وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES EN MATHEMATIQUES
Option : **Analyse Numérique**

LA METHODE DE DECOMPOSITION DU DOMAINE POUR LES INEQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES ELLIPTIQUES

Par
BEGGAS Mohammed

Sous la direction de
Pr. HAIOUR Mohamed

Devant le jury

PRESIDENT	**Mr.Azzedine Benchettah..**	**Pr**	**U.B.M. ANNABA**
RAPPORTEUR	**Mohamed Haiour**	**Pr**	**U.B.M. ANNABA**
EXAMINATEUR	**Med Cherif Bouras**	**M.C.A**	**U.B.M. ANNABA**
EXAMINATEUR	**Salah Boulaaras**	**M.C.A**	**U. Al Qassim A. Saoudit**
EXAMINATEUR	**Fateh Ellaggoune**	**Pr**	**U. Guelma**
EXAMINATEUR	**Bencheikh Lehocine M. El Amine**	**M.C.A**	**C.U. Tamanrasset**

Année Universitaire 2016 / 2017

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, le professeur Haiour Mohamed d'avoir accepté de rapporter mon manuscrit et pour tout le temps qu'il y a consacré pendant toute la durée de cette thèse, qui m'a aiguillé et su me comprendre.
Merci pour tes conseils, ton attention qui m'a permis d'accomplir ce travail.
Je voudrais remercier trés vivement le professeur Benchettah Azzedine pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Mes sincères remerciments vont également aux Messieurs :
Bouras Med Cherif, Salah Boulaaras, Mohamed El Amine Bencheikh Le Hocine et Ellaggoune Fateh qui ont généreusement accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie mes collègues, Said Beloul, Lourabi Harise et Adel Aissaoui, pour leur aide afin de compléter ce travail.

Résumé

Ce travail concerne l'étude d'une classe des inéquations quasi- variationnelles généralisées dans le sens où le second membre et l'obstacle dépendent de la solution, en appliquant la méthode de décomposition en deux sous- domaines sans recouvrement.
On donne l'estimation d'erreur de l'approximation par éléments finis de degré 1.
Notre résultat d'approximation est :

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2, \quad i = 1, 2.$$

Mots clés : Inéquation quasi-variationnelle elliptique, Méthode de Schwarz, Elément fini, Approximation.

Abstract

In this work, we study a generalized class of quasi- variational inequalities where the second member and the obstacle depends to the solution, applying the decomposition method in two sub- domains without recouvrement.

We give the error estimate of the approximation by finite elements of degree 1.

Our approximation result is :

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2|\log h|^2, \quad i = 1, 2.$$

Key words : Elliptic quasi- variational inequalities, Schawarz method, Finite element, Approximation .

ملخّص

في هذَا العمل درسنَا تطبيق متنَاوبة شوَارتز، بحيث قسمنَا الحيز الكلي الَى حيزين جزِئِيّن لمترَاجِحة شبه تغَايرية معمَمة اين الحَاجز و الطرف الثَاني يتعلقَان بَالحل.
يتم حصر الَارتيَاب من خلَال التقريب بَالعنَاصر المتهية من الرتبة الَاولَى اذ نَحصل علَى التقريب التَالي

$$u_i - u_{ih}^{n+1}{}_{\infty} \leq Ch^2|\log h|^2, \quad i = 1, 2.$$

الكلمَات المفتَاحية : طريقة شوَارتز، مترَاجِحة شبه تغَايرية نَاقصية، العنَاصر المتهية، التقريبَات.

Table des matières

Notations

1. Ω : est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$.

2. Ψ : l'obstacle.

3. K : est un ensemble convexe, fermé et non vide

4. V_h : l'espace d'approximation interne.

5. φ : est une fonction de base.

6. r_h : opérateur de restriction.

7. π_h : opérateur d'interpolation.

8. τ^h : triangulation de domaine.

9. $\overline{B}(0, R)$: la boule fermée de centre 0 et de rayon R.

10. Soit p un réel, avec $1 \leq p < +\infty$.

    $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ mesurable et $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$.
    $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

    $$\|f\|_{L^p} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]. \tag{1}$$

    Si $p = \infty$, on définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par :

    $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ mesurable et telle que $\sup ess_{x\in\Omega}|f(x)| < \infty\}$.

$L^\infty(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{2}$$

11. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall i = 1, 2, ...n; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\}.$$

On pose

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Où

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \forall i = 1, 2, ...n; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}.$$

Et

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega\}.$$

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}, \tag{3}$$

ou bien de la norme équivalente suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u,v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle_{L^2}. \tag{5}$$

Où

$$\langle u,v\rangle_{L^2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx. \tag{6}$$

La norme associée est

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Cette norme est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

12. Soient $m \geq 2$ un entier et p un réel avec $1 < p < \infty$.

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\},$$

où

$$\mathcal{D}^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n},$$

et

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p} \tag{8}$$

est un espace de Banach.

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

$H^m()$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle \mathcal{D}u, \mathcal{D}v\rangle_{L^2}, \tag{9}$$

est un espace de Hilbert.

Introduction

Le principe de résolution par décomposition de domaine d'un problème donné, dit méthode de Schwarz, est assez ancien. En 1869 [34], l'auteur a utilisé une décomposition recouvrante pour la résolution d'un problème aux dérivées partielles sur une géométrie complexe.

Le développement des moyens de calcul numérique et notamment l'avènement des architectures parllèles a ravivé, depuis trois décennies, l'intérêt porté à ces méthodes.

En 1988, Lions a donné une interprétation de cette méthode à l'aide d'une formulation variationnelle [26, 27, 28]. Il a précisé que la convergence de cette méthode dépend de la taille du recouvrement et du pas de discrétisation.

Les méthodes de décomposition de type Schwarz consiste à remplacer la résolution d'un problème posé sur un domaine global potentiellement gros et compliqué par une succession de résolutions du même problème sur des sous-domaines du domaine global, supposés plus simples, plus petits et réguliers.

On distingue deux types de partitionnement :

1. Méthode de Schwarz sans recouvrement : l'intersection entre les sous- domaines se limite aux interfaces.
2. Méthode de Schwarz avec recouvrement : Chaque sous domaine recouvre une partie de ses sous- domaines voisins, et qui comporte deux versions, à savoir celle de Schwarz additif (Calcul Parallèle) et de Schwarz multiplicatif (Calcul Séquentiel).

Nous nous sommes intéressés à la méthode de Schwarz à cause des motivations suivantes :

1. Adaptation aux machines parallèles.
2. Propriétés de la convergence.
3. Possibilité de s'appliquer à des problèmes définis sur des géométries compliquées.
4. Facilité de l'utilisation des schémas numériques différents pour chaque sous problème.

La méthode de Schwarz a été largement étudiée pour les problèmes elliptiques linéaires dans [1, 2, 3, 5].

P. L. Lions était le premier a avoir travaillé sur les inéquations variationnelles [25, 26]. Les deux méthodes de Schwarz multiplicative et additive ont été respectivement données dans[38, 39, 40], pour le problème d'obstacle avec un ou deux obstacles, quand à Meyer dans[30], il a étudié leurs solutions numériques.

Les inéquations quasi-variationnelles ont un grand intérêt, car elles modélisent de nombreux problèmes non linéaires [13, 18, 29, 33, 2]. La notion la plus récente d'inéquation quasi-variationnelle a été introduite par A. Bensoussan et J. L. Lions [5, 6], pour étudier des problèmes de contrôle impulsionnel.

