

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY- ANNABA  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIORAT  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

Année : 2018

# THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT en Génie Civil

Thème

**Contrôle de la Stabilité Dynamique des Structures  
Élastoplastiques**

Option : Structure

Par :

**CHENIA MAHMOUD**

Directeur de Thèse : HACENE CHAUCHE Abdelmadjid.

Professeur (UBM Annaba)

Devant le Jury :

Président : DJEGHABA Kamel

Professeur (UBM Annaba)

Examineurs : NAFA Zahr – Eddine

Professeur (U. Guelma)

BENMARCE Abdelaziz

Professeur (U. Guelma)

Invité : HAMMOUDA Abdelaziz

M C B (UBM Annaba)

## Remerciements

J'exprime ma profonde reconnaissance et ma parfaite gratitude à mes encadreurs :

**Pr. HACENE CHAUCHE Abdelmadjid & Dr HAMMOUDA ABDELAZIZ**

Je remercie également le **Pr. Noel CHALLAMEL** qui a été beaucoup impliqué dans l'élaboration et la conduite de cette étude, et qui nous a fourni à plusieurs reprises l'accueil au sein de l'équipe *EcoMat* à l'institut de recherche Dupuy de Lôme dans l'université de Bretagne Sud à Lorient-France.

Je tiens à remercier particulièrement Messieurs les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont aussi à :

**Pr. Djeghaba Kamel**, le président de la formation doctorale, **Pr. Redjel Bachir**, que je considère comme le père scientifique et le modèle du chercheur à suivre. **Mr. Slimani Fayçal**, le chef de département de génie civil à l'université d'Annaba, pour son professionnalisme.

Je remercie également toutes et tous qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration et l'aboutissement de cette thèse.

## Résumé

La dynamique des systèmes non linéaires (DSNL), appliquée aux structures à matériaux non réguliers (ou inélastique), constitue une branche de connaissance qui, désormais, n'est plus confinée aux théoriciens et ne peut plus être ignorée par le spécialiste en génie civil. En effet, une des raisons qui doit motiver la connaissance de la dynamique des systèmes (et de la théorie des stabilités) est que ce dernier est entraîné à calculer des solutions à un problème posé (constructions, ouvrages d'art, barrages ...), mais qu'il est beaucoup moins sensibilisé à s'assurer de la stabilité de ces solutions sous variation de conditions initiales ou autres. Les notions reprises de la dynamique des systèmes non linéaires peuvent participer au problème concret de la maîtrise, par le calculateur, des risques d'entraînement du système au-delà de ses résistances effectives, par exemple en dynamique des structures (DDS). Ce travail traite les problèmes liés à la dynamique et la stabilité des systèmes élastoplastique (parfaitement plastique, et en présence de l'écroutissement cinématique). La formulation des équations de mouvement de chaque système élastoplastique a été présentée par des écritures généralisées utilisant des paramètres adimensionnels, et ainsi mener des simulations numériques de la réponse dynamique de chaque cas d'étude *i.e.* pour les vibrations libres en perturbant uniquement les conditions initiales, ou bien pour les vibrations forcées. Une nouvelle formule décrivant la frontière de bifurcation est obtenue en fonction du paramètre de l'écroutissement. L'étude de stabilité dynamique de chaque système bilinéaire a été menée également par l'approche de propagation d'erreur pour des petites perturbations des variables du problème. En fin, le modèle numérique du système élastoplastique en présence de l'écroutissement modélisant un oscillateur à une seule masse a été également couplé à une autre masse additionnelle faisant ainsi la construction d'un nouveau système dynamique à 2 DDL.

**Mots clés :** Dynamique des systèmes non linéaires, stabilité dynamique des systèmes élastoplastique, écroutissement cinématique, paramètres adimensionnels, vibrations libres, vibrations forcées, frontière de bifurcation.

## Abstract

The Dynamics of Nonlinear Systems (DNLS), applied to structures with irregular materials (or inelastic), constitutes a branch of knowledge that, henceforth, is no longer confined to theoreticians and should not be ignored by the civil engineering specialist. In fact, one of the reasons, which must motivate the knowledge of the systems dynamics (and the stability theories), is that -this last- is trained to calculate solutions to a posed problem (constructions, structures, dams ...), but it is much less sensitized to ensure the stability of these solutions under varying initial conditions or other. The taken concepts from the dynamics of nonlinear systems can participate in the concrete problem of the risks control -by the computer- of driving the system beyond its real resistances, such as in dynamics of structures (DDS). This work deals with the problems related to the dynamics and stability of elastoplastic systems (perfectly plastic, and in the presence of kinematic hardening). The formulation of the motion equations of each elastoplastic system has been presented by generalized writings using dimensionless parameters, and thus to carry out numerical simulations of the dynamic response of each studied case i.e. for the free vibrations by disturbing only the initial conditions, or for forced vibrations. A new formula describing the bifurcation boundary has been obtained, depending on the parameter of hardening. Also, the dynamic stability study of each bilinear system has been conducted by the error propagation approach for small perturbations of the problem variables. Finally, the numerical model of the elastoplastic system in the presence of hardening, modeling an oscillator with one mass, was also coupled to another additional mass, thus making the construction of a new dynamic system with 2 DOF.

---

**Keywords: Dynamics of Nonlinear Systems, dynamic stability of elastoplastic systems, kinematic hardening, dimensionless parameters, Free vibrations, Forced vibrations, bifurcation Boundary.**

## ملخص

تعد ديناميكية الأنظمة اللاخطية (د أ ل خ)، المطبقة على هياكل ذات مواد غير معتدلة (أو غير مرنة) فرعاً من المعارف التي لم تعد مستقبلاً تقتصر على الأكاديميين والتي لا يمكن تجاهلها من قبل أخصائي الهندسة المدنية. والواقع أن أحد الأسباب التي ينبغي أن تحفز معرفة ديناميكيات الأنظمة (ونظرية عدم الاستقرار) وأن هذا الأخير مدرب لحساب حلول لمشكل مطروح (المباني، المنشآت الفنية، السدود...) إلا أنه أقل توعية بكثير لضمان استقرار هذه الحلول في إطار تغير الظروف الأولية أو غيرها. إن المفاهيم المأخوذة من ديناميكية الأنظمة اللاخطية يمكن أن تشارك في مشكلة التحكم بواسطة الكمبيوتر في مخاطر تحطي النظام عتبة مقاومته الذاتية، مثل فيما يخص ديناميكية الهياكل. هذا العمل يعالج المشاكل المتعلقة بديناميكية واستقرار الأنظمة المرنة (البلاستيكي بشكل مثالي، وفي وجود التصلب الحركي). تم تقديم صياغة معادلات حركة كل نظام من المركبات المرنة عن طريق كتابات معممة باستخدام عوامل غير خاضعة للوحدات، وبالتالي لتنفيذ محاكاة عددية للاستجابة الديناميكية لكل حالة مدروسة، أي للاهتزازات الحرة عن طريق الإخلال بالشروط الأولية فقط، أو للاهتزازات القسرية. تم الحصول على صيغة رياضية جديدة تصف مخطط التشعب بناءً على معامل التصلب. كما أجريت دراسة الاستقرار الديناميكي لكل نظام ثنائي الخطية من خلال تتبع انتشار الخطأ بالنسبة لاضطرابات متغيرات النظام الصغيرة. وأخيراً، النموذج العددي للنظام المرن مع وجود تصلب، والمعبر عنه بمذبذب ذو كتلة واحدة فقط، تم أيضاً اقتترانه إلى كتلة إضافية أخرى مما أسفر عن بناء نظام ديناميكي جديد ذو درجتين تغير.

الكلمات المفتاحية:

ديناميكية الأنظمة اللاخطية ، الاستقرار الديناميكي للأنظمة المرنة، تصلب حركي، عوامل غير خاضعة للوحدات، الاهتزازات الحرة، الاهتزازات القسرية، مخطط التشعب.



# Sommaire

---

# Sommaire

Remerciements

Résumé / Abstract / ملخص

Liste des Symboles

Introduction générale 1

**Chapitre I : Synthèse Bibliographique 3**

**I.1. Introduction 3**

**I.2. L'enjeu de l'étude dynamique 4**

**I.3. Systèmes Dynamiques Non linéaires 5**

I.3.1. Dynamiques des systèmes dissipatifs & conservatifs 5

I.3.2. Description physique d'un système dynamique 7

I.3.3. L'oscillateur Modèle de Duffing 8

I.3.4. Evolution des états d'un Système dynamique 10

I.3.5. Notion de Bifurcation 16

I.3.6. Sources d'excitations 18

I.3.7. Non linéarité de comportement 19

I.3.8. Modélisation simplifiée du Comportement cyclique 21

**I.4. L'Oscillateur élastoplastique à 1 DDL 24**

I.4.1. L'oscillateur élastoplastique parfaitement plastique 32

I.4.2. L'oscillateur élastoplastique en présence de l'écroutissement cinématique 34

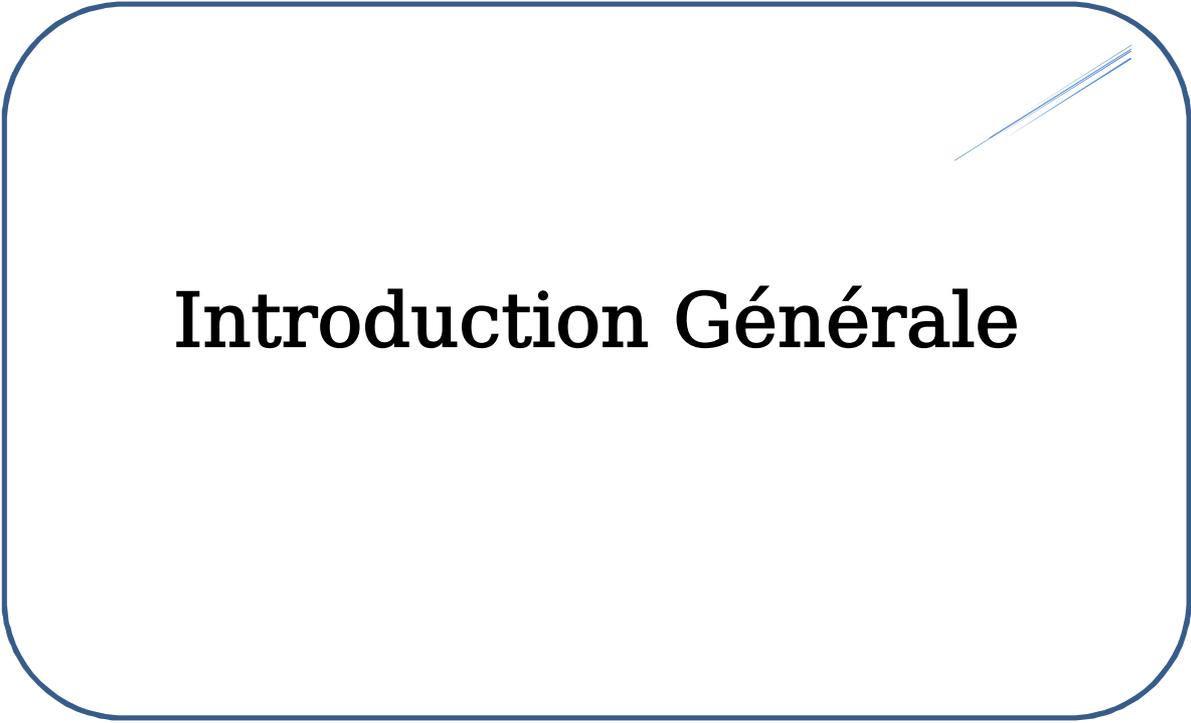
**I.5. Historique des travaux sur les oscillateurs hystérétiques 35**

**I.6. Conclusion 36**

---

<b>Chapitre II : Etude de l'Oscillateur Elastoplastique Parfait</b>	<b>37</b>
<b>II.1. Introduction</b>	<b>37</b>
<b>II.2. Présentation du modèle Rhéologique</b>	<b>38</b>
<b>II.3. Le Système dynamique élastoplastique parfait</b>	<b>39</b>
II.3.1. Equations du mouvement	40
II.3.2. Adimensionnement des équations du mouvement	41
<b>II.4. Vibrations Libres du Système Elastoplastique Parfait</b>	<b>43</b>
II.4.1. Résolution de l'état élastique $\hat{E}$	43
II.4.2. Résolution des états plastiques $\hat{P}^+$ et $\hat{P}^-$	45
II.4.3. Organigramme de l'évolution du système dynamique libre ( $f_0 = 0$ )	49
II.4.4. Résultats des oscillations libres : ( $f_0 = 0$ )	50
<b>II.5. Vibrations Forcées du Système Elastoplastique Parfait</b>	<b>54</b>
II.5.1 Résolution de l'état élastique $\hat{E}$	54
II.5.2. Résolution des deux états plastiques $\hat{P}^+$ et $\hat{P}^-$	56
II.5.3. Organigramme de l'évolution du système dynamique forcé ( $f_0 \neq 0$ )	58
II.5.4. Résultats des oscillations forcées	59
II.5.5. Caractérisation du cycle limite	70
II.5.6. Frontière de Bifurcation entre l'Adaptation et l'Accommodation	74
<b>II.6. Bilan énergétique de l'oscillateur élastoplastique parfait</b>	<b>78</b>
<b>II.7. Etude de stabilité de l'oscillateur élastoplastique parfait</b>	<b>87</b>
<b>II.8. Conclusion</b>	<b>91</b>

<b>Chapitre III : Étude de l'Oscillateur Élastoplastique en Présence de l'Écrouissage</b>	<b>92</b>
<b>III.1. Introduction</b>	<b>92</b>
<b>III.2. Le Système Dynamique de l'Oscillateur Élastoplastique Écrouissable</b>	<b>93</b>
<b>III.3. Equations Adimensionnelles du Mouvement</b>	<b>97</b>
<b>III.4. Vibrations Libres du Système Élastoplastique Écrouissable</b>	<b>98</b>
III.4.1 Résolution de l'état élastique $\hat{E}$	<b>98</b>
III.4.2 Résolution de l'état plastique $\hat{P}^+$	<b>99</b>
III.4.3. Résolution de l'état plastique $\hat{P}^-$	<b>100</b>
III.4.4. Organigrammes d'évolution du système élastoplastique écrouissable libre	<b>102</b>
III.4.5. Résultats des Oscillations Libres ( $f_0 = 0$ )	<b>105</b>
<b>III.5. Vibrations Forcées du Système Élastoplastique Écrouissable</b>	<b>117</b>
III.5.1 Résolution de l'état élastique $\hat{E}$	<b>117</b>
III.5.2 Résolution de l'état plastique $\hat{P}^+$	<b>118</b>
III.5.3 Résolution de l'état plastique $\hat{P}^-$	<b>121</b>
III.5.4. Organigrammes d'évolution du système élastoplastique écrouissable forcé	<b>124</b>
III.5.5. Résultats des Oscillations Forcées ( $f_0 \neq 0$ )	<b>127</b>
III.5.6. Caractérisation du Cycle limite	<b>143</b>
III.5.7. Détermination de la frontière de Bifurcation	<b>157</b>
III.5.8. Étude de la Stabilité de l'oscillateur élastoplastique écrouissable	<b>164</b>
<b>III.6. L'Oscillateur inélastique à 2 Degré de Liberté (2 DDL)</b>	<b>175</b>
<b>III.7. Conclusion</b>	<b>189</b>
<b>Conclusions générales et Perspectives</b>	<b>190</b>
<b>Références Bibliographiques</b>	
<b>Liste des Figures et Tableaux</b>	



# **Introduction Générale**

## Introduction Générale

Dans beaucoup de situations couramment rencontrées en ingénierie, les structures ou éléments structuraux sont soumis à des chargements mécaniques et/ou thermiques cycliques ou simplement variables dans le temps. Pour ces types de sollicitations, la charge limite, dont la détermination est basée sur un chargement proportionnel, n'assure pas la sauvegarde de la structure.

En effet, les tests expérimentaux mettent en évidence que même en dessous de cette charge limite, les structures soumises à des chargements cycliques peuvent évoluer vers trois types d'états limites, dont deux conduisent à la ruine. Le premier d'entre eux, désigné par le terme *Rochet*, conduit à la ruine de la structure par excès de déformations plastiques accumulées. La structure peut aussi périr par formation d'un cycle plastique stabilisé qui conduit par fatigue à faible nombre de cycles à la rupture. Ce phénomène est appelé *accommodation* ou *fatigue plastique*. Toutefois, la structure peut aussi endurer un grand nombre de cycles. Dans ce dernier cas, les déformations plastiques se stabilisent et le comportement cyclique redevient purement élastique avec apparition de contraintes résiduelles. On parle alors d'*adaptation élastoplastique*.

Ce dernier comportement est à la base des phénomènes de fatigue à grand nombre de cycles. Ces différences de comportement ont motivé l'introduction des différentes notions de la dynamique des structures et puis la dynamique des systèmes non linéaires dont notamment la réduction de la dimension des problèmes posés par le changement de variables ou l'utilisation des variables dites *Adimensionnelles*, l'utilisation de la représentation dans l'espace des phases, au lieu de la représentation temporelle classique.

Le sujet de cette thèse de doctorat de 3<sup>ème</sup> Cycle intitulée :

**« Contrôle de la Stabilité Dynamique des Structures Élastoplastiques »**

Qui entre dans le cadre de la formation doctorale :

« Analyse numérique et Expérimentale des structures », lancée, approuvée, et financée par le Ministère National de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique depuis Janvier 2011.

Cette thèse est organisée en trois (03) grands chapitres suivis par une conclusion générale et des perspectives en vue d'une éventuelle continuation des travaux :

- Chapitre I : Synthèse Bibliographique, un premier chapitre faisant office de l'état de l'art, et regroupant les différentes notions et connaissances liées à l'étude de la dynamique et stabilité des systèmes dont la loi de comportement est élastoplastique (parfaitement plastique ou en présence de l'écroutissement). Un bref historique des travaux de recherches tirés de la littérature scientifique sur l'étude de la dynamique non linéaire des systèmes élastoplastique est également présenté dans ce chapitre.
- Chapitre II : Etude de l'oscillateur élastoplastique parfait, un chapitre consacré à l'étude d'un système dynamique représenté par un modèle rhéologique simple à 1DDL. Un système contrôlé par ses propres équations de mouvement adimensionnées, la réponse de ce système dans le cas des vibration libres (sans force d'excitation extérieur), est présentée également par perturbation des conditions initiales. Le cas des vibrations forcées (force extérieure de type harmonique) constitue la partie la plus importante de ce chapitre dont nous montrons que la frontière de bifurcation entre les états dynamiques est en fonction des paramètres structuraux (l'amplitude de force, l'amortissement, la fréquence de l'oscillation). L'étude de stabilité menée et le bilan énergétique est établi pour ce système élastoplastique parfait et la carte de l'énergie dissipée aux cours des oscillations est tracée en fonctions des paramètres dynamiques.
- Chapitre III : Etude de l'oscillateur élastoplastique en présence de l'écroutissement, une section qui représente le véritable apport scientifique de cette thèse, une étude de la stabilité dynamique est conduite suivant la même approche de propagation d'erreurs, la frontière de bifurcation et la réponse dynamique de ce système sont présentées également pour différentes valeurs des paramètres structuraux. La détermination semi-analytique des temps de transition entre les différents états est aussi détaillée pour l'exemple du cas où le taux d'amortissement est supérieur au coefficient de l'écroutissement, un cas qui englobe le cas particulier de l'oscillateur élastoplastique parfaitement plastique. Ensuite, Ce système a été couplé à une masse additionnelle, pour en former un nouvel oscillateur à 2 DDL compliqué, la détermination des équations de mouvement de ce système est obtenue à travers la combinaison des différentes équations régissant chaque état dynamique des masses, et une solution globale est proposée pour les possibles transition des états.

# **Chapitre I**

## **Synthèse Bibliographique**

## Chapitre I : Synthèse Bibliographique

### I.1. Introduction

Le concepteur en charge d'étudier, d'analyser, et dimensionner les structures notamment en génie civil doit faire face aux différents types de chargements pouvant éventuellement engendrer l'effondrement partiel ou global des éléments structuraux. De ce fait, la connaissance des charges dites exceptionnelles (Séisme.....etc), ainsi que le comportement d'une structure au-delà de ces résistances effectives est une nécessité absolue afin d'en déterminer sa déformée et ses éléments de réduction. Lorsque les efforts qui lui sont appliqués varient suffisamment lentement dans le temps, l'analyse peut être réalisée sous l'hypothèse d'un comportement quasi-statique, le cas des différents codes de calcul parasismique (RPA 99 version 2003, Eurocode 8). Ces règlements réduits la non linéarité matérielle d'une ossature à un coefficient de comportement correcteur qui dépend essentiellement du type de contreventement, une telle approximation laisse place à l'ignorance et la non prise en compte des phénomènes produits par les charges dynamiques de type périodiques.

Sachant qu'une structure soit généralement un système fort compliqué, il est parfois possible de ramener son étude à un système dynamique à un nombre fini de degré de liberté dans la mesure où nous connaissons les sources de l'excitation et la réponse de la structure. Le système plus simple et souvent utilisé est celui à 1 DDL, cette thèse a pour but d'étudier un oscillateur simple et ainsi introduire les notions essentielles de stabilité, réponse dynamique, et aborder les problèmes de résolution numérique de systèmes non-linéaire tout en restant bien entendu dans le domaine de la dynamique déterministe.

Dans ce chapitre, nous ferons le point sur l'historique des travaux de recherche menées dans le cadre de l'étude d'un oscillateur élastoplastique soumis à une excitation extérieure de type harmonique, et également nous présentons les différentes notions qui lui sont liées.

## I.2. L'enjeu de l'étude dynamique

Le traitement des problèmes posés dans le cadre de la mécanique statique des solides et des structures, se base sur l'hypothèse que le chargement imposé (déplacement, efforts, température ...) passe progressivement de sa valeur initiale à sa valeur finale faisant ainsi passer la partie sollicitée d'une configuration initiale à sa configuration finale. Les paramètres à déterminer (contraintes, déformations, déplacements, réactions, ...) sont relatifs à l'état final fixe et par conséquent, ne dépendent pas du temps. C'est au contraire dans le cadre de la dynamique, les charges imposées, ainsi que les propriétés géométriques et matérielles, peuvent varier dans le temps. De plus, même dans la configuration initiale le milieu sollicité peut être caractérisé par des fonctions du temps. Les paramètres à calculer sont donc également des fonctions du temps, et de nouvelles grandeurs apparaissent pour caractériser le mouvement, c'est-à-dire la variation de la configuration dans le temps. Ce sont les paramètres cinématiques tels que les vitesses, les accélérations, les fréquences, ... qui n'existent pas dans le cas relevant du domaine statique.

Lors de l'étude et dimensionnement des ouvrages de grande envergure, présentant une quelconque irrégularité dans la distribution des rigidités et des inerties, les hypothèses habituelles de calcul sont évidemment inadéquates, ce fut le cas des structures présentant une absence totale ou large variation de symétrie en plan ou en élévation, dont on peut plus parler d'un ensemble d'excitations régulier de tous les points sous les fondations ; également, dans le cas des structures comportant des dispositifs d'amortissement, où l'hypothèse de découplage des modes est réfutée à cause de la matrice d'amortissement qui ne lui permet.

En passant par un calcul non linéaire explicite représentatif et relativement compliqué d'une telle structure, nous pouvons étudier ainsi son comportement au-delà du domaine élastique ; Donc, le caractère hystérétique d'un tel comportement et qui est fortement lié à l'histoire du matériau mène au cadre de la rhéologie dynamique et les différents outils de la dynamique des systèmes non linéaire (DSNL).

Dans le cadre de nos travaux, l'étude est restreinte à un système (oscillateur) à un degré de liberté, s'intéressant ainsi à une loi de comportement élastique parfaitement plastique (comportement élastoplastique parfait) un cas particulier de l'élastoplasticité en présence de l'écrouissage (cinématique dans notre cas) dont la force évolue dans le domaine plastique, positivement dans notre cas (hardening elastoplastic oscillator) tant dis que négativement (softening elastoplastic oscillator) dans les travaux de Liu (Liu, 2003).

### I.3. Systèmes Dynamiques Non linéaires

Henri Poincaré, dans ces travaux (Poincaré, 1890) sur l'interaction des trois corps (Le soleil, la terre, la lune) avait introduit plusieurs notions qui sont actuellement reprises et à la base de la dynamique moderne des systèmes physiques notamment dans la résolution des systèmes d'équations ordinaire (EDO). Il a mis en évidence le fait que la représentation d'un système dynamique doit s'effectuer préférentiellement dans un espace, appelé *espace des phases* ou *espace des états*, introduit par Hamilton. Cet espace est formé par un ensemble complet de variables physiques indépendantes (les positions et moments canoniques de toutes les particules constitutives). Un état du système correspond de manière biunivoque à un point de l'espace des phases, et l'évolution temporelle du système engendre une trajectoire (dite orbite). D'autres contributions ont suivi grâce à Birkhoff ou Lyapunov, en restant dans le domaine des systèmes conservatifs.

#### I.3.1. Dynamiques des systèmes dissipatifs & conservatifs

Dans le domaine de la dynamique des systèmes non linéaires, les systèmes dynamiques dissipatifs sont à l'origine de l'émergence de la « théorie du chaos » puisqu'ils furent les premiers à être étudiés dans les années 60 et 70. Les avancées théoriques sur la caractérisation des systèmes dissipatifs temporels n'ont pas été transmises aux domaines des applications et seules quelques équipes parmi la communauté internationale exploitent ces techniques qui se multiplient avec une maturité qu'elles n'avaient pas alors. En effet, il apparaît désormais que nombreux sont ceux qui travaillent sur des systèmes qui pourraient bénéficier de ces techniques d'analyse mais qui se contentent d'utiliser, par défaut, les techniques utilisées à la fin des années 80. La communauté francophone comporte plusieurs équipes qui promeuvent l'analyse de ces systèmes. De par sa nature, le contexte de ce travail permet également d'intéresser la communauté des mathématiciens travaillant sur les équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles.

À ce titre, les systèmes hamiltoniens sont au cœur de nombreux systèmes physiques très variés. On rencontre ces systèmes hamiltoniens (conservatifs) dans des domaines de la physique exhibant des dynamiques à des échelles de temps et d'espace très différentes. Pour n'en citer que quelques-uns, la mécanique des fluides et des plasmas, la mécanique céleste, la physique des accélérateurs de particules, la physique atomique et moléculaire.

Typiquement, lorsqu'il est chaotique, le comportement dynamique d'un système hamiltonien résulte de la compétition – non-linéaire – entre les fréquences de vibration des différents degrés de liberté (Zaslavsky, 1998). De tels comportements chaotiques peuvent être observés dans le contexte de certaines expériences de mélanges en mécanique des fluides, liés à une perte de confinement dans les tokamaks, ou à un transport accru d'énergie pour certains degrés de liberté pertinents conduisant à une réaction chimique.

L'utilisation des nombreux outils mathématiques développés pour ces systèmes hamiltoniens permet de mieux comprendre et aussi de contrôler cette dynamique (Menneville, 1990). Ces outils concernent la modélisation des systèmes physiques (identification de quantités conservées à l'aide des symétries du système et par conséquent, construction de modèles réduits par exemple), l'analyse de la dynamique en termes de structures dans l'espace des phases et identification des *bifurcations* associées à des changements qualitatifs de la dynamique d'un système en fonction des paramètres pertinents, et le contrôle par des modifications appropriées du système permettant de conserver la structure hamiltonienne du problème.

La spécificité d'un système hamiltonien est que la dissipation engendre la tendance asymptotique d'un volume initial de l'espace des phases vers un volume nul, aussi appelé *attracteur* qui peut se manifester par *un point fixe*, des orbites périodiques (*cycles limites*), des *orbites quasi-périodiques* ou des *attracteurs chaotiques (étranges)*. Le terme *chaotique* se réfère à une propriété dynamique (Grebogi et al., 1984), d'où la sensibilité aux conditions initiales (*SCI*), tandis que le mot *étrange* se réfère à des propriétés fractales.

Les travaux de Lorenz (Lorenz, 1963) ont apporté à la science le premier attracteur chaotique, bien que Rössler (Rössler, 1976) a pu développer un autre attracteur chaotique plus simple engendré par un système non linéaire de trois équations différentielles ordinaires couplés, qui ne peuvent être intégrées -analytiquement-, le cas de la majorité des systèmes dynamiques non linéaires. Donc, Lorenz a initié la résolution des systèmes d'équations différentielles à l'aide des ordinateurs, ce qui a donné naissance à une multitude des travaux de recherche théoriques basés sur des simulations numériques en introduisant les outils numériques de calculs formels.

### I.3.2. Description physique d'un système dynamique

On appelle système dynamique un système (physique) représentable par un jeu d'équations différentielles tel que :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X, \alpha, t) \\ X(0) = \hat{X} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Où  $X$  est un vecteur de variables de dimension  $n$ ,  $F$  un vecteur de fonctions scalaires des variables  $X$  de dimension  $n$  également,  $\alpha$  est un vecteur de paramètres de dimension  $p$ , et  $t$  (souvent le temps) la variable libre du problème.  $\hat{X}$  est le vecteur des conditions initiales (valeur de  $X$  à  $t = 0$ ).  $F$  nécessairement ne présente pas de singularité (Le Boulrot, 2009), on pourra donc toujours supposer que  $X$  existe pour tout  $t$ .

Il est essentiel de faire la distinction entre “variables” et “paramètres”. Les paramètres sont sous le contrôle de “l'expérimentateur” : il peut les modifier librement (même si cela n'a pas de sens physique). Une fois un jeu de paramètres choisi, et pour des conditions initiales données, le système évolue de façon déterministe sous la loi de l'équation différentielle  $F$ . Pour un système “bien posé”, le *théorème de Cauchy* garantit alors que la solution existe et est unique. En revanche, ce théorème est local ; il ne dit rien sur une éventuelle durée maximale d'évolution du système. La recherche d'éventuelles singularités doit donc se faire au cas par cas.

Le modélisateur peut ainsi constater, ou observer, l'évolution des variables dans l'univers virtuel qu'il a créé. Il réalise une sorte d'expérience “in silico” dans laquelle il est le maître des règles du jeu (construction de  $F$ , réglage des  $\alpha$ , choix de  $\hat{X}$ ) mais où il ne se passe pas n'importe quoi. Une fois ces choix faits, la suite est irrévocable. Elle peut (en général) être calculée, mais il faut changer les règles pour que l'évolution change.

Le point de vue d'étude adopté consiste à étudier une famille de systèmes obtenue en faisant varier l'un ou l'autre des paramètres de contrôle. On cherche à déterminer les valeurs particulières des paramètres pour lesquelles le comportement qualitatif du système change. Cela permet d'avoir une vue globale et synthétique des différents comportements possibles, et permet également souvent de mieux comprendre un comportement particulier en le plaçant dans un contexte plus global.

Lorsque la variable libre  $t$  apparaît explicitement dans l'expression de  $F$ , le système est dit *non-autonome*. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique, et il est préférable de s'en affranchir. On peut toujours transformer un système *non-autonome* en système autonome (où  $t$  n'apparaît pas explicitement), en posant par exemple :

$$\begin{cases} X_{n+1} = t \\ \dot{X}_{n+1} = F_{n+1}(X, \alpha) = 1 \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

On augmente ainsi la dimension du système d'une (1) unité, mais cela permet de remplacer systématiquement  $t$  dans les équations par  $X_{n+1}$ . Les algorithmes de résolution de systèmes d'équations différentielles nous en remercieront pour la réduction de nombre d'équations du système à résoudre.

### I.3.3. L'oscillateur Modèle de Duffing

Un vecteur d'état et une fonction de transition sont à l'origine de tout système dynamique. On peut noter que la définition d'un système dynamique se réfère également à une frontière entre un « intérieur » et un « extérieur » au système. Cet extérieur qu'on appelle l'environnement du système, par exemple le cas de la force d'excitation d'un séisme, et appliquée au système en dynamique des structures. Habituellement, un comportement stationnaire (stimulation périodique pour force harmonique) est attendu de la part de l'environnement extérieur d'un système dynamique. Un système qui perd de l'énergie au cours du temps est dit dissipatif. Pour une initiation assez large de comportement dynamiques, nous prenons l'exemple prototype d'un oscillateur régi par l'équation de Duffing .

L'oscillateur de Duffing fait partie des systèmes modèles qui permettent d'étudier une dynamique non-linéaire (Korsch et al., 1998). Il correspond à une équation différentielle non-linéaire de la forme :

$$\ddot{x} + r\dot{x} + ax + \beta x^3 = f \cos(\omega t) \quad (\text{I.3})$$

Cette équation diffère formellement de l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique en régime forcé par la présence d'un terme non-linéaire en  $\beta x^3$ . Elle fut établie au début du XXème siècle par l'ingénieur *Georg Duffing* (Duffing, 1918), dans le but de modéliser les vibrations forcées d'une machine industrielle, ensuite un grand nombre de tels systèmes correspondent à une telle modélisation ont vu le jour.

Si l'équation différentielle (I.3) contient cinq paramètres ( $r, \alpha, \beta, f$  et  $\omega$ ), un changement de variable peut nous montrer qu'il suffit de seulement trois paramètres parmi ceux-ci pour explorer complètement les différents types d'évolution du système. En effet, deux de ces cinq paramètres peuvent être considérés comme des facteurs d'échelle vis-à-vis du temps et de l'amplitude ; en considérant les transformations :

$$\begin{cases} x \rightarrow ax \\ t \rightarrow bt \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} a = f\omega^{-2} \\ b = \omega^{-1} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

On obtient une équation qui ne contient plus que trois paramètres :

$$\ddot{x} + \hat{r}\dot{x} + \hat{\alpha}x + \hat{\beta}x^3 = \cos(t) \quad (\text{I.5})$$

Qui seront :

$$\begin{cases} \hat{r} = r\omega^{-1} \\ \hat{\alpha} = \alpha\omega^{-2} \\ \hat{\beta} = \beta f^2\omega^{-6} \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Or, de façon plus générale, l'adoption opte souvent pour le choix de considérer l'influence des trois paramètres ( $r$ ,  $\omega$  et  $f$ ). L'équation différentielle du second ordre (I.3) peut se ramener à un système équivalent de trois équations différentielles du premier ordre comme ceci :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{z} = \omega \\ \dot{y} = -ry - \alpha x - \beta x^3 + f \cos(z) \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Ce système (I.7) est "autonome", dont le temps n'apparaît pas explicitement, fait intervenir trois variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  indépendantes. Il correspond par conséquent à un système à trois degrés de liberté, soit le nombre minimum qui permet l'apparition d'un comportement chaotique. La projection des trajectoires décrites dans l'espace tridimensionnel ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) est exactement la représentation du système  $y(x)$  dans l'espace des phases.

### I.3.4. Evolution des états d'un Système dynamique

Considérons un système dynamique possédant un seul degré de liberté (Figure I.1.a.), assujéti à une trajectoire rectiligne. Le suivi de sa position se fait à l'aide d'une coordonnée ( $x$ ) suivant un seul axe. L'état mécanique de cet oscillateur à un instant donné est totalement déterminé par la détermination de sa position et de sa vitesse, qui sont calculables à l'aide de l'équation différentielle du mouvement et des conditions initiales.

Cet état mécanique peut être représenté sur un plan (position  $x$ , vitesse  $\dot{x}$ ) montré par la figure (Fig.I.1.c), appelé "portrait de Phase" dans un espace appelé " *espace de phase*" (Leipholz, 1970).

Dans le cas de ce système (Fig.I.1.a) le graphe du portrait de phase est à deux dimensions, donc facilement observable, mais dans le cas d'un système à deux degrés de liberté, l'espace des phases serait de dimension 4, et pour un système à trois degrés de liberté, de dimension 6.

La lecture des coordonnées d'un point de l'espace des phases (Figure I.2-c-) donne directement la vitesse et la position du corps mobile. La trajectoire décrite par ce point exhibait l'évolution du système au cours du temps, ou ce qui est physiquement connu sous l'appellation de la représentation temporelle (Fig.I.1.b) .

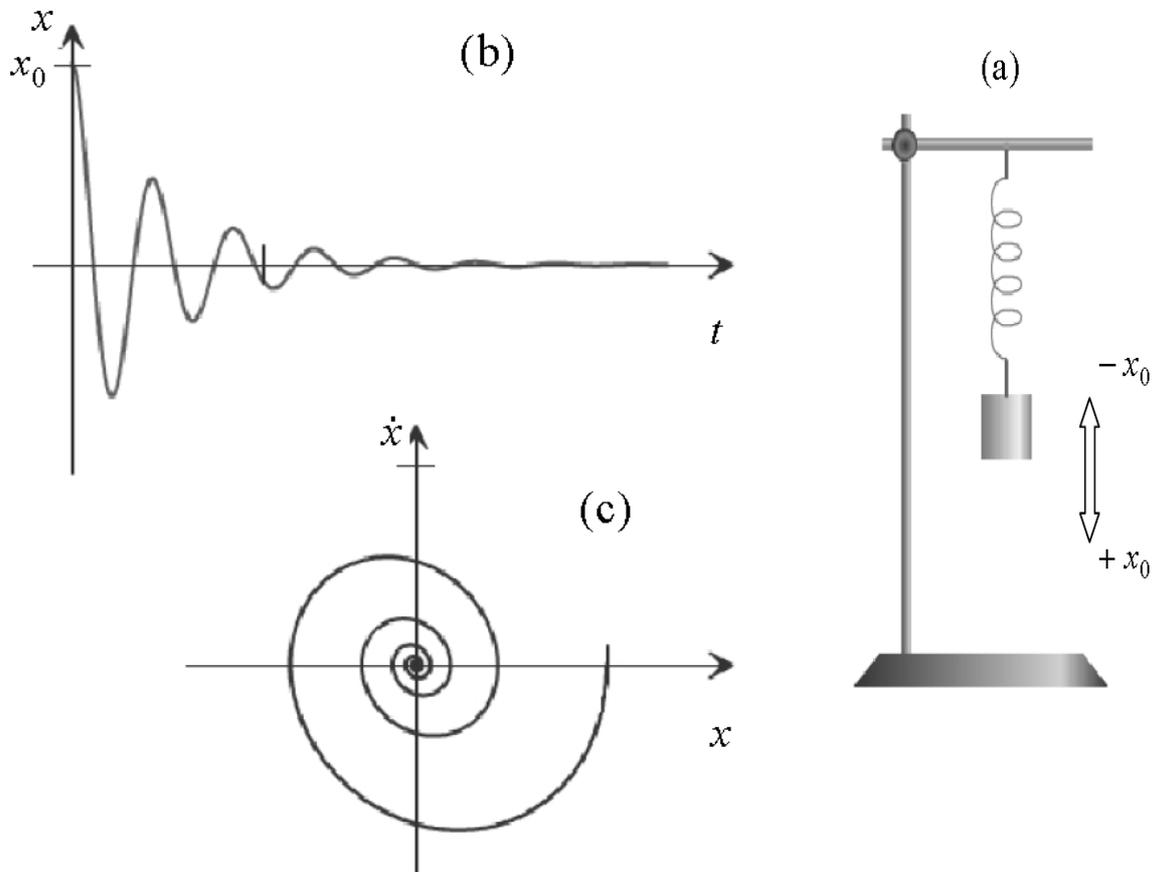


Figure I.1. Vibrations Libres d'un Oscillateur harmonique dissipatif

(a) : Modèle physique : masse-ressort

(b) : Evolution Temporelle (classique) du système

(c) : Portrait de Phases du système

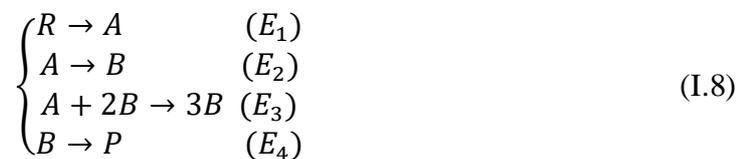
L'état de mouvement d'un système dynamique est mathématiquement une solution connue de son système différentiel.

La résolution des équations différentielles est un problème difficile. On ne peut que distinguer deux états de mouvement remarquables, très fréquents et relativement faciles à étudier :

- L'état stationnaire : un procédé est dit être à l'état stationnaire si les variables le décrivant ne varient pas avec le temps.
- L'état oscillant (Cycle Limite).

### I.3.4.1 Modèle de Gray & Scott (Oscillations Chimiques)

Afin de mieux illustrer ces deux états, nous prenons le cas d'un exemple choisi et directement inspiré des travaux de (Gray & Scott, 1990) ; (Scott, 1991), dans leur étude des oscillations chimiques et instabilités liées aux différentes réactions, et qui fournissent un cas de figure idéal très représentatif des théories de la dynamique des systèmes non linéaires. On souhaite étudier l'évolution en fonction du temps des abondances de deux composants A et B obéissant au système suivant :



Les  $(E_i)$  sont les constantes de réaction. On suppose que le réactant  $R$  est disponible en quantité suffisante pour que sa concentration reste constante, et que le produit  $P$  est inerte. On peut considérer ce système comme extrait d'un réseau plus large, mais où  $A$  et  $B$  n'interviennent pas.

Il n'y a que deux variables dans le problème, donc la possibilité d'une évolution chaotique est exclue, en effet les trajectoires de phase ne peuvent se croiser dans l'espace de phase, ce qui violerait le principe de causalité. Il faudra donc un espace de phase à trois dimensions au moins afin de pouvoir développer une trajectoire complexe (topologiquement) sans intersection. Les équations cinétiques d'évolution se déduisent immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d[A]}{dt} = E_1 [R] - E_2 [A] - E_3 [A][B]^2 \\ \frac{d[B]}{dt} = E_2 [A] + E_3 [A][B]^2 - E_4 [B] \end{array} \right. \quad (I.9)$$

Apparemment, Il y a cinq paramètres dans ce problème : les quatre taux de réaction ( $E_i$ ) et l'abondance de  $R$ .

Chercher à étudier de façon exhaustive ce système tel qu'il est écrit s'avère une très lourde tâche (même pour un système aussi simple) du seul fait du nombre de degrés de liberté apparents (Le Boulot, 2009) (Scott, 1991) (Grey & Scott, 1990). De plus, rien ne dit que le système d'unités (S.I.) soit adapté.

Il est donc nécessaire de dédimensionner (adimensionner) ce problème pour :

- Déterminer le nombre réel de paramètres libres,
- Travailler dans les “bonnes” unités.

Ici, Scott (Scott, 1991) propose un changement de variable particulièrement astucieux :

En utilisant le fait qu'une abondance au carré intervient dans la dimension de ( $E_3$ ) il pose :

$$\begin{cases} A = \alpha \sqrt{\frac{E_4}{E_3}} \\ B = \beta \sqrt{\frac{E_4}{E_3}} \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

En prenant alors comme temps caractéristique ( $1/E_4$ ), on obtient le système réduit suivant :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = r - E\alpha - \alpha\beta^2 \\ \dot{\beta} = E\alpha + \alpha\beta^2 - \beta \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Avec :

$$\begin{cases} r = \frac{E_1}{E_4} \sqrt{\frac{E_3}{E_4}} [R] \\ E = \frac{E_2}{E_4} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

On voit qu'il ne reste plus que deux paramètres libres indépendants.

### I.3.4.2 Evolution vers un état stationnaire

Scott (Scott, 1991) prend:  $r = 1.5$ ,  $E = 0.15$ . Après une rapide montée de  $A$ ,  $B$  se forme à son tour et vient limiter l'abondance de  $A$ . Les deux espèces se stabilisent rapidement après très peu d'oscillations (Voir Fig I.2)

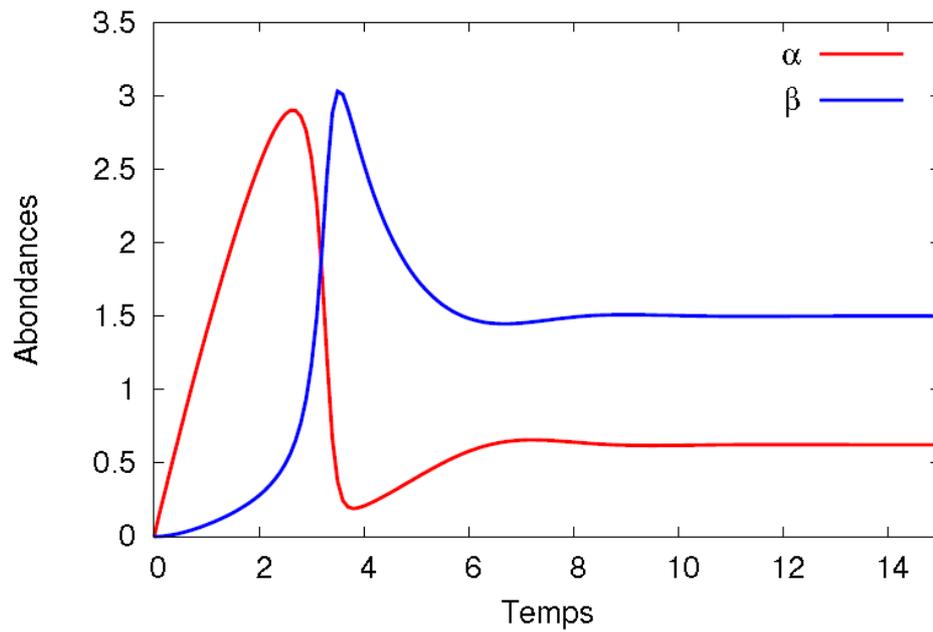
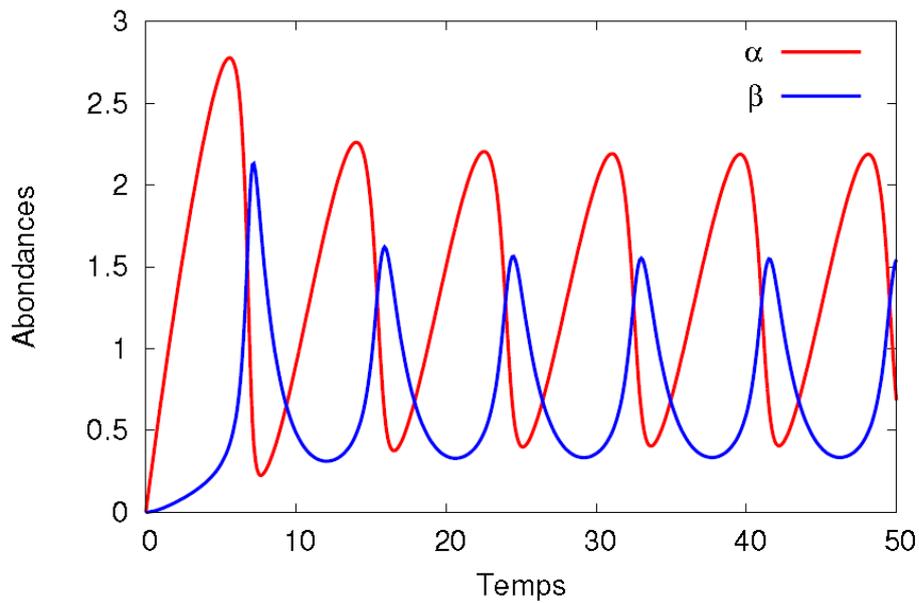


Fig. I.2. Evolution vers un état Stationnaire (Scott, 1991)

### I.3.4.3. Evolution vers un état oscillant (Cycle Limite)

Dans le cas où Scott (Scott, 1991) prend le jeu de paramètre :  $r = 0.7$ ,  $E = 0.08$ , L'évolution globale est nettement plus lente. Après un état transitoire visible surtout sur la première oscillation, le système se stabilise et tend vers un régime permanent oscillant (Cycle limite) dont la représentation temporelle prend la forme ci-dessous :



**Fig. I.3. Evolution vers un état Oscillant (Scott, 1991)**

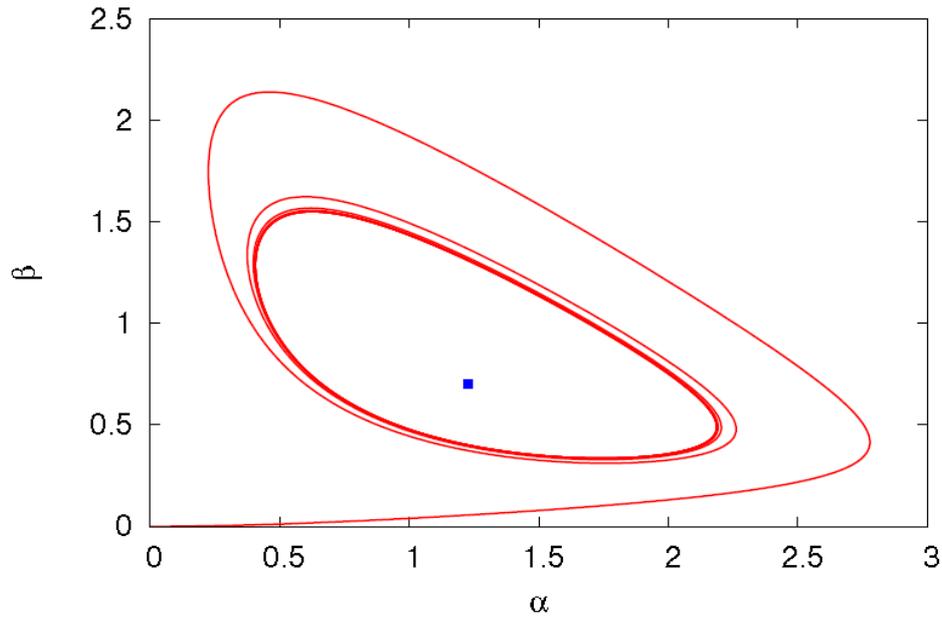
### I.3.5. Notion de Bifurcation

Les bifurcations sont une des manifestations les plus intéressants et les plus surprenantes des systèmes dynamiques non linéaires. On dit qu'un système possède une bifurcation si une variable infinitésimale d'un de ces paramètres provoque un brusque changement de régime. Dans certains cas, le système aura le choix entre plusieurs régimes ; il apparaîtra alors un caractère aléatoire que l'existence d'un modèle pourtant ne laisse pas présager. Un état de bifurcation est un point où la solution des équations mathématiques qui gouvernent le problème et l'évolution du système étudié (équations d'équilibre, loi de comportement) perdent leur caractère d'unicité. Les notions de bifurcation de l'équilibre et de perte d'unicité de la solution permettent de décrire, par exemple, le changement du processus de déformation au cours du mouvement du système en vibration, pour mieux décrire les propriétés mécaniques liées à la frontière de bifurcation (Pomeau, 1980).

La notion de bifurcation dépend de la grandeur du chargement, des hypothèses sur les propriétés dynamiques du matériau considéré, des conditions initiales et dans beaucoup de systèmes, les bifurcations sont aussi intimement liées à la notion de symétrie (Challamel & Gilles, 2007), (Hammouda, 2009), (Chenia & Hammouda, 2010).

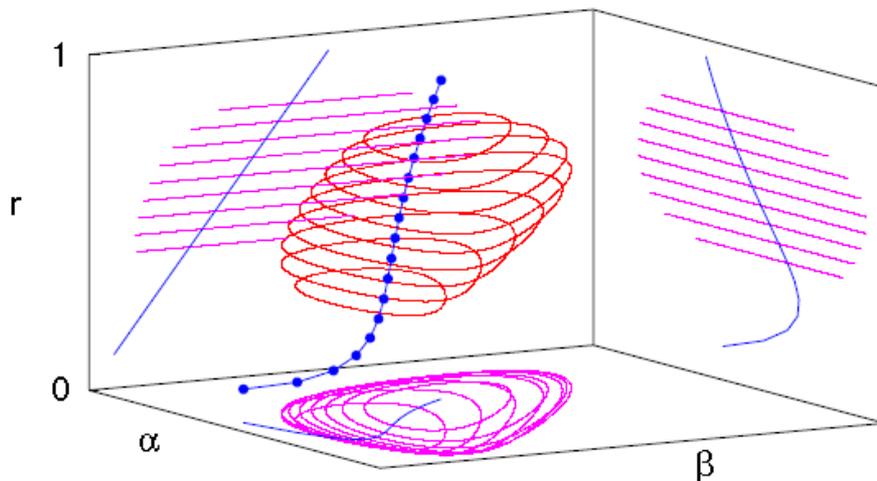
Reprenons l'exemple de Scott (Scott, 1991), Il est intéressant dans ce cas de "passer dans l'espace des phases". On y perd l'information temporelle, mais il est beaucoup plus simple d'y caractériser le type de régime dynamique (voir Fig. I.4). La trajectoire de phase vient s'enrouler autour d'une courbe fermée (le cycle limite). Le point bleu indique la position du point fixe (attracteur) instable.

En faisant varier le paramètre de contrôle  $r$  pour une valeur fixée de  $E$ , on obtient la figure (Fig. I.5). On voit que la forme du cycle limite se modifie avec la valeur de  $r$ . Il apparaît pour une première valeur critique (avec une taille nulle), se développe puis diminue pour disparaître pour une deuxième valeur critique.



**Fig. I.4. Cycle limite des oscillations dans l'espace des phases. (Scott, 1991)**

Les deux points particuliers où le point fixe se déstabilise pour donner naissance à des oscillations sont indiqués en Figure (Fig I.5). Chaque plan horizontal correspond à une valeur particulière de  $r$ . Seul le régime permanent a été conservé. La courbe bleue montre le lieu des points fixes quand  $r$  varie. Les projections sur les 3 plans montrent l'amplitude des oscillations.



**Fig. I.5. Développement Des Oscillations -Diagramme de Bifurcation- (Scott, 1991)**

### I.3.6. Sources d'excitations

Caractériser les déplacements, les déformations et les contraintes qui règnent au sein d'une structure et qui résultent d'un chargement thermo/mécanique quelconque est le but essentiel de toute étude dynamique. En effet, dans de nombreux secteurs industriels, il est primordial de déterminer, pour le dimensionnement et la conception, les niveaux d'efforts que les structures peuvent soutenir, mais également les propriétés amortissantes qu'elles peuvent développer. C'est le cas dans les secteurs du transport :

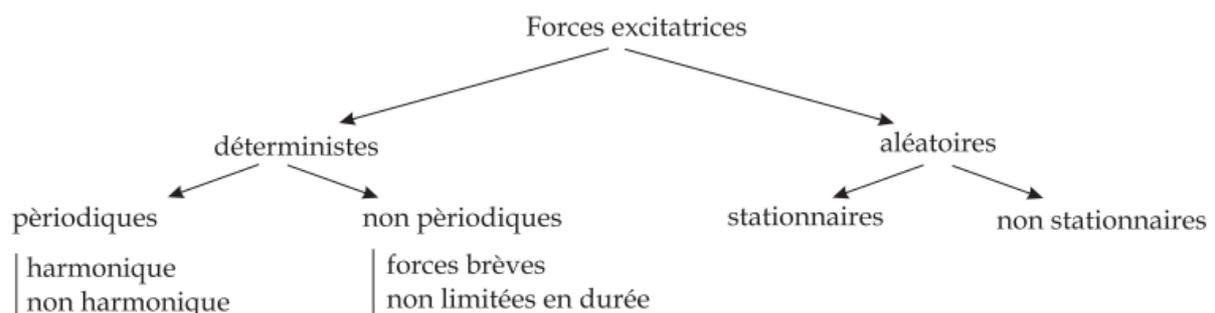
- aéronautique -> confort acoustique, vibrations aérodynamiques, vibrations propulseurs, ...
- ferroviaire -> confort acoustique, chocs de roulement, ...
- automobile -> confort habitacle, fréquences propres boîtes de vitesse, crash (=dynamique rapide), ...
- dans le secteur du génie civil (séismes, explosions, propagations dynamiques d'ondes, ...)

On distingue deux grands types d'approche des problèmes de dynamique, selon que le chargement est connu ou non :

— chargement connu -> approche *déterministe* : explosions, efforts connus impulsionnels ou périodiques, ...

— chargement aléatoire -> approche *non déterministe - statistique* : choc d'un avion en vol, impacts de roulement pour les trains, collision de véhicules, séismes destructeurs, ...

Dans le cadre de ce travail, nous nous restreindrons à la dynamique déterministe. De façon générale, on utilisera une approche en déplacements, c'est-à-dire dont les déplacements sont les inconnues du problème.



Un chargement périodique (dans notre cas), agissant pendant un temps suffisamment long (par opposition à impulsionnel), ne contient qu'une fréquence (sinusoïdale), il est dit *harmonique*. Il est tout à fait possible que tout chargement périodique se décompose en la somme de plusieurs chargements harmoniques. Pour les chargements non-périodiques, on peut distinguer 2 types : très brefs – de type impulsionnel- et long. La notion de durée étant relative, elle est à comparer aux périodes caractéristiques (*propres*) de la structure (Drapier, 2016).

### I.3.7. Non linéarité de comportement

Des essais ont été réalisés dans les trente dernières années pour l'étude du comportement des matériaux de construction sous l'influence des charges périodiques de type sismiques, la figure ci-dessus (Fig. I.6) correspond aux résultats des manipulations effectuées sur des Poutres (Pecker, 2017).

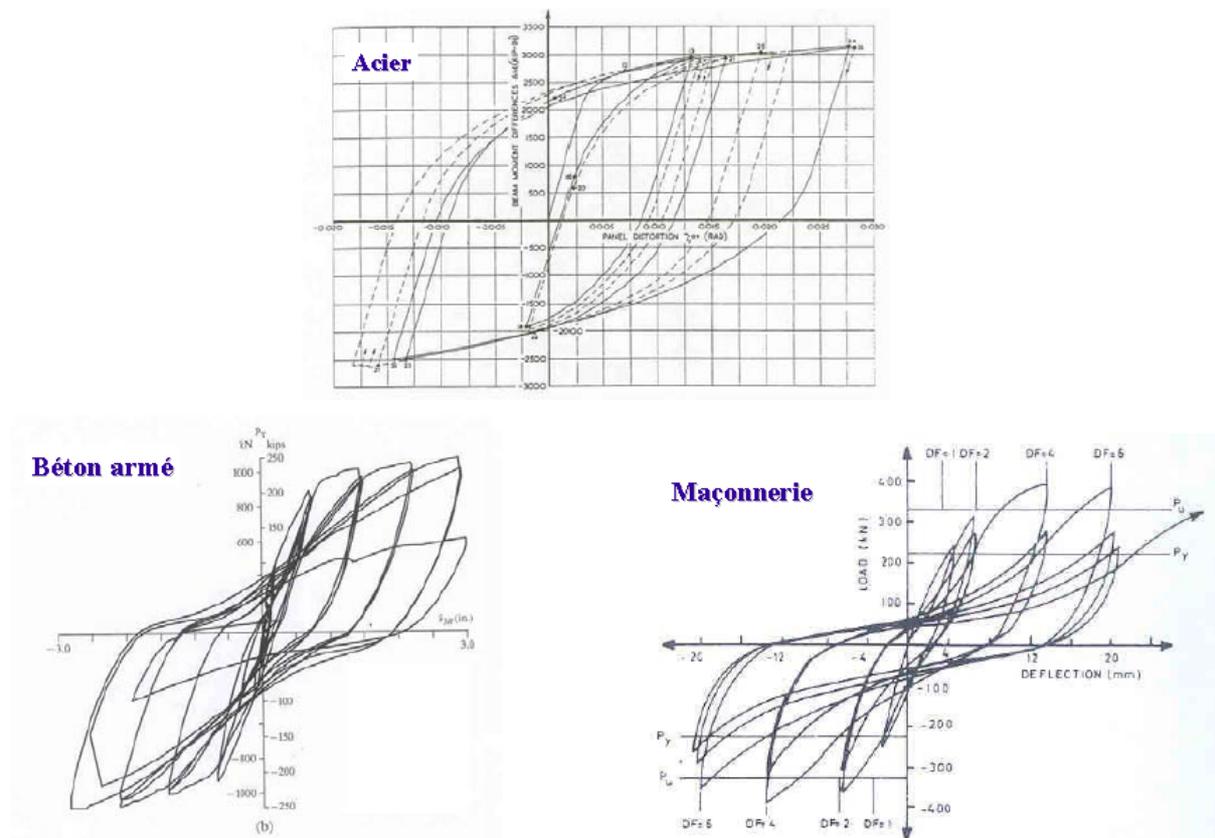


Figure I.6. Loi de Comportement cyclique des Matériaux de Construction

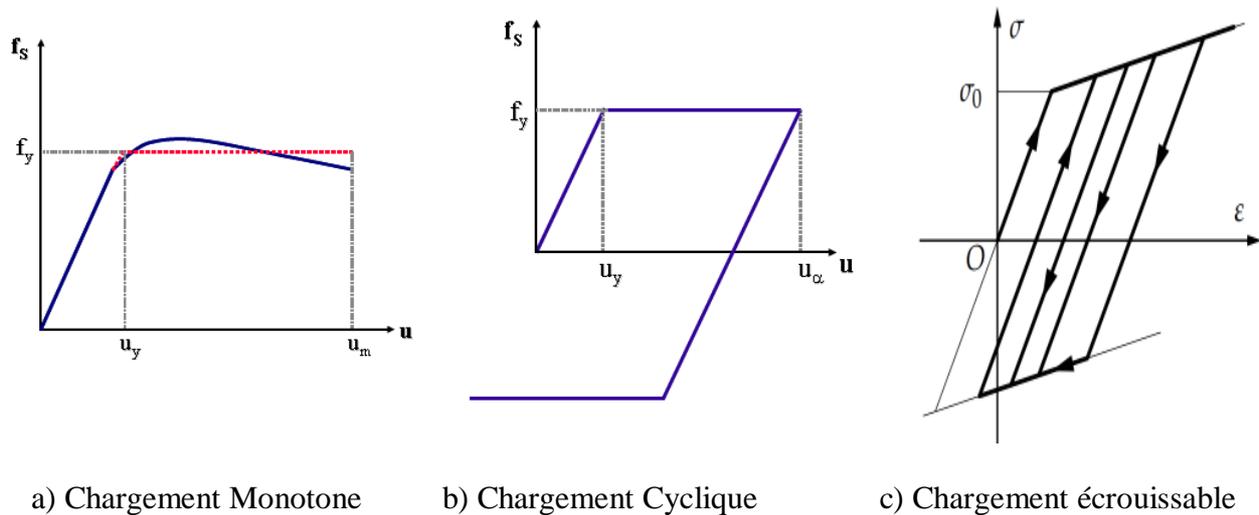
La figure (Fig. I.6.) montre que les courbes cycliques effort-déformation dépendent fortement du type de matériau étudié, cependant on peut constater les points communs suivants :

- Le comportement est linéaire au début du chargement pour des amplitudes de déplacement faibles.
- Au-delà d'un certain seuil de déplacement, les non linéarité matérielles apparaissent se traduisant ainsi par une limitation de l'effort maximale applicable aux éléments testés.
- Une dissipation de l'énergie est manifestée par des boucles d'hystérésis qui apparaissent lors des cycles charge-décharge.

La différence entre les trois matériaux, réside clairement dans la dégradation apparente du béton armé et encore plus pour la maçonnerie pour des cycles de chargement d'amplitude élevée. Pour ces deux derniers, l'effort admissible qu'on peut appliquer sur les pièces testées chute très rapidement au-delà d'un certain seuil, contrairement à l'acier où il est sensiblement constant ; corrélativement, la forme géométrique des courbes d'hystérésis change et passe d'une forme relativement régulière à une forme en (S). Ces courbes (Fig. I.6) sont observées à l'échelle macroscopique des pièces testées, évidemment d'autres phénomènes irréversibles se produisent à l'échelle du matériau : fissuration du béton et plastification des armatures, glissement des éléments de maçonnerie les uns par rapports aux autres, plastification de l'acier.

### I.3.8. Modélisation simplifiée du Comportement cyclique

Généralement pour l'acier, la loi de comportement sous les charges périodiques peut être schématisée comme suit :



**Fig. I.7. Schématisation simplifiée du comportement Non Linéaire**

Dans le cas de chargement monotone, la loi de comportement est définie par une courbe bilinéaire comportant une pente droite jusqu'à un seuil de déplacement ( $u_y$ ), suivi par un plateau de force constante au-delà de cette valeur qui se termine par une valeur de déplacement ( $u_m$ ) pour laquelle se manifeste la rupture ou l'instabilité de la structure.

Dans le cas de chargement cyclique, une décharge intervient après la valeur de déplacement ( $u_\alpha$ ) suivant un trajet parallèle à celui du chargement initial, se poursuivant jusqu'à l'atteinte en traction d'une valeur égale à  $(-f_y)$  -une loi de comportement dite symétrique-. Le rechargement à partir d'un point qui suit le deuxième plateau de force, suit de nouveau un trajet parallèle à celui du chargement initial et ainsi de suite.

Le comportement décrit par la figure (Fig. I.7.b), correspond à la schématisation *élastique parfaitement plastique* (cas du chapitre II) qui a connue beaucoup de succès auprès des théoriciens et chercheurs depuis plusieurs années, l'écrouissage (cas du chapitre III) peut également être présent, par une évolution régulière de la force applicable au-delà de la valeur ( $u_y$ ) au lieu du plateau de force constante, une augmentation (Fig. I.7.c) qui dépend de la raideur élastique du matériau et un paramètre appelé *coefficient de l'écrouissage* ( $\mu$ ).

Les lois de comportement de la figure (Fig. I.7.) permet de mettre en évidence la différence fondamentale entre un système élastique et un système élastoplastique :

- Pour le cas d'un système linéaire, la relation entre la force et le déplacement est biunivoque, et le dimensionnement fait traditionnellement appel à l'évaluation des efforts.
- Pour les systèmes élastoplastique particulièrement et non linéaire généralement, il y a plus de correspondance biunivoque dont la force perd la propriété de significativité car la force maximale supportée par le système perturbé est associée à une infinité de valeurs de déplacement où certains peuvent conduire à des états inadmissibles pour le système : déplacement correspondant à la limite critique de stabilité du système ; à la rupture du matériau ....

Cet aspect n'apparaît pas clairement dans les règlements de constructions parasismiques, qui privilégient le raisonnement en force afin de préserver ce mode raisonnement en force familier pour les ingénieurs, dont les efforts sont évalués par un calcul élastique, puis corrigés par un coefficient réducteur fixé par le règlement en fonction du type de matériau constitutif (acier, béton, ...), et son schéma structurel (portique, voile, Contreventement mixte...).

Sous l'effet de chargement cyclique à contrainte imposée (Challamel & Gilles, 2007), (Hammouda, 2009), (Chenia, 2010), les matériaux ou les systèmes peuvent avoir l'un des deux états limites : **l'adaptation, l'accommodation** (Fig. I.8).

Les phénomènes d'adaptation et d'accommodation correspondent à une stabilisation de la déformation après quelques cycles (le cas de notre étude consacrée à l'oscillateur élastoplastique parfait symétrique (Fig. I.14), ainsi qu'à l'oscillateur écrouissable (Fig. I.15)).

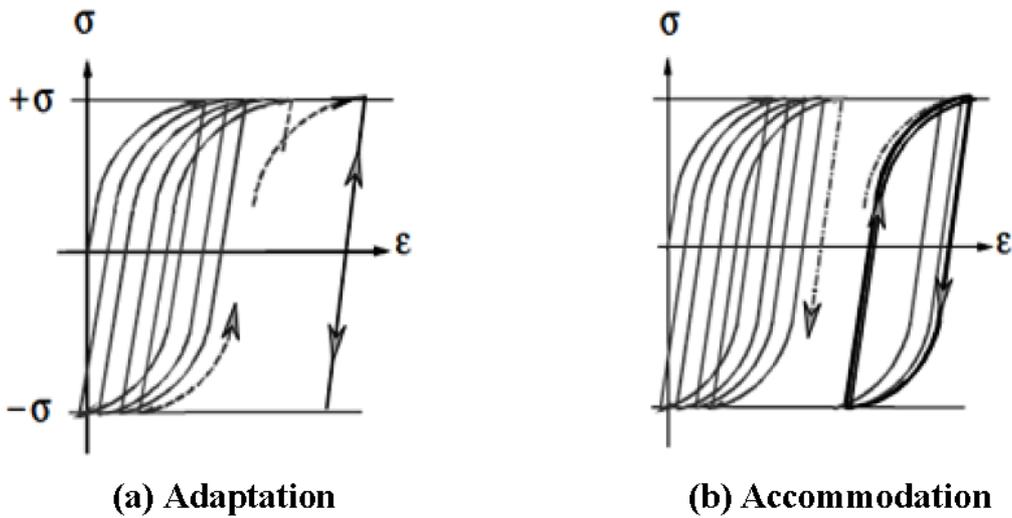


Fig. I.8. Comportement limite des structures sollicitées par un chargement cyclique

Il est possible d'observer deux modes de comportement limite dans le comportement cyclique des matériaux (voir Morz et Zarka, 1978) :

- *L'Adaptation* (Fig. I.8.a) : Correspond à un cycle stabilisé où la réponse devient purement élastique.
- *L'Accommodation* (Fig I.8.b) : Le cycle stabilisé présente une boucle d'hystérésis où la déformation plastique est périodique.

### I.4. L'Oscillateur élastoplastique à 1 DDL

L'étude dynamique d'une structure se base sur la notion de modélisation c.à.d. remplacer la structure considérée par un modèle ou un système qui représente cette dernière de manière exacte et simplifiée. Ce modèle contient les caractéristiques physiques essentielles d'une structure qui sont :

- Sa masse.
- Ses propriétés élastiques (souplesse ou rigidité).
- Son mécanisme de déperdition d'énergie ou amortissement.
- La source extérieure d'excitation ou chargement (statique, dynamique, séisme...).

Le modèle le plus simple c'est le système à un seul degré de liberté (**S.S.D.D.L**), dont chaque une de ces caractéristiques est supposé condensée dans un élément physique unique. Les composants élémentaires du modèle dynamique présentent un modèle rhéologique par l'oscillateur simple qui comprend toutes les composants élémentaires d'une structure.

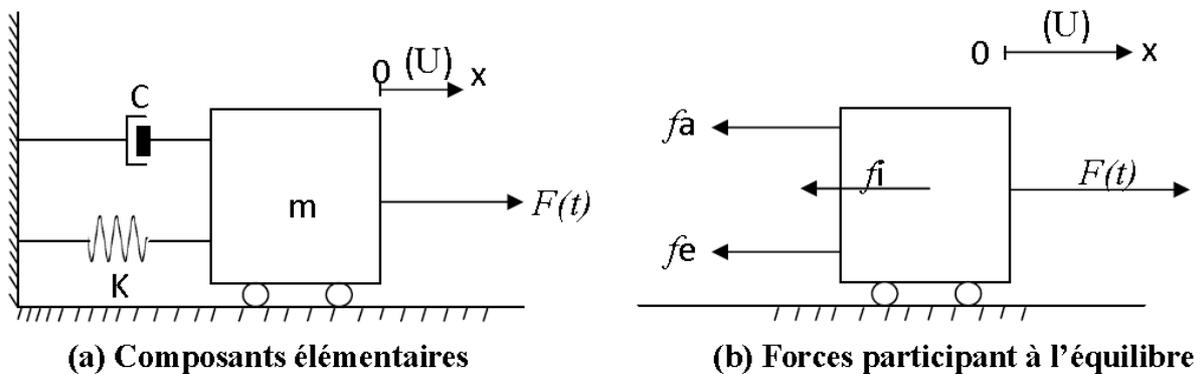


Fig. I.9. L'oscillateur simple à 1DDL

Les composantes élémentaires du modèle dynamique (Clough & Penzien, 1980) :

- **m** : masse du modèle.
- **K** : rigidité du modèle, (N/m).
- **C** : coefficient d'amortissement qui représente le mécanisme d'absorption d'énergie, (N.S/m).
- **F(t)** : chargement dynamique extérieur en fonction du temps (dynamique).

L'objectif initial de l'étude dynamique d'une structure est la détermination de l'histoire des déplacements dans le temps, de cette structure soumise à un chargement donné et variable dans le temps. Dans la plupart des cas, une étude approchée ne faisant intervenir qu'un nombre limité de degrés de liberté procurera une précision suffisante, et le problème pourra être réduit à la détermination de l'histoire dans le temps des seules composantes de déplacement choisis. Les expressions mathématiques qui définissent les déplacements dynamiques sont appelées **équations du mouvement** de la structure ; la résolution de ces équations donne les histoires de déplacement recherchées.

La formulation des équations du mouvement d'un système dynamique peut fort bien constituer la phase la plus importante (et parfois la plus difficile) de toute l'étude.

Trois méthodes sont souvent utilisées pour formuler ces équations ; chacune d'entre elles présente certains avantages pour certaines classes de problèmes :

- 1-** Formulation de l'équation du mouvement par le principe de d'Alembert.
- 2-** Formulation de l'équation du mouvement par le principe des travaux virtuels.
- 3-** Formulation de l'équation du mouvement par le principe de Hamilton.

Nous présentons les notions élémentaires sur lesquelles se fonde la première méthode choisie : Méthode dynamique par le **principe de d'Alembert** (Clough & Penzien, 1980).

Les équations du mouvement d'un système dynamique quelconque sont des expressions de la deuxième loi de **Newton**, selon laquelle le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque ( $m$ ) est égal à la force qui lui est appliquée. Cette relation peut s'exprimer mathématiquement par l'équation différentielle :

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d u}{dt} \right) \quad (\text{I.13})$$

Où  $P(t)$  est le vecteur de la force appliquée, et  $u(t)$  est le vecteur position de la masse  $m$ . Dans la plupart des problèmes de dynamique des structures, on peut supposer que la masse ne varie pas avec le temps, auquel cas l'équation précédente s'écrit en adoptant dorénavant les notations :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = \frac{d u}{dt} \\ \ddot{u}(t) = \frac{d^2 u}{dt^2} \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

$$P(t) = m \frac{d^2 u}{dt^2} = m \ddot{u}(t) \quad (\text{I.15})$$

Dont, les points représentent des dérivations par rapport au temps, et l'équation (eq I.15), qui n'est qu'une expression bien connue de l'égalité entre la force appliquée et le produit de la masse et de l'accélération communiquée, peut également s'écrire :

$$P(t) - m \ddot{u}(t) = 0 \quad (\text{I.16})$$

Où le second terme  $m \ddot{u}(t)$ , appelé **force d'inertie** qui est la caractéristique distinctive la plus importante des problèmes de dynamique des structures, s'oppose à l'accélération de la masse. Cette loi, selon laquelle une masse produit une force d'inertie proportionnelle et opposée à son accélération, est connue sous le nom **principe de d'Alembert**, qui est pratiquement un outil qui permet d'exprimer les équations d'un mouvement comme les équations d'un équilibre dynamique. On peut considérer que la force  $P(t)$  résulte de nombreux types de forces agissant

sur la masse : des efforts de contraintes élastiques internes s'opposant aux déplacements, des forces visqueuses s'opposant aux vitesses, et des charges extérieures définies de manière indépendante. Ainsi, si on introduit une force d'inertie s'opposant aux accélérations, l'expression de l'équation du mouvement n'est que la simple expression de l'équilibre de toutes les forces agissant sur la masse.

Donc, les forces agissant suivant la direction du degré de liberté de déplacement sont le chargement appliqué  $F(t)$  et trois forces engendrées par le mouvement : la force d'inertie ( $f_i$ ), la force d'amortissement ( $f_a$ ) et la force de rappel du ressort élastique ( $f_e$ ). L'équation du mouvement exprime tout simplement l'équilibre de ces forces, et s'écrit :

$$f_i + f_a + f_e = F(t) \quad (\text{I.17})$$

D'abord, considérons la force de rappel du ressort élastique. Elle est bien sûr donnée par le produit de la rigidité du ressort et du déplacement :

$$f_e = K \cdot U \quad (\text{I.18.1})$$

De même, par le principe de d'Alembert, la force d'inertie est le produit de la masse et de l'accélération :

$$f_i = m \cdot \ddot{U} \quad (\text{I.18.2})$$

Enfin, en supposant un mécanisme d'amortissement visqueux, la force d'amortissement est le produit de la constante d'amortissement  $C$ , et de la vitesse :

$$f_a = C \cdot \dot{U} \quad (\text{I.18.3})$$

Reportons les trois équations qui précèdent dans l'équation (I.17) :

$$m \cdot \ddot{U} + C \cdot \dot{U} + K \cdot U = F(t) \quad (\text{I.19})$$

L'équation (I.19) est l'équation du mouvement qui contrôle le déplacement dynamique du système masse-ressort.

La même équation du mouvement (équation I.19) peut être obtenue par chacune des trois méthodes de base. Pour ce système, il est évident que l'on préférera exprimer directement l'équilibre dynamique.

Dans ce qui vient d'être montré, on s'est intéressé au mouvement d'un oscillateur soumis à des sollicitations dynamiques appliquées directement à la masse ( $m$ ). Une autre forme de sollicitations est celle constituée par un mouvement du support. C'est en particulier le cas de sollicitations provenant du sol (sollicitations sismiques) : Dans ce cas le support de l'oscillateur simple représente le sol.

On rappelle brièvement qu'une sollicitation sismique provient d'une rupture s'initiant dans le manteau terrestre ; cette rupture donne naissance à des ondes qui se propagent dans le milieu et atteignent éventuellement la surface du sol où elles manifestent par une vibration dans les trois directions de l'espace. Les appareils enregistreurs recueillent ces vibrations sous la forme d'accéléérations du sol en fonction du temps.

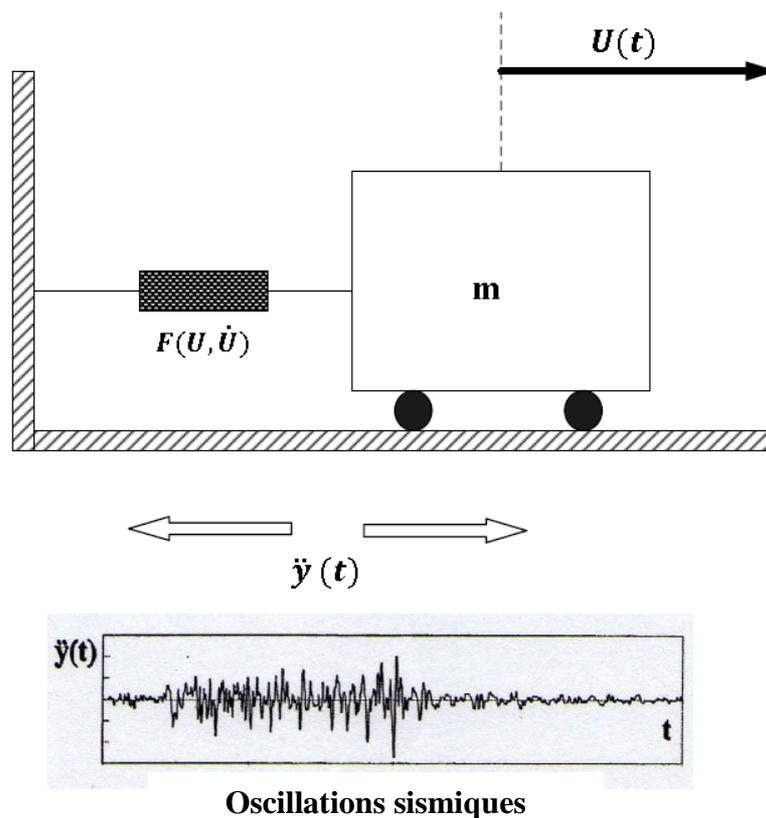


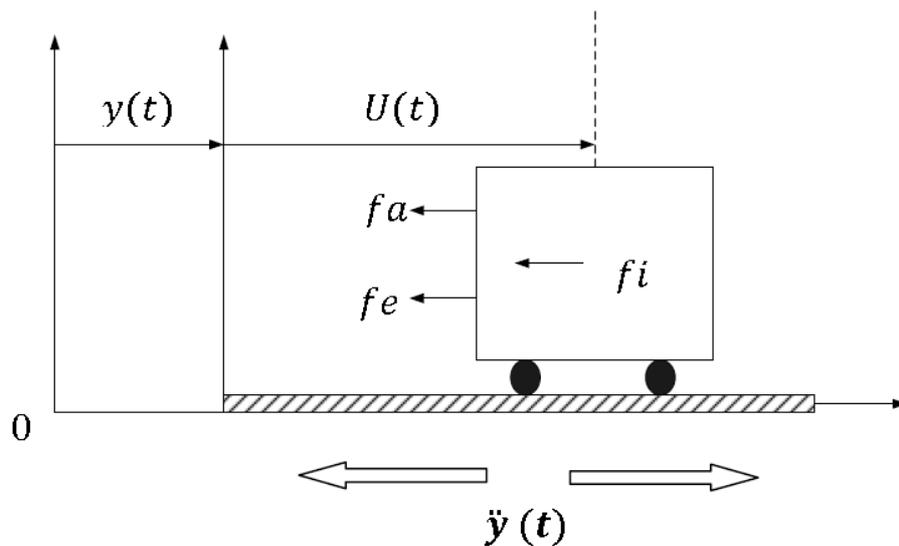
Fig. I.10. Oscillateur simple à 1 DDL Excité

La masse ( $m$ ) repose sur un support soumis à une accélération  $\ddot{y}(t)$  fonction du temps. On supposera, que cette accélération est connue par sa variation en fonction du temps.

La masse est reliée à son support par un élément développant une force  $F(U, \dot{U})$  fonction du déplacement et de la vitesse relatifs de la masse par rapport à celui-ci :

$$F(U, \dot{U}) = K.U + C . \dot{U} \quad (\text{I.20})$$

L'équation d'équilibre est obtenue en identifiant les forces s'exerçant sur la masse (Fig I.11) :



**Fig. I.11. L'ensemble des forces appliquées à l'oscillateur simple**

La force d'inertie s'exerçant sur la masse est égale au produit de la masse par l'accélération absolue de celle-ci. On note  $V$  le déplacement de la masse dans un référentiel fixe, la règle de composition des mouvements s'écrit :

$$V = U + y \quad (\text{I.21})$$

Avec  $y(t)$  : déplacement du support.

L'équilibre du système s'obtient en écrivant la nullité de la résultante des efforts, et en remplaçant les efforts par leurs expressions, on obtient :

$$m (\ddot{U} + \ddot{y}) + K.U + C . \dot{U} = 0 \quad (\text{I.22})$$

Autrement simplifiée :

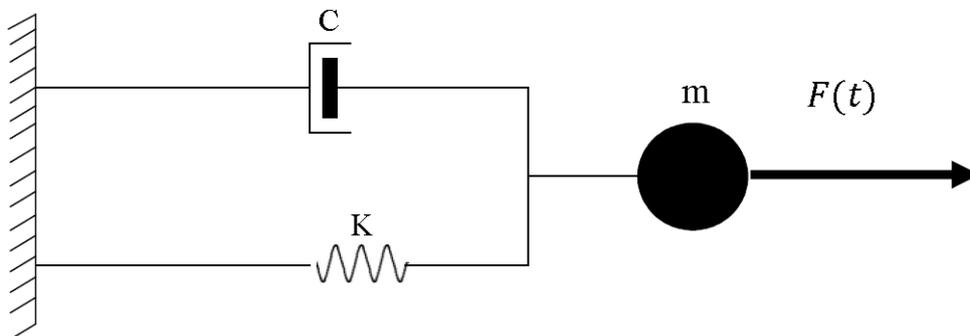
$$m \ddot{U} + K.U + C . \dot{U} = -m \ddot{y}(t) \quad (\text{I.22})$$

En comparant les équations (I.22) et (I.19), on constate que la réponse sismique de l'oscillateur est analogue à sa réponse lorsqu'il est sollicité directement en introduisant un chargement dynamique équivalent :

$$F(t) = -m \ddot{y}(t) \quad (\text{I.23})$$

L'équivalence donnée par l'équation (I.23) indique que la force  $F(t)$  peut représenter un chargement sismique, et les solutions obtenues pour  $F(t)$  restent applicables en remplaçant la force dynamique  $F(t)$  par le chargement dynamique équivalent  $(-m \ddot{y})$ .

Le système idéalisé à un degré de liberté (voir Fig. I.9) peut se présenter le plus simplement comme un système Rhéologique ne comportant que le modèle de l'oscillateur simple à une seule masse qu'on peut représenter par la figure ci-dessous (Fig. I.12).



**Fig. I.12. Le Modèle Rhéologique de l'oscillateur simple à 1DDL**

### I.4.1. L'oscillateur élastoplastique parfaitement plastique

Le modèle élastoplastique a été initialement élaboré à partir de constatations expérimentales relatives au comportement tridimensionnel des métaux. Les domaines d'applications de cette modélisation débordent maintenant ce cadre car l'on résout actuellement, par méthodes analytique ou numérique, des problèmes d'élastoplasticité pour des applications en mécanique des sols, en calcul de structure...

Ce schéma de comportement laisse de côté, tout effet de vieillissement et de viscosité du matériau, cela implique les conséquences suivantes (Challamel & Gilles, 2007), (Hammouda, 2009), (Chenia & Hammouda, 2010) :

- Découlant classiquement de l'absence de vieillissement, invariance par translation sur la variable temps.
- Par suite d'absence de viscosité, invariance des formules exprimant le comportement par homothétie positive effectuée à chaque instant sur la variable temps.

Il en résulte que le comportement élastoplastique ne saurait dépendre explicitement ou bien implicitement du temps physique. La réponse du matériau à une certaine histoire de sollicitation ne dépend que de la séquence des événements de cette histoire. Aussi fera-t-on usage, pour le comportement élastoplastique, d'un temps, paramètre purement cinématique (imaginaire) monotone croissant en fonction du temps physique (Salençon, 1983).

Le choix du modèle élastoplastique pour le cas de calcul numérique en dynamique de structure, est motivé par le fait que, les systèmes inélastiques ou élastoplastique peuvent se présenter comme des systèmes linéaires par morceau (voir Awrejcewicz et al, 2003). Les techniques d'étude des orbites périodiques et de leur stabilité sont grandement simplifiées. C'est la direction que nous avons choisie dans notre étude, en étudiant les oscillateurs à comportement élastoplastique parfait symétrique (voir Fig. I.13).

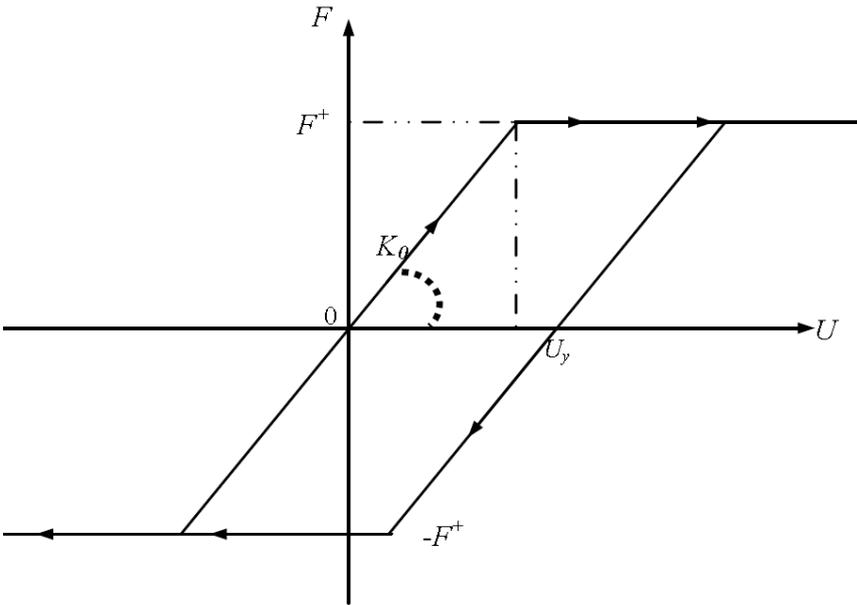
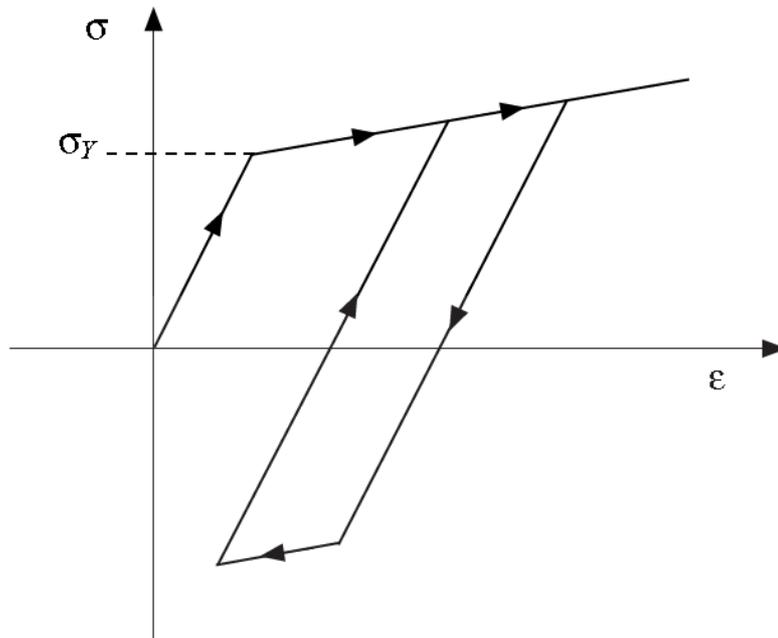


Fig. I.13. Loi de comportement élastoplastique parfait symétrique ( $|F^+| = |-F^+|$ )

### I.4.2. L'oscillateur élastoplastique en présence de l'érouissage cinématique

Dans le cadre de nos travaux de recherche, on s'intéresse également à l'oscillateur élastoplastique représenté par son modèle rhéologique (Fig. I.12) dont la loi de comportement est élastoplastique avec présence de l'érouissage cinématique (Fig. I.14) :



**Fig. I.14. Modèle élastoplastique en présence de l'érouissage linéaire illimité en chargement uniaxial**

Face aux deux figures (Fig. I.13 et I.14), on ne peut que constater que le modèle de l'oscillateur élastoplastique parfait n'est d'autre qu'un cas particulier de celui en présence de l'érouissage. En effet, l'augmentation de la charge (ou la contrainte) dans le domaine plastique se manifeste après un certain seuil (Limite d'élasticité), et proportionnellement à un paramètre ( $\mu$ ) appelé coefficient de l'érouissage qui se définit sur l'intervalle  $\mu^2 \in [0, 1]$ .

Les valeurs extrêmes de ce coefficient (Pratap et al., 1994) (Liu et al., 2003) :

- $\mu^2 = 0$  : illustre le cas de l'oscillateur élastoplastique parfait.
- $\mu^2 = 1$  : représente le cas de l'oscillateur purement élastique.

## I.5. Historique des travaux sur les oscillateurs hystérétiques

L'étude analytique de l'oscillateur élastoplastique a été initiée par Caughey (Caughey, 1960), en se basant sur une méthode asymptotique équivalente, pour arriver à une approximation de la réponse de cet oscillateur chargé par une fonction harmonique. Ensuite, plusieurs chercheurs ont traité la réponse d'un tel oscillateur forcé notamment Jacobsen (Jacobsen, 1952) et Tanabashi (Tanabashi, 1956). Néanmoins, Caughey (1960), fut le premier scientifique à obtenir la réponse du mouvement stationnaire d'un oscillateur bilinéaire non amorti soumis à une pulsation de type harmonique, en utilisant la méthode de variation lentes des paramètres, elle-même basée sur les travaux de Bogoliubov-Krylov (Bogoliubov & Krylov, 1937).

Les principaux résultats de Caughey (Caughey, 1960) ont été généralisés par Jennings (Jennings, 1964) et Iwan, (Iwan, 1965), en adoptant des modèles hystérétiques plus complexes et en ajoutant l'effet d'amortissement (le modèle de Ramberg-Osgood pour Jennings ; un modèle hystérétique appelé modèle hystérétique bilinéaire double pour Iwan).

Récemment, l'étude de la dynamique des systèmes non linéaires (élastoplastique), a fait ressurgir des phénomènes pour le moins complexes. Shaw et Holmes (Shaw & Holmes, 1983) ont montré l'existence de plusieurs types de mouvements : harmoniques, subharmoniques et chaotiques. Juste après, Miller et Butler (Miller & Butler, 1988) ont étudié le comportement d'un oscillateur élastoplastique parfait à un degré de liberté, tout en considérant une toute nouvelle approche, et ont obtenu ainsi, une solution quasi exacte. Capecchi et Vestroni (Capecchi & Vestroni 1990), (Capecchi, 1993), et leurs travaux sur les oscillateurs hystérétiques montrant l'influence des paramètres hystérétiques sur la réponse du système.

La notion de cycle limite élastoplastique vit le jour dans le cadre des travaux de Pratap et Mukherje (Pratap et al., 1994, et dans cela deux types d'états dynamique peuvent être distinguées pour ce système inélastique. Dans les années 2000, Liu (Liu, 1997) ; (Liu, 2003) ; Liu et Huang (Liu & Huang, 2004), ont opté pour une dynamique de l'oscillateur élastoplastique forcé et amorti, perçue d'une façon abstraite en utilisant des changements de variables pour en extraire des paramètres adimensionnels, ce qui leur permettait d'obtenir la solution exacte de l'état d'équilibre sous une forme analytique. Plus récemment les travaux de Challamel et al, (2005, 2006, 2007, 2008, 2010) et Hammouda (Hammouda, 2009) sur la dynamique des structures élastoplastique parfaites (avec et sans endommagement dans la loi de comportement) ont montré des réponses périodiques ou quasi périodiques, ainsi qu'une frontière de bifurcation dégageant des zones comportementales bien distinctes (l'adaptation et l'accommodation).

Dans le cadre des travaux de cette thèse, la modélisation du comportement cyclique de l'oscillateur élastoplastique parfait a été menée et abordée également sous l'aspect du bilan énergétique, (Chenia et al., 2018) ont sorti la carte énergétique d'un tel système dynamique en fonction des paramètres dynamique du système. En suite le modèle qui présente l'écroutissage cinématique linéaire dans le domaine plastique a été traité pour le cas des vibrations libres dans le travail de (Hammouda et al., 2012) dont la réponse dynamique de cet oscillateur a été analysée pour trois cas en fonction de l'amortissement positif versus le coefficient de l'écroutissage.

D'autres travaux ont venu enrichir le sujet, ce fut le cas notamment du travail de (Weiss & Chenia, 2016), un travail qui a été consacré à l'étude de la rhéologie dynamique et la stabilité d'un système à 2 DDL constitué d'une masse principale dont la de comportement est élastoplastique écroutissable et une masse additionnelle qui présente la *Non linear Energy Sink (NES)*.

## I.6. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude bibliographique et ainsi résume les différentes notions et connaissances nécessaires pour mieux cerner le sujet de cette thèse dont le thème est

### « Contrôle de la Stabilité Dynamique des Structures Élastoplastiques »

Le fait de connaître les notions de base pour la théorie des systèmes non réguliers (non linéaires), ainsi que les états limites pour le type du chargement cyclique est un pas vers le contrôle de leur stabilité. La modélisation classique de l'oscillateur simple à un degré de liberté, dont la loi de comportement est bilinéaire, est tout à fait acceptable pour l'étude des vibrations de systèmes ou les amplitudes restent modérées. Dès que ces amplitudes deviennent importantes, le matériau constitutif est sollicité au-delà de son domaine d'élasticité et le comportement du système devient non-linéaire.

Bien qu'une structure soit généralement un système plus complexe qu'un oscillateur à un degré de liberté. On a vu qu'il est possible de ramener son étude à celle d'un oscillateur simple. Par ailleurs, l'étude de l'oscillateur simple permet d'introduire les notions essentielles de **stabilité** et d'aborder les problèmes de résolution numérique de systèmes non-linéaires.

# Chapitre II

Étude de l'Oscillateur Élastoplastique

Parfait

## Chapitre II : Etude de l'Oscillateur Elastoplastique Parfait

### II.1. Introduction

Ce chapitre est consacré au traitement des questions de stabilité et de la dynamique d'un oscillateur élastoplastique parfait symétrique, amorti, sollicité par un chargement dynamique de type harmonique. Nous pourrions ainsi étudier l'effet de l'amortissement (positif) sur le comportement dynamique de l'oscillateur élastoplastique. On va montrer que le système hystérétique peut être écrit comme un système forcé autonome (ne dépend pas Explicitement du temps).

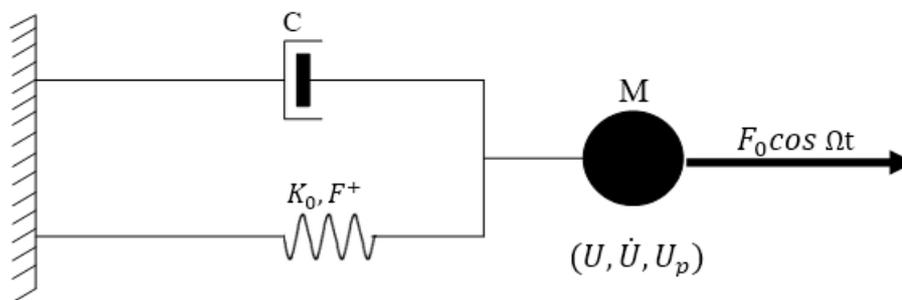
Il est également démontré que la dimension de l'espace des phases peut être réduite en utilisant l'adimensionnement (dédimensionnement). Ensuite, la vibration libre du système amorti est étudiée, pour une perturbation des conditions initiales.

La vibration forcée d'un tel oscillateur, est traitée par approche numérique, en utilisant la méthode de localisation des temps de transition (voir Shaw et Holmes, 1983), où on peut calculer les temps de transition semi-analytiquement.

Une analyse de stabilité des solutions périodiques est alors proposée, à partir d'une méthode de perturbations. La frontière entre l'adaptation et l'accommodation sera donnée sous une forme analytique, elle est mise en évidence dans l'espace des paramètres structurels reliée à l'alternance entre les deux propriétés mécaniques qui sont l'adaptation et l'accommodation. En fin, un bilan énergétique sera établi en représentant la carte énergétique d'un tel oscillateur en fonction de ses différents paramètres dynamiques.

## II.2. Présentation du modèle Rhéologique

Le modèle rhéologique (Fig. II.1) que nous abordons pour cette étude, a été défini dans le chapitre précédant (§ I.4), en considérant le système à un seul degré de liberté (Fig. II.1). Un système qui se compose d'une masse ( $M$ ) qui est attachée à un ressort élastoplastique de raideur ( $K_0$ ), et avec un coefficient d'amortissement (nécessairement positif) noté ( $C$ ). Le système inélastique est soumis à une force extérieure harmonique  $F(t)$  définie par son amplitude ( $F_0$ ) et sa pulsation ( $\Omega$ ).



**Fig. II.1. Modèle Rhéologique de l'oscillateur élastoplastique à 1 DDL**

Cet oscillateur (Fig. II.1) se caractérise par sa position  $U$ , sa vitesse  $\dot{U}$  et une variable interne plastique noté  $U_p$ , appelée le déplacement plastique.

La loi de comportement incrémentale inélastique (élastoplastique pour ce ressort inélastique) est illustrée en figure (Fig. II.2). Le modèle élastoplastique parfait ne dépend que de deux paramètres, la raideur  $K_0$  et la force  $F^+$ .

On note  $U_y$  le déplacement initial élastique avec :

$$U_y = \frac{F^+}{K_0} \quad (\text{II.1})$$

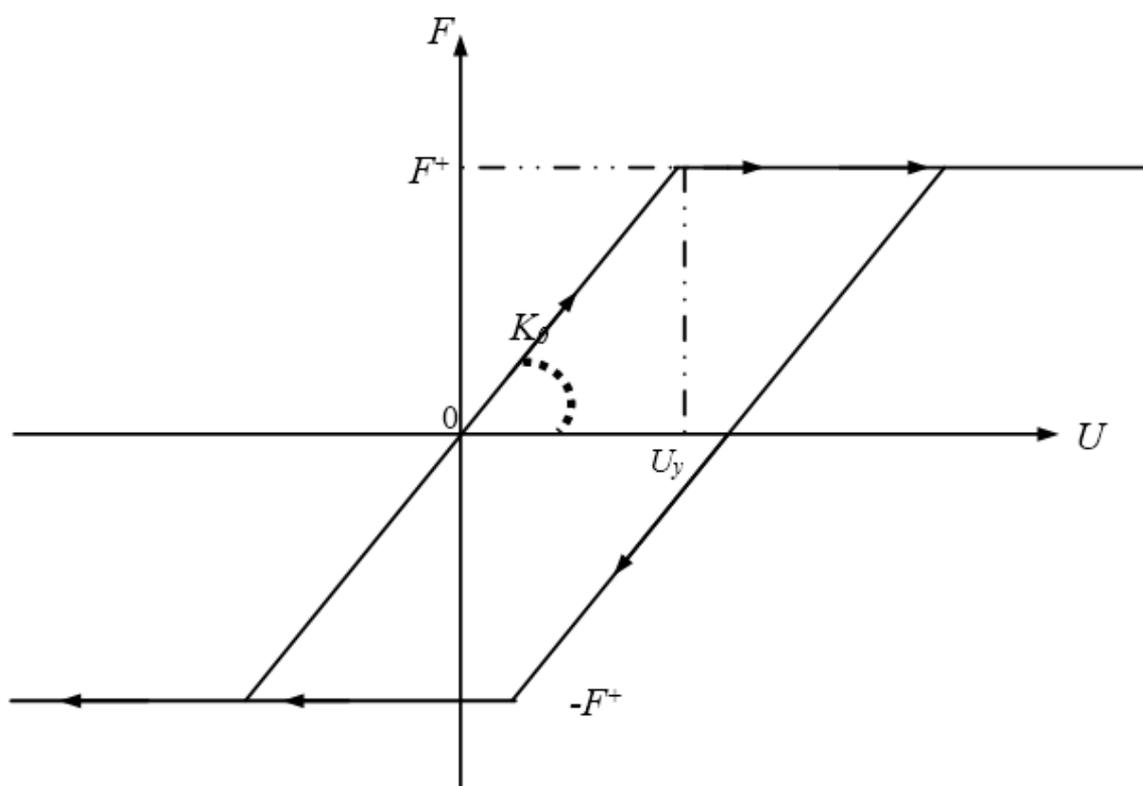


Fig. II.2. Loi de Comportement de l'oscillateur élastoplastique parfait

### II.3. Le Système dynamique élastoplastique parfait

Pour ce système inélastique, deux types d'états dynamiques peuvent être distingués (voir Pratap et al, 1994 ; Challamel & Pijaudier-Cabot, 2004 ; Challamel, 2005 ; Challamel & Pijaudier-Cabot, 2006 ; Challamel & Gilles, 2007, Challamel et al, 2007, Hammouda, 2009 ; Chenia, 2010 ; Chenia et al., 2011 ; Chenia et al., 2012).

Ces deux états correspondent à :

1- *Etat élastique*  $\hat{E}$  : (état réversible)

2- *Etat plastique*  $\hat{P}$  : (état irréversible) associée à l'évolution du déplacement plastique :

Cet état plastique, peut être décomposé en deux sous états  $\hat{P}^+$  et  $\hat{P}^-$  en fonction du signe du déplacement élastique  $(U - U_p)$ .

#### II.3.1. Equations du mouvement

Les équations du mouvement de cet oscillateur élastoplastique amorti peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{état } \hat{E} : M\ddot{U} + C\dot{U} + K_0(U - U_p) = F_0 \cos(\Omega t) = F(t) ; \dot{U}_p = 0 \\ \text{état } \hat{P}^+ : M\ddot{U} + C\dot{U} + F^+ = F(t) ; \dot{U}_p = \dot{U} \\ \text{état } \hat{P}^- : M\ddot{U} + C\dot{U} + F^- = F(t) ; \dot{U}_p = \dot{U} \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

Chaque état est défini à partir d'une partition de l'espace des phases  $(U, \dot{U}, U_p)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{état } \hat{E} : (|U - U_p| < U_y) \text{ ou } \left[ (|U - U_p| = U_y) \text{ et } (\dot{U}(U - U_p) \leq 0) \right] \\ \text{état } \hat{P}^+ : (U - U_p = U_y) \text{ et } \dot{U} \geq 0 \\ \text{état } \hat{P}^- : (U - U_p = -U_y) \text{ ou } (U_p - U = U_y) \text{ et } \dot{U} \leq 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

**II.3.2. Adimensionnement des équations du mouvement**

L'adimensionnement s'effectue selon les étapes suivantes :

- **Adimensionnement par simplification des paramètres** : Le passage des variables dimensionnelles  $(U, \dot{U}, U_p)$  à des variables adimensionnelles  $(u, \dot{u}, u_p)$  en divisant les premiers par le déplacement élastique  $(U_y)$  comme suit :

$$(u, \dot{u}, u_p) = \left( \frac{U}{U_y}, \frac{\dot{U}}{U_y}, \frac{U_p}{U_y} \right) \tag{II.4}$$

- **Adimensionnement par changement de base de temps** : le temps  $t$  qui est temps réel est changé par la nouvelle variable de temps adimensionnelle  $\tau$  qui est un temps cinématique :

$$\tau = \frac{t}{t^*} \quad \text{Avec} \quad t^* = \sqrt{\frac{M}{K_0}} \tag{II.5}$$

Les équations de mouvement (eq. II.2) peuvent donc s'écrire à partir des variables adimensionnelles (eq. II.4 et II.5) en divisant sur  $F^+$  et en utilisant aussi :

$$f_0 = \frac{F_0}{F^+} \text{ et } \omega = \Omega t^* , \text{ sachant que } \frac{M}{K_0} = t^{*2} \text{ et } \ddot{u} = \frac{d^2 U}{d\tau^2}$$

$$\begin{cases} \text{état } \hat{E} : \ddot{u} + \frac{C}{\sqrt{M.K}} \dot{u} + (u - u_p) = f_0 \cos(\omega\tau) & ; \dot{u}_p = 0 \\ \text{état } \hat{P}^+ : \ddot{u} + \frac{C}{\sqrt{M.K}} \dot{u} + 1 = f_0 \cos(\omega\tau) & ; \dot{u}_p = \dot{u} \quad ; f_0 = \frac{F_0}{F^+} \text{ et } \omega = \Omega t^* \\ \text{état } \hat{P}^- : \ddot{u} + \frac{C}{\sqrt{M.K}} \dot{u} - 1 = f_0 \cos(\omega\tau) & ; \dot{u}_p = \dot{u} \end{cases} \tag{II.6}$$

Les trois états sont définis à partir des l'espaces de phases  $(u, \dot{u}, u_p)$  suivant :

$$\begin{cases} \text{état } \hat{E} : (|u - u_p| < 1 \text{ ou } [|u - u_p| = 1]) \text{ et } (\dot{u}(u - u_p) \leq 0) \\ \text{état } \hat{P}^+ : (u - u_p = 1) \text{ et } \dot{u} \geq 0 \\ \text{état } \hat{P}^- : (u - u_p = -1) \text{ et } \dot{u} \leq 0 \end{cases} \tag{II.7}$$

De plus, la dimension de l'espace des phases peut être réduite, en introduisant le déplacement élastique :

$$v = u - u_p \tag{II.8}$$

On peut aussi introduire le taux d'amortissement réduit :

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{M.K_0}} \tag{II.9}$$

Donc, le nouveau système dynamique équivalent s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \text{état } \hat{E} : \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + (u - u_p) = f_0 \cos\omega\tau; \dot{u}_p = 0 \\ \text{état } \hat{P}^+ : \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + 1 = f_0 \cos\omega\tau; \dot{u}_p = \dot{u} \\ \text{état } \hat{P}^- : \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} - 1 = f_0 \cos\omega\tau; \dot{u}_p = \dot{u} \end{array} \right. \text{ avec : } \left\{ \begin{array}{l} f_0 = \frac{F_0}{F^+} \\ \omega = \Omega \sqrt{\frac{M}{K_0}} \\ \zeta = \frac{C}{2\sqrt{MK_0}} \end{array} \right. \tag{II.10}$$

Ces trois états correspondent dans le domaine des phases  $(v, \dot{u})$  à : (voir figures Fig. II.13, II.14)

$$\left| \begin{array}{l} \text{état } \hat{E} : (|v| < 1) \text{ ou } [v=1 \text{ et } (\dot{u} \leq 0)] \text{ ou } [v=-1 \text{ et } (\dot{u} \geq 0)] \\ \text{état } \hat{P}^+ : (v=1) \text{ et } \dot{u} \geq 0 \\ \text{état } \hat{P}^- : (v=-1) \text{ et } \dot{u} \leq 0 \end{array} \right. \tag{II.11}$$

## II.4. Vibrations Libres du Système Elastoplastique Parfait

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'étude du système élastoplastique parfait à 1 DDL, en mode de vibrations libres ( $f_0 = 0$ ) :

### II.4.1. Résolution de l'état élastique $\hat{E}$

Le système dynamique, dans le cas des oscillations libres, est un système autonome à deux dimensions dans l'espace des phases associé aux coordonnées adimensionnées  $(v, \dot{u})$ .

Les équations du mouvement du système dynamique libre, pour ( $f_0 = 0$ ), sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{état } \hat{E} : \ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + v = 0 & \dot{v} = \dot{u} \quad (a) \\ \text{état } \hat{P} : \ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + 1 = 0 & \dot{v} = 0 \quad (b) \\ \text{état } \hat{P} : \ddot{u} + 2\zeta\dot{u} - 1 = 0 & \dot{v} = 0 \quad (c) \end{array} \right. \quad (\text{II.12})$$

Le temps initial est arbitrairement choisi comme :

$$\tau_0 = 0 \quad (\text{II.13})$$

La réponse dynamique dans l'état élastique  $\hat{E}$  est obtenue par résolution de (II.12-a) :

En utilisant la variable  $v = u - u_p$ , l'équation différentielle du mouvement de l'état élastique est obtenue :

$$\text{état } \hat{E} : \ddot{v} + 2\zeta\dot{v} + v = 0 \quad (\text{II.14})$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 + 2\zeta\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 4\zeta^2 - 4 = 4(\zeta^2 - 1) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = (2j\sqrt{1 - \zeta^2}) \quad \text{avec} \quad j^2 = -1$$

Qui admet pour racines :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\zeta \pm 2j\sqrt{1 - \zeta^2}}{2} = -\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}$$

La solution de l'équation (II.14) s'écrit donc en notation réelle :

$$v = e^{-\zeta \tau} \left[ A \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \tau) + B \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \tau) \right] \quad (\text{II.15})$$

Dans ce régime, on a la vitesse ( $\dot{u}$ ) qui est égale à ( $\dot{v}$ ) :

$$\dot{u}(\tau) = e^{-\zeta \tau} \cdot [(-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \tau) + (-\zeta B - A\sqrt{1-\zeta^2}) \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \tau)] \quad (\text{II.16})$$

Les conditions initiales sont choisies tel que :

$$\begin{aligned} v(\tau_0 = 0) &= v_0 & (a) \\ \dot{u}(\tau_0 = 0) &= \dot{u}_0 & (b) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

En remplaçant l'équation (II.17.a) dans l'équation (II.15), et l'équation (II.17.b) dans l'équation (II.16) respectivement, on retrouve :

$$\begin{cases} v_0 = A \\ \dot{u}_0 = (-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

Nous avons à résoudre le système d'équation suivant, pour identifier le couple des constantes ( $A, B$ ):

$$A = v_0 \text{ et } B = \frac{\dot{u}_0 + \zeta v_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\text{II.19})$$

La réponse dynamique pour l'état élastique  $\hat{E}$  s'écrit finalement :

$$\left| \begin{aligned} v(\tau) &= e^{-\zeta\tau} \left[ v_0 \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \tau) + \frac{\dot{u}_0 + \zeta v_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \tau) \right] \\ \dot{u}(\tau) &= e^{-\zeta\tau} \left[ \dot{u}_0 \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \tau) - \frac{v_0 + \dot{u}_0 \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \tau) \right] \end{aligned} \right. \quad (\text{II.20})$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \mathbf{v} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_P) \\ \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}} \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}_P = 0 \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

#### II.4.2. Résolution des états plastiques $\hat{P}^+$ et $\hat{P}^-$

On note  $\tau_1$  le temps nécessaire pour initier cette phase plastique et le temps final de l'état élastique précédant. Le temps est déterminé en résolvant  $v(\tau_1) = \pm 1$  suivant la phase plastique considérée :

$$\left| \begin{aligned} \text{état } \hat{P}^+ : \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} &= -1 & \dot{v} &= 0 \\ \text{état } \hat{P}^- : \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} &= +1 & \dot{v} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{II.22})$$

Dans le cas plastique, on a deux domaines de phases contrôlés par les conditions (Voir Challamel & Pijaudier-Cabot, 2006 ; Challamel & Gilles, 2007, Challamel et al, 2007 ; Hammouda, 2009 ; Chenia, 2010) :

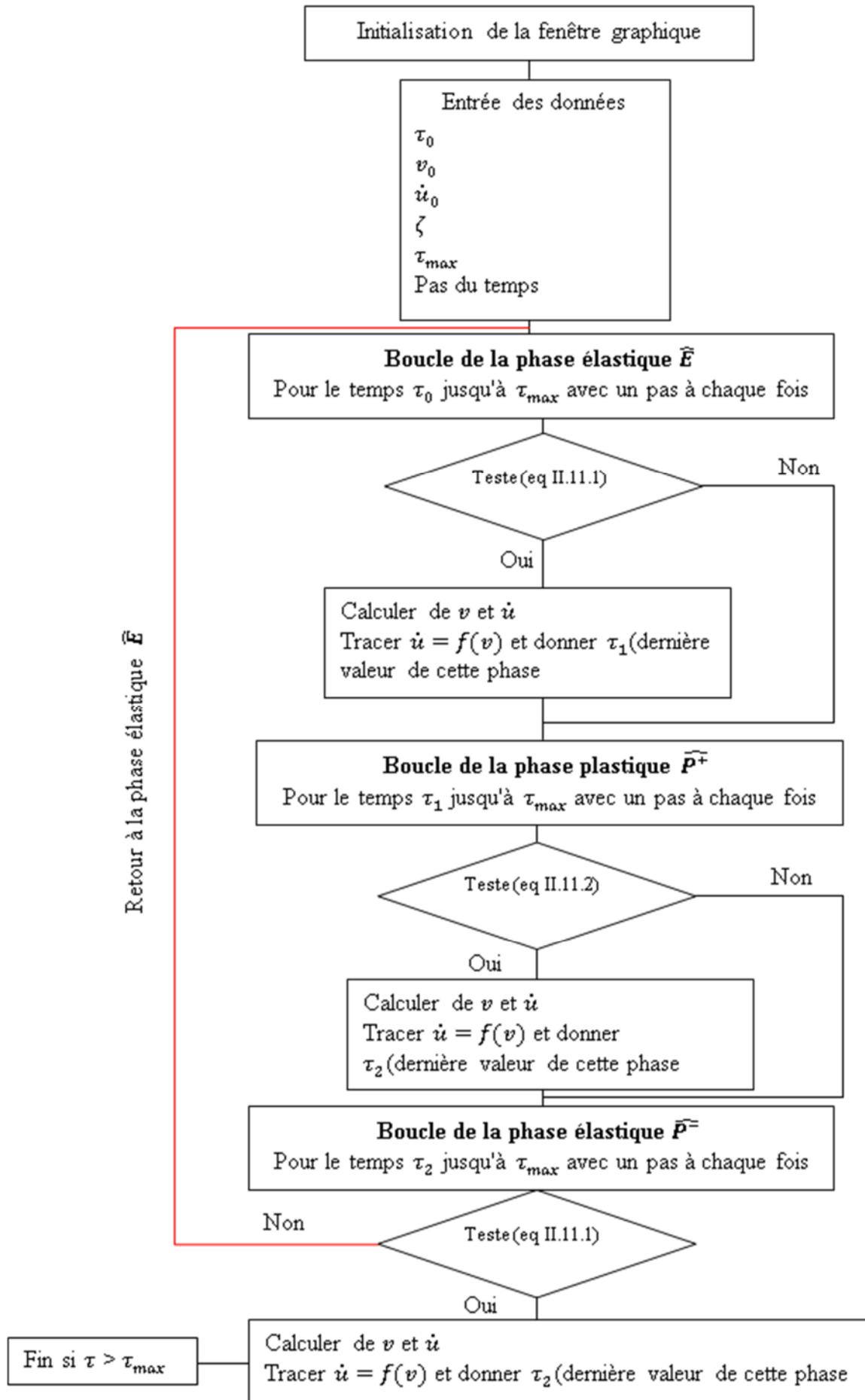
$$\left| \begin{aligned} \hat{P}^+ : (v = 1) \quad \text{et} \quad \dot{u} &\geq 0 \\ \hat{P}^- : (v = -1) \quad \text{et} \quad \dot{u} &\leq 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{II.23})$$

La solution s'écrit donc pour les phases plastiques (en notations réelles) :

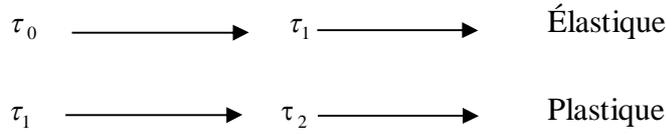
$$\text{état } \hat{P}^+ \left| \begin{array}{l} v = v_1 = +1 \\ \dot{u} = \left( \dot{u}_1 + v_1 \cdot \frac{1}{2\zeta} \right) e^{-2\zeta(\tau - \tau_1)} - v_1 \cdot \frac{1}{2\zeta} \end{array} \right. \quad (\text{II.24})$$

$$\text{état } \hat{P}^- \left| \begin{array}{l} v = v_1 = -1 \\ \dot{u} = \left( \dot{u}_1 + v_1 \cdot \frac{1}{2\zeta} \right) e^{-2\zeta(\tau - \tau_1)} - v_1 \cdot \frac{1}{2\zeta} \end{array} \right. \quad (\text{II.25})$$

Le système dynamique décrit par les équations (II.20, II.24, et II.25), et régi par les équations (II.11) dans le domaine des phases, évolue suivant les simulations numériques et selon l'organigramme suivant :



Pour le système libre (Vibrations libres), les temps de transition entre chaque phase, notés  $\tau_i$ , sont détaillés comme suit :



Pour  $v_1 = \pm 1$ , on voit que  $|\dot{u}(\tau)|$  décroît pendant la phase plastique et s'annule pour :

$$\dot{u}(\tau) = 0 \rightarrow \left( \dot{u}_1 + v_1 \cdot \frac{1}{2\zeta} \right) e^{-2\zeta(\tau - \tau_1)} - v_1 \cdot \frac{1}{2\zeta} \quad (\text{II.26})$$

Alors la frontière de la phase élastique apparaît pour le temps  $\tau_2$  obtenu en résolvant l'équation (II.26) :

$$\dot{u}(\tau_2) = 0 \Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{2\zeta} \ln \left( 1 + 2\zeta \frac{\dot{u}_1}{v_1} \right) + \tau_1 \quad (\text{II.27})$$

A l'instant  $\tau_2$  on sort de l'état plastique pour retourner dans un état élastique dont les équations sont celles obtenues précédemment (II.24 et II.25). On constatera, à partir des simulations numériques ci-dessous, du fait de l'amortissement, que le système restera dans son état élastique jusqu'à sa stabilisation. Les conditions initiales de ce nouvel état élastique sont notées  $(v_2, \dot{u}_2)$  :

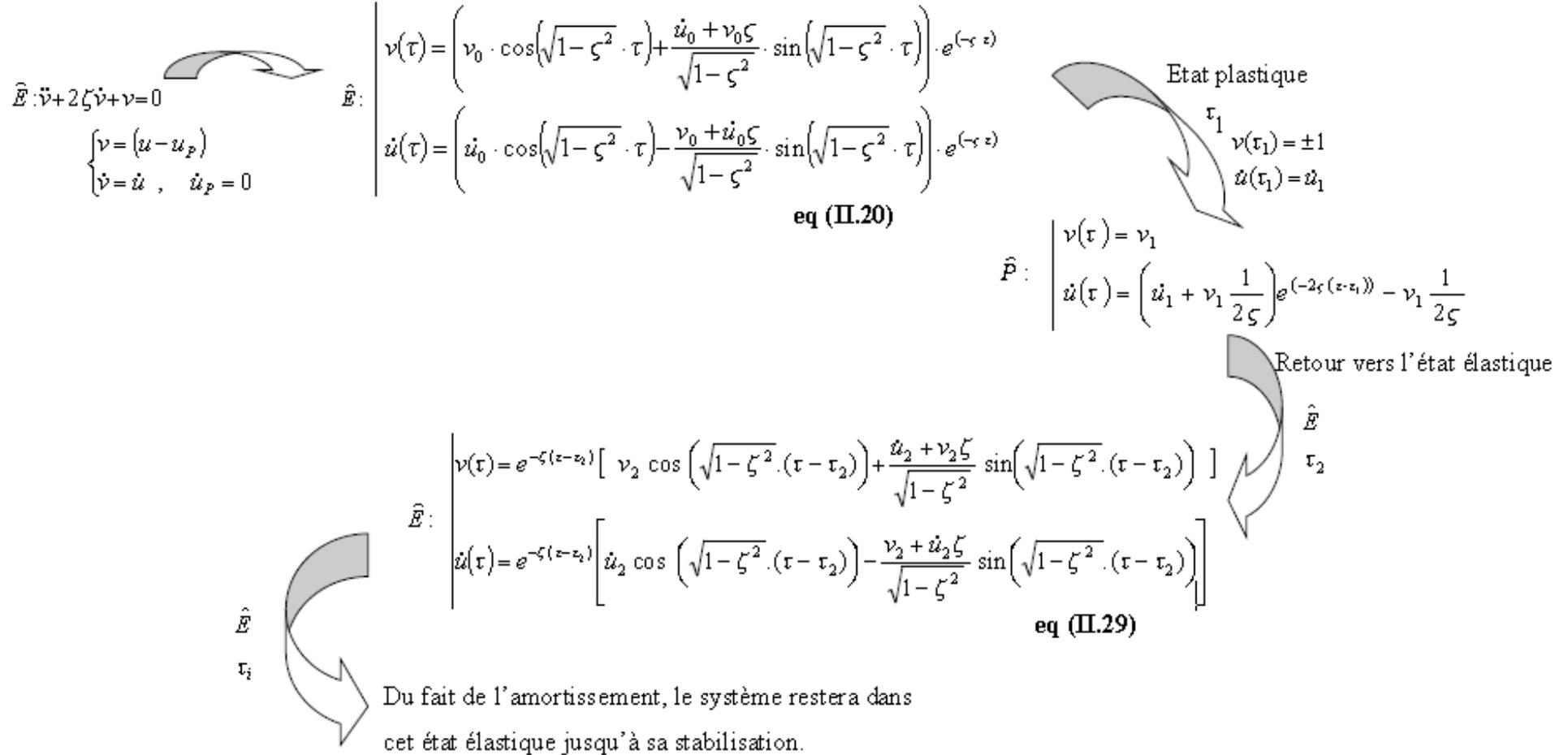
$$\begin{cases} v(\tau_2) = v_2 = v_1 \\ \dot{u}(\tau_2) = \dot{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Ceci conduit aux solutions suivantes dans cette dernière phase élastique :

$$\begin{cases} v(\tau) = e^{-\zeta(\tau - \tau_2)} \left[ v_2 \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot (\tau - \tau_2)) + \frac{\dot{u}_2 + v_2 \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot (\tau - \tau_2)) \right] \\ \dot{u}(\tau) = e^{-\zeta(\tau - \tau_2)} \left[ \dot{u}_2 \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot (\tau - \tau_2)) - \frac{v_2 + \dot{u}_2 \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot (\tau - \tau_2)) \right] \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

L'évolution des différents états dynamique du système en vibrations libres, peut être représentée par l'organigramme de calcul suivant :

II.4.3. Organigramme de l'évolution du système dynamique libre ( $f_0 = 0$ )



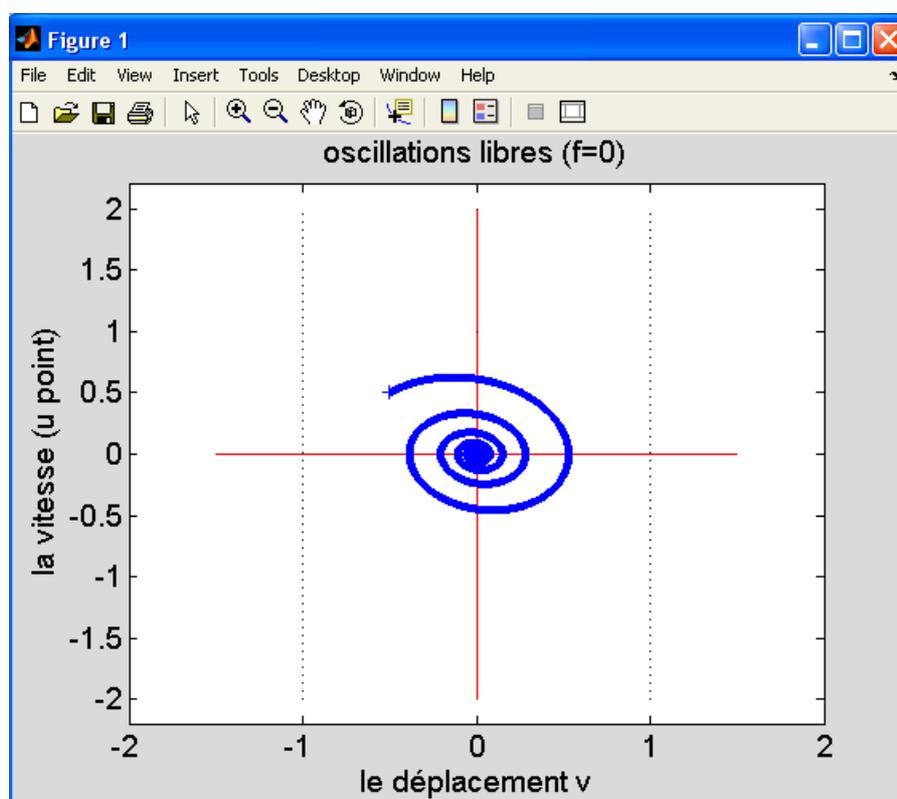
II.4.4. Résultats des oscillations libres : ( $f_0 = 0$ )

Fig. II.3. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)

$$(v, \dot{u}) = (-0.5, 0.5)$$

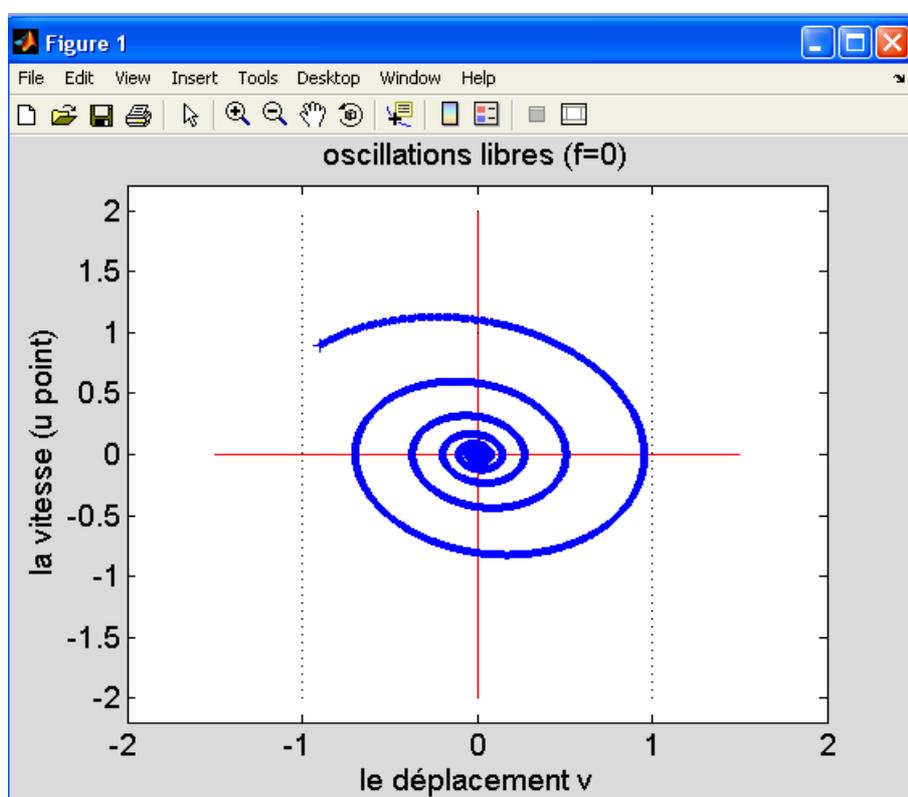


Fig. II.4. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)

$$(v, \dot{u}) = (-0.9, 0.9)$$

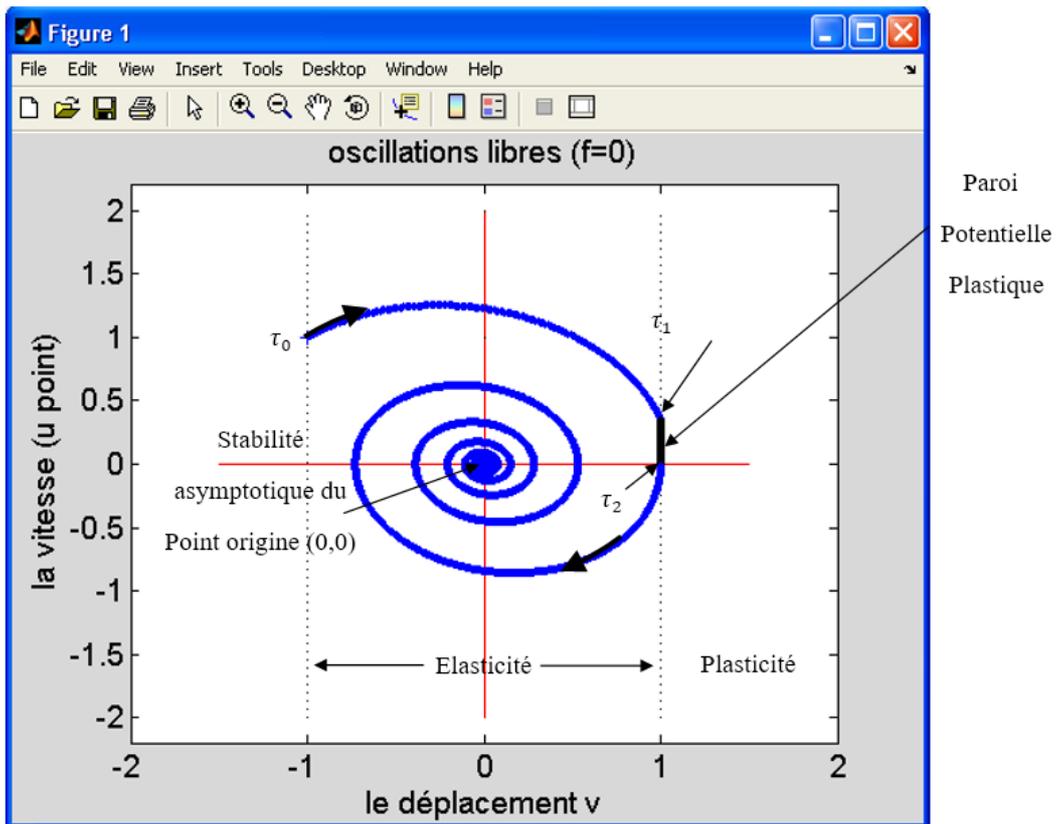


Fig. II.5. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)

$$(v, \dot{u}) = (-1, 1)$$

Nous pouvons résumer les constatations faites sur le cas des vibrations libres comme suit :

Figure (II.3) : La perturbation du cas 1 du système à partir d'une condition initiale :

$(v, \dot{u}) = (-0.5, 0.5)$ , nous donne une convergence élastique asymptotique vers le point origine (Point fixe).

Figure (II.4) : c'est une perturbation du système amorti à partir d'une autre condition initiale :

$(v, \dot{u}) = (-0.9, 0.9)$ , qui nous donne la même convergence vers le point origine, mais on remarque que la réponse tend vers la droite asymptote  $v = +1$ .

Figure (II.5) : c'est une autre perturbation différente :  $(v, \dot{u}) = (-1, 1)$  nous donne une convergence asymptotique à la droite  $v = +1$ .

D'après ces résultats, on constate que du fait de l'amortissement le système restera dans un état élastique final, jusqu'à sa stabilisation. Cela signifie que dans les deux cas (avec ou sans phase plastique intermédiaire), l'origine est asymptotiquement stable pour le système amorti.

Cette simulation montre aussi l'existence d'une paroi potentielle analogique du système élastoplastique (figure II.5).

## II.5. Vibrations Forcées du Système Elastoplastique Parfait

### II.5.1 Résolution de l'état élastique $\hat{E}$

L'oscillateur forcé ( $f_0 \neq 0$ ), par une excitation périodique, peut aussi être étudié de la même manière dans le domaine des phases avec les coordonnées adimensionnelles  $(v, \dot{u}, \tau)$ .

Les solutions des équations (II.10) sont données pour chacun des sous états  $(\hat{E}, \hat{P}^+ \text{ et } \hat{P}^-)$ .

La solution du système élastoplastique forcé se décompose classiquement en une solution particulière et une solution du système homogène sans second membre.

Les solutions particulières des équations (II.10) sont calculées ci-dessous pour chaque état.

Reprenons les équations différentielles qui régissent l'état élastique :

$$\hat{E} : \begin{cases} \ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + v = f_0 \cos \omega\tau \\ \ddot{v} + 2\zeta\dot{v} + v = f_0 \cos \omega\tau \end{cases} ; \dot{v} = \dot{u} \quad (\text{II.30})$$

Les solutions particulières pour l'état  $\hat{E}$  sont données par :

$$\begin{cases} v_p(\tau) = f_0 \cdot \frac{(1 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2} \\ \dot{u}_p(\tau) = \omega f_0 \cdot \frac{2\zeta\omega \cos(\omega\tau) - (1 - \omega^2) \sin(\omega\tau)}{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Ce qui nous donne, finalement en notation réelle pour la solution globale pour l'état élastique  $\hat{E}$  exprimée dans le domaine des phases  $(v, \dot{u})$ :

$$v(\tau) = \left( \begin{array}{l} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau-\tau_i)) * \left( v_i - f_0 \frac{(1-\omega^2)\cos(\omega\tau_i) + 2\omega\zeta\sin(\omega\tau_i)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \right) + \sin(\sqrt{1-\zeta^2})(\tau-\tau_i) \\ * \left( \frac{v_i\zeta + \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} + f_0 \frac{-\zeta(1+\omega^2)\cos(\omega\tau_i) + \omega(1-\omega^2-2\zeta^2)\sin(\omega\tau_i)}{\sqrt{1-\zeta^2}((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2)} \right) \\ + f_0 \frac{(1-\omega^2)\cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta\sin(\omega\tau)}{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} \end{array} \right) e^{-\zeta(\tau-\tau_i)}$$

$$\dot{u}(\tau) = \left( \begin{array}{l} \cos(\sqrt{1-\zeta^2})(\tau-\tau_i) * \left( \dot{u}_i + f_0 \left( \frac{-2\omega^2\zeta\cos(\omega\tau_i) + \omega(1-\omega^2)\sin(\omega\tau_i)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \right) \right) + \sin(\sqrt{1-\zeta^2})(\tau-\tau_i) \\ * \left( \frac{v_i\zeta + \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} + f_0 \frac{\cos(\omega\tau_i)(2\omega^2\zeta^2 + 1 - \omega^2) + \sin(\omega\tau_i)(\omega\zeta(1+\omega^2))}{\sqrt{1-\zeta^2}((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2)} \right) \\ + \omega f_0 \frac{2\omega\zeta\cos(\omega\tau) - (1-\omega^2)\sin(\omega\tau)}{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} \end{array} \right) e^{-\zeta(\tau-\tau_i)}$$

(II.32)

**Remarque :**

- Pour  $f_0 = 0$ , on retombe sur l'équation (II.20) de l'état élastique des oscillations libres.
- Pour  $\zeta = 0$ , on retrouve la solution de Challamel, (Challamel, 2005), pour le système élastoplastique non amorti.

### II.5.2. Résolution des deux états plastiques $\hat{P}^+$ et $\hat{P}^-$

La solution particulière est donnée ci-dessous pour les deux états plastiques  $\hat{P}^+$  et  $\hat{P}^-$  :

- *Etat plastique  $\hat{P}^+$  :*

$$\dot{u}_p = f_0 \frac{2\zeta \cos(\omega\tau_i) + \omega \sin(\omega\tau_i)}{4\zeta^2 + \omega^2} - \frac{1}{2\zeta} \quad (\text{II.33})$$

- *Etat plastique  $\hat{P}^-$  :*

$$\dot{u}_p = f_0 \frac{2\zeta \cos(\omega\tau_i) + \omega \sin(\omega\tau_i)}{4\zeta^2 + \omega^2} + \frac{1}{2\zeta} \quad (\text{II.34})$$

Ce qui donne comme réponse pour l'état plastique en général :

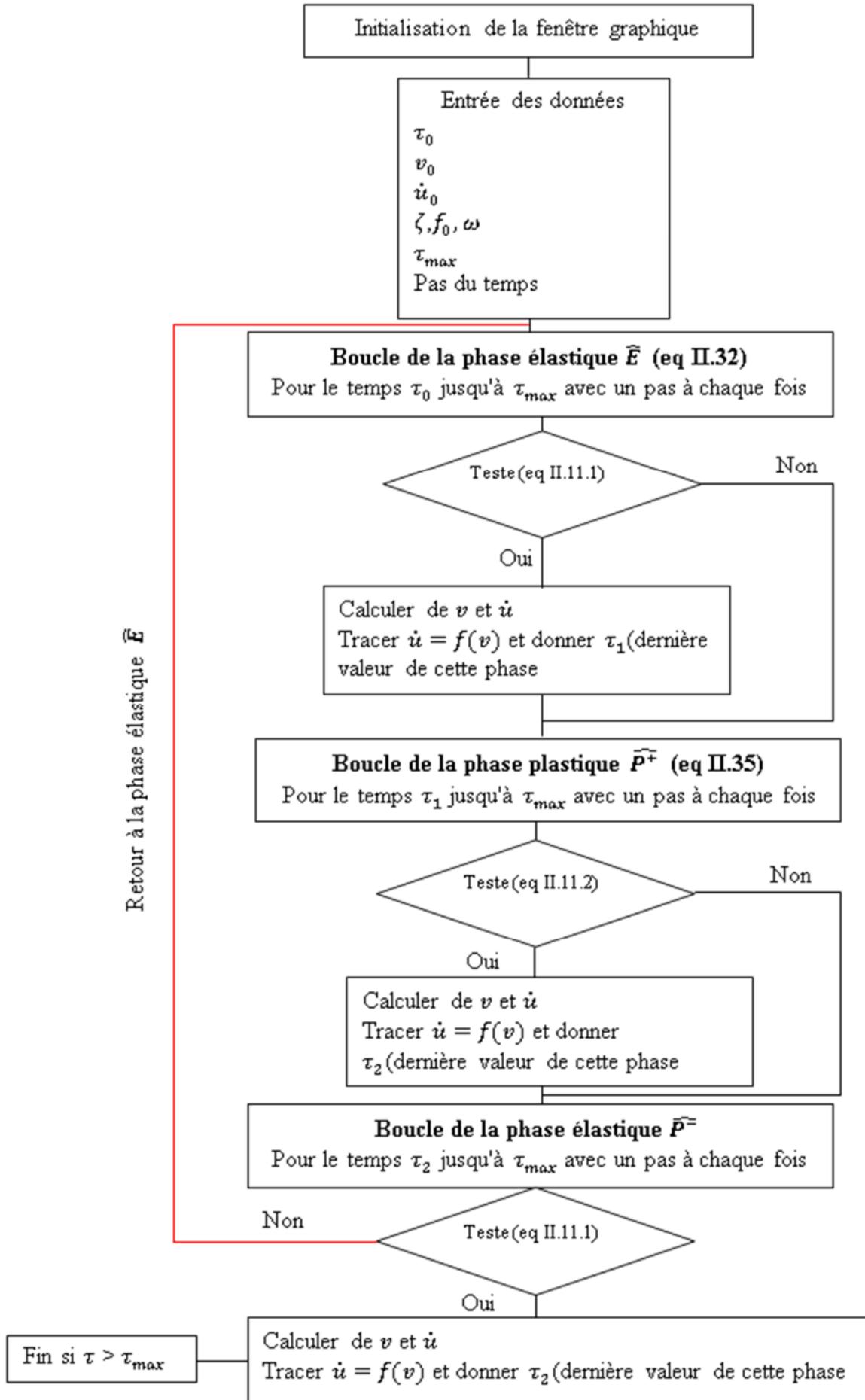
$$\begin{cases} v(\tau) = v_i = \pm 1 \\ \dot{u}(\tau) = \left( \dot{u}_i + \frac{v_i}{2\zeta} - f_0 \frac{2\zeta \cos(\omega\tau_i) + \omega \sin(\omega\tau_i)}{4\zeta^2 + \omega^2} \right) e^{-2\zeta(\tau-\tau_i)} - \frac{v_i}{2\zeta} + f_0 \frac{2\zeta \cos(\omega\tau) + \omega \sin(\omega\tau)}{4\zeta^2 + \omega^2} \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

Avec  $\tau_i$  le temps d'initialisation de la phase plastique.

Lors d'un retour à l'état élastique  $\hat{E}$ , les équations sont les mêmes qu'en (II.32) en prenant pour conditions initiales  $(v_i, \dot{u}_i)$  :

$$\begin{cases} v_i(\tau) = v_1 \\ \dot{u}_i(\tau) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Les simulations numériques menées par des boucles itératives des différents états dynamiques (eq. II.32, II.35), contrôlés par les équations (eq. II.11), sont réalisées selon l'organigramme de calcul suivant :



II.5.3. Organigramme de l'évolution du système dynamique forcé ( $f_0 \neq 0$ )

$\hat{E} :$   
 $\tau_0 = 0$   
 $(v_0, \dot{u}_0)$

$$v(\tau) = \left( \begin{aligned} & \cos(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau-\tau_i)) * \left( v_i - f_0 \frac{(1-\omega^2)\cos(\omega\tau_i) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau_i)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \right) + \sin(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau-\tau_i)) \\ & * \left( \frac{v_i\zeta + \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} + f_0 \frac{-\zeta(1+\omega^2)\cos(\omega\tau_i) + \omega(1-\omega^2 - 2\zeta^2)\sin(\omega\tau_i)}{\sqrt{1-\zeta^2}((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2)} \right) \\ & + f_0 \frac{(1-\omega^2)\cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2} \end{aligned} \right) e^{-\zeta(\tau-\tau_i)}$$

(eq III.32)

$$u(\tau) = \left( \begin{aligned} & \cos(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau-\tau_i)) * \left( u_i + f_0 \left( \frac{-2\omega^2\zeta \cos(\omega\tau_i) + \omega(1-\omega^2)\sin(\omega\tau_i)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \right) \right) + \sin(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau-\tau_i)) \\ & * \left( \frac{v_i\zeta + \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} + f_0 \frac{\cos(\omega\tau_i)(2\omega^2\zeta^2 + 1 - \omega^2) + \sin(\omega\tau_i)(\omega\zeta(1+\omega^2))}{\sqrt{1-\zeta^2}((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2)} \right) \\ & + \omega f_0 \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1-\omega^2)\sin(\omega\tau)}{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} \end{aligned} \right) e^{-\zeta(\tau-\tau_i)}$$

Vers l'état plastique  
 $v(\tau_i) = \pm l$

$\hat{E}$   
 $\hat{P} :$

$$v(\tau) = v_i = \pm 1$$

$$\dot{u}(\tau) = \left( \dot{u}_i + \frac{v_i}{2\zeta} - f_0 \frac{2\zeta \cos(\omega\tau_i) + \omega \sin(\omega\tau_i)}{4\zeta^2 + \omega^2} \right) e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} - \frac{v_i}{2\zeta} + f_0 \frac{2\zeta \cos(\omega\tau) + \omega \sin(\omega\tau)}{4\zeta^2 + \omega^2}$$

(eq II.35)

$\tau_2$   
 $v_i(\tau) = v_i$   
 $\dot{u}_i(\tau) = 0$

#### II.5.4. Résultats des oscillations forcées

Avant de présenter les différents résultats graphiques des simulations numériques dans l'espace des phases réduit, des explications pour retrouver les temps de transition pour chaque zone (chaque état), pour des conditions initiales spécifiées s'imposent, le simulateur détermine les temps de transition  $\tau_{i+1}$ , en utilisant la méthode de Newton-Raphson.

L'équation non linéaire à résoudre est donnée par Eq. (II.32), quand l'état initial est élastique :

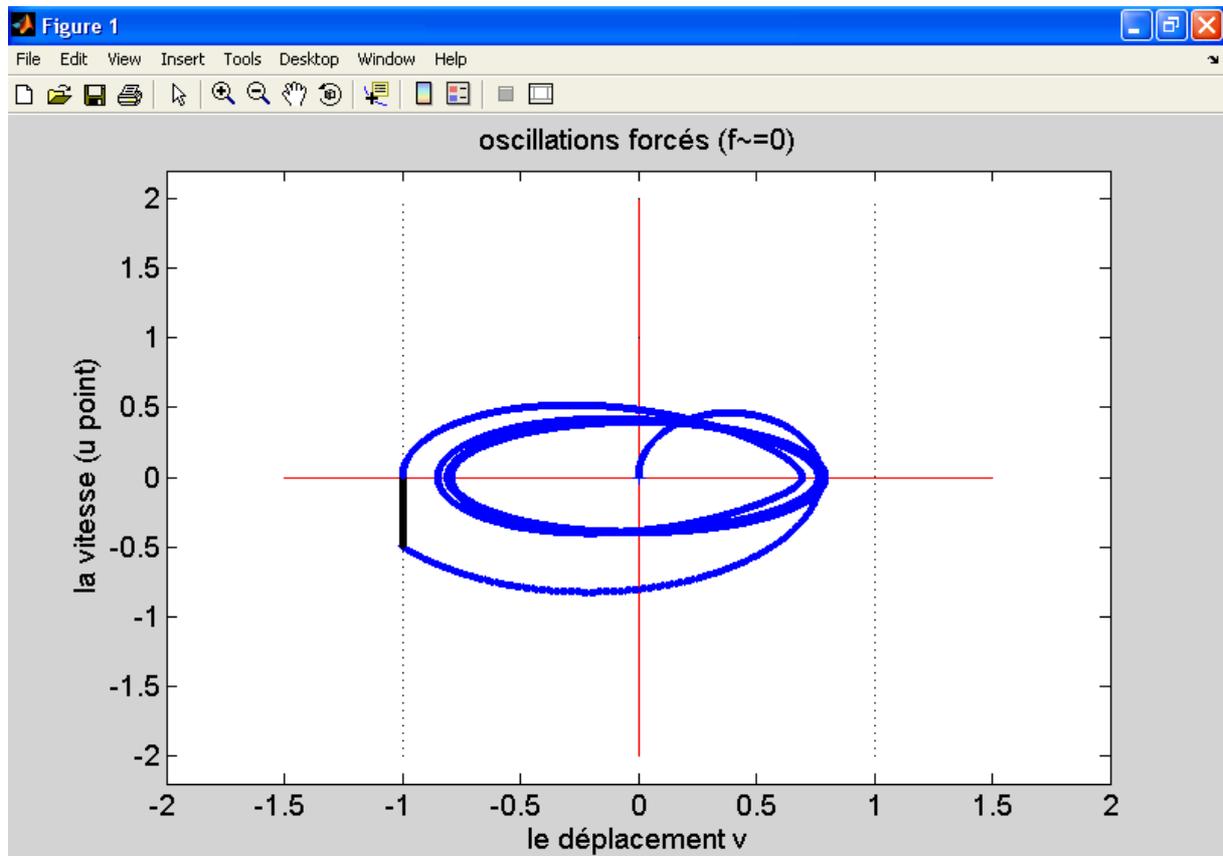
$$|v(\tau_{i+1})|=1 \quad (\text{II.37})$$

Cependant l'équation non linéaire à résoudre est donnée par Eq. (II-35), quand l'état initial est plastique :

$$\dot{u}(\tau_{i+1})=0 \quad (\text{II.38})$$

Le nouveau temps  $\tau_{i+1}$  est utilisé pour l'équation de mouvement dans la nouvelle zone parcourue.

Les différentes simulations suivant différents paramètres dynamiques du système choisis sont représentées dans le domaine des phases dans ce qui suit :



**Fig. II.6. Adaptation élastoplastique (Shakedown)**

$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 0.6$$

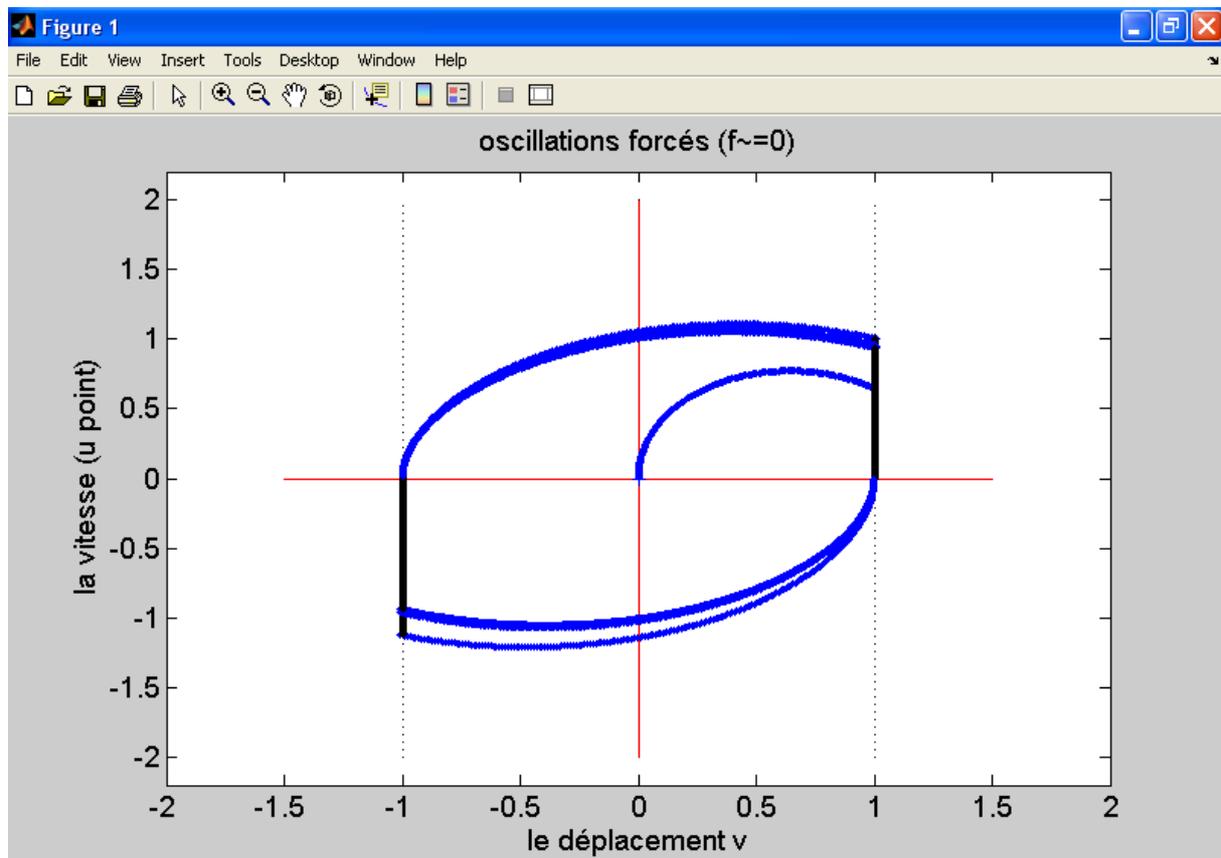


Fig. II.7. Accommodation avec cycle limite périodique (Alternating Plasticity)

$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$$

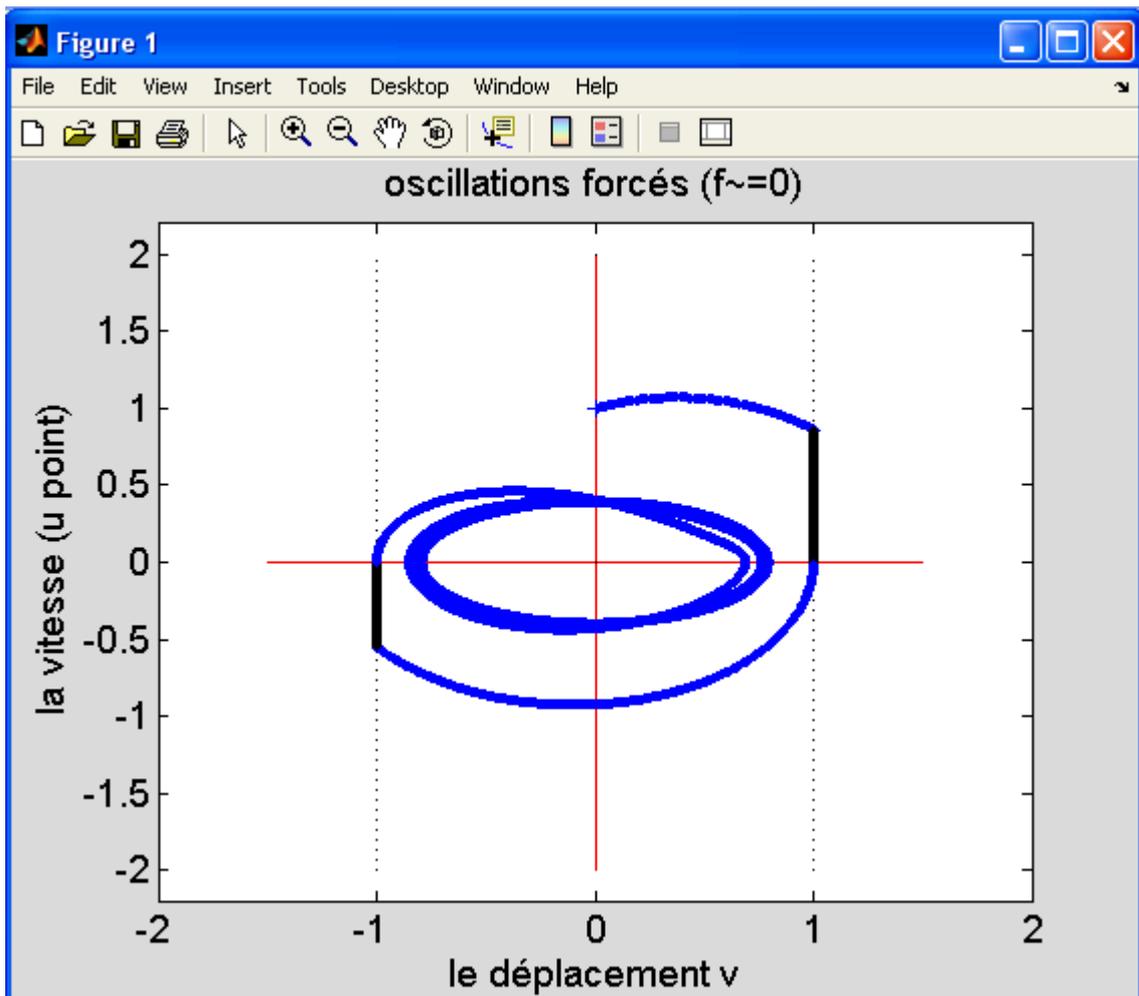


Fig. II.8. Adaptation élastoplastique avec convergence vers un cycle limite :

$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 0.6$$

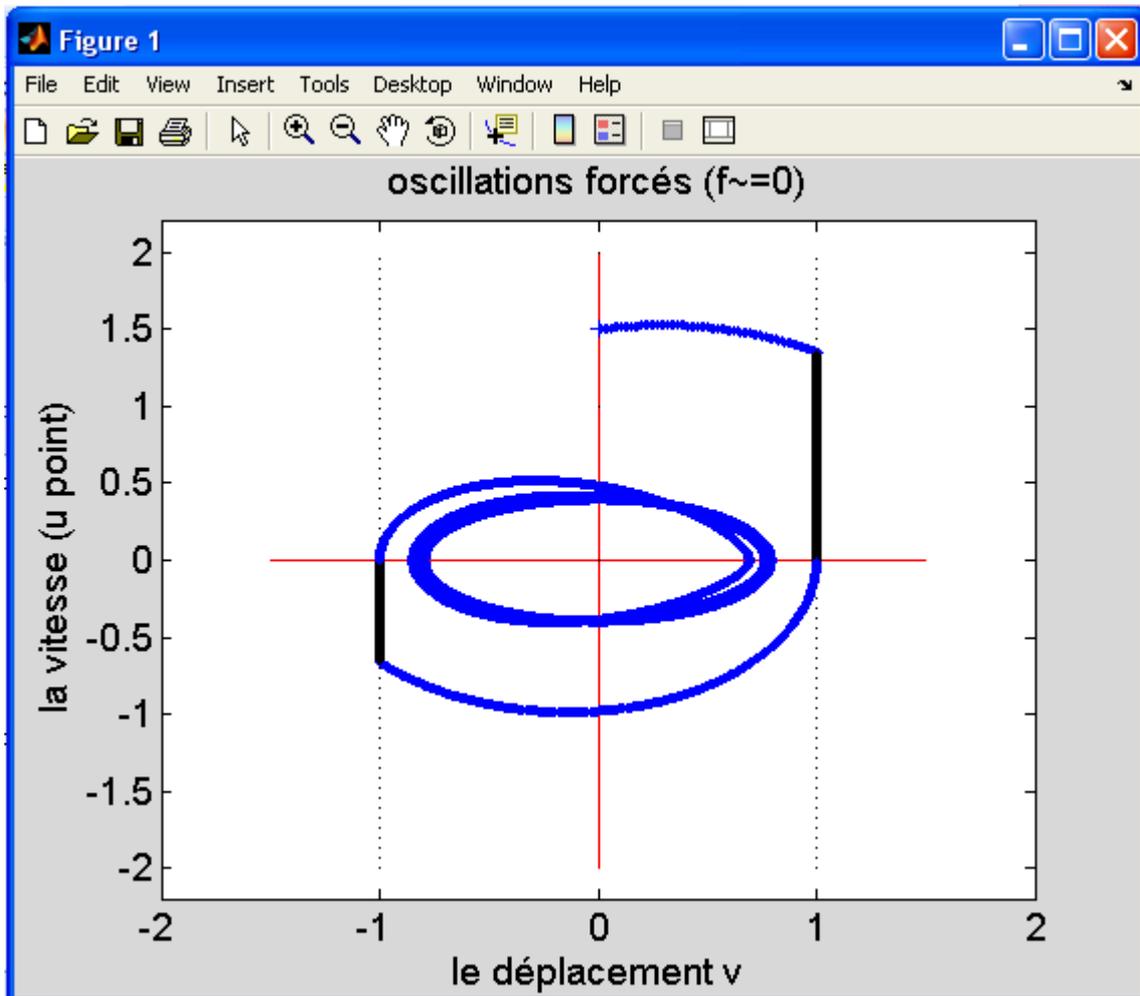


Fig. II.9. Adaptation élastoplastique avec convergence vers un cycle limite

$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1.5); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 0.6$$

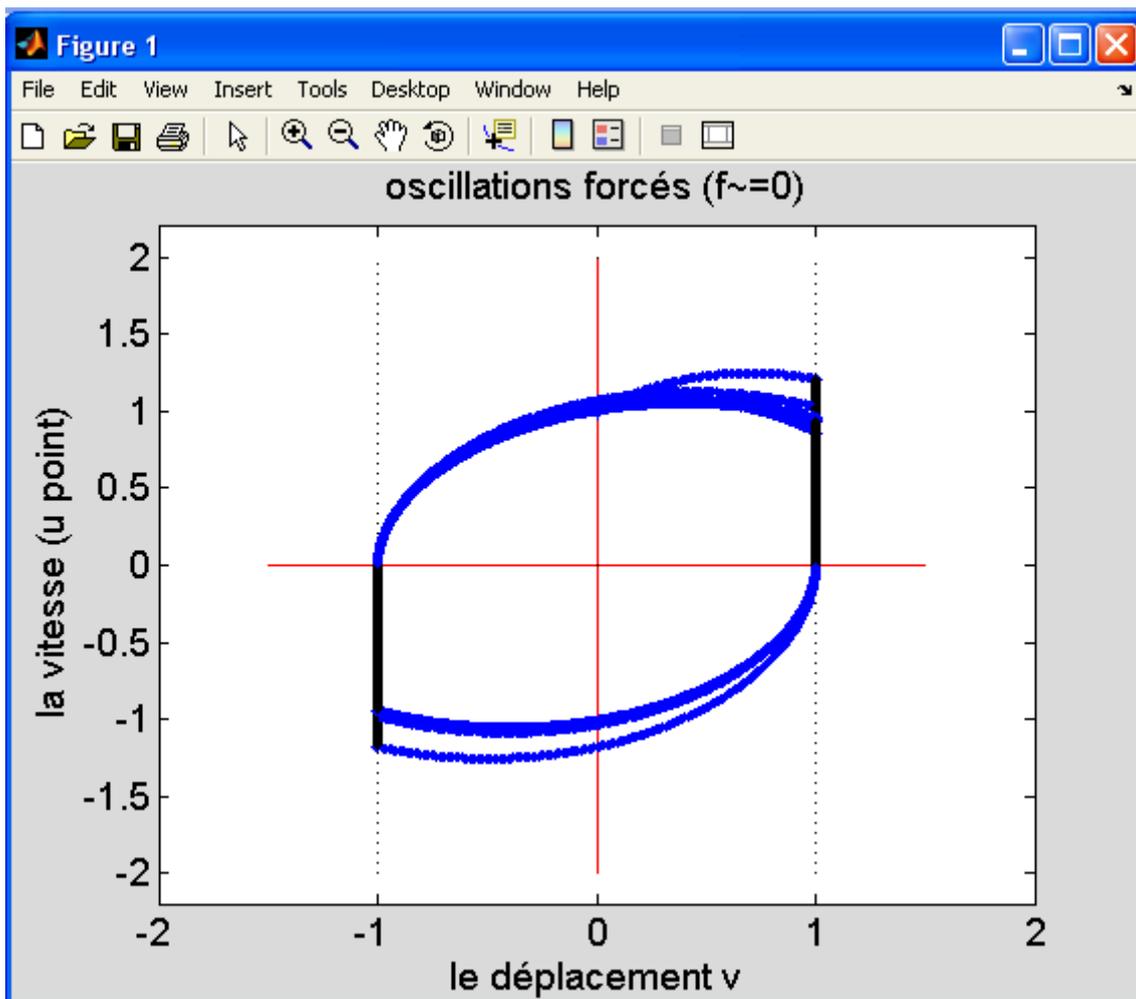


Fig. II.10. Accommodation avec cycle limite périodique (Alternating Plasticity)

$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$$

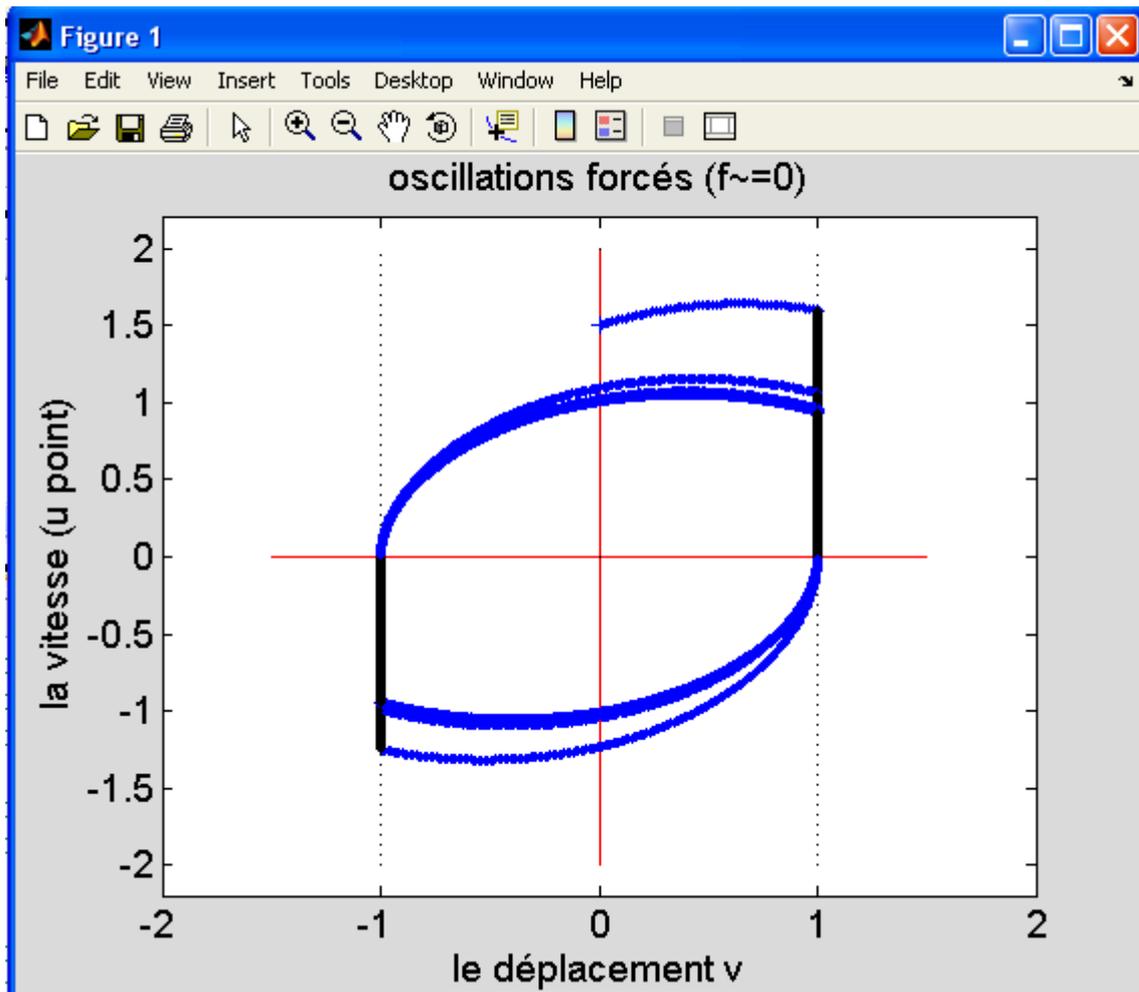


Fig. II.11. Accommodation avec cycle limite périodique (Alternating Plasticity)

$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1.5); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$$

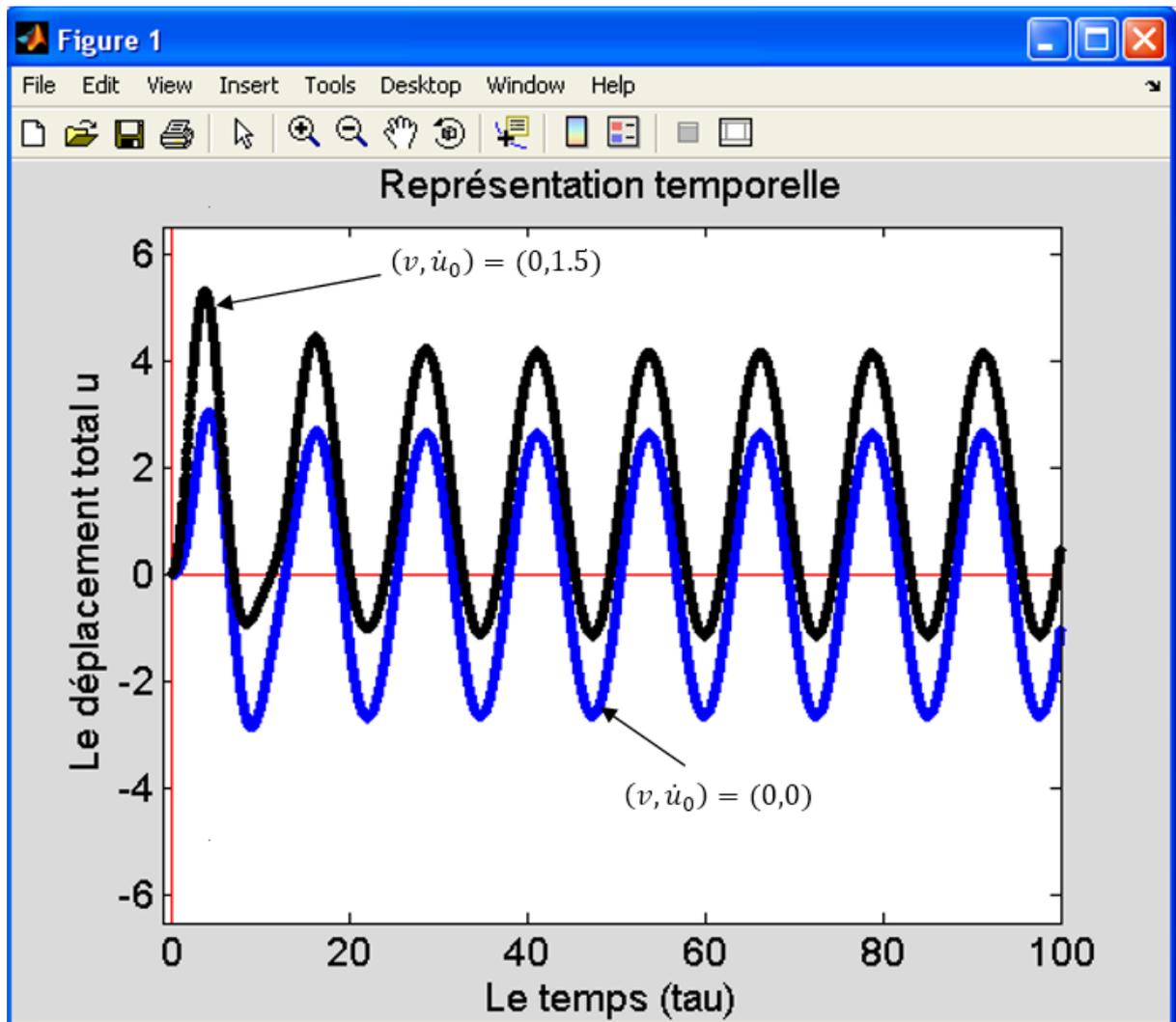


Fig. II.12. Sensibilité du déplacement total  $u$  aux conditions initiales

$$\zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$$

L'analyse numérique est seulement faite pour un taux d'amortissement positif. Toutes les trajectoires tendent vers des orbites périodiques, qui sont représentés par des « cycles limites » dans l'espace des phases  $(v, \dot{u})$ .

Ces « cycles limites » ne dépendent pas des conditions initiales. En réalité, ces orbites périodiques sont complètement caractérisées dans l'espace  $(v, \dot{u}, \tau)$ .

Les simulations numériques montrent que ces orbites périodiques sont asymptotiquement stables pour toutes les perturbations. Tous ces cycles limites sont des cycles à orbites symétriques (symétrie centrale par rapport au point d'origine), caractérisé par (Luo, 2004) pour d'autres systèmes dynamiques.

La forme des cycles limites dépend des valeurs des paramètres structuraux  $(f_0, \omega, \zeta)$ . L'adaptation est décrite par des cycles limites symétriques réguliers, tandis que l'accommodation est représentée par des cycles limites symétriques mais dont la forme est irrégulière. Cela signifie que ces deux phénomènes (liés aux propriétés de comportement de la structure) peuvent être différenciés par leur simple forme géométrique dans l'espace des phases réduit  $(v, \dot{u})$ . Cette dernière conclusion constitue une propriété importante liée à l'oscillateur élastoplastique parfait. Ces deux phénomènes sont illustrés pour l'adaptation élastoplastique (Shakedown) en figure (Fig. II.6) et pour l'accommodation (Alternating Plasticity) en figure (Fig. II.7). Dans les deux cas, les cycles limites sont asymptotiquement stables et les conditions initiales ne portent pas atteinte à la forme des cycles limites (voir figure II.8, II.9, II.10 et II.11). Toutefois, dans les deux cas la valeur moyenne du déplacement total dans l'espace initial  $(u, u_p, \dot{u})$  dépend fortement des conditions initiales (voir Fig. II.12).

En conséquence, on confirme que l'espace des phases initiales  $(u, u_p, \dot{u})$  ne peut être associé à des cycles limites et n'est probablement pas le meilleur choix pour analyser les systèmes plastiques par les outils de la dynamique des systèmes non linéaires.

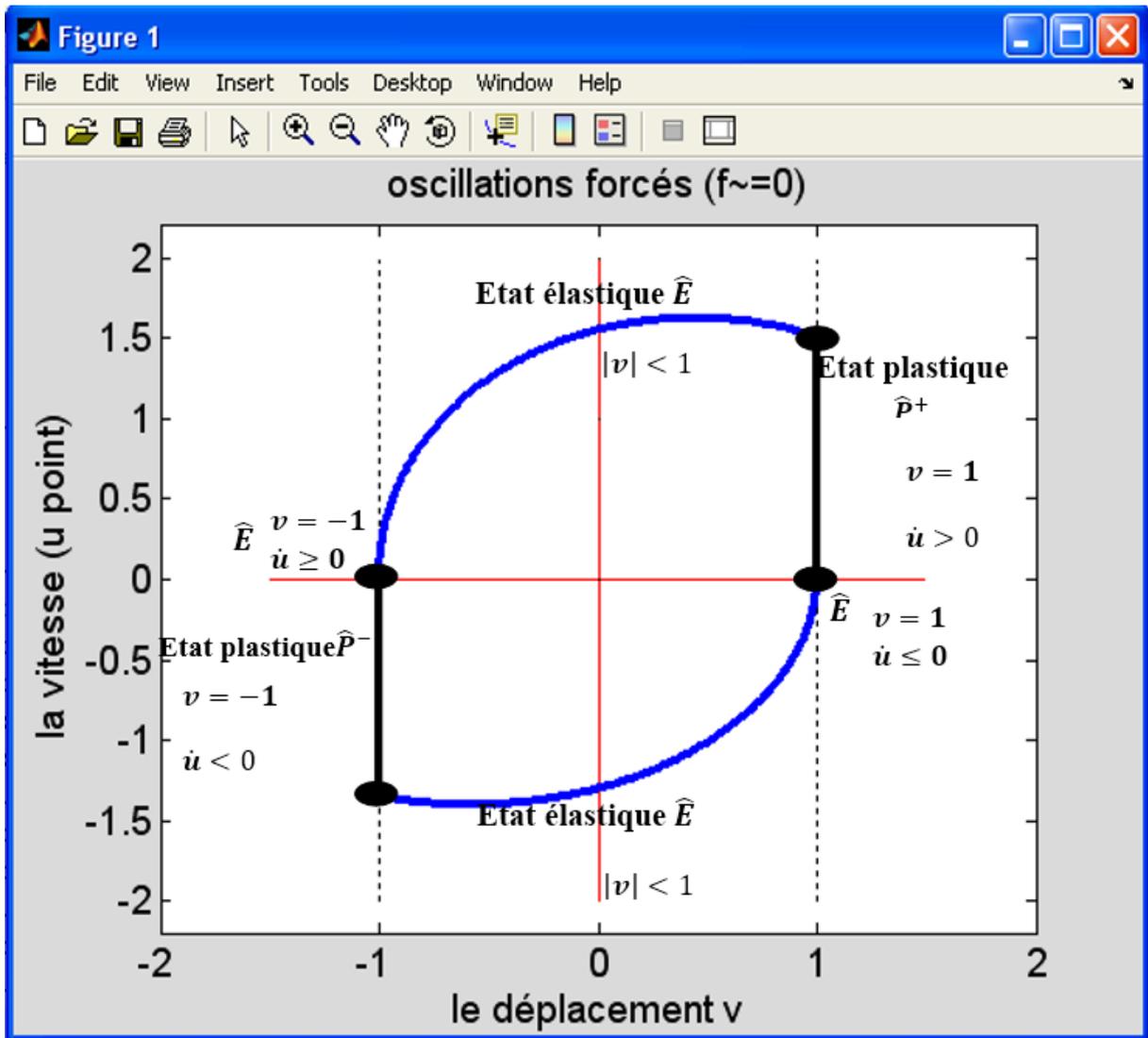


Fig. II.13. Domaine des phases (eq. II.11)

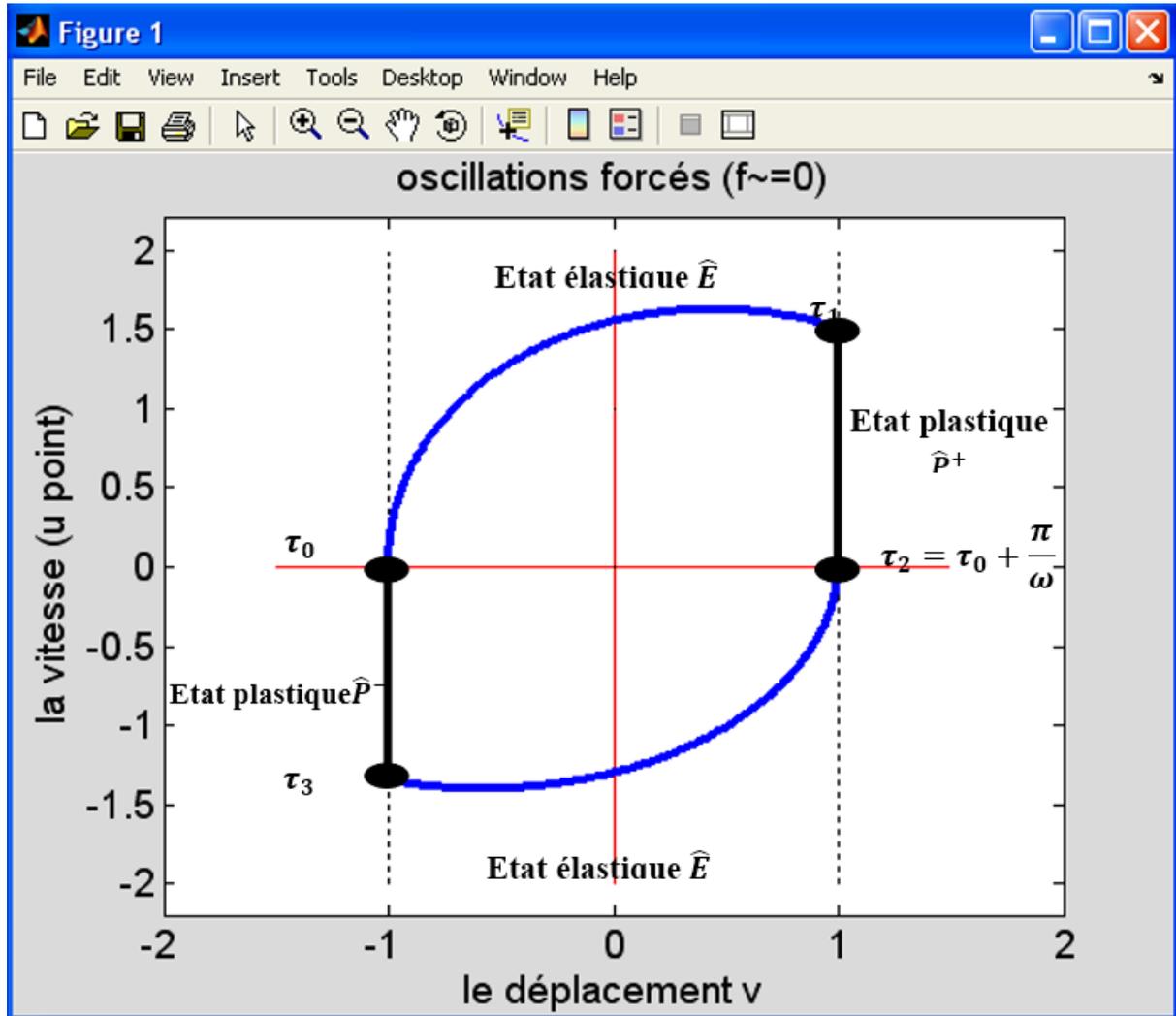


Fig. II.14. Cycle limite dans l'espace des phases (Temps de transitions)

### II.5.5. Caractérisation du cycle limite

Les orbites périodiques peuvent être classées, dans le même esprit que (Awrejcewicz & Lamarque, 2003), le font pour les systèmes mécaniques avec impacts. Une orbite est appelée  $(n, k)$  périodiques, si elle possède une période  $nT$  avec  $k$  phases plastiques par cycle de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Au regard de cette classification, la plupart des simulations montrent des orbites stables  $(1,2)$ -périodiques. Néanmoins, des orbites  $(1,n)$ -périodiques (avec  $n$  plus grand que 2) ont aussi été détectées pour des faibles valeurs de pulsation  $\omega$ . Par exemple, une orbite  $(1,2)$ -périodique est montrée en Figure (Fig. II.14) pour l'illustration des temps de transition dans le domaine des phases (Fig. II.13). La méthodologie est basée sur le fait que la durée dans chaque phase (une phase élastique et une phase plastique) est exactement égale à la moitié de la période d'un cycle :

$$\tau_2 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \quad (\text{II.39})$$

Dont :

- $\tau_0$  est le temps au début de la phase élastique qui suit la phase plastique  $P^-$ .
- $\tau_1$  est le temps à la fin de la phase élastique et  $\tau_2$  est le temps à la fin de la phase plastique  $P^+$  (Voir Fig. II.14).

La caractérisation semi-analytique du cycle limite nécessite généralement la résolution analytique d'un système d'équations à trois fonctions (eq. II.40), qui sont définie par les équations (eq. II.32, II.35) :

$$\begin{cases} \text{Etat } \hat{E}: & v(\tau_0, \tau_1) = 1 \quad ; \quad \dot{u}(\tau_0, \tau_1) = \dot{u}_1 \\ \text{Etat } \hat{P}^+: & \dot{u}(\tau_1, \tau_2, \dot{u}_1) = \dot{u}_2 = 0 \quad ; \quad \tau_2 - \tau_0 = \frac{\pi}{\omega} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Un système d'équations qui peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned} & \left( \cos(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau_1 - \tau_0)) * \left( -1 - f_0 \frac{(1-\omega^2) \cos(\omega\tau_0) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau_0)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \right) + \sin(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau_1 - \tau_0)) \right) \\ & \left( \frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + f_0 \frac{-\zeta(1+\omega^2) \cos(\omega\tau_0) + \omega(1-\omega^2 - 2\zeta^2) \sin(\omega\tau_0)}{\sqrt{1-\zeta^2}((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2)} \right) \\ & \times e^{-\zeta(\tau_1 - \tau_0)} + f_0 \frac{(1-\omega^2) \cos(\omega\tau_1) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau_1)}{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} = 1, \\ & \left( \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1) + \frac{1}{2\zeta} - f_0 \frac{2\zeta \cos(\omega\tau_1) + \omega \sin(\omega\tau_1)}{4\zeta^2 + \omega^2} \right) e^{-2\zeta(\tau_0 + (\pi/\omega) - \tau_1)} - \frac{1}{2\zeta} \\ & - f_0 \frac{2\zeta \cos(\omega\tau_0) + \omega \sin(\omega\tau_0)}{4\zeta^2 + \omega^2} = 0 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 = & \left( \cos(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau_1 - \tau_0)) f_0 \left( \frac{-2\omega^2\zeta \cos(\omega\tau_0) + \omega(1-\omega^2) \sin(\omega\tau_0)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \right) + \sin(\sqrt{1-\zeta^2}(\tau_1 - \tau_0)) \right) \\ & \left( \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} + f_0 \frac{\cos(\omega\tau_0)(2\omega^2\zeta^2 + 1 - \omega^2) + \sin(\omega\tau_0)(\omega\zeta(1 + \omega^2))}{\sqrt{1-\zeta^2}((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2)} \right) \\ & \times e^{-\zeta(\tau_1 - \tau_0)} + \omega f_0 \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_1) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau_1)}{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}. \end{aligned} \tag{II.41}$$

Ce système complexe (eq. II.41) peut prendre la forme (Challamel & Gilles, 2007) ; (Liu, 2003) :

$$\begin{aligned} \hat{A} \cos(\omega\tau_0) + \hat{B} \sin(\omega\tau_0) &= \hat{C} \\ \hat{D} \cos(\omega\tau_0) + \hat{E} \sin(\omega\tau_0) &= \hat{F} \end{aligned} \tag{II.42}$$

Comme l'a baptisé (Liu & Huang, 2004), les équations du système réduit (eq. II.42) peuvent être fusionnées en une seule équation non linéaire :

$$\left(\hat{C}\hat{D} - \hat{A}\hat{F}\right)^2 + \left(\hat{C}\hat{E} - \hat{B}\hat{F}\right)^2 = \left(\hat{A}\hat{E} - \hat{B}\hat{D}\right)^2 \quad (\text{II.43})$$

$\tau_0$  est obtenu à partir de la résolution des équations trigonométriques :

$$\begin{aligned} \cos(\omega\tau_0) &= \frac{\hat{C}\hat{E} - \hat{B}\hat{F}}{\hat{A}\hat{E} - \hat{B}\hat{D}}, \\ \sin(\omega\tau_0) &= \frac{-\hat{C}\hat{D} + \hat{A}\hat{F}}{\hat{A}\hat{E} - \hat{B}\hat{D}} \quad \text{Avec :} \quad \hat{A}\hat{E} - \hat{B}\hat{D} \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Les coefficients  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$ ,  $\hat{E}$  et  $\hat{F}$  dépendent fortement des paramètres dynamiques structuraux du système ( $f_0$ ,  $\omega$ ,  $\zeta$ ), ainsi que le paramètre temporel adopté ( $\bar{y} = \tau_1 - \tau_0$ ) :

$$\hat{A} = \frac{f_0}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \left[ \begin{aligned} &-(1 - \omega^2)e^{-\zeta\bar{y}} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}(1 + \omega^2)e^{-\zeta\bar{y}} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) \\ &+ (1 - \omega^2) \cos(\omega\bar{y}) + 2\omega\zeta \sin(\omega\bar{y}) \end{aligned} \right] \quad (\text{II.45})$$

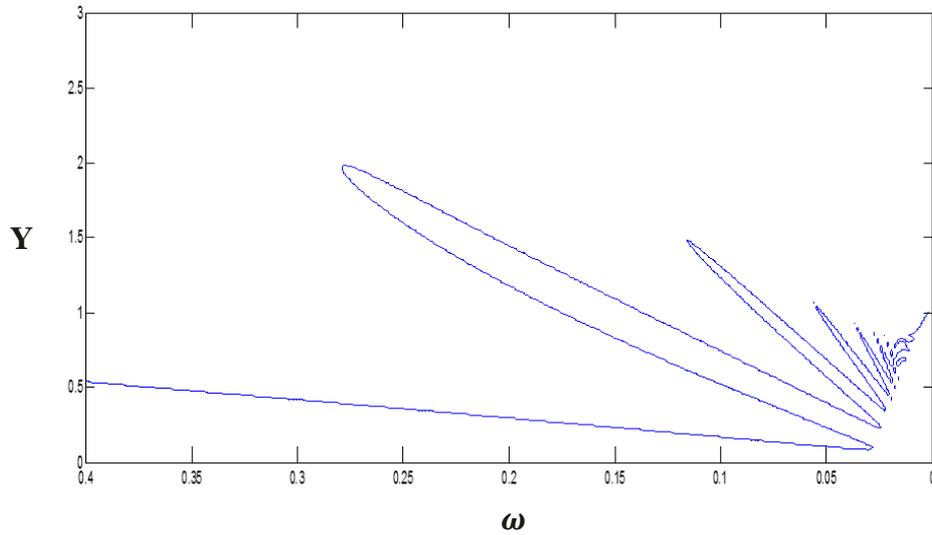
$$\hat{B} = \frac{f_0}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \left[ \begin{aligned} &-2\omega\zeta e^{-\zeta\bar{y}} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) + \frac{\omega(1 - \omega^2 - 2\zeta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\bar{y}} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) \\ &-(1 - \omega^2) \sin(\omega\bar{y}) + 2\omega\zeta \cos(\omega\bar{y}) \end{aligned} \right] \quad (\text{II.46})$$

$$\hat{C} = 1 + e^{-\zeta\bar{y}} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\bar{y}} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) \quad (\text{II.47})$$

$$\begin{aligned} \hat{D} &= -\frac{f_0}{4\zeta^2 + \omega^2} \left[ 2\zeta + (2\zeta \cos(\omega\bar{y}) + \omega \sin(\omega\bar{y}))e^{-2\zeta((\pi/\omega) - \bar{y})} \right] + \frac{f_0}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ &\left[ \begin{aligned} &-2\omega^2\zeta e^{-\zeta((2\pi/\omega) - \bar{y})} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) + \frac{2\omega^2\zeta^2 + 1 - \omega^2}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta((2\pi/\omega) - \bar{y})} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) \\ &+ 2\omega^2\zeta e^{-2\zeta((\pi/\omega) - \bar{y})} \cos(\omega\bar{y}) - \omega(1 - \omega^2) e^{-2\zeta((\pi/\omega) - \bar{y})} \sin(\omega\bar{y}) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

$$\begin{aligned} \hat{E} &= -\frac{f_0}{4\zeta^2 + \omega^2} \left[ \omega + (\omega \cos(\omega\bar{y}) - 2\zeta \sin(\omega\bar{y}))e^{-2\zeta((\pi/\omega) - \bar{y})} \right] + \frac{f_0}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ &\left[ \begin{aligned} &\omega(1 - \omega^2)e^{-\zeta((2\pi/\omega) - \bar{y})} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) + \frac{\omega\zeta(1 + \omega^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta((2\pi/\omega) - \bar{y})} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right) \\ &- 2\omega^2\zeta e^{-2\zeta((\pi/\omega) - \bar{y})} \sin(\omega\bar{y}) - \omega(1 - \omega^2) e^{-2\zeta((\pi/\omega) - \bar{y})} \cos(\omega\bar{y}) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

$$\hat{F} = \frac{1}{2\zeta} \left( 1 - e^{-2\zeta((\pi/\omega) - \bar{y})} \right) - e^{-\zeta((2\pi/\omega) - \bar{y})} \frac{\sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2\bar{y}}\right)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{II.50})$$



**Fig. II.15. Solutions de  $(Y = \omega\bar{y})$  en fonction de  $\omega$  (eq. II.43)**

$$(f_0 = 2 ; \zeta = 0.02)$$

La résolution implicite de l'équation (eq. II.43), est illustrée en (Fig. II.15), pour un jeu de paramètres choisi, afin de la comparer avec celle de (Liu & Huang, 2004). Nous pouvons facilement constater que toute solution temporelle de l'équation (eq. II.43) n'est pas nécessairement solution de notre système dynamique, en effet d'autres conditions suivent :

$$\begin{cases} \text{Etat } \hat{E}: \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1] , |v(\tau)| \leq 1 \\ \text{Etat } \hat{P}^+: \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2], \dot{u}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

### II.5.6. Frontière de Bifurcation entre l'Adaptation et l'Accommodation

Concernant la frontière entre l'adaptation et l'accommodation, on peut considérer une phase élastique et le cycle limite est tangent aux droites  $|v| = \pm 1$ .

Ce qui nous permet de trouver l'équation de frontière du cycle limite dans le domaine de l'adaptation, qui est obtenu à partir de l'équation (eq. II.32) en ne considérant que le terme stationnaire :

$$\begin{cases} v(\tau) = f_0 \frac{(1 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)}{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2} \\ \dot{u}(\tau) = \omega f_0 \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1 - \omega^2) \sin(\omega\tau)}{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2} \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

On remarque que  $v$  et  $\dot{u}$ , ne dépendent pas explicitement des conditions initiales (si  $\zeta \neq 0$ , les cycles limites ne dépendent pas des conditions initiales  $v_0$  et  $\dot{u}_0$ ). Ceci confirme nos simulations numériques que ce soit en adaptation élastoplastique (Fig. II.6) ou en accommodation (Fig. II.7).

En effectuant les opérations suivantes sur l'équation (II.51) :

$$\left[ v^2 \times \frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2}{f_0^2} \right] + \left[ \dot{u}^2 \times \frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2}{\omega f_0^2} \right] \quad (\text{II.52})$$

Après simplifications :

$$\begin{aligned} & \left[ f_0^2 \frac{(1 - \omega^2)^2 \cos^2(\omega\tau) + (2\omega\zeta)^2 \sin^2(\omega\tau) + 2(1 - \omega^2) \cos(\omega\tau) \times 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)}{[(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2]^2} \times \frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2}{f_0^2} \right] + \\ & \left[ \omega^2 f_0^2 \frac{4\omega^2 \zeta^2 \cos^2(\omega\tau) + (1 - \omega^2)^2 \sin^2(\omega\tau) - 2(2\omega\zeta) \cos(\omega\tau) \times (1 - \omega^2) \sin(\omega\tau)}{[(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2]^2} \times \frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2}{\omega f_0^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

En déduisant  $\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau) = 1$  :

$$\left[ \frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2 + 2(1 - \omega^2) \times 2\omega\zeta [\cos(\omega\tau) \times \sin(\omega\tau) - \cos(\omega\tau) \times \sin(\omega\tau)]}{[(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2]^2} \times ((1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2) \right] \quad (\text{II.54})$$

Donc :

$$\left[ v^2 \times \frac{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}{f_0^2} \right] + \left[ \dot{u}^2 \times \frac{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}{\omega f_0^2} \right] = 1 \quad (\text{II.55})$$

L'équation (eq. II.55) a la forme d'une équation d'ellipse centrée tel que :

$$\frac{v^2}{a^2} + \frac{\dot{u}^2}{b^2} = 1 \quad \text{Avec } a = \frac{f_0}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2}} \quad \text{et } b = a\omega \quad (\text{II.56})$$

L'équation du cycle limite, à la frontière entre l'adaptation et l'accommodation est obtenue lorsque le paramètre ( $a$ ) de l'ellipse (eq II.56) est égal à 1, voir (Liu & Huang, 2004) ; (Challamel & Gilles, 2007):

$$f_0 = \sqrt{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \quad (\text{II.57})$$

Cette équation du cycle limite  $f_0 = f(\omega, \zeta)$  sera représentée en figure (Fig. II.16), qui représente la frontière de bifurcation entre l'adaptation et l'accommodation.

La limite de l'équation (eq. II.57) est représentée graphiquement par la figure (Fig. II.16), cette frontière est validée par celle de (Liu & Huang, 2004 ; Challamel, 2007 et Hammouda, 2009).

Cette frontière entre l'adaptation et l'accommodation a été également étudiée par (Liu & Huang, 2004), mais avec l'utilisation de l'inverse de la force ( $f_0$ ), et qui représente le même résultat auquel on aboutit.

En réalité, la frontière représentée en figure (Fig. II.16) contrôlée par l'équation (eq. II.57) est une surface en trois dimensions en fonction de ( $\zeta, \omega, f_0$ ), voir (Fig. II.17).

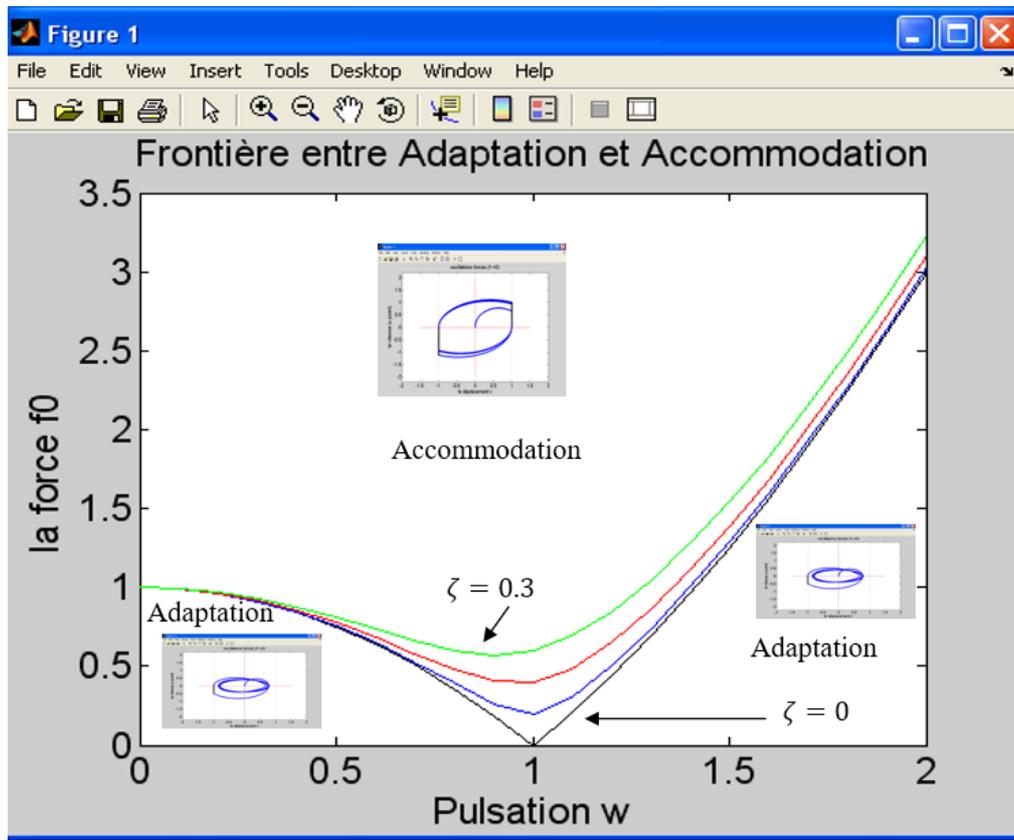


Fig. II.16. Frontière de Bifurcation entre adaptation et accommodation (en 2D)

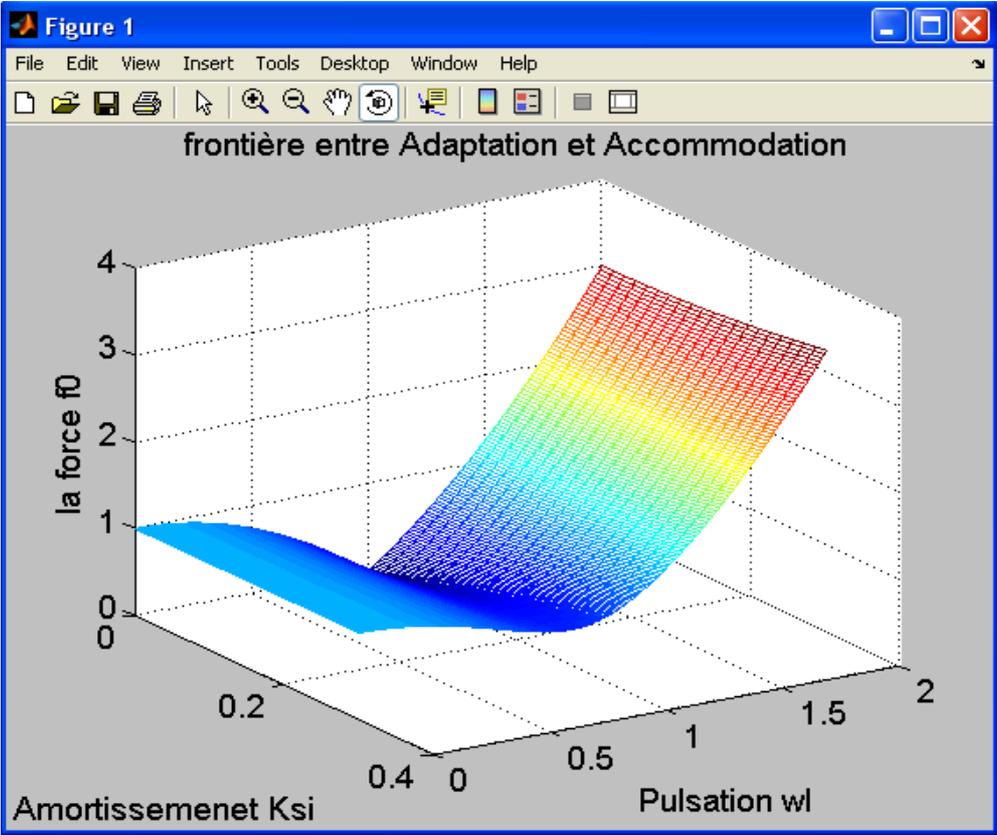


Fig. II.17. Frontière de Bifurcation entre adaptation et accommodation (en 3D)

## II.6. Bilan énergétique de l'oscillateur élastoplastique parfait

Dans le nouvel espace des phases réduit, on peut facilement déduire, selon les travaux de Capecchi (Capecchi & Vestroni, 1990), que le déplacement  $v$  n'est rien d'autre que la force associée au système dynamique adimensionnel (Challamel & Gilles, 2007), (Hammouda, et al., 2008), (Hammouda & Challamel, 2011). La représentation de la relation de la loi de comportement peut être exprimée par le déplacement élastique en fonction du déplacement total, ce qui est équivalent à celui de la relation force – déplacement illustrée en (Fig. II.2).

Pour cette oscillation élastoplastique, la relation Force- Déplacement choisie est bornée à ( $|v|=1$ ), comme montrée à partir d'un cas d'hystérésis de la relation  $(v, u)$ , que l'on peut appeler « loi de comportement adoptée » (Fig. II.18). Des résultats équivalents sont donnés par Ahn (Ahn et al., 2006) ; (Ahn et al., 2009).

Nous pouvons, d'après la modification de la loi de comportement (Fig. II.18), aborder l'aspect énergétique de cet oscillateur élastoplastique parfait amorti et symétrique, en se basant sur l'hypothèse déterminant que l'énergie dissipée par les oscillateurs est en fait, l'aire de la boucle d'hystérésis provenant du cycle limite de la loi de comportement  $(v, u)$ , voir (Hammouda et al., 2008), (Balandier, 2001).

La partie qui traite le bilan énergétique de l'oscillateur élastoplastique parfait est extraite de l'article scientifique (Chenia et al., 2018), faisant suite à l'étude de la dynamique de l'oscillateur élastoplastique parfait. Ce travail a été accepté et publié par la revue des « Sciences et de la technologie Synthèse » éditée par la Direction des Publications de l'Université Badji Mokhtar de Annaba (Algérie) depuis 1996.

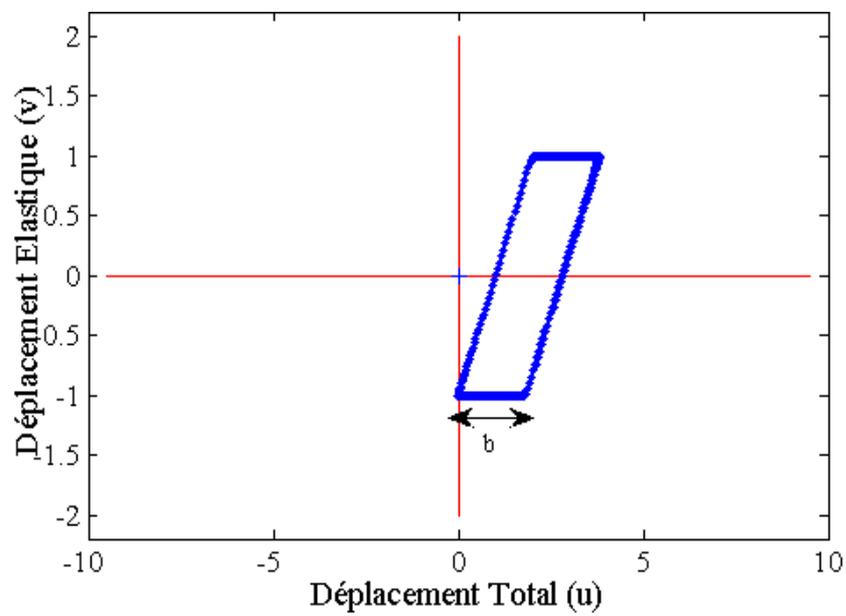


Fig. II.18. Loi de comportement Adoptée (Boucle d'hystérésis), pour :

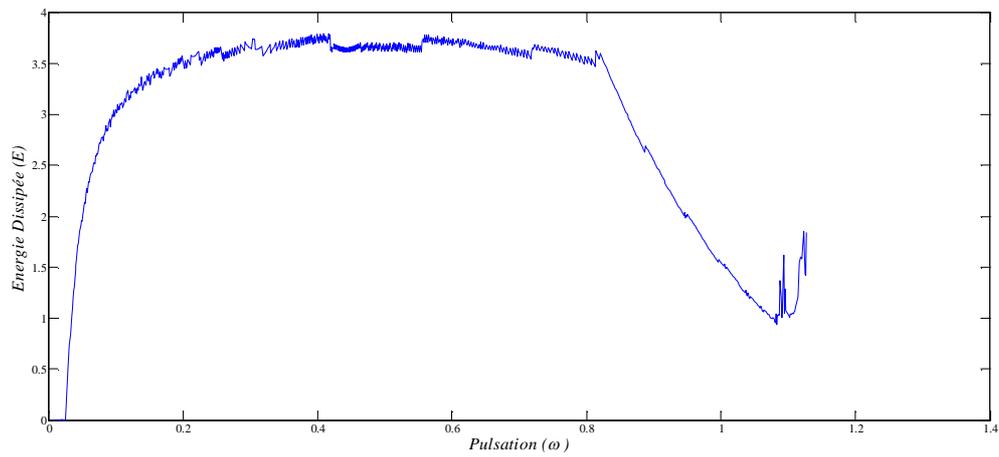
$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$$

(Chenia et al., 2018)

En ce qui concerne l'énergie dissipée au cours d'oscillations, pour un jeu de paramètres structuraux adéquat (qui représente la zone comportementale de l'accommodation dans la figure (Fig. II.16), où il y a une alternance entre les phases plastiques et celle élastique), le calcul de cette énergie dissipée peut être approximativement égal au double d'une des deux côtés du parallélogramme de boucle d'hystérésis (Fig. II.18), et dont le développement est démontré par les travaux de Hammouda (Hammouda et al., 2008) et Challamel (Challamel et al., 2007) :

$$\bar{E} = 2 * b \quad (\text{II.58})$$

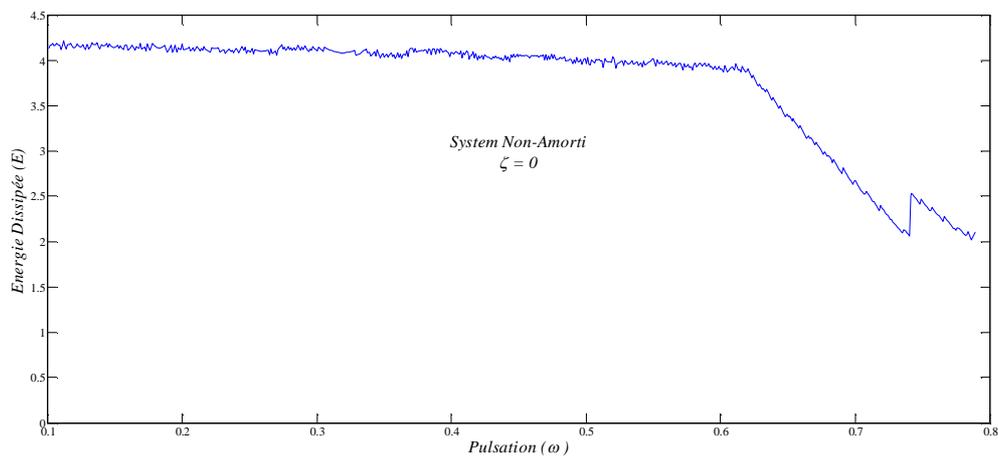
Cette courbe appelée souvent carte énergétique (Fig. II.19), est déduite pour un taux d'amortissement ( $\zeta$ ), en fonction de la pulsation ( $\omega$ ), qui représente la pulsation équivalente entre celle de l'excitation dynamique de type sismique, et la pulsation propre de l'oscillateur étudié (Fig. II.1), une carte de l'énergie dissipée indépendante des conditions initiales, vue qu'elle concerne le cycle limite (après convergence), et qui montre l'accord avec la frontière de bifurcation (Fig. II.16) voir (Hammouda et al., 2008), (Hammouda, 2009).



**Fig. II.19. Bilan Energétique de l'oscillateur élastoplastique parfait, Symétrique**

$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0.1; f_0 = 1$$

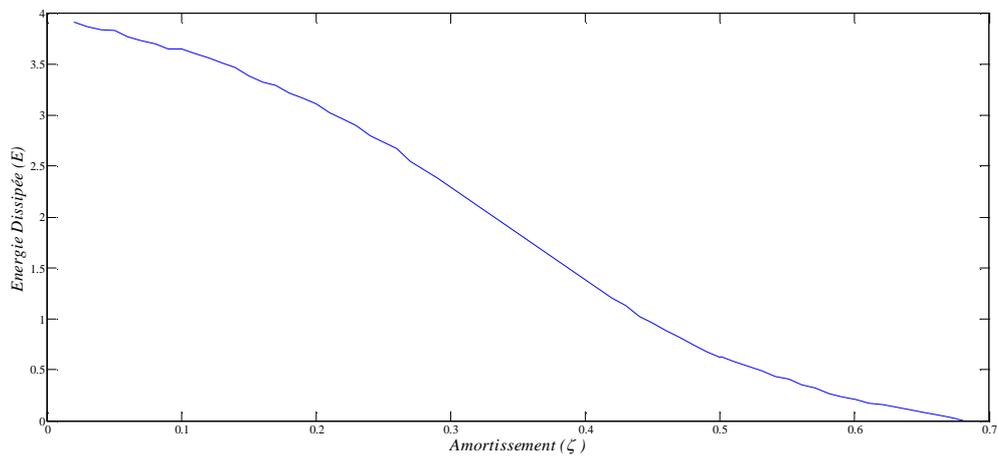
(Chenia et al., 2018)



**Fig. II.20. Bilan Energétique de l'oscillateur élastoplastique parfait, Symétrique non-amorti**

$$(\mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{u}}_0) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}); \zeta = \mathbf{0}; \mathbf{f}_0 = \mathbf{1}$$

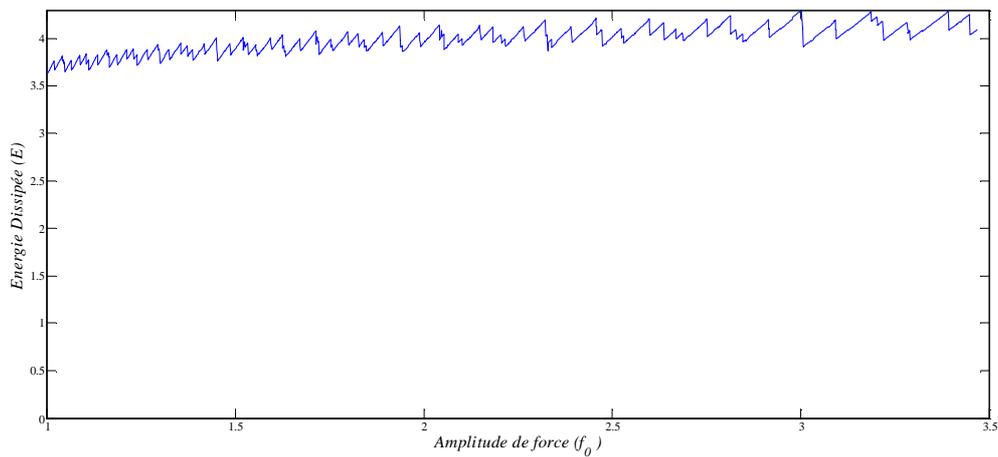
(Chenia et al., 2018)



**Fig. II.21. Bilan Energétique de l'oscillateur élastoplastique parfait, Symétrique en fonction de l'amortissement**

$$(\mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{u}}_0) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}); \omega = 0.5; f_0 = 1$$

(Chenia et al., 2018)



**Fig. II.22. Bilan Energétique de l'oscillateur élastoplastique parfait, Symétrique en fonction de l'amplitude de force extérieure**

$$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0.1; \omega = 0.5$$

(Chenia et al., 2018)

Ce bilan de l'énergie dissipée (Fig. II.19) au cours d'oscillations du modèle élastoplastique parfait amorti en des valeurs égales d'amplitude de force d'excitation (Symétrique), met en évidence une variation énergétique en fonction des valeurs très proches de la pulsation équivalente, et valide par l'occasion celle, présentée par les récents travaux de (Hammouda et al., 2008), dans l'étude rhéologique et énergétique de ce type d'oscillation hystérétique, et on peut dire que pour des petites valeurs de pulsation, l'énergie est grandement dissipée, suite aux mouvements super-harmoniques dus au fait que le système en question, se comporte comme un oscillateur plastique rigide, ce phénomène est mentionné précédemment dans les travaux de Capecchi (Capecchi, 1993), pour un système non amorti, et par ceux de Liu et Huang (Liu & Huang, 2004), pour le même système amorti, ainsi que par Challamel et Gilles (Challamel & Gilles, 2007).

L'énergie théoriquement dissipée par l'oscillateur étudié, peut être exprimée par la suite, en fonction des paramètres essentiellement impliqués dans la loi de comportement du modèle, tels que l'amortissement ( $\zeta$ ) (Voir Fig. II.21), chose à ne pas -en aucun cas- ignorer, vue leur liaison, car le terme d'amortissement fait penser toujours au côté conversion inverse de l'énergie, afin de retourner à la position initiale (Balandier, 2001), la figure (Fig. II.21), expose cette relation et exprime la variation de l'énergie, en fonction des taux d'amortissement variés, et qui met en garde l'idée de toujours augmenter l'amortissement d'un oscillateur pour en obtenir une meilleure dissipation d'énergie, chose à traiter avec délicatesse, car on doit pas nier l'existence de l'énergie dissipée par le mouvement périodique de l'oscillateur, qui cause, l'augmentation de l'énergie accumulée et absorbée par la rigidité de ce dernier, c.à.d. avoir une dissipation moindre. Cette courbe valide la troisième conclusion des travaux de Zhang et Iwan (Zhang & Iwan, 2003), qui affirment l'existence du phénomène des petites oscillations qui circulent autour du composant (amortissement) qui cause des excitations de longue période, par conséquent, ce phénomène indésirable fait réduire la dissipation de l'énergie. Cela, alimente aussi, le fait de choisir un bon jeu de paramètre tiré de la frontière de bifurcation (Fig. II.16), pour en rester dans la zone comportementale de l'accommodation.

La constatation faite par la figure (Fig. II.21), est validée par la précédente (Fig. II.20), pour un modèle non amorti ( $\zeta=0$ ), dont on peut clairement se rendre compte qu'en dépit du fait que le modèle n'est pas amorti, mais on peut constater une diminution de l'énergie dissipée au cours des mouvements cycliques.

La variation de l'énergie dissipée par le modèle élastoplastique amorti peut être exprimée en fonction du paramètre de la force de l'excitation extérieur ( $f_0$ ), pour un bon choix de l'amortissement et la pulsation. La courbe illustrée par la figure (Fig. II.22) montre la forte variabilité de l'énergie dissipée en augmentant l'amplitude de la force d'excitation externe, mais moyennement, la relation n'est pas forte que celle des figures précédentes, et ceci est connu du fait qu'une charge dynamique d'une amplitude élevée, et une pulsation faible, n'aura pas forcément le même effet qu'une autre charge d'une pulsation supérieure mais par une amplitude plus basse (Balandier, 2001) ; (Zhang & Iwan, 2003).

## II.7. Etude de stabilité de l'oscillateur élastoplastique parfait

L'analyse de stabilité de l'orbite (1,2)- périodique est similaire à l'analyse de stabilité développée par Masri & Caughey (Caughey, 1966), (Masri & Caughey, 1979) pour un système à impact, une solution repris par (Challamel & Gilles, 2007), (Hammouda, 2009). La technique utilisée est la perturbation et la propagation des erreurs, dont le facteur d'amplification de la perturbation ( $R$ ) peut être introduit à partir de :

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta v_0 \\ \Delta\dot{u}_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta\dot{u}_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta\dot{u}_2 \end{pmatrix} \text{ Avec } (\Delta v_0 = \Delta\dot{u}_0 = \Delta v_1 = \Delta v_2 = \Delta\dot{u}_2 = 0) \quad (\text{II.59})$$

Les matrices  $A$  et  $B$  peuvent prendre la forme :

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta\dot{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta v_0 \\ \Delta\dot{u}_0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta\dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta\dot{u}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.60})$$

Le facteur de perturbation ( $R$ ) est exprimé à partir des équations (II.59) (II.39), comme :

$$\Delta\tau_2 = R \cdot \Delta\tau_0 \quad \text{Avec} \quad R = A_{11} B_{11} + A_{31} B_{13} \quad (\text{II.61})$$

La valeur de ( $R$ ) détermine la stabilité de la solution (Masry & Caughey, 1979). La solution (1,2) symétrique est asymptotiquement stable si le module de ( $R$ ) est inférieur à l'unité. Si le module de ( $R$ ) est supérieur à un, la solution est instable. Un phénomène de bifurcation peut se produire lorsque le module prend la valeur de l'unité. La détermination du coefficient ( $R$ ) pour l'analyse de stabilité commence par la détermination de ses différents coefficients de ce calcul :

$$\Delta\tau_1 = A_{11} \cdot \Delta\tau_0 \quad (\text{II.62})$$

Reprenons l'équation (II.32) pour l'état élastique sous la forme :

$$v(\tau_0, \tau) = \left[ A_1 * \cos\left((\tau - \tau_0) * \sqrt{1 - \zeta^2}\right) + B_1 * \sin\left((\tau - \tau_0) * \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \right] * e^{-\zeta(\tau - \tau_0)} + C_1 * \cos(\omega\tau) + D_1 * \sin(\omega\tau) \quad (\text{II.63})$$

Avec :

$$\begin{cases} A_1 = -1 - C_1 * \cos(\omega\tau_0) - D_1 * \sin(\omega\tau_0) \\ B_1 = \frac{A_1\zeta + C_1\omega * \sin(\omega\tau_0) - D_1\omega * \cos(\omega\tau_0)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \\ C_1 = f_0 \left[ \frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \right] \\ D_1 = f_0 \left[ \frac{2\zeta\omega}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \right] \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

L'approche de perturbation est ainsi utilisée :

$$\begin{cases} v(\tau_0, \tau_1) = 1 \\ v(\tau_0 + \Delta\tau_0, \tau_1 + \Delta\tau_1) = v(\tau_0, \tau_1) + \Delta\tau_0 \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_0} + \Delta\tau_1 \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_1} = 1 \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

Cette dernière équation (eq.II.65) mène à la détermination de :

$$A_{11} = - \left( \frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_1}} \right) \quad (\text{II.66})$$

Avec :

$$A_{11} = \sin\left((\tau - \tau_0) * \sqrt{1 - \zeta^2}\right) * \left( \frac{1 + f_0 \cos(\omega\tau_0)}{\dot{u}_1 \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) e^{-\zeta(\tau_1 - \tau_0)} \quad (\text{II.67})$$

Tel que ( $\dot{u}_1$ ) représente la dérivée du déplacement à la fin de la phase élastique :

$$\dot{u}_1 = \left[ \left( -\zeta A_1 + B_1 \sqrt{1 - \zeta^2} \right) * \cos\left((\tau_1 - \tau_0) * \sqrt{1 - \zeta^2}\right) + \left( -\zeta B_1 - A_1 \sqrt{1 - \zeta^2} \right) * \sin\left((\tau_1 - \tau_0) * \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \right] * e^{-\zeta(\tau_1 - \tau_0)} + \omega C_1 * \sin(\omega\tau_1) + \omega D_1 * \cos(\omega\tau_1) \quad (\text{II.68})$$

On suit la même méthode de perturbation :

$$\Delta \dot{u}_1 = \Delta \tau_0 \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_0} + \Delta \tau_1 \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_1} \quad (\text{II.69})$$

Le terme  $A_{31}$  peut être déduit :

$$A_{31} = \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_0} + A_{11} \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_1} \quad (\text{II.70})$$

Avec :

$$\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_1} = -1 - 2\zeta \dot{u}_1 + f_0 \text{Cos}(\omega \tau_0) \quad (\text{II.71})$$

$$\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_0} = 1 + f_0 \text{Cos}(\omega \tau_0) * e^{-\zeta(\tau_1 - \tau_0)} * \left[ -\text{Cos}\left((\tau_1 - \tau_0)\sqrt{1 - \zeta^2}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{Sin}\left((\tau_1 - \tau_0)\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \right] \quad (\text{II.72})$$

Le même raisonnement peut être adopté pour la détermination des coefficients  $B_{11}$  et  $B_{13}$  , qu'on peut tirer à partir de la fonction  $\dot{u}_2(\dot{u}_1, \tau_1, \tau_2)$  décrite dans (eq. II.35) :

$$\dot{u}_2(\dot{u}_1, \tau_1, \tau_2) = B_2 * e^{-2\zeta(\tau_2 - \tau_1)} + C_2 \text{Cos}(\omega \tau_2) + D_2 \text{Sin}(\omega \tau_2) - \frac{1}{2\zeta} \quad (\text{II.73})$$

Avec :

$$\begin{cases} C_2 = f_0 \left[ \frac{2\zeta}{\omega^2 + 4\zeta^2} \right] \\ D_2 = f_0 \left[ \frac{\omega}{\omega^2 + 4\zeta^2} \right] \\ B_2 = \dot{u}_1 + \frac{1}{2\zeta} - C_2 * \text{Cos}(\omega \tau_1) - D_2 * \text{Sin}(\omega \tau_1) \end{cases} \quad (\text{II.74})$$

La perturbation nous fournit :

$$B_{11} = - \left( \frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\dot{u}_1, \tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\dot{u}_1, \tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2}} \right) \quad \text{et} \quad B_{13} = - \left( \frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\dot{u}_1, \tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\dot{u}_1, \tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2}} \right) \quad (\text{II.75})$$

Des simplifications peuvent être constatées :

$$B_{11} = -B_{13} \left( \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_1} \right) \quad (\text{II.76})$$

Car :

$$B_{11} = \frac{e^{-2\zeta(\tau_2-\tau_1)}}{(1+f_0 \cos(\omega\tau_0))} * [1 + 2\zeta\dot{u}_1 - f_0 \cos(\omega\tau_1)] \quad \text{et} \quad B_{13} = \frac{e^{-2\zeta(\tau_2-\tau_1)}}{(1+f_0 \cos(\omega\tau_0))} \quad (\text{II.77})$$

Finalement le coefficient de perturbation ( $R$ ) peut être écrit :

$$R = B_{13} \left( \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1)}{\partial \tau_0} \right) \quad (\text{II.78})$$

De façon plus détaillée :

$$R = e^{\zeta(\tau_1-\tau_0-\frac{2\pi}{\omega})} * \left[ -\cos\left((\tau_1 - \tau_0)\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left((\tau_1 - \tau_0)\sqrt{1-\zeta^2}\right) \right] \quad (\text{II.79})$$

Nous pouvons numériquement vérifier la stabilité des orbites (1,2)- périodiques qui prévaut toujours ( $|R| < 1$ ) pour ce système parfait amorti (Challamel & Gilles, 2007).

## II.8. Conclusion

En vibration libre, la stabilité asymptotique du point origine est retrouvée dans le nouvel espace des phases. En vibration forcée et pour retrouver les temps de transition pour chaque zone (chaque état), pour des conditions initiales spécifiées, le simulateur détermine les temps de transition  $\tau_{i+1}$ .

- Toutes les trajectoires, que ce soit en adaptation élastique ou en accommodation plastique, tendent vers une orbite périodique considérée comme « cycle limite » dans l'espace des phases  $(v, \dot{u})$  :
  - L'adaptation est décrite par un cycle limite régulier (figure III-4)
  - L'accommodation est décrite par des cycles limites non réguliers (figure III-5)
- Les cycles limites sont symétriques et ne dépendent pas des conditions initiales.
- Le déplacement total  $u$  dépend des conditions initiales. On confirme que l'espace de phase initial  $(u, u_p, \dot{u})$  ne peut pas être associé à des cycles limites.
- En réalité, les orbites sont complètement caractérisées dans l'espace  $(v, \dot{u}, \tau)$ .
- Les simulations numériques montrent que ces orbites périodiques sont asymptotiquement stables pour toutes les perturbations.
- Les formes du cycle limite dépendent des paramètres structuraux  $(f_0, \omega, \zeta)$ , ce qui lie les propriétés dynamiques du système aux propriétés mécaniques.

Le bilan énergétique de ce système a été établi, en traçant la carte de l'énergie dissipée au cours des oscillations en fonction des différents paramètres structuraux :

- L'énergie dissipée peut être obtenue à partir de la loi de comportement adoptée, en calculant la surface de cette courbe.
- L'énergie dissipée de l'oscillateur élastoplastique parfait symétrique ou bien asymétrique, dépend explicitement des paramètres structuraux.
- Les paramètres structuraux jouant un rôle important dans la dissipation d'énergie de l'oscillateur élastoplastique parfait et symétrique, sont : la pulsation, le taux d'amortissement.
- Les paramètres structuraux jouant un rôle important dans la dissipation d'énergie de l'oscillateur élastoplastique asymétrique sont : la pulsation, le taux d'amortissement, et le taux d'asymétrie.

# **Chapitre III**

**Étude de l'Oscillateur Élastoplastique**

**En présence de l'Écrouissage**

## Chapitre III : Étude de l'Oscillateur Élastoplastique en Présence de l'Écrouissage

### III.1. Introduction

Cette section est consacrée à l'étude de la dynamique et de la réponse d'un oscillateur élastoplastique amorti symétrique en présence de l'écrouissage cinématique dans sa loi de comportement (Voir Fig. III.1). La détermination de sa réponse dynamique à partir de la résolution de ses équations de mouvement est ainsi établi suivant trois cas bien distincts selon le rapport entre le taux d'amortissement ( $\zeta$ ) et le nouveau paramètres structurel ( $\mu$ ) qui intervient et qui représente le taux d'écrouissage dans le domaine plastique.

Les oscillations libres d'un tel oscillateur sont menées suivant les trois cas, pour une force d'excitation extérieure nulle, en perturbation le système initialement en changeant ses conditions initiales de positions surtout. Les vibrations forcées sont également étudiées pour différentes valeurs des paramètres structuraux.

Une étude caractéristique (Semi-Analytique) des propriétés du cycle limite est ensuite présentée, dont l'apport scientifique majeur de cette thèse, qui est la détermination semi-analytique des temps de transition, à partir des expressions transcendantes des fonctions qui régissent chaque transition entre deux états dynamiques.

La frontière de bifurcation est présentée pour un jeu de paramètres donné, suivant notre propre raisonnement qui diffère légèrement de celui de Liu (Liu, 2003), utilisant bien entendu nos propres paramètres. L'étude de stabilité est également menée pour les trois cas, en se basant sur la méthode de perturbation et de propagation d'erreurs, et nous pouvons constater que la configuration du système dynamique étudié avec ses propres propriétés joue un rôle très important dans prédiction de sa réponse dynamique et dans l'étude de sa stabilité/instabilité.

### III.2. Le Système Dynamique de l'Oscillateur Élastoplastique Écrouissable

Le modèle rhéologique de l'oscillateur élastoplastique est identique à celui adopté pour l'étude de l'oscillateur élastoplastique parfait (Fig. II.1), en considérant le même système à un seul degré de liberté, un système qui se compose d'une masse ( $M$ ) qui est attachée à un ressort élastoplastique de raideur ( $K$ ) et qui présente de l'écrouissage cinématique, et avec un coefficient d'amortissement positif noté ( $C$ ). Le système inélastique est soumis à une force extérieure du même type harmonique  $F(t)$ , définie par son amplitude ( $F_0$ ) et sa pulsation ( $\Omega$ ).

Le système sera étudié en suivant la même procédure que celui du chapitre précédant (§ II) à savoir le changement de variables possible afin de réduire la dimension de l'espace des phases en prenant en compte l'adimensionnement des paramètres dynamiques du système.

La détermination des conditions qui contrôlent le cycle limite dans le domaine des phases peut être résumée ainsi, en présentant la loi de comportement considérée pour ce système :

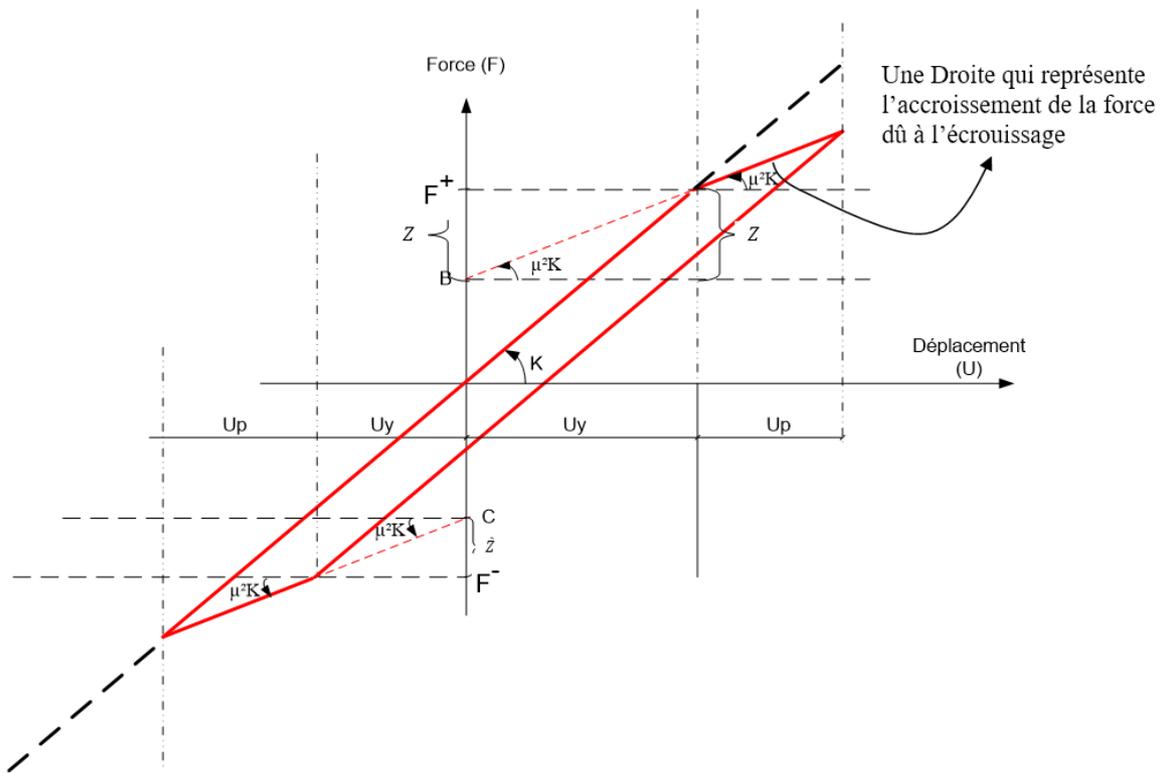


Fig. III.1. Loi de comportement élastoplastique en présence de l'écrouissage

La formulation analytique de la paroi potentielle plastique est fixée par la relation (Challamel & Gilles, 2007) :

$$F^- < K(U - U_p) < F^+ \quad (\text{III.1})$$

Ou bien :

$$-F^+ < K(U - U_p) < F^+ \quad (\text{III.2})$$

En divisant l'inégalité (III.1) sur la limite de la force dans le domaine élastique :

$$-1 < \frac{K}{F^+}(U - U_p) < 1 \quad (\text{III.3})$$

Un changement de variable s'impose en prenant en compte l'équation (eq. II.1)

$$-1 < \frac{(U - U_p)}{u_y} < 1 \quad (\text{III.4})$$

Le paramètre adimensionnel du déplacement élastique est limité par :

$$-1 < v < 1 \quad (\text{III.5})$$

Dans le cas de notre étude (comportement élastoplastique en présence d'écrouissage) :

$\mu^2 = [0, 1]$ , on peut dire que la fixation de la paroi plastique est définie par l'équation de deux droites (Voir Fig. III.1) dans chaque état plastique ( $P^+$ , et  $P^-$ ).

Les équations de ces deux droites sont de la forme :

$$F(U)^+ = a U + B \quad (\text{III.6})$$

$$F(U)^- = a U + C \quad (\text{III.7})$$

Où : la pente pour les deux (voir Pratap et al., 1994) :

$$a = \mu^2 K \quad (\text{III.8})$$

Le point B est déterminé par : (voir Fig. III.1)

$$B = F^+ - Z \quad (\text{III.9})$$

Sachant que :

$$Z = \mu^2 K U_y \quad (\text{III.10})$$

Donc en simplifiant (III.9) et (III.10), et en les remplaçant dans (III.6), on obtient :

$$F(U)^+ = \mu^2 K U + F^+ - \mu^2 K U_y \quad (\text{III.11})$$

Concernant le Point C :

$$C = F^- + \dot{Z} \quad (\text{III.12})$$

De la même façon, pour (III.11) et (III.12), et remplaçant dans (III.7), sachant que  $F^- = -F^+$

$$F(U)^- = \mu^2 K U - F^+ + \mu^2 K U_y \quad (\text{III.13})$$

Pour avoir la formulation de la paroi potentielle plastique, on utilise la relation :

$$F(U)^- < K(U - U_p) < F(U)^+ \quad (\text{III.14})$$

Pour cela, il faut remplacer (III.11) et (III.13) dans (III.14) :

$$\mu^2 K U - F^+ + \mu^2 K U_y < K(U - U_p) < \mu^2 K U + F^+ - \mu^2 K U_y \quad (\text{III.15})$$

On obtient ainsi la relation (III.16), en divisant (III.15) sur  $F^+$  et sachant que :  $U_y = \frac{F^+}{K}$  :

$$\mu^2 u - 1 + \mu^2 < \frac{(U - U_p)}{U_y} < \mu^2 u + 1 - \mu^2 \quad (\text{III.16})$$

Donc la formulation analytique de la paroi potentielle plastique pour les deux états plastique ( $P^+$ , et  $P^-$ ), qui limitent l'état élastique, est donnée par la relation :

$$-(1 - \mu^2) + \mu^2 u < v < (1 - \mu^2) + \mu^2 u \quad (\text{III.17})$$

$\mu^2 \in [0, 1]$ , est le coefficient de l'écrouissage cinématique introduit par (Pratap et al, 1994). Les valeurs extrêmes :  $\mu^2 = 0$  et  $\mu^2 = 1$  correspondent au comportement *parfaitement Plastique* et *purement élastique*, respectivement.

### III.3. Equations Adimensionnelles du Mouvement

Les équations du mouvement sont introduites en expressions adimensionnelles, pour les trois états dynamiques du système (Hammouda et al., 2012) :

$$\hat{E} : \begin{cases} \ddot{u} + 2 \zeta \dot{u} + (u - u_p) = f_0 \cos(\omega\tau) \\ u_p = (1 - \mu^2)u_{i-1} + (1 - \mu^2) \text{ avec } \dot{u}_p = 0 \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

$$\hat{P}^+ : \begin{cases} \ddot{u} + 2 \zeta \dot{u} + (1 - \mu^2) + \mu^2 u = f_0 \cos(\omega\tau) \\ u_p = (1 - \mu^2) u - (1 - \mu^2) \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

$$\hat{P}^- : \begin{cases} \ddot{u} + 2 \zeta \dot{u} + (\mu^2 - 1) + \mu^2 u = f_0 \cos(\omega\tau) \\ u_p = -(\mu^2 - 1) u + (1 - \mu^2) = (1 - \mu^2)u + (1 - \mu^2) \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Chaque état est caractérisé par l'équation (eq. III.17) :

$$\hat{E} : |-(1 - \mu^2) + \mu^2 u < u - u_p < (1 - \mu^2) + \mu^2 u$$

$$\text{Ou} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{cases} u - u_p = (1 - \mu^2) + \mu^2 u \text{ et } \dot{u} \leq 0 \\ \text{Ou} \\ u - u_p = -(1 - \mu^2) + \mu^2 u \text{ et } \dot{u} \geq 0 \end{cases}$$

$$\hat{P}^+ : |(u - u_p = [(1 - \mu^2) + \mu^2 u]) \text{ et } \dot{u} \geq 0 \quad (\text{III.22})$$

$$\hat{P}^- : |(u - u_p = -(1 - \mu^2) + \mu^2 u) \text{ et } \dot{u} \leq 0 \quad (\text{III.23})$$

Les équations des états plastiques :  $\hat{P}^+$  et  $\hat{P}^-$  peuvent être écrites, comme l'a suggéré, Masri (Voir Masri, 1975) :

$$\hat{P} : \begin{cases} \ddot{u} + 2 \zeta \dot{u} + (1 - \mu^2) \text{sgn}(\dot{u}) + \mu^2 u = f_0 \cos(\omega\tau) \\ u_p = -(1 - \mu^2) \text{sgn}(\dot{u}) + (1 - \mu^2) u \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

### III.4. Vibrations Libres du Système Élastoplastique Écrouissable

Les équations du mouvement dans le cas de l'oscillateur élastoplastique en présence de l'écrouissage en mode de vibrations libres (*i.e.* Force d'excitation extérieure nulle) sont réécrites à partir de celles (eq. III.18-20) pour chaque état dynamique :

#### III.4.1 Résolution de l'état élastique $\hat{E}$

$$\hat{E}: \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + (u - u_p) = 0$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} u(\tau_i) = u_i \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p(\tau_i) = u_{p_i} \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

Nous savons que pour l'état élastique la solution des équations de mouvement est identique avec celle de l'oscillateur élastoplastique parfait du fait que le paramètre de l'écrouissage n'intervient que dans la phase plastique, donc la solution est donnée en fonction du déplacement réduit ( $v = u - u_p$ ) par : (Hammouda, 2009), (Hammouda et al., 2012)

$$\begin{cases} v(\tau) = \left[ v_i \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + \frac{\dot{u}_i + \zeta v_i}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ \dot{u}_i \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] - \left( \frac{v_i + \zeta \dot{u}_i}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

### III.4.2 Résolution de l'état plastique $\hat{P}^+$

Le terme représentant le coefficient de l'écrouissage s'impose dans la formulation des état plastiques :

$$\hat{P}^+ : |\ddot{u} + 2 \zeta \dot{u} + (1 - \mu^2) + \mu^2 u = 0 \quad (\text{III.27})$$

$$\text{Equation homogène : } \ddot{u} + 2 \zeta \dot{u} + \mu^2 u = 0 \quad (\text{III.28})$$

$$\text{Equation caractéristique : } r^2 + 2 \zeta r + \mu^2 = 0 \quad (\text{III.29})$$

$\Delta = 4\zeta^2 - 4\mu^2$  Le signe de ( $\Delta$ ) est celui de ( $\zeta^2 - \mu^2$ ) donc :

#### III.4.2.1 Cas 1 : Si $\zeta > \mu$

Si le taux d'amortissement est supérieur à celui de l'écrouissage le déterminant de l'équation caractéristique  $\Delta > 0$  donc :

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} (\tau - \tau_i) \right] + B \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} (\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} - \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} (\tau - \tau_i) \right] + (-\zeta B + A \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} (\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

Dont :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= u_i + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ \mathbf{B} &= \frac{\dot{u}_i + \zeta A}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} e^x = \cosh(x) + \sinh(x) \\ e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x) \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

#### III.4.2.2 Cas 2 : Si $\zeta = \mu$

Pour un taux d'amortissement égale au coefficient de l'écrouissage, un cas critique (Liu, 2003) :

Le déterminant de l'équation (eq. III.29) est nul et  $r_1 = r_2 = -\zeta$

$$\begin{cases} u = e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} [A(\tau - \tau_i) + B] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} - \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ \dot{u} = (-\zeta A(\tau - \tau_i) + A - \zeta B) e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

Dont : (III.32)

$$\mathbf{B} = u_i + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2}$$

$$\mathbf{A} = \dot{u}_i + \zeta B$$

### III.4.2.3 Cas 3 : Si $\zeta < \mu$

Pour un écrouissage plus supérieur au taux d'amortissement, le déterminant de l'équation caractéristique (eq. III.29) est négatif et  $r_1 = -\zeta - i\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}$  ;  $r_2 = -\zeta + i\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}$  :

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i) \right] + B \sin \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} - \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \cos \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i) \right] + (-\zeta B - A\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \sin \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

Avec : (III.33)

$$A = u_i + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2}$$

$$B = \frac{\dot{u}_i + \zeta A}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}}$$

### III.4.3. Résolution de l'état plastique $\hat{P}^-$

$$\begin{cases} \hat{P}^-: \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + (\mu^2 - 1)u = 0 \\ u_p = -(\mu^2 - 1)u + (1 - \mu^2) = (1 - \mu^2)u + (1 - \mu^2) \\ u(\tau_i) = u_i \quad \text{et} \quad \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \end{cases} \quad \text{(III.34)}$$

Les deux états plastiques  $\hat{P}^+$  et  $\hat{P}^-$  ont la même solution homogène. Déterminer la solution qui vérifie les conditions initiales données revient à déterminer les constantes  $A$  et  $B$  dans chaque cas.

#### III.4.3.1 Cas 1 : Si $\zeta > \mu$

De façon similaire à l'état  $\hat{P}^+$ , pour le cas qui couvre le système élastoplastique parfait, à savoir un taux d'amortissement plus supérieur au coefficient de l'écrouissage :

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] + B \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] + (-\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

Dont : (III.35)

$$A = u_i - \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2}$$

$$B = \frac{\dot{u}_i + \zeta A}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}}$$

### III.4.3.2 Cas 2 : Si $\zeta = \mu$

La réponse du système dynamique dans les vibrations libres, pour la même valeur du taux d'amortissement et d'écrouissage est donnée par :

$$\begin{cases} u = [A(\tau - \tau_i) + B]e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu} \\ \dot{u} = (-\zeta A(\tau - \tau_i) + A - \zeta B)e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

D'où : (III.36)

$$B = u_i - \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2}$$

$$A = \dot{u}_i + \zeta B$$

### III.4.3.3 Cas 3 : Si $\zeta < \mu$

Pour l'état plastique  $\hat{P}^-$  et des vibrations libres dont le taux d'amortissement plus faible que le paramètre de l'écrouissage, la solution de l'équation du mouvement (eq. III.23) est :

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i) \right] + B \sin \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \cos \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i) \right] + (-\zeta B - A\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \sin \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

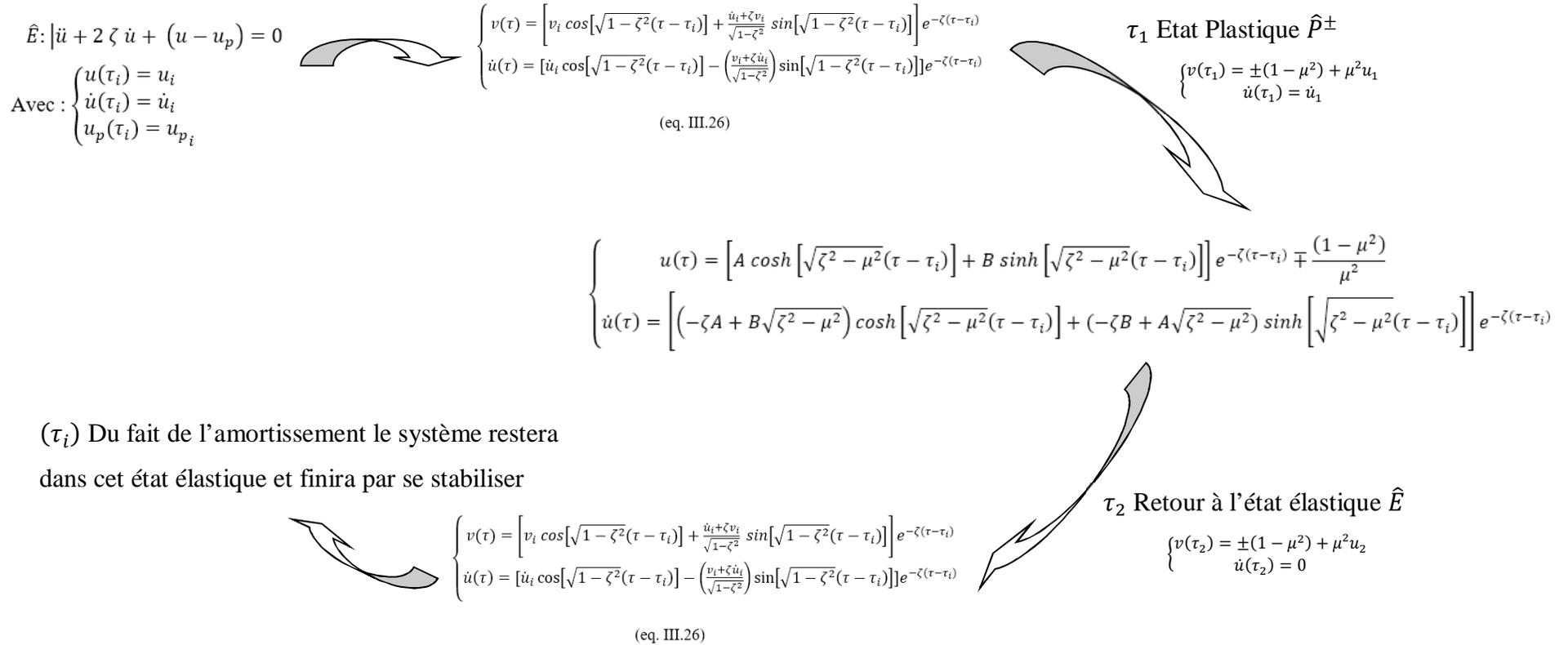
Avec : (III.37)

$$A = u_i - \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2}$$

$$B = \frac{\dot{u}_i + \zeta A}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}}$$

III.4.4. Organigrammes d'évolution du système élastoplastique écrouissable libre

III.4.4.1 Cas 1 : Si  $\zeta > \mu$



III.4.4.2 Cas 2 : Si  $\zeta = \mu$

$$\hat{E}: |\ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + (u - u_p) = 0$$

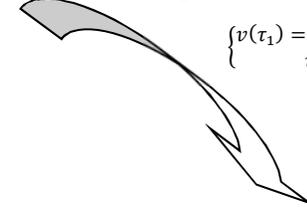
Avec :

$$\begin{cases} u(\tau_i) = u_i \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p(\tau_i) = u_{p_i} \end{cases}$$



$$\begin{cases} v(\tau) = \left[ v_i \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + \frac{\dot{u}_i + \zeta v_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ \dot{u}_i \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] - \frac{v_i + \zeta \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

(eq. III.26)



$\tau_1$  Etat Plastique  $\hat{P}^\pm$

$$\begin{cases} v(\tau_1) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \dot{u}(\tau_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$

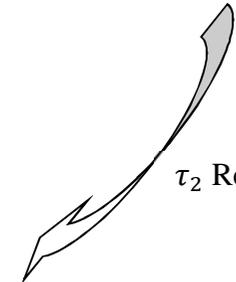
$$\begin{cases} u = e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} [A(\tau - \tau_i) + B] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \mp \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ \dot{u} = (-\zeta A(\tau - \tau_i) + A - \zeta B) e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

( $\tau_i$ ) Du fait de l'amortissement le système restera dans cet état élastique et finira par se stabiliser



$$\begin{cases} v(\tau) = \left[ v_i \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + \frac{\dot{u}_i + \zeta v_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ \dot{u}_i \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] - \frac{v_i + \zeta \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

(eq. III.26)



$\tau_2$  Retour à l'état élastique  $\hat{E}$

$$\begin{cases} v(\tau_2) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_2 \\ \dot{u}(\tau_2) = 0 \end{cases}$$

III.4.4.3 Cas 3 : Si  $\zeta < \mu$

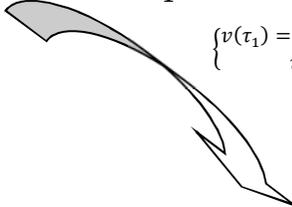
$\hat{E}$ :  $|\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + (u - u_p) = 0$   
 Avec :  $\begin{cases} u(\tau_i) = u_i \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p(\tau_i) = u_{p_i} \end{cases}$



$$\begin{cases} v(\tau) = \left[ v_i \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + \frac{\dot{u}_i + \zeta v_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ \dot{u}_i \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] - \frac{v_i + \zeta \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

(eq. III.26)

$\tau_1$  Etat Plastique  $\hat{P}^\pm$

$$\begin{cases} v(\tau_1) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \dot{u}(\tau_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$


$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \mp \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \cos[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \sin[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

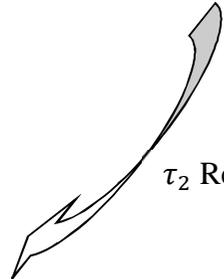
( $\tau_i$ ) Du fait de l'amortissement le système restera dans cet état élastique et finira par se stabiliser



$$\begin{cases} v(\tau) = \left[ v_i \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + \frac{\dot{u}_i + \zeta v_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ \dot{u}_i \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] - \frac{v_i + \zeta \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \end{cases}$$

(eq. III.26)

$\tau_2$  Retour à l'état élastique  $\hat{E}$

$$\begin{cases} v(\tau_2) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_2 \\ \dot{u}(\tau_2) = 0 \end{cases}$$


III.4.5. Résultats des Oscillations Libres ( $f_0 = 0$ )

Les figures présentées ci-après, représentent la réponse des oscillations libres du système élastoplastique en présence de l'écrouissage cinématique dans sa loi de comportement, pour des jeux de paramètres différents et selon le rapport entre le taux d'amortissement et le coefficient de l'écrouissage, il s'agit de montrer la stabilité asymptotique du point d'origine, ainsi que l'apparition du point fixe (attracteur) pour des perturbations des conditions initiales :

III.4.5.1 Cas 1 : Si  $\zeta > \mu$

Pour le premier cas où le taux d'amortissement est supérieur au coefficient d'écrouissage :

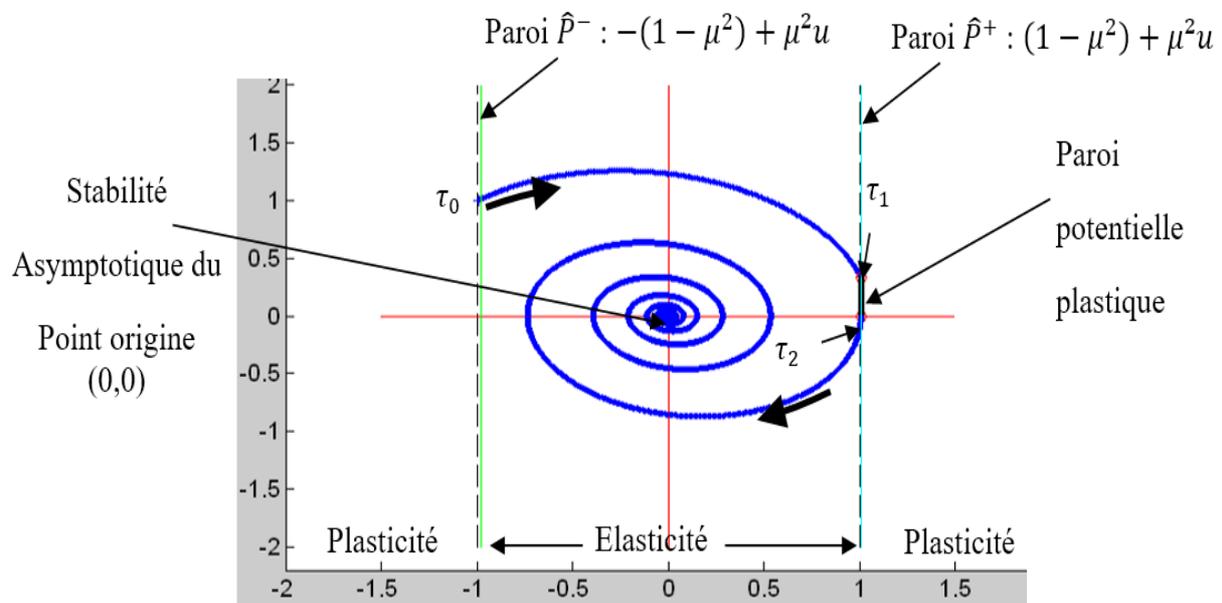
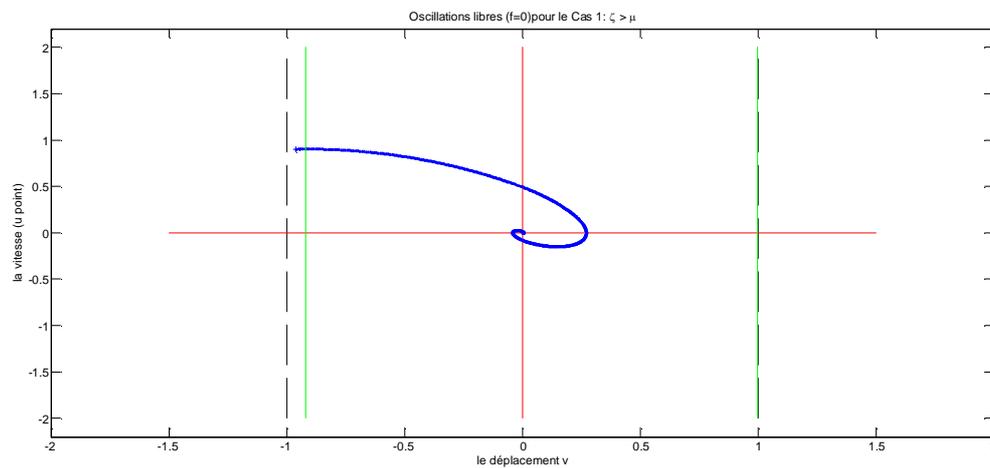


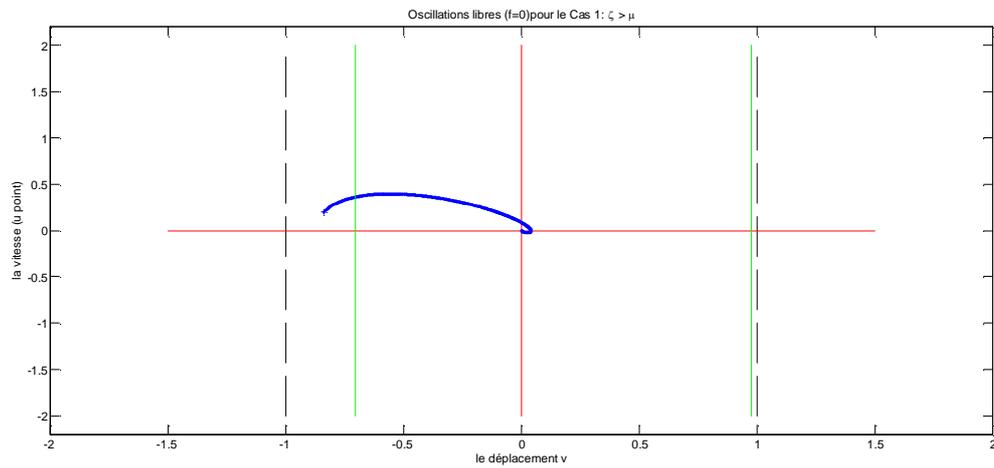
Fig. III.2. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)

Cas 1 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.99, 1)$ ,  $\zeta = 0.1$  ;  $\mu = 0.09$



**Fig. III.3. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)**

**Cas 1 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.99, 1), \zeta = 0.5 ; \mu = 0.2$**



**Fig. III.4. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)**

**Cas 1 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.99, 0.2)$ ,  $\zeta = 0.7$  ;  $\mu = 0.4$**

III.4.5.2 Cas 2 : Si  $\zeta = \mu$

Dans le Cas d'une égalité entre le taux d'amortissement de l'oscillateur et le coefficient de l'écrouissage (Cas critique), les Résultats sont présentés par :

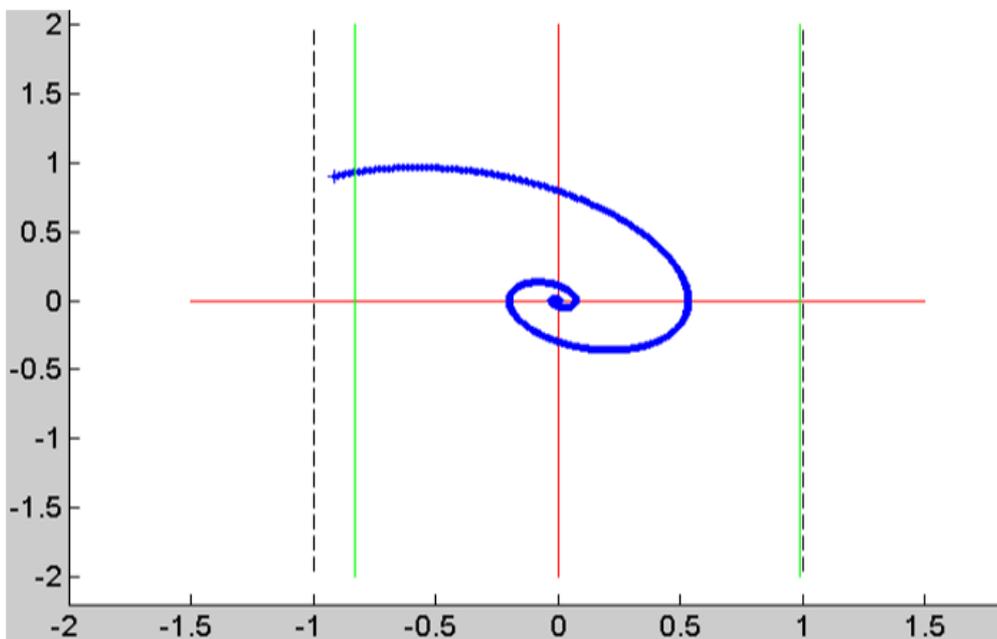
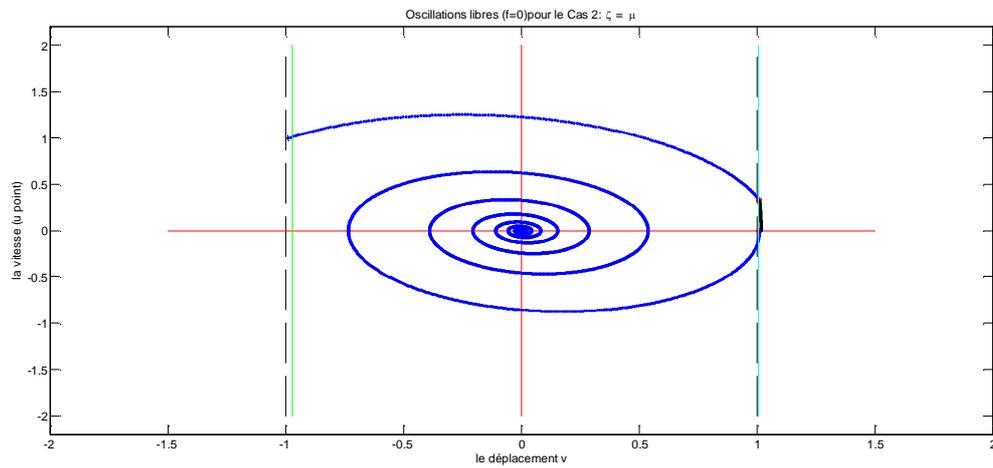


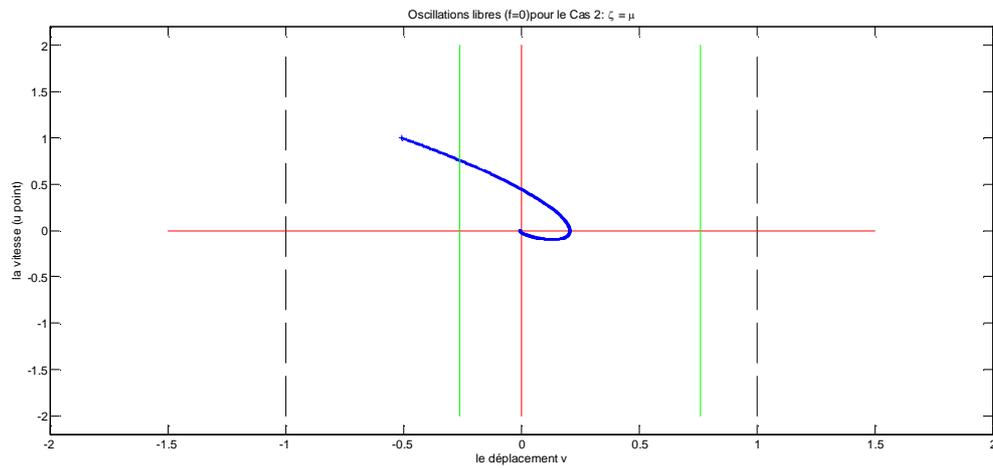
Fig. III.5. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)

Cas 2 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.91, 0.9)$ ,  $\zeta = 0.3$  ;  $\mu = 0.3$



**Fig. III.6. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)**

**Cas 2 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.99, 1)$ ,  $\zeta = 0.1$  ;  $\mu = 0.1$**



**Fig. III.7. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)**

**Cas 2 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.51, 1)$ ,  $\zeta = 0.7$  ;  $\mu = 0.7$**

III.4.5.3 Cas 3 : Si  $\zeta < \mu$

En ce qui concerne les vibrations Libres de l'oscillateur élastoplastique en présence d'écrouissage nettement supérieur au taux d'amortissement de l'oscillateur, les résultats des simulations numériques sont présentés ci-après :

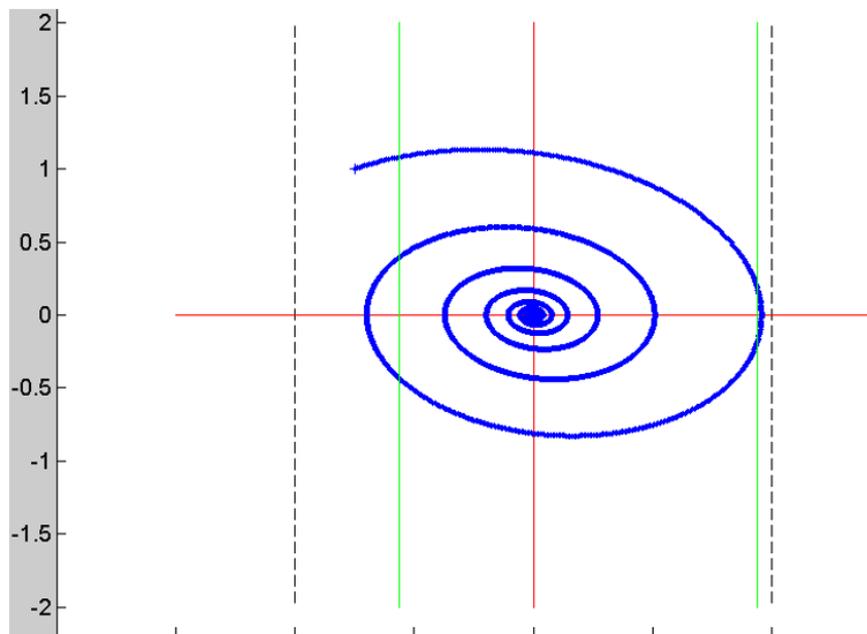
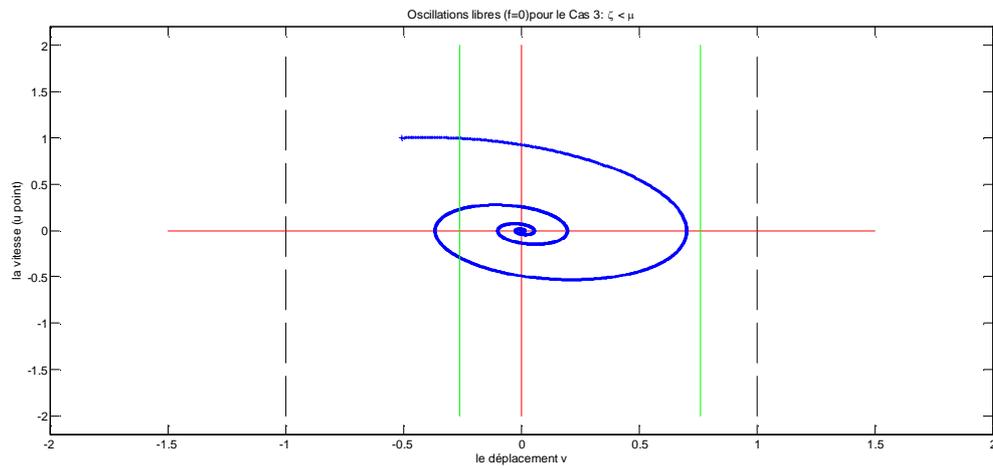


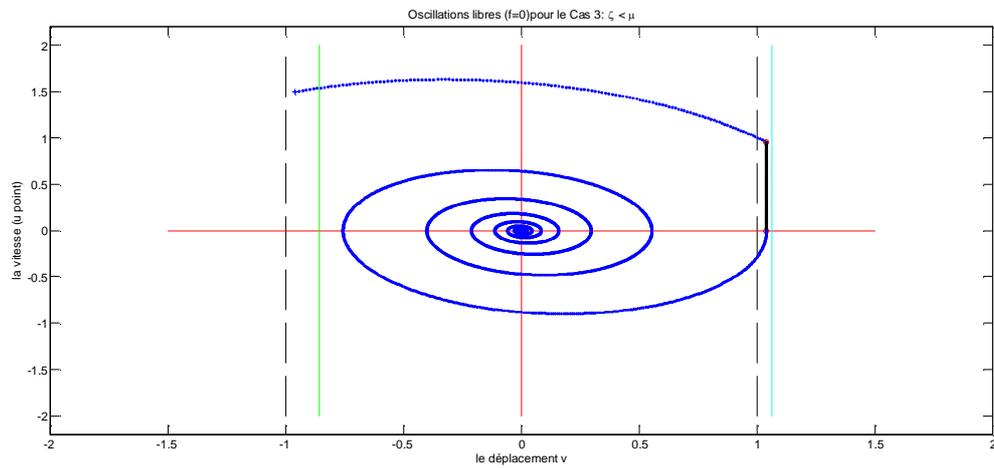
Fig. III.8. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)

Cas 3 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.75, 1), \zeta = 0.1 ; \mu = 0.5$



**Fig. III.9. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)**

**Cas 3 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.51, 1)$ ,  $\zeta = 0.2$  ;  $\mu = 0.7$**



**Fig. III.10. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)**

**Cas 3 :  $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.96, 1.5)$ ,  $\zeta = 0.1$  ;  $\mu = 0.2$**

Les temps de transitions des oscillations sont définis par :

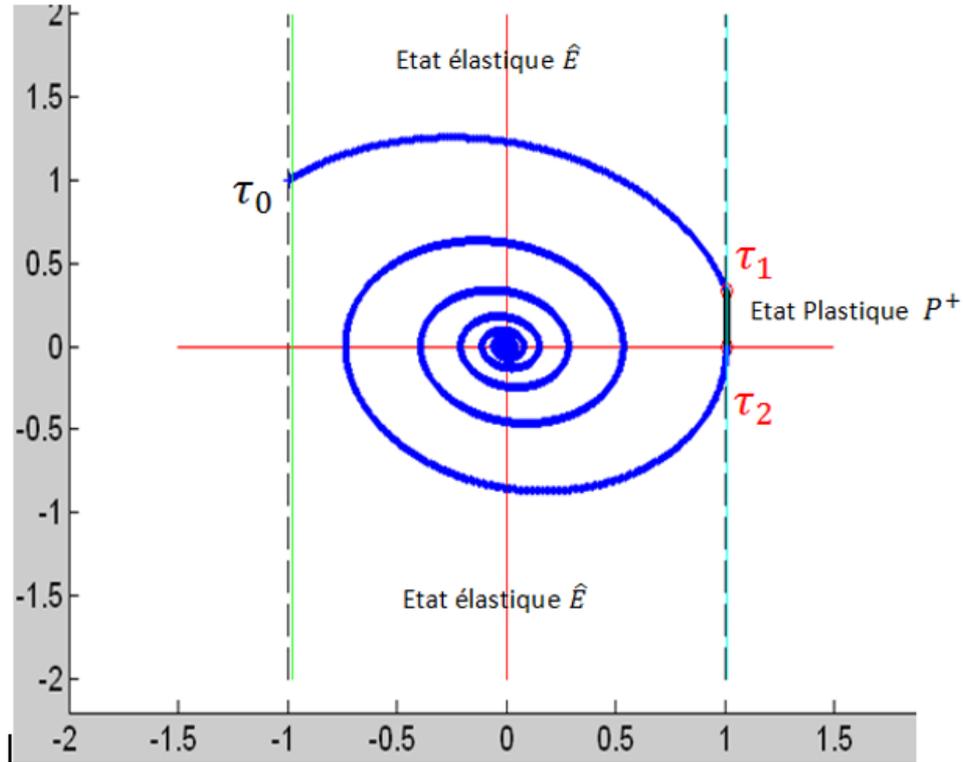


Fig. III.11. Domaine des phases de l'oscillateur écrouissable libre

L'état élastique initial :

$$\begin{aligned}
 (\tau_0, u_0, u_{p_0}, \dot{u}_0) &\xrightarrow{E^+} (\tau_1, u_1, u_{p_1}, \dot{u}_1) \\
 \begin{cases} v(\tau_1, u_1, u_{p_1}, \dot{u}_1) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1 \\ u_{p_1}(\tau_1, u_1, u_{p_1}, \dot{u}_1) = u_{p_0} \end{cases} & \quad (III.38)
 \end{aligned}$$

La transition vers un état plastique qui intervient pour des perturbations suffisamment grandes :

$$(\tau_1, u_1, u_{p_1}, \dot{u}_1) \xrightarrow{\hat{P}^+} (\tau_2, u_2, u_{p_2}, \dot{u}_2)$$

Donc à l'instant  $\tau_2$  la vitesse s'annule :

$$\dot{u}(\tau_2) = \dot{u}_2 = 0 \quad (III.39)$$

L'équation à résoudre est :

$$F(\tau_2, \tau_1, u_{p_0}, \dot{u}_1) = \dot{u}_2 = 0 \quad (III.40)$$

D'autre part, durant le régime plastique :

$$\dot{u}(\tau) = \left[ \left( -\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \right) \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_1) \right] + \left( -\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \right) \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_1) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_1)} \quad (\text{III.41})$$

Ainsi, l'instant  $\tau_2$  est à déterminer analytiquement :

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \text{Ln} \left( \frac{A\zeta - B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} - B\zeta + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}}{-A\zeta + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} - B\zeta + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \right) \quad (\text{III.42})$$

Regroupons, les termes du logarithme népérien :

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \text{Ln} \left( \frac{A(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) - B(\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} + \zeta)}{A(\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} - \zeta) - B(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - \mu^2})} \right) \quad (\text{III.43})$$

Finalement :

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \text{Ln} \left( \frac{(\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} + \zeta)(A - B)}{(\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} - \zeta)(A + B)} \right) \quad (\text{III.44})$$

Sachant que pour l'état  $\hat{P}^+$ , les constantes  $A$  et  $B$  sont donnés par :

$$\begin{cases} A = u_1 + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ B = \frac{\dot{u}_1 + A\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

Pour avoir l'expression final du  $\tau_2$ , pour l'état  $\hat{P}^-$ , il faut remplacer dans (eq. III.44), les constantes  $A$  et  $B$  par : (Chenia et al., 2014)

$$\begin{cases} A = u_1 - \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} \\ B = \frac{\dot{u}_1 + A\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

Les simulations numériques de l'oscillateur élastoplastique en présence de l'écrouissage cinématique, dans le cas des vibrations libres (*Self Vibrations*), peuvent être résumées :

- La stabilité asymptotique est assurée.
- Pas de paroi potentielle pour le cas 2 ( $\zeta = \mu$ ), pour des valeurs relativement grandes.
- Pour le cas 3 ( $\zeta < \mu$ ), le domaine élastique est rétréci.
- Les conditions initiales sont en fonction de  $(\mu, u_0)$  contrairement au cas de l'oscillateur élastoplastique parfait.
- La paroi potentielle plastique est d'ordre cinématique dont la fonction est :  
$$v = \mu^2 u \pm (1 - \mu^2),$$
 paroi cinématique qui change de position en fonction de  $(u)$ .
- Pour  $(\mu = 0)$  on retombe dans le cas de l'oscillateur élastoplastique parfait avec des parois potentielles plastiques fixes  $(\pm 1)$ .

### III.5. Vibrations Forcées du Système Élastoplastique Écrouissable

Les équations du mouvement pour l'oscillateur élastoplastique en présence de l'écrouissage en mode de vibrations forcées (*i.e.*  $f_0 \neq 0$ ) sont réécrites et généralisées à partir des équations (eq. III.18-20) pour chaque état dynamique de l'espace des phases :

#### III.5.1 Résolution de l'état élastique $\hat{E}$

L'état élastique est représenté par l'équation (eq. III.25) en y ajoutant le terme de la force d'excitation extérieur :

$$\hat{E}: \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + (u - u_p) = f_0 \cos(\omega\tau)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} u(\tau_i) = u_i \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p(\tau_i) = u_{p_i} \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Comme on l'a signalé pour le cas des vibrations libres (§ III.4.1), la paramètre de l'écrouissage intervient au-delà de l'instant ( $\tau_1$ ), c.à.d. au début de la phase plastique, donc, la solution de l'équation du mouvement élastique est identique à celle de l'oscillateur élastoplastique parfait (eq. II.32), qu'on exprime autrement par :

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + u_{p_i} + \frac{f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [(1-\omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)] \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{1-\zeta^2}) \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + \frac{\omega f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} u(\tau_i) = u_i = A + u_{p_i} + f_0 \frac{(1-\omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau_i)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i = -\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2} + \omega f_0 \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau_i)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Dont :

$$\begin{cases} A = u_i - u_{p_i} - f_0 \frac{(1-\omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau_i)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ B = \frac{\zeta(u_i - u_{p_i}) + \dot{u}_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{f_0}{\sqrt{1-\zeta^2} [(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2]} (-\zeta(1+\omega^2) \cos(\omega\tau_i) + \omega(1-\omega^2 - 2\zeta^2) \sin(\omega\tau_i)) \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

### III.5.2 Résolution de l'état plastique $\widehat{P}^+$

La résolution de l'état plastique dont la vitesse est positive dans l'espace des phases est obtenue à partir de l'équation (eq. III.27) avec le second membre de l'égalité qui représente la sollicitation harmonique. Comme pour le cas des vibrations libres, le terme représentant le coefficient de l'écrouissage s'impose dans la formulation des état plastiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{P}^+ : |\ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + (1 - \mu^2) + \mu^2 u = f_0 \cos(\omega\tau) \\ u(\tau_i) = u_i \text{ et } \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p = (1 - \mu^2)u - (1 - \mu^2) \end{array} \right. \quad (\text{III.51})$$

$$\text{Equation homogène : } \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + \mu^2 u = 0 \quad (\text{III.52})$$

$$\text{Equation caractéristique : } r^2 + 2\zeta r + \mu^2 = 0 \quad (\text{III.53})$$

$\Delta = 4\zeta^2 - 4\mu^2$  Le signe de ( $\Delta$ ) est celui de ( $\zeta^2 - \mu^2$ ) donc :

#### III.5.2.1 Cas 1 : Si $\zeta > \mu$

Si le taux d'amortissement est supérieur à celui de l'écrouissage, le déterminant de l'équation caractéristique ( $\Delta > 0$ ), donc :

$$r_1 = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \quad ; \quad r_2 = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \quad (\text{III.54})$$

$$\| u_h(\tau) = e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} \left[ a e^{-\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau-\tau_i)} + b e^{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau-\tau_i)} \right] \quad (\text{III.55})$$

En prenant en compte (eq. III.31) :

$$\| u_h(\tau) = \left[ A \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] + B \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} \quad (\text{III.56})$$

Donc, la solution générale est donnée par :

$$\begin{aligned} \| u(\tau) &= \left[ A \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] + B \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \| \dot{u}(\tau) &= \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] + (-\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

Les constantes  $A$ , et  $B$  sont à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(\tau_i) = u_i = A - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2-\omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i = -\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)] \end{cases} \quad (\text{III.58})$$

Donc :

$$\begin{cases} A = u_i + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} - f_0 \frac{(\mu^2-\omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ B = \frac{\dot{u}_i + \zeta A}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\omega f_0}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

( $B$ ) peut aussi se réécrire :

$$\| B = \frac{\zeta u_i + \dot{u}_i}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} + \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\mu^2(\sqrt{\zeta^2 - \mu^2})} + \frac{f_0 [-\zeta(\mu^2 + \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + \omega(\mu^2 - \omega^2 - 2\zeta^2) \sin(\omega\tau_i)]}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}[(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2]} \quad (\text{III.60})$$

### III.5.2.2 Cas 2 : Si $\zeta = \mu$

Pour un taux d'amortissement égale au coefficient de l'écrouissage, un cas critique initié par (Liu, 2003) :

Le déterminant de l'équation (eq. III.53) est nul et :  $r_1 = r_2 = -\zeta$

$$\| u_h(\tau) = [A(\tau - \tau_i) + B] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \quad (\text{III.61})$$

Et la solution générale qui est la somme des solutions homogène et particulière :

$$\begin{cases} \| u(\tau) = e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} [A(\tau - \tau_i) + B] - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2-\omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \| \dot{u}(\tau) = (-\zeta A(\tau - \tau_i) + A - \zeta B) e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{f_0\omega}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [-(\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau) + 2\zeta\omega \cos(\omega\tau)] \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

Les constantes  $A$ , et  $B$  sont à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(\tau_i) = u_i = B - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2-\omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i = -\zeta B + A + \frac{\omega f_0}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)] \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

Donc :

$$\left\| \begin{aligned} B &= u_i + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} - f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ A &= \dot{u}_i + \zeta B - \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)] \end{aligned} \right. \quad (\text{III.64})$$

### III.5.2.3 Cas 3 : Si $\zeta < \mu$

Si le taux d'amortissement est inférieur à celui de l'écrouissage, le déterminant de l'équation caractéristique ( $\Delta$ ) sera négatif, donc :

$$r_1 = -\zeta - i\sqrt{\mu^2 - \zeta^2} ; \quad r_2 = -\zeta + i\sqrt{\mu^2 - \zeta^2} \quad (\text{III.65})$$

La solution homogène est donnée :

$$\| u_h(\tau) = \left[ A \cos \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2} (\tau - \tau_i) \right] + B \sin \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2} (\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \quad (\text{III.66})$$

Donc, la solution générale est donnée par :

$$\begin{aligned} \| u(\tau) &= \left[ A \cos \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2} (\tau - \tau_i) \right] + B \sin \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2} (\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \| \dot{u}(\tau) &= \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \cos \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2} (\tau - \tau_i) \right] + (-\zeta B - A\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \sin \left[ \sqrt{\mu^2 - \zeta^2} (\tau - \tau_i) \right] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

Les constantes  $A$ , et  $B$  sont à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(\tau_i) = u_i = A - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i = -\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)] \end{cases} \quad (\text{III.68})$$

Donc :

$$\left\| \begin{aligned} A &= u_i + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} - f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ B &= \frac{\dot{u}_i + \zeta A}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}} - \frac{\omega f_0}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}} \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \end{aligned} \right. \quad (\text{III.69})$$

( $B$ ) peut aussi se réécrire :

$$\| B = \frac{\zeta u_i + \dot{u}_i}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}} + \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\mu^2 \sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{f_0 [-\zeta(\mu^2 + \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + \omega(\mu^2 - \omega^2 - 2\zeta^2) \sin(\omega\tau_i)]}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2} ((\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2)} \quad (\text{III.70})$$

### III.5.3 Résolution de l'état plastique $\hat{P}^-$

Dans l'espace des phases, La résolution de l'état plastique dont la vitesse est négative, est obtenue à partir de l'équation (eq. III.34) avec le second membre de l'égalité qui représente la sollicitation harmonique.

$$\begin{cases} \hat{P}^-: \ddot{u} + 2\zeta \dot{u} + (\mu^2 - 1)u + \mu^2 u = f_0 \cos(\omega\tau) \\ u(\tau_i) = u_i \quad \text{et} \quad \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p = -(\mu^2 - 1)u + (1 - \mu^2) = (1 - \mu^2)u + (1 - \mu^2) \end{cases} \quad (\text{III.71})$$

Les deux états plastiques  $\hat{P}^+$  et  $\hat{P}^-$  ont la même solution homogène. Déterminer la solution qui vérifie les conditions initiales données revient à déterminer les constantes  $A$  et  $B$  dans chaque cas

#### III.5.3.1 Cas 1 : Si $\zeta > \mu$

Si le taux d'amortissement est supérieur à celui de l'écrouissage, le déterminant de l'équation caractéristique ( $\Delta > 0$ ), et de façon similaire à l'état  $\hat{P}^+$ , pour le cas qui couvre le système élastoplastique parfait, à savoir un taux d'amortissement plus supérieur au coefficient de l'écrouissage :

$$\begin{aligned} \| u(\tau) &= \left[ A \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] + B \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} f_0 + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} \\ \| \dot{u}(\tau) &= \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Les constantes  $A$ , et  $B$  sont à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(\tau_i) = u_i = A + \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} f_0 + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i = -\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)] \end{cases} \quad (\text{III.73})$$

Donc :

$$\left\| \begin{aligned} A &= u_i - \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} f_0 - f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} \\ B &= \frac{\dot{u}_i + \zeta A}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\omega f_0}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} \end{aligned} \right. \quad (\text{III.74})$$

(B) peut aussi se réécrire :

$$\left\| B = \frac{\zeta u_i + \dot{u}_i}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\zeta(1 - \mu^2)}{\mu^2 \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} + \frac{f_0 [-\zeta(\mu^2 + \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + \omega(\mu^2 - \omega^2 - 2\zeta^2) \sin(\omega\tau_i)]}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} [(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2]} \quad (\text{III.75})$$

### III.5.2.2 Cas 2 : Si $\zeta = \mu$

Pour un taux d'amortissement égale au coefficient de l'écrouissage, le cas critique initié par (Liu, 2003) :

$$\begin{cases} u(\tau) = e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} [A(\tau - \tau_i) + B] + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau) = (-\zeta A(\tau - \tau_i) + A - \zeta B) e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} + \frac{f_0\omega}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [-(\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau) + 2\zeta\omega \cos(\omega\tau)] \end{cases} \quad (\text{III.76})$$

Les constantes  $A$ , et  $B$  sont à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(\tau_i) = u_i = B + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i = -\zeta B + A + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)] \end{cases} \quad (\text{III.77})$$

Donc :

$$\begin{cases} B = u_i - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} - f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ A = \dot{u}_i + \zeta B - \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)] \end{cases} \quad (\text{III.78})$$

### III.5.3.3 Cas 3 : Si $\zeta < \mu$

Pour l'état plastique  $\hat{P}^-$  dans le cas des vibrations forcées, et dont le taux d'amortissement plus faible que le paramètre de l'écrouissage, la solution de l'équation du mouvement (eq. III.71) est :

$$\begin{cases} u(\tau) = [A \cos[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)]] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau) = [(-\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \cos[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \sin[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)]] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

Les constantes  $A$ , et  $B$  sont à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} u(\tau_i) = u_i = A + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2-\omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i = -\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)] \end{cases} \quad (\text{III.80})$$

Donc :

$$\begin{cases} A = u_i - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} - f_0 \frac{(\mu^2-\omega^2) \cos(\omega\tau_i) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ B = \frac{\dot{u}_i + \zeta A}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}} - \frac{\omega f_0}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}} \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_i) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_i)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \end{cases} \quad (\text{III.81})$$

( $B$ ) peut aussi se réécrire également comme ceci :

$$\begin{cases} B = \frac{\zeta u_i + \dot{u}_i}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}} - \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\mu^2(\sqrt{1-\zeta^2})} + \frac{f_0 [-\zeta(\mu^2 + \omega^2) \cos(\omega\tau_i) + \omega(\mu^2 - \omega^2 - 2\zeta^2) \sin(\omega\tau_i)]}{\sqrt{\mu^2 - \zeta^2} ((\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2)} \end{cases} \quad (\text{III.82})$$

III.5.4. Organigrammes d'évolution du système élastoplastique écrouissable forcé

III.5.4.1. Cas 1 : Si  $\zeta > \mu$

$\hat{E}$ :  $\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + (u - u_p) = f_0 \cos(\omega\tau)$

Avec :  $\begin{cases} u(\tau_i) = u_i \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p(\tau_i) = u_{p_i} \end{cases}$

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} \\ \quad + u_{p_i} + \frac{f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [(1-\omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)] \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{1-\zeta^2}) \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} \\ \quad + \frac{\omega f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases}$$

(eq. III.48)

$\tau_1$  Etat Plastique  $\hat{P}^\pm$

$$\begin{cases} v(\tau_1) = \pm(1-\mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \dot{u}(\tau_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$

$\tau_4$  Retour à l'état élastique  $\hat{E}$

$$\begin{cases} v(\tau_4) = \mp(1-\mu^2) + \mu^2 u_2 \\ \dot{u}(\tau_4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] + B \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} \mp \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] + B \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} \pm \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases}$$

$\tau_3$  Etat Plastique  $\hat{P}^\mp$

$$\begin{cases} v(\tau_1) = \mp(1-\mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \dot{u}(\tau_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} \\ \quad + u_{p_i} + \frac{f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [(1-\omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)] \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{1-\zeta^2}) \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau-\tau_i)} \\ \quad + \frac{\omega f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases}$$

(eq. III.48)

$\tau_2$  Retour à l'état élastique  $\hat{E}$

$$\begin{cases} v(\tau_2) = \pm(1-\mu^2) + \mu^2 u_2 \\ \dot{u}(\tau_2) = 0 \end{cases}$$

III.5.4.2. Cas 2 : Si  $\zeta = \mu$

$\hat{E}$ :  $|\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + (u - u_p) = f_0 \cos(\omega\tau)$

Avec :  $\begin{cases} u(\tau_i) = u_i \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p(\tau_i) = u_{p_i} \end{cases}$

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + u_{p_i} + \frac{f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [(1-\omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)] \\ \dot{u}(\tau) = [(-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{1-\zeta^2}) \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)]] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + \frac{\omega f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases}$$

(eq. III.48)

$\tau_1$  Etat Plastique  $\hat{P}^\pm$

$$\begin{cases} v(\tau_1) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \dot{u}(\tau_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$

$\tau_4$  Retour à l'état élastique  $\hat{E}$

$$\begin{cases} v(\tau_4) = \mp(1 - \mu^2) + \mu^2 u_2 \\ \dot{u}(\tau_4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|u(\tau) &= e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} [A(\tau - \tau_i) + B] \mp \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \|\dot{u}(\tau) &= (-\zeta A(\tau - \tau_i) + A - \zeta B) e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{f_0\omega}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} [-(\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau) + 2\zeta\omega \cos(\omega\tau)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u(\tau) &= e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} [A(\tau - \tau_i) + B] \pm \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \|\dot{u}(\tau) &= (-\zeta A(\tau - \tau_i) + A - \zeta B) e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{f_0\omega}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} [-(\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau) + 2\zeta\omega \cos(\omega\tau)] \end{aligned}$$

$\tau_3$  Etat Plastique  $\hat{P}^\mp$

$$\begin{cases} v(\tau_1) = \mp(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \dot{u}(\tau_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + u_{p_i} + \frac{f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [(1-\omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)] \\ \dot{u}(\tau) = [(-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{1-\zeta^2}) \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)]] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + \frac{\omega f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases}$$

(eq. III.48)

$\tau_2$  Retour à l'état élastique  $\hat{E}$

$$\begin{cases} v(\tau_2) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_2 \\ \dot{u}(\tau_2) = 0 \end{cases}$$

III.5.4.3. Cas 3 : Si  $\zeta < \mu$

$\hat{E}$ :  $|\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + (u - u_p) = f_0 \cos(\omega\tau)$

Avec :  $\begin{cases} u(\tau_i) = u_i \\ \dot{u}(\tau_i) = \dot{u}_i \\ u_p(\tau_i) = u_{p_i} \end{cases}$

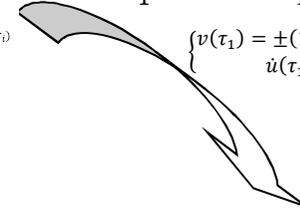


$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + u_{p_i} + \frac{f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [(1-\omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)] \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{1-\zeta^2}) \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + \frac{\omega f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases}$$

(eq. III.48)

$\tau_1$  Etat Plastique  $\hat{P}^\pm$

$$\begin{cases} v(\tau_1) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \dot{u}(\tau_1) = \dot{u}_1 \end{cases}$$



$\tau_4$  Retour à l'état élastique  $\hat{E}$

$$\begin{cases} v(\tau_4) = \mp(1 - \mu^2) + \mu^2 u_2 \\ \dot{u}(\tau_4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \| u(\tau) &= \left[ A \cos[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \mp \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \| \dot{u}(\tau) &= \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \cos[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \sin[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| u(\tau) &= \left[ A \cos[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \pm \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} \\ \| \dot{u}(\tau) &= \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \cos[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}) \sin[\sqrt{\mu^2 - \zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{aligned}$$

$\tau_3$  Etat Plastique  $\hat{P}^\mp$

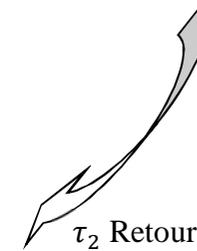
$$\begin{cases} v(\tau_3) = \mp(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \dot{u}(\tau_3) = \dot{u}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(\tau) = \left[ A \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + B \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + u_{p_i} + \frac{f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [(1-\omega^2) \cos(\omega\tau) + 2\omega\zeta \sin(\omega\tau)] \\ \dot{u}(\tau) = \left[ (-\zeta A + B\sqrt{1-\zeta^2}) \cos[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] + (-\zeta B - A\sqrt{1-\zeta^2}) \sin[\sqrt{1-\zeta^2}(\tau - \tau_i)] \right] e^{-\zeta(\tau - \tau_i)} \\ \quad + \frac{\omega f_0}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau)] \end{cases}$$

(eq. III.48)

$\tau_2$  Retour à l'état élastique  $\hat{E}$

$$\begin{cases} v(\tau_2) = \pm(1 - \mu^2) + \mu^2 u_2 \\ \dot{u}(\tau_2) = 0 \end{cases}$$



III.5.5. Résultats des Oscillations Forcées ( $f_0 \neq 0$ )

III.5.5.1. Cas 1 Si  $\zeta > \mu$

Les simulations numériques donnant la réponse de l'oscillateur élastoplastique écrouissable avec une excitation extérieure de type harmonique, peuvent être présentées ci-après en fonction du rapport entre le taux d'amortissement du système dynamique et le coefficient de l'écrouissage :

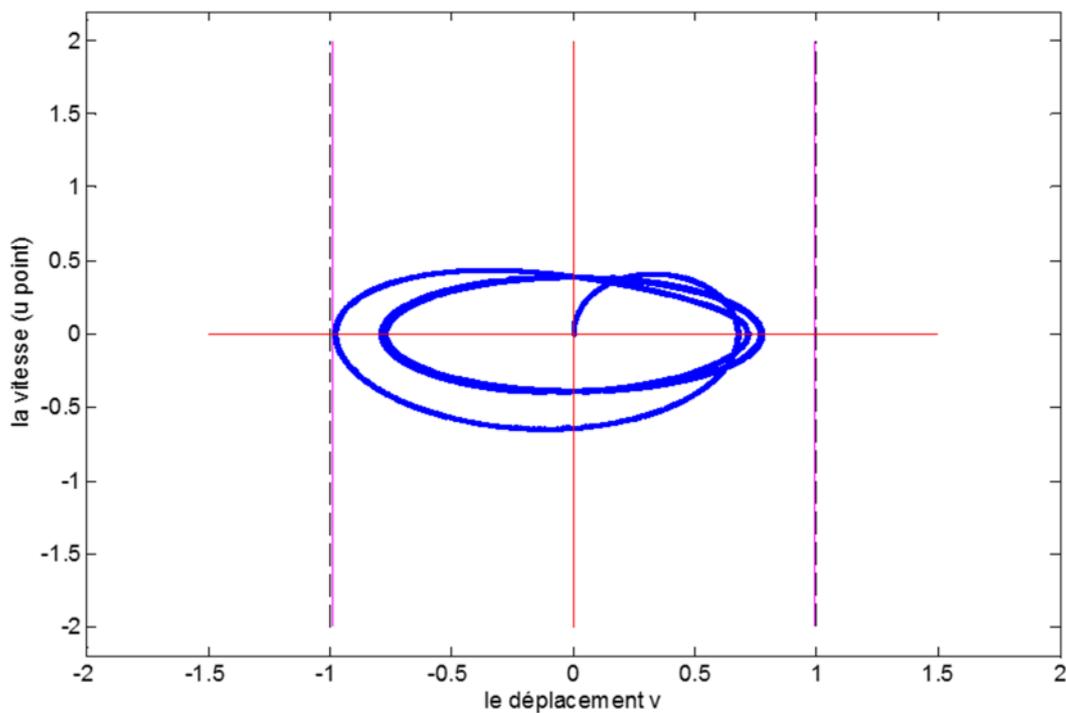
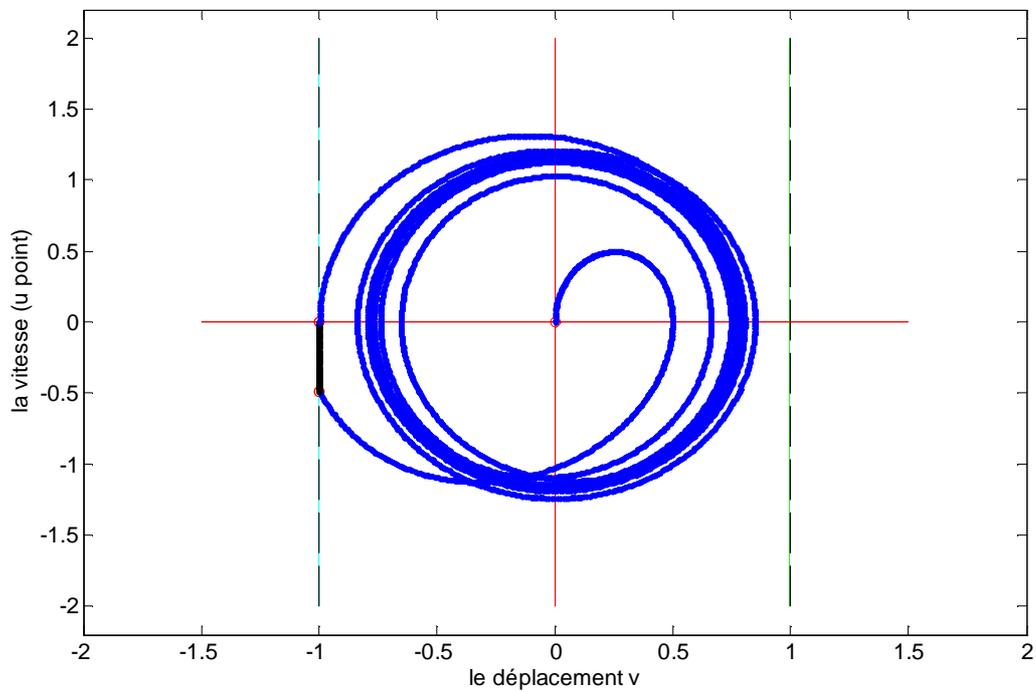


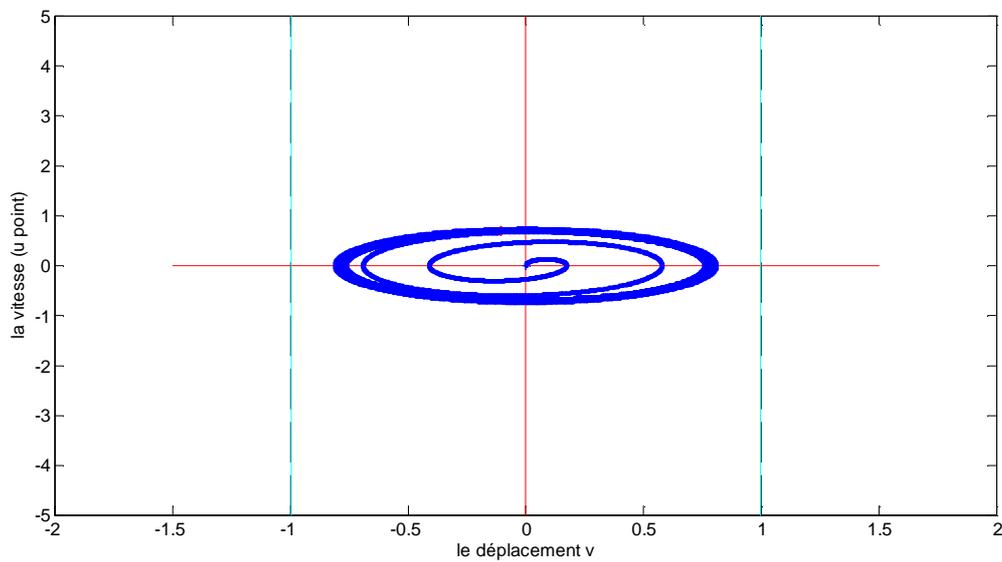
Fig. III.12. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)

Cas 1 :  $f_0 = 0.6$  ;  $\omega = 0.5$  ;  $\mu = 0.1$  ;  $\zeta = 0.2$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$



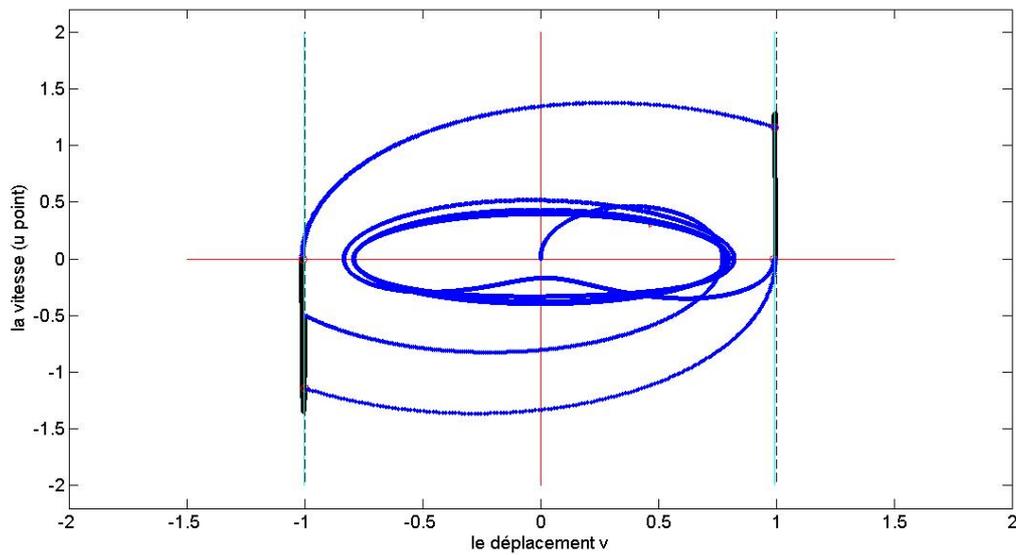
**Fig. III.13. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)**

**Cas 1 :  $f_0 = 1$  ;  $\omega = 1.5$  ;  $\mu = 0.05$  ;  $\zeta = 0.1$  ;  $(v_0, \dot{v}_0) = (0, 0)$**



**Fig. III.14. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)**

**Cas 1 :  $f_0 = 0.2$  ;  $\omega = 0.9$  ;  $\mu = 0.05$  ;  $\zeta = 0.1$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$**



**Fig. III.15. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)**

**Cas 1 :  $f_0 = 0.6$  ;  $\omega = 0.5$  ;  $\mu = 0.05$  ;  $\zeta = 0.1$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$**

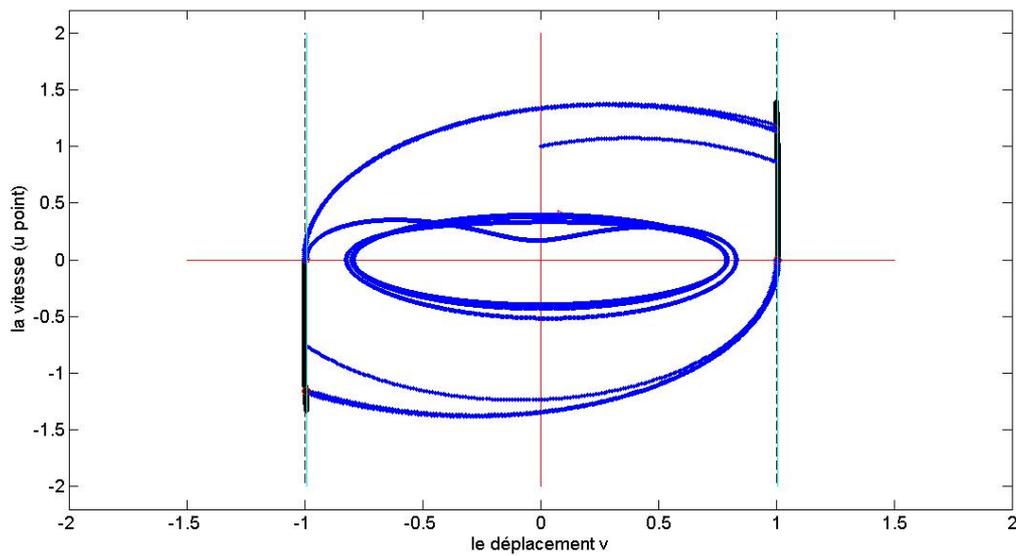
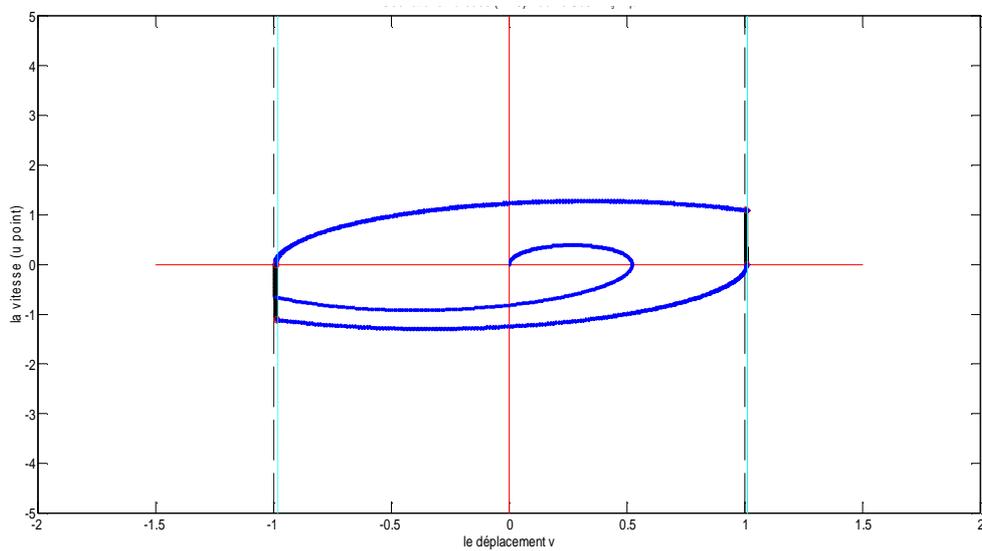


Fig. III.16. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)

Cas 1 :  $f_0 = 0.6$  ;  $\omega = 0.5$  ;  $\mu = 0.05$  ;  $\zeta = 0.1$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1)$



**Fig. III.17. Oscillations forcées (Accommodation)**

**Cas 1 :  $f_0 = 0.6$  ;  $\omega = 0.9$  ;  $\mu = 0.05$  ;  $\zeta = 0.1$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$**

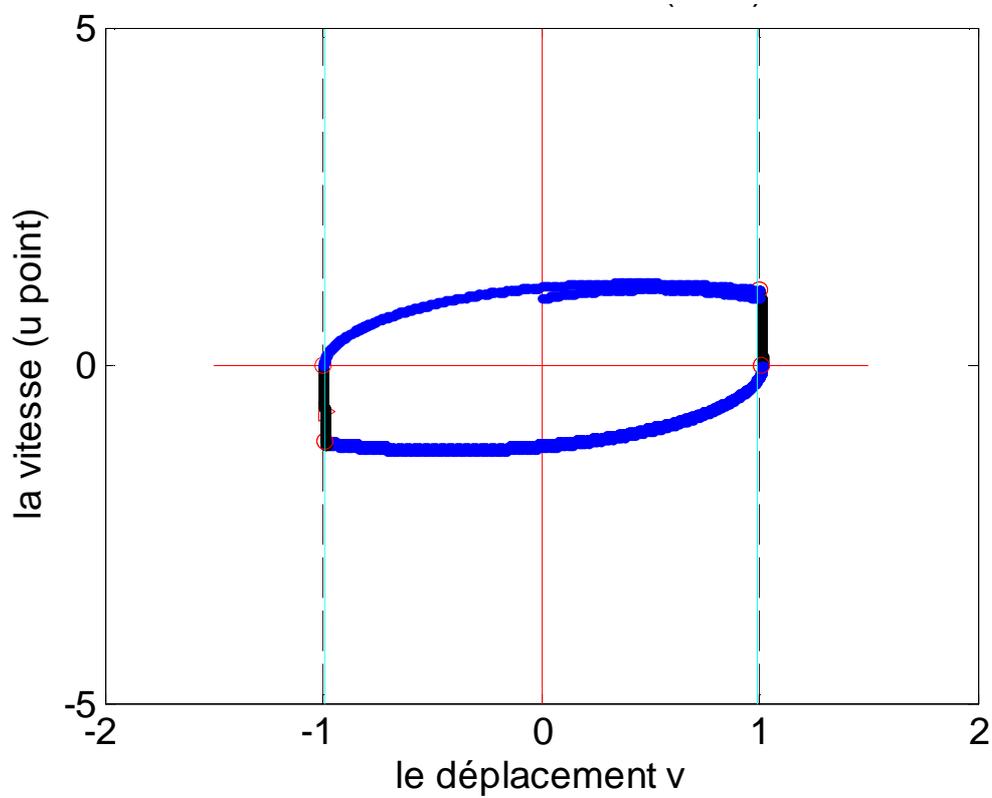


Fig. III.18. Oscillations forcées (Accommodation)

Cas 1 :  $f_0 = 1$  ;  $\omega = 0.7$  ;  $\mu = 0.09$  ;  $\zeta = 0.2$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1)$

III.5.5.2. Cas 2 Si  $\zeta = \mu$

Pour le cas critique dont le système dynamique peut avoir un taux d'amortissement égale au taux d'écrouissage, le résultat des simulations numériques est présenté comme suit :

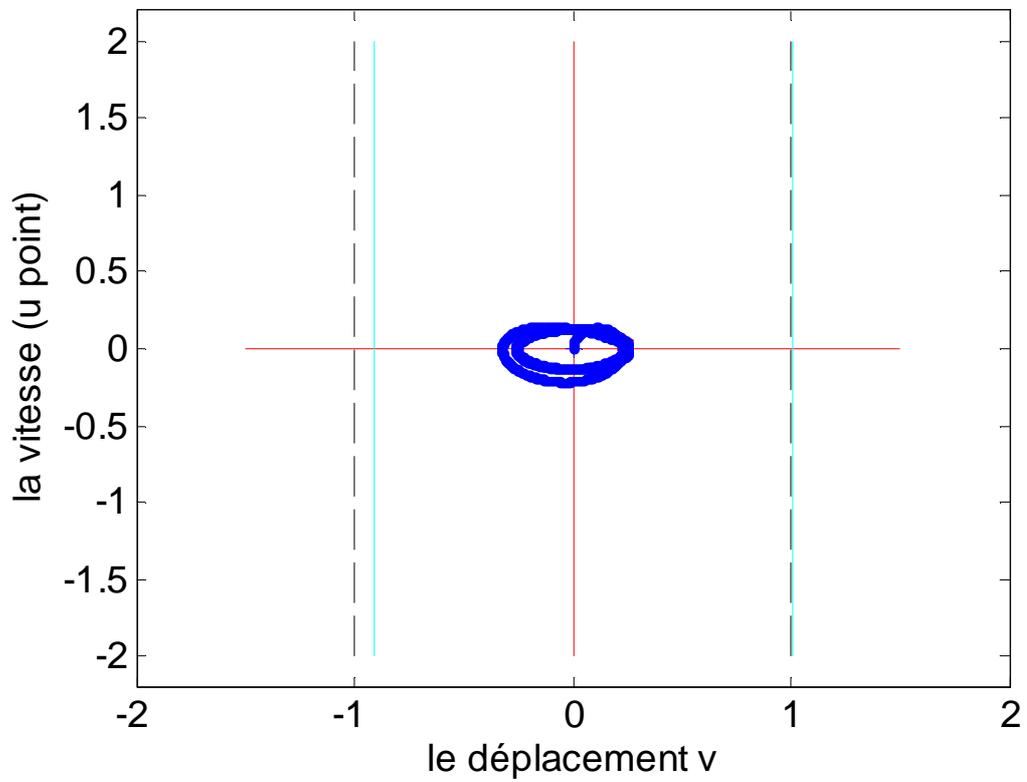


Fig. III.19. Oscillations forcées (Adaptation)

Cas 2 :  $f_0 = 0.2$  ;  $\omega = 0.5$  ;  $\mu = 0.2$  ;  $\zeta = 0.2$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$

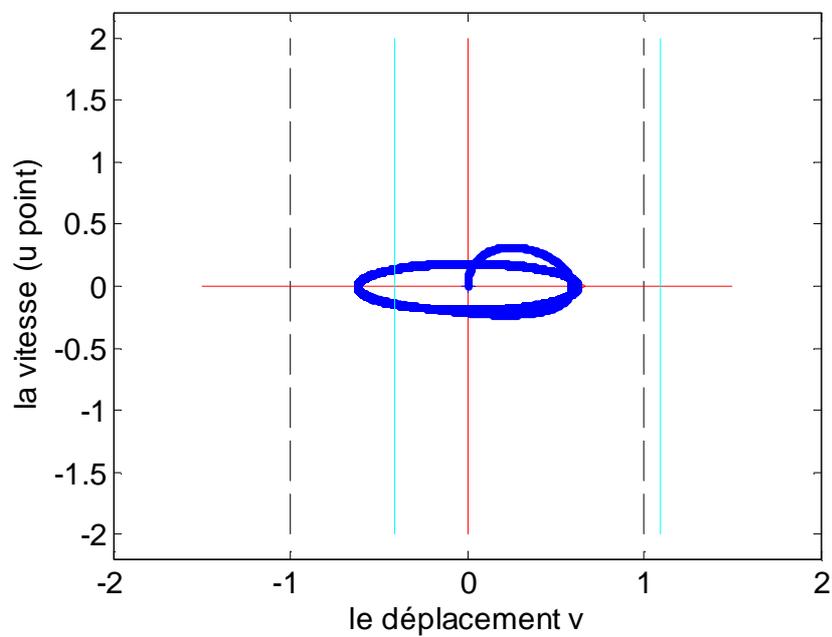


Fig. III.20. Oscillations forcées (Adaptation)

Cas 2 :  $f_0 = 0.6$  ;  $\omega = 0.3$  ;  $\mu = 0.5$  ;  $\zeta = 0.5$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$

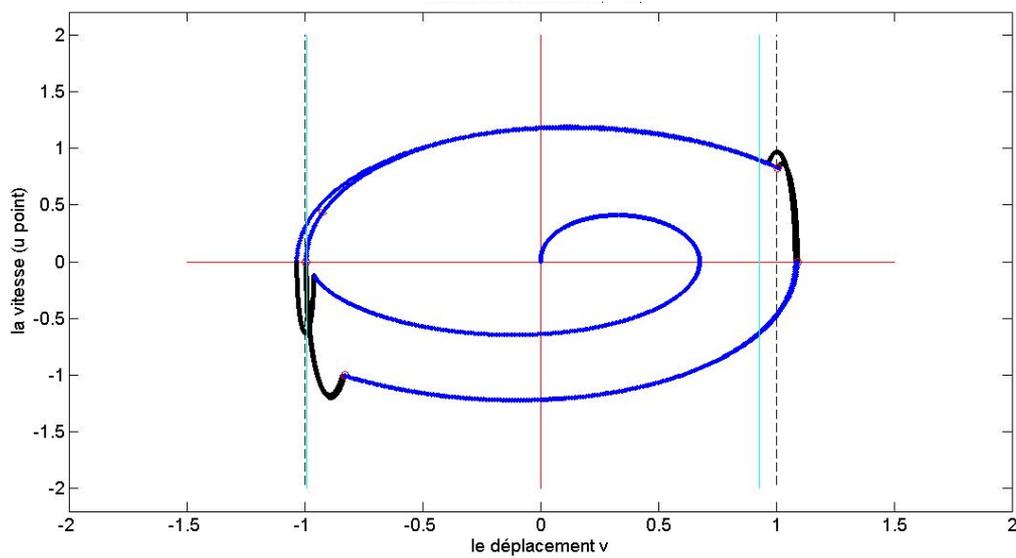


Fig. III.21. Oscillations forcées (Accommodation)

Cas 2 :  $f_0 = 0.6$  ;  $\omega = 0.5$  ;  $\mu = 0.2$  ;  $\zeta = 0.2$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$

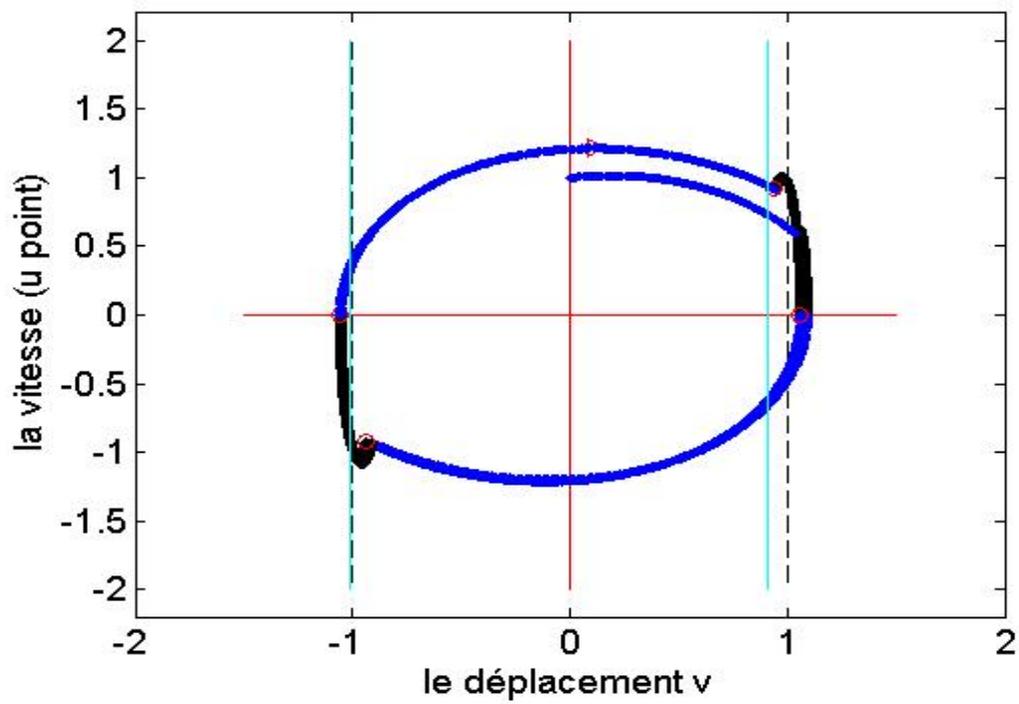


Fig. III.22. Oscillations forcées (Accommodation)

Cas 2 :  $f_0 = 0.6$  ;  $\omega = 0.5$  ;  $\mu = 0.2$  ;  $\zeta = 0.2$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1)$

III.5.5.3. Cas 3 Si  $\zeta < \mu$

Dans le cas d'un système dynamique ayant un coefficient d'écrouissage qui dépasse le taux d'amortissement de l'oscillateur, la réponse d'un tel système peut être illustrée comme suit :

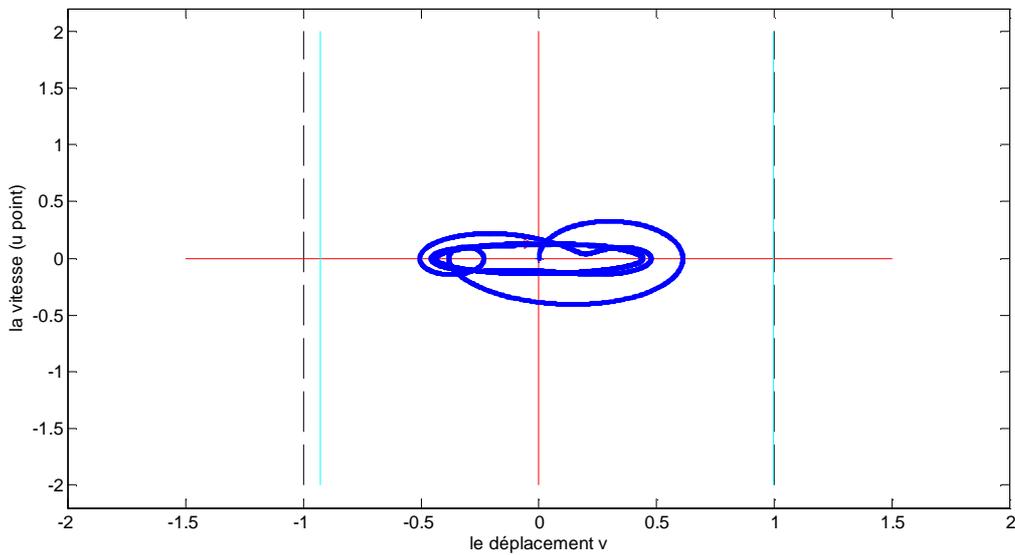
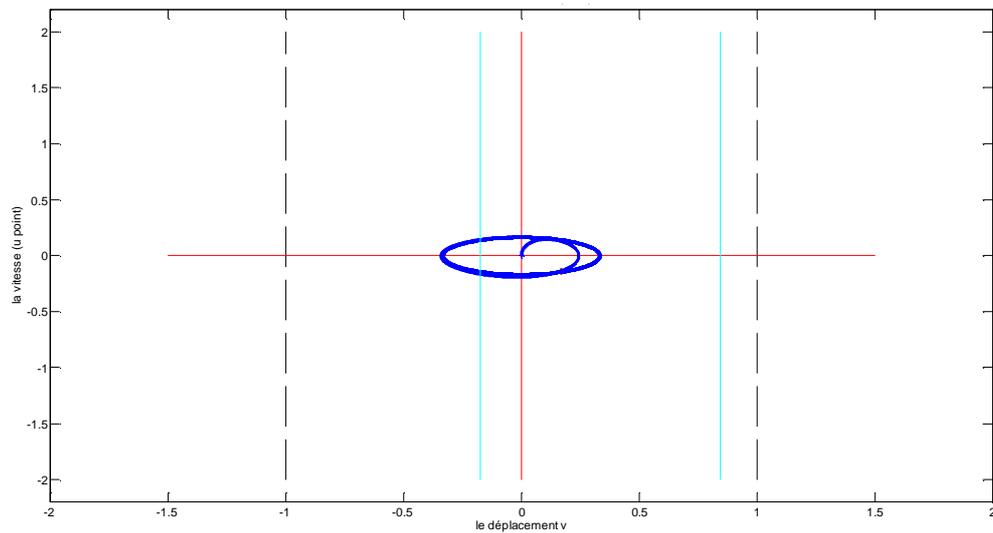


Fig. III.23. Oscillations forcées (Adaptation)

Cas 3 :  $f_0 = 0.4$  ;  $\omega = 0.3$  ;  $\mu = 0.2$  ;  $\zeta = 0.1$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$



**Fig. III.24. Oscillations forcées (Adaptation)**

**Cas 3 :  $f_0 = 0.3$  ;  $\omega = 0.5$  ;  $\mu = 0.7$  ;  $\zeta = 0.5$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$**

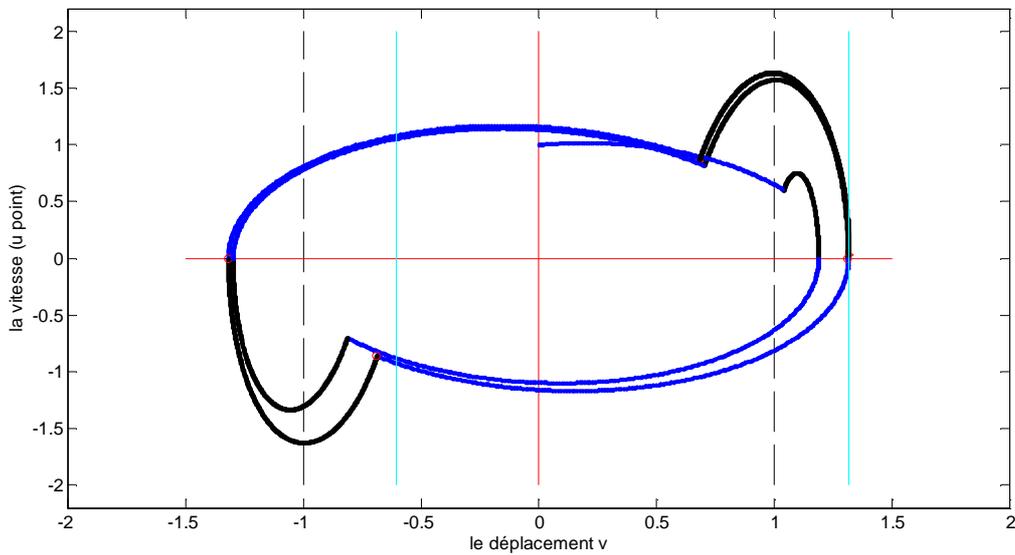
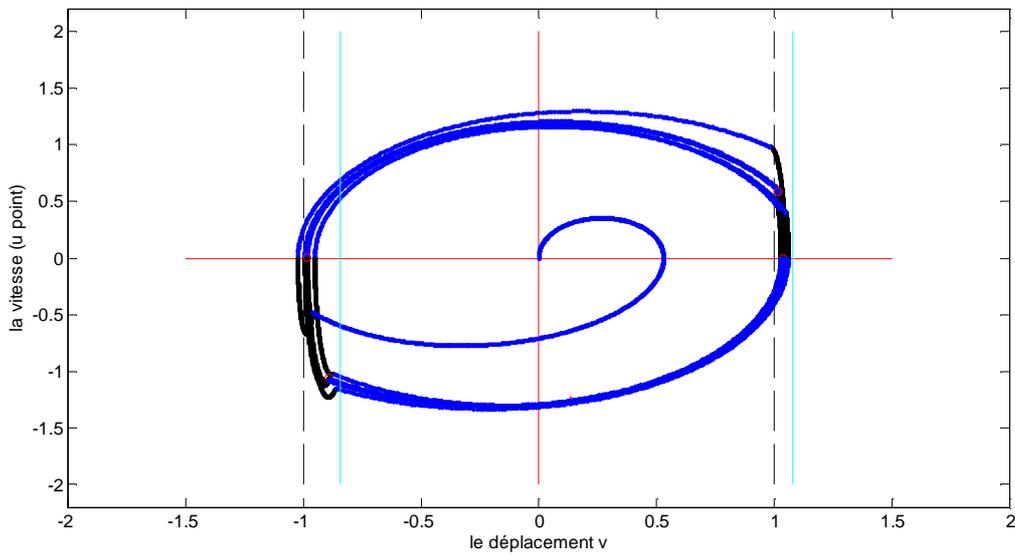


Fig. III.25. Oscillations forcées (Accommodation)

Cas 3 :  $f_0 = 0.4$  ;  $\omega = 0.2$  ;  $\mu = 0.2$  ;  $\zeta = 0.1$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1)$



**Fig. III.26. Oscillations forcées (Accommodation)**

**Cas 3 :  $f_0 = 0.5$  ;  $\omega = 0.7$  ;  $\mu = 0.2$  ;  $\zeta = 0.1$  ;  $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$**

Les résultats des simulations numériques de la réponse de l'oscillateur élastoplastique forcé en présence de l'écrouissage, nous permettent de remarquer que :

Les formes des cycles limites ont plus au moins la même forme que celle de l'oscillateur élastoplastique, pour le cas 1 (Si  $\zeta > \mu$ ), le cas qui couvre l'oscillateur élastoplastique parfait pour un taux d'écrouissage nul.

La paroi plastique dépend explicitement du coefficient d'écrouissage ( $\mu$ ), et elle est dynamique vue qu'elle dépend du déplacement ( $u$ ) qui est itératif, donc, le domaine élastique (entre les parois), immigre tout le long des oscillations.

On remarque que le temps des états plastiques dépend de la valeur du coefficient d'écrouissage ( $\mu \nearrow \Rightarrow \tau_p \nearrow$ ).

Les valeurs des paramètres dynamiques ( $\zeta, \omega, f_0$ ) sont obtenues à partir du diagramme de bifurcation de l'oscillateur élastoplastique.

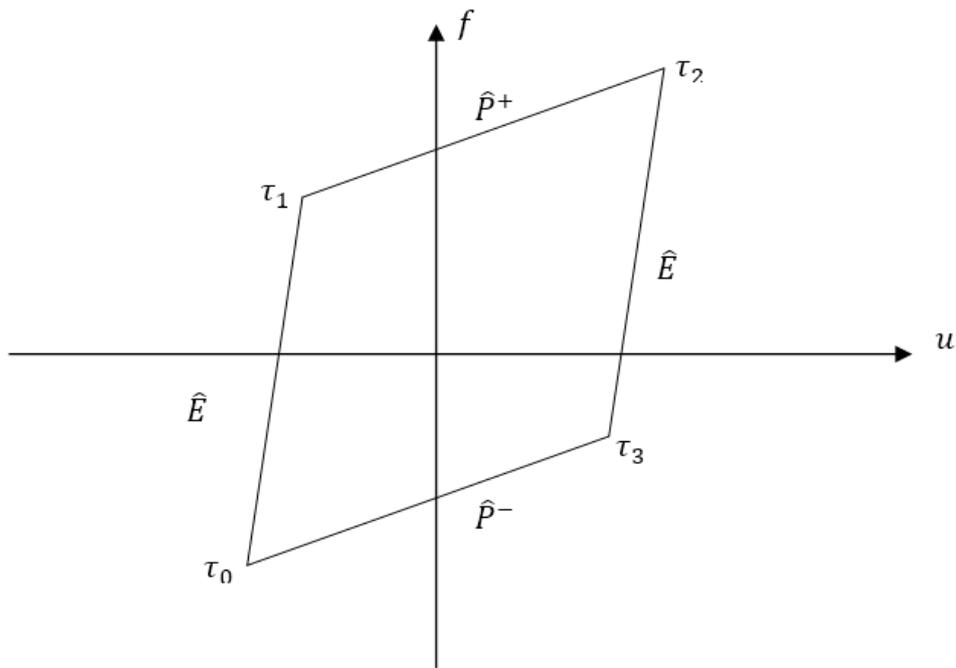
Théoriquement, la frontière est indépendante du coefficient d'écrouissage, exactement comme dans le cas de l'oscillateur élastoplastique parfait Asymétrique (Voir Hammouda, 2009), dont on a conclu que le taux d'asymétrie ( $\varepsilon$ ) n'intervient pas dans l'équation régissant la frontière, mais pratiquement et instinctivement, le taux d'écrouissage ( $\mu$ ), joue un rôle très important dans la réponse de l'oscillateur (il définit le type du cas (01 ou 02, ou 03), et certainement il jouera un rôle aussi important dans la caractérisation du cycle limite ainsi que dans le bilan énergétique de cet oscillateur, donc le processus de détermination de l'équation de la frontière de bifurcation se basera sur le critère de (Liu, 2003).

Pour des petites valeurs du coefficient d'écrouissage, on remarque aussi l'apparition des - Superharmonics Oscillations-, précédemment observées dans les travaux de (Challamel & Gilles, 2007), pour le cas de l'oscillateur parfait, mais en petites pulsation (les Cornes).

La détermination analytique des temps de transition, est quasiment non faisable (uniquement pour le cas des oscillations libres qui ne contient pas le terme stationnaire issu de la solution particulière), du fait que les équations à résoudre sont transcendantes, et la solution numérique nous fournit les paramètres de départ de chaque état, en fonction des paramètres structuraux, donc la caractérisation du cycle limite se fera de façon semi-analytique, en se basant sur les conditions qui contrôlent les temps de transition.

III.5.6. Caractérisation du Cycle limite

L'étude caractéristique du cycle limite de l'oscillateur élastoplastique en présence de l'écrouissage concernant le cas 1 (Si  $\zeta > \mu$ ), représente l'apport scientifique le plus important de cette thèse. En effet, selon la classification des orbites introduite par les travaux de (Awrejcewicz & Lamarque, 2003), le cycle limite (1, 2)-périodique est analytiquement régi par les conditions de l'équation (eq III.83), similaire à l'équation (eq. II.40), pour le cas du système élastoplastique parfait ( $\mu=0$ ) :



$$\begin{aligned}
 & (\tau_0, u_0, u_{p_0}, \dot{u}_0) \quad \rightarrow \quad (\tau_1, u_1, u_{p_1}, \dot{u}_1) \quad \rightarrow \quad (\tau_2, u_2, u_{p_2}, \dot{u}_2) \\
 & \begin{cases} \tau_0 \\ u_0 \\ u_{p_0} = (1 - \mu^2)u_0 + (1 - \mu^2) \\ \dot{u}_0 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \tau_1 \\ u_1 = 1 + \frac{1}{1 - \mu^2} u_{p_0} \\ u_{p_1} = u_{p_0} \\ \dot{u}_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \tau_2 = \tau_0 + \frac{\pi}{\omega} \\ u_2 = 1 - \frac{1}{1 - \mu^2} u_{p_0} = -u_0 \\ u_{p_2} = -u_{p_0} \\ \dot{u}_2 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Fig. III.27. Caractérisation Analytique du Cycle limite

Afin d'obtenir une résolution semi-analytique des temps de transition des états dynamiques, nous nous référons aux conditions contrôlant ces différents états dynamiques, pour un demi-cycle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etat } \hat{E} \text{ (de } \tau_0 \text{ à } \tau_1): \\ \text{Etat } \hat{P}^+ \text{ (de } \tau_1 \text{ à } \tau_2): \end{array} \right. \begin{array}{l} v(\tau_1) = [(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1(\tau_1)] ; \quad \dot{u}(\tau_0, \tau_1) = \dot{u}_1 \quad (1) \\ \dot{u}(\tau_1, \tau_2, \dot{u}_1) = \dot{u}_2 = 0 \quad ; \quad \tau_2 - \tau_0 = \frac{\pi}{\omega} \quad (2) \\ u_2(\tau_1, u_1, \dot{u}_1, \tau_2) = -u_0 \quad ; \quad y = \tau_1 - \tau_0 \end{array} \quad (\text{III.83})$$

L'objectif est de rassembler trois fonctions issues du système d'équations (eq. III.83), ayant les mêmes variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etat } \hat{E} \text{ (de } \tau_0 \text{ à } \tau_1): \\ \text{Etat } \hat{P}^+ \text{ (de } \tau_1 \text{ à } \tau_2): \end{array} \right. \begin{array}{l} F(\tau_0, y, u_0) = 0 \quad (1) \\ G(\tau_0, y, u_0) = 0 \quad (2) \\ H(\tau_0, y, u_0) = 0 \quad (3) \end{array} \quad (\text{III.84})$$

La réduction des dimensions du système d'équations (eq. III.84), se fera en admettant :

$$F(\tau_0, y, u_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = I(\tau_0, y) = I_1(y)\text{Cos}(\omega\tau_0) + I_2(y)\text{Sin}(\omega\tau_0) + I_3(y) \quad (\text{III.85})$$

Donc, le système (eq. III.84) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\tau_0, y) = 0 \\ K(\tau_0, y) = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \quad \Rightarrow \quad L(y) = 0 \quad (3) \quad (\text{III.86})$$

Sachant que le déplacement plastique ( $u_p$ ) est constant durant l'état élastique :

$$\hat{E} : u_{p_1} = u_{p_0} = (1 - \mu^2)u_0 + (1 - \mu^2) \quad (\text{III.87})$$

L'équation (eq. III.83.1) qui représente la fonction (eq. III.84.1), se réécrit en considérant (eq. III.87) :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\tau_1) = \mu^2 u_0 + (1 + \mu^2) \\ u_1(\tau_1) = u_0 + 2 \end{array} \right. \quad (\text{III.87})$$

L'expression du déplacement élastique  $v(\tau_1)$  est utilisée dans la simplification à partir de (eq. III.48 et III.50), en fonction du temps total de cet état élastique ( $y$ ), afin d'arriver à l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} & \mu^2 u_0 e^{-\zeta y} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}y) - \left( (1-\mu^2) + f_0 \frac{(1-\omega^2)\cos(\omega\tau_0)+2\omega\zeta\sin(\omega\tau_0)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2} \right) e^{-\zeta y} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}y) + \mu^2 \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} u_0 e^{-\zeta y} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}y) + \\ & \left( \frac{-\zeta(1-\mu^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} + f_0 \frac{-\zeta(1+\omega^2)\cos(\omega\tau_0)+\omega(1-\omega^2-2\zeta^2)\sin(\omega\tau_0)}{\sqrt{1-\zeta^2}[(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2]} \right) e^{-\zeta y} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}y) + f_0 \frac{(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2} (\cos(\omega y) \cos(\omega\tau_0) - \sin(\omega y) \sin(\omega\tau_0)) + \\ & f_0 \frac{2\omega\zeta}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2} (\sin(\omega y) \cos(\omega\tau_0) + \cos(\omega y) \sin(\omega\tau_0)) = \mu^2 u_0 + (1 + \mu^2) \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \cos(\omega\tau_1) = \cos(\omega y + \omega\tau_0) = \cos(\omega y) \cos(\omega\tau_0) - \sin(\omega y) \sin(\omega\tau_0) \\ \sin(\omega\tau_1) = \sin(\omega y + \omega\tau_0) = \sin(\omega y) \cos(\omega\tau_0) + \cos(\omega y) \sin(\omega\tau_0) \end{cases} \quad (\text{III.89})$$

Ce qui peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned} & \mu^2 u_0 \left[ e^{-\zeta y} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}y) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta y} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}y) - 1 \right] = (1 - \mu^2) + \left( (1 - \mu^2) + \right. \\ & \left. f_0 \frac{(1-\omega^2)\cos(\omega\tau_0)+2\omega\zeta\sin(\omega\tau_0)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2} \right) e^{-\zeta y} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}y) + \left( \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} - \right. \\ & \left. f_0 \frac{-\zeta(1+\omega^2)\cos(\omega\tau_0)+\omega(1-\omega^2-2\zeta^2)\sin(\omega\tau_0)}{\sqrt{1-\zeta^2}[(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2]} \right) e^{-\zeta y} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}y) - \cos(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{f_0(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2} \right) \cos(\omega y) + \right. \\ & \left. \left( \frac{f_0 2\omega\zeta}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2} \right) \sin(\omega y) \right] - \sin(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{f_0 2\omega\zeta}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2} \right) \cos(\omega y) - \left( \frac{f_0(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2\zeta^2} \right) \sin(\omega y) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

En Regroupant et en notant :  $\begin{cases} \alpha = (1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2 \\ \beta = (\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2 \end{cases}$  ; La fonction  $F(\tau_0, y, u_0) = 0$

devient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{Cos}(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{-f_0(1-\omega^2)}{\alpha} \right) \cos(\omega y) - \left( \frac{f_0 2\omega\zeta}{\alpha} \right) \sin(\omega y) + e^{-\zeta y} \left( \frac{f_0(1-\omega^2)}{\alpha} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}y) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{f_0 \zeta(1+\omega^2)}{\sqrt{1-\zeta^2} \alpha} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}y) \right) \right] + \mathbf{Sin}(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{-f_0 2\omega\zeta}{\alpha} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{f_0(1-\omega^2)}{\alpha} \right) \sin(\omega y) + \right. \\ & \left. e^{-\zeta y} \left( \frac{f_0 2\omega\zeta}{\alpha} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}y) - \frac{f_0 \omega(1-\omega^2-2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2} \alpha} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}y) \right) \right] + \left[ (1 - \mu^2) + e^{-\zeta y} \left( (1 - \right. \right. \\ & \left. \left. \mu^2) \cos(\sqrt{1-\zeta^2}y) + \left( \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin(\sqrt{1-\zeta^2}y) \right) \right] = \mathbf{u}_0 \left( \mu^2 \left[ \left( \cos(\sqrt{1-\zeta^2}y) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}y) \right) e^{-\zeta y} - 1 \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

La fonction ( $F$ ) de l'équation (eq. III.84.1) est écrite sous la forme :

$$\text{Cos}(\omega\tau_0) [G_1] + \text{Sin}(\omega\tau_0) [G_2] + [G_3] = u_0 [G_4] \quad (\text{III.92})$$

Avec les paramètres de l'équation (III.85) :

$$u_0 = \text{Cos}(\omega\tau_0) [I_1(y)] + \text{Sin}(\omega\tau_0) [I_2(y)] + [I_3(y)] \quad \text{Dont : } \begin{cases} I_1(y) = \frac{G_1}{G_4} \\ I_2(y) = \frac{G_2}{G_4} \\ I_3(y) = \frac{G_3}{G_4} \end{cases} \quad (\text{III.93})$$

Avec :

$$\begin{cases} G_1 = \left[ \left( \frac{-f_0(1-\omega^2)}{\alpha} \right) \cos(\omega y) - \left( \frac{f_0 2\omega\zeta}{\alpha} \right) \sin(\omega y) + e^{-\zeta y} \left( \frac{f_0(1-\omega^2)}{\alpha} \cos(\sqrt{1-\zeta^2} y) + \frac{f_0 \zeta(1+\omega^2)}{\sqrt{1-\zeta^2} \alpha} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} y) \right) \right] \\ G_2 = \left[ \left( \frac{-f_0 2\omega\zeta}{\alpha} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{f_0(1-\omega^2)}{\alpha} \right) \sin(\omega y) + e^{-\zeta y} \left( \frac{f_0 2\omega\zeta}{\alpha} \cos(\sqrt{1-\zeta^2} y) - \frac{f_0 \omega(1-\omega^2-2\zeta^2)}{\sqrt{1-\zeta^2} \alpha} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} y) \right) \right] \\ G_3 = \left[ (1-\mu^2) + e^{-\zeta y} \left( (1-\mu^2) \cos(\sqrt{1-\zeta^2} y) + \left( \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin(\sqrt{1-\zeta^2} y) \right) \right] \\ G_4 = \mu^2 \left[ \left( \cos(\sqrt{1-\zeta^2} y) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2} y) \right) e^{-\zeta y} - 1 \right] \end{cases} \quad (\text{III.94})$$

La fonction  $G(\tau_0, y, u_0)$  est ainsi simplifiée en reprenons la condition (eq. III.83.2) à l'instant ( $\tau_2$ ) c.à.d.  $\dot{u}_2(\tau_1, u_1, \dot{u}_1, \tau_2) = 0$ , et en utilisant la propriété de la symétrie du cycle limite est le paramètre temporel adopté ( $y$ ) :

$$\begin{aligned} & \left[ (-\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau_2 - \tau_1)] + (-\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau_2 - \tau_1)] \right] e^{-\zeta(\tau_2 - \tau_1)} \\ & + \frac{\omega f_0}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} [2\omega\zeta \cos(\omega\tau_2) - (\mu^2 - \omega^2) \sin(\omega\tau_2)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

L'expression de constantes ( $A, B$ ) est donnée par (eq.III.59), ainsi que ( $\dot{u}_1$ ) est donnée après simplification :

$$\dot{u}_1(\tau_1) = \left[ \begin{aligned} & \left( -\omega f_0 \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_0) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau_0)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} \right) \cos[\sqrt{1-\zeta^2} y] \\ & + \left( \frac{(1-\mu^2) - \mu^2 u_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} + f_0 \frac{(2\omega^2 \zeta^2 + 1 - \omega^2) \cos(\omega\tau_0) + (\omega\zeta(1+\omega^2)) \sin(\omega\tau_0)}{\sqrt{1-\zeta^2}((1-\omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2)} \right) \sin[\sqrt{1-\zeta^2} y] \end{aligned} \right] e^{-\zeta y} + \omega f_0 \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_1) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau_1)}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2} \quad (\text{III.96})$$

Sachant qu'en utilisant les changements de variables en équation (eq. III.83.2), ainsi que :

$$\begin{cases} \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau_2 - \tau_1)] = \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right)] \\ \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau_2 - \tau_1)] = -\sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right)] \\ e^{-\zeta(\tau_2 - \tau_1)} = e^{\zeta \left[ y - \frac{\pi}{\omega} \right]} \\ \cos(\omega\tau_2) = -\cos(\omega\tau_0) \\ \sin(\omega\tau_2) = -\sin(\omega\tau_0) \end{cases} \quad (\text{III.97})$$

En simplifiant séparément les termes  $(-\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2})$  et  $[ -(-\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) ]$  :

$$\begin{aligned}
 (-\zeta A + B\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) &= \mathbf{Cos}(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{f_0 2\omega^2\zeta}{\alpha} - \frac{2f_0\zeta\omega^2}{\beta} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{\omega f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} - \frac{\omega f_0(1 - \omega^2)}{\alpha} \right) \sin(\omega y) + \right. \\
 &e^{-\zeta y} \left( \frac{-\omega^2 f_0 2\zeta}{\alpha} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} y) + \frac{f_0(2\omega^2\zeta^2 + 1 - \omega^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2} \alpha} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} y) \right) \left. \right] + \mathbf{Sin}(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{\omega f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} - \right. \right. \\
 &\left. \frac{\omega f_0(1 - \omega^2)}{\alpha} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{f_0 2\omega^2\zeta}{\beta} - \frac{2f_0\zeta\omega^2}{\alpha} \right) \sin(\omega y) + e^{-\zeta y} \left( \frac{\omega f_0(1 - \omega^2)}{\alpha} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} y) + \right. \\
 &\left. \frac{f_0 \omega \zeta(1 + \omega^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2} \alpha} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} y) \right) \left. \right] + \left[ \frac{(1 - \mu^2) - \mu^2 u_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta y} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} y) \right] \quad (\text{III.98})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -(-\zeta B + A\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}) &= \mathbf{Cos}(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{f_0 2\omega^2\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \alpha} - \frac{f_0 \mu^2(\mu^2 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \beta} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{-2f_0\zeta\omega\mu^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \beta} - \frac{f_0 \omega \zeta(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \alpha} \right) \sin(\omega y) + \right. \\
 &e^{-\zeta y} \left( \frac{-\omega^2 f_0 2\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \alpha} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} y) + \frac{f_0(2\omega^2\zeta^3 + \zeta - \zeta\omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \sqrt{1 - \zeta^2} \alpha} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} y) \right) \left. \right] + \mathbf{Sin}(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{-2\omega f_0 \zeta \mu^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \beta} - \right. \right. \\
 &\left. \frac{f_0 \omega \zeta(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \alpha} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{f_0 \mu^2(\mu^2 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \beta} - \frac{f_0 2\omega^2\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \alpha} \right) \sin(\omega y) + e^{-\zeta y} \left( \frac{\omega f_0 \zeta(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \alpha} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} y) + \right. \\
 &\left. \frac{f_0 \omega \zeta^2(1 + \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \sqrt{1 - \zeta^2} \alpha} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} y) \right) \left. \right] + \left[ \zeta \left( \frac{(1 - \mu^2) - \mu^2 u_0}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) e^{-\zeta y} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} y) + \frac{\mu^2 u_0 + (1 + \mu^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \right] \quad (\text{III.99})
 \end{aligned}$$

La fonction  $G(\tau_0, y, u_0)$  décrite en (eq. III.95) peut prendre la forme :

$$\hat{A}(y)\mathbf{Cos}(\omega\tau_0) + \hat{B}(y)\mathbf{Sin}(\omega\tau_0) = \hat{C}(y) \quad (\text{III.100})$$

Tel que :

$$\begin{cases} \hat{A}(y) = e^{\zeta(y - \frac{\pi}{\omega})} \left[ \hat{A}_1 \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] + \hat{A}_2 \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \right] - \frac{2f_0\omega^2\zeta}{\beta} \\ \hat{B}(y) = e^{\zeta(y - \frac{\pi}{\omega})} \left[ \hat{B}_1 \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] + \hat{B}_2 \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \right] + \frac{\omega f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} \\ \hat{C}(y) = \hat{C}_1 \mathbf{u}_0 + \hat{C}_2 \end{cases} \quad (\text{III.101})$$

La fonction  $G(\tau_0, y, u_0)$  décrite en (eq. III.95), est ainsi obtenue, en regroupant (eq. III.98-101), avec :

$$\widehat{A}_1 = \left( \cos(\omega y) \left[ \frac{2f_0\omega^2\zeta}{\alpha} - \frac{2f_0\omega^2\zeta}{\beta} \right] + \sin(\omega y) \left[ \frac{\omega f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} - \frac{\omega f_0(1 - \omega^2)}{\alpha} \right] + e^{-\zeta y} \left[ \left( \frac{-2f_0\omega^2\zeta}{\alpha} \right) \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] + \left( \frac{f_0(2\omega^2\zeta^2 + 1 - \omega^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}\alpha} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] \right) \quad (III.101.1)$$

$$\widehat{A}_2 = \left( \cos(\omega y) \left[ \frac{2f_0\omega^2\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\alpha} - \frac{f_0\mu^2(\mu^2 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\beta} \right] + \sin(\omega y) \left[ \frac{-2f_0\zeta\omega\mu^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\beta} - \frac{\omega f_0\zeta(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\alpha} \right] + e^{-\zeta y} \left[ \left( \frac{-2f_0\omega^2\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\alpha} \right) \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] + \left( \frac{f_0(2\omega^2\zeta^3 + \zeta - \zeta\omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2}\alpha} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] \right)$$

$$\widehat{B}_1 = \left( \cos(\omega y) \left[ \frac{\omega f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} - \frac{\omega f_0(1 - \omega^2)}{\alpha} \right] + \sin(\omega y) \left[ \frac{2f_0\omega^2\zeta}{\beta} - \frac{2f_0\omega^2\zeta}{\alpha} \right] + e^{-\zeta y} \left[ \left( \frac{\omega f_0(1 - \omega^2)}{\alpha} \right) \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] + \left( \frac{\omega f_0\zeta(1 + \omega^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}\alpha} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] \right) \quad (III.101.2)$$

$$\widehat{B}_2 = \left( \cos(\omega y) \left[ \frac{-2f_0\zeta\omega\mu^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\beta} - \frac{\omega f_0\zeta(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\alpha} \right] + \sin(\omega y) \left[ \frac{f_0\mu^2(\mu^2 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\beta} - \frac{2f_0\omega^2\zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\alpha} \right] + e^{-\zeta y} \left[ \left( \frac{\omega f_0\zeta(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\alpha} \right) \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] + \left( \frac{\omega f_0\zeta^2(1 + \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2}\alpha} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] \right)$$

$$\widehat{C}_1 = \left[ \begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\mu^2}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right) e^{-\zeta y} \right] \cdot \text{Cosh}[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(y - \frac{\pi}{\omega})] \\ & + \left[ \left( \frac{\zeta\mu^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right) e^{-\zeta y} - \left( \frac{\mu^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \right) \right] \cdot \text{Sinh}[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(y - \frac{\pi}{\omega})] \end{aligned} \right] e^{\zeta(y - \frac{\pi}{\omega})} \quad (III.101.3)$$

$$\widehat{C}_2 = \left[ \begin{aligned} & \left[ \left( \frac{(\mu^2 - 1)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right) e^{-\zeta y} \right] \cdot \text{Cosh}[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(y - \frac{\pi}{\omega})] \\ & + \left[ \left( \frac{\zeta(\mu^2 - 1)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right) e^{-\zeta y} - \left( \frac{(1 + \mu^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \right) \right] \cdot \text{Sinh}[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(y - \frac{\pi}{\omega})] \end{aligned} \right] e^{\zeta(y - \frac{\pi}{\omega})}$$

De la même façon, la fonction  $H(\tau_0, y, u_0)$  est simplifiée en reprenons la condition (eq. III.83.3) à l'instant  $(\tau_2)$  c.à.d.  $u_2(\tau_1, u_1, \dot{u}_1, \tau_2) = -u_0$ , et en utilisant la propriété de la symétrie du cycle limite est le paramètre temporel adopté ( $y$ ) :

$$u_2 = \left[ A \cosh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau_2 - \tau_1)] + B \sinh[\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\tau_2 - \tau_1)] \right] e^{-\zeta(\tau_2 - \tau_1)} - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_2) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_2)}{(\mu^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\zeta^2} = -u_0 \quad (\text{III.102})$$

L'expression de constantes ( $A, B$ ) est donnée par (eq.III.59), ainsi que  $(\dot{u}_1)$  est donnée par (eq. III.96), et en utilisant (eq. III.97), l'équation (III.102) devient :

$$\left[ \begin{aligned} & \left( (u_0 + 2) + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} - f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_1) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_1)}{\beta} \right) \cdot \text{Cosh} \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \\ & + \left( \frac{-\dot{u}_1}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\zeta(u_0 + 2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\mu^2 \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} + f_0 \left( \frac{\zeta(\mu^2 + \omega^2) \cos(\omega\tau_1) + [\omega(2\zeta^2 - (\mu^2 - \omega^2))] \sin(\omega\tau_1)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \beta} \right) \right) \cdot \text{sinh} \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \right] e^{\zeta \left[ y - \frac{\pi}{\omega} \right] - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2}} - f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_0) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_0)}{\beta} + u_0 = 0 \quad (\text{III.103})$$

Pour des raisons de séparation de simplifications l'équation (eq. III.103) se réécrit :

$$\left[ \begin{aligned} & \bar{\mathcal{C}} \cdot \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \\ & + \bar{\mathcal{S}} \cdot \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \right] e^{\zeta \left[ y - \frac{\pi}{\omega} \right] - \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2}} - f_0 \frac{(\mu^2 - \omega^2) \cos(\omega\tau_0) + 2\zeta\omega \sin(\omega\tau_0)}{\beta} + u_0 = 0 \quad (\text{III.104})$$

Avec, après simplifications et regroupement :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}} &= (u_0 + 2) + \frac{(1-\mu^2)}{\mu^2} + \mathbf{Cos}(\omega\tau_0) \left[ \left( \frac{-f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{-2f_0\zeta\omega}{\beta} \right) \sin(\omega y) \right] + \\ \mathbf{Sin}(\omega\tau_0) &\left[ \left( \frac{f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} \right) \sin(\omega y) + \left( \frac{-2f_0\zeta\omega}{\beta} \right) \cos(\omega y) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.105})$$

De même pour  $\bar{\mathcal{S}}$  :

$$\bar{\mathcal{S}} = \frac{-\dot{u}_1}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\zeta(u_0 + 2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\mu^2 \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} + f_0 \left( \frac{\zeta(\mu^2 + \omega^2) \cos(\omega\tau_1) + [\omega(2\zeta^2 - (\mu^2 - \omega^2))] \sin(\omega\tau_1)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \beta} \right) \quad (\text{III.106})$$

Donc :

$$\bar{\mathcal{S}} = \left[ \begin{aligned} & \left( \omega f_0 \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_0) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau_0)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} (\alpha)} \right) \cos \left[ \sqrt{1 - \zeta^2} y \right] \\ & + \left( \frac{-(1-\mu^2) + \mu^2 u_0}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} - f_0 \frac{(2\omega^2\zeta^2 + 1 - \omega^2) \cos(\omega\tau_0) + (\omega\zeta(1 + \omega^2)) \sin(\omega\tau_0)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \sqrt{1 - \zeta^2} (\alpha)} \right) \sin \left[ \sqrt{1 - \zeta^2} y \right] \end{aligned} \right] e^{-\zeta y} - \omega f_0 \frac{2\omega\zeta \cos(\omega\tau_1) - (1-\omega^2) \sin(\omega\tau_1)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} (\alpha)} - \frac{\zeta(u_0 + 2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\zeta(1-\mu^2)}{\mu^2 \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} + f_0 \left( \frac{\zeta(\mu^2 + \omega^2) \cos(\omega\tau_1) + [\omega(2\zeta^2 - (\mu^2 - \omega^2))] \sin(\omega\tau_1)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \beta} \right) \quad (\text{III.107})$$

Après simplifications et regroupement :

$$\begin{aligned} \bar{S} = & \left( \cos(\omega y) \left[ \frac{f_0 \zeta (\mu^2 + \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\beta)} - \frac{2f_0 \omega^2 \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right] + \sin(\omega y) \left[ \frac{f_0 \omega (2\zeta^2 - (\mu^2 - \omega^2))}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\beta)} + \frac{\omega f_0 (1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right] + e^{-\zeta y} \left[ \left( \frac{2f_0 \omega^2 \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right) \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] - \right. \\ & \left. \left( \frac{f_0 (2\omega^2 \zeta^2 + 1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \sqrt{1 - \zeta^2}(\alpha)} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] \mathbf{Cos}(\omega \tau_0) + \left( \cos(\omega y) \left[ \frac{f_0 \omega (2\zeta^2 - (\mu^2 - \omega^2))}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\beta)} + \frac{\omega f_0 (1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right] - \sin(\omega y) \left[ \frac{f_0 \zeta (\mu^2 + \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\beta)} - \frac{2f_0 \omega^2 \zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right] + \right. \\ & \left. e^{-\zeta y} \left[ \left( -\frac{\omega f_0 (1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right) \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] - \left( \frac{\omega f_0 \zeta (1 + \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \sqrt{1 - \zeta^2}(\alpha)} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] \right) \mathbf{Sin}(\omega \tau_0) + \left[ \left( \frac{\mu^2 u_0 - (1 - \mu^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \cdot e^{-\zeta y} \cdot \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] - \\ & \frac{\zeta(u_0 + 2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} - \frac{\zeta(1 - \mu^2)}{\mu^2 \sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \end{aligned} \quad (\text{III.108})$$

De même façon que la fonction précédente, la fonction  $H(\tau_0, y, u_0)$  prendra la forme :

$$\widehat{D}(y) \mathbf{Cos}(\omega \tau_0) + \widehat{E}(y) \mathbf{Sin}(\omega \tau_0) = \widehat{F}(y) \quad (\text{III.109})$$

Tel que :

$$\begin{cases} \widehat{D}(y) = e^{\zeta(y - \frac{\pi}{\omega})} \left[ \widehat{D}_1 \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] + \widehat{D}_2 \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \right] - \frac{f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} \\ \widehat{E}(y) = e^{\zeta(y - \frac{\pi}{\omega})} \left[ \widehat{E}_1 \cosh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] + \widehat{E}_2 \sinh \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \right] - \frac{2\omega f_0 \zeta}{\beta} \\ \widehat{F}(y) = \widehat{F}_1 \mathbf{u}_0 + \widehat{F}_2 \end{cases} \quad (\text{III.110})$$

La fonction  $H(\tau_0, y, u_0)$  décrite en (eq. III.102), est ainsi obtenue, en regroupant (eq. III.105, 108-110), avec :

$$\widehat{D}_1 = \left[ \left( \frac{-f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{-2f_0\zeta\omega}{\beta} \right) \sin(\omega y) \right] \quad (III.110.1)$$

$$\widehat{D}_2 = \left[ \cos(\omega y) \left[ \frac{f_0\zeta(\mu^2 + \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\beta)} - \frac{2f_0\omega^2\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right] + \sin(\omega y) \left[ \frac{f_0\omega(2\zeta^2 - (\mu^2 - \omega^2))}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\beta)} + \frac{\omega f_0(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right] + e^{-\zeta y} \left[ \left( \frac{2f_0\omega^2\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right) \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] - \left( \frac{f_0(2\omega^2\zeta^2 + 1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2}(\alpha)} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] \right]$$

$$\widehat{E}_1 = \left[ \left( \frac{-2f_0\zeta\omega}{\beta} \right) \cos(\omega y) + \left( \frac{f_0(\mu^2 - \omega^2)}{\beta} \right) \sin(\omega y) \right] \quad (III.110.2)$$

$$\widehat{E}_2 = \left[ \cos(\omega y) \left[ \frac{f_0\omega(2\zeta^2 - (\mu^2 - \omega^2))}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\beta)} + \frac{\omega f_0(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right] + \sin(\omega y) \left[ \frac{2f_0\omega^2\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} - \frac{f_0\zeta(\mu^2 + \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\beta)} \right] + e^{-\zeta y} \left[ \left( \frac{-\omega f_0(1 - \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}(\alpha)} \right) \cos[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] - \left( \frac{\omega f_0\zeta(1 + \omega^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2}(\alpha)} \right) \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right] \right]$$

$$\widehat{F}_1 = \left( -1 - \left[ \left( \frac{\mu^2}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right) e^{-\zeta y} - \left( \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \right) \cdot \text{Sinh} \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \right] e^{\zeta \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right)} \right) \quad (III.110.3)$$

$$\widehat{F}_2 = \left( \frac{(1 - \mu^2)}{\mu^2} + \left[ \left( \frac{-(1 + \mu^2)}{\mu^2} \right) \cdot \text{Cosh} \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] + \left( \frac{(1 - \mu^2)}{\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin[\sqrt{1 - \zeta^2}(y)] \right) e^{-\zeta y} + \left( \frac{\zeta(1 + \mu^2)}{\mu^2\sqrt{\zeta^2 - \mu^2}} \right) \cdot \text{Sinh} \left[ \sqrt{\zeta^2 - \mu^2} \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \right] e^{\zeta \left( y - \frac{\pi}{\omega} \right)} \right)$$

Donc, les deux fonctions réduites (eq. III.86.1-2), sont obtenues :

$$\begin{cases} \hat{A}(y)\mathbf{Cos}(\omega\tau_0) + \hat{B}(y)\mathbf{Sin}(\omega\tau_0) = \hat{C}(y) \\ \hat{D}(y)\mathbf{Cos}(\omega\tau_0) + \hat{E}(y)\mathbf{Sin}(\omega\tau_0) = \hat{F}(y) \end{cases} \quad (\text{III.111})$$

Tel que :

$$\begin{cases} \hat{C}(y) = \widehat{C}_1 \mathbf{u}_0 + \widehat{C}_2 \\ \hat{F}(y) = \widehat{F}_1 \mathbf{u}_0 + \widehat{F}_2 \\ \mathbf{u}_0 = \widehat{I}_1 \mathbf{Cos}(\omega\tau_0) + \widehat{I}_2 \mathbf{Sin}(\omega\tau_0) + \widehat{I}_3 \end{cases} \quad (\text{III.112})$$

Le système d'équations (eq. III.111), récapitule les équations régissant les temps de transition, et les racines  $(\tau_0, \tau_1, \tau_2)$ , sont admises après vérification des inégalités :

$$\begin{cases} \text{Etat } \hat{E} \text{ (de } \tau_0 \text{ à } \tau_1): & -(1 - \mu^2) + \mu^2 u_0 \leq v \leq (1 - \mu^2) + \mu^2 u_1 \\ \text{Etat } \widehat{P}^+ \text{ (de } \tau_1 \text{ à } \tau_2): & \dot{u} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.113})$$

Remplaçons l'équation (eq. III.112), avec le remplacement des termes (eq. III.93-94), le système (eq. III.111), peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{A} \mathbf{Cos}(\omega\tau_0) + \mathcal{B} \mathbf{Sin}(\omega\tau_0) = \mathcal{C} \\ \mathcal{D} \mathbf{Cos}(\omega\tau_0) + \mathcal{E} \mathbf{Sin}(\omega\tau_0) = \mathcal{F} \end{cases} \quad (\text{III.114})$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \hat{A} - (\widehat{I}_1 \widehat{C}_1) \\ \mathcal{B} = \hat{B} - (\widehat{I}_2 \widehat{C}_1) \\ \mathcal{C} = (\widehat{I}_3 \widehat{C}_1) + \widehat{C}_2 \\ \mathcal{D} = \hat{D} - (\widehat{I}_1 \widehat{F}_1) \\ \mathcal{E} = \hat{E} - (\widehat{I}_2 \widehat{F}_1) \\ \mathcal{F} = (\widehat{I}_3 \widehat{F}_1) + \widehat{F}_2 \end{cases} \quad (\text{III.115})$$

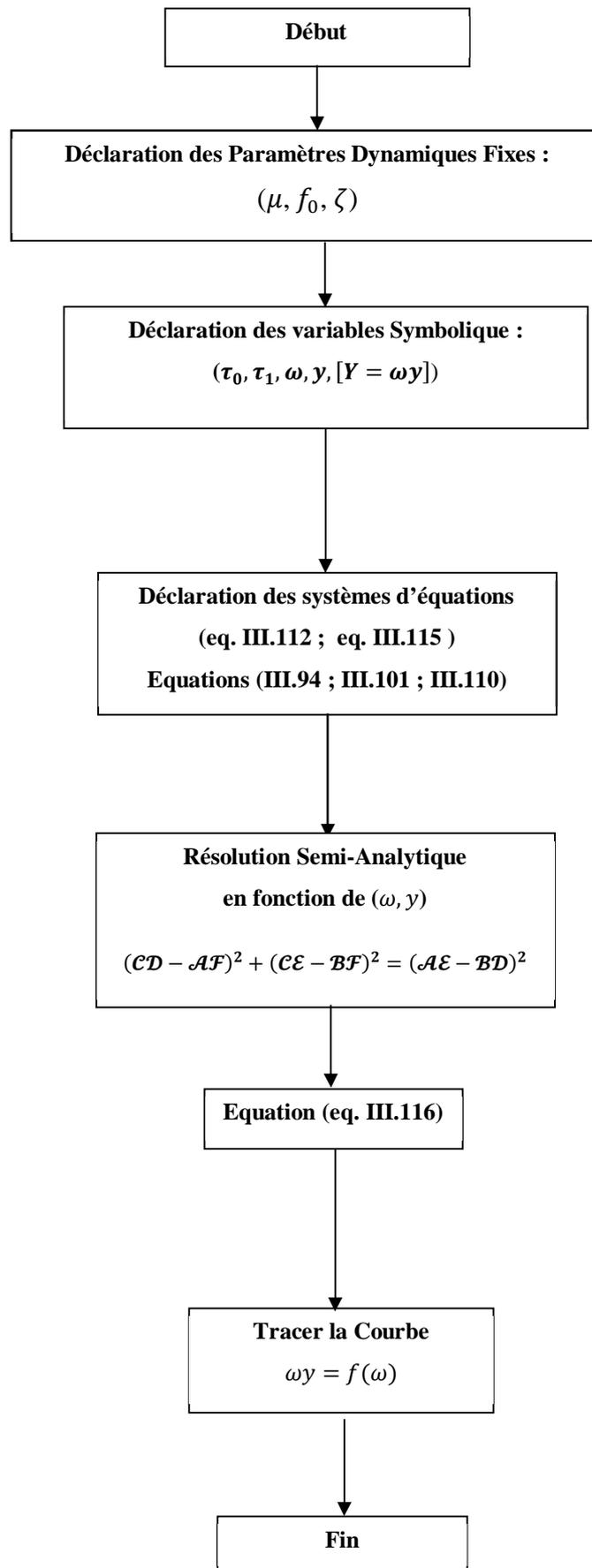
D'après les travaux de (Challamel & Gilles, 2007) ainsi que ceux de (Liu, 2000) et (Liu & Huang, 2004), les deux équations du système (eq. III.114), peuvent être fusionnés en une seule équations non linéaires représentée par l'équation (eq. III.86.3) :

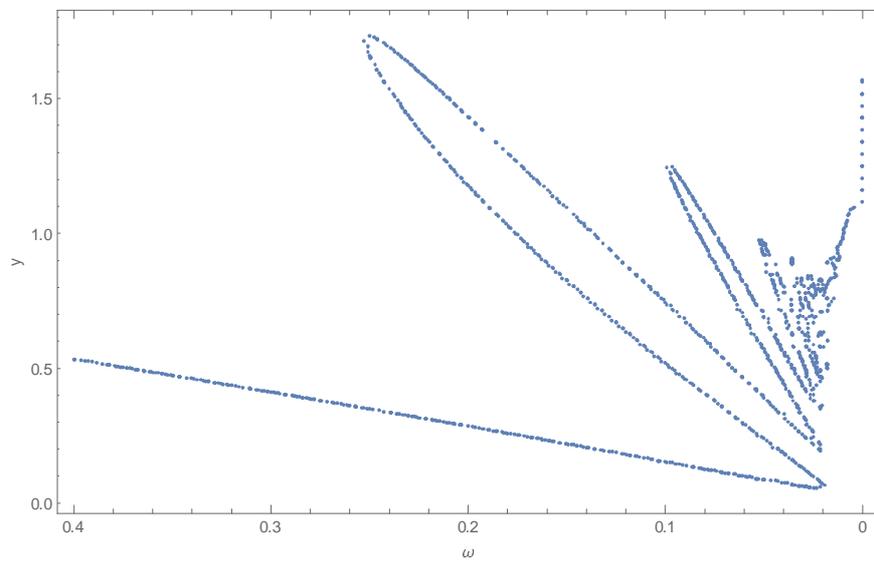
$$(\mathbf{CD} - \mathbf{AF})^2 + (\mathbf{CE} - \mathbf{BF})^2 = (\mathbf{AE} - \mathbf{BD})^2 \quad (\text{III.116})$$

Cette équation non linéaires (33), est obtenue à partir du calcul trigonométrique :

$$\begin{cases} \cos(\omega\tau_0) = \frac{(\mathbf{CE}-\mathbf{BF})}{(\mathbf{AE}-\mathbf{BD})} \\ \sin(\omega\tau_0) = \frac{-(\mathbf{CD}-\mathbf{AF})}{(\mathbf{AE}-\mathbf{BD})} \end{cases} \text{ si: } (\mathbf{AE} - \mathbf{BD}) \neq 0 \quad (\text{III.117})$$

La Résolution semi-analytique des temps de transition se fait par la résolution symbolique en se servant du logiciel de calcul formel **Mathematica**, dont l'algorithme est basé sur une détermination et vérification des racines trouvées, l'organigramme du calcul est représenté ci-après :





**Fig. III.27. Solutions de  $(Y = \omega\bar{y})$  en fonction de  $\omega$  (eq. III.116)**

$$(f_0 = 2 ; \zeta = 0.02 ; \mu = 0.01)$$

La résolution implicite de l'équation (eq. III.116), est illustrée en (Fig. III.27), pour un jeu de paramètres choisi pour valider le cas de la caractérisation du cycle limite de l'oscillateur élastoplastique parfait (Fig. II.15), afin de la comparer avec celle de (Liu & Huang, 2004). Nous pouvons également faire le même constat, à savoir que toute solution temporelle de l'équation (eq. III.116) n'est pas nécessairement solution de notre système dynamique, effet d'autres conditions suivent, et les solutions admissibles doivent vérifier (eq. III.117), et :

$$\begin{cases} \text{Etat } \hat{E}: \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1] , |v(\tau)| \leq [(1 - \mu^2) + \mu^2 u_1] \\ \text{Etat } \hat{P}^+: \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2], \dot{u}(\tau) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.118})$$

III.5.7. Détermination de la frontière de Bifurcation

L'analyse de la frontière de bifurcation entre les deux réponses de l'oscillateur élastoplastique en Présence de l'écrouissage se base sur les travaux de (Liu, 2003) qui a développé un critère représentant la dépendance du mouvement stationnaire plastique des paramètres dynamiques du model, dont l'équation fondamentale est :

$$\hat{a}_1 - \hat{a}_2 \hat{x}_0^2 = \hat{a}_3 \sqrt{\hat{x}_0^2 - 1} \tag{III.119}$$

$\hat{x}_0$  Est le rapport de ductilité entre le déplacement final et le déplacement à la limite élastique, avec  $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$  sont des coefficients adimensionnels en fonction des paramètres structurels du modèle.

La solution minimale de l'équation (eq. III.119) est :

$$\hat{x}_0 = \sqrt{\frac{2\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_3^2 - \hat{a}_3 \sqrt{4\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_3^2 - 4\hat{a}_2^2}}{2\hat{a}_2^2}} \text{ Avec } \hat{x}_0 \geq 1 \tag{III.120}$$

On peut facilement distinguer deux possibilités :

$$\begin{cases} 4\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_3^2 - 4\hat{a}_2^2 < 0 \dots (a) \dots \dots \dots \text{Pas de mouvement stationnaire plastique} \\ 4\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_3^2 - 4\hat{a}_2^2 \geq 0 \dots (b) \dots \dots \dots \text{Avec mouvement stationnaire plastique} \end{cases} \tag{III.121}$$

Sous la condition (eq. III.121-a), l'équation (eq. III.119) n'a pas de solution réelle pour  $\hat{x}_0$ .

Donc :

$$\hat{x}_0 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \hat{a}_1 \geq \hat{a}_2 \dots \dots \dots (a) \\ \hat{a}_1 < \hat{a}_2 \text{ et } 4\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_3^2 - 4\hat{a}_2^2 \geq 0 \dots (b) \end{cases} \text{ Ou } \tag{III.122}$$

Avec  $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$  dépendent des paramètres dynamiques adimensionnels  $(r_f, r_w, r_k, \zeta)$  tel que :

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = r_f^2 + 2 r_k (r_w^2 - 1) - 1 \\ \hat{a}_2 = r_k^2 [4\zeta^2 r_w^2 + (r_w^2 - 1)^2] \\ \hat{a}_3 = 4\zeta r_k r_w \end{cases} \quad (\text{III.123})$$

Avec :

$r_f$  : le rapport entre l'amplitude de la force extérieure et le seuil de la force élastique caractéristique.

$r_w$  : le rapport de la fréquence de l'excitation extérieure et la fréquence naturelle du model dans la phase plastique.

$r_k$  : le rapport entre la rigidité en phase plastique avec écrouissage et la rigidité dans la phase élastique.

$\zeta$  : le taux d'amortissement du model dans la phase plastique

En notant :  $(\beta)$  le rapport entre la rigidité en phase élastique et la somme des rigidités en phases élastique et plastique

$$\beta = \frac{K_e}{K_e + K_p} \quad (\text{III.124})$$

En sachant que pour l'oscillateur élastoplastique en présence de l'écrouissage :

$$\frac{1}{\mu^2 K_e} = \frac{1}{K_e} + \frac{1}{K_p} \Rightarrow \frac{1}{\mu^2} = 1 + \frac{K_e}{K_p}$$

Donc :

$$\beta = 1 - \mu^2 \quad (\text{III.125})$$

Les rapports du système deviennent :

$$r_k = \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \quad (\text{III.126})$$

$$r_f = \frac{F_0}{\beta F^+} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{F_0}{F^+} \Rightarrow r_f = \frac{f_0}{1 - \mu^2} \quad (\text{III.127})$$

$$r_w = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\beta K_p}{M}}} \text{ avec } \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{M}{K_e}}} \text{ et } K_p = r_k K_e \Rightarrow r_w = \frac{\omega}{\mu} \quad (\text{III.128})$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{M\beta K_p}} \text{ et } \zeta_0 = \frac{c}{2\sqrt{MK_e}} \Rightarrow \zeta = \frac{\zeta_0}{\mu} \quad (\text{III.129})$$

Finalement :

$$\begin{cases} r_f = \frac{f_0}{1-\mu^2} \\ r_w = \frac{\omega}{\mu} \\ r_k = \frac{\mu^2}{1-\mu^2} \\ \zeta = \frac{\zeta_0}{\mu} \end{cases} \text{ avec } \zeta_0 \text{ l'amortissement élastique réduit} \quad (\text{III.130})$$

Donc :

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \left(\frac{f_0}{1-\mu^2}\right)^2 + 2\frac{\mu^2}{1-\mu^2}\left(\frac{\omega^2}{\mu^2} - 1\right) - 1 \\ \hat{a}_2 = \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2}\right)^2 \left[ 4\frac{\zeta_0^2}{\mu^2}\frac{\omega^2}{\mu^2} + \left(\frac{\omega^2}{\mu^2} - 1\right)^2 \right] \\ \hat{a}_3 = 4\frac{\zeta_0}{\mu}\left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2}\right)\frac{\omega}{\mu} = \frac{4\zeta_0\omega}{1-\mu^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a}_1 = \left(\frac{f_0}{1-\mu^2}\right)^2 + 2\frac{(\omega^2-\mu^2)}{1-\mu^2} - 1 \\ \hat{a}_2 = \left[ \frac{4\zeta_0^2\omega^2 + (\omega^2-\mu^2)^2}{(1-\mu^2)^2} \right] \\ \hat{a}_3 = \frac{4\zeta_0\omega}{1-\mu^2} \end{cases} \quad (\text{III.131})$$

Donc, après simplification la condition (eq. III.122) devient :

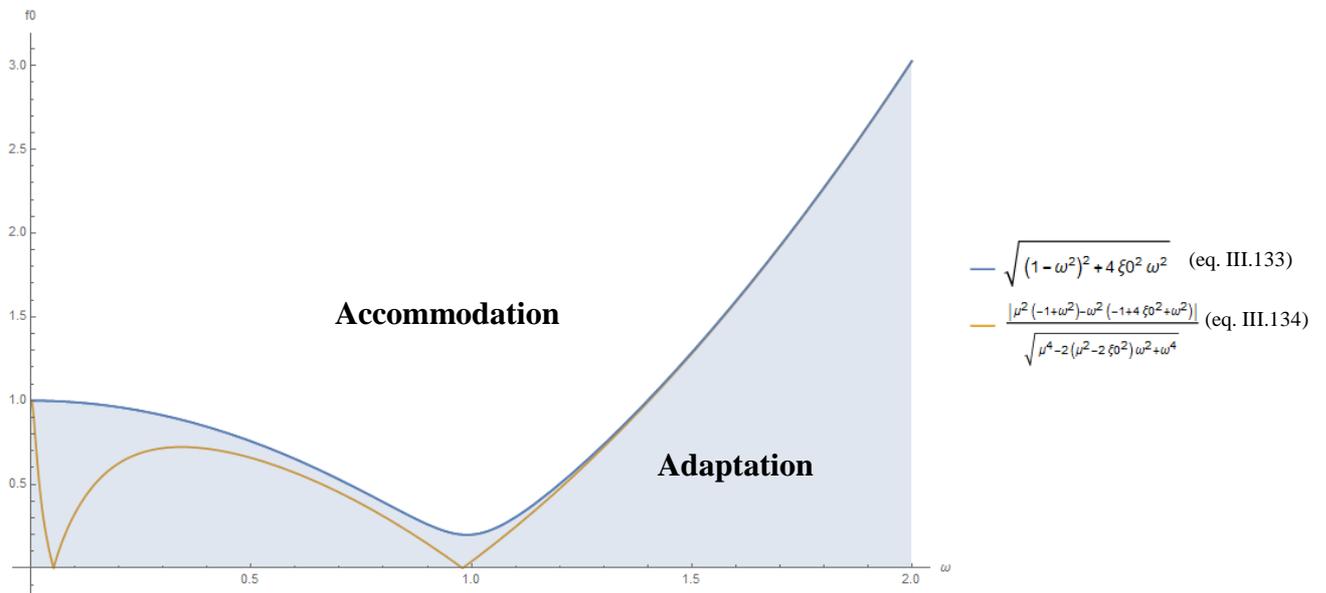
$$\hat{x}_0 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} f_0 \geq \sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} \dots \dots \dots (a) \\ f_0 < \sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} \text{ et } f_0 \geq \frac{|\mu^2(\omega^2-1) - \omega^2(4\zeta_0^2 + \omega^2 - 1)|}{\sqrt{\mu^4 - 2(\mu^2 - 2\zeta_0^2)\omega^2 + \omega^4}} \dots (b) \end{cases} \text{ Ou} \quad (\text{III.132})$$

Ce qui peut être réécrit comme suit :

$$\text{Pour le Cas 1 } (\zeta > \mu): \begin{cases} f_0 \geq \sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} \dots \dots \dots \text{Accomodation} \\ \text{Sinon} \dots \dots \text{Adaptaion} \end{cases} \quad (\text{III.133})$$

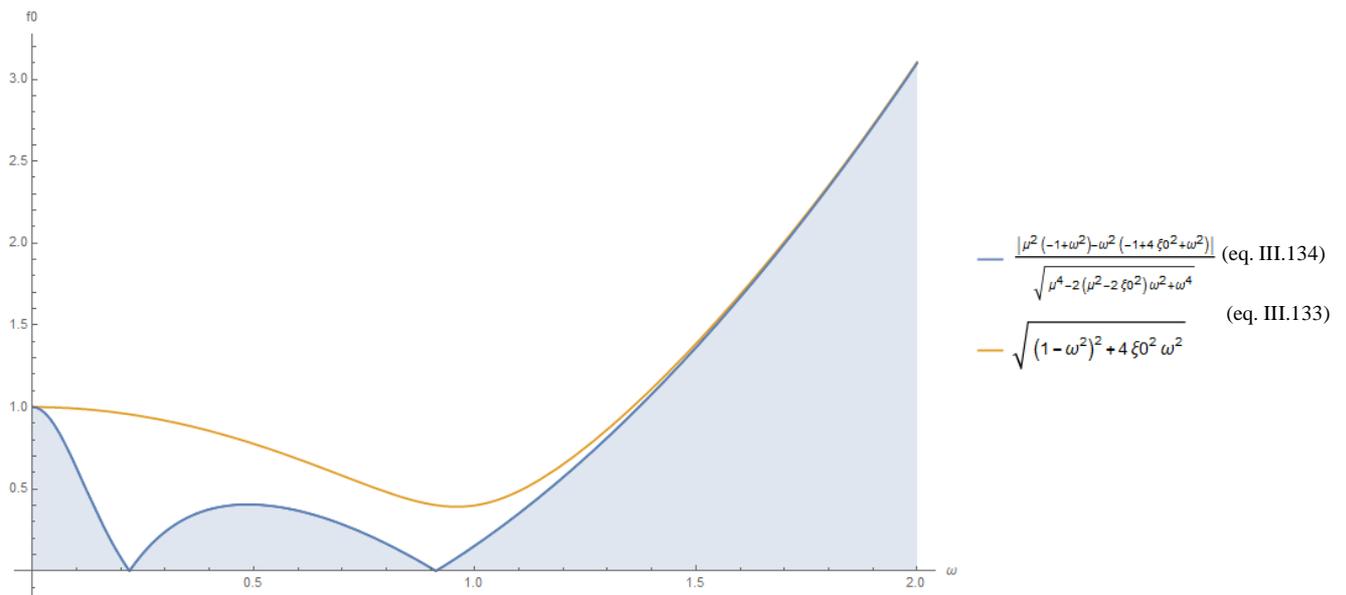
$$\text{Pour les Cas 2 et 3 } (\zeta \leq \mu) \begin{cases} f_0 \geq \frac{|\mu^2(\omega^2-1) - \omega^2(4\zeta_0^2 + \omega^2 - 1)|}{\sqrt{\mu^4 - 2(\mu^2 - 2\zeta_0^2)\omega^2 + \omega^4}} \dots \dots \dots \text{Accomodation} \\ \text{Sinon} \dots \dots \text{Adaptaion} \end{cases} \quad (\text{III.134})$$

La frontière de bifurcation entre les deux états dynamiques (Adaptation et Accommodation) relatifs à la réponse des vibrations forcées de l'oscillateur élastoplastique en présence de l'écrouissage peut être représentée graphiquement comme suit :



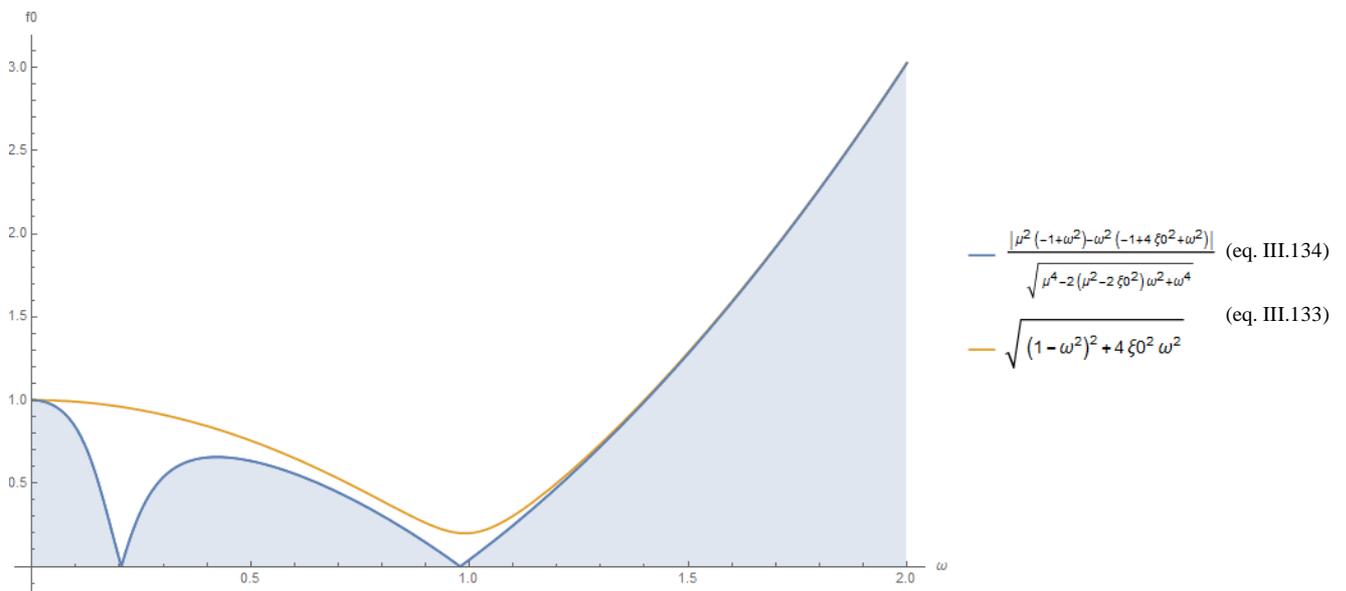
**Fig. III.28. Frontière de Bifurcation**

**Cas 1 ( $\zeta > \mu$ ) :  $\zeta = 0.1$  ;  $\mu = 0.05$**



**Fig. III.29. Frontière de Bifurcation**

**Cas 2 ( $\zeta = \mu$ ) :  $\zeta = 0.2$  ;  $\mu = 0.2$**



**Fig. III.30. Frontière de Bifurcation**

**Cas 3 ( $\zeta < \mu$ ) :  $\zeta = 0.1$  ;  $\mu = 0.2$**

Une nouvelle formule de la frontière de bifurcation est obtenue (eq. III.134) entre les deux états dynamique (Adaptation et Accommodation), pour les deux cas de l'oscillateur élastoplastique en présence de l'écrouissage cinématique dont le taux d'amortissement est égal ou inférieur au coefficient de l'écrouissage, une formule qui est validée par les simulations numériques pour différents jeux de paramètres :

Pour le cas 1 (Fig. III. 15-16), l'adaptation est illustrée après un certain nombre de cycles initiales, une adaptation dont les paramètres se situent au-dessus de la nouvelle formule (eq. III.134).

Pour les cas 2 et 3, la formule anciennement obtenue dans les travaux de (Challamel&Gilles, 2007), (Hammouda, 2009), et qui couvre le cas de l'oscillateur élastoplastique parfait n'est plus valable dès que le coefficient de l'écrouissage prend une valeur positive. En effet, une accommodation est observée (Fig. III.21-22 ; III.25-26) pour des jeux de paramètres dynamique qui se situent au-dessous de la formule (eq. III.133), dont on aura constaté normalement une adaptation.

III.5.8. Étude de la Stabilité de l'oscillateur élastoplastique écrouissable

L'analyse de stabilité de la réponse périodique de l'oscillateur élastoplastique avec écrouissage est similaire à l'analyse de stabilité développée par Masri & Caughey (Caughey, 1966), (Masri & Caughey, 1979) pour un système à impact. La méthode utilisée est la technique de perturbation et la propagation des erreurs, une approche similaire à l'étude de stabilité de l'oscillateur élastoplastique parfait (§ II.5.8). En se référant à la caractérisation du cycle limite (Fig. III.27), la perturbation peut être écrite sous forme Matricielle :

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta u_0 \\ \Delta u_{p_0} \\ \Delta\dot{u}_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{E}} \begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta u_1 \\ \Delta u_{p_1} \\ \Delta\dot{u}_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{P}^+} \begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_{p_2} \\ \Delta\dot{u}_2 \end{pmatrix} \quad (III.135)$$

Avec :

$$\begin{cases} \Delta\dot{u}_0 = \Delta\dot{u}_2 = 0 \\ \Delta u_{p_0} = (1 - \mu^2)\Delta u_0 \quad \text{car} \quad (u_{p_0} = (1 - \mu^2)u_0 + (1 - \mu^2)) \end{cases} \quad (III.136)$$

$$\begin{cases} \Delta u_1 = \Delta u_0 \dots \dots \dots (u_1 = u_0 + 2) \\ \Delta u_{p_1} = (1 - \mu^2)\Delta u_0 \quad \dots \dots \dots (u_{p_1} = u_{p_0}) \end{cases} \quad (III.137)$$

On peut Introduire les matrices de Propagation des erreurs :

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta u_1 \\ \Delta u_{p_1} \\ \Delta\dot{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta u_0 \\ \Delta u_{p_0} \\ \Delta\dot{u}_0 \end{pmatrix} \quad (III.138)$$

Et pour l'état parcouru  $\hat{P}^+$  :

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_{p_2} \\ \Delta\dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta u_1 \\ \Delta u_{p_1} \\ \Delta\dot{u}_1 \end{pmatrix} \quad (III.139)$$

Pour le Demi-cycle ( $\tau_0 \rightarrow \tau_2$ ) et à partir des deux systèmes (eq. III.138) et (eq. III.139), le facteur d'amplification de la perturbation ( $R$ ), déterminant la stabilité/instabilité de la réponse périodique peut être introduit :

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta u_2 \\ \Delta\dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta u_0 \\ \Delta\dot{u}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta u_0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.140})$$

Selon les travaux de (Masri, 1969), la Solution périodique est asymptotiquement stable si le module de toutes les valeurs propres de la Matrice ( $R$ ) est inférieur à l'Unité :

$$(|\lambda_i| < 1 \dots i = 1,2) \quad (\text{III.141})$$

La vérification de cette condition (eq. III.141), revient à déterminer les composants des matrices ( $A, B$ , et  $R$ ) :

L'équation (eq. III.138) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta\tau_1 & = A_{11}\Delta\tau_0 + A_{12}\Delta u_0 + (1 - \mu^2)A_{13}\Delta u_0 \dots \dots 1 \\ \Delta u_1 & = A_{21}\Delta\tau_0 + A_{22}\Delta u_0 + (1 - \mu^2)A_{23}\Delta u_0 \dots \dots 2 \\ (1 - \mu^2)\Delta u_1 & = A_{31}\Delta\tau_0 + A_{32}\Delta u_0 + (1 - \mu^2)A_{33}\Delta u_0 \dots \dots 3 \\ \Delta\dot{u}_1 & = A_{41}\Delta\tau_0 + A_{42}\Delta u_0 + (1 - \mu^2)A_{43}\Delta u_0 \dots \dots 4 \end{cases} \quad (\text{III.142})$$

Donc :

$$\begin{cases} A_{21} & = \frac{A_{31}}{(1-\mu^2)} & \dots \dots 1 \\ A_{22} & = \frac{A_{32}}{(1-\mu^2)} & \dots \dots 2 \\ (1 - \mu^2)A_{23} & = A_{33} & \dots \dots 3 \end{cases} \quad (\text{III.143})$$

Ce qui nous conduit à écrire pour l'état élastique parcouru ( $\tau_0 \rightarrow \tau_1$ ):

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta u_1 \\ \Delta\dot{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + (1 - \mu^2)A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} + (1 - \mu^2)A_{23} & A_{24} \\ A_{41} & A_{42} + (1 - \mu^2)A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta u_0 \\ \Delta\dot{u}_0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.144})$$

Même raisonnement pour le système (eq. III.139) :  $(\tau_1 \rightarrow \tau_2)$

$$\begin{cases} \Delta\tau_2 = B_{11}\Delta\tau_1 + B_{123}\Delta u_1 + B_{14}\Delta\dot{u}_1 & \dots\dots 1 \\ \Delta u_2 = B_{21}\Delta\tau_1 + B_{223}\Delta u_1 + B_{24}\Delta\dot{u}_1 & \dots\dots 2 \\ \Delta\dot{u}_2 = B_{41}\Delta\tau_1 + B_{423}\Delta u_1 + B_{44}\Delta\dot{u}_1 & \dots\dots 3 \end{cases} \quad (\text{III.145})$$

Avec :

$$\begin{cases} B_{21} = \frac{B_{31}}{(1-\mu^2)} & \dots\dots 1 \\ B_{22} = \frac{B_{32}}{(1-\mu^2)} & \dots\dots 2 \\ (1-\mu^2)B_{23} = B_{33} & \dots\dots 3 \end{cases} \quad (\text{III.146})$$

Pour simplification, notons :

$$\begin{cases} A_{123} = (A_{12} + (1-\mu^2)A_{13}) \\ A_{223} = (A_{22} + (1-\mu^2)A_{23}) \\ B_{123} = (B_{12} + (1-\mu^2)B_{13}) \\ B_{223} = (B_{22} + (1-\mu^2)B_{23}) \end{cases} \quad (\text{III.147})$$

Ce qui nous conduit à écrire pour l'état parcouru plastique  $(\tau_1 \rightarrow \tau_2)$ :

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta u_2 \\ \Delta\dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{123} & B_{14} \\ B_{21} & B_{223} & B_{24} \\ B_{41} & B_{423} & B_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta u_1 \\ \Delta\dot{u}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.148})$$

Le système (eq. III.142) se réécrit :

$$\begin{cases} \Delta\tau_1 = A_{11}\Delta\tau_0 + A_{123}\Delta u_0 & \dots\dots 1 \\ \Delta u_1 = A_{21}\Delta\tau_0 + A_{223}\Delta u_0 & \dots\dots 2 \\ \Delta\dot{u}_1 = A_{41}\Delta\tau_0 + A_{423}\Delta u_0 & \dots\dots 3 \end{cases} \quad (\text{III.149})$$

À l'instant  $(\tau_1)$ :  $v(\tau_0, \tau_1, u_0) = v_1 = (1-\mu^2) + \mu^2 u_1$

En appliquant l'approche de petites perturbations :

$$\begin{aligned} v(\tau_0 + \Delta\tau_0, \tau_1 + \Delta\tau_1, u_0 + \Delta u_0) &= v(\tau_0, \tau_1, u_0) + \Delta\tau_0 \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0} + \Delta\tau_1 \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1} + \Delta u_0 \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0} = \\ (1-\mu^2) + \mu^2 u_1 & \quad (\text{III.150}) \end{aligned}$$

En simplifiant encore (eq. III.150) :

$$\Delta\tau_0 \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0} + \Delta\tau_1 \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1} + \Delta u_0 \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0} = 0 \quad (\text{III.151})$$

Donc :

$$\Delta\tau_1 = -\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)/\partial \tau_0}{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)/\partial \tau_1} \Delta\tau_0 - \frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)/\partial u_0}{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)/\partial \tau_1} \Delta u_0 \quad (\text{III.152})$$

En comparant (eq. III.152) avec (eq. III.149.1) :

$$\begin{cases} A_{11} & = -\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)/\partial \tau_0}{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)/\partial \tau_1} \\ A_{123} & = -\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)/\partial u_0}{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)/\partial \tau_1} \\ A_{14} & = 0 \end{cases} \quad (\text{III.153})$$

À l'instant  $\tau_1$  :

$$u_1 = u_0 + 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta u_1 = \Delta u_0 \quad (\text{III.154})$$

En comparant (eq. III.154) avec (eq. III.149.2) :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = \Delta u_0 \\ \Delta u_1 = A_{21} \Delta \tau_0 + A_{223} \Delta u_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_{21} & = 0 \\ A_{223} & = 1 \\ A_{24} & = 0 \end{cases} \quad (\text{III.155})$$

Egalement, on a à l'instant  $\tau_1$  :

$$\Delta \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0) = \Delta \tau_0 \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0} + \Delta \tau_1 \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1} + \Delta u_0 \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0} \quad (\text{III.156})$$

En remplaçons (eq. III.149.1) dans (eq. III.156) :

$$\Delta \dot{u}_1 = \Delta \tau_0 \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0} + (A_{11} \Delta \tau_0 + A_{123} \Delta u_0) \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1} + \Delta u_0 \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0} \quad (\text{III.157})$$

Ce qui nous conduit à écrire aussi :

$$\Delta \dot{u}_1 = \Delta \tau_0 \left( \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0} + A_{11} \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1} \right) + \Delta u_0 \left( \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0} + A_{123} \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1} \right) \quad (\text{III.158})$$

En comparant (eq. III.149.3) et (eq. III.158) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{41} = \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0} + A_{11} \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1} = \left( \frac{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0}}{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} + A_{11} \right) \\ A_{423} = \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0} + A_{123} \frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1} = \left( \frac{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0}}{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} + A_{123} \right) \\ A_{44} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.159})$$

Même raisonnement pour le système d'équations (eq. III.145), à l'instant  $\tau_2$  :

$$\Delta \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) = 0 \quad (\text{III.160})$$

En appliquant l'approche de petites perturbations :

$$\Delta \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) = \Delta \tau_1 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1} + \Delta \tau_2 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} + \Delta u_0 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0} + \Delta \dot{u}_1 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \dot{u}_1} = 0 \quad (\text{III.161})$$

Donc :

$$\Delta \tau_2 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} = -\Delta \tau_1 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1} - \Delta u_0 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0} - \Delta \dot{u}_1 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \dot{u}_1} \quad (\text{III.162})$$

On peut écrire également :

$$\Delta \tau_2 = -\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \tau_1}{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \tau_2} \Delta \tau_1 - \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial u_0}{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \tau_2} \Delta u_0 - \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \dot{u}_1}{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \tau_2} \Delta \dot{u}_1 \quad (\text{III.163})$$

En comparant (eq. III.163) avec (III.145.1), et considérant (III.137.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{11} = -\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \tau_1}{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \tau_2} \\ B_{123} = -\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial u_0}{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \tau_2} \\ B_{14} = -\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \dot{u}_1}{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)/\partial \tau_2} \end{array} \right. \quad (\text{III.164})$$

D'autre part, en réécrivant (eq. III.160) en prenant en compte (eq. III.145) :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u}_2 &= \Delta \tau_1 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1} + (B_{11} \Delta \tau_1 + B_{123} \Delta u_1 + B_{14} \Delta \dot{u}_1) \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} + \Delta u_0 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0} + \\ \Delta \dot{u}_1 &\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \dot{u}_1} \end{aligned} \quad (\text{III.165})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u}_2 &= \Delta \tau_1 \left( \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1} + B_{11} \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} \right) + \Delta u_0 \left( \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0} + B_{123} \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} \right) + \Delta \dot{u}_1 \left( \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \dot{u}_1} + \right. \\ &\left. B_{14} \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.166})$$

En Comparant (eq. III.166) et (eq. III.145.3) :

$$\begin{cases} B_{41} &= \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1} + B_{11} \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} = 2 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1} \\ B_{423} &= \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0} + B_{123} \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} = 2 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0} \\ B_{44} &= \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \dot{u}_1} + B_{14} \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} = 2 \frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \dot{u}_1} \end{cases} \quad (\text{III.167})$$

Pour l'état parcouru plastique aussi ( $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ ):

$$\Delta u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) = \Delta \tau_1 \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1} + \Delta \tau_2 \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} + \Delta u_0 \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0} + \Delta \dot{u}_1 \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \dot{u}_1} \quad (\text{III.168})$$

En remplaçant (eq. III.145.1) dans (eq. III.168) :

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= \Delta \tau_1 \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1} + (B_{11} \Delta \tau_1 + B_{123} \Delta u_1 + B_{14} \Delta \dot{u}_1) \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2} + \Delta u_0 \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0} + \\ \Delta \dot{u}_1 &\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \dot{u}_1} \end{aligned} \quad (\text{III.169})$$

En simplifiant cette dernière équation, sachant que ( $\Delta u_1 = \Delta u_0$ ) :

$$\Delta u_2 = \Delta \tau_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial \tau_1} + B_{11} \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \right) + \Delta u_0 \left( \frac{\partial u_2}{\partial u_0} + B_{123} \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \right) + \Delta \dot{u}_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial \dot{u}_1} + B_{14} \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \right) \quad (\text{III.170})$$

En Comparant (eq. III.145.2) avec (eq. III.170) :

$$\begin{cases} B_{21} &= \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) / \partial \tau_1}{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) / \partial \tau_2} + B_{11} \\ B_{223} &= \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) / \partial u_0}{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) / \partial \tau_2} + B_{123} \\ B_{24} &= \frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) / \partial \dot{u}_1}{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1) / \partial \tau_2} + B_{14} \end{cases} \quad (\text{III.171})$$

(R) peut être reformulé comme ceci :

$$R = [B] * [A] \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{123} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ A_{41} & A_{423} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{123} & B_{14} \\ B_{21} & B_{223} & B_{24} \\ B_{41} & B_{423} & B_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{III.172})$$

Finalement (R) s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{41}B_{14}) & (B_{11}A_{123} + B_{123} + A_{423}B_{14}) & 0 \\ (A_{11}B_{21} + A_{41}B_{24}) & (B_{21}A_{123} + B_{223} + A_{423}B_{24}) & 0 \\ (A_{11}B_{41} + A_{41}B_{44}) & (B_{41}A_{123} + B_{423} + A_{423}B_{44}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.173})$$

Le système global devient après réduction de dimension ( $\Delta\dot{u}_0 = \Delta\dot{u}_2 = 0$ ) :

$$\begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta u_2 \\ \Delta\dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta u_0 \\ \Delta\dot{u}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\tau_2 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{41}B_{14}) & (B_{11}A_{123} + B_{123} + A_{423}B_{14}) \\ (A_{11}B_{21} + A_{41}B_{24}) & (B_{21}A_{123} + B_{223} + A_{423}B_{24}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_0 \\ \Delta u_0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.174})$$

Donc, la matrice (R) se réécrit :

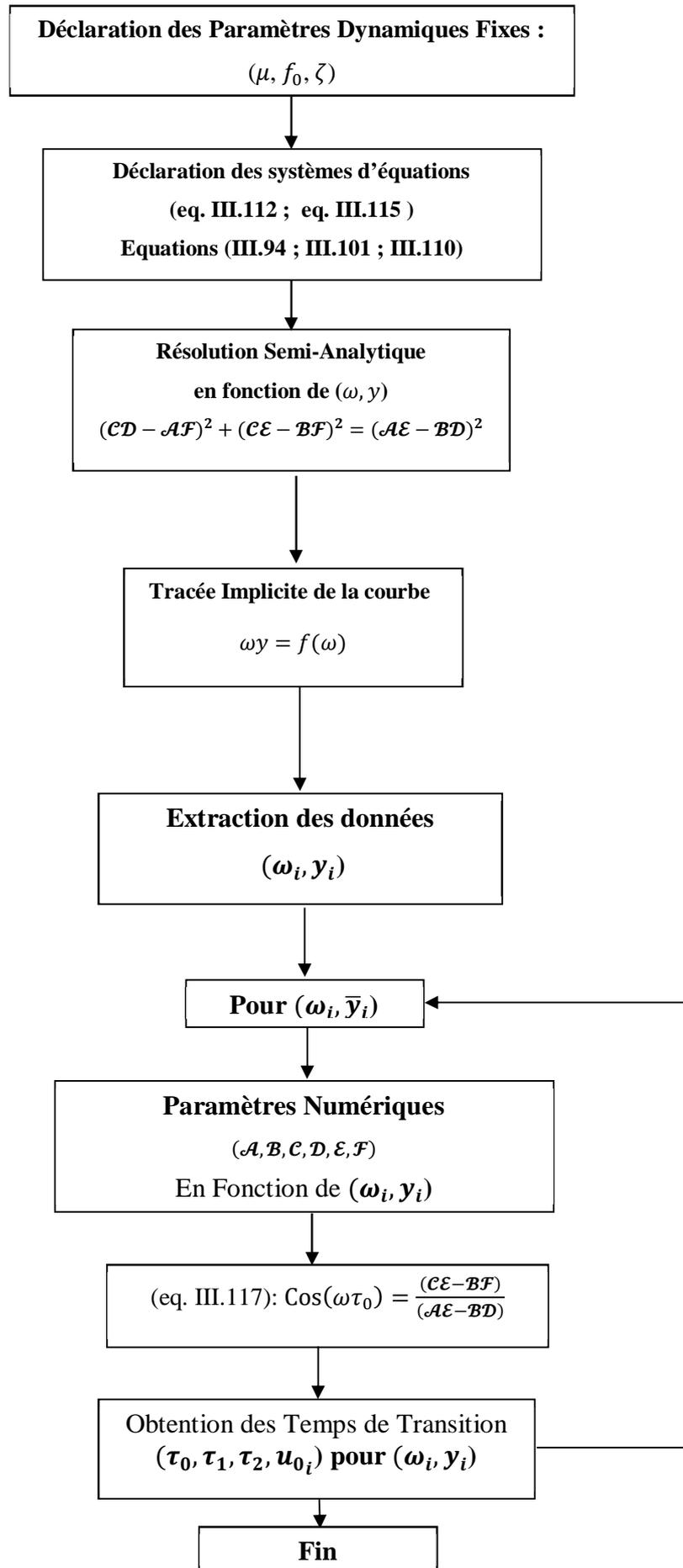
$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{41}B_{14}) & (B_{11}A_{123} + B_{123} + A_{423}B_{14}) \\ (A_{11}B_{21} + A_{41}B_{24}) & (B_{21}A_{123} + B_{223} + A_{423}B_{24}) \end{pmatrix} \quad (\text{III.175})$$

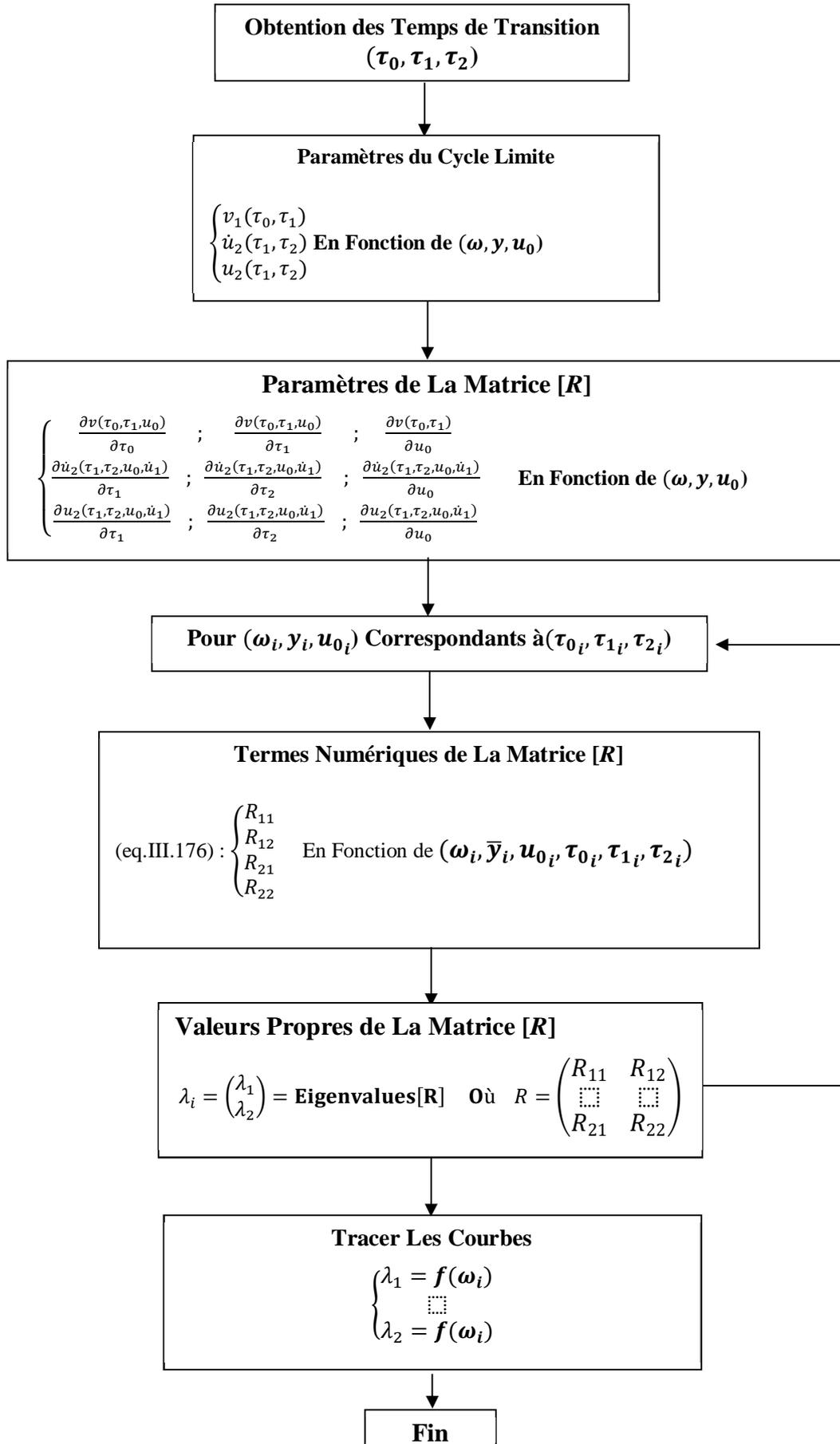
Avec les termes suivants :

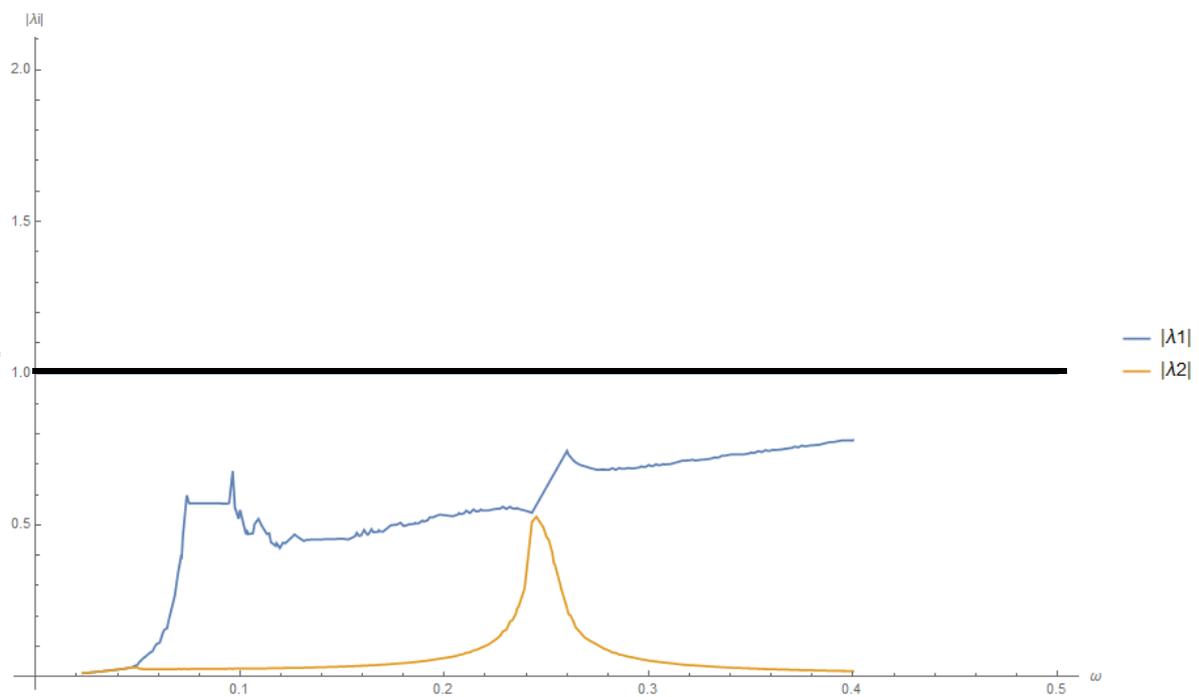
$$\left. \begin{aligned}
 R_{11} &= \left( \left( -\frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} \right) \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \right) + \left( \left( \frac{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0}}{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} + \left( -\frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} \right) \right) \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \right) \\
 R_{12} &= \left( \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \left( -\frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} \right) \right) + \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) + \left( \frac{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0}}{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} + \left( -\frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} \right) \right) \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \\
 R_{21} &= \left( -\frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} \right) \left( \frac{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} + \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \right) + \left( \left( \frac{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0}}{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} + \left( -\frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} \right) \right) \left( \frac{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} + \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \right) \right) \\
 R_{22} &= \left( \left( \frac{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} + \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \right) \left( -\frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} \right) \right) + \left( \frac{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0}}{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} + \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial u_0}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \right) + \left( \frac{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0}}{\frac{\partial \dot{u}_1(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} + \left( -\frac{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial u_0}}{\frac{\partial v(\tau_0, \tau_1, u_0)}{\partial \tau_1}} \right) \right) \left( \frac{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial u_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} + \left( -\frac{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_1}}{\frac{\partial \dot{u}_2(\tau_1, \tau_2, u_0, \dot{u}_1)}{\partial \tau_2}} \right) \right)
 \end{aligned} \right. \tag{III.176}$$

Pour un coefficient d'écrouissage nul ( $\mu=0$ ), la matrice ( $R$ ) devient un scalaire du fait que ( $\partial u_0 = 0$ ), et ainsi on retombe sur le facteur de perturbation définissant la stabilité/instabilité du système ( $R$ ) (eq. II. 79) pour le système de l'oscillateur élastoplastique parfait.

Pour l'exemple d'étude (Cas 1 Si  $\zeta > \mu$ ), le module des valeurs propres ( $\lambda_i$  ;  $i = 1,2$ ) de la matrice ( $R$ ), est toujours inférieur à l'unité ce qui traduit la stabilité du système élastoplastique écrouissable (Voir Fig. III.31), suivant les organigrammes suivants :





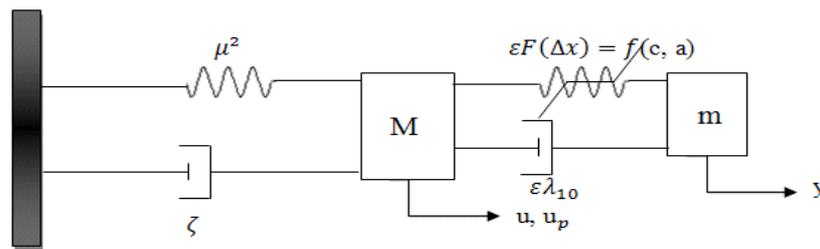


**Fig. III.31. Stabilité de l'oscillateur élastoplastique écrouissable**

**Cas 1 ( $\zeta > \mu$ ) :  $f_0 = 2$  ;  $\zeta = 0.02$  ;  $\mu = 0.01$**

**III.6. L'Oscillateur inélastique à 2 Degré de Liberté (2 DDL)**

Dans cette section, l'oscillateur simple (Fig. III.32) dont la loi de comportement est élastoplastique en présence de l'écroutissage (Fig III.1 & eq. III.18-20) est étudié après couplément avec une masse additionnelle présentant une loi de comportement non linéaire (Fig. III.33) ou linéaire par morceaux (*Piecewise Linear Behaviour*) et ayant une énergie potentielle (*NonLinear Energy Sink-NES with Potential*). L'objectif est d'obtenir une solution exacte analytiquement par la méthode de conduite des évènements de temps (*time-event-driven method*), le système global est illustré ci-dessous :



**Fig. III.32. Système Élastoplastique Écroutissable Couplé à 2DDL**

Les caractéristiques dynamiques de ce système à 2DDL sont :

**A/ Système élastoplastique écrouissable (Fig. III.1) :**

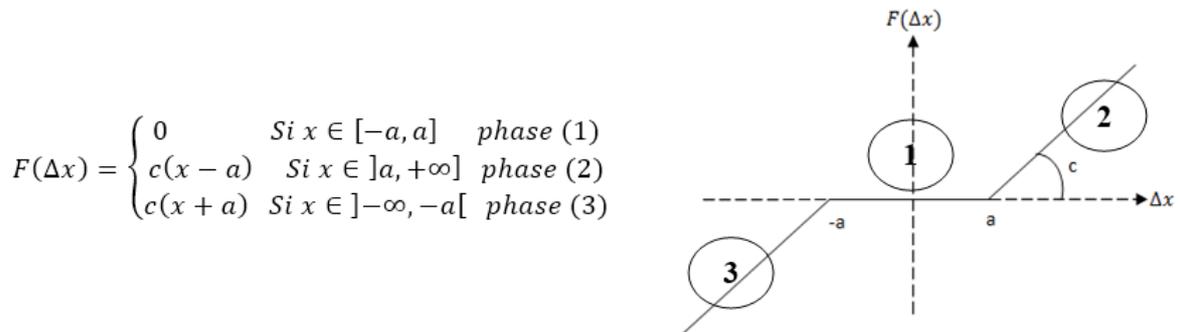
La masse principale (M), est attachée à un ressort élastoplastique en présence de l'écrouissage ( $\mu^2$ : Coefficient d'écrouissage), avec un coefficient d'amortissement ( $\zeta$ ).

**B/ Système inélastique Bilineaire (Fig. III.33) :**

La masse additionnelle (m), est attachée à la masse principale avec un ressort non-linéaire (linéaire par morceau NES), avec un amortissement ( $\varepsilon\lambda_{10}$ ).

Les paramètres de ce système sont :

- La rhéologie du système est définie par :  $\mu^2$  et  $\zeta$
- $\varepsilon = \frac{m}{M} \ll 1$ : NES
- L'équivalence entre l'amortissement du Système couplé et celui de la masse (M) :  $2\xi = \varepsilon\zeta$
- Variable interne de la masse principale  $u_p$  appelée : le déplacement plastique.
- Excitation extérieure du système à 2DDL :  $f_0 = \varepsilon f_{10}$
- Excitation de la masse m (NES) :



**Fig. III.33. Loi de comportement de la masse additionnelle (NES)**

Le système couplé (Fig III.32) est contrôlé par les équations de mouvement combinées des deux oscillateurs dynamiques (La masse principale M et la masse additionnelle m), après adimensionnement des paramètres, pour chaque état dynamique :

$$\mathbf{E} : \begin{cases} \ddot{u} + 2\epsilon\zeta\dot{u} + (u - u_p) + \epsilon F(u - y) + \epsilon\lambda_{10}(\dot{u} - \dot{y}) = \epsilon f_{10} \cos(\omega t) \\ \epsilon\ddot{y} + \epsilon F(y - u) + \epsilon\lambda_{10}(\dot{y} - \dot{u}) = 0 \\ \text{if } \begin{cases} -(1 - \mu^2) + \mu^2 u < u - u_p < (1 - \mu^2) + \mu^2 u \\ \text{or} \\ u - u_p = (1 - \mu^2) + \mu^2 u \text{ and } \dot{u} \leq 0 \\ \text{or} \\ u - u_p = -(1 - \mu^2) + \mu^2 u \text{ and } \dot{u} \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{III.177})$$

$$\mathbf{P}^+ : \begin{cases} \ddot{u} + 2\epsilon\zeta\dot{u} + (1 - \mu^2) + \mu^2 u + \epsilon F(u - y) + \epsilon\lambda_{10}(\dot{u} - \dot{y}) = \epsilon f_{10} \cos(\omega t) \\ \epsilon\ddot{y} + \epsilon F(y - u) + \epsilon\lambda_{10}(\dot{y} - \dot{u}) = 0 \\ \text{if } u - u_p = (1 - \mu^2) + \mu^2 u \text{ and } \dot{u} \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.178})$$

$$\mathbf{P}^- : \begin{cases} \ddot{u} + 2\epsilon\zeta\dot{u} - (1 - \mu^2) + \mu^2 u + \epsilon F(u - y) + \epsilon\lambda_{10}(\dot{u} - \dot{y}) = \epsilon f_{10} \cos(\omega t) \\ \epsilon\ddot{y} + \epsilon F(y - u) + \epsilon\lambda_{10}(\dot{y} - \dot{u}) = 0 \\ \text{if } u - u_p = -(1 - \mu^2) + \mu^2 u \text{ and } \dot{u} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.179})$$

Cet oscillateur à 2 DDL peut avoir 3 possibles phases suivant le comportement de chacune des masses :

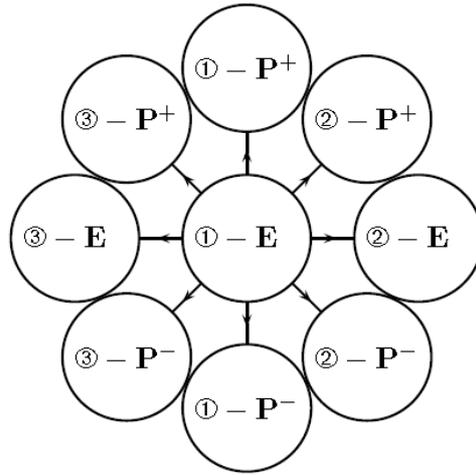
\* Comportement de la masse principale (M) :

- a) Phase élastique ( $\hat{E}$ ),
- b) Phase plastique avec chargement ( $\hat{P}^+$ ),
- c) Phase plastique avec déchargement ( $\hat{P}^-$ ),

\* Comportement de la masse additionnelle (m) : Fig. III.33

- a) Phase (1) : chargement nul si  $(x \in [-a, a])$ ,
- b) Phase (2) : chargement Positif égale à  $c(x - a)$  si  $(x \in ]a, +\infty[)$ ,
- c) Phase (2) : chargement Négatif égale à  $c(x + a)$  si  $(x \in ]-\infty, -a[)$ ,

les combinaisons possibles de toutes les éventualités des états sont regroupées en (Fig. III.34), chaque état est gouverné par un jeux de paramètres de deux équations différentielles de second ordre pour un temps initial ( $\tau_0$ ) et pour des conditions initiales données.



**Fig. III.34. Tous les états possibles du système couplé à 2 DDL**

Les trois possibles états impliquant une force nulle de la masse additionnelle (phase 1 Fig. III.33), réunissent un problème de dimension (3), tandis que les autres cas la dimension du problème est de taille (4). Pour la résolution du système (de dimension 3 ou 4), introduisons le vecteur  $Y'(u, y, \dot{u}, \dot{y})$ , représentant chaque état possible sous la forme matricielle suivante, en fonction du temps initial  $\tau_0$  et le vecteur des conditions initiales ( $Y_0 = Y(\tau_0)$ ) :

$$Y' = A_3(\alpha)Y + \epsilon f \sin(\omega\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Cste}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Cste}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{III.180}$$

Avec :

$$A_3(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & -(\epsilon\lambda + \epsilon\lambda_1) & \epsilon\lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \tag{III.181}$$

Et :

$$Y' = A_4(\alpha)Y + \epsilon f \sin(\omega\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Cste_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Cste_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (III.182)$$

Avec :

$$A_4(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(\alpha + \epsilon c_1) & \epsilon c_1 & -(\epsilon\lambda + \epsilon\lambda_1) & \epsilon\lambda_1 \\ c_1 & -c_1 & \lambda_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \quad (III.183)$$

Les paramètres de chaque cas de problème (eq. III.180 ; III.182) sont résumés dans le tableaux suivant pour chaque possible état :

state	dimension	$\alpha$	Cste <sub>1</sub>	Cste <sub>2</sub>
① – E	3	1	$x_p + p_M$	$\frac{p_m}{\epsilon}$
① – P <sup>+</sup>	3	$\mu^2$	$-(1 - \mu^2) + p_M$	$\frac{p_m}{\epsilon}$
① – P <sup>-</sup>	3	$\mu^2$	$(1 - \mu^2) + p_M$	$\frac{p_m}{\epsilon}$
② – E	4	1	$x_p + \epsilon c_1 a_1 + p_M$	$-c_1 a_1 + \frac{p_m}{\epsilon}$
② – P <sup>+</sup>	4	$\mu^2$	$-(1 - \mu^2) + \epsilon c_1 a_1 + p_M$	$-c_1 a_1 + \frac{p_m}{\epsilon}$
② – P <sup>-</sup>	4	$\mu^2$	$(1 - \mu^2) + \epsilon c_1 a_1 + p_M$	$-c_1 a_1 + \frac{p_m}{\epsilon}$
③ – E	4	1	$x_p - \epsilon c_1 a_1 + p_M$	$c_1 a_1 + \frac{p_m}{\epsilon}$
③ – P <sup>+</sup>	4	$\mu^2$	$-(1 - \mu^2) - \epsilon c_1 a_1 + p_M$	$c_1 a_1 + \frac{p_m}{\epsilon}$
③ – P <sup>-</sup>	4	$\mu^2$	$(1 - \mu^2) - \epsilon c_1 a_1 + p_M$	$c_1 a_1 + \frac{p_m}{\epsilon}$

**Tab. III.1. Paramètres du système selon chaque état possible**

Nous partons du principe que les matrices  $[A_3]$  et  $[A_4]$  sont diagonalisables, donc, leurs valeurs propres ( $\alpha_i ; i \in [1,4]$ ) sont distinctes, et leurs vecteurs propres correspondants ( $P_i ; i \in [1,4]$ ) sont inversibles, et utilisés pour la solution globale qui prend la forme suivante pour le problème de dimension (3) :

$$Y = \sum_{i=1}^3 \left[ q_{0|i} e^{\alpha_i(\tau-\tau_0)} - \frac{\alpha_i P_{i,2}^{-1} \epsilon f_{10}}{\omega^2 + \alpha_i^2} [\sin(\omega\tau) + \frac{\omega}{\alpha_i} \cos(\omega\tau)] - \frac{Cste_1 P_{i,2}^{-1} + Cste_2 P_{i,3}^{-1}}{\alpha_i} \right] P_i \quad (III.184)$$

Et pour le problème de dimension (3), la solution entière est donnée par :

$$Y = \sum_{i=1}^4 \left[ q_{0|i} e^{\alpha_i(\tau-\tau_0)} - \frac{\alpha_i P_{i,3}^{-1} \epsilon f_{10}}{\omega^2 + \alpha_i^2} [\sin(\omega\tau) + \frac{\omega}{\alpha_i} \cos(\omega\tau)] - \frac{Cste_1 P_{i,3}^{-1} + Cste_2 P_{i,4}^{-1}}{\alpha_i} \right] P_i \quad (III.185)$$

Lors de l'étude de la réponse de ce système global couplé à 2 DDL, nous introduisons les variables  $(v, \omega)$  qui représentent respectivement le centre de masses et le déplacement relatif, ainsi que les variables complexes suivantes :

$$\begin{cases} v = u + \epsilon y \\ \omega = u - y \\ \phi_1 e^{i\tau} = \omega(\dot{v} + i v) \\ \phi_2 e^{i\tau} = \omega(\dot{\omega} + i \omega) \\ \phi = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \phi_2(\tau_0, \tau_1 \dots) \end{cases} \quad (III.186)$$

L'analyse de la dynamique de ce système est menée au tour de la résonance [1 :1] en imposant  $(\omega = 1 + \epsilon\sigma)$ , pour des petites valeurs de taux d'écroissance (Voir, Weiss, 2016), (Weiss &Chenia, 2016). Les équations sont convergentes et pour des pas de temps très petites ( $\tau_0 = \tau$  et  $\tau_1 = \epsilon\tau$ ), nous avançons l'hypothèse que  $(\phi_1$  et  $\phi_2)$  ne dépendent pas des itérations du temps  $\tau_0$  ou bien tendent vers un état asymptotique pour  $(\tau_0 \rightarrow \infty)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau_0} = 0 \\ \phi_1 = H(\phi, \phi_2) \end{cases} \quad (III.187)$$

( $H$ ) est une fonction permettant l'introduction des amplitudes ( $N_1$  et  $N_2$ ) appelées *Invariant manifold* comme ceci :

$$\begin{cases} \phi_1 = N_1 e^{i\delta_1} \\ \phi = N_2 e^{i\delta_2} \end{cases} \quad (\text{III.188})$$

Ces amplitudes ( $N_1$  et  $N_2$ ) peuvent être obtenues par :

$$N_1 = N_2 \sqrt{(1 - G(N_2^2))^2 + \lambda_{10}^2} \quad (\text{III.189})$$

Dont :

$$G(N_2^2) = \begin{cases} 0 & \text{if } N_2 \leq a \\ \frac{1}{\pi} \left( 2c \arccos\left(\frac{a}{N_2}\right) - \frac{2ac}{N_2} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{N_2}\right)^2} \right) & \text{if } N_2 > a \end{cases} \quad (\text{III.190})$$

On réécrit les dérivées suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_2}{\partial \tau_1} = \frac{f(N_2, \delta_2)}{C(N_2)} \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial \tau_1} = \frac{g(N_2, \delta_2)}{N_2 C(N_2)} \end{cases} \quad (\text{III.191})$$

Dont les expression ( $f$ ,  $g$ , et  $C$ ) nous fournissent des points d'équilibre ( $f = g = 0$  et  $C \neq 0 \rightarrow$  régime périodique pour  $u$  et  $y$ ), et un cas très singulier ( $f = g = C = 0 \rightarrow$  existence d'une réponse fortement modulée dite SMR).

Des simulations numériques ont été faites sur un temps très réduit (03 unités de temps), pour montrer la forme de la réponse du système couplé à 2 DDL, par la représentation temporelle du déplacement des masses séparément pour des jeux de paramètres choisis. On peut montrer également le changement des états par le changement du type de lignes (ligne continue pour l'état élastique  $\hat{E}$  et  $F(x) = c(x - a)$ , pointée pour l'état élastique  $\hat{E}$  et  $F(x) = c(x + a)$  , discontinue pour l'état élastique  $\hat{E}$  et  $F(x) = 0$ ).

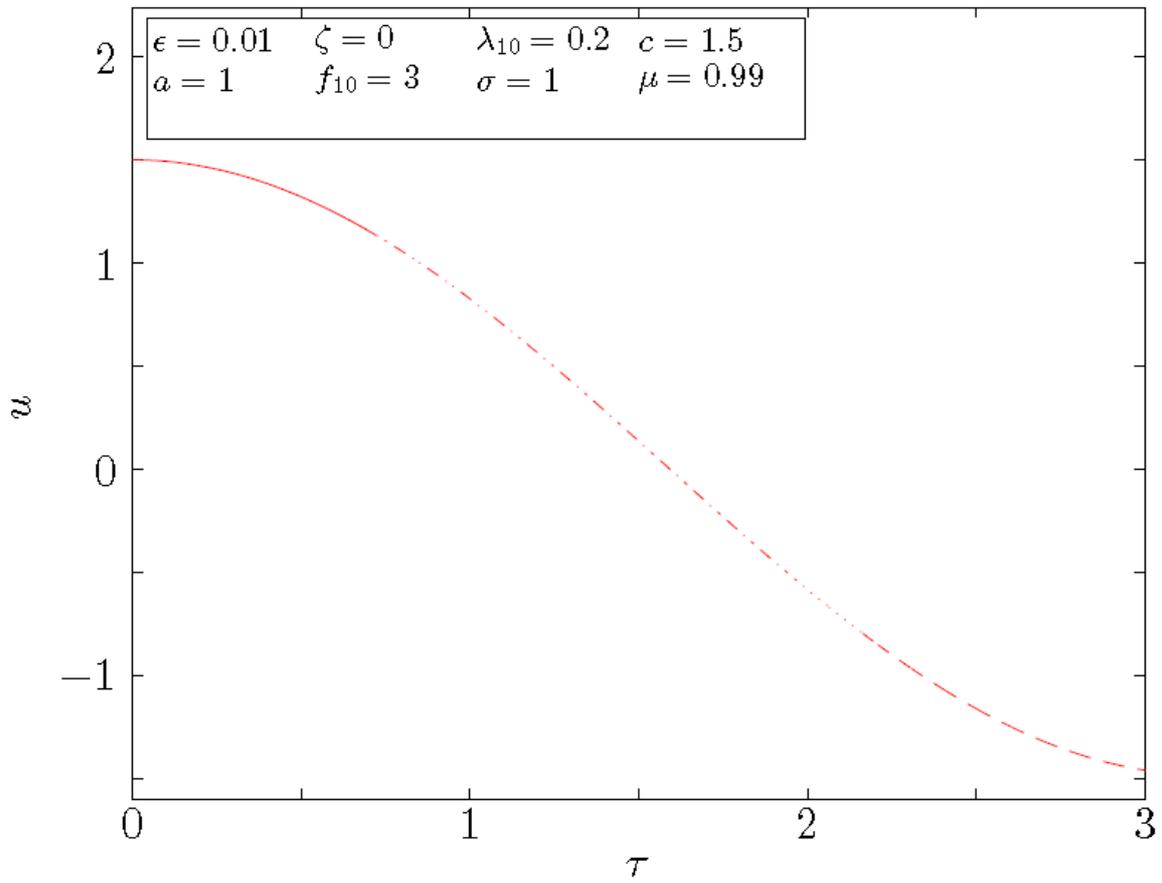


Fig. III.35. Déplacement de la masse principale durant 3 unités de temps

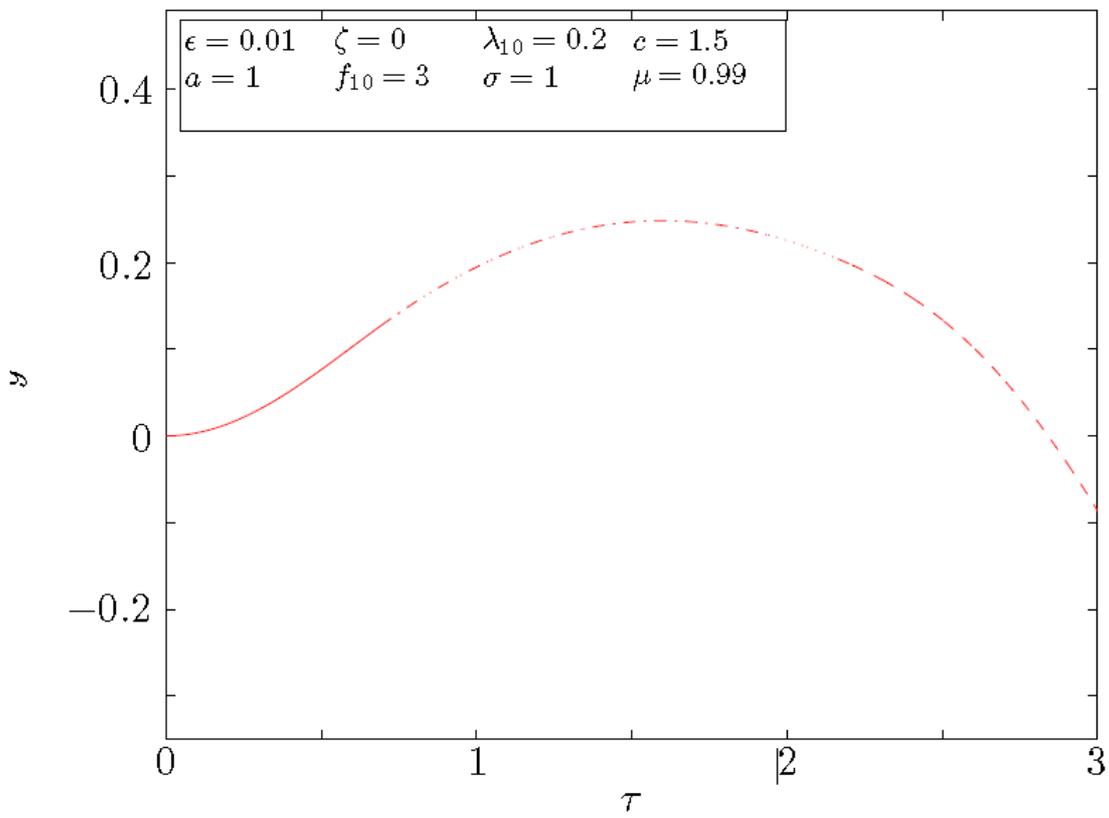


Fig. III.36. Déplacement de la masse additionnelle durant 3 unités de temps

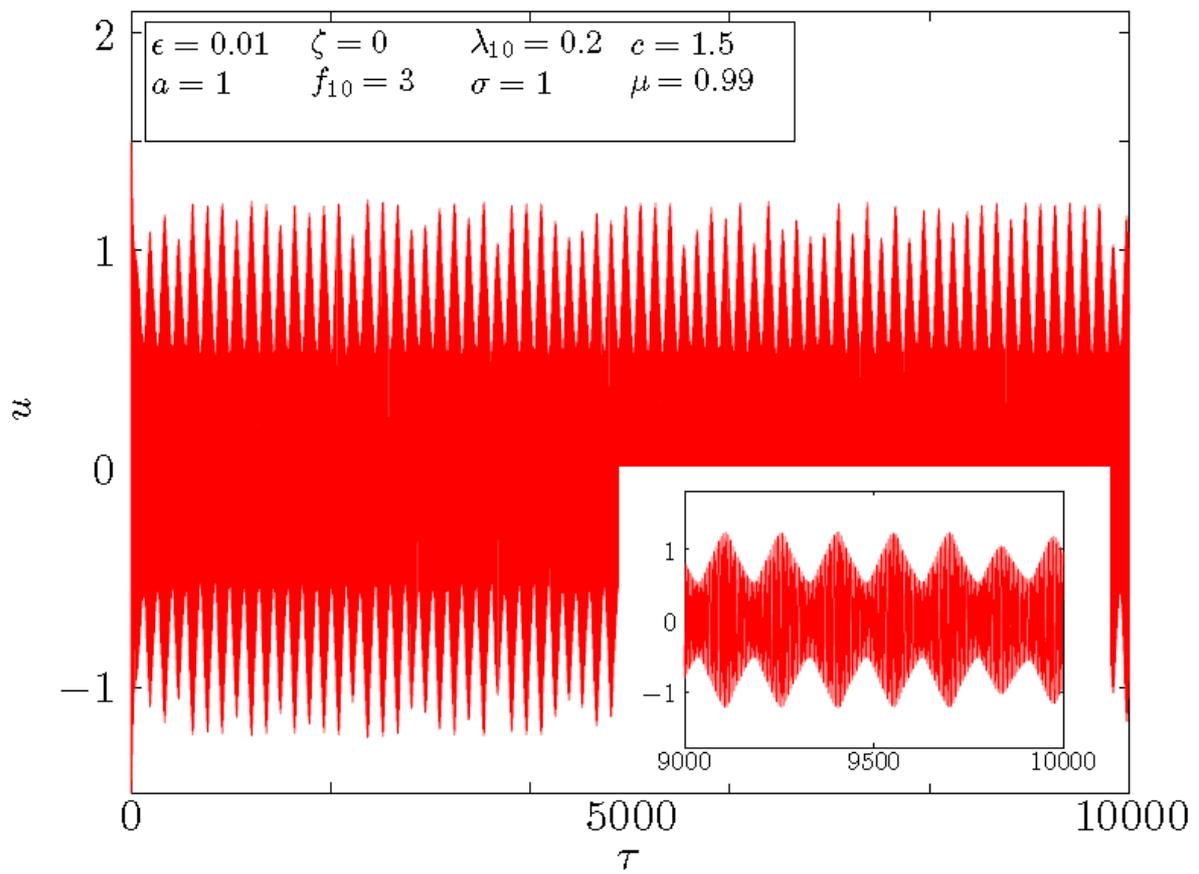


Fig. III.37. Déplacement de la masse principale en fonction du temps

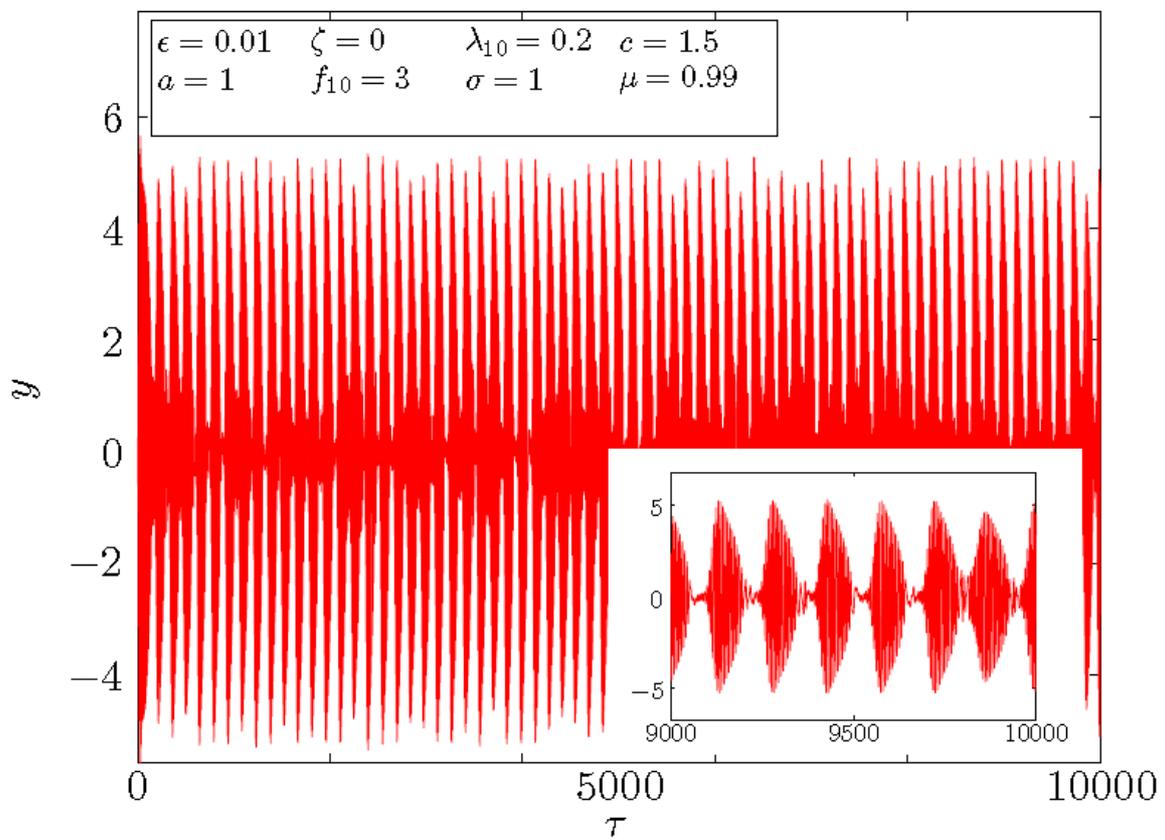
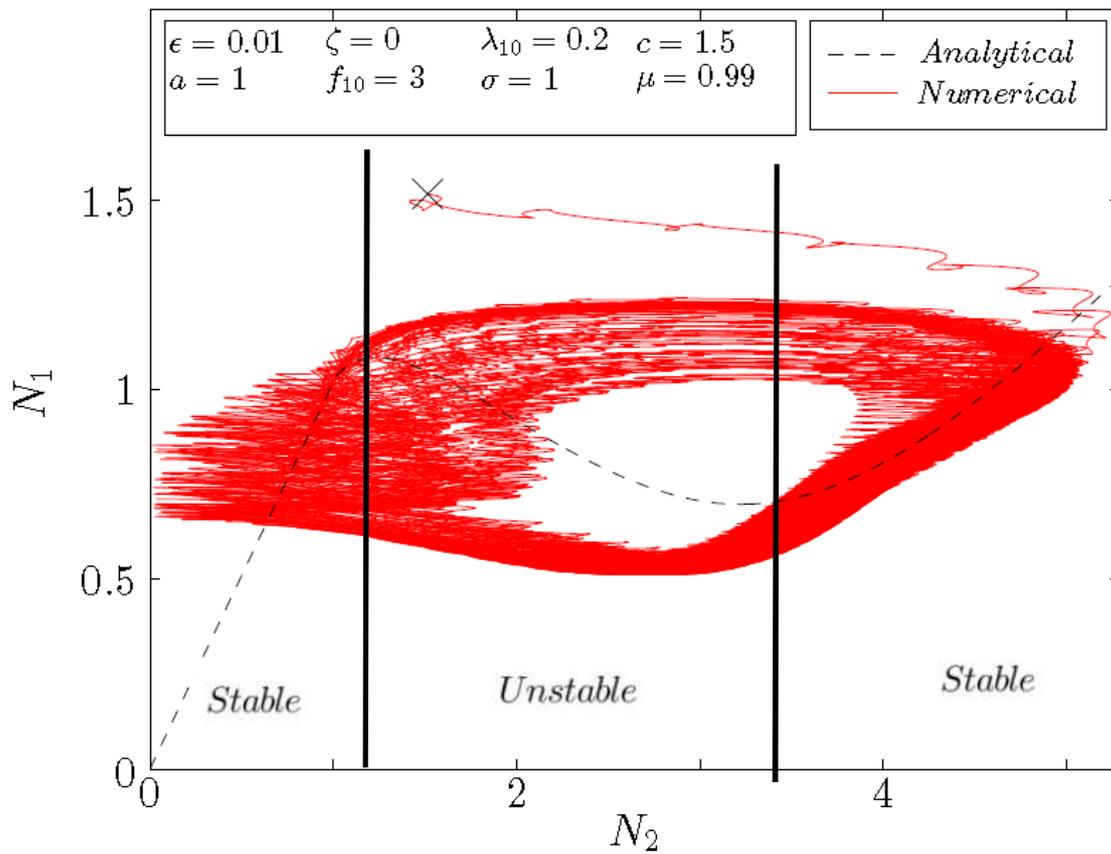


Fig. III.38. Déplacement de la masse additionnelle en fonction du temps



**Fig. III.39. Amplitude du système couplé**

**Ligne Continue : Solution numérique ;**

**Ligne discontinue : Solution analytique représentée par (eq. III.189)**

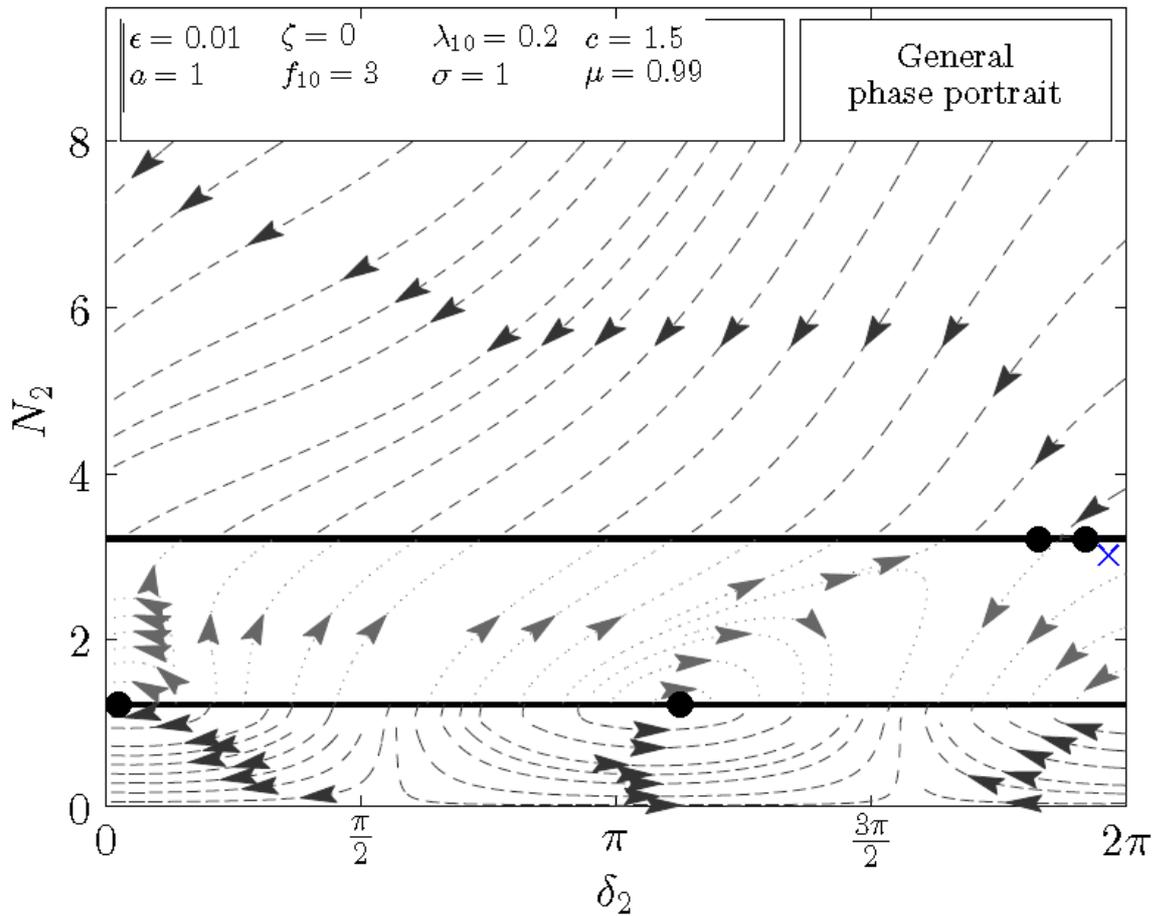


Fig. III.40. Portrait de phases général pour le système couplé et réduit

(X : point d'équilibre ; ● : points singuliers SMR)

Le couplage de notre masse principale ( $M$ ) ayant un comportement élastoplastique en présence de l'écroûissage cinématique, à une masse secondaire ( $m$ ) qui représente un absorbeur non linéaire (NES), donnant ainsi l'outil de contrôle -vibratoire- passif des structures qui fournisse le moyen de les protéger contre les phénomènes dynamiques : les chocs, comme les brusques coups de vent ou les vibrations, dues à une excitation harmonique extérieure comme le trafic routier, par exemple. Leur contrôle est habituellement assuré par des amortisseurs linéaires, les Tuned Mass Damper (TMD), ou des éléments frottants pour augmenter l'amortissement. L'objectif d'un tel système couplé (Fig. III.32) est d'évaluer si ces dispositifs peuvent être remplacés par des amortisseurs non linéaires, ou « Nonlinear Energy Sink (NES) », et s'ils peuvent être plus efficaces, soit par une masse ajoutée moindre, soit par un contrôle plus robuste.

La réponse de la masse principale du système est illustrée en (Fig. III.35) pour 3 unités de temps, et (Fig. III.37) pendant une durée très importante ; et de même pour la masse additionnelle (Absorbeur non linéaire NES) en Fig. III.36 et Fig. III.38.

La Figure III.39 illustre clairement le rapport entre les amplitudes des masses du système dynamique, où la solution analytique du problème sert de carte de référence dégageant des zones comportementales de stabilité/instabilité de la solution numérique du système.

Le portrait de phases (Fig. III.40), obtenu à partir du système d'équations (eq III.191), met en évidence l'existence de 4 point singuliers (SMR), et un seul point d'équilibre, dans la région instable située entre les deux valeurs de ( $N_2$ ) correspondantes aux extrémités du domaine d'instabilité (Fig. III.39).

Ce type d'analyse d'un tel système cultive fortement la perspective d'étudier un système de contrôle passif des structures par un absorbeur réel, dont on peut en fabriquer un prototype à base des simulations numériques des vibrations. Des essais expérimentaux ont été réalisés (Weiss & Chenia et al., 2016), dont le contrôle des vibrations d'un câble est fait à partir d'un dispositif amortissant posé au centre. Les manipulations consistaient à étudier le cas où le NES est bloqué, c'est-à-dire sans mouvement relatif par rapport au câble, et débloqué à deux amplitudes de lâché différentes. Les essais du prototype sur un banc de traction ont permis la mise en évidence la fiabilité du contrôle du NES agissant sur les vibrations du câble. Ils ont aussi permis de montrer l'existence d'un effet de seuil, à partir duquel le NES est beaucoup plus efficace dans les premiers instants. Ce constat est utilisé pour dimensionnement et permet d'améliorer significativement les performances du dispositif amortissant (NES) contre les sollicitations que l'on souhaite contrôler.

### III.7. Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à l'étude de la dynamique et de la réponse d'un oscillateur élastoplastique amorti symétrique en présence de l'écrouissage cinématique. La détermination de sa réponse dynamique à partir de la résolution de ses équations de mouvement est ainsi établi suivant trois cas bien distincts selon le rapport entre le taux d'amortissement ( $\zeta$ ) et le nouveau paramètres structurel ( $\mu$ ) qui intervient et qui représente le taux d'écrouissage dans le domaine plastique.

La réponse d'un tel oscillateur a été obtenue pour les vibrations libres et forcées, pour des jeux de paramètres dynamiques choisis. La frontière de bifurcation pour chaque cas, est représentée par une nouvelle formule introduisant le coefficient de l'écrouissage comme un paramètre clé.

L'étude de stabilité dynamique du système élastoplastique en présence de l'écrouissage a été menée par la méthode de perturbations et de propagation d'erreurs, suivant le même schéma que celui de l'oscillateur élastoplastique parfait.

Notre modèle numérique modélisant un oscillateur à une masse a été également couplé à une autre masse additionnelle (absorbeur amortissant NES) faisant ainsi la construction d'un nouveau système dynamique à 2 DDL, montrant la capacité de mener des études approfondies sur un oscillateur élastoplastique en présence de l'écrouissage notamment dans le calcul, l'analyse et la conception des capteurs et absorbeurs d'oscillations utilisant la dynamique des systèmes non linéaires.

**Conclusions Générales**

**Et**

**Perspectives**

## Conclusions Générales et Perspectives

Le fait de connaître les notions de base pour la théorie des systèmes non réguliers (non linéaires), ainsi que les états limites pour le type du chargement cyclique est un pas vers le contrôle de leur stabilité. La modélisation classique de l'oscillateur simple à un degré de liberté, dont la loi de comportement est bilinéaire, est tout à fait acceptable pour l'étude des vibrations de systèmes ou les amplitudes restent modérées. Dès que ces amplitudes deviennent importantes, le matériau constitutif est sollicité au-delà de son domaine d'élasticité et le comportement du système devient non-linéaire.

Cette thèse a traité les problèmes liés à la dynamique et la stabilité des systèmes élastoplastique (parfaitement plastique dans le Chapitre II, et en présence de l'écroutissement cinématique dans le Chapitre III). La formulation des équations de mouvement de chaque système élastoplastique a été présentée par des écritures généralisées utilisant des paramètres adimensionnels, afin de les utiliser lors des simulations numériques de la réponse dynamique de chaque cas d'étude *i.e.* pour les vibrations libres en perturbant uniquement les conditions initiales, ou bien pour les vibrations forcées conduites par une force extérieure sinusoïdale.

Les simulations numériques ont montré la forme géométrique des états du système (Adaptation et Accommodation), en fonction des paramètres structuraux choisis, qui dépendent de la caractérisation du cycle limite par l'obtention semi-analytique des temps de transition.

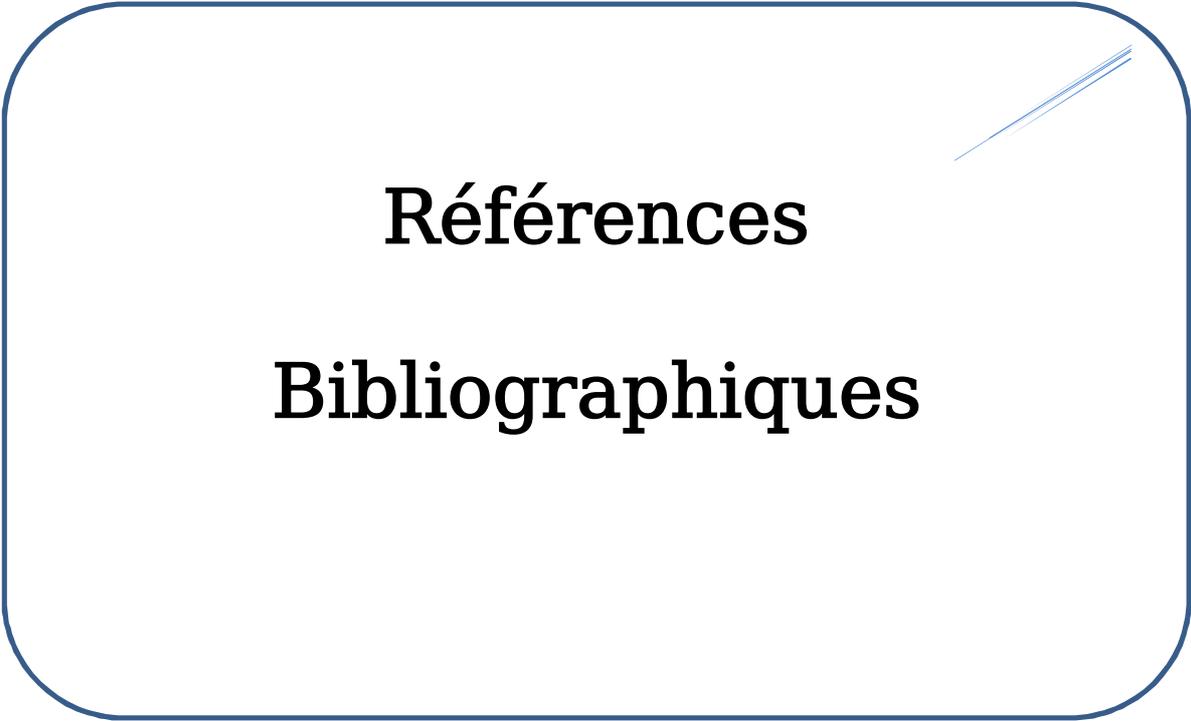
L'étude de stabilité dynamique de chaque système bilinéaire a été menée par l'approche de propagation d'erreur pour des petites perturbations des variables du problème, dont on a pu constater que le coefficient de l'écroutissement joue un rôle très important en augmentant la dimension du problème, et ainsi transformant le facteur de stabilité/instabilité d'un scalaire à une matrice de taille (2x2).

La frontière de bifurcation pour chaque cas (système parfait ou en présence de l'écroutissement), est représentée par une nouvelle formule introduisant le coefficient de l'écroutissement comme un paramètre clé (définissant le cas de l'étude par rapport au taux d'amortissement), autrement que celle du système élastoplastique parfait.

le modèle numérique du système élastoplastique en présence de l'écroissage modélisant un oscillateur à une masse a été également couplé à une autre masse additionnelle faisant ainsi la construction d'un nouveau système dynamique à 2 DDL, montrant la capacité de mener des études approfondies sur un oscillateur élastoplastique en présence de l'écroissage cinématique particulièrement dans le calcul, l'analyse et la conception des capteurs et absorbeurs d'oscillations utilisant la dynamique des système non linéaires.

Nous pouvons également citer plusieurs perspectives peuvent enrichir le sujet et qui peuvent entrer dans le cadre d'une éventuelle formation postdoctorale permettant l'obtention l'habilitation à diriger des recherches dans le domaine de la dynamique des systèmes ou la dynamique des structures :

- Aborder le cas d'un séisme réel sur une structure inélastique.
- Etudier le cas de l'oscillateur élastoplastique endommageable.
- Etudier le système dynamique avec un taux d'écroissage négatif ( $\mu < 0$ ).
- Etudier la dynamique d'une structure à échelle réduit couplée à un absorbeur (NES).



**Références**

**Bibliographiques**

## Références Bibliographiques

**AHN II-S., CHEN S-S., DARGUSH G-F.,** - An iterated maps approach for dynamic ratcheting in sdof hysteretic damping systems, *Journal of Sound and Vibration*, 323, pp. 896–909, 2009.

**AHN II-S., CHEN S-S., DARGUSH G-F.,** - Dynamic Ratcheting in Elastoplastic Single-Degree-of-Freedom systems. *Journal of engineering mechanics*, pp. 411-421, 2006.

**AWREJCEWICZ J & LAMARQUE C.H.** - Bifurcations and chaos in nonsmooth mechanical systems. World Scientific, Singapore, 2003.

**BALANDIER P.,** - Conception parasismique des bâtiments (structures)-Courses of parasismic construction Vol 2, DDE Martinique – SECQUIP, 180p, 2001.

**BOGOLIUBOV N. N. & KRYLOV N. M.** La théorie généralisée de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire". *Annals of Mathematics*. 2ème Series. 38 ,1, pp. 65–113, 1937.

**CAPECCHI D.** - Asymptotic motions and stability of the elastoplastic oscillator studied via maps. *Int. J. Solids Structures*, 30, 23, pp. 3303-3314, 1993.

**CAPECCHI D. & VESTRONI F.** - Periodic response of a class of hysteretic oscillators, *International Journal of non-linear Mechanics* 25, 2, 3, pp.309-317, 1990.

**CAUGHEY T.K.** - Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis, *Journal of Applied Mechanics* 27, 4, pp. 649-652, 1960.

**CHALLAMEL N.** - Dynamic analysis of elastoplastic shakedown of structures. *Int. J. Structural Stability and Dynamics*, 5, 2, pp. 259-278, 2005.

**CHALLAMEL N. & GILLES G.** - Stability and dynamics of a harmonically excited elasticperfectly plastic oscillator, *J. Sound Vibration*, 301, pp. 608-634, 2007.

**CHALLAMEL N. & PIJAUDIER-CABOT G.** - Stability and dynamics of a plastic softening oscillator, *Int. J. Solids Structures*, 43, pp. 5867-5885, 2006.

**CHALLAMEL N., CASANDJIAN C., LANOS C.** – Some closed-form solutions to simple beam problems using non-local (gradient) damage theory, *International Journal of Damage Mechanics* , 18, 6, pp. 569 -598, 2008.

**CHALLAMEL N., LANOS C., CASANDJIAN C.** -On the propagation of localization in the plasticity collapse of hardening-softening beams, *Int. J. Eng. Sc.*, 48, 5, pp. 487-506, 2010.

**CHALLAMEL N., LANOS C., HAMMOUDA A. & REDJEL B.** - Stabilité d'un oscillateur élastoplastique sollicité par une pulsation harmonique, *Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, 2007.

**CHALLAMEL N., LANOS C., HAMMOUDA A. & REDJEL B.** - Stability analysis of dynamic ratcheting in elastoplastic systems, *Physical Review E*, 75, 2, pp. 1-16, 2007.

**CHENIA M., HAMMOUDA A., HACENE CHAOUCHE A** - Energetic evaluation of a perfect damped elastoplastic oscillator, *Rev. Sci. Technol., Synthèse*, 36, pp.141-152, 2018.

**CHENIA M.**, - Contrôle de la stabilité dynamique des structures à matériaux non réguliers, Thèse de Master, U B M Annaba, Juin 2010.

**CHENIA M., HAMMOUDA A., HACENE CHAOUCHE A.**, - Contrôle de la stabilité dynamique des structures à matériaux non réguliers, 1er Congrès international sur le Génie Civil et le Développement Durable (GCDD 2011) TEBESSA, 17-19 Octobre 2011.

**CHENIA M., HAMMOUDA A., HACENE CHAOUCHE A.**, - Stabilité asymptotique d'un oscillateur élastoplastique parfait amorti, 1<sup>st</sup> International Conference on Civil Engineering (ICCE 2012) LAGHOUAT, 8-9 Mai 2012.

**CHENIA M., HAMMOUDA A., HACENE CHAOUCHE A.**, - Stabilité asymptotique d'un oscillateur élastoplastique parfait amorti, 12<sup>th</sup> International Conference on Computational Structures Technology (CST 2014), Naples, 2-5 Septembre 2014.

**CLOUGH R-W, PENZEIEN J**, - Dynamique des structures : Principes fondamentaux, collection scientifique de l'IPSI, Tome 1, Editions Pluralis, 1980.

**DUFFING G.** - Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1918.

**GRAY P. & SCOTT S-K** - Chemical Oscillations and Instabilities – Non-linear Chemical Kinetics, Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chemie, 95, 4, pp. 545-546, 1990.

**GREBOGI C., OTT E., PELIKAN S., YORKE J.A.** - Strange attractors that are not chaotic. Physica D, 13, pp 261-268, 1984.

**HAMMOUDA A.,** - Etude au séisme des structures élastoplastiques : Cas de l'oscillateur simple, thèse de doctorat en cotutelle U B M Annaba et INSA de Rennes, mais 2009.

**HAMMOUDA A., CHALLAMEL N.,** -Carte d'énergie pour l'oscillateur élastoplastique : application au dimensionnement sismique, 29<sup>ème</sup> Rencontre de l'AUGC, Tlemcen, 29-31 Mai 2001.

**HAMMOUDA A., CHALLAMEL N., LANOS C., REDJEL B.,** - Carte d'énergie pour l'oscillateur élastoplastique en régime dynamique, Rhéologie, 14, pp. 37-43, 2008.

**HAMMOUDA A., CHENIA M, HAENE CHAUCHE A., CHALLAMEL N.,**-Asymptotic stability of a hardening elastoplastic oscillator, International Review of Mechanical Engineering (IREME), 06, 03, Part A, pp. 547-552, 2012.

**IWAN W.D.** - The steady-state response of the double bilinear hysteretic model, Journal of applied Mechanics 32, pp. 921-925, 1965.

**JACOBSEN L.S.** - Dynamic behaviour of simplified structures up to the point of collapse, Proceeding, Symposium Earthquake and Blast Effects on Structures, pp. 94-113, 1952.

**JENNINGS P.C** - Periodic response of a general yielding structure, Journal of Engineering Mechanics 90, p 131-166, 1964.

**KORSCH H-J. & JODL H-J.** - Chaos: A Program Collection for the PC. Springer, Berlin, chap. 8, 1998.

**LE BOURLOT J.** - Introduction aux systèmes dynamiques dissipatifs, mastère Astronomie et Astrophysique, observatoire de Paris, 2008-2009.

**LEIPHOLZ H.** - An Introduction to the Stability of Dynamic System and Rigid Bodies, ACADEMIC PRESS, New York and London, 1970.

**LIU C-S** - Exact solutions and dynamic responses of s d o f bilinear elastoplastic structures, Journal of the Chinese Institute of Engineers, 20, 5, pp. 511-525, 1997.

- LIU C-S. & HUANG Z-M.** - The steady state response of s.d.o.f. viscous elasto-plastic oscillator under sinusoidal loading, *Journal of Sound and Vibration*, 273, pp. 149-173, 2004.
- LIU C-S.** -Two-dimensional bilinear oscillator: group-preserving scheme and steady-state motion under harmonic loading, *Journal of Sound and Vibration*, 273, pp 1581-1602, 2003.
- LIU C-S., HONG H-K., LIOU D-Y.** - Two-dimensional friction oscillator: group-preserving scheme and handy formulae, *Journal of Sound and Vibration*, 266, pp. 49–74, 2003.
- LORENZ E-N.** - Deterministic non-periodic flow. *Journal of Atmospheric Science*, 20, pp 130-141, 1963.
- LUO A-C-J.** - On the symmetry of solutions in non-smooth dynamical systems with two constraints, *Journal of Sound and Vibration* 273, pp. 1118-1126, 2004.
- MANNEVILLE P.** - Dissipative structures and weak turbulence. *Perspectives in Physics*. Academic Press Inc., Boston, 1990.
- Masri S-F.,** - Forced vibration of the damped bilinear hysteretic oscillator, *Journal of the Acoustical Society of America*, 57, pp. 105-112., 1975.
- MILLER G.R. & BUTLER M.E.** - Periodic response of elastic-perfectly plastic SDOF oscillator. *Journal Engineering Mechanics* 114, 3, p 536-550, 1988.
- MROZ Z. & ZARKA J.** - Relations de comportement des métaux sous chargements cycliques, *Matériaux et Structures sous chargements cycliques*, presse de l'ENPC, 1978.
- PECKER A.** – *Dynamique des Structures et des ouvrages*, Ecole des Ponts ParisTeck, Edition, 2017.
- POINCARÉ H.** - Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Mémoire couronné du prix de S.M. le roi Oscar II de Suède et de Norvège, Novembre, 1890.
- POMEAU Y.** - Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, 74, p. 189-197, 1980.
- PRATAP R., MUKHERJEE S., MOON F.C.** - Dynamic behaviour of a bilinear hysteretic elasto-plastic oscillator, Part I: Free oscillations, *Journal of Sound and Vibration* 172,3, pp. 321-337, 1994.

**RÖSSLER O-E.** -An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57, pp 387-398, 1976.

**SALEÇON J.** - Cours de calcul des structures anélastiques, calcul à la rupture et analyse limite, Presse de l'école nationale des ponts et chaussées, 1983.

**SCOTT S-K** – *Chemical Chaos*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

**SHAW S-W. & HOLMES P-J.** - A periodically forced piecewise linear oscillator, *Journal of Sound and Vibration* 90, pp. 129-155,1983.

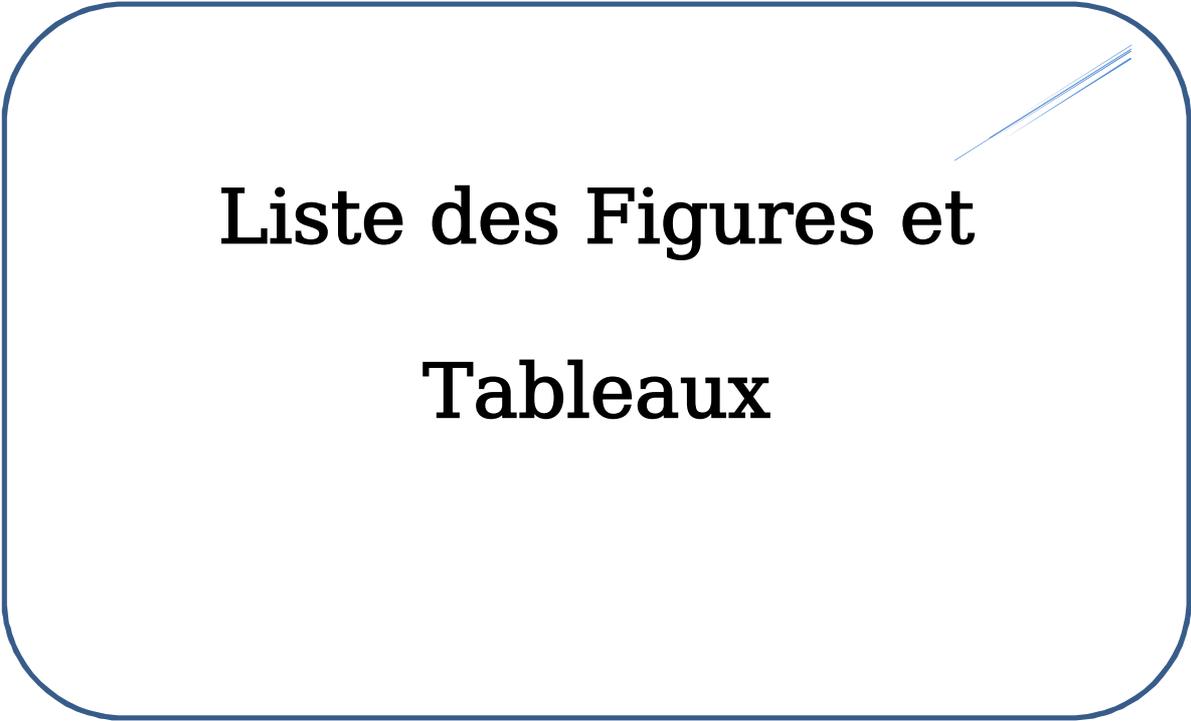
**TANABASHI R.** - Studies on nonlinear vibration of structures subjected to destructive earthquakes, *World Conference on earthquake Engineering, Proceedings, Berkeley. California*, pp. 61-67, 1956.

**WEISS M., & CHENIA M., SAVADKOOHI A-T, LAMARQUE C-H., VAURIGAUD B., HAMMOUDA A.** - Multi-Scale energy exchanges between an elasto-plastic oscillator and a light nonsmooth system with external pre-stress, *Nonlinear Dynamics*, Springer, 83, 1, pp. 109-135, 2016.

**WEISS M., CHENIA M., SAVADKOOHI A-T., LAMARQUE C-H., HAMMOUDA A.,** - Analytical solution of a hardening elastoplastic oscillator coupled with a piecewise linear nonlinear energy sink, 8<sup>th</sup> European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), Vienna, July 6-11 2014.

**ZASLAVSKY G-M.** -*Physics of chaos in Hamiltonian systems*, Imperial College Press, 1998.

**ZHANG Y., IWAN W-D.,** -Statistical performance analysis of seismic-excited structures with active interaction control, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32, 7, pp. 1039-1054, 2003.



# Liste des Figures et Tableaux

## Liste des Figures et Tableaux

### Chapitre I : Synthèse Bibliographique

<b>Figure I.1. Vibrations Libres d'un Oscillateur harmonique dissipatif</b>	<b>11</b>
<b>Fig. I.2. Evolution vers un état Stationnaire (Scott, 1991)</b>	<b>14</b>
<b>Fig. I.3. Evolution vers un état Oscillant (Scott, 1991)</b>	<b>15</b>
<b>Fig. I.4. Cycle limite des oscillations dans l'espace des phases. (Scott, 1991)</b>	<b>17</b>
<b>Fig. I.5. Développement Des Oscillations -Diagramme de Bifurcation- (Scott, 1991)</b>	<b>17</b>
<b>Figure I.6. Loi de Comportement cyclique des Matériaux de Construction</b>	<b>19</b>
<b>Fig. I.7. Schématisation simplifiée du comportement Non Linéaire</b>	<b>21</b>
<b>Fig. I.8. Comportement limite des structures sollicitées par un chargement cyclique</b>	<b>23</b>
<b>Fig. I.9. L'oscillateur simple à 1DDL</b>	<b>24</b>
<b>Fig. I.10. Oscillateur simple à 1 DDL Excité</b>	<b>29</b>
<b>Fig. I.11. L'ensemble des forces appliquées à l'oscillateur simple</b>	<b>30</b>
<b>Fig. I.12. Le Modèle Rhéologique de l'oscillateur simple à 1DDL</b>	<b>31</b>
<b>Fig. I.13. Loi de comportement élastoplastique parfait symétrique (<math> F^+  =  -F^+ </math>)</b>	<b>33</b>
<b>Fig. I.14. Modèle élastoplastique en présence de l'érouissage linéaire illimité en chargement uniaxial</b>	<b>34</b>

Chapitre II : Etude de l'Oscillateur Elastoplastique Parfait

Fig. II.1. Modèle Rhéologique de l'oscillateur élastoplastique à 1 DDL	38
Fig. II.2. Loi de Comportement de l'oscillateur élastoplastique parfait	39
Fig. II.3. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine) $(v, \dot{u}) = (-0.5, 0.5)$	50
Fig. II.4. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine) $(v, \dot{u}) = (-0.9, 0.9)$	51
Fig. II.5. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine) $(v, \dot{u}) = (-1, 1)$	52
Fig. II.6. Adaptation élastoplastique (Shakedown) $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 0.6$	60
Fig. II.7. Accommodation avec cycle limite périodique (Alternating Plasticity) $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$	61
Fig. II.8. Adaptation élastoplastique avec convergence vers un cycle limite : $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 0.6$	62
Fig. II.9. Adaptation élastoplastique avec convergence vers un cycle limite : $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1.5); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 0.6$	63
Fig. II.10. Accommodation avec cycle limite périodique (Alternating Plasticity) $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$	64
Fig. II.11. Accommodation avec cycle limite périodique (Alternating Plasticity) $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1.5); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$	65
Fig. II.12. Sensibilité du déplacement total $u$ aux conditions initiales $\zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$	66
Fig. II.13. Domaine des phases (eq. II.11)	68
Fig. II.14. Cycle limite dans l'espace des phases (Temps de transitions)	69
Fig. II.15. Solutions de $(Y = \omega \bar{y})$ en fonction de $\omega$ (eq. II.43) $(f_0 = 2; \zeta = 0.02)$	73
Fig. II.16. Frontière de Bifurcation entre adaptation et accommodation (en 2D)	76
Fig. II.17. Frontière de Bifurcation entre adaptation et accommodation (en 3D)	77

<b>Fig. II.18. Loi de comportement Adoptée (Boucle d'hystérésis), pour :</b>	<b>79</b>
$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1); \zeta = 0.1; \omega = 0.5; f_0 = 1$	
<b>Fig. II.19. Bilan Energétique de l'oscillateur élastoplastique parfait, Symétrique</b>	<b>81</b>
$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0.1; f_0 = 1$	
<b>Fig. II.20. Bilan Energétique de l'oscillateur élastoplastique parfait, Symétrique non-amorti</b>	<b>82</b>
$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0; f_0 = 1$	
<b>Fig. II.21. Bilan Energétique de l'oscillateur élastoplastique parfait, Symétrique en fonction de l'amortissement</b>	<b>83</b>
$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \omega = 0.5; f_0 = 1$	
<b>Fig. II.22. Bilan Energétique de l'oscillateur élastoplastique parfait, Symétrique en fonction de l'amplitude de force extérieure</b>	<b>84</b>
$(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0); \zeta = 0.1; \omega = 0.5$	

### Chapitre III : Étude de l'Oscillateur Élastoplastique en Présence de l'Écrouissage

<b>Fig. III.1. Loi de comportement élastoplastique en présence de l'écrouissage</b>	<b>94</b>
<b>Fig. III.2. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>105</b>
<b>Cas 1 : <math>(v_0, \dot{u}_0) = (-0.99, 1), \zeta = 0.1; \mu = 0.09</math></b>	
<b>Fig. III.3. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>106</b>
<b>Cas 1 : <math>(v_0, \dot{u}_0) = (-0.99, 1), \zeta = 0.5; \mu = 0.2</math></b>	
<b>Fig. III.4. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>107</b>
<b>Cas 1 : <math>(v_0, \dot{u}_0) = (-0.99, 0.2), \zeta = 0.7; \mu = 0.4</math></b>	
<b>Fig. III.5. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>108</b>
<b>Cas 2 : <math>(v_0, \dot{u}_0) = (-0.91, 0.9), \zeta = 0.3; \mu = 0.3</math></b>	
<b>Fig. III.6. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>109</b>
<b>Cas 2 : <math>(v_0, \dot{u}_0) = (-0.99, 1), \zeta = 0.1; \mu = 0.1</math></b>	
<b>Fig. III.7. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>110</b>
<b>Cas 2 : <math>(v_0, \dot{u}_0) = (-0.51, 1), \zeta = 0.7; \mu = 0.7</math></b>	
<b>Fig. III.8. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>111</b>
<b>Cas 3 : <math>(v_0, \dot{u}_0) = (-0.75, 1), \zeta = 0.1; \mu = 0.5</math></b>	

<b>Fig. III.9. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>112</b>
Cas 3 : $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.51, 1), \zeta = 0.2 ; \mu = 0.7$	
<b>Fig. III.10. Oscillations libres (stabilité asymptotique du point d'origine)</b>	<b>113</b>
Cas 3 : $(v_0, \dot{u}_0) = (-0.96, 1.5), \zeta = 0.1 ; \mu = 0.2$	
<b>Fig. III.11. Domaine des phases de l'oscillateur écroissable libre</b>	<b>114</b>
<b>Fig. III.12. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)</b>	<b>127</b>
Cas 1 : $f_0 = 0.6 ; \omega = 0.5 ; \mu = 0.1 ; \zeta = 0.2 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.13. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)</b>	<b>128</b>
Cas 1 : $f_0 = 1 ; \omega = 1.5 ; \mu = 0.05 ; \zeta = 0.1 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.14. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)</b>	<b>129</b>
Cas 1 : $f_0 = 0.2 ; \omega = 0.9 ; \mu = 0.05 ; \zeta = 0.1 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.15. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)</b>	<b>130</b>
Cas 1 : $f_0 = 0.6 ; \omega = 0.5 ; \mu = 0.05 ; \zeta = 0.1 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.16. Oscillations forcées (Adaptation élastoplastique)</b>	<b>131</b>
Cas 1 : $f_0 = 0.6 ; \omega = 0.5 ; \mu = 0.05 ; \zeta = 0.1 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 1)$	
<b>Fig. III.17. Oscillations forcées (Accommodation)</b>	<b>132</b>
Cas 1 : $f_0 = 0.6 ; \omega = 0.9 ; \mu = 0.05 ; \zeta = 0.1 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.18. Oscillations forcées (Accommodation)</b>	<b>133</b>
Cas 1 : $f_0 = 1 ; \omega = 0.7 ; \mu = 0.09 ; \zeta = 0.2 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 1)$	
<b>Fig. III.19. Oscillations forcées (Adaptation)</b>	<b>134</b>
Cas 2 : $f_0 = 0.2 ; \omega = 0.5 ; \mu = 0.2 ; \zeta = 0.2 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.20. Oscillations forcées (Adaptation)</b>	<b>135</b>
Cas 2 : $f_0 = 0.6 ; \omega = 0.3 ; \mu = 0.5 ; \zeta = 0.5 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.21. Oscillations forcées (Accommodation)</b>	<b>136</b>
Cas 2 : $f_0 = 0.6 ; \omega = 0.5 ; \mu = 0.2 ; \zeta = 0.2 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.22. Oscillations forcées (Accommodation)</b>	<b>137</b>
Cas 2 : $f_0 = 0.6 ; \omega = 0.5 ; \mu = 0.2 ; \zeta = 0.2 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 1)$	
<b>Fig. III.23. Oscillations forcées (Adaptation)</b>	<b>138</b>
Cas 3 : $f_0 = 0.4 ; \omega = 0.3 ; \mu = 0.2 ; \zeta = 0.1 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.24. Oscillations forcées (Adaptation)</b>	<b>139</b>
Cas 3 : $f_0 = 0.3 ; \omega = 0.5 ; \mu = 0.7 ; \zeta = 0.5 ; (v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	

<b>Fig. III.25. Oscillations forcées (Accommodation)</b>	<b>140</b>
Cas 3 : $f_0 = 0.4$ ; $\omega = 0.2$ ; $\mu = 0.2$ ; $\zeta = 0.1$ ; $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 1)$	
<b>Fig. III.26. Oscillations forcées (Accommodation)</b>	<b>141</b>
Cas 3 : $f_0 = 0.5$ ; $\omega = 0.7$ ; $\mu = 0.2$ ; $\zeta = 0.1$ ; $(v_0, \dot{u}_0) = (0, 0)$	
<b>Fig. III.27. Caractérisation Analytique du Cycle limite</b>	<b>143</b>
<b>Fig. III.27. Solutions de <math>(Y = \omega \bar{y})</math> en fonction de <math>\omega</math> (eq. III.116)</b>	<b>155</b>
$(f_0 = 2$ ; $\zeta = 0.02$ ; $\mu = 0.01$ )	
<b>Fig. III.28. Frontière de Bifurcation Cas 1 (<math>\zeta &gt; \mu</math>) : <math>\zeta = 0.1</math> ; <math>\mu = 0.05</math></b>	<b>160</b>
<b>Fig. III.29. Frontière de Bifurcation Cas 2 (<math>\zeta = \mu</math>) : <math>\zeta = 0.2</math> ; <math>\mu = 0.2</math></b>	<b>161</b>
<b>Fig. III.30. Frontière de Bifurcation Cas 3 (<math>\zeta &lt; \mu</math>) : <math>\zeta = 0.1</math> ; <math>\mu = 0.2</math></b>	<b>162</b>
<b>Fig. III.31. Stabilité de l'oscillateur élastoplastique écrouissable</b>	<b>174</b>
Cas 1 ( $\zeta > \mu$ ) : $f_0 = 2$ ; $\zeta = 0.02$ ; $\mu = 0.01$	
<b>Fig. III.32. Système Elastoplastique Ecrouissable Couplé à 2DDL</b>	<b>175</b>
<b>Fig. III.33. Loi de comportement de la masse additionnelle (NES)</b>	<b>176</b>
<b>Fig. III.34. Tous les états possibles du système couplé à 2 DDL</b>	<b>178</b>
<b>Tab. III.1. Paramètres du système selon chaque état possible</b>	<b>179</b>
<b>Fig. III.35. Exemple de déplacement de la masse principale durant 3 unités de temps</b>	<b>182</b>
<b>Fig. III.36. Exemple de déplacement de la masse additionnelle durant 3 unités de temps</b>	<b>183</b>
<b>Fig. III.37. Déplacement de la masse principale en fonction du temps</b>	<b>184</b>
<b>Fig. III.38. Déplacement de la masse additionnelle en fonction du temps</b>	<b>185</b>
<b>Fig. III.39. Amplitude du système couplé</b>	<b>186</b>
<b>Fig. III.40. Portrait de phases général pour le système couplé et réduit</b>	<b>187</b>

---

## Liste des Symboles

$M$	The Model's mass
$U$	The displacement
$\dot{U}$	The displacement rate
$U_p$	The plastic displacement
$F(t)$	The external harmonic force
$F_0$	The force's intensity
$\Omega$	The force's angular frequency
$K_0$	The elastic stiffness
$F^+$	The maximum force
$U_Y$	The elastic displacement
$C$	The damping coefficient
$\hat{E}$	The elastic state
$\hat{P}$	The plastic state
$u, \dot{u}, u_p$	The dimensionless displacements
$\tau, t^*$	The dimensionless temporal derivatives
$f_0$	The dimensionless maximum force
$\omega$	The dimensionless angular frequency
$\zeta$	The dimensionless damping coefficient
$v$	The dimensionless reduced displacement
$\mu$	The kinematic hardening coefficient