,$$

où $t \in \mathbb{R}_+$, et le contour $\Gamma \subset \rho^L(M)$, tel que $|\arg \lambda| \to \theta$ pour $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Gamma$.
Par example, le contour $\Gamma = \{\lambda \in \mathcal{C} : |\arg \lambda| = \theta\}$ où $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (voir la définition 1.2.18), un semi-groupe est appelée uniformément borné, si

$$\exists C > 0,\ \|V^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} \leq C,\ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Théorème 1.3.5. *([107]) Soit l'opérateur M est (L,p)-sectoriel. Alors il existe un semi-groupe dégénéré analytique et uniformément borné de l'équation* (1.12) *(l'équation* (1.13)*).*

1.3.5 Générateurs infinitésimaux

Une restriction $\{U^t_1 :\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, $(\{F^t_1 :\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ de semi-groupe $\{U^t :\ t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$, dans le sous-espace $\mathcal{U}^1(\mathcal{F}^1)$ est un semi-groupe non dégénéré fortement continu car $U^0_1 = P|_{\mathcal{U}^1} = I_{\mathcal{U}^1}$ (resp. $F^0_1 = I_{\mathcal{F}^1}$). Nous introduisons la notation suivante

$$S_1 = L_1^{-1} M_1 : domS_1 \longrightarrow \mathcal{U}^1,\ domS_1 = domM_1,$$

$$T_1 = M_1 L_1^{-1} : domT_1 \longrightarrow \mathcal{F}^1,\ domT_1 = L_1[domM_1],$$

à condition que M est un opérateur fortement (L,p)-radial.

Théorème 1.3.6. *([107]) Soit M un opérateur M fortement (L,p)-radial (resp. fortement (L,p)-sectoriel). Alors l'opérateur $S_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1)$ (resp. $T_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{F}^1)$) est un générateur infinitésimal de semi-groupe $\{U_1^t : t \in \overline{R}_+\}$ (resp. $\{F_1^t : t \in \overline{R}_+\}$).*

1.4 Calcul fractionnaire

1.4.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge le factoriel aux valeurs réelles et complexes.

Définition 1.4.1. *La fonction Gamma d'Euler, notée $\Gamma(z)$ est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (Re(z) > 0). \tag{1.15}$$

1.4.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de la récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.16}$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \Big[- t^z e^{-t} \Big]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

La fonction Gamma d'Euler généralise factoriel, car

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exemple 1.4.1.

$$\Gamma(2) = 1! = 1, \quad \Gamma(6) = 5! = 120, \quad \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)} = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Certaines identités peuvent être utiles (voir [96], p.7)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}, \ (0 < Re(z) < 1).$$

Pour $z = n + \frac{1}{2}$, n entier positif (voir [96], p.10)

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

En particulier, si $z = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

1.4.3 Fonction Béta

La fonction Béta est définie par

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad Re(p) > 0 \; et \; Re(q) > 0. \tag{1.17}$$

1.4.4 Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^z joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [96] et désignée par la fonction suivante

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0. \tag{1.18}$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal et elle est définie par le développement en série suivante

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \; \beta > 0. \tag{1.19}$$

Remarque 1.4.1. *([96])*

(i) Pour $\beta = 1$, $E_{\alpha,1}(\lambda z^\alpha) = E_1(\lambda z^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^\alpha (z^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$, $E_{1,1} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Pour $\beta = 1$, *l'extension matricielle de la fonction Mittag-Leffler précitée a la représentation suivante* $E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$, *et* $D^\alpha E_\alpha(At^\alpha) = AE_\alpha(At^\alpha)$.

(iii) nous avons la transformation de Laplace de la fonction Mittag-Leffler en deux paramètres

$$L\{t^{\alpha k+\beta-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\}(s) = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad (Re(s) > \frac{1}{\alpha}), \tag{1.20}$$

où $Re(s)$ *dénote les parties réelles de* s.

1.4.5 Inégalité de Gronwall généralisée

Lemme 1.4.1. *([109]) Supposons* $x(t)$, $a(t)$ *sont non-négatives et localements intégrables sur* $0 \le t < T$, $T < \infty$ *et* $f(t)$ *est une fonction continue non-négative, non décroissante définie sur* $0 \le t < T$; $f(t) \le C$, *où* C *est une constante,* $\alpha > 0$ *avec*

$$x(t) \le a(t) + f(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \tag{1.21}$$

alors

$$x(t) \leq a(t) + f(t) \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[f(t)\Gamma(\alpha)]^n}{\Gamma(n\alpha)} (t-s)^{\alpha-1} a(s) ds, \quad 0 \leq t < T. \tag{1.22}$$

De plus, si $a(t)$ est non décroissante, alors soit $a(t)$ une fonction non décroissante sur $[0, T]$. Alors

$$x(t) \leq a(t) E_\alpha(f(t)\Gamma(\alpha)t^\alpha), \tag{1.23}$$

où E_α est la fonction de Mittag-Leffler.

1.4.6 Intégration fractionnaire

Considérons une fonction f définie pour $t > a$, on pose

$$(If)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau, \tag{1.24}$$

et

$$(I^{(2)} f)(t) = \int_a^t (If)(u) du = \int_a^t (\int_a^u f(\tau) d\tau) du. \tag{1.25}$$

Par récurrence, on peut montrer que

$$(I^{(n)} f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{(n-1)} f(\tau) d\tau, \tag{1.26}$$

pour tout entier n.
Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann a rendu compte que le second membre de (1.26) pourrait avoir un sens même lorsque n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit

Définition 1.4.2. *Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'opérateur I^α définit sur $L^1[a,\ b]$ par*

$$(I_{a^+}^{(\alpha)} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)} f(\tau) d\tau \text{ telle que } a \in]-\infty, +\infty[, \tag{1.27}$$

pour $t \in [a,\ b]$ est appelé opérateur d'intégration fractionnaire (resp. à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α.

Remarque 1.4.2. *L'intégrale*

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt \text{ telle que } b \in]-\infty, +\infty[, \tag{1.28}$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouvilee d'ordre α.

Remarque 1.4.3. *Si $a = 0,\ b = +\infty$, alors l'intégrale est appelée de Riemann et si $a = -\infty,\ b = +\infty$, alors l'intégrale est appelée de Liouville.*

Remarque 1.4.4. *Dans tout ce qui suit, on va utiliser uniquement l'intégrale à gauche.*

Théorème 1.4.1. *Pour $f \in C[a,\ b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I^{(\alpha)}\left[I^{(\beta)}f(t)\right] = I^{(\alpha+\beta)}f(t),\ \textit{pour}\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.29}$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition, avec

$$I^{(\alpha)}\left[I^{(\beta)}f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_a^\tau \frac{f(u)}{(\tau-u)^{1-\beta}}du,$$

or $f \in C[a,b]$, d'après le théorème de Fubini et par le changement de variable $\tau = u + s(t-u)$, on obtient :

$$I^{(\alpha)}\left[I^{(\beta)}f(t)\right] = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t \frac{f(u)}{(\tau-u)^{1-\beta}}du = I^{(\alpha+\beta)}f(t),$$

où $B(\alpha,\beta)$ désigne la fonction Beta. □

Proposition 1.4.1. ① *Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a $I^{(\alpha)}oI^{(\beta)} = I^{(\beta)}oI^{(\alpha)} = I^{(\alpha+\beta)}$.*

② $I^{(0)}f(t) = I_d f(t) = f(t)$.

③ *L'operateur intégral I^α est linéaire.*

④ *(Transformée de Laplace) On prend $a = 0$, pour une fonction f qui possède la transformée de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $Re(s) > 0$ est*

$$L(I^{(\alpha)}f)(s) = s^{(-\alpha)}F(s). \tag{1.30}$$

Exemple 1.4.2. *On a*

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)}(t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)}(\tau-a)^m d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+m}\int_0^1 (1-x)^{(\alpha-1)}x^m dx \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-a)^{\alpha+m}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0.5$, $m = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{(0.5)}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)}(t)^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

1.4.7 Dérivées fractionnaires

Considérons la suite infinie d'intégrales et dérivées répétées n fois

$$\ldots,\ \int_a^t d\tau_2\int_a^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1,\ \int_a^t f(\tau_1)d\tau_1,\ f(t),\ \frac{df(t)}{dt},\ \frac{d^2f(t)}{dt^2},\ \ldots \tag{1.31}$$

La dérivée d'ordre α réel quelconque peut être considérée comme une interpolation de cette suite d'opérateurs, pour laquelle on utilisera la notation

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t). $$

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.4.8 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est basée sur la remarque qu'on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par la formule générale suivante

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k} f(t-kh) \tag{1.32} $$

avec $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$,
qui représente la dérivée d'ordre entier p si $0 < p < n$ et l'intégrale répétée $(-p)$ fois si $-n < p < 0$ avec $nh = t - a$.
La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 < p < n$) et

$$ (-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p(1-p)(2-p)...(k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}, \tag{1.33} $$

nous donne

$$ {}_a^G D_t^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh), \tag{1.34} $$

et

$$ \begin{aligned} {}_a^G D_t^{-p} f(t) &= \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{1.35} $$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$ {}_a^G D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{(n+p-1)} f^{(n)}(\tau) d\tau, \tag{1.36} $$

aussi

$$ {}_a^G D_t^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{(n-p-1)} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.37} $$

Exemple 1.4.3. ① ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov***

En général, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Si $f(t) = c$ et p non entier, on a

$$f^{(k)}(t) = 0 \text{ pour } k = 1, 2, ..., n,$$

et

$${}_a^G D^p f(t) = \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau}_{=0},$$

$$= \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}.$$

② ***La dérivée d'une fonction $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Grünwald-Letnikov***

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } k = 0, 1, ..., n-1,$$

et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}.$$

D'où

$${}_a^G D_t^p f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}, \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Par exemple,

$$ {}_0^G D^{\frac{1}{2}} t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1,5)} \sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1,5)}. \tag{1.38} $$

Propriétés

① **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

Proposition 1

Pour m entier positif et p non entier, on a

$$ \frac{d^m}{dt^m}({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t), \tag{1.39} $$

et

$$ {}_a^G D_t^p(\frac{d^m}{dt^m} f(t)) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}. \tag{1.40} $$

Preuve. Pour m entier positif et p non entier avec $(n-1 < p < n)$, on a

$$ \begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}({}_a^G D_t^p f(t)) = & \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\ & + \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau. \end{aligned} $$

Alors

$$ \frac{d^m}{dt^m}({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t). $$

Mais

$$ \begin{aligned} {}_a^G D_t^p(\frac{d^m}{dt^m} f(t)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(p+m)}}{\Gamma(k-(p+m)+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \\ &= {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}. \end{aligned} $$

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si $f^k(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, m-1$. □

② **Composition avec les dérivées fractionnaires**

Proposition 2

☞ Si $q < 0$, $p \in \mathbb{R}$ alors

$$ {}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t). \tag{1.41} $$

☞ Si $0 \leq m-1 < q < m$, $p < 0$ alors

$$ {}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t), \tag{1.42}$$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, m-2$.

☞ Si $0 \leq m-1 < q < m$, $0 \leq n-1 \leq p < n$ alors

$$ {}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t)) = {}_a^G D_t^q({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t), \tag{1.43}$$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., r-2$ avec $r = max(m, n)$,

où m, n sont deux nombres entiers, et p, q non entiers.

Preuve. ☞ Si $q < 0$, $p < 0$ alors

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} ({}_a^G D_t^q f(\tau)) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} d\tau \int_a^\tau (\tau - s)^{-q-1} f(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)} \int_a^t f(s) ds \int_s^t (\tau - s)^{-q-1} (t-\tau)^{-p-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-(p+q))} \int_a^t (t-s)^{-p-q-1} f(s) ds \\
&= {}_a^G D_t^{p+q} f(t).
\end{aligned}$$

☞ Si $q < 0$ et $0 \leq n-1 < p < n$ on a $p = n + (p-n)$ avec $p - n < 0$ alors

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n} \{ {}_a^G D_t^{p-n} ({}_a^G D_t^q f(t)) \} \\
&= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^G D_t^{q+p-n} f(t)) \\
&= {}_a^G D_t^{q+p} f(t).
\end{aligned}$$

☞ Pour $0 \leq m-1 < q < m$ et $p < 0$, on a

$$ {}_a^G D_t^q f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_a^t (t-\tau)^{m-q-1} f^{(m)}(\tau) d\tau,$$

et $(t-a)^{k-q}$ ont des singularités non-intégrables donc ${}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t))$ n'existe que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, m-2$, et dans ce cas, on a

$$ {}_a^G D_t^q f(t) = \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-1-q}}{\Gamma(m-q)} + {}_a^G D_t^{q-m} f^{(m)}(t),$$

alors

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t)) &= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-1-q-p}}{\Gamma(m-q-p)} + {}_a^G D_t^{p+q-m} f^{(m)}(t) \\
&= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-(q+p)-1}}{\Gamma(m-q-p)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(m-(p+q)} \int_a^t (t-\tau)^{m-(p+q)-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \\
&= {}_a^G D_t^{p+q} f(t).
\end{aligned}$$

☞ Pour $0 \leq m-1 < q < m$ et $0 \leq n-1 < p < n$, on a

$${}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n}\{{}_a^G D_t^{p-n}({}_a^G D_t^q f(t))\}.$$

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, ..., m-2$, alors

$${}_a^G D_t^{p-n}({}_a^G D_t^q f(t)) = {}_a^G D_t^{q+p-n} f(t).$$

Par suite

$$\begin{aligned}
{}_a^G D_t^p({}_a^G D_t^q f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n}({}_a^G D_t^{q+p-n} f(t)) \\
&= {}_a^G D_t^{p+q} f(t).
\end{aligned}$$

□

③ **Transformée de Laplace**

Soit f une fonction qui possède la transformée de Laplace $F(s)$.

☞ Pour $0 \leq p < 1$, on a

$${}_0^G D_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau,$$

alors

$$\begin{aligned}
L\Big[{}_0^G D_t^p f(t)\Big](s) &= \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}}[sF(s) - f(0)] \\
&= s^p F(s). \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

☞ Pour $p \geq 1$ il n'existe pas de transformée de Laplace dans le sens classique, mais dans le sens des distributions, on a aussi

$$L\left[{}_0^G D_t^p f(t) \right](s) = s^p F(s). \qquad (1.45)$$

1.4.9 Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p avec $n-1 \leq p < n$ au sens de Riemann-Liouville est définie par

$$\begin{aligned} {}^{R}_{a}D^{p}_{t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-p} f(t)). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Remarque 1.4.5. *Si f est de classe C^n, alors en faisant des intégrations par parties et des différentiations répétées, on obtient*

$$\begin{aligned} {}^{R}_{a}D^{p}_{t} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= {}^{G}_{a}D^{p}_{t} f(t). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Dans ce cas, l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

Exemple 1.4.4. ① ***La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville***

En générale, la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle, ni constante, mais on a

$${}^{R}_{a}D^{p}_{t} C = \frac{C}{\Gamma(1-p)} (t-a)^{-p}.$$

② ***La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Riemann-Liouville***

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a

$${}^{R}_{a}D^{p}_{t} (t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura

$$\begin{aligned} {}^{R}_{a}D^{p}_{t} (t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha} ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\beta(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

Par exemple

$${}^{R}_{0}D^{0,5}_{t} t^{0,5} = \frac{\Gamma(1,5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1,5). \tag{1.48}$$

Propriétés

① **Composition avec l'intégrale fractionnaire**

☞ ${}_a^R D_t^p(I^p f(t)) = f(t)$, alors l'opérateur de différentiation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, et en générale on a

$$ {}_a^R D_t^p(I^q f(t)) = {}_a^R D_t^{p-q} f(t). \tag{1.49}$$

Si $p-q<0$ on pose ${}_a^R D_t^{p-q} f(t) = I_t^{q-p} f(t)$.

☞ ${}_a^R D_t^{-p}({}_a^R D_t^q(f(t))) = {}_a^R D_t^{q-p} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \Big[{}_a^R D_t^{q-k} f(t)\Big]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}$,
avec $m-1 \le q < m$, on déduit alors que la différentiation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général.

② **Composition avec les dérivées d'ordre entier**

$$ \frac{d^n}{dt^n}({}_a^R D_t^p f(t)) = {}_a^R D_t^{n+p} f(t), \tag{1.50}$$

mais

$$ {}_a^R D_t^p(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) = {}_a^R D_t^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}. \tag{1.51}$$

on déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

③ **Composition avec les dérivées fractionnaires**

Soit $n-1 \le p < n$ et $m-1 \le q < m$, alors

$$ {}_a^R D_t^p({}_a^R D_t^q(f(t)) = {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \Big[{}_a^R D_t^{q-k} f(t)\Big]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(-p-k+1)}, \tag{1.52}$$

et

$$ {}_a^R D_t^q({}_a^R D_t^p(f(t)) = {}_a^R D_t^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^{n} \Big[{}_a^R D_t^{p-k} f(t)\Big]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}. \tag{1.53}$$

Par suite deux opérateurs de dérivations fractionnaires ${}_a^R D_t^p$ et ${}_a^R D_t^q$ ne commutent que si p = q et $\Big[{}_a^R D_t^{p-k} f(t)\Big]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$ et $\Big[{}_a^R D_t^{q-k} f(t)\Big]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$.

④ **Transformée de Laplace**

Si f possède la transformée de Laplace $F(s)$ alors

$$ L\Big[{}_0^R D_t^p f(t)\Big](s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \Big[{}_0^R D_t^{p-k-1} f(t)\Big]_{t=0}, \tag{1.54}$$

avec $n-1 \le p < n$.

L'application de cette transformée est limitée à cause de l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$.

1.4.10 Approche de Caputo

Dans la modélisation mathématique, l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$.
Soit $p \geq 0$ avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, f est une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a,b]$.
La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par

$$\begin{aligned} {}_a^c D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= I^{n-p}(\frac{d^n}{dt^n} f(t)). \end{aligned} \tag{1.55}$$

Propriétés

① **Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville**
Soit $p \geq 0$ avec $n-1 \leq p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f est une fonction telle que ${}_a^c D_t^p$ et ${}_a^R D_t^p$ existent, alors

$${}_a^c D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}. \tag{1.56}$$

on en déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on aura

$${}_a^c D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t). \tag{1.57}$$

② **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire**
Si f est continue, on a

$${}_a^c D_t^p I_a^p f = f \text{ et } I_a^p \, {}_a^c D_t^p f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}. \tag{1.58}$$

Alors l'opérateur de dérivation de Caputo est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais il n'est pas l'inverse droite.

③ **Transformée de Laplace**
Si f possède la transformée de Laplace $F(s)$, alors

$$L\Big[{}_0^c D_t^p f(t) \Big](s) = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0), \tag{1.59}$$

avec $n-1 \leq p < n$.

Exemple 1.4.5. ① ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo***

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$ {}_a^c D_t^p C = 0. $$

② ***La dérivée de*** $f(t) = (t-a)^\alpha$ ***au sens de Caputo***

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$, avec $\alpha > n-1$, alors on a

$$ f^n(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}. $$

D'où

$$ {}_a^c D_t^p (t-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau. $$

En faisant le changement de variable $t = a + s(t-a)$, on aura

$$ \begin{aligned} {}_a^c D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned} $$

1.4.11 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

1.4.11.1 Linéarité

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire de la forme,

$$ D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t), \tag{1.60} $$

où D^p désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans cette thèse.

1.4.11.2 Règle de Leibniz

Pour n entier, on a

$$ \frac{d^n}{dt^n}(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t). \tag{1.61} $$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t) - R_n^p(t), \tag{1.62}$$

où $n \geq p+1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi.$$

Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} R_n^p(t) = 0$.
Si f et g et ses dérivées sont continues dans $[a,\ t]$, la formule devient

$$D^p(f(t).g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t) D^{p-k} g(t), \tag{1.63}$$

D^p est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann Liouville.

1.5 Théorème de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont des outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations. La méthode du point fixe consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe. Les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette section, nous rappelons le théorème (principe de contraction de Banach) du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 1.5.1. *Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que $f(u) = u$.*

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe unique d'une contraction d'un espace métrique complet à valeurs dans lui-même, est certainement le plus connu des théorèmes de point fixe. Ce théorème prouvé en (1922) par Stefan Banach est basé essentiellement sur les notions d'application Lipschitzienne et d'application contractante.

Théorème 1.5.1. *(Principe de contraction de Banach) Soit E un espace métrique complet et soit $F : E \longrightarrow E$ une application contractante, alors F possède un point fixe unique.*

Chapitre 2

Étude des équations différentielles fractionnaires dégénérées avec condition non locale

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence et de l'unicité de solution unique d'équation intégro-différentielle fractionnaire dégénérée non linéaire soumise à une condition non locale

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} Lx(t) = Mx(t) + f(t, W(t)) + \int_0^t g(t, s, V(s))ds, \ t \in [0, T) & (2.1) \\ x^{(k)}(0) + h(x^{(k)}(t)) = x_k, \ k = 0, 1, ..., m-1, & (2.2) \end{cases}$$

où $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ des espaces de Banach, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un opérateur linéaire continue de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un opérateur fermé linéaire densément défini de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.
Soient $f : Y_1 \longrightarrow \mathcal{Y}$, $g : Y_2 \longrightarrow \mathcal{Y}$ deux opérateurs non linéaires, tels que Y_1, Y_2 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^d$, $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}^r$ respectivement et soient $W : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{X}^d$, $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{X}^r$, $h : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ sont des fonctions données, telles que $W(t) = (x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(d-1)}(t))$, $V(t) = (x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(r-1)}(t))$, Y un ensemble, tel que $Y = Y_1 \cup Y_2$ et $m = \max\{d, r\}$, ${}^{C}D_t^{\alpha}$ est la dérivée de Caputo d'ordre α, $m - 1 < \alpha < m$.
Dans le cas général, l'étude du problème (2.1)–(2.2) est trés difficile, pour simplifier ce problème, nous supposons les conditions suivantes : $p = 0$, $\mathrm{im}\psi_x \subset \mathcal{Y}^1$ et la condition généralisée de Showalter-Sidorov, où $\psi_x(t) = f(t, W(t)) + \int_0^t g(t, s, V(s))ds, \quad t \in [0, T)$.
Nous commençons d'abord par établir notre premier résultat d'existence et d'unicité de l'équation non linéaire fractionnaire non dégénérée avec des conditions locales. Ensuite, nous présentons dans la deuxième section, un autre résultat sur l'existence et l'unicité de l'équation fractionnaire dégénérée linéaire avec des conditions non locales. Le dernier résultat abordant l'existence et l'unicité sur l'équation non linéaire fractionnaire dégénérée avec la condition généralisée de Showalter-Sidorov non locale, en utilisant les théorèmes concernant les opérateurs résolvants généralisés : fortement (L, p)-sectoriel, (L, p)-borné, (L, σ)-borné et semi-groupe dégénéré. Dans

la troixième section nous présentons une application illustratif.

2.1 Équation fractionnaire non dégénérée avec condition non locale

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution pour une classe d'équations différentielles fractionnaires non dégénérées linéaires et non linéaires sous la forme d'un problème de Cauchy avec condition locale et non locale.

2.1.1 Équation linéaire non dégénérée

Supposons que $\delta > 0$, $t > 0$

$$J_t^\delta h(t) = (g_\delta * h)(t) = \int_0^t g_\delta(t-s)h(s)ds,$$

où

$$g_\delta = \begin{cases} \dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Soit $\alpha > 0$, m est un plus petit entier supérieur ou égal à α, D_t^m est un dérivé ordinaire d'ordre $m \in \mathbb{N}$.
J_t^0 est un opérateur identité, ${}^C D_t^\alpha$ est la dérivé fractionnaire de Caputo, c'est-à-dire

$${}^C D_t^\alpha f(t) = D_t^m J_t^{m-\delta}\Big(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0)g_{k+1}(t)\Big).$$

Notons que cette égalité est définie dans [4].
Pour $\alpha,\ \beta > 0$, dénote la fonction Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

Considérons le problème linéaire de Cauchy non homogène

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t),\ t \in [0,T) & (2.3) \\ z^{(k)}(0) = z_k,\ k = 0, 1, \ldots m-1, & (2.4) \end{cases}$$

où $T \in [0, +\infty)$, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ (c'est-à-dire A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach $\mathfrak{Z}$). La fonction $z \in C^{m-1}([0,T);\mathfrak{Z})$ est appelée une solution du problème (2.3)–(2.4), si

$$g_{m-\alpha} * \Big(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(0)g_{k+1}(t)\Big) \in C^m([0,T);\mathfrak{Z})$$

et les égalités (2.3), (2.4) sont satisfaisantes.

Théorème 2.1.1. *([51], [91]) Soient $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f \in C([0,T);\mathfrak{Z})$. Alors pour chaque $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, il existe une solution unique du problème* (2.3)–(2.4)*, sous la forme*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s) ds. \tag{2.5}$$

Preuve. Supposons que $T = +\infty$ et en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (2.3), on obtient

$$\lambda^\alpha Z(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-1-k} z_k = AZ(\lambda) + F(\lambda) \quad / \quad F(\lambda) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{2.6}$$

Maintenant, en appliquant aussi l'inverse de la transformation de Laplace, nous obtenons

$$\mathcal{L}^{-1}\{Z(\lambda)\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{ \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-1-k} (\lambda^\alpha I - A)^{-1} z_k \Big\} + \mathcal{L}^{-1}\{F(\lambda)\} * \mathcal{L}^{-1}\{(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\}. \tag{2.7}$$

Enfin, en remplaçant la transformation de Laplace par les fonctions de Mittag-Leffler, on trouve la solution suivante

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s) ds.$$

On peut vérifier cette solution, avec compensation dans le problème (2.3), i.e.,
$D_t^m J_t^{m-\delta}\Big(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s) ds - \sum_{k=0}^{m-1} D_t^k \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s) ds \Big|_{t=0} g_{k+1}(t) \Big)$

$$\begin{aligned}
&= D_t^m \int_0^t \frac{s^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} ds \int_0^{t-s} (t-s-\sigma)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s-\sigma)^\alpha) f(\sigma) d\sigma \\
&= D_t \int_0^t \frac{s^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} ds \int_0^{t-s} (t-s-\sigma)^{\alpha-m} E_{\alpha,\alpha-m+1}(A(t-s-\sigma)^\alpha) f(\sigma) d\sigma \\
&= D_t \int_0^t f(\sigma) d\sigma \int_0^{t-\sigma} \frac{s^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} (t-s-\sigma)^{\alpha-m} E_{\alpha,\alpha-m+1}(A(t-s-\sigma)^\alpha) ds \\
&= D_t \int_0^t f(\sigma) d\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t-\sigma} \frac{A^n (t-s-\sigma)^{\alpha(n+1)-m} s^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha(n+1)-m+1)} ds \\
&= D_t \int_0^t f(\sigma) d\sigma \sum_{n=0}^{\infty} (t-\sigma)^{\alpha n} A^n \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha(n+1)-m} \tau^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha(n+1)-m+1)} d\tau \\
&= D_t \int_0^t f(\sigma) E_{\alpha,1}(A(t-s)^\alpha) d\sigma \\
&= f(t) - \int_0^t \Big[\frac{d}{ds} E_{\alpha,1}(A(t-s)^\alpha) \Big] f(s) ds \\
&= A \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s) ds + f(t).
\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que l'unicité de cette solution, par le principe de contraction de Banach

(Théorème 1.5.1).

Supposons qu'il existe deux solutions z_1 et z_2 du problème de Cauchy linéaire non homogène (2.3)–(2.4), alors leur différence $z = z_1 - z_2$ est une solution de l'équation homogène $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$ avec la condition initiale $z_k = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1$.

En appliquant l'opérateur J_t^α aux deux membres de cette expression, alors nous obtenons

$$z(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Az(s)ds, \tag{2.8}$$

pour certain $t_1 > 0$.

Considérons l'application $\Phi \in C([0, t_1]; \mathfrak{Z})$

$$(\Phi z)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Az(s)ds, \tag{2.9}$$

alors, on a

$$\begin{aligned} \|\Phi z\|_{C([0,t_1];\mathfrak{Z})} &\leq \frac{t_1^\alpha \|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \|z\|_{C([0,t_1];\mathfrak{Z})}}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ &= \frac{\|z\|_{C([0,t_1];\mathfrak{Z})}}{2}, \end{aligned}$$

pour $t_1 = \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\|A\|_{\mathcal{L}(3)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Par conséquent, l'application Φ est contractante dans $C([0, t_1]; \mathfrak{Z})$, d'après le principe de contraction de Banach Φ admit un unique point fixe qui est la solution. Évidemment, ce point est la fonction zéro, c'est-à-dire $z \equiv 0$ pour $t \in [0, t_1]$.

Pour $t_2 > t_1$, considérer l'espace $C_{t_1}([0, t_2]; \mathfrak{Z})$ des fonctions continues définies de $[0, t_2]$ dans $\mathfrak{Z}$, et sont nulles sur $[0, t_1]$.

Alors

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_{t_1}([0,t_2];\mathfrak{Z}))} &\leq \frac{(t_2^\alpha - t_1^\alpha)\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{\|z\|_{C([0,t_1];\mathfrak{Z})}}{2} \\ &= \frac{1}{2},\ \textit{pour}\ t_2 = 2^{\frac{1}{\alpha}} t_1. \end{aligned}$$

D'où, il résulte que $z \equiv 0$ sur l'intervalle $[0, t_2]$. En procédant à un argument similaire, nous obtenons un opérateur contractant Φ dans les espaces $C_{t_k}([0, t_{k+1}]; \mathfrak{Z}),\ t_k = k^{\frac{1}{\alpha}} t_1$.

Alors $lim_{k \longrightarrow \infty} t_k = \infty$, il résulte que, une infinité d'étapes, on obtient finalement $z \equiv 0$ sur $[0, T)$.

Par conséquent, le problème (2.3)–(2.4) possède une solution unique. □

2.1.2 Équation non linéaire non dégénérée avec condition non locale

On note Z un ensemble, tels que $Z = Y_1 \oplus Y_2$, $Y_1 = \mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^d$, $Y_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{Z}^r$ et soit $z_k - h(z^{(k)}(t)) \in \mathfrak{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, tel que $h : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{Z}$ une fonction donnée, avec $m = \max\{d, r\}$, $m - 1 < \alpha < m$, où $\alpha > 0$.
En considérant le problème de Cauchy non linéaire

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} z(t) = Az(t) + f(t, W(t)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} g(t, s, V(s))ds, \ t \in [t_0, T) & (2.10) \\ z^{(k)}(t_0) + h(z^{(k)}(t - t_0)) = z_k, \ k = 0, 1, \ldots, m-1, & (2.11) \end{cases}$$

où $J_t^{\delta} f(t) = (g_{\delta} * f)(t) = \int_{t_0}^{t} g_{\delta}(t-s) f(s)ds$, $D_t^{\alpha} f(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha}\Big(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(t_0) g_{k+1}(t - t_0)\Big)$. $\psi_z : Z \longrightarrow \mathfrak{Z}$ est un opérateur de façon générale non linéaire, tel que

$$\psi_z(t) = f(t, W(t)) + \int_0^t g(t, s, V(s))ds, \quad t \in [t_0, T],$$

où $f : Y_1 \longrightarrow \mathfrak{Z}$, $g : Y_2 \longrightarrow \mathfrak{Z}$ sont des opérateurs non linéaires, $W : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathfrak{Z}^d$, $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathfrak{Z}^r$ sont des fonctions donnnées.

Remarque 2.1.1. *Il serait plus naturel de considérer l'équation* (2.10) *avec* $A = 0$ *car* ψ_z *dépend aussi de la fonction inconnue* z*. Mais, pour étudier le cas d'une équation dégénerée non linéare non locale, nous aurons besoin d'énoncé du problème avec un opérateur borné arbitraire* A*.*

La solution du problème (2.10)–(2.11) sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ est une fonction $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$, telle que (2.11) est satisfaite, et $g_{m-\alpha} * \Big(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0) g_{k+1}\Big) \in C^m([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$, pour $t \in [t_0, t_1]$ les éléments $(t, z(t), z^{(1)}(t), ..., z^{(d-1)}(t))$, $(t, s, z(t), z^{(1)}(t), ..., z^{(r-1)}(t)) \in Z$ et de plus l'égalité (2.10) est vraie.

Lemme 2.1.1. *Soient* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $\psi_z \in C(Z; \mathfrak{Z})$ *et* $(t_0, z_0, z_1, ..., z_{d-1})$, $(t_0, s_0, z_0, z_1, ..., z_{r-1}) \in Z$*. Alors la fonction* $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$ *est une solution du problème* (2.10)–(2.11)*, si et seulement si*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1}(A(t - t_0)^{\alpha})[z_k - h(z^{(k)}(t - t_0)] + \int_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha - 1} E_{\alpha, \alpha}(A(t - s)^{\alpha}) \psi_z(s)ds. \tag{2.12}$$

pour $t \in [t_0, t_1]$*.*

Preuve. Supposons que z est une solution du problème (2.10)–(2.11), alors l'application $t \longrightarrow \psi_z(t)$ est continue de $[t_0, t_1]$ dans $\mathfrak{Z}$. D'après la démonstration du Théorème 2.1.1, on obtient que (2.12) est vraie.
Soit $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathfrak{Z})$ satisfait (2.12). Alors, comme $\psi_z(t)$ est une fonction continue en t elle est vérifié directement, que z est une solution du problème (2.10)–(2.11). □

La barre sur un symbole va mentionner l'ensemble ordonné de m éléments avec des indices de 0 à $m-1$, par exemple, $\bar{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_{m-1})$.
Soit

$$S_\delta(\bar{z}) = \{\bar{y} \in \mathfrak{Z}^m : \|y_k - z^{(k)}(t_0)\|_{\mathfrak{Z}} \leq \delta,\ k = 0, 1, \ldots, m-1\}. \tag{2.13}$$

L'application $\psi_z : Z \longrightarrow \mathfrak{Z}$ est localement Lipschitzienne par rapport à z, si pour tous $(t_0, \bar{z}) \in Z$, $(t_0, s_0, \bar{z}) \in Z$ il existe $\delta > 0$ et $l > 0$ tels que $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times S_\delta(\bar{z}) \subset Z$, $[t_0-\delta, t_0+\delta]^2 \times S_\delta(\bar{z}) \subset Z$ et pour tous $(t, \bar{y})$, $(t, \bar{v})$ dans $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times S_\delta(\bar{z})$ et $(t, s, \bar{y})$, $(t, s, \bar{v})$ dans $[t_0-\delta, t_0+\delta]^2 \times S_\delta(\bar{z})$, l'inégalité

$$\|\psi_{\bar{y}}(t) - \psi_{\bar{v}}(t)\|_{\mathfrak{Z}} \leq l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - v_k\|_{\mathfrak{Z}}, \tag{2.14}$$

est satisfaite.
(H1) : $h : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ est une fonction continue, et il existe un constant $l_1 > 0$ tel que :

$$\|h(x^{(k)}(t)) - h(y^{(k)}(t))\|_{\mathfrak{Z}} \leq l_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|x^{(k)} - y^{(k)}\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})},$$

pour tous x, $y \in C^{m-1}([t_0, T], \mathfrak{Z})$.

Théorème 2.1.2. *Soient $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, Z est un ensemble tels que $Z = Y_1 \oplus Y_2$, $Y_1 = \mathbb{R} \times \mathfrak{Z}^d$ $Y_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{Z}^r$, la condition $(H1)$ est satisfaite et L'application $\psi_z \in \mathcal{C}(Z; \mathfrak{Z})$ est localement Lipschitzienne par rapport à z. Alors, pour chaque $(t_0, z_0, z_1, ..., z_{d-1})$, $(t_0, s_0, z_0, z_1, ..., z_{r-1}) \in Z$, il existe $T > t_0$ tel que le problème (2.10)–(2.11) admis une solution unique sur $[t_0, T]$.*

Preuve. Dans l'espace $C^{m-1}([t_0, T]; \mathfrak{Z})$, on définit un opérateur $G : C^{m-1}([t_0, T]; \mathfrak{Z}) \to C^{m-1}([t_0, T]; \mathfrak{Z})$ comme

$$G(y)(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t-t_0)^k E_{\alpha,k+1}(A(t-t_0)^\alpha)[z_k - h(y^{(k)}(t-t_0))] + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)\psi_{\bar{y}}(s)ds, \tag{2.15}$$

pour $t \in [t_0, T]$.
L'idée est de montrer dans un premier temps que l'opérateur G^q est contractant si q est assez grand tel que $q \in \mathbb{N}$. Pour cela on voit facilement par récurrence que, pour tous y, $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathfrak{Z})$, pour tout $t \in [t_0, T]$ et $n = 0, 1, \ldots, m-1$,

$$\|[G^q(y)]^{(n)}(t) - [G^q(z)]^{(n)}(t)\|_{\mathfrak{Z}} \leq \frac{K^q (t-t_0)^{\alpha-m+q} \|y - z\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathfrak{Z})}}{m(q-1)!}, \tag{2.16}$$

où

$$K = m^2 l_1 (T-t_0)^{\alpha+m-1-n} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} E_{\alpha,\alpha+m-n}(\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}(T-t_0)^\alpha) + \frac{lm(T-t_0)^{2\alpha-m-n}}{\alpha-m+1}$$

$$\times \max_{n=0,1,\ldots,m-1} E_{\alpha,\alpha-n}(\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}(t_1-t_0)^\alpha). \tag{2.17}$$

On a

$$G^{(n)}(y) = \sum_{k=0}^{m-1}(t_1-t_0)^{\alpha+k-n}AE_{\alpha,\alpha+k+1-n}(A(t-t_0)^{\alpha}[z_k - h(y^{(k)}(t-t_0))]) + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-n-1}E_{\alpha,\alpha-n}(A(t-t_0)^{\alpha})\psi_{\bar{y}}(s)ds. \tag{2.18}$$

Maintenant, en tenant compte de (2.16), on obtient pour $q=1$, $n=0,1,\ldots,m-1$
$\|[G(y)]^{(n)}(t) - [G(z)]^{(n)}(t)\|_{\mathfrak{Z}}$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1}(T-t_0)^{\alpha+k-n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}E_{\alpha,\alpha+k+1-n}(\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}(T-t_0)^{\alpha})\|h(y^{(k)}(t-t_0)) - h(z^{(k)}(t-t_0))\|_{\mathfrak{Z}}$$

$$+ (T-t_0)^{\alpha-n-1}E_{\alpha,\alpha-n}(\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}(T-t_0)^{\alpha})\int_{t_0}^{t_1}(t-t_0)^{\alpha-n-1}(l\sum_{k=0}^{m-1}\|y_k - z_k\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})})ds$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1}(T-t_0)^{\alpha+k-n}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}E_{\alpha,\alpha+k+1-n}(\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}(T-t_0)^{\alpha})l_1\sum_{k=0}^{m-1}\|y^{(k)} - z^{(k)}\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})}$$

$$+ (T-t_0)^{\alpha-n-1}E_{\alpha,\alpha-n}(\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}(T-t_0)^{\alpha})\frac{l(t-t_0)^{\alpha-m+1}}{\alpha-m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\|y_k - z_k\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})}$$

$$\leq \Big[m^2 l_1(T-t_0)^{\alpha+m-1-n}E_{\alpha,\alpha+m-n}(\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}(T-t_0)^{\alpha}) + \frac{lm(T-t_0)^{2\alpha-m+1}}{\alpha-m-n}$$

$$\times E_{\alpha,\alpha-n}(\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})}(T-t_0)^{\alpha})\Big]\|y-z\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})}.$$

Si pour $q-1$ l'inégalité (2.16) est valide, alors

$$\begin{aligned}
\|[G^q(y)]^{(n)}(t) - [G^q(z)]^{(n)}(t)\|_{\mathfrak{Z}} &\leq \frac{K}{m}\int_{t_0}^{t}\sum_{k=0}^{m-1}\|[G^{q-1}(y)]^{(k)}(s) - [G^{q-1}(z)]^{(k)}(s)\|_{\mathfrak{Z}}ds,\\
&\leq K\int_{t_0}^{t}\frac{K^{q-1}(s-t_0)^{\alpha-m+q-1}\|y-z\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})}}{m(q-2)!}ds,\\
&\leq \frac{K^q(t-t_0)^{\alpha-m+q}\|y-z\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})}}{m(\alpha-m+q)(q-2)!},\\
&\leq \frac{K^q(t-t_0)^{\alpha-m+q}\|y-z\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})}}{m(q-1)!}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour $q\in\mathbb{N}$,

$$\|[G^q(y)](t) - [G^q(z)](t)\|_{\mathfrak{Z}} \leq \frac{K^q(T-t_0)^{\alpha-m+q}\|y-z\|_{C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})}}{(q-1)!}. \tag{2.19}$$

Par conséquent,
si q est suffisamment grand, alors G^q est strictement contractant dans $C^{m-1}([t_0,T],\mathfrak{Z})$, alors G admit un point fixe unique dans cet espace.
Donc, (2.12) est la solution unique du problème (2.10)–(2.11) sur l'intervalle $[t_0,T]$. □

2.2 Équation fractionnaire dégénérée avec condition non locale

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy d'une équation différentielle fractionnaire dégénérée avec condition non locale.

2.2.1 Équation linéaire dégénérée

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ (linéaire et continue de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$), $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ linéaire fermé avec domaine dense dans $\mathcal{X}$ et l'image dans $\mathcal{Y}$), D_M signifie domaine de la l'opérateur M.
D'abord notons que la norme graphique $\|.\|_{D_M} = \|.\|_{\mathcal{X}} + \|M.\|_{\mathcal{Y}}$.
On définit l'ensemble résolvant de M par rapport à L (ou, M-L résolvant) par

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\},$$

et son M-L spectre par

$$\sigma^L(M) = \mathbb{C}\backslash\rho^L(M),$$

et dénote la résolvante de M par rapport à L (ou, M-L résolvante) par

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu L(\mu L - M)^{-1}.$$

En considérant le problème linéaire dégénéré de Cauchy

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha_t Lx(t) = Mx(t) + f(t), \ t \in [0,T), & (2.20) \\ x^{(k)}(0) = x_k, \ k = 0,1,\ldots,m-1. & (2.21) \end{cases}$$

La solution du problème (2.20)–(2.21) est une fonction $x \in C([0,T);D_M)$, tels que $Lx \in C^{m-1}([0,T);\mathcal{Y})$, $g_{m-\alpha} * (Lx - \sum_{k=0}^{m-1}(Lx)^{(k)}(0)g_{k+1}) \in C^m([0,T);\mathfrak{Z})$, pour tout $t \in [0,T)$ l'égalité (2.20) et la condition (2.21) sont satisfaites.

Lemme 2.2.1. *([51]) Soit $H \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ un opérateur nilpotent de degré $\leq p \in \mathbb{N}_0$, et il existe les dérivées fractionnaires $(D^\alpha_t H)^k g \in C([0,T);\mathcal{X})$ pour $k = 0,1,\ldots,p$. Alors il existe une solution unique x de l'équation*

$$D^\alpha_t Hx(t) = x(t) + g(t), \tag{2.22}$$

de la forme

$$x(t) = -\sum_{k=0}^{p}(D^\alpha_t H)^k g(t). \tag{2.23}$$

Preuve. Soit $x = x(t)$ une solution à l'équation (2.22), alors l'opérateur D^α_t est bien définie.
En appliquant l'opérateur H aux deux membres de l'équation (2.22), nous obtenons

$$HD^\alpha_t Hx(t) = Hx(t) + Hg(t).$$

En appliquant une autre fois l'opérateur D_t^α aux deux membres de cette identité, nous obtenons

$$(D_t^\alpha H)^2 x(t) = D_t^\alpha H x(t) + D_t^\alpha H g(t) = x + g + D_t^\alpha g(t).$$

En procédant successivement de cette manière, à l'étape $p^{\text{ième}}$, nous obtenons la relation

$$(D_t^\alpha H)^{p+1} x(t) = x(t) + \sum_{k=0}^{p} (D_t^\alpha H)^k g(t).$$

Par la continuité et la nilpotencité de l'opérateur H, nous avons

$$(D_t^\alpha H)^{p+1} x(t) = (D_t^\alpha)^{p+1} H^{p+1} x(t) \equiv 0.$$

Donc, nous obtenons la relation (2.23) qui donne l'existence d'une solution de l'équation (2.22), en outre, si nous remplaçons cette fonction dans l'équation elle donne son unicité. La différence de deux solutions correspond à une solution de Eq. (2.22) avec $g = 0$ par la formule (2.23) cette solution est identiquement nulle. □

Théorème 2.2.1. *([51]) Soient M un opérateur (L,p)-borné, $Qf \in C([0,T);\mathcal{Y})$, et il existe les dérivées fractionnaires $(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C([0,T);\mathcal{X})$ pour $k = 0,1,...,p$, et la limite*

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{d^n}{dt^n}\Big|_{t=0} (D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I-Q)f(t) = -(I-P)x_n,\ n = 0,1,\dots m-1. \tag{2.24}$$

Alors il existe une solution unique du problème (2.20)–(2.21)*, sous la forme*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k X_{\alpha,k+1}(t)x_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} X_{\alpha,\alpha}(t-s) L_1^{-1} Qf(s)ds - \sum_{k=0}^{p} (D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I-Q)f(t). \tag{2.25}$$

Preuve. Notons que $v(t) = Px(t)$, $w(t) = (I-P)x(t)$ et $x(t) = v(t) + w(t)$.
En appliquant les opérateurs $L_1^{-1}Q$ $(M_0^{-1}(I-Q))$ aux deux membres de l'équation (2.20), nous obtenons
sur le premier terme, on a

$$L_1^{-1} Q L D_t^\alpha x(t) = L_1^{-1} L P D_t^\alpha x(t) = D_t^\alpha v(t),$$

pour le deuxième

$$\begin{aligned} L_1^{-1} Q M x(t) + L_1^{-1} Q f(t) &= L_1^{-1} M P x(t) + L_1^{-1} Q f(t) \\ &= L_1^{-1} M v(t) + L_1^{-1} Q f(t). \end{aligned}$$

D'où,

$$D_t^\alpha v(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1} Q f(t), \tag{2.26}$$

où $S_1 = L_1^{-1} M_1$.

et

$$D_t^{\alpha} Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)f(t). \tag{2.27}$$

D'aprés le Lemme 2.2.1, nous concluons qu'il existe une solution unique de l'équation (2.27) sous la forme

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} (D_t^{\alpha} H)^k M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Par conséquent, les conditions (2.24) sont nécessaires pour la solution.
Puisque toutes les propriétés du Théorème 1.2.16 sont satisfaites et $S_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1)$, alors d'après le Théorème 2.1.1, on conclut qu'il existence une solution unique du problème de Cauchy $v^k(0) = Px_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, pour l'équation (2.26), sous la forme

$$v(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(S_1 t^{\alpha}) Px_k + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(S_1(t-s)^{\alpha}) L_1^{-1} Qf(s)ds.$$

La référence du Lemme 1.2.13 termine la preuve. □

Nous considérons le problème généralisé de Showalter-Sidorov ([99], [104]) suivant

$$P(x^{(k)}(0) - x_k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.28}$$

pour l'équation (2.20), de la même manière, l'assertion suivante est prouvée.

Théorème 2.2.2. *([91]) Soient M un opérateur (L,p)-borné, $Qf \in C([0,T);\mathcal{Y})$, et il existe les dérivées fractionnaires $(D_t^{\alpha} H)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C([0,T);\mathcal{X})$ pour $k = 0, 1, ..., p$. Alors, il existe une solution unique du problème* (2.20)–(2.28)*, sous la forme* (2.25)*.*

Contrairement au Théorème 2.2.1 la condition (2.24) n'est pas nécessaires pour le problème (2.28).

2.2.2 Équation non linéaire dégénérée avec condition non locale

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} Lx(t) = Mx(t) + \psi_x(t),\ t \in [t_0, T) & (2.29) \\ P(x^{(k)}(t_0) + h(x^{(k)}(t-t_0)) - x_k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, & (2.30) \end{cases}$$

où $\psi_x(t) = f(t, W(t)) + \int_{t_0}^{t} g(t, s, V(s))ds,\ t \in [t_0, T)$,
$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un opérateur lineaire continu de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un opérateur fermé linéaire densément défini de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.
Soient $f : Y_1 \longrightarrow \mathcal{Y}$, $g : Y_2 \longrightarrow \mathcal{Y}$ deux opérateurs non linéaires, tels que Y_1, Y_1 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^d$, $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}^r$ respectivement et soient $W : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{X}^d$, $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{X}^r$, $h : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ sont des fonctions données, telles que $W(t) = (x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(d-1)}(t))$ et $V(t) = (x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(r-1)}(t))$, Y un ensemble tel que $Y = Y_1 \oplus Y_2$, et soit ${}^{C}D_t^{\alpha}$ est la dérivé de Caputo d'ordre α, $m-1 < \alpha < m$, $m = \max\{d, r\}$.

La solution du problème généralisé de Showalter-Sidorov non local (2.30) pour l'équation (2.29) sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ est une fonction $x \in C([t_0, t_1]; D_M)$, telles que $Lx \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Y})$ et $g_{m-\alpha} * \Big(Lx(t) - \sum_{k=0}^{m-1} (Lx)^{(k)}(t_0) g_{k+1}(t - t_0)\Big) \in C^m([t_0, t_1]; \mathcal{Y})$, les conditions (2.30) sont valides, pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $(t, x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(d-1)}(t))$, $(t, s, x(s), x^{(1)}(s), \ldots, x^{(r-1)}(s)) \in Y$ et l'égalité (2.29) est vraie.

Théorème 2.2.3. *Soient M un opérateur $(L, 0)$-borné, Y est un ensemble tels que $Y = Y_1 \oplus Y_2$, Y_1, Y_2 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^d$, $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}^r$ respectivement et V_1, V_2 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^d$, $\mathbb{R}^2 \times (\mathcal{X}^1)^r$ respectivement, telles que $V_1 = Y_1 \cap \mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^d$, $V_2 = Y_2 \cup \mathbb{R}^2 \times (\mathcal{X}^1)^r$, $\psi_y \in C(V_1 \cup V_2, \mathcal{Y})$, l'application $Q\psi_y : V_1 \cup V_2 \longrightarrow \mathcal{Y}$ est localement Lipschitzienne par rapport à y, si pour chaque $(t, y_0, ..., y_{d-1})$, $(t, s, y_0, ..., y_{r-1}) \in Y$, tels que $(t, Py_0, ..., Py_{d-1})$, $(t, s, Py_0, ..., Py_{r-1}) \in Y$, et l'égalité $\psi_y(t) = \psi_{Py}(t)$ est satisfaite. Alors si pour chaque $(t_0, x_0, ..., x_{d-1}) \in V_1$, $(t_0, s_0, x_0, ..., x_{r-1}) \in V_2$, Il existe $t_0 > t_0$, le problème (2.29)–(2.30) possède une solution unique dans l'intervalle $[t_0, t_1]$.*

Preuve. Soit la topologie sur Y_1 définie par la norme

$$\|(t, \bar{y})\|_{\mathbb{R} \times \mathcal{X}^d} = |t| + \sum_{k=0}^{d-1} \|y_k\|_{\mathcal{X}},$$

et une autre sur Y_2 définie par la norme

$$\|(t, s, \bar{y})\|_{\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}^r} = |t| + |s| + \sum_{k=0}^{r-1} \|y_k\|_{\mathcal{X}}.$$

Pour $(t_0, \bar{x}) \in V_1$, $(t_0, s_0, \bar{x}) \in V_2$ on prend un voisinage respectivement

$$O_\delta(t_0, \bar{x}) = \Big\{(t, \bar{y}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}^d : |t - t_0| + \sum_{k=0}^{d-1} \|y_k - x^{(k)}(t_0)\|_{\mathcal{X}} < \delta\Big\} \subset Y_1,$$

$$O'_\delta(t_0, s_0, \bar{x}) = \Big\{(t, s, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}^r : |t - t_0| + |s - s_0| + \sum_{k=0}^{r-1} \|y_k - x^{(k)}(t_0)\|_{\mathcal{X}} < \delta\Big\} \subset Y_2,$$

L'application P est une projection, donc $\|P\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \geq 1$.
Alors, pour chaque $(t, \bar{y}) \in O_{\delta \|P\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}(t_0, \bar{x}) \subset Y_1 \subset Y$, $(t, s, \bar{y}) \in O'_{\delta \|P\|^{-1}_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}}(t_0, s_0, \bar{x}) \subset Y_2 \subset Y$, nous avons

$$|t - t_0| + \sum_{k=0}^{d-1} \|P(y_k - x^{(k)}(t_0))\|_{\mathcal{X}} \leq |t - t_0| + \|P\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \sum_{k=0}^{d-1} \|y_k - x^{(k)}(t_0)\|_{\mathcal{X}} < \delta,$$

$$|t - t_0| + |s - s_0| + \sum_{k=0}^{r-1} \|P(y_k - x^{(k)}(t_0))\|_{\mathcal{X}} \leq |t - t_0| + |s - s_0| + \|P\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \sum_{k=0}^{r-1} \|y_k - x^{(k)}(t_0)\|_{\mathcal{X}} < \delta,$$

ainsi que $(t, Py_0, ..., Py_{d-1}) \in O_\delta(t_0, \bar{x}) \subset Y_1 \subset Y$, $(t, s, Py_0, ..., Py_{r-1}) \in O'_\delta(t_0, s_0, \bar{x}) \subset Y_2 \subset Y$. Par conséquent, Il existe donc des voisinages dans Y des points $(t_0, \bar{x}) \in V_1$, $(t_0, s_0, \bar{x}) \in V_2$

tel que pour chacun de ses éléments $(t, \bar{y})$, $(t, s, \bar{y})$, nous avons $(t, Py_0, ..., Py_{d-1}) \in Y_1 \subset Y$, $(t, s, Py_0, ..., Py_{r-1}) \in Y_2 \subset Y$.
Donc,

$$\psi_y(t) = \psi_{Py}(t).$$

Comme dans la preuve du Théorème 2.2.1, on obtient le problème

$$\begin{aligned} &D_t^\alpha v(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1} Q\psi_v(t), \\ &v^{(k)}(t_0) = P\Big(x_k - h(x^{(k)}(t - t_0))\Big), k = 0, 1, ..., m-1. \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$w(t) + M_0^{-1}(I - Q)\psi_v(t) = 0,$$

où $v(t) = Px(t)$, $w(t) = (I - P)x(t)$, $S_1 = L_1^{-1}M_1$.
D'aprés le Théorème 2.1.2, le problème (2.31) admet une solution unique v sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, de plus que V_1, V_2 sont ouverts, $L_1^{-1}Q\psi_v \in C(V_1 \cup V_2; \mathcal{X})$ est localement Lipschitzienne par rapport à x. Alors $w(t) = -M_0^{-1}(I - Q)\psi_v(t)$. □

Considérons l'équation

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + \psi_x(t) + \varphi(t). \tag{2.32}$$

Théorème 2.2.4. *Soient $p \in \mathbb{N}_0$, M un opérateur (L, p)-borné, Y est un ensemble tels que $Y = Y_1 \oplus Y_2$, Y_1, Y_2 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^d$, $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}^r$ respectivement et V_1, V_2 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^d$, $\mathbb{R}^2 \times (\mathcal{X}^1)^r$ respectivement, tels que $V_1 = Y_1 \cap \mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^d$, $V_2 = Y_1 \cap \mathbb{R}^2 \times (\mathcal{X}^1)^r$, l'application $\psi_x \in C(Y; \mathcal{Y})$ est localement Lipschitzienne par rapport à x, $im\psi_x \subset \mathcal{Y}^1$, $Q\varphi \in C([t_0, T); \mathcal{Y})$ pour certain $T > t_0$, et il existe les dérivés fractionnaires $(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I - Q)\varphi \in C^{m-1}([t_0, T); \mathcal{X})$ pour $k = 0, 1, \ldots, p$. Alors si pour tous $(t, x_0, ..., x_{d-1}) \in Y_1 \subset Y$, $(t, s, x_0, ..., x_{r-1}) \in Y_2 \subset Y$, il existe $t_1 > t_0$, tel que le problème (2.30)–(2.32) admis une solution unique dans l'intervalle $[t_0, t_1]$.*

Preuve. Comme $\mathrm{im}\psi_x \subset \mathcal{Y}^1$, alors il s'ensuit que $(I - Q)\psi_x \equiv 0$ et $Q\psi_x \equiv \psi_x$.
En multipliant les deux menbres de l'équation (2.32) par l'opérateur $M_0^{-1}(I - Q)$, on obtient

$$D_t^\alpha Hw(t) = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)\varphi(t),$$

d'après le Lemme 2.2.1, on obtient la solution suivante

$$w(t) = -\sum_{k=1}^{p} (D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I - Q)\varphi(t).$$

Il reste à montrer l'existence unique de solution du problème suivant, ceci peut être établi par la multiplication des membres de l'équation (2.32) par l'opérateur $L_1^{-1}Q$, on obtient

$$D_t^\alpha v(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1} Q\varphi(t) + L_1^{-1}\psi_{v+w}(t),$$

et

$$v^{(k)}(t_0) = P(x_k - h(x^{(k)}(t - t_0))),\ k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Il convient de noter que les opérateurs

$$\phi_1(t, v_0, v_1, \ldots, v_{d-1}) = L_1^{-1}\Gamma_1(t, v_0 + w(t), v_1 + w^{(1)}(t), \ldots, v_{d-1} + w^{(d-1)}(t)) + L_1^{-1}\varphi_1(t)$$

$$\phi_2(t, s, v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}) = L_1^{-1}\Gamma_2(t, s, v_0 + w(t), v_1 + w^{(1)}(t), \ldots, v_{r-1} + w^{(r-1)}(t)) + L_1^{-1}\varphi_2(t)$$

sont continus et localements Lipschitziennes par rapport à v. □

On trouve le résultat suivant par les mêmes étapes où la condition non locale sous la forme

$$x^{(k)}(t_0) + h(x^{(k)}(t - t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.33}$$

Théorème 2.2.5. *Soient $p \in \mathbb{N}_0$, M un opérateur (L,p)-borné, Y est un ensemble tels que $Y = Y_1 \oplus Y_2$, Y_1, Y_2 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^d$, $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{X}^r$ respectivement et V_1, V_2 deux ensembles ouverts dans $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^d$, $\mathbb{R}^2 \times (\mathcal{X}^1)^r$ respectivement, tels que $V_1 = Y_1 \cap \mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^d$, $V_2 = Y_1 \cap \mathbb{R}^2 \times (\mathcal{X}^1)^r$, l'application $\psi_x \in C(Y; \mathcal{Y})$, est localement Lipschitzienne par rapport à x, $im\psi_x \subset \mathcal{Y}^1$, $Q\varphi \in C([t_0, T); \mathcal{Y})$, si pour certain $T > t_0$, et il existe les dérivés fractionnaires $(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I - Q)\varphi \in C^{m-1}(t_0, T); \mathcal{X})$ pour $k = 0, 1, \ldots, p$. Alors pour $(t, x_0, ..., x_{d-1}) \in Y_1 \subset Y$, $(t, s, x_0, ..., x_{r-1}) \in Y_2 \subset Y$, pour $n = 0, 1, \ldots, m-1$, $m = \max\{d, r\}$, et la limite*

$$(I - P)[x_n - h(x^{(n)}(t))] = -\sum_{k=0}^{p} \frac{d^n}{dt^n}|_{t=t_0}(D_t^\alpha H)^k M_0^{-1}(I - Q)\varphi(t),$$

il existe $t_1 > t_0$, tel que le problème (2.32)–(2.33) possède une solution unique dans l'intervalle $[t_0, t_1]$.

2.3 Applications

Exemple 2.3.1. *Dans la région $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$. Considerer les conditions initiales aux limites*

$$u^{(k)}(x, 0) = u_k(x),\ k = 0, 1, \ldots, m-1, x \in \Omega, \tag{2.34}$$

$$u(x, t) = 0,\ (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T). \tag{2.35}$$

Pour l'equation non dégénérée de Barenblatt-Zheltov-Kochina [8] avec la dérivée fractionnaire de Caputo

$$D_t^\alpha(\beta - \Delta)u(x, t) = \gamma\Delta u(x, t) + g(x, t), (x, t) \in \Omega \times [0, T). \tag{2.36}$$

Où α, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, Δ est l'opérateur de Laplace. On pose $\mathfrak{Z} = \{v \in H^2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, $Bv = \Delta v$, pour $v \in \mathfrak{Z}$. Alors il existe $(\beta I - B)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); \mathfrak{Z})$, et le problème (2.34)–(2.36)

peut être sous la forme (2.3)–(2.4) *avec* $(\beta I - B)^{-1}B \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f(t) = (\beta I - B)^{-1}g(.,t)$.

Théorème 2.3.1. *Soient* α, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $u_k \in \mathfrak{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1.$, $g \in \mathcal{C}([0,T); L^2(\Omega))$. *Alors il existe une solution unique du problème* (2.34)–(2.36), *sous la forme*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}\Big(\frac{\gamma t^\alpha \lambda_l}{\beta - \lambda_l}\Big)\langle u_k, \varphi_l\rangle\varphi_l(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\Big(\frac{\gamma(t-s)^\alpha\lambda_l}{\beta-\lambda_l}\Big)\langle g(.,s), \varphi_l\rangle\varphi_l(x)ds.$$

Preuve. On note que $(\beta I - B)^{-1}g \in \mathcal{C}([0,T); \mathfrak{Z})$, si $g \in ([0,T); L^2(\Omega))$, en appliquant le Théorème 2.1.1 et nous utilisons l'expansion par rapport aux fonctions propres orthonormales $\{\varphi_l : l \in \mathbb{N}\}$ de l'opérateur de Laplace avec des conditions aux limites de Dirichlet qui correspond aux valeurs propres $\{\lambda_l : l \in \mathbb{N}\}$. □

Exemple 2.3.2. *Considérons le système d'Oskolkov fractionnaire non locale*

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}v(x,0) = v_k(x) + \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}v(x,t_k), x \in \Omega, k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.37}$$

$$v(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{2.38}$$

$$D_t^\alpha(1 - \chi\triangle)v(x,t) = \nu\triangle v(x,t) - (v.\nabla)v(x,t) - r(x,t), (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{2.39}$$

$$\nabla.v(x,t) = 0, (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{2.40}$$

Commme dans [91] $\alpha = 1$ *et* $c_k = 0$, *il décrit la dynamique du fluide viscoélastique Kelvin-Voigt [87]. Supposons* Ω *un domaine ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *avec frontière régulière* $\partial\Omega$. $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *est une vitesse,* $r = (r_1, \ldots, r_n) = \nabla p$ *est un gradient de pression.*
Note que $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$. *La fermeture de* $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty)^n : \nabla.v = 0\}$ *dans* $\mathbb{L}_2$ *noté par* $\mathbb{H}_\sigma$, *et dans* $\mathbb{H}^1$ *par* $\mathbb{H}_\sigma^1$.
Posons $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ *est un complément orthogonal à* $\mathbb{H}_\sigma$ *dans* $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \longrightarrow \mathbb{H}_\sigma$, $\sqcap = I - \Sigma$ *sont les orthoprojections correspondantes.*
Soit $A = \Sigma\triangle$ *un opérateur fermé dans* $\mathbb{H}_\sigma$ *avec domaine* $\mathbb{H}_\sigma^2$. *Prendre en compte* (2.40), *on pose* $\mathfrak{U} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathfrak{F} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$,

$$L = \begin{pmatrix} I - \chi A & \mathbb{O} \\ -\chi \sqcap \Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A & \mathbb{O} \\ \nu \sqcap \Delta & -I \end{pmatrix}, \quad \psi_v \begin{pmatrix} v \\ r \end{pmatrix} = -(v.\nabla)v,$$

Comme il est montré dans [60], si χ, $\nu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\chi^{-1} \notin \sigma(A)$, *alors l'opérateur* M *est* $(L,0)$-*borné.*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \nu \sqcap \Delta(I - \chi A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Le résultat suivant découle du Théorème 2.2.3 à cause de la forme de projection P *et de l'opérateur* ψ_v.

Théorème 2.3.2. *Si pour chaque* $(t_0, v_0, v_1, \ldots, v_{d-1}) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{H}_\sigma^2)^d$, $(t_0, s_0, v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{H}_\sigma^2)^r$, *alors il existe une solution unique du problème* (2.37)–(2.40) *dans l'intervalle* $[t_0, t_1]$.

Chapitre 3

Analyse de stabilité des systèmes fractionnaires dégénérés avec retard en temps fini

Dans ce chapitre, nous étudions le système d'ordre fractionnaire dégénéré avec retard. L'étude de ce genre du système est divisé en deux catégories. L'une est l'étude théorique de l'existence et de l'unicité de la solution, l'autre est l'analyse de la stabilité du système en donnant quelques conditions suffisantes.
Considérons le système d'évolution décrit par l'équation différentielle fractionnaire dégénérée avec retard en temps fini et avec condition initiale

$$\begin{cases} L^C D_t^\alpha u(t) = Mu(t) + \Phi u_t, \ t \in [0,T] & (3.1) \\ u(t) = \varphi(t), \ t \in [-\tau, 0], \varphi \in C([-\tau,0];\mathfrak{U}), & (3.2) \end{cases}$$

où D_t^α représente la dérivée fractionnaire de l'ordre $\alpha \in (0,1]$. Nous supposons que $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{F}$ sont des espaces de Banach, les opérateurs $L : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{F}$, Ker$L \neq \{0\}$ et $\Phi : C([-\tau,0];\mathfrak{U}) \longrightarrow \mathfrak{F}$ sont linéaires et continus, où l'opérateur L n'est pas inversible. $M : domM \longrightarrow \mathfrak{F}$ est un opérateur linéaire, fermé et densément défini de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{F}$, $u_t \in C([-\tau,0];\mathfrak{U})$, $u_t = u(t+s)$ pour $s \in [-\tau,0]$. Dans cette étude, nous utilisons la notion d'opérateur fortement (L,p)-sectoriel. La méthode est basée sur la décomposition de l'équation (3.1) en deux équations. L'une est résolue par rapport à la dérivée, l'autre à un opérateur nilpotent à la dérivée (voir [38], [44], [45] [49], [50], [51], [91], [92]). Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première section, nous étudions l'existence et l'unicité de solution d'équation différentielle fractionnaire dégénérée d'ordre α avec retard (3.1)–(3.2). Dans la deuxième section, nous présentons nos principaux résultats concernant la stabilité de solution en utilisant l'inégalité de Gronwall généralisée.

3.1 Équations différentielles fractionnaires dégénérées avec retard

Soit M un opérateur fortement (L,p)-sectoriel. Considérez le problème (3.1)–(3.2).
On note $v(t) = P\varphi(t) = \varphi_1(t)$, $w(t) = (I-P)\varphi(t) = \varphi_2(t)$. Soit l'espace Banach $\mathfrak{U}_\tau = C([-\tau,0];\mathfrak{U})$, on construit l'opérateur $T \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}_\tau^1)$, $Tz = D^\alpha z$, défini sur le domaine

$$domT = \{z \in C([-\tau,0];\mathfrak{U}^1) : z(0) \in domM_1, D_t^\alpha z(0) = S_1 z(0) + L_1^{-1}Q\Phi z\}.$$

Définition 3.1.1. *La solution du problème* (3.1)–(3.2) *est une fonction* $u \in C^1([0,T);\mathfrak{U}) \cap C([-\tau,T];\mathfrak{U})$ *tel que*

(i) $u(t) \in dom(M)$ *pour tout* $t \in [0,T]$,

(ii) la dérivé $D_t^\alpha u$ *existe et continue sur* $[0,T]$,

(iii) La fonction u *satisfait Eq.* (3.1) *pour* $t \in [0,T]$ *et la condition* (3.2) *pour* $t \in [-\tau,0]$.

Lemme 3.1.1. *([49], Lemme 3.1) Soit* $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ *un opérateur nilpotent de degré* $\leq p \in \mathbb{N}_0$, *soient* $g : [0,T] \longrightarrow \mathfrak{U}$ *et la dérivé* $D^{(p+1)\alpha}g$ *existe sur* $[0,T]$. *Alors il existe une solution unique* w *de l'équation*

$$HD_t^\alpha w(t) = w(t) + g(t), \tag{3.3}$$

de la forme

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k D_t^{k\alpha} g(t),\ t \in [0,T]. \tag{3.4}$$

Théorème 3.1.1. *Soient* M *un opérateur fortement* (L,p)*-sectoriel,* $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_r;\mathfrak{F})$, $\varphi_1 \in domT$, $\varphi_2 \in \mathfrak{U}_\tau^0$, *et soit*

$$\varphi_2(0) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)D_t^{k\alpha}\Phi(\varphi_1(t)+\varphi_2(t))|_{t=0},$$

alors, il existe une solution unique $\bar{u}[v(t),w(t)]$ *du problème* (3.1)–(3.2) *sous la forme*

$$\begin{cases} v(t) = E_{\alpha,1}(S_1 t^\alpha)\varphi_1(0) + \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(S_1 t^\alpha)L_1^{-1}Q\Phi(v_s+w_s)ds, & (3.5)\\ w(t) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)D_t^{k\alpha}\Phi(v_t+w_t). & (3.6) \end{cases}$$

Preuve. En appliquant l'opérateur $L_1^{-1}Q$ sur les deux membres de l'équation (3.1), on obtient

$$D_t^\alpha v(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1}Q\Phi(v_t+w_t), \tag{3.7}$$

où $v(t) = Pu(t)$, $w(t) = (I-P)u(t)$ et $u(t) = v(t) + w(t)$.
Les fonctions $v_t \in C([-\tau,0];\mathfrak{U}^1)$, $w_t \in C([-\tau,0];\mathfrak{U}^0)$ correspondent aux fonctions $v \in C([-\tau,T];\mathfrak{U}^1)$, $w \in C([-\tau,T];\mathfrak{U}^0)$ respectivement.

en appliquant l'opérateur $M_0^{-1}(I-Q)$ sur les deux membres de l'équation (3.1), on obtient

$$HD_t^{\alpha}w(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)\Phi(v_t + w_t). \tag{3.8}$$

Alors, le problème (3.1)–(3.2) est réduit aux problèmes

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}v(t) = S_1v(t) + L_1^{-1}Q\Phi(v_t + w_t) & (3.9)\\ v(t) = P\varphi(t) = \varphi_1(t), & (3.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H{}^{C}D_t^{\alpha}w(t) = w(t) + M_0^{-1}(I-Q)\Phi(v_t + w_t) & (3.11)\\ w(t) = (I-P)\varphi(t) = \varphi_2(t). & (3.12) \end{cases}$$

Par l'application de transformation de Laplace sur l'équation (3.9), on obtient

$$\lambda^{\alpha}V(\lambda) - \lambda^{\alpha-1}v(0) = S_1V(\lambda) + F_1(\lambda) \;\; / \; F_1(\lambda) = \mathfrak{L}(L_1^{-1}Q\Phi(v_t + w_t)),$$

$$V(\lambda) = (\lambda^{\alpha} - S_1)^{-1}\lambda^{\alpha-1}v(0) + (\lambda^{\alpha} - S_1)^{-1}F_1(\lambda). \tag{3.13}$$

Ensuit, on inverse la transformation de Laplace de l'équation (3.13), avec l'utilisation de la relation (1.20), on trouve

$$\begin{aligned} v(t) &= E_{\alpha,1}(S_1t^{\alpha})v(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(S_1(t-s)^{\alpha})L_1^{-1}Q\Phi(v_s + w_s)ds, \quad t \in [0,T]\\ &= E_{\alpha,1}(S_1t^{\alpha})\varphi_1(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(S_1(t-s)^{\alpha})L_1^{-1}Q\Phi(v_s + w_s)ds. \end{aligned}$$

D'aprés le Lemme 3.1.1, on déduit que l'équation (3.11) admet une solution unique sous la forme

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)D_t^{k\alpha}\Phi(v_t + w_t). \tag{3.14}$$

□

3.2 Résultats de stabilité en temps fini

Soient

$$\|\varphi\| = \sup_{-\tau\leq t\leq 0}\|\varphi(t)\|,\ \|u(t)\| = \sup_{0\leq t\leq T} u(t),\ \|u_t\| = \|u(t+s)\| = \sup_{-\tau\leq t\leq 0}\|u(t+s)\|,\ \forall u\in\mathfrak{U}. \tag{3.15}$$

Définition 3.2.1. *([76]) Le système* (3.1) *satisfaisant la condition initiale* $u(t)=\varphi(t)$*, pour* $t\in[-\tau,0]$ *est stable en temps fini par rapport à* $\{t_0,\delta,\epsilon,J\}$*,* $\delta<\epsilon$*,* $J=[t_0,t_0+T]$ *si et seulement si*

$$\|\varphi\|\leq\delta, \tag{3.16}$$

implique

$$\|u(t)\|\leq\epsilon,\ \forall t\in J, \tag{3.17}$$

où $\delta\in\mathbb{R}_+$*.*

Théorème 3.2.1. *Si* $\bar{u}(t)=[v(t)/w(t)]$ *est une solution du système* (3.1)–(3.2)*, alors il existe des constantes positives* a *et* b *telles que*

1. $a=1+C\sum_{k=0}^{p}h_k$,
2. $b>k_1+Ck_2$,
3. $\|\bar{u}(t)\|\leq a\|\bar{\varphi}\|E_\alpha(bt^\alpha),\ \forall t\in J=[0,T]$.

Preuve. Selon les relations (1.58) et (1.27), on réécrit le système (3.9)–(3.10) sous la forme équivalente de l'équation intégrale de volterra

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}[S_1v(s)+L_1^{-1}Q\Phi(v_s+w_s)]ds,\\ &= \varphi_1(0)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_1v(s)ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}L_1^{-1}Q\Phi(v_s+w_s)ds. \end{aligned} \tag{3.18}$$

En appliquant une norme pratique $\|.\|$ sur les deux membres de l'expression (3.18), on obtient

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \|\varphi_1(0)\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|t-s|^{\alpha-1}\|S_1\|\|v(s)\|ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|t-s|^{\alpha-1}\|L_1^{-1}Q\|\|\Phi(v_s+w_s)\|ds,\\ &\leq \|\bar{\varphi}\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|t-s|^{\alpha-1}\|S_1\|\|\bar{u}(s)\|ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|t-s|^{\alpha-1}\|L_1^{-1}Q\|\|[C_1v_s+C_2w_s)]\|ds,\\ &\leq \|\bar{\varphi}\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|t-s|^{\alpha-1}\|S_1\|\|\bar{u}(s)\|ds+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|t-s|^{\alpha-1}\|L_1^{-1}Q\|[C\|u_s\|]ds,\\ &\leq \|\bar{\varphi}\|+\frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}(s)\|ds+\frac{Ck_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}_s\|ds,\ t\geq 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

où $C=\max\{C_1,C_2\}$, $k_1=\|S_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}^1)}$ et $k_2=\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F},\mathcal{U})}$.

En appliquant une autre fois, une norme pratique sur les deux membres de l'expression (3.14), on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\|w(t)\| &\leq \|\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(I-Q)D_t^{k\alpha}\Phi(v_t+w_t)\|,\\ &\leq \sum_{k=0}^{p} \|H^k M_0^{-1}(I-Q)\|\|D_t^{k\alpha}\Phi(v_t+w_t)\|,\\ &\leq \sum_{k=0}^{p} \|H^k M_0^{-1}(I-Q)\|\|\Phi(v_t^{(\alpha k)}+w_t^{(\alpha k)})\|\\ &\leq \sum_{k=0}^{p} h_k[C_1\|v_t\|+C_2\|w_t\|]\\ &\leq C\sum_{k=0}^{p} h_k\|\bar{u}_t\|, \end{aligned} \tag{3.20}$$

où $C=\max\{C_1,C_2\}$ et $h_k=\|H^k M_0^{-1}(I-Q)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})}$, $k=0,1,\ldots,p$.
On combine les relations (3.19) et (3.20), on obtient

$$\begin{aligned}\|\bar{u}(t)\| &\leq \|v(t)\|+\|w(t)\|\\ &\leq \|\bar{\varphi}\|+\frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}(s)\|ds+\frac{Ck_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}_s\|ds\\ &\quad + C\sum_{k=0}^{p} h_k\|\bar{u}_t\|,\ t\geq 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

pour $0\leq t\leq\tau$, on a $\|\bar{u}_t\|\leq\|\bar{\varphi}\|$, alors on peut écrire l'estimation (3.21) comme suit

$$\begin{aligned}\|\bar{u}(t)\| &\leq (1+C\sum_{k=0}^{p} h_k)\|\bar{\varphi}\|+\frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}(s)\|ds\\ &\quad +\frac{Ck_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}_s\|ds,\ 0\leq t\leq\tau. \end{aligned} \tag{3.22}$$

D'aprés (1.27), on remarque que $I^\alpha f(t)$ est une fonction croissante, si $f(t)>0$. Alors $\frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}(s)\|ds$ et $\frac{Ck_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}_s\|ds$ sont des fonctions croissantes.
En prenant en compte la relation (3.15), pour écrire (3.22) sous la forme

$$\begin{aligned}\|\bar{u}_t\| &\leq (1+C\sum_{k=0}^{p} h_k)\|\bar{\varphi}\|+\frac{k_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}_s\|ds\\ &\quad +\frac{Ck_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}\|\bar{u}_s\|ds \end{aligned}$$

$$\leq (1 + C\sum_{k=0}^{p} h_k)\|\bar{\varphi}\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |t-s|^{\alpha-1}[k_1 + Ck_2]\|\bar{u}_s\|ds, \quad 0 \leq t \leq \tau. \tag{3.23}$$

Comme $a = 1 + C\sum_{k=0}^{p} h_k$ et $\tilde{b} = k_1 + Ck_2$ et d'après le Theorème 3.2.1, on réduite la fonction $a(t)$ sous la forme

$$a(t) = (1 + C\sum_{k=0}^{p} h_k)\|\bar{\varphi}\| = a\|\bar{\varphi}\|. \tag{3.24}$$

Par l'inégalité de Gronwall généralisée. Il en résulte que

$$\|\bar{u}_t\| \leq a\|\bar{\varphi}\|E_\alpha(\tilde{b}t^\alpha), \quad 0 \leq t \leq \tau. \tag{3.25}$$

Il en va de même argument, on obtient l'estimation suivante

$$\|\bar{u}_t\| \leq a\|\bar{u}_{\tau_0}\|E_\alpha(\tilde{b}(t-\tau_0)^\alpha), \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + \tau, \tau_0 \geq 0. \tag{3.26}$$

D'aprés la définition de la fonction Mittag-Leffler (voir, sous section 1.4.4), on en déduit que $E_\alpha(t)$ est une fonction croissante en t.
Par conséquent, il existe $b > \tilde{b}$ tel que $E_\alpha(b\tau^\alpha) > E_\alpha(\tilde{b}\tau^\alpha)$ et $\frac{E_\alpha(b(t-\tau)^\alpha)E_\alpha(\tilde{b}\tau^\alpha)}{E_\alpha(bt^\alpha)} < \frac{1}{a}$. Les équations (3.25) et (3.26) suggèrent l'expression générale suivante

$$\|\bar{u}_t\| \leq a\|\bar{\varphi}\|E_\alpha(bt^\alpha), \ 0 \leq t \leq n\tau \leq T. \tag{3.27}$$

Pour prouver la formule (3.27) par récurrence, nous devons montrer qu'elle est valable pour $n = 1$ à cause de la formule (3.25) et si cela valable pour $n = k$, alors elle est aussi valable pour $n = k + 1$.
En effet, pour $t \in [\tau, (k+1)\tau]$, on a $t - \tau \in [0, k\tau]$. En utilisant la formule (3.26), on obtient

$$\|\bar{u}_t\| \leq a\|\bar{u}_{t-\tau}\|E_\alpha(\tilde{b}\tau^\alpha). \tag{3.28}$$

Par la formule (3.27), on a aussi

$$\|\bar{u}_{t-\tau}\| \leq a\|\bar{\varphi}\|E_\alpha(b(t-\tau)^\alpha). \tag{3.29}$$

Prendre en compte (3.28) et (3.29), nous concluons que

$$\begin{aligned}\|\bar{u}_t\| &\leq a[a\|\bar{\varphi}\|E_\alpha(b(t-\tau)^\alpha)]E_\alpha(\tilde{b}\tau^\alpha) \\ &= a\|\bar{\varphi}\|E_\alpha(bt^\alpha)\frac{aE_\alpha(b(t-\tau)^\alpha)E_\alpha(\tilde{b}\tau^\alpha)}{E_\alpha(bt^\alpha)} \\ &\leq a\|\bar{\varphi}\|E_\alpha(bt^\alpha).\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$|\bar{u}(t)\| \leq \|\bar{u}_t\| \leq a\|\bar{\varphi}\|E_\alpha(bt^\alpha). \tag{3.30}$$

□

Théorème 3.2.2. *Si la condition suivante est satisfaite*

$$a\|P\|^2 E_\alpha(bt^\alpha) \leq \frac{\epsilon}{\delta},\ \forall t \in J = [0, T], \tag{3.31}$$

alors le système (3.1)–(3.2) *est stable en temps fini par rapport à* $\{0, \delta, \epsilon, J\}$*, où* $\delta < \epsilon$*.*

Preuve. Par la transformation des coordonnées, on obtient

$$u(t) = P\bar{u}(t) = P[v(t)/w(t)],\ \varphi(t) = P\bar{\varphi}(t) = P[\varphi_1(t)/\varphi_2(t)]. \tag{3.32}$$

D'après le Théorème 3.2.1, on a

$$\|u(t)\| \leq \|P\|\|\bar{u}(t)\| \leq a\|P\|^2\|\varphi\|E_\alpha(bt^\alpha). \tag{3.33}$$

□

Par conséquent, en utilisant la Définition 3.2.1 et la condition de base du Théorème 3.2.2, il s'ensuit que

$$\|u(t)\| < \epsilon,\ \forall t \in J = [0, T]. \tag{3.34}$$

Chapitre 4

Équations fractionnaires dégénérées bien posées dans les espaces fonctionnaires vectoriels

Dans ce chapitre, nous analysons les caractéristiques complètes des équations différentielles fractionnaires dégénérées bien posées avec des conditions aux limites périodiques. En utilisant la technique des multiplicateurs de Fourier qui ont fourni les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer le caractère bien posé du problème dans les espaces de Lebesgue-Bochner $L^p(0,2\pi;X)$, les espaces de Besov périodiques $B^s_{p,q}(0,2\pi;X)$ et les espaces périodiques Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(0,2\pi;X)$.
Les résultats requièrent que l'espace X soit UMD (ceci équivaut à la continuité de la transformée de Hilbert sur $L^p(\mathbb{R};X)$, $1<p<\infty$) et au concept de R-borné.
En considérant le problème différentielle fractionnaire dégénérée avec des conditions aux limites périodiques $(P_{\alpha,\beta})$:

$$\begin{cases} D^\alpha_t(Mu)(t) = \gamma AD^\beta_t u(t) + \mu Au(t) + f(t),\ 0 \le t \le 2\pi & (4.1)\\ (Mu)(0) = (Mu)(2\pi),\ 0<\beta<\alpha\le 1, & (4.2)\end{cases}$$

où A et M sont des opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach complexe X satisfaisant $D(A)\subset D(M)$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{T}=[0,2\pi]$.
D^α_t est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Lorsque $M=I_X$, $\alpha=1$, $\gamma=0$, $\mu=1$ où $M=I_X$, $\alpha=2$, $\gamma=0$, $\mu=1$ où $0<\alpha\le 1$, $\gamma=0$, $\mu=1$ correspondant aux 1$^{\text{er}}$ ordre, 2$^{\text{ième}}$ ordre et fractionnaire ordre respectivement du problème $(P_{\alpha,\beta})$ avec des conditions périodiques qui ont été étudiées par Arendt et Bu [[2], [3]], Bu et Cai [[13], [14]], et leur caractère bien posé dans $L^p(\mathbb{T};X)$, $B^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{T};X)$.
Dans ce chapitre, nous avons étudié le caractère bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$ par la bornuté de l'ensemble M-résolvant de A. Par exemple, nous montrons que, lorsque l'espace de Banach X est un espace

Banach UMD et $1 < p < \infty$, alors $(P_{\alpha,\beta})$ est L^p-bien posé si et seulement si

$$\Big\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta + \mu} : k \in \mathbb{Z}\Big\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$$

et l'ensemble

$$\Big\{(ik)^\alpha M[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1} : k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

est R-borné, où $\rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ est l'ensemble M-résolvant de A, et

$$(ik)^\vartheta = |k|^{(\vartheta)} e^{\frac{1}{2} sgn(k)\pi i\vartheta} \ lorsque \ k \neq 0. \tag{4.3}$$

Notre résultats retrouvent les précédents résultats connus de Keyantuo et Lizama [62] lorsque $M = I_X$, $\gamma A = B$, $\mu = 1$, et Arendt, Batty et Bu [1] lorsque $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $\mu = 1$, les résultats récupèrent également les résultats précédemment obtenus par Bu et Cai dans [[13]- [14]],
de même principaux outils dans l'étude du problème bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$ ont les théorèmes des opérateurs multiplicateur de Fourier obtenu par Arendt et Bu [[2]- [3]], Bu [10]- [12], Bu et Cai [[13], [14]] sur $L^p(\mathbb{T}; X)$, $B^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$ et $F^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$, Bu et Kim [16] sur $F^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$. En effet, nous allons transformer le problème bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$ à un problème de multiplicateur de Fourier évalué par l'opérateur dans l'espace de fonction vectorielle.

4.1 Équations fractionnaires dégénérées bien posées dans les espaces de Lebesgue-Bochner

Soient X et Y deux espaces complexes de Banach et soit $\mathbb{T} := [0; 2\pi]$, nous désignons par $\mathcal{L}(X; Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y . Si $X = Y$, nous le dénoterons simplement par $\mathcal{L}(X)$. Pour $1 \leq p < \infty$, nous désignons par $L^p(\mathbb{T}; X)$ l'espace des fonctions mesurables f à valeurs dans X définie sur $\mathbb{T}$ satisfaisant

$$\|f\|_{L^p} := (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pour $f \in L^1(\mathbb{T}, X)$, nous désignons par

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{-k}(t) f(t) dt$$

le $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourrier de f, où $k \in \mathbb{Z}$ et $e_k(t) = e^{ikt}$ lorsque $t \in \mathbb{T}$. Nous notons par $e_k \otimes x$ la fonction vectorielle à valeurs dans X définies sur $\mathbb{T}$ par $e_k \otimes x = e_k(t)x$.
L'outil principal dans notre étude sur le problème L^p-bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$ est le théorème du multiplicateur L^p-Fourier [2].
Soit $1 \leq p < \infty$. Nous définissons l'espace des solutions de $(P_{\alpha,\beta})$ dans le cas L^p-bien posé par

$$S_p(A, M) = \{u \in L^p(\mathbb{T}; D(A)) : Mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{T}; X), D^\beta u \in L^p(\mathbb{T}; D(A))\}. \tag{4.4}$$

Considérons $D(A)$ et $D(M)$ comme des espaces de Banach muni par leurs normes graphiques. $S_p(A,M)$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|u\|_{S_p(A,M)} = \|u\|_{L^p} + \|Au\|_{L^p} + \|D^\beta u\|_{L^p} + \|AD^\beta u\|_{L^p} + \|Mu\|_{W^{\alpha,p}}, \tag{4.5}$$

Définition 4.1.1. *Soient $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{T};X)$, $u \in S_p(A,M)$ est appelée une L^p-solution forte de $(P_{\alpha,\beta})$, si $(P_{\alpha,\beta})$ est satisfait sur $\mathbb{T}$. Nous disons que $(P_{\alpha,\beta})$ est L^p-bien posé, si pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T},X)$, il existe une L^p-solution forte unique de $(P_{\alpha,\beta})$.*

Si $(P_{\alpha,\beta})$ est L^p-bien posé, il existe une constante $C > 0$, tel que pour chaque $f \in L^p(\mathbb{T};X)$, ainsi que $u \in S_p(A,M)$ est L^p-solution forte unique de $(P_{\alpha,\beta})$, alors

$$\|u\|_{S_p(A,M)} \leq C\|f\|_{L^p}, \tag{4.6}$$

c'est une conséquence facile du théorème du graphique fermé.
Dans ce qui suit, nous utilisons toujours la notation la plus simple suivante

$$a_k = (ik)^\alpha \ et \ \ b_k = (ik)^\beta, 0 < \beta < \alpha \leq 1, \tag{4.7}$$

où $(ik)^\alpha$ et $(ik)^\beta$ sont définis par (4.3).

Remarque 4.1.1. *Un calcul facile, montre que $(ik)^\alpha$ et $(ik)^\beta$ sont 3-régulaires. Ainsi c'est aussi 1-régulaire et 2-régulaire.*

Maintenant, nous présentons l'ensemble A-M résolvant. Nous rappelons que sous l'hypothèse que $D(A) \subset D(M)$, la somme $\lambda M - A$ est un opérateur linéaire de $D(A)$ dans X lorsque $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous définissons l'ensemble

$$\rho^M(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda M - A : D(A) \longrightarrow X \ est \ inversible \ et \ [\lambda M - A]^{-1} \in \mathcal{L}(X)\} \tag{4.8}$$

la résolvante de l'opérateur A par rapport à M (ou A-M résolvant). Si $\lambda \in \rho^M(A)$, alors l'opérateur $M[\lambda M - A]^{-1}$ est bien défini par l'hypothèse $D(A) \subset D(M)$, $M[\lambda M - A]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ par la fermeture de M et la bornuté de $[\lambda M - A]^{-1}$.
Dans notre cas, l'ensemble A-M résolvant est :
$\rho^M_{\gamma,\mu}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A : D(A) \longrightarrow X$ est inversible et

$$[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}, \tag{4.9}$$

Nous aurons besoin de l'hypothèse suivante qui sera fondamentale pour nos objectifs
(**H1**) : $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{\frac{1}{\gamma b_k + \mu}\}$ sont des suites bornées.

Lemme 4.1.1. *Soit X un espace UMD. Supposons que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est 1-régulière et l'hypothèse* (**H1**) *est satisfaite. Alors $\{(b_k)I_X\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{\frac{1}{(\gamma b_k+\mu)}I_X\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des multiplicateurs de L^p-Fourier.*

Preuve. Tout d'abort

$$k(b_{k+1}-b_k)=k(\frac{b_{k+1}-b_k}{b_k}).b_k,$$

lorsque $k\neq 0$.

$$\begin{aligned}k\Big(\frac{1}{\gamma b_{k+1}+\mu}-\frac{1}{\gamma b_k+\mu}\Big)&=k\frac{(\gamma b_k+\mu)-(\gamma b_{k+1}+\mu)}{(\gamma b_{k+1}+\mu)(\gamma b_k+\mu)}\\&=k\frac{\gamma(b_k-b_{k+1})}{(\gamma b_{k+1}+\mu)(\gamma b_k+\mu)}\\&=\gamma.\frac{k(b_k-b_{k+1})}{b_k}.\frac{1}{\gamma b_{k+1}+\mu}.\frac{1}{\gamma b_k+\mu}.b_k\end{aligned}$$

lorsque $k\neq 0$.
Comme la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est 1-régulière et l'hypothèse (**H1**) est satisfaite. Alors $\{(b_k)I_X\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{\frac{1}{(\gamma b_k+\mu)})I_X\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont R-bornés, nous concluons que $\{(b_k)I_X\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{\frac{1}{(\gamma b_k+\mu)})I_X\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des multiplicateurs de L^p-Fourier d'après le Theorème 1.2.20. □

Dans la démonstration de notre résultat principal de cette section, nous utiliserons le résultat suivant

Proposition 4.1.1. *Soient A et M des opérateurs lineaires fermés dans un espace UMD de Banach X tel que $D(A)\subset D(M)$. Supposons que $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ sont 1-régulières, telle que l'hypothèse* (**H1**) *est satisfaite et $\{\frac{a_k}{\gamma b_k+\mu}\}\subset\rho^M_{\gamma,\mu}(A)$.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\{a_kM[a_kM-(\gamma b_k+\mu)A]^{-1}\}$ est un multiplicateur L^p-Fourier pour $1<p<\infty$,
(ii) L'ensemble $\{a_kM[a_kM-(\gamma b_k+\mu)A]^{-1}\}$ est R-borné.

Preuve. L'implication (i)⇒(ii) est clairement vraie par la Proposition 1.2.10.
$(ii)\Rightarrow(i)$, d'abord nous notons que $N_k=[a_kM-(\gamma b_k+\mu)A]^{-1}$ et $M_k=a_kMN_k$ lorsque $k\in\mathbb{Z}$. Nous supposons que $\{M_k:k\in Z\}$ est R-borné, pour montrer que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définit un multiplicateur de L^p-Fourier lorsque $1<p<\infty$, il suffit de prouver que l'ensemble $\{k(M_{k+1}-M_k):k\in\mathbb{Z}\}$ est R-borné d'après le Théorème 1.2.20. Nous observons que

$$\begin{aligned}N_{k+1}-N_k&=N_{k+1}[N_k^{-1}-N_{k+1}^{-1}]N_k\\&=N_{k+1}[(a_kM-(\gamma b_k+\mu)A)-(a_{k+1}M-(\gamma b_{k+1}+\mu)A)]N_k\\&=N_{k+1}[a_kM-(\gamma b_k+\mu)A-a_{k+1}M+(\gamma b_{k+1}+\mu)A]N_k\\&=N_{k+1}(a_k-a_{k+1})MN_k+\gamma N_{k+1}(b_{k+1}-b_k)AN_k\\&=N_{k+1}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k}M_k+\gamma N_{k+1}(b_{k+1}-b_k)AN_k,\end{aligned}\tag{4.10}$$

lorsque $k\neq 0$,

et

$$\begin{aligned} k(M_{k+1}-M_k) &= k[a_{k+1}MN_{k+1}-a_kMN_k] \\ &= k[a_{k+1}M(N_{k+1}-N_k)+(a_{k+1}-a_k)MN_K] \\ &= ka_{k+1}MN_{k+1}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k}M_k+\gamma ka_{k+1}MN_{k+1}(b_{k+1}-b_k)AN_k \\ &\quad + k(a_{k+1}-a_k)MN_k. \end{aligned} \tag{4.11}$$

D'une part,
$I_X = M_k + (\gamma b_k + \mu)AN_k$, ce qui donne

$$AN_k = \frac{1}{\gamma b_k+\mu}(M_k - I_X). \tag{4.12}$$

Compensation (4.12) dans (4.11), on trouve

$$\begin{aligned} k(M_{k+1}-M_k) = M_{k+1}\frac{k(a_k-a_{k+1})}{a_k}M_k + M_{k+1}\frac{k(b_{k+1}-b_k)}{b_k}\frac{\gamma}{\gamma b_k+\mu}b_k[M_k-I_X] \\ + \frac{k(a_{k+1}-a_k)}{a_k}M_k. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $k(M_{k+1}-M_k)$ est R-borné, grâce à l'hypothèse (**H1**) et les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont 1-régulières. □

Le résultat suivant est le résultat principal de cette section, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que $(P_{\alpha,\beta})$ soit un problème L^p-bien posé.

Théorème 4.1.1. *Soient X est un espace UMD de Banach, $1 < p < \infty$ et A, M des opérateurs linéaires fermés dans X satisfaisant $D(A) \subset D(M)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $(P_{\alpha,\beta})$ est L^p-bien posé,

(ii) $\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta+\mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ et l'ensemble $\{(ik)^\alpha M[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta+\mu)A]^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ est R-borné.

Preuve. (ii)⇒(i), nous notons que $M_k = (ik)^\alpha MN_k$ et $N_k = [(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta+\mu)A]^{-1}$.
Supposons que $\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta+\mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ et l'ensemble $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné.
D'après la Proposition 4.1.1, nous concluons que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de L^p-Fourier. Alors, si pour tout $f \in L^p(\mathbb{T};X)$, il existe $u \in L^p(\mathbb{T};X)$ tel que

$$\hat{u}(k) = M_k\hat{f}(k), \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}. \tag{4.13}$$

Comme $AN_k = \frac{1}{\gamma(ik)^\beta+\mu}[M_k - I_X]$, lorsque $k \neq 0$. En utilisant les hypothèses de la Proposition 4.1.1, nous obtenons facilement à partir du Lemme 4.1.1 que $\{\frac{1}{\gamma(ik)^\beta+\mu}I_X\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de L^p-Fourier, on arrive que $(AN_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est aussi un multiplicateur de L^p-Fourier.
Par conséquent, il existe $v \in L^p(\mathbb{T};X)$ satisfaisant

$$\hat{v}(k) = AN_k\hat{f}(k), \tag{4.14}$$

lorsque $k \in \mathbb{Z}$.
De plus, comme $0 \in \rho_{M,\gamma,\mu}(A)$, alors $A^{-1} : X \longrightarrow D(A)$ est un isomorphisme, nous considérons ici $D(A)$ comme un espace de Banach muni par sa norme graphique.
Par conséquent $A^{-1}\hat{v}(k) = N_k\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si note que $w := A^{-1}v$, alors $w \in L^p(\mathbb{T}; D(A))$ et

$$\hat{w}(k) = N_k\hat{f}(k), \tag{4.15}$$

lorsque $k \in \mathbb{Z}$.
En multipliant la suite $(ik)^\beta$ aux deux membres de l'expression (4.14), on obtient

$$(ik)^\beta\hat{v}(k) = (ik)^\beta AN_k\hat{f}(k), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Comme $\{(ik)^\beta\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est borné par l'hypothèse (**H1**), implique que $\{(ik)^\beta I_X\}$ est un multiplicateur de L^p-Fourier par Lemme 4.1.1 et par la Remarque 1.2.14(b), nous déduisons que le produit $((ik)^\beta AN_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de L^P-Fourier, il s'ensuit qu'il existe $z \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que

$$\hat{z}(k) = (ik)^\beta\hat{v}(k) = (ik)^\beta AN_k\hat{f}(k) = A(ik)^\beta N_k\hat{f}(k) = A(ik)^\beta\hat{w}(k).$$

Par la fermeture de A, on obtient $D_t^\beta w \in L^p(\mathbb{T}, D(A))$ et $AD_t^\beta w = z$. De plus, par la fermeture de M, il découle les hypothèses $0 \in \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$, $D(A) \subset D(M)$ et $MA^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, ce qui implique $w \in L^p(\mathbb{T}; D(M))$. Comme $D(M)$ est muni par sa norme graphique, il devient un espace de Banach. En combinant (4.13) et (4.15), on obtient

$$\hat{u}(k) = (ik)^\alpha M\hat{w}(k) = (ik)^\alpha\widehat{Mw}(k), \ (k \in \mathbb{Z}),$$

ce qui implique que $Mw \in W^{\alpha,p}(\mathbb{T}, X)$. De plus $Mw(0) = Mw(2\pi)$ puisque $w(0) = w(2\pi)$.
Enfin, nous avons montré que

$$w \in S_p(A; M).$$

Par (4.15), on obtient $(ik)^\alpha M\hat{w}(k) - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A\hat{w}(k) = \hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui implique que

$$(ik)^\alpha M\hat{w}(k) = (ik)^\alpha\widehat{Mw}(k) = (\gamma(ik)^\beta + \mu)A\hat{w}(k) + \hat{f}(k), \ \textit{pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

D'où $D_t^\alpha(Mw)(t) = \gamma AD_t^\beta w(t) + \mu Aw(t) + f(t)$, $t \in \mathbb{T}$. Par le Théorème de l'unicité [[2], p.314], on montre l'existence.
Il ne reste plus qu'à montrer l'unicité. Supposons que $u \in S_p(A; M)$ une autre solution de

$$D_t^\alpha(Mw)(t) = \gamma AD_t^\beta w(t) + \mu Aw(t) + f(t),$$

alors

$$D_t^\alpha M(u - w)(t) = \gamma AD_t^\beta(u - w)(t) + \mu A(u - w)(t).$$

En appliquant la transformation de Fourier sur les deux membres de l'équation ci-dessus, nous

obtenons

$$(ik)^{\alpha}M(\widehat{u(k)-w}(k)) = \gamma A(ik)^{\beta}(\hat{u}(k)-\hat{w}(k)) + \mu A(\hat{u}(k)-\hat{w}(k)),$$

implique que

$$[(ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A](\hat{u}(k)-\hat{w}(k)) = 0.$$

Alors $\hat{u}(k) = \hat{w}(k)$ comme $(ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A$ est inversible par hypothèse,
d'où $u = w$ par le théorème de l'unicité [[2], p.314]. Donc, l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est vraie.
$(i) \Rightarrow (ii)$, supposons que $(P_{\alpha,\beta})$ est L^p-bien posé, nous allons montrer que $\frac{(ik)^{\alpha}}{\gamma(ik)^{\beta}+\mu} \in \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in X$, nous définissons $f(t) = e^{ikt}y$. Alors $f \in L^p(\mathbb{T};X)$, $\hat{f}(k) = y$ et $\hat{f}(n) = 0$ pour $n \neq k$.
Par hypothèse, il existe une solution unique $u \in S_p(A,M)$ c.à.d $u \in L^p(\mathbb{T};D(A))$ tels que $D_t^{\beta}u \in L^p(\mathbb{T};D(A))$, $Mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{T};X)$ et $D_t^{\alpha}Mu(t) = \gamma AD_t^{\beta}u(t) + \mu Au(t) + f(t)$ est vérifié, pour presque par tout $t \in \mathbb{T}$.
En appliquant la transformation de Fourier sur les deux membres de l'équation ci-dessus, et comme A est fermé, nous obtenons que $\hat{u}(k) \in D(A)$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$ par [[2]. Lemme 3.1] et

$$\begin{aligned}(ik)^{\alpha}M\hat{u}(k) &= (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A\hat{u}(k) + \hat{f}(k)\\ &= (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A\hat{u}(k) + y,\end{aligned}$$

alors,

$$((ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A)\hat{u}(k) = y, \tag{4.16}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$
et

$$((in)^{\alpha}M - (\gamma(in)^{\beta}+\mu)A)\hat{u}(n) = 0,$$

lorsque $n \neq k$.
Nous concluons que $(ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A$ est surjectif. En effet, soit $x \in D(A)$. Si $((ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A)x = 0$ et soit $u(t) = e^{ikt}x$ lorsque $t \in \mathbb{T}$, alors $u \in S_p(A,M)$ c'est-à-dire que $u \in L^p(\mathbb{T};D(A))$, tels que $Mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{T};X))$, $D_t^{\beta}u \in L^p(\mathbb{T};D(A))$ et $(P_{\alpha,\beta})$ est valide sur $\mathbb{T}$ avec $f \equiv 0$. Alors, u est une L^p-solution forte de $(P_{\alpha,\beta})$ lorsque $f \equiv 0$, on obtient $x = 0$ par l'hypothèse d'unicité.
Nous avons montré que $((ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A)$ est injectif.
D'où, l'opérateur $((ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A)$ est bijectif de $D(A)$ dans X.
Ensuite, nous montrons que $\{[(ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A]^{-1}\} \in \mathcal{L}(X)$, pour $f(t) = e^{ikt}y$ et soit u une L^p-solution forte unique de $(P_{\alpha,\beta})$.
Alors

$$\hat{u}(n) = \begin{cases} 0, & u \neq k \\ ((ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A)^{-1}y, & u = k. \end{cases} \tag{4.17}$$

par (4.16), ce qui implique $u(t) = e^{ikt}[(ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta}+\mu)A]^{-1}y$. En utilisant le théorème du

graphe fermé, il s'ensuit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendant de $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que

$$\|u\|_{L^p} + \|Au\|_{L^p} + \|D^\beta u\|_{L^p} + \|AD^\beta u\|_{L^p} + \|Mu\|_{W^{\alpha,p}} \leq C\|f\|_{L^p}. \tag{4.18}$$

En particulier,

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}. \tag{4.19}$$

Par conséquent,

$$\|[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1} y\| \leq C\|y\|,$$

nous obtenons pour $k \in \mathbb{Z}$, $[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}$ est un opérateur borné. Nous avons montré que $\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta + \mu} \in \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
D'où

$$\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta + \mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A). \tag{4.20}$$

Enfin, nous prouvons que si $M_k = (ik)^\alpha M[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$, alors $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définit un multiplicateur de L^p-Fourier, et soit $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$, alors il existe $u \in S_p(A, M)$ tel que c'est une L^p-solution forte de $(P_{\alpha,\beta})$ par hypothèse.
En appliquant la transformation de Fourier sur les deux membres de $(P_{\alpha,\beta})$, nous obtenons $\hat{u}(k) \in D(A)$ et

$$[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]\hat{u}(k) = \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De plus, comme $(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A$ est inversible, nous avons

$$\hat{u}(k) = [(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}\hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Il résulte que $Mu \in W^{\alpha,p}(\mathbb{T}; X)$ implique que $\widehat{D_t^{(\alpha)}(Mu)}(k) = (ik)^\alpha M\hat{u}(k)$, il existe $v \in L^p(\mathbb{T}; X)$ tel que $\hat{v}(k) = (ik)^\alpha M\hat{u}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Par conséquent, nous avons

$$\hat{v}(k) = (ik)^\alpha M\hat{u}(k) = (ik)^\alpha M[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}\hat{f}(k) = M_k\hat{f}(k), \ (k \in \mathbb{Z}),$$

Enfin, nous concluons que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définit un multiplicateur de L^p-Fourier, il résulte que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est R-borné par Proposition 1.2.10.
Par conséquent, l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est aussi vraie. □

Lorsque l'espace de Banach est isomorphe à un espace de Hilbert, alors chaque sous ensemble norme borné dans $\mathcal{L}(X)$ est R-borné [[2],Proposition 1.13]. Ce fait, avec le Théorème 1.2.20, donne immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 4.1.1. *Soient H un espace de Hilbert, $1 < p < \infty$, et A, M deux opérateurs linéaires fermés dans X satisfaisant $D(A) \subset D(M)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(P_{\alpha,\beta})$ est L^p-bien posé,

(ii) $\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\alpha+\mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ et l'ensemble $\{(ik)^\alpha M[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\alpha + \mu)A]^{-1} : k \in \mathbb{Z}\}$ est une norme bornée.

4.2 Équations fractionnaires dégénérées bien posées dans les espaces de Besov et Triebel-Lizorkin.

Soient $1 \leq p,\ q \leq \infty$, $s > 0$ et A, M deux opérateurs fermés dans X satisfaisant $D(A) \subset D(B)$, nous définissons l'espace des solutions de $(P_{\alpha,\beta})$ dans le cas $B^s_{p,q}$-bien posé par

$$S_{p,q,s}(A,M) := \{u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T} : D(A)) : D^\beta u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; D(A)), Mu \in B^{\alpha+s}_{p,q}(\mathbb{T}; X)\}, \tag{4.21}$$

Nous considérons $D(A)$ et $D(M)$ comme des espaces de Banach sont munis par leurs normes graphiques.
Si $u \in S_{p,q,s}(A,M)$, tel que $S_{p,q,s}(A,M)$ est un espace de Banach, alors leur norme est

$$\|u\|_{S_{p,q,s}} = \|u\|_{B^s_{p,q}} + \|Au\|_{B^s_{p,q}} + \|D^\beta u\|_{B^s_{p,q}} + \|AD^\beta u\|_{B^s_{p,q}} + \|Mu\|_{B^{\alpha+s}_{p,q}}, \tag{4.22}$$

Maintenant, nous donnons la définition du caractère bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$ dans l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{T};\mathbb{X})$, on note par ($B^s_{p,q}$-bien posé).

Définition 4.2.1. *Soit $1 \leq p,\ q \leq \infty$, $s > 0$, soient A et M deux opérateurs lineaires fermés dans un espace complexe de Banach X satisfaisant $D(A) \subset D(B)$ et $0 < \beta < \alpha \leq 1$.*
Soit $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$, $u \in S_{p,q,s}(A; M)$ est appelé une $B^s_{p,q}$-solution forte de $(P_{\alpha,\beta})$, si $(P_{\alpha,\beta})$ est satisfait sur $\mathbb{T}$. Nous disons que $(P_{\alpha,\beta})$ est $B^s_{p,q}$-bien posé, si pour chaque $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$, il existe une $B^s_{p,q}$-solution forte unique de $(P_{\alpha,\beta})$.

Si $(P_{\alpha,\beta})$ est L^p-bien posé, il existe une constante $C > 0$ telle que pour chaque $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}, X)$ et $u \in S_{p,q,s}(A; M))$ est une $B^s_{p,q}$-solution forte unique de $(P_{\alpha,\beta})$, alors

$$\|u\|_{S_{p,q,s}(A;M)} \leq C\|f\|_{B^s_{p,q}}. \tag{4.23}$$

Cela peut être facilement obtenu par la fermeture des opérateurs A, M et le théorème du graphique fermé.
Maintenant, nous prouvons le résultat suivant qui sera utilisée dans la preuve de notre résultat principal de cette section.

Proposition 4.2.1. *Soient $1 \leq p,\ q \leq \infty$, $s > 0$, et A, M deux opérateurs lineaires fermés dans un espace de Banach X, tel que $D(A) \subset D(M)$. Supposons que $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des suites 2-règulières avec $\{b_k\}$ et $\{\frac{1}{\gamma b_k+\mu}\}$ sont bornées, telle que*

$$\{\frac{a_k}{\gamma b_k + \mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A).$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $(a_k M[a_k M - (\gamma b_k + \mu)A]^{-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur $B^s_{p,q}$-Fourier.

(ii) $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|a_k M[a_k M - (\gamma b_k + \mu)A]^{-1}\| < \infty$.

Preuve. D'abord nous notons que, $M_k = a_k M N_k$, où $N_k = [a_k M - (\gamma b_k + \mu)A]^{-1}$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est clairement vraie à l'aide de la Remarque 1.2.15 (b).

Maintenant, il ne reste à montrer que l'implication (ii) ⇒ (i) est vraie.
Supposons que $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|M_k\| < \infty$ et grâce à la preuve de la Proposition 4.1.1, on déduit que

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|k(M_{k+1} - M_k)\| < \infty. \tag{4.24}$$

D'une part, on a
$k^2(M_{k+2} - 2M_{k+1} + M_k)$

$$\begin{aligned}
&= k^2[a_{k+2}MN_{k+2} - 2a_{k+1}MN_{k+1} + a_kMN_k] \\
&= k^2MN_{k+2}[a_{k+2}N_k^{-1} - 2a_{k+1}N_{k+2}^{-1}N_{k+1}N_k^{-1} + a_kN_{k+2}^{-1}]N_k \\
&= k^2MN_{k+2}\Big[a_{k+2}N_k^{-1} - 2a_{k+1}[a_{k+2}M - (\gamma b_{k+2} + \mu)A]N_{k+1}N_k^{-1} + a_k[a_{k+2}M \\
&\quad - (\gamma b_{k+2} + \mu)A]\Big]N_k \\
&= k^2MN_{k+2}\Big[a_{k+2}N_k^{-1} - 2a_{k+1}[N_{k+1}^{-1} + (a_{k+2} - a_{k+1})M + \gamma(b_{k+1} - b_{k+2})A]N_{k+1} \\
&\quad \times N_k^{-1} + a_k[N_k^{-1} + (a_{k+2} - a_k)M + \gamma(b_k - b_{k+2})A]\Big]N_k \\
&= k^2MN_{k+2}\Big[(a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k)I_X - 2(a_{k+2} - a_{k+1})M_{k+1} + (a_{k+2} - a_k)M_k \\
&\quad + 2\gamma a_{k+1}(b_{k+2} - b_{k+1})AN_{k+1} - \gamma a_k(b_{k+2} - b_k)AN_k\Big] \\
&= k^2MN_{k+2}\Big[(a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k)(I_X - M_{k+1}) - (a_{k+2} - a_k)(M_{k+1} - M_k) \\
&\quad + 2\gamma(a_{k+1} - a_k)(b_{k+2} - b_{k+1})AN_{k+1} + \gamma a_k(b_{k+2} - 2b_{k+1} + b_k)AN_{k+1} \\
&\quad + \gamma a_k(b_{k+2} - b_k)A(N_{k+1} - N_k)\Big] \\
&= M_{k+2}\Big[\frac{k^2(a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k)}{a_{k+2}}(I_X - M_{k+1}) - \frac{k(a_{k+2} - a_k)}{a_{k+2}}k(M_{k+1} - M_k) \\
&\quad + 2\gamma\frac{k(a_{k+1} - a_k)}{a_{k+2}}\frac{k(b_{k+2} - b_{k+1})}{b_k}\frac{b_k}{\gamma b_{k+1} + \mu}(M_{k+1} - I_X) \\
&\quad + \gamma\frac{a_k}{a_{k+2}}\frac{k^2(b_{k+2} - 2b_{k+1} + b_k)}{b_k}\frac{b_k}{\gamma b_{k+1} + \mu}(M_{k+1} - I_X) + \gamma\frac{a_k}{a_{k+2}}\frac{k(b_{k+2} - b_k)}{b_k}b_k \\
&\quad \times kA(N_{k+1} - N_k)\Big] \\
&= M_{k+2}\Big[\frac{k^2(a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k)}{a_k}.\frac{a_k}{a_{k+1}}.\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}(I_X - M_{k+1}) - \frac{k(a_{k+2} - a_k)}{a_{k+2}} \\
&\quad \times k(M_{k+1} - M_k) + 2\gamma\frac{k(a_{k+1} - a_k)}{a_k}.\frac{a_k}{a_{k+1}}.\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}.\frac{k(b_{k+2} - b_{k+1})}{b_{k+1}}.\frac{b_{k+1}}{b_k}.\frac{1}{\gamma b_{k+1} + \mu}.b_k \\
&\quad \times (M_{k+1} - I_X) + \gamma\frac{a_k}{a_{k+1}}.\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}.\frac{k^2(b_{k+2} - 2b_{k+1} + b_k)}{b_k}.\frac{1}{\gamma b_{k+1} + \mu}.b_k \\
&\quad \times (M_{k+1} - I_X) + \gamma\frac{a_k}{a_{k+1}}.\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}.\frac{k(b_{k+2} - b_k)}{b_{k+2}}.\frac{b_{k+2}}{b_{k+1}}.\frac{b_{k+1}}{b_k}.b_k.kA(N_{k+1} - N_k)\Big],
\end{aligned} \tag{4.25}$$

lorsque $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-2, -1, 0\}$.

D'autre part, en utilisant l'expréssion (4.10), pour réécrire

$$\begin{aligned} kA(N_{k+1}-N_k) &= kA\Big[N_{k+1}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k}M_k + N_{k+1}\gamma(b_{k+1}-b_k)AN_k\Big] \\ &= \frac{M_{k+1}-I_X}{\gamma b_{k+1}+\mu}\frac{k(a_k-a_{k+1})}{a_k}M_k + \frac{M_{k+1}-I_X}{\gamma b_{k+1}+\mu}\gamma k(b_{k+1}-b_k)\frac{M_k-I_X}{\gamma b_k+\mu} \\ &= \frac{1}{\gamma b_{k+1}+\mu}\frac{k(a_k-a_{k+1})}{a_k}(M_{k+1}-I_X)M_k + \frac{\gamma}{\gamma b_k+\mu}\frac{k(b_{k+1}-b_k)}{b_k} \\ &\quad \times \frac{1}{\gamma b_k+\mu}.b_k.(M_k-I_X),. \end{aligned} \tag{4.26}$$

lorsque $k \neq 0$.

Comme les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont 2-règulières, et l'hypothèse (**H1**) satisfaite et par 1-régularité, on déduit que les suites $\{\frac{a_k}{a_{k+1}}\}$, $\{\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\}$, $\{\frac{b_k}{b_{k+1}}\}$ et $\{\frac{b_{k+1}}{b_{k+2}}\}$ sont bornées, et d'après la Remarque 1.2.17, on déduit aussi que les suites $\{\frac{a_{k+2}-a_k}{a_{k+2}}\}$ et $\{\frac{b_{k+2}-b_k}{b_{k+2}}\}$ sont bornées, donc les expressions (4.24) et (4.25) ci-dessus montrent que

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|k^2(M_{k+2}-2M_{k+1}+M_k)\| < \infty, \tag{4.27}$$

ce qui implique que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier d'aprés les conditions (1.4), (1.5) de Marcinkiewicz.

Enfin, l'implication (ii)⇒(i) est également vraie. □

Lemme 4.2.1. *Soient X un espace de Banach et $1 \leq p,\ q \leq \infty$, $s > 0$, supposons que $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est 2-règulière et* (**H1**) *est satisfaite. Alors*

$$\{(b_k)I_X\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ et } \Big((\frac{1}{\gamma b_k+\mu})I_X\Big)_{k\in\mathbb{Z}}$$

sont des multiplicateurs de $B^s_{p,q}$-Fourier.

Preuve. Nous avons

$$k(b_{k+1}-b_k = k\frac{b_{k+1}-b_k}{b_k}.b_k$$

$$k^2(b_{k+2}-2b_{k+1}+b_k) = k^2\frac{b_{k+2}-2b_{k+1}+b_k}{b_k}.b_k,$$

lorsque $k \neq 0$.

De même, on a

$$\begin{aligned} k(\frac{1}{\gamma b_{k+1}+\mu} - \frac{1}{\gamma b_k+\mu}) &= k\frac{\gamma(b_k-b_{k+1})}{(\gamma b_{k+1}+\mu)(\gamma b_{k+1}+\mu)} \\ &= \gamma.\frac{1}{\gamma b_{k+1}+\mu}.\frac{1}{\gamma b_k+\mu}.\frac{k(b_k-b_{k+1})}{b_k}.b_k, \end{aligned}$$

et

$k^2(\frac{1}{\gamma b_{k+2}+\mu} - \frac{2}{\gamma b_{k+1}+\mu} + \frac{1}{\gamma b_k+\mu})$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k^2}{(\gamma b_k+\mu)(\gamma b_{k+1}+\mu)(\gamma b_{k+2}+\mu)}[(\gamma b_k+\mu)(\gamma b_{k+1}+\mu) - 2(\gamma b_k+\mu)(\gamma b_{k+2}+\mu) \\
&\quad + (\gamma b_{k+1}+\mu)(\gamma b_{k+2}+\mu)] \\
&= \frac{k^2}{(\gamma b_k+\mu)(\gamma b_{k+1}+\mu)(\gamma b_{k+2}+\mu)}[-(\gamma b_k+\mu)(\gamma b_{k+2} - 2\gamma b_{k+1} + \gamma b_k) \\
&\quad + (\gamma b_{k+2} - \gamma b_k)(\gamma b_{k+1} - \gamma b_k)] \\
&= \frac{k^2}{(\gamma b_k+\mu)(\gamma b_{k+1}+\mu)(\gamma b_{k+2}+\mu)}[-\gamma(\gamma b_k+\mu)(b_{k+2} - 2b_{k+1} + b_k) \\
&\quad + \gamma^2(b_{k+2} - b_k)(b_{k+1} - b_k)] \\
&= \frac{1}{(\gamma b_k+\mu)(\gamma b_{k+1}+\mu)(\gamma b_{k+2}+\mu)}\Bigg[- \gamma(\gamma b_k+\mu)\frac{k^2(b_{k+2} - 2b_{k+1} + b_k)}{b_k}.b_k \\
&\quad + \gamma^2\frac{k(b_{k+2} - b_k)}{b_k}\frac{k(b_{k+1} - b_k)}{b_k}.b_k.b_k\Bigg],
\end{aligned}
$$

lorsque $k \neq 0$.
Comme la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est 2-règulière et l'hypothèse (**H1**) est satisfaite, on a

$$
\begin{cases}
\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|k(b_{k+1} - b_k\| < \infty & (4.28) \\
\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|k^2(b_{k+2} - 2b_{k+1} + b_k\| < \infty, & (4.29)
\end{cases}
$$

et

$$
\begin{cases}
\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|k(\frac{1}{\gamma b_{k+1}+\mu} - \frac{1}{\gamma b_k+\mu})\| < \infty & (4.30) \\
\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|k^2(\frac{1}{\gamma b_{k+2}+\mu} - \frac{2}{\gamma b_{k+1}+\mu} + \frac{1}{\gamma b_k+\mu})\| < \infty. & (4.31)
\end{cases}
$$

D'après les conditions de Marcinkiewicz (1.4) et (1.5), $\{(b_k)I_X\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\left((\frac{1}{\gamma b_k+\mu})I_X\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des multipilicateurs de $B^s_{p,q}$-Fourier. □

Remarque 4.2.1. *D'après le Lemme 4.2.1,* $\left((\frac{1}{\gamma b_k+\mu})I_X\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un multiplicateur de* $B^s_{p,q}$*-Fourier. Dans le cas particulier, nous posons* $\gamma = 1$ *et* $\mu = 0$*, nous obtenons* $\left((\frac{1}{b_k})I_X\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est un multiplicateur de* $B^s_{p,q}$*-Fourier aussi.*

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section qui donne des conditions nécessaires et suffisantes pour justifier le caractère $B^s_{p,q}$-bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$.

Théorème 4.2.1. *Soient* X *un espace de Banach,* $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$ *et* A, M *deux opérateurs linéaires fermés dans* X *tel que* $D(A) \subset D(M)$*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $(P_{\alpha,\beta})$ *est* $B^s_{p,q}$*-bien posé,*

(ii) $\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta+\mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ *et* $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|(ik)^\alpha M[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}\| < \infty$.

Preuve. (ii) $\Rightarrow$ (i). On note $M_k = (ik)^\alpha M N_k$, où $N_k = [(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$. Nous supposons que $\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta+\mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ et $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|M_k\| < \infty$. Il résulte de la Proposition 4.2.1 que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier. Alors pour tout $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$, il existe $u \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$ satisfaisant

$$\hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k), \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{4.32}$$

En utilisant l'identité

$$I_X = M_k - (\gamma(ik)^\beta + \mu)AN_k,$$

ce qui implique

$$AN_k = \frac{1}{\gamma(ik)^\beta + \mu}[M_k - I_X]. \tag{4.33}$$

D'après le Lemme 4.2.1, l'identité $\left((\frac{1}{\gamma(ik)^\beta+\mu})I_X\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier, et d'après la Remarque 1.2.14 (b), nous déduisons que $(AN_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier.
Donc, il existe $v \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}, X)$ satisfaisant

$$\hat{v}(k) = AN_k \hat{f}(k), \tag{4.34}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Nous rappellons que $A^{-1} : X \longrightarrow D(A)$ est un isomorphisme, et comme $0 \in \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ par hypothèse, ainsi que $D(A)$ est un espace de Banach muni par sa norme graphique.
Par conséquent, $A^{-1}\hat{v}(k) = N_k \hat{f}(k)$, posons $w = A^{-1}v$, alors $w \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; D(A))$ et

$$\hat{w}(k) = N_k \hat{f}(k), \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{4.35}$$

ce qui implique que $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier.
En multipliant la suite $(ik)^\beta$ aux deux membres de l'expression (4.34), on obtient

$$(ik)^\beta \hat{v}(k) = (ik)^\beta AN_k \hat{f}(k), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Comme la suite $\{(ik)^\beta\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée par l'hypothèse (**H1**), cela implique que $\{(ik)^\beta I_X\}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier par Lemme 4.2.1 et d'après la Remarque 1.2.14 (b), nous déduisons que le produit $((ik)^\beta AN_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier aussi, il s'ensuit qu'il existe $z \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; D(A))$ tel que

$$\hat{z}(k) = (ik)^\beta \hat{v}(k) = A(ik)^\beta N_k \hat{f}(k) = A(ik)^\beta \hat{w}(k).$$

Par la fermeture de A, on obtient $D^\beta w \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}, D(A))$ et $AD^\beta w = z$. Il est clair que la suite $(\frac{1}{(ik)^\alpha} I_X)$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier d'après la Remarque 4.2.1. Comme $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier, nous déduisons que $(MN_k)_k$ est aussi un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier, ce qui implique $w \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; D(M))$. On a $D(M)$ est muni par sa norme graphique,

il devient un espace de Banach. En combinant (4.32) et (4.35), on obtient

$$\hat{u}(k) = (ik)^{\alpha} M\hat{w}(k) = (ik)^{\alpha}\widehat{Mw}(k), \quad (k \in \mathbb{Z}), \tag{4.36}$$

ce qui implique que $w \in B_{p,q}^{\alpha+s}(\mathbb{T}; X)$. Enfin, nous avons montré que $w \in S_{p,q,s}(A; M)$.
En utilisant l'expression (4.34) pour écrire

$$(ik)^{\alpha}\widehat{Mw}(k) = \gamma A(ik)^{\beta}\hat{w}(k) + \mu A\hat{w}(k) + \hat{f}(k), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Donc,

$$D^{\alpha}(Mw)(t) = \gamma AD^{\beta}(w)(t) + \mu Aw(t) + f(t) \text{ pour } t \in \mathbb{T}.$$

D'après, le théorème de l'unicité[[2], P.314]. ce qui prouve que l'existence. On vient de montrer l'unicité, soit $u \in S_{p,q,s}(A; M)$ une autre solution de

$$D^{\alpha}(Mw)(t) = \gamma AD^{\beta}(w)(t) + \mu Aw(t) + f(t),$$

alors,

$$D^{\alpha}M(u-w)(t) = \gamma AD^{\alpha}(u-w)(t) + \mu A(u-w)(t).$$

On applique la transformation de Fourier aux deux membres de l'equation ci-dessus, on obtient

$$(ik)^{\alpha}\widehat{M(u-w)}(k) = \gamma A(\hat{u}(k) - \hat{w}(k)) + \mu A(\hat{u}(k) - \hat{w}(k)).$$

D'où

$$[(ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta} + \mu)A](\hat{u}(k) - \hat{w}(k)) = 0,$$

implique que $\hat{u} - \hat{w} = 0$ sachant que $(ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta} + \mu)A$ est inversible. Donc, $u = w$ d'après le théorème de l'unicité[[2], P.314].
Par conséquent, l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est vraie.
(i)$\Rightarrow$ (ii). Supposons que $(P_{\alpha,\beta})$ est $B_{p,q}^{s}$-bien posé, nous allons montrer que pour $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{(ik)^{\alpha}}{\gamma(ik)^{\beta}+\mu} \in \rho_{\gamma,\mu}^{M}(A)$.
En effet, soit $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in X$ fixé, nous définissons $f(t) = e^{ikt}y$ $(t \in \mathbb{T})$. Alors $f \in B_{p,q}^{s}(\mathbb{T}; X)$, $\hat{f}(k) = y$ et $\hat{f}(n) = 0$ pour $n \neq k$. Il s'ensuit qu'il existe une solution unique $u \in S_{p,q,s}(A; M)$ satisfaisante

$$D_t^{\beta}(Mu)(t) = \gamma AD_t^{\beta}u(t) + \mu Au(t) + f(t) \text{ a.e. on } \mathbb{T}.$$

D'autre part, $\hat{u}(n) \in D(A)$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ d'après [[2], Lemme 3.1]. On applique la transformation de Fourier aux deux membres de l'equation ci-dessus, on obtient

$$[(ik)^{\alpha}M - (\gamma(ik)^{\beta} + \mu)A]\hat{u}(k) = y \tag{4.37}$$

et

$$[(in)^{\alpha}M - (\gamma(in)^{\beta} + \mu)A]\hat{u}(n) = 0, \tag{4.38}$$

lorsque $n \neq k$.

Donc, $[(ik)^\alpha M-(\gamma(ik)^\beta+\mu)A]$ est surjectif. Ensuite, nous provons que $[(ik)^\alpha M-(\gamma(ik)^\beta+\mu)A]$ est injectif. Nous prenons $x \in D(A)$ tel que $[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]x = 0$. En effet, soit $u(t) = e^{ikt}x$ lorsque $t \in \mathbb{T}$, alors nous avons $u \in S_{p,q,s}(A; M)$ et $(P_{\alpha,\beta})$ vérifié presque partout sur $\mathbb{T}$ lorsque $f = 0$. Alors, u est une $B^s_{p,q}$-solution forte de $(P_{\alpha,\beta})$ lorsque $f = 0$.

On obtient $x = 0$ par l'hypothèse d'unicité. D'où, $[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]$ est injectif.

Nous avons montré que l'opérateur $[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]$ est bijectif de $D(A)$ dans X.

Enfin, nous allons montrer que $[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. De plus, pour $f(t) = e^{ikt}y$ et soit u une $B^s_{p,q}$-solution forte unique de $(P_{\alpha,\beta})$. Alors

$$\hat{u}(n) = \begin{cases} 0, & u \neq k \\ ((ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A)^{-1}y, & u = k. \end{cases} \tag{4.39}$$

D'après l'expression (4.37), on a

$$u(t) = e^{ikt}[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}y.$$

En utilisant le théorème du graphique fermé, il existe une constante $C > 0$ indépendant de $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$ tel que

$$\|u\|_{B^s_{p,q}} + \|AD^\beta_t u\|_{B^s_{p,q}} + \|Au\|_{B^s_{p,q}} + \|Mu\|_{B^{\alpha+s}_{p,q}} \leq C\|f\|_{B^s_{p,q}}. \tag{4.40}$$

Par conséquent,

$$\|[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}y\| \leq C\|y\|, \tag{4.41}$$

ce qui implique que $\|[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1} \leq C$.

Ainsi que

$$\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta + \mu} \in \rho^M_{\gamma,\mu}(A) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

Nous avons montrer que,

$$\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta + \mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A).$$

Enfin, nous prouvons que si $M_k = (ik)^\alpha M[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$, alors $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définit un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier.

En effet, soit $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$, alors il existe $u \in S_{p,q,s}(A; M)$ une $B^s_{p,q}$-solution forte de $(P_{\alpha,\beta})$ par hypothèse.

On applique la transformation de Fourier aux deux membres de $(P_{\alpha,\beta})$, on obtient $\hat{u}(k) \in D(A)$ et

$$[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]\hat{u}(k) = \hat{f}(k), \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{4.42}$$

Puisque $[(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]$ est inversible, nous avons

$$\hat{u}(k) = [(ik)^\alpha M - (\gamma(ik)^\beta + \mu)A]^{-1}\hat{f}(k), \quad (z \in \mathbb{Z}). \tag{4.43}$$

Il résulte que $Mu \in B^{\alpha+s}_{p,q}(\mathbb{T}, X)$ tel que $\widehat{D^{\alpha}_t(Mu)} = (ik)^{\alpha} M\hat{u}(k)$, on obtient

$$\widehat{D^{\alpha}_t(Mu)} = (ik)^{\alpha} M\hat{u}(k) = M_k \hat{f}(k), \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{4.44}$$

Nous concluons que $(M_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définit un multiplicateur de $B^s_{p,q}$-Fourier, comme $Mu \in B^{\alpha+s}_{p,q}(\mathbb{T}; X)$. D'aprés la Remarque 1.2.15 (b), on déduit que $\sup_{k\in} \|M_k\| < \infty$.
Par conséquent, l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est également vraie. □

Puisque la deuxième déclaration du Théorème 4.2.1 ne dépend pas des paramètres p, q et s. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 4.2.1.

Corollaire 4.2.1. *Soient X un espace complexe de Banach et A, M deux opérateurs linéaires fermés dans X satisfaisant $D(A) \subset D(M)$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Si $(P_{\alpha,\beta})$ est $B^s_{p,q}$-bien posé pour certains $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$, si et seulement si $B^s_{p,q}$-bien posé pour tous $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$.*

Dans le reste de cette section, nous justifions le caractère bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$ dans l'espace périodique de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$ portant trois paramètres $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$.
Nous nous référons à [16] pour la définition et les propriétés sur l'espace $F^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$.
Maintenant, nous donnons la définition du caractère de $F^s_{p,q}$-bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$.

Définition 4.2.2. *Soient X un espace de Banach complexe, et A, M des opérateurs linéaires fermés dans X satisfaisant $D(A) \subset D(M)$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Soit $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s > 0$ et $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$, $u \in F^s_{p,q}(\mathbb{T}; D(A))$ est appelé une $F^s_{p,q}$-solution forte de $(P_{\alpha,\beta})$, si $Mu \in F^{\alpha+s}_{p,q}(\mathbb{T}; X)$ et $(P_{\alpha,\beta})$ est satisfait sur $\mathbb{T}$. Nous disons que $(P_{\alpha,\beta})$ est $F^s_{p,q}$-bien posé, si pour chaque $f \in F^s_{p,q}(\mathbb{T}; X)$, il existe une $F^s_{p,q}$-solution forte unique de $(P_{\alpha,\beta})$.*

En utilisant un argument similaire qui a été utilisé dans la démonstration du Théorème 4.2.1, nous pouvons obtenir la caractérisation du $F^s_{p,q}$-bien posé de $(P_{\alpha,\beta})$.

Théorème 4.2.2. *Soient X un espace de Banach, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s > 0$, et A, M deux opérateurs linéaires fermés dans X satisfaisant $D(A) \subset D(M)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $(P_{\alpha,\beta})$ est $F^s_{p,q}$-bien posé,
(ii) $\{\frac{(ik)^{\alpha}}{\gamma(ik)^{\beta}+\mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$ et $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|(ik)^{\alpha} M[(ik)^{\alpha} M - (\gamma(ik)^{\beta} + \mu)A]^{-1}\| < \infty$.

Puisque la deuxième déclaration du Théorème 4.2.2 ne dépend pas des paramètres p, q et s. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 4.2.2.

Corollaire 4.2.2. *Soit X un espace de Banach complexe, et soient A, M deux opérateurs linéaires fermés dans X satisfaisant $D(A) \subset D(M)$. Alors $(P_{\alpha,\beta})$ est $F^s_{p,q}$-bien posé pour certains $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s > 0$ si et seulement si $F^s_{p,q}$-bien posé pour tous $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $s > 0$.*

4.3 Applications

Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha (m(x)u(t,x))}{\partial t^\alpha} = \gamma\Delta \dfrac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u(t,x) + \mu\Delta u(t,x) + f(t,x) \ dans \ [0,2\pi]\times\Omega, & (4.45)\\ u = 0, \qquad dans \ [0,2\pi]\times\partial\Omega, & (4.46)\\ m(x)u(0,x) = m(x)u(2\pi,x) \qquad dans \ \Omega. & (4.47) \end{cases}$$

où $0 < \beta < \alpha \leq 1$, et $\gamma = \mu = 1$, ∂_t^α la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, et l'opérateur laplacien Δ agit sur la deuxième variable $x \in \Omega$, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec frontière régulière $\partial\Omega$, f est une fonction sur $[0,2\pi]\times\Omega$.
Soit M un opérateur de multiplicateur dans $H^{-1}(\Omega)$ avec domaine de définition $D(M)$, tel que $D(A) \subset D(M)$.
Nous supposons que $\{\frac{(ik)^\alpha}{\gamma(ik)^\beta+\mu} : k \in \mathbb{Z}\} \subset \rho^M_{\gamma,\mu}(A)$, on a

$$\|(ik)^\alpha M((ik)^\alpha M - (1+(ik)^\beta)\Delta)^{-1}\| = |\frac{(ik)^\alpha}{1+(ik)^\beta}|\|M(\frac{(ik)^\alpha}{1+(ik)^\beta}M - \Delta)^{-1}\|,$$

On pose $z = \frac{(ik)^\alpha}{1+(ik)^\beta}$, et en utilisant les relations triangulaires, tel que $0 < \beta < \alpha \leq 1$.
En effet, si $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}(ik)^\alpha &= |k|^\alpha e^{sgn(k)\frac{\pi\alpha i}{2}}\\ &= k^\alpha(\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) + i\sin(\frac{\pi\alpha}{2})),\end{aligned}$$

et si $k < 0$,

$$(ik)^\alpha = -k^\alpha(\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) - i\sin(\frac{\pi\alpha}{2})).$$

De plus, si $k \geq 0$, on a

$$1 + (ik)^\beta = (1 + k^\beta\cos(\frac{\pi\beta}{2})) + ik^\beta\sin(\frac{\pi\beta}{2}),$$

et si $k < 0$, on a

$$1 + (ik)^\beta = (1 - k^\beta\cos(\frac{\pi\beta}{2})) - ik^\beta\sin(\frac{\pi\beta}{2}).$$

Ainsi,

$$|(ik)^\alpha| = |k|^\alpha,$$

$$|1 + (ik)^\beta| = \sqrt{(1 + k^\beta \cos(\frac{\pi\beta}{2})^2 + (k^{2\beta} \sin^2(\frac{\pi\beta}{2}))}.$$

par des calcules simples sur les relations triangulaires, on trouve

$$\begin{cases} Re(z) = \dfrac{k^\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) + k^{\alpha+\beta} \cos(\frac{\pi}{2}(\alpha-\beta))}{1 + k^{2\beta} + 2k^\beta \cos(\frac{\pi\beta}{2})}, & (4.48) \\ Im(z) = \dfrac{k^\alpha \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) + k^{\alpha+\beta} \sin(\frac{\pi}{2}(\alpha-\beta))}{1 + k^{2\beta} + 2k^\beta \cos(\frac{\pi\beta}{2})}. & (4.49) \end{cases}$$

Comme $0 < \beta < \alpha \leq 1$, nous obtenons

$$\cos(\frac{\pi\alpha}{2}) > 0,\ \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) > 0,\ \cos(\frac{\pi}{2}(\alpha-\beta)) > 0,\ et\ \sin(\frac{\pi}{2}(\alpha-\beta)) > 0.$$

On déduit que $R(z) > 0$ implique que $Re(z) \geq -c(1 + |Im(z)|)$ pour tout $c > 0$.
D'après [[38]. Section 3.7], il s'ensuit une constante $C > 0$ telle que

$$\|M(zM - \Delta)\| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \tag{4.50}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
D'où

$$\|(ik)^\alpha M((ik)^\alpha M - (1 + (ik)^\beta)\Delta)^{-1}\| \leq C, \tag{4.51}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Nous concluons par le Théorème 4.1.1 (ou Corollaire 4.1.1) que le problème (4.45)–(4.47) est L^p-bien posé. nous déduisons du Théorème 4.2.1 (resp. Théorème 4.2.2) que le problème périodique ci-dessus est $B^s_{p,q}$-bien posé (resp. $F^s_{p,q}$-bien posé) aussi pour tous $1 \leq p,\ q \leq \infty,\ s > 0$ (resp. $1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q \leq \infty,\ s > 0$).

Conclusion et Perspectives

Au terme de cette thèse, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement des systèmes dynamiques décrits par les équations différentielles fractionnaires dégénérées linéaires et non linéaires dans le différentes conditions, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente. Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail, nous avons présenté les résultats d'existence et d'unicité de l'équation d'évolution d'ordres fractionnaire à la dérivée de Caputo dans les espaces de Banach. Tout d'abord, nous avons établi les principaux résultats d'existence et d'unicité du problème intégrodifférentiel fractionnaire avec des conditions non locales en utilisant la technique de décomposition de l'éspace en somme directe ainsi que le recours à la théorie des opérateurs résolvants : (fortement (L,p)-sectoriel, fortement (L,p)-radial, (L,σ)-borné, (L,p)-borné) et celle de semi-groupe dégénéré. La dépendance de solutions par rapport aux données initiales non locales a été également discutée. Ce résultat a été publié dans une revue de renommée [29].
Par ailleurs, nous avons présenté le résultat concernant la stabilité de la solution du problème différentielle fractionnaire dégénéré avec retard en temp fini. Ce résultat est obtenu à l'aide de la technique de l'inégalité de Gronwall généralisée.
Enfin, le dernier résulat renvoyant au caractère bien posé du problème différentielle fractionnaire dégénéré avec des conditions aux limites périodiques, en s'appuyant sur le théorème multiplicateur de Fourier. Ainsi, ces résultats (chapitres 3, 4) seront publiés ultérieurement.
Les résultats présentés dans cette thèse offrent naturellement de nombreuses perspectives. La première est l'étude de contrôlabilité, l'observabilité et le contrôle optimal des équations différentielles dégénérées fractionnaires avec des conditions non locales. La deuxième perspective envisageable serait l'étude des équations différentielles fractionnaires dégénérées impulsives avec des conditions non locales.

Bibliographie

[1] W. Arendt, C. Batty, and S. Bu, *Fourier multipliers for Hölder continuous functions and maximal regularity*, *Studia Mathematica*. 160(2004), no. 1, 23–51.

[2] W. Arendt, S. Bu, *The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity*, *Math. Z.* 240(2002), 311-343.

[3] W. Arendt, S. Bu, *Operator-valued Fourier multipliers on periodic Besov spaces and applications*, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 47(2004), no. 2, 15-33.

[4] E.G. Bajlekova *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, *SIAM J. Math. Anal.*. DOI : 10.1137/0506004, 6(1975), 25-42.

[5] M. Bahaj, R. Bahloul and and Omar Sidki *Periodic solutions of degenerate equations with finite delay in UMD space*, *Advances in Dynamical Systems and Applications*. 10(2015), no. 1, 23-31.

[6] V. Barbu, A. Favini, *Periodic problems for degenerate differential equations*, *Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste* 28(Supplement)(1997), 29-57.

[7] V. Barbu, A. Favini, S. Romanelli, *Degenerate evolution equations and regularity of their associated semigroups*, *Funkcial. Ekvac.* 39(1996), 421-448.

[8] G. I. Barenblatt, I. P. Zheltov, I. N. Kochina, *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks*, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 24(1960), 852-863.

[9] J. Bourgain, *Vector-Valued singular integrals and the H^1-BMO duality. Probability Theory and Harmonic Analysis*, Marcel Dekker, New York, (1986).

[10] S. Bu, *L^p-maximal regularity of degenerate delay equations with periodic conditions*, *Banach J. Math. Anal.* 8(2014), 49-59.

[11] S. Bu, *Well-posedness of degenerate differential equations in Hölder continuous function spaces*, *Front. Math. China.* 10(2015), no. 2, 239-248 .

[12] S. Bu, *Well-Posedness of Fractional Differential Equations on Vector-Valued Function Spaces*, *Integr. Equ. Oper. Theory.* 71(2011), 259-274.

[13] S. Bu, G. Cai, *Well-posedness of fractional degenerate differential equations with infinite delay in vector-value functional spaces*, *J. Int. Eq. App.* 29(2017), no. 2, 297-323.

[14] S. Bu, G. Cai, *Well-posedness of degenerate differential equations with fractional derivative in vector-valued functional spaces*, *Math. Nachr.* 290(2016), no. (5-6), 726-737.

[15] S. Bu, G. Cai, *Solutions of second order degenerate integro-differential equations in vector-valued functional spaces*, *Science. China. Math.* 56(2013), no. 5, 1059-1072.

[16] S. Bu, J. Kim, *Operator-valued Fourier multipliers on periodic Triebel spaces*, *Acta Math. Sinica (English Series)*. 21(2005), no. 5, 1049-1056.

[17] D. L. Burkholder, *A Geometrical Characterization of Banach Spaces in which Martingale Difference Sequences are Unconditional*, *Ann. Probab.* 9(1981), 997-1011.

[18] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 162(1991), 494-505.

[19] G. Cai, S. Bu, *Periodic Solutions of Third Order Degenerate Differential Equations in Vector-Valued Functional Spaces*, *Isr. Jour. Math.* 212(2016), no. 1, 163-188.

[20] R. W. Carroll, R. E. Showalter, *Singular and degenerate Cauchy problems.* Vol. 27, *Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press. New York, (1976).

[21] P. Clement, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent, G. J. van Duijn, B. de Pagter, *One-Parameter Semigroups. Marcel Dekker Inc.* Amsterdam, New York, (1987).

[22] O. Cois, A. Oustaloup, E. Battaglia, et J.L. Battaglia. *Non integer model from modal decomposition for time domain system identification*, Proc. *IFAC Symposium on System Identification, Santa Barbara*, USA, (2000).

[23] R. A. A. Cuello, *Well-posedness of Degenerate Integro-Differential Equations with Infinite Delay in Banach spaces*, *PhD thesis, of University of Puerto Rico*, (2015).

[24] Y. L. Daletskii, M. G. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. Nauka, Moscow*, (1970).

[25] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations, An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, *Springer Heidelberg, Dordrecht*, London, New York, June, (2010).

[26] G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii, *Partial Differential Equations And Systems Not Solvable With Respect To The Highest-Order Derivative.* Vol. 256, *of Pure and Applied Mathematics Series, CRC Press*, New York : Marcel Dekker, (2003).

[27] P. Denghao and J. Wei. *Finite-Time Stability of Neutral Fractional Time-Delay Systems via Generalized Gronwalls Inequality. Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis.* ID 610547(2014), 1-4.

[28] R. Denk, M. Hieber, J. Prüss. *R*-boundedness, *Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type*, *Mem. Amer. Math. Soc.* 166(2003).

[29] N. Derdar, A. Debbouche, *Nonlinear Degenerate Fractional Evolution Equations with Non-local Conditions*, *Fundamenta Informaticae*, DOI 10.3233/FI-2017-1505, 151(2017), no. (1-4), 473-485.

[30] S. Dutta and N. Sukavanam. *Finite-Time Stability analysis of non-linear fractional order with multi state time delay.Math.AP.* (2014), 01-05.

[31] K.-J. Engel and R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg. *Differential Equations.* 49(2013), 1569-1576.

[32] H. O. Fattorini, *The Cauchy Problem. Encyclopedia of mathematics and its applications, Reading, Mass. e.a., Addison-Wesley.* 18(1983).

[33] A. Favini, *Degenerate and Singular Evolution Equations in Banach Space. Math. Ann.* 273.17M4, (1985).

[34] A. Favini, *Controllability conditions of linear degenerate evolution systems*, *Appl. Math. Optim.*. 6(1980), 153-167.

[35] A. Favini, P. Plazzi, *On some abstract degenerate problems of parabolic type-2. The nonlinear case*, *Nonlinear Analysis.* 13(1989), 23-31.

[36] A. Favini, P. Plazzi, *On some abstract degenerate problems of parabolic type-3 : Applications to linear and nonlinear problems,Osaka J. Math.*. 27(1990), 323-359.

[37] A. Favini, L. Vlasenko, *Degenerate non-stationary differential equations with delay in Banach spaces*, *J. Differential Equations.* 192(2003), 93-110.

[38] A. Favini, A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. Pure Appl. Math.* (Marcel Dekker Inc. New York, Basel, Hong Kong, 215(1999)).

[39] A. Favini, A. Yagi, *Quasilinear degenerate evolution equations in Banach spaces. J.evol.equat.* 4(2004), no. 3, 421-449.

[40] A. Favini, A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, *Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics*, New York, (1998).

[41] A. Favini, A. Yagi, *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations*, *Annalidi Mat. Pura Appl.* 163(1993), no. 1, 353-384.

[42] A. Favini, A. Yagi, *Space and time regularity for degenerate evolution equations*, *J. Math. Soc.*. 44(1992), 331-350.

[43] V. E. Fedorov, *Degenerate strongly continuous semigroups of operators*, *Algebra i Analiz.* 12(2000), no. 3, 173–200.

[44] V. E. Fedorov, *A generalization of the Hille-Yosida theorem to the case of degenerate semigroups in locally convex spaces*, *Siberian Math. J.* 46(2005), 333-350.

[45] V. E. Fedorov, *A class of second-order equations of Sobolev type and degenerate groups of operators*, *Vestn. Chelyab. Gos. Univ. Mat. Mekh. Inform.* 26(2011), no. 13, 59-75.

[46] V. E. Fedorov, *Holomorphic Resolving Semigroups of Sobolev Type Equations in Locally Cinvex Spaces*, *Mat. Sb.*, , 195(2004), no. 8, 131-160.

[47] V. E. Fedorov, L. V. Borel, *Solvability of loaded linear evolution equations with a degenerate operator at the derivative*, *St. Petersburg Math. J.* 26(2015), 487-497.

[48] V.E. Fedorov, P.N. Davydov, *Semilinear degenerate evolution equations and nonlinear systems of hydrodynamics type. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki.* 19(2013), 267-278.

[49] V. E. Fedorov et A. Debbouche, *A Class of Degenerate Fractional Evolution Systems in Banach Spaces*, ISSN 0012-2661, *Differential Equations.* 49(2013), no. 12, 1569-1576.

[50] V.E. Fedorov , D.M. Gordievskikh, *Resolving operators of degenerate evolution equations with fractional derivative with respect to time. Russian Math.*. 59(2015), no. 1, 60-70.

[51] V. E. Federov, Gordievskikh D.M., Plekhanova M. V. *Equations in Banach Spaces with a Degenerate Operator under a Fractional Derivate*, *Partial differential equations.* ISSN 0012-2661, 51(2015), no. 10, 1367-1375.

[52] V. E. Fedorov, M. Kostic, *Degenerate fractional differential equations in locally convex spaces with a σ-regular pair of operators*, *UFA Math. J.* 8(2016), 100-113.

[53] V. E. Fedorov, E. A. Omel'chenko, *Linear Equations of the Sobolev Type with Integral Delay Operator*, *Russian Math.* (Iz. VUZ) 58(2014), no. 1, 60-69.

[54] V. E. Fedorov, E.A. Omel'chenko. *Inhomogeneous Degenerate Sobolev type equations with delay*, *Siberian Mathematical Journal.* 53(2012), no. 2, 335-344.

[55] I. I. Gokhberg, et M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space. Nauka, Moscow*, (1965).

[56] D.M. Gorddievskikh , V.E. Fedorov, *Solutions for initial boundary value problems for some degenerate equations systems of fractional order with respect to the time. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 12(2015), 12-22.

[57] S. Hariyanto, L. Aryati, Widodo, *Generalized nonhomogeneous abstract degenerate Cauchy problem*, *Appl. Math. Sci.* 7(2013), no. 49, 2441-2453.

[58] M. W. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, second edition, *Pure and Applied Mathematics* (Amsterdam), 60, Else- vier/Academic Press, Amsterdam, (2004).

[59] T. Hytönen. *R-boundedness and multiplier theorems*, *Helsinki University of Technology Institute of Mathematics Research Reports*, (2001).

[60] N.D. Ivanova , V.E. Fedorov and K.M. Komarova, *Nonlinear inverse problem for Oskolkov system linearized in a neighborhood of a stationary solution.Vestnik Chelyad. Gos. Univ. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 15(2012), 49-70.

[61] T. D. Ke, C. T. Kinh, *Generalized Cauchy problem involving a class of degenerate fractional differential equations*, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A : Math. Anal.* 21(2014), 449-472.

[62] V. Keyantuo, C. Lizama, *A characterization of periodic solutions for time-fractional differential equations in UMD spaces and applications*, 284(2011), no. 4, 494-506.

[63] V. Keyantuo, C. Lizama et V. Poblete, *Periodic solutions of integro-differential equations in vector-valued function spaces*, *J. Differential Equations*, 246(2009), no. 3, 1007-1037.

[64] M. Kostic, *On entire solutions of abstract degenerate differential equations of higher order*, *Funct. Anal. Appr. Comp.* 8(2016), no. 1, 51-60.

[65] M. Kostic, *Degenerate abstract Volterra equations in locally convex spaces*, *Filomat.* 31(2017), no. 3, 597-619.

[66] M. Kostic, *Abstract degenerate incomplete Cauchy problems*, *Tsukuba J. Math.* 40(2016), no. 1, 28-53.

[67] M. Kostic, *Degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces*, *Publ. Inst.* 100(2016), no. 114, 49-75.

[68] M. Kostic, *Hypercyclic and topologically mixing properties of degenerate multi-term fractional differential equations*, *Diff. Equat. Dyn. Sys.* 24(2016), no. 4, 475-498.

[69] M. Kostic, *Hypercyclic and topologically mixing properties of abstract degenerate time fractional inclusions*, *Novi Sad J. Math.* 47(2017), no. 1, 49-61.

[70] M. Kostic, *The existence of distributional chaos in abstract degenerate fractional dierential equations*, *J. Fract. Calc. Appl.* 7(2016), no. 2, 153-174.

[71] M. Kostic, *Perturbation results for abstract degenerate Volterra integro-dierential equations*, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 9(2018), no. 1, 137-152.

[72] M. Kostic, *On a class of abstract degenerate fractional differential equations of parabolictype*, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 59(2016), no. 1, 1-22.

[73] M. Kostic, *Abstract degenerate fractional differential inclusions*, *Appl. Anal. Discrete Math.* DOI :10.2298/AADM161109031K, 11(2017).

[74] M. Kostic, *Some contributions to the theory of abstract degenerate Volterra integrodifferential equations*, *J. Math. Stat.* 12(2016), 65-76.

[75] M. Kostic, V.E. Fedorov, *Degenerate fractional differential equations in locally convex spaces a σ-regular pair of operators*, *Ufa Mathematical Journal.*, 8(2016), no. 4, 98-110.

[76] M. Lazarevic, A. Spasic, *Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems : Gronwalls approach. Math. Comput. Model.* 49(2009), no. (3-4), 475-481.

[77] L. Liu and S. Zhong, *Finite-time stability analysis of fractional-order with multi-state time delay, World Academy of Science, Engineering and Technology.* 52(2011), 874-877.

[78] L. Liu and S. Zhong. *Finite-time stability analysis of fractional-order with multi-state time delay. I. J. Math.Comp. Sc.*, 5(2011), no. 4, 641–644.

[79] C. Lizama, R. Ponce, *Periodic solutions of degenerate differential equations in vectorvalued function spaces*, *Studia Math.* 202(2011), 49-63.

[80] C. Lizama, F. Poblete, *Regularity of mild solutions for a class of fractional order differential equations*, *Appl. Math. Comp.* 224(2013), 803-816.

[81] C. Lizama, R. Ponce, *Maximal regularity for degenerate differential equations with infinite delay in periodic vectorvalued function spaces*, Proc. Edinb. Math. Soc. 56(2013), no. 3, 853–871.

[82] K. Mathiyalagam and K. Balachandran. *Finite-Time Stability of Fractional-Order Stochastic Singular Systems with Time Delay and White Noise. Wiley Periodicals, Inc.*, 21(2016), no. S2, 370-379.

[83] I. V. Melnikova, *The degenerate Cauchy problem in Banach spaces*, *Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh.* 10(1998), 147-160.

[84] I. V. Melnikova, A. I. Filinkov, *Abstract Cauchy Problems : Three Approaches*, *Chapman and Hall/CRC, Boca Raton*, (2001).

[85] V. I. Nalimov, *Degenerate second-order differential equations in Hilbert spaces*, *Siberian Math J.* 35(1994), 566-576.

[86] K. B. Oldham, J. Spanier. *The Fractional Calculus. Academic Press*, *York and London*, (1974).

[87] A.P. Oskolkov, *Initial bounded value problems for motion equations of Kelvin-Voight and Oldroyd fluids. Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics* , 179(1988), 137-182.

[88] D. Pang and W. Jiang, *Finite-time stability analysis of fractional singular time-delay systems*, *Advances in Difference Equations*, 259(2014), 01-11.

[89] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, *Springer-Verlag, New York*, (1983).

[90] I. Petràs, *Stability of fractional-order systems with rational orders : a survey*, *Fract. Calc. Appl.* Anal. 12(2009), no. 3, 269-298.

[91] M. V. Plekhanova, *Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(2016), no. 17, 6138-6146.

[92] M. V. Plekhanova, *Ditributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312(2017), no. C, 39-46.

[93] M.V. Plekhanova, *Degenerate distributed control systems with fractional time derivative*, *ural mathematical journal*, 2(2016), no 2, 58-71.

[94] M.V. Plekhanova , *Optimal control for quasilinear degenerate distributed systems of higher order*, *Journal of Mathematical Sciences*, 219(2016), no. 2, 236-244.

[95] V. Poblete, J. C. Pozo, *Periodic solutions of a fractional neutral equation with finite delay*, *J. Evol. Equat.* 14(2014), 417-444.

[96] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. Academic Press*, San Diego, (1999).

[97] B. Röss, *Fractional Calculus and its Applications*, *Springer-Verlag*, Berlin, (1975).

[98] S. G. Samko, A.A. Kilbas, et O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications. Gordon and Breach*, (1993).

[99] R. E. Showalter, *Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type*, *SIAM J. Math. Anal.* 6(1975), 25-42.

[100] R. E Showalter, *Degenerate parabolic initial-boundary value problems*, *J. Diff. Equat.* 31(1979), 296-312.

[101] R. E. Showalter, *Initial and final-value problems for degenerate parabolic evolution systems*, *Indiana University Mathematics Journal*, 28(1979), no. 6, 883-893.

[102] R. E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations. Electronic Journal of Differential Equations*, (1994).

[103] R. E. Showalter, *Partial differential equations of Sobolev-Galpern type. Pacific J. Math.* 31(1963), no. 3, 787-793.

[104] N. A. Sidorov, *A class of degenerate differential equation with convergence. Mat.Zametki*, 35(1984), no. 4, 569-578.

[105] A. G. Sveshnikov, A. B. Al'shin, M. O. Korpusov and Y. D. Pletner, *Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type*, *Fizmatlit, Moscow*, (2007).

[106] G. A. Sviridyuk, *On the general theory of operator semigroups*, *Uspekhi Mat. Nauk*, 49(1994), 47-74.

[107] G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, *VSP : Utrecht, Boston*, DOI : 10.1134/S0012266113120112, (2003).

[108] X. Yang, Q. Song, Y. Liu, Z. Zha. *Finite-time stability analysis of fractional-order neural networks with delay. Neurocomputing*, 152(2015), 19-26.

[109] H. Ye, J. Gao and Y. Ding, *A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation*, *J. Math. Anal. Appl.* 328(2007), no. 2, 1075-1081.

[110] F. Wang, D. Chen, X. Zhang, Y. Wu. *The existence and uniqueness theorem of the solution to a class of nonlinear fractional order system with time delay. Appl. Math. Lett.* 53(2016), 45-51.

[111] Z. Zhang, J.-B, Liu, J. Cao, W. Jiang, A. Alsaedi and F. E. Alsaadi, *Stability results for the linear degenerate fractional differential system*, *Adv. Difference Equat.* DOI 10.1186/s13662-016-0941-0, 216(2016), 1-17.

[112] A. Zygmund, *Trigonometric Series*. Third Edition Vol I, *(Cambridge University Press, Cambridge)*, London-New York-Melbourne, (1959).