Pour notre part, on s'intéresse à l'approximation par éléments finis, en introduisant l'algorithme de Schwarz pour des inéquations quasi-variationnelles, dans la mesure où le second membre et l'obstacle dépendent de la solution.

Notre problème est une généralisation aux certaines classes d'inéquations quasi-variationnelles, selon la dépendance du second membre et l'obstacle de la solution :
Dans un premier temps, la convergence uniforme du problème d'obstacle a été étudié dans[11] et consistait à problème de l'ostacle suivant :

Trouver $u \in K$ telle que

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f, v-u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K \\ u \leq \psi; & v \leq \psi, \end{cases}$$

qui a donné le resultat de convergence suivant :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2.$$

Ce même résultat d'estimation a été obtenu dans [23] pour le problème suivant :

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f(u), v-u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K(u). \\ u \leq \psi; & v \leq \psi. \end{cases}$$

L'étude d'une inéquation variationnelle à opérateur non coercif, a été faite dans [35], où ils ont trouvé le même résultat d'approximation.
D'autre part l'étude d'une inéquation quasi-variationnelle lié au problème de contrôle ergodique a été faite dans[31] qui consistait au suivant :

$$\begin{cases} b(u_\alpha, v-u_\alpha) \geq (f + ru_\alpha, v-u_\alpha), & \alpha \in (0,1) \\ u_\alpha \leq Mu_\alpha, & v \leq Mu_\alpha, \end{cases}$$

où ils ont obtenu l'approximation suivante :

$$\|u_{\alpha_i} - u_{\alpha_i h}^{n+1}\|_\infty \leq C\alpha^{-2} h^2 |\log h|^4, \; i = 1, 2.$$

Finalement, a été étudié dans [20] la convergence uniforme pour une inéquation quasi-variationnelle où l'obstacle dépend de la solution définie comme suit :

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f, v-u) & \forall v \in K \\ u \leq Mu; & Mu \geq 0 \\ Mu = k + \inf\limits_{\varepsilon \geq 0, x+\varepsilon \in \overline{\Omega}} u(x+\varepsilon); & \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi; & \text{dans } \Gamma_0 \text{ et } u = 0 \text{ dans } \Gamma_0. \end{cases}$$

L'estimation d'erreur obtenue est :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3, i = 1, 2.$$

Le but de notre travail est l'étude de la convergence uniforme, en améliorant les résultats précédents pour une inéquation quasi- variationnelle d'ordre général dans le sens où le second membre et l'obstacle dépendent de la solution :

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f(u), v-u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K_g(u) \\ u \leq Mu; & v \leq Mu \\ u = g; & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

On a obtenu l'approximation suivante :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2, i = 1, 2.$$

L'intérêt de la norme de la convergence uniforme est son caractère concret et réaliste.

Le travail présent se décompose en trois chapitres.
Dans le premier, nous rappelons quelques résultats généraux sur les inéquations variationnelles et quasi-variationnelles, comme on donne aussi l'approximation par éléments finis des deux problèmes où la discrétisation du problème continu par une méthode d'éléments finis P(1) conforme conduit à l'analogue discret du problème en introduisant des résultats d'approximations et de convergence uniforme dû à [16, 23].

Quand au deuxième chapitre, il est consacré à l'application de la méthode de Schwarz pour une inéquation quasi-variationnelle elliptique, où le second membre et l'obstacle dépendent de la solution. Nous exposons les deux algorithmes de Schwarz continu et discret, en introduisant deux suites auxiliaires, et finalement nous prouvons notre résultat d'estimation.

L'objectif du troisième chapitre est d'améliorer le résultat d'estimation d'erreur obtenu au chapitre précédent, (voir[4]).
Ces résultats sont basés sur une adaptation des travaux présentés dans [16] pour les inéquations varitionnelles.

Chapitre 1

Généralités sur les Inéquations Variationnelles et Quasi-Variationnelles Elliptiques

1.1 Généralités sur les Inéquations Variationnelles Elliptiques

1.1.1 Problème continu

Hypothèses et notations

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ à frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$.
Pour $u, v \in V$ ($V = H_0^1(\Omega)$ ou $V = H^1(\Omega)$) on pose :

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{1 \leq j,k \leq N} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{N} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} v + b_0(x) uv \Big) dx. \tag{1.1}$$

La forme bilinéaire associée à l'opérateur A est définie par :

$$Au = - \sum_{1 \leq j,k \leq N} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{N} b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + b_0(x) u. \tag{1.2}$$

Les coefficients $a_{jk}(x), b_k(x), b_0(x)$ sont supposés suffisamment réguliers, et $b_0(x)$ satisfait

$$b_0(x) \geq \beta > 0; \forall x \in \Omega. \tag{1.3}$$

On suppose que la forme bilinéaire est continue, et fortement cœrcive :

$$\forall v \in V, \exists \alpha > 0 : a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2. \tag{1.4}$$

De plus, on considère un second membre f tel que :

$$f \in L^\infty(\Omega), \tag{1.5}$$

et un obstacle Ψ tel que : $\Psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ et $\Psi > 0$ sur $\partial\Omega$.

Problème d'inéquation variationnelle continue

On considère le problème d'inéquation variationnelle suivant :

Trouver $u \in V$ solution de

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f, v-u) & \forall v \in V \\ u \leq \Psi & v \leq \Psi. \end{cases} \tag{1.6}$$

Existence et unicité de la solution continue

Pour démontrer l'exstence et l'unicité de la solution du problème (1.6), on énonce le théorème suivant :

Théorème 1.1 *[36] Sous les hypothèses et les notations précédentes, le problème* (1.6) *admet une solution unique u. De plus u satisfait la propriété de régularité :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \quad 2 \leq p \leq \infty$$

On va maintenant faire une étude sur quelques propriétés de la solution du problème (1.6), en commencant par introduire la notion des sous-solutions.

Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues

Définition 1.1 *On appelle l'ensemble des sous-solutions noté X, pour l'inéquation variationnelle, l'ensemble de $z \in V$ tel que :*

$$\begin{cases} a(z,v) \leq (f,v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ z \leq \Psi. \end{cases}$$

Théorème 1.2 *[17] Sous les hypothèses précédentes, la solution u de l'inéquation varationnelle (1.6), est le plus grand élément de X.*

Preuve. :

On a :

$$\begin{cases} a(u,\widetilde{v}-u) \geq (f,\widetilde{v}-u) \quad \forall \widetilde{v} \in V \\ u \leq \Psi, \widetilde{v} \leq \Psi. \end{cases}$$

Soit $\widetilde{v} = u - v$, et $v \geq 0$ alors :

$$a(u,\widetilde{v}-u) = a(u,-v) \geq (f,-v).$$

Donc : $a(u,v) \leq (f,v)$. C'est à dire $u \in X$.

Montrons maintenant que $u = \sup\limits_{z \in X} z$. Supposons le contraire, ie, il existe z, $z \in X$ tel que $u \leq z$.

Ainsi, z est une sous-solution du problème suivant :

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f,v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ z \leq \Psi. \end{cases}$$

Posons : $v = (z-u)^+ \geq 0$, où $(z-u)^+ = \sup(z-u,0)$.

Donc :

$$\begin{cases} a(z,(z-u)^+) \leq (f,(z-u)^+) \\ z \leq \Psi. \end{cases}$$

D'autre part :

$$\begin{cases} a(z,(z-u)^+) \geq (f,(z-u)^+) \\ u \leq \Psi. \end{cases}$$

Alors : $\quad -a((z-u)^+,(z-u)^+) \geq 0$, i.e, : $a((z-u)^+,(z-u)^+) \leq 0$.

Puisque la forme bilinéaire est cœrcive, il en résulte que : $(z-u)^+ = 0$, donc : $z \leq u$, d'où la contraduction. ■

Propriété de monotonie de la solution continue

On note la solution u de l'I.V par $\partial(f,\Psi)$, où f est le second membre et Ψ l'obstacle.

Proposition 1.1 *[17] La solution de l'I.V est croissante par rapport à l'obstacle Ψ, et au second membre f,i.e :*

Si $f \leq \widetilde{f}$, et $\Psi \leq \widetilde{\Psi}$, alors $\partial(f,\Psi) \leq \partial(\widetilde{f},\widetilde{\Psi})$.

Preuve. :

Soient $f \leq \widetilde{f}$ et $\Psi \leq \tilde{\Psi}$.

Posons : $u = \partial(f,\Psi)$, et $w = \partial(\widetilde{f},\tilde{\Psi})$, par suite on a :

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f,v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ u \leq \Psi. \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (f,v) \leq (\widetilde{f},v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ u \leq \Psi \leq \tilde{\Psi}, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} a(u,v) \leq (\widetilde{f},v) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \\ u \leq \tilde{\Psi}. \end{cases}$$

Alors u est une sous-solution pour w, c'est à dire : $u \leq w$, d'où, $\partial(f,\Psi) \leq \partial(\widetilde{f},\tilde{\Psi})$.

■ Le résultat suivant est un lemme de monotonie de la solution, par rapport à la condition au bord et à l'obstacle.

Soit l'ensemble convexe non vide :

$$K_g = \{v \in V, v = g \ \ sur \ \ \partial\Omega, v \leq \Psi \quad dans \ \ \Omega\},$$

où g est une fonction regulière définie sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.1 *[17] Posons :*
$u = \partial(g, \Psi)$; $\tilde{u} = \partial(\tilde{g}, \tilde{\Psi})$.
Si $\Psi \geq \tilde{\Psi}$ et $g \geq \tilde{g}$, alors $\partial(g, \Psi) \geq \partial(\tilde{g}, \tilde{\Psi})$.

Preuve. :
Posons : $v = \min(0, u - \widetilde{u})$. Dans la région où v est négative ($v \leq 0$), on a :

$$u < \tilde{u} \leq \tilde{\Psi} \leq \Psi,$$

c'est à dire que l'obstacle n'est pas actif pour u, donc on a :

$$a(u, v) = (f, v) \ \ (car \ \ \ u < \Psi), \tag{1.7}$$

et $\tilde{u} + v \leq \tilde{\Psi}$. Ce qui donne :

$$a(\tilde{u}, v) \geq a(\tilde{u} + v, v) = (f, v) \ , \ (car \ \ v < 0)$$

et par suite :

$$a(\tilde{u}, v) \geq (f, v). \tag{1.8}$$

En additionnant (1.8) et (1.9), on obtient :

$$a(\tilde{u} - u, v) \geq 0 \quad (\tilde{u} - u = -v).$$

Mais comme

$$a(v, v) = a(u - \tilde{u}, v) = -a(\tilde{u} - u, v) \leq 0,$$

on a donc : $v = 0$ et par conséquent : $u \geq \tilde{u}$, i.e., $\partial(g, \Psi) \geq \partial(\tilde{g}, \tilde{\Psi})$.

■ Considérons maintenant l'application σ définie comme suit :

$$\sigma : L^{\infty}(\Omega) \longrightarrow L^{\infty}(\Omega)$$

$$\Psi \longmapsto \sigma(\Psi) = u,$$

où u est la solution continue du problème 1.6

Proposition 1.2 *[17] L'application σ est croissante et lipschitzienne (de constante* 1 *dans $L^{\infty}(\Omega)$*

Preuve. :

1. σ est croissante.

   Soient Ψ et $\tilde{\Psi}$ dans $L^{\infty}(\Omega)$, tel que :$\Psi \leq \tilde{\Psi}$, alors :

$$\sigma(\Psi) \leq \Psi \leq \tilde{\Psi}.$$

   Donc $\sigma(\Psi)$ est une sous-solution pour l'I.V avec l'obstacle $\tilde{\Psi}$, et en vertu du théorème (1.2), on obtient :

$$\sigma(\Psi) \leq \sigma(\tilde{\Psi}).$$

   D'où σ est croissante.

2. σ est1-Lipshitzienne.

   Soient $\Psi, \tilde{\Psi}$ de $L^{\infty}(\Omega)$, et $\xi = \sigma(\Psi); \tilde{\xi} = \sigma(\tilde{\Psi})$.

   Posons : $\Phi = \|\Psi - \tilde{\Psi}\|_{\infty}$. Alors : $\xi - \Phi \leq \Psi - \Phi \leq \tilde{\Psi}$, donc $\xi - \Phi$ est une sous-solution pour l'I.V avec l'obstacle $\tilde{\Psi}$, comme $\tilde{\xi}$ est la plus grande des sous-solutions :$\xi - \Phi \leq \tilde{\xi}$.

D'où : $\|\sigma(\Psi) - \sigma(\tilde{\Psi})\|_\infty \leq \|\Psi - \tilde{\Psi}\|_\infty$.

■

Proposition 1.3 *Soit δ une constante positive, alors :*

$$\sigma(\Psi + \delta) \leq \sigma(\Psi) + \delta$$

Preuve. :

$\sigma(\Psi)+\delta = u+\delta$ est une solution de 'I.V avec le second membre $f+b_0\delta$ et l'obstacle $\Psi+\delta$, et $\sigma(\Psi + \delta)$ est une solution de l'I.V avec le second membre f et l'obstacle $\Psi + \delta$.Comme $b_0(x) \geq \beta > 0$, alors :

$f < f + a_0\delta$, d'après la proposition (1.2), on a :

$$\sigma(\Psi + \delta) \leq \sigma(\Psi) + \delta.$$

■

Proposition 1.4 .

Sous les notations et les conditions du lemme 1.1, on a :

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\Psi - \tilde{\Psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}. \tag{1.9}$$

Remarque 1.1 *Si $\Psi = \tilde{\Psi}$, 1.9 devient :*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

1.1.2 Problème discret

On va introduire le problème discrèt et effectuer une étude similaire à celle faite précédement pour le problème continu. Pour insister sur la symétrie de l'étude, on suivra exactement la même démarche qu'au cas continu.

Avant de passer à ces démarches, on va rappeler quelques résultats et définitions.

Définition 1.2 *On dit que les espaces V_h, $h > 0$ forment une approximation interne (on parle aussi d'approximation conforme de V) si :*

1. *Pour tout $h > 0$, $V_h \subset V$*
2. *pour tout $v \in V$, il existe $v_h \in V_h$ tel que :*

$$\|v - v_h\|_V \longrightarrow 0 \qquad \textit{quand } \ h \longrightarrow 0.$$

Il est également souhaitable que cet espace V_h soit facile à construire, on pourra choisir un espace formé de polynômes ou de fonctions polynômiales par morceaux, ... Pour notre cas, on va considérer un espace d'éléments finis conformes construits à partir des polynômes de degré 1, quand à l'introduction du degré supérieur, elle n'a pas été envisagée dans la mesure où les propriétés de régularité rencontrées ne semblent pas permettre d'en tirer profit.

Elément finis triangulaires de degré 1 : (P_1)

Nous voulons construire un sous-espace V_h de type éléments finis triangulaires. Pour cela, nous construisons une triangulation τ_h de $\overline{\Omega}$ en subdivisant $\overline{\Omega}$ en triangles $K_1, K_2, ...K_m$ tels que :

1. $\overline{\Omega} = \displaystyle\bigcup_{K \in \tau_h, j=1}^{m} K_j$
2. Pour $i \neq j$,

$$K_j \cap K_i = \begin{cases} \textit{un côté commun} \\ \textit{un sommet } M_s \textit{ commun} \\ \textit{disjoints} \end{cases} .$$

3. Les éléments ne sont pas dégénérés, i.e, ils sont d'aires non nulles.

4. Tous les coins de $\partial\Omega$ sont des sommets d'éléments de τ_h.

Nous introduisons encore un parametre h qui mesure le degré de finesse de la triangulation τ_h :

$$h = \max_{K \in \tau_h} diam(K).$$

On établit sur Ω une trianglation régulière quasi-uniforme et on introduit V_h l'espace des éléments finis conformes suivant :

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) \cap V, telque \;\; v_h/_{\tau_h} \in P_1\}. \tag{1.10}$$

Soient $M_s, s = 1, 2, ...m(h)$ les sommets de la triangulation τ_h qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega$ appelés les nœuds interieurs. Pour décrire une fonction $g \in V_h$, nous pouvons choisir comme parametres les valeurs $g(M_s)$ de la fonction g aux nœuds M_s. Ces valeurs sont appelées degrés de liberté. Les fonctions de base pour l'espace V_h $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_s$ sont alors définies par :

$$\varphi_s(M_l) = \delta_{sl} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ s, l = 1, 2, ...m(h) \end{cases}$$

Puisque toute fonction g de V_h peut être représentée par une combinaison liniéaire des φ_s, alors on a :

$$g(x) = \sum_{s,l=1}^{m(h)} g(M_l)\varphi_s(x, y).$$

On introduit également l'opérateur de restriction r_h, pour $v \in C(\overline{\Omega} \cap H_0^1(\Omega)$:

$$r_h v = \sum_{s,l=1}^{m(h)} v(M_l)\varphi_s(x, y).$$

L'ordre sur V_h sera celui induit par $\mathbb{R}^{m(h)}$.

Nous introduisons d'une manière naturelle la matrice de discrétisation A de cœfficients génériques $a(\varphi_l, \varphi_s)$, où $\varphi_s, s = 1, 2, ...m(h)$ sont les cœfficients dans la base usuelle.

Hypothèse du principe du maximum discret (PMD)

On suppose que la matrice qui résulte de la discrétisation est une M-matrice, on trouvera dans [32] des conditions géométriques simples pour lesquelles l'hypothèse du(PMD) est satisfaite. Considérons maintenant le problème discret associé au problème (1.6).
Trouver $u_h \in V_h$ qui verifie :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h \leq r_h \Psi & v_h \leq r_h \Psi. \end{cases} \tag{1.11}$$

Théorème 1.3 *[36] Sous les hypothèses précédentes et l'hypothèse du(PMD), le problème (1.12) admet une solution unique.*

Pour le problème discret, on donne une étude similaire à celle entreprise précédement pour le problème continu.

Caractérisation de la solution discrete comme enveloppe des sous-solutions discretes

Définition 1.3 *On appelle l'ensemble des sous-solutions nôté X_h, pour l'I.V, l'ensemble des $z_h \in V_h$ tel que :*

$$\begin{cases} a(z_h, \varphi_s) \leq (f, \varphi_s) & \forall s = 1, 2, ...m(h) \\ z \leq r_h \Psi. \end{cases} \tag{1.12}$$

Théorème 1.4 *[16] Sous les hypothèses précédentes, la solution u_h du problème (1.12), est le plus grand élèment de X_h.*

Preuve. :
Similaire au cas continu. ■

Propriété de monotonie de la solution discrete

On note la solution u_h de l'I.V discrete par $\partial_h(f, r_h\Psi)$ où f est le second membre et l'obstacle Ψ

Proposition 1.5 *Sous les hypothèses et les notations précédentes, la solution de l'I.V (1.12), est croissante par rapport à l'obstacle* Ψ *et au second membre* f*,c'est à dire Si* $f \leq \widetilde{f}$ *et* $\Psi \leq \tilde{\Psi}$*, alors :* $\partial_h(f, r_h\Psi) \leq \partial_h(\widetilde{f}, r_h\Psi)$.

Preuve. : Similaire au cas du problème continu. ■ On va citer, comme dans le cas du problème continu, un lemme de monotonie de la solution de l'I.V discrete, mais cette fois ci par rapport aux conditions au bord et à l'obstacle.
Soit, pour cela

$$K_{gh} = \{v_h \in V_h; v_h = \pi_h g \text{ sur },\ \partial\Omega,\ \ v \leq r_h\Psi\},$$

où π_h l'opérateur d'interpolation sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.2 *Posons* $u_h = \partial_h(\pi_h g, r_h\Psi)$ *;* $\tilde{u} = \partial_h(\pi_h\tilde{g}, r_h\tilde{\Psi})$.
Si $\pi_h g \geq \pi_h\tilde{g}$*, et* $r_h\Psi \geq r_h\tilde{\Psi}$*, alors* $u_h \geq \tilde{u_h}$.

Preuve. : Similaire au lemme 1.1.
■ Par analogie au cas continu, considérons l'application σ_h :

$$\sigma_h : L^\infty \longrightarrow L^\infty$$

$$\Psi \longmapsto \sigma_h(\Psi) = u_h,$$

où u_h est la solution de l'I.V (1.12)

Proposition 1.6 *L'application* σ_h *est croissante, et* 1*-lipschitzienne* $(k = 1)$

Preuve. : Similaire au cas du problème continu. ■

Proposition 1.7 *Sous les notations et les conditions du lemme 1.1, on a :*

$$\|u_h - \tilde{u_h}\|_{L^\infty} \leq \|r_h\Psi - r_h\tilde{\Psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\pi_h g - \pi_h\tilde{g}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Remarque 1.2 *Si* $r_h\Psi = r_h\tilde{\Psi}$*, on a :*

$$\|u_h - \tilde{u_h}\|_{L^\infty} \leq \|\pi_h g - \pi_h \tilde{g}\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

1.1.3 Approximation en norme L^∞

Examinons maintenant l'erreur commise lorsqu'on approche la solution du problème (1.6) par la solution du problème (1.12). On va citer quelques résultats d'estimation en norme L^∞ obtenus dans [16].

Position du problème discret

On rappelle que notre problème discret est le suivant :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \\ u_h \leq r_h\Psi; \qquad\qquad v_h \leq r_h\Psi. \end{cases}$$

Posons $\widetilde{u_h}$ solution de

$$a_h(\widetilde{u_h}, v_h) = a(u, v_h), \tag{1.13}$$

où u est la solution de l'inéquation varationnelle du problème continue (1.6), alors on a

$$\|u - \widetilde{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^2|\log h|^2, \tag{1.14}$$

et

$$\|u - r_h u\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^2|\log h|^2, \tag{1.15}$$

où $\Psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$.

Posons :$\rho = \Psi|_{B(x_0,Ch)}$,

où ρ est la restriction de Ψ sur la boule de centre x_0 et de rayon Ch, et par suite :

Si on a

$$u(x_0) = \Psi(x_0) = \rho(x_0),$$

alors

$$|u(x)-\rho(x)| \leq Ch^2|\log h|^2, \forall x \in B(x_0, Ch). \tag{1.16}$$

Remarque 1.3 *La nature de notre problème est l'existence d'une frontière libre entre*

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega / u(x) = \Psi(x)\},$$

dit l'ensemble de coicidence et l'ensemble complémentaire de Ω_0 dans Ω.
Pour le problème discret l'ensemble de coicidence est donné par :

$$\Omega_{0h} = \{x \in T_h / T_h \cap \Omega_0 \neq \emptyset\},$$

où T_h est un élément de triangulation τ^h.

Lemme 1.3 *[17] Sous les hypothèses et les notations précédentes on a :*

$$\|u-\Psi\|_{L^\infty} \leq Ch^2|\log h|^2,$$

et

$$\|\Psi - r_h\Psi\|_{L^\infty} \leq Ch^2|\log h|^2.$$

Lemme 1.4 *[17] Sous les conditions de (1.5) a (1.14) et le PMD, il existe une constante C_2 indépendante de h telle que :*

$$\|u_h - r_h\Psi\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq C_2 h^2|\log h|^2. \tag{1.17}$$

Théorème 1.5 *[17] Sous les hypothèses et les notations précédentes on a :*

$$\|u-u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^2|\log h|^2.$$

1.2 Inéquations Quasi-Variationnelles

Dans cette section, on va étudier trois classes des inéquations quasi- variationnelles (on abrégé I.Q.V) selon la dépendance du second membre et l'obstacle de la solution comme suit :

1. I.Q.V où le second membre dépend de la solution.
2. I.Q.V où l'obstacle dépend de la solution.
3. I.Q.V où le second membre et l'obstacle dépendent de la solution.

1.3 I.Q.V où le second membre dépend de la solution

1.3.1 Problème continu

On concidère le problème suivant :
Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f(u), v-u), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u \leq \Psi, \quad v \leq \Psi. \end{cases} \tag{1.18}$$

Soit $f(.)$ une forme non linéaire, non décroissante et lipchitizienne avec une constante α qui vérifie : $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1$, où β est la constante définie dans (1.3).

Eexistence et unicité de la solution continue d'I.Q.V

Théorème 1.6 *[5] Sous les hypothèses et les notations précédentes, le problème 1.18 admet une solution unique dans* $W^{2,p}(\Omega), \quad 2 \leq p < \infty$.

Propriété de monotonie de la solution continue d'I.Q.V

Nous introduissons la propriété de monotonie de la solution continue.
On note par : $w = \sigma(f(u))$, $\tilde{w} = \sigma(f(\tilde{u}).)$

Lemme 1.5 *[15, 11]*

1. *Si* $f(u) \geq f(\tilde{u})$, *alors*, $\sigma(f(u)) \geq \sigma(f(\tilde{u}))$.
2. $\|\sigma(f(u)) - \sigma(f(\tilde{u}))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \dfrac{1}{\beta}\|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)}$.

1.3.2 Problème discret

On va introduire le problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédement pour le problème continu. Pour insister sur la symétrie de l'étude, on suivra exactement la même démarche qu'au cas continu.

On établit sur Ω une trianglation régulière quassi-uniforme et on introduit V_h l'espace des éléments finis conformes suivant :

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) \cap V, telque \ \ v_h/_{\tau_h} \in P_1\} \tag{1.19}$$

Soit $M_s, s = 1, 2, ...m(h)$ les sommets de la triangulation τ_h qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega$.

Pour décrire une fonction $g \in V_h$, nous pouvons choisir comme parametres les valeurs $g(M_s)$ de la fonction g aux nœuds M_s. Ces valeurs sont appélées degrés de liberté.

Les fonctions de base pour l'espace V_h $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_s$ sont alors définies par :

$$\varphi_s(M_l) = \delta_{sl} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ s, l = 1, 2, ...m(h) \end{cases}$$

Puisque toute fonction g de V_h peut être représentée par une combinaison liniéaire des φ_s nous avons :

$$g(x) = \sum_{s,l=1}^{m(h)} g(M_l)\varphi_s(x, y)$$

On introduit également l'opérateur de restriction r_h :

Pour $v \in C(\overline{\Omega} \cap H_0^1(\Omega)$:

$$r_h v = \sum_{s,l=1}^{m(h)} v(M_l)\varphi_s(x, y) \tag{1.20}$$

L'ordre sur V_h sera celui induit par $\mathbb{R}^{m(h)}$.

Nous introduisons, d'une manière naturelle, la matrice de discrétisation A de cœfficients générique $a(\varphi_l, \varphi_s)$, où $\varphi_s, s = 1, 2, ...m(h)$ sont les cœfficients de base usuelle.

Hypothèse du principe du maximum discret (PMD)

On suppose que la matrice A est une M-matrice (On trouvera dans [32] des conditions géométriques simples pour lesquelles l'hypothèse du(PMD) est satisfaite). Considérons le problème discret associé au problème continu (1.19).

Trouver $u_h \in V_h$ solution de

$$\begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) \geq (f(u_h), v_h - u_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h \leq r_h\Psi, \quad v_h \leq r_h\Psi, \end{cases} \tag{1.21}$$

où $V_h = \{v_h \in C(\Omega) \cap V, \text{ tel que } \ v_h/r_h \in P_1\}$.

Théorème 1.7 *[9, 5] Sous les hypothèses et les notations précédentes et le principe du maximum discret, le problème (1.21) admet une solution discrete unique.*

Propriété de monotonie de la solution discrete d'I.Q.V

D'une façon analogue au cas continu, on a :

Lemme 1.6 *[11, 15] On note par :* $w_h = \sigma_h(f(u_h)), \ \tilde{w_h} = \sigma_h(f(\tilde{u_h}.))$

1. *Si* $f(u_h) \geq f(\tilde{u_h})$, *alors* $\sigma_h(f(u_h)) \geq \sigma_h(f\tilde{u_h})$.
2. $\|\sigma_h(f(u_h)) - \sigma_h(f(\tilde{u_h}))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \dfrac{1}{\beta}\|f(u_h) - f(\tilde{u_h})\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Nous finissons cette section par un important théorème d'approximation :

Théorème 1.8 *[9] Soient u et u_h respectivement, les solutions de 1.18 et 1.21, alors on a :*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 h^2 |\ln h|^2.$$

1.4 I.Q.V où l'obstacle dépend de la solution

1.4.1 Problème continu

On considère le problème de l'obstacle suivant : Trouver $u \in K_g$ solution de

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f, v-u) & \text{dans} \quad \Omega \\ u \leq Mu; & Mu \geq 0 \\ u = g; & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.22}$$

où $f \in L^\infty(\Omega)$ et M opérateur donné par :

$$Mu = k + \inf_{\varepsilon \geq 0, x+\varepsilon \in \overline{\Omega}} u(x+\varepsilon),$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v du,$$

et

$$(f,v) = \int_\Omega f v du.$$

On note :

$$K_g = \{v \in H^1(\Omega) : v = g \quad sur \quad \partial\Omega, v \leq Mu \quad dans \quad \Omega\},$$

tel que K_g est un ensemble convexe, fermé et non vide. Avec g une fonction régulière définie sur $\partial\Omega$.

Existence et unicité de la solution continu

D'après le théorème (1.6), le problème (1.22) admet une solution unique dans $W^{2,p}(\Omega)$, ; $2 \leq p < \infty$.

Propriété de monotonie de la solution continue

Dans ce qui suit, on va citer quelques résultat intéressant de monotonie de la solution par rapport à l'obstacle et à la fonction au bord, et ceci en commençant par un lemme qui nous donne la croissance de l'opérateure M.

Lemme 1.7 *[25] Soient u et $\tilde{u}$ dans K_g.*
Si $u \leq \tilde{u}$, alors :

$$Mu \leq M\tilde{u}.$$

De plus, on a :

$$M(u + \lambda) = M(u) + \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.8 *[25] Sous les conditions du lemme précédent on a :*

$$\|Mu - M\tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|u - \tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)}. \tag{1.23}$$

Preuve. :
On a :

$$u \leq \tilde{u} + \|u - \tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)},$$

alors en utilisant le lemme (1.7) on obtient :

$$Mu \leq M(\tilde{u} + \|u - \tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)}),$$

ce qui donne

$$Mu \leq M\tilde{u} + \|u - \tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)},$$

d'où

$$Mu - M\tilde{u} \leq \|u - \tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)}.$$

Et de la même manière, en interchangeant les rôles de Mu et $M\tilde{u}$, on obtient :

$$M\tilde{u} - Mu \leq \|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Alors

$$\|Mu - M\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

■

1.4.2 Problème discret

On va introduire le problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédement pour le problème continu. Pour insister sur la symétrie de l'étude, on suivra exactement la même démarche qu'au paragraphe précédent.

On établit sur Ω une triangulation régulière quasi-uniforme et on introduit V_h l'espace des éléments finis conformes suivant :

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) \cap V, telque \;\; v_h/_{\tau_h} \in P_1\}. \tag{1.24}$$

Soit M_s, $s = 1, 2, ..., m(h)$ les sommets de la triangulation τ_h qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega$ ou les nœuds intérieurs. Pour d'ecrire une fonction $g \in V_h$, nous pouvons choisir comme paramétres les valeurs $g(M_s)$ de la fonction g aux nœuds M_s. Ces valeurs sont appélées degrés de liberté. Les fonctions de base pour l'espace V_h $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s$ sont alors définies par :

$$\varphi_s(M_l) = \delta_{sl} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ s, l = 1, 2, ...m(h) \end{cases} .$$

Puisque toute fonction g de V_h peut être représentée par une combinaison liniéaire des φ_s, alors nous avons :

$$g(x) = \sum_{s,l=1}^{m(h)} g(M_l)\varphi_s(x, y)$$

. On introduit également l'opérateur de restriction r_h. Pour $v \in C(\overline{\Omega} \cap H_0^1(\Omega)$:

$$r_h v = \sum_{s,l=1}^{m(h)} v(M_l)\varphi_s(x,y). \tag{1.25}$$

L'ordre sur V_h sera celui induit par $\mathbb{R}^{m(h)}$.

Nous introduisons d'une manière naturelle la matrice de discrétisation A de cœfficients générique $a(\varphi_l, \varphi_s)$, où $\varphi_s, s = 1, 2, ...m(h)$ sont les cœfficients de base usuelle.

Hypothèse du principe du maximum discret (PMD)

On suppose que la matrice A est une M-matrice. (On trouvera dans[32] des conditions géométriques simples pour lesquelles l'hypothèse du (PMD) est satisfaite).

Problème discret

On considère le problème discret : Trouver $u_h \in K_{gh}$ solution de

$$\begin{cases} a(u_h, v - u_h) \geq (f, v - u_h) & \forall u_h, v \in K_{gh} \\ u_h \leq r_h M u_h & , \end{cases} \tag{1.26}$$

où $f \in L^\infty(\Omega)$ et $Mu_h = k + \inf\limits_{\varepsilon \geq 0, x+\varepsilon \in \overline{\Omega}} u_h(x+\varepsilon)$.

Ici,

$$K_{gh} = \{v \in V_h : v = \pi_h g \text{ sur } \partial\Omega, \quad v \leq r_h M u_h \text{ dans } \Omega\},$$

π_h l'opérateur d'interpolation sur $\partial\Omega$.

Existence et unicité de la solution discrete

D'après le théorème 1.7, le problème (1.26) admet une solution discrete unique.

Propriété de monotonie de la solution discrete

D'une façon analogue à celle du cas continu, les résultats restent vrais pour le cas discret.

Lemme 1.8 *[25] Soient u_h et $\tilde{u}_h$ dans K_{gh} solutions de* (1.32).
Si $u_h \leq \tilde{u}_h$ *alors* $Mu_h \leq M\tilde{u}_h$. *De plus, on a :*

$$M(u_h + \lambda) = M(u_h) + \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.9 *Sous les mêmes donnés du lemme précédent on a :*

$$|Mu_h - M\tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.27}$$

Preuve. : Similaire au cas continu. ■

1.5 I.Q.V où l'obstacle et le second membre dépendent de la solution

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. Pour $u, v \in H^1(\Omega)$, considérons la forme bilinéaire suivante :

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x) u.v \Big) dx, \tag{1.28}$$

où $a_{ij}(x), a_i(x), a_0(x), x \in \overline{\Omega}, 1 \leq i, j \leq n$ sont suffisamment réguliers et satisfont les conditions suivantes :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n, \nu > 0, \tag{1.29}$$

$$a_0(x) \geq \beta > 0, \tag{1.30}$$

où β est une constante et M opérateur donné par :

$$Mu = k + \inf_{\varepsilon \geq 0, x + \varepsilon \in \overline{\Omega}} u(x + \varepsilon),$$

où $k > 0$ et M satisfait :

$$Mu \in W^{2,\infty}(\Omega), Mu \geq 0, \text{ sur } \partial\Omega : \ 0 \leq g \leq Mu, \tag{1.31}$$

et g une fonction régulière définie sur $\partial\Omega$. Soit $f(.)$ une fonction non linéaire, non décroissante et lipschitzienne avec une constante α qui vérifie :

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1, \quad f \in L^{\infty}(\Omega), \tag{1.32}$$

$K_g(u)$ est un convexe, fermé et non vide défini par :

$$K_g(u) = \{v \in H^1(\Omega),\ v = g \text{ sur } \ \partial\Omega,\ v \leq Mu,\ \text{dans } \Omega\}.$$

1.5.1 Problème continu

Considérons le problème suivant : Trouver $u \in k_g(u)$ solution de :

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f(u), v-u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K_g(u) \\ u \leq Mu; & v \leq Mu \\ u = g; & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.33}$$

Existence et unicité de la solution continue

Théorème 1.9 *[5, 9] Sous les conditions précédantes, le problème (1.34) admet une solution unique $u \in K_g(u)$. De plus on a :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \quad 2 \leq p \leq \infty$$

Propriété de monotonie de la solution continue

Lemme 1.9 *[25]. Pour tout u et $\tilde{u}$ dans $K_g(u)$, on a :*

1. *Si* $\ u \leq \tilde{u},\ $ *alors* $\ Mu \leq M\tilde{u}$, *et* $M(u+\lambda) = M(u) + \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\|Mu - M\tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|u - \tilde{u}\|_{L^{\infty}(\Omega)}$.

Caractérisation de la solution continue comme envoloppe des sous-solutions continues

On appelle l'ensemble des sous-solutions nôté X, pour l'I.Q.V, l'ensemble des $z \in K$ tel que :

$$\begin{cases} a(z,v) \geq (f(z),v),\ \forall z \in K_g(u),\ v \geq 0 \\ z \leq Mz,\ v \leq Mz. \end{cases}$$

Théorème 1.10 *[16] Sous les hypothèses précédentes, la solution u du problème (1.34) est le plus grand élément de X.*

1.5.2 Problème discret

On garde la même triangulation du paragraphe précédent, ainsi que l'hypothèse du (PMD).

Trouver $u_h \in K_{gh}(u_h)$ solution de

$$\begin{cases} a(u_h, v-u_h) \geq (f(u_h), v-u_h) & \forall u_h, v \in K_{gh}(u_h) \\ u_h \leq r_h M u_h & \\ u_h = \pi_h g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.34}$$

où $f \in L^\infty(\Omega)$, $Mu_h = k + \inf\limits_{\varepsilon \geq 0, x+\varepsilon \in \overline{\Omega}} u_h(x+\varepsilon)$ et

$$K_{gh}(u_h) = \{v \in V_h : v = \pi_h g \text{ sur } \partial\Omega; v \leq r_h M u_h \ dans\ \Omega\},$$

π_h l'opérateur d'interpolation sur $\partial\Omega$ et r_h l'opérateur de restriction.

Existence et unicité de la solution discrete

D'après le théorème (1.7), le problème (1.36) admet une solution dicrete unique.

Propriété de monotonie de la solution discrete

D'une façon analogue à celle du cas continu, les résultats restent vrais pour le cas discret.

Lemme 1.10 *Soient u_h et $\tilde{u_h}$, dans $K_{gh}(u)$, on a :*

1. *Si $u_h \leq \tilde{u_h}$, alors $Mu_h \leq M\tilde{u_h}$.*

   Et

$$M(u_h + \lambda) = M(u_h) + \lambda, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

2.

$$\|Mu_h - M\tilde{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_h - \tilde{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Caractérisation de la solution discrete comme envoloppe des sous-solutions discretes

On appelle l'ensemble des sous-solutions,nôté, X_h pour l'I.Q.V, l'ensemble des $z_h \in K_{gh}(u)$ tel que :

$$\begin{cases} a(z_h, \varphi_i) \leq (f(z_h), \varphi_i) \quad \forall i = 1, ..., m(h) \\ z_h \leq r_h M z_h. \end{cases} \tag{1.35}$$

Théorème 1.11 *[16] Sous les hypothèses précédentes, la solution u_h du problème (1.35)est le plus grand élément de X_h.*

1.5.3 Approximation en norme L^∞

Nous terminons cette section par une importante résultat d'approximation, qui concerne les trois modèles des inéquations quasi-variationnelles étudiées.

Théorème 1.12 *[16] Soient u et u_h respectivement, les solutions des problèmes continu et discret, alors on a :*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\ln h|^2.$$

Idée du démonstration :

Première partie :

construction d'une fonction discréte α_h proche de u qui verifie :

$\alpha_h \leq u_h$ et $\|\alpha_h - u\|_{L^\infty} \leq Ch^2|\log h|^2$.

Deuxième partie :

construction d'une fonction discrete β_h proche de u_h qui verifie :

$\beta_h \leq u$ et $\|\beta_h - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^2|\log h|^2$.

Troisième partie :

la démonstration du théorème se poursuite, alors comme suit :

$$u \leq \alpha_h + Ch^2|\log h|^2,$$

$$u \leq u_h + Ch^2|\log h|^2.$$

D'autre part :

$$u_h \leq \beta_h + Ch^2|\log h|^2.$$

$$u_h \leq u + Ch^2|\log h|^2.$$

Donc :

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^2|\log h|^2.$$

$\square$

Chapitre 2

Convergence Uniforme de la Méthode de Schwarz pour une Inéquation Quasi-Variationnelle Elliptique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la méthode de Schwarz pour une inéquation quasi-variationnelle elliptique où le second membre et l'obstacle dépendent de la solution. Le résultat principal de cette étude est de prouver l' estimation de l'erreur en norme L^{∞}. En appliquant la méthode de Schwarz dans le cas de la subdivision du domaine global en deux sous-domaines sans recouvrement. La discrétisation des deux sous-domaines est indépendantes l'une de l'autre de façon à avoir un maillage nonmatching.

2.2 Problème continu d'I.Q.V

2.2.1 Hypothèses et notations

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$. Pour $u, v \in H^1(\Omega)$, considérons la forme bilinéaire suivante :

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1\leq i,j\leq n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u.v \Big) dx, \tag{2.1}$$

où $a_{ij}(x), a_i(x), a_0(x), x \in \overline{\Omega}, 1 \leq i,j \leq n$ sont suffisamment réguliers et satistont les conditions suivantes :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n, \nu > 0, \tag{2.2}$$

$$a_0(x) \geq \beta > 0, \tag{2.3}$$

où β est une constante.

M un opérateur donné par :

$$Mu = k + \inf_{\varepsilon\geq 0, x+\varepsilon\in\overline{\Omega}} u(x+\varepsilon),$$

$k > 0$ et M satisfait :

$$Mu \in W^{2,\infty}(\Omega), Mu \geq 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega : \; 0 \leq g \leq Mu, \tag{2.4}$$

où g une fonction régulière définie sur $\partial\Omega$. Soit $f(.)$ une fonction non linéaire, non décroissante et lipschitzienne avec une constante α qui vérifie :

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1, \qquad f \in L^\infty(\Omega), \tag{2.5}$$

$K_g(u)$ est un convexe fermé et non vide défini par :

$$K_g(u) = \{v \in H^1(\Omega), v = g \text{ sur } \partial\Omega, \; v \leq Mu \text{ dans } \Omega\}.$$

2.2.2 Problème continu

Considérons le problème suivant :

Trouver $u \in k_g(u)$ la solution de

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f(u), v-u) & \text{dans } \Omega, \forall v \in K_g(u) \\ u \leq Mu, & v \leq Mu \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

2.2.3 Existence et unicité de la solution continue d'I.Q.V

Théorème 2.1 *[5] Sous les hypothèses et les notations précédentes, le problème* (2.6) *admet au plus une solution.*

On peut montrer que la solution continue du problème (2.6) coincide avec le point fixe de la contraction qui nous assure l'unicité. Considérons l'application suivante :

$$T : L^{\infty}(\Omega) \longrightarrow L^{\infty}(\Omega)$$

$$\omega \longmapsto T(\omega) = \xi,$$

où ξ est la solution de l'I.Q .V :

$$\begin{cases} a(\xi, v-\xi) \geq (f(\omega), v-\xi) & \text{dans } \Omega, \forall v \in K(u) \\ \xi \leq Mu; & v \leq Mu. \end{cases}$$

Théorème 2.2 *[11] Sous l'hypothèse (2.5),l'application T est une contraction dans $L^{\infty}(\Omega)$ de constante $\dfrac{\alpha}{\beta}$. Donc T possède un point fixe unique qui coincide avec la solution du problème (2.6).*

2.2.4 Régularité de la solution continue d'I.Q.V

Théorème 2.3 *[5] Sous les hypothèses précédentes, nous avons :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \quad 2 \leq p \leq \infty$$

.

2.2.5 Propriété de monotonie de la solution continue

Lemme 2.1 *[25] Pour tout u et $\tilde{u}$ dans $K_g(u)$, on a :*

1. *Si* $u \leq \tilde{u}$, *alors* $Mu \leq M\tilde{u}$.

   De plus $M(u+\lambda) = M(u) + \lambda,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\|Mu - M\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)}$.

2.2.6 Algorithme de Schwarz continu

Décomposition du domaine

Nous décomposons Ω en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. La solution u du (2.6) satisfait les conditions de régularité local suivante :

$$u/_{\Omega_i} \in W^{2,p}(\Omega_i) \quad 2 \leq p < \infty; i = 1,2$$

On note par : $\partial\Omega_i$ la frontière de Ω_i, $i = 1,2$

$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$ et $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$ telle que $\bar{\Gamma_1} \cap \bar{\Gamma_2} = \emptyset$

Algorithme continu

Soit l'algorithme suivant : Choisissant $u_1^0 = u_2^0 = k$, et en définie les suites continues de Schwarz (u_1^{n+1}) sur Ω_1 comme suit :

$u_1^{n+1} \in K(u_1^n)$ solution de

$$\begin{cases} a_1(u_1^{n+1}, v - u_1^{n+1}) \geq (f_1(u_1^n), v - u_1^{n+1}) \\ u_1^{n+1} \leq Mu_1^n \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{sur} \Gamma_1 \qquad\qquad v = u_2^n \quad \text{sur} \quad \Omega_1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Et (u_2^{n+1}) sur Ω_2 telle que $u_2^{n+1} \in K(u_2^n)$ solution de

$$\begin{cases} a_2(u_2^{n+1}, v - u_2^{n+1}) \geq (f_2(u_2^n), v - u_2^{n+1}) \\ u_2^{n+1} \leq Mu_2^n \\ u_2^{n+1} = u_1^n \text{ sur } \Gamma_2 \qquad\qquad v = u_1^n \text{ sur } \Gamma_2, \end{cases} \tag{2.8}$$

où $f_i = f/_{\Omega_i}, i = 1, 2$ et $(a_i(u, v)$ la forme bilinéaire définie dans (2.1).
La convergence géeométrique est due à M. Haiour et S. Boularas [19].

2.2.7 Convergence géométrique

Théorème 2.4 *[19] Les suites $(u_1^{n+1}), (u_2^{n+1}), n \geq 0$,générées par l'algorithme de Schwarz convergent géométriquement vers la solution u du problème (2.6). Plus précisément il existe deux constantes $K_1, K_2 \in (0, 1)$ telle ques pour tout $n \geq 0$,*

$$\|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq K_1^n K_2^n \|u^0 - u\|_{L^\infty(\Gamma_1)},$$

$$\|u_2 - u_2^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq K_1^{n+1} K_2^n \|u^0 - u\|_{L^\infty(\Gamma_2)}.$$

On va citer une importante proposition qui nous donne la dépendance continue de la solution par rapport aux second membre, la fonction au bord g et l'obstacle.
Soient : $w = \sigma(f(u), Mu, g), \tilde{w} = \sigma(f(\tilde{u}), M\tilde{u}, \tilde{g})$, où $u, \tilde{u} \in K_g(u)$

Proposition 2.1 *'sous les hypothèses et notations précédentes , on a :*

$$\|w - \tilde{w}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|Mu - M\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\Gamma_i)},$$

$\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j, i, j = 1, 2$ *et* $i \neq j$.

Preuve. :

Posons :

$$\Phi = \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|Mu - M\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\Gamma_i)}.$$

On a

$$f(u) \leq f(\tilde{u}) + f(u) - f(\tilde{u})$$

$$f(u) \leq f(\tilde{u}) + \|f(u) - f(\tilde{u})\|$$

$$f(u) \leq f(\tilde{u}) + \Phi.$$

De la même manière on obtient : $g \leq \tilde{g} + \Phi$ et $Mu \leq M\tilde{u} + \Phi$.

En utilisant les lemmes (1.1) et (1.5) on aura :

$$\sigma(f(u), Mu, g) \leq \sigma(f(\tilde{u}) + \Phi, M\tilde{u} + \Phi, \tilde{g} + \Phi)$$

$$\leq (f(\tilde{u}), M\tilde{u}, \tilde{g}) + \Phi.$$

Donc

$$\sigma(f(u), Mu, g) - \sigma(f(\tilde{u}), M\tilde{u}, \tilde{g}) \leq \Phi.$$

Puisque $(f(u), Mu, g)$ et $(f(\tilde{u}), M\tilde{u}, \tilde{g})$ sont symetriques, on obtient :

$$\sigma(f(\tilde{u}), M\tilde{u}, \tilde{g}) - \sigma(f(u), Mu, g) \leq \Phi.$$

Alors

$$\|w - \tilde{w}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|Mu - M\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\Gamma_i)}.$$

■

Remarque 2.1 *Si $Mu = M\tilde{u}$, on obtient :*

$$\|w - \tilde{w}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\Gamma_i)}.$$

2.3 Problème discret

On note par V_h l'espace d'éléments finis standards des fonctions linéaires continues par morceaux sur Ω. Considérons maintenant le problème discret associé au problème (2.6) : Trouver $u_h \in V_h$ qui verifie :

$$\begin{cases} a(u_h, v - u_h) \geq (f(u_h), v - u_h) & \forall u_h, v \in K_{gh}(u_h) \\ u_h \leq r_h M u_h & \\ u_h = \pi_h g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $f \in L^{\infty}(\Omega)$; $Mu_h = k + \inf_{\varepsilon \geq 0, x+\varepsilon \in \overline{\Omega}} u_h(x+\varepsilon)$ et

$$K_{gh}(u_h) = \{v \in V_h : v = \pi_h g \ \ sur \ \ \partial\Omega; v \leq r_h M u_h \ \ dans \ \ \Omega\},$$

π_h l'opérateur d'interpolation sur $\partial\Omega$.

2.3.1 Hypothèse du principe du maximum discret

On suppose que la matrice qui résulte de la discrétisation du problème (2.6) est une M-matrice [32].

2.3.2 Existence et unicité de la solution discrete d'I.Q.V

Théorème 2.5 *[5] Sous les hypothèses précédentes et le principe du maximum discret, le problème (2.10) admet au plus une solution discrete qui coincide avec l'unique point fixe de l'application suivante :*

$$T_h : L^{\infty}(\Omega) \longrightarrow V_h$$

$$\omega \longmapsto T_h(\omega) = \xi_h,$$

où $\xi_h = \sigma_h(f(\omega))$ est la solution discrete de l'I.Q .V :

$$\begin{cases} a(\xi_h, v_h - \xi_h) \geq (f(\omega), v_h - \xi_h); & dans \quad \Omega, \forall v \in V_h \\ \xi_h \leq r_h M u_h; & v_h \leq r_h M u_h. \end{cases}$$

Théorème 2.6 *[11] Sous l'hypothèse (2.5), l'application T_h est une contraction dans $L^{\infty}(\Omega)$ de constante $\dfrac{\alpha}{\beta}$.*
Donc T_h possède un point fixe unique qui coincide avec la solution du problème (2.10).

Pour l'estimation d'erreur d'approximation, on a le théorème suivant :

Théorème 2.7 *[9] Sous les hypothèses précédentes, il existe une constante C_1 independente de h telle que :*

$$\|u - u_h\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C_1 h^2 \log |h|^2.$$

Similaire, au cas continu on a :

Lemme 2.2 *[25] Pour tout u_h et $\tilde{u_h}$ dans $K_g(u_h)$, on a :*

1. *Si* $u_h \leq \tilde{u_h}$ *alors* $Mu_h \leq M\tilde{u_h}$ *et* $M(u_h + \lambda) = M(u_h) + \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\|Mu_h - M\tilde{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_h - \tilde{u_h}\|_{L^\infty(\Omega)}$.

2.3.3 Algorithme de Schwarz discret

Pour $i = 1, 2$, on établit une triangulation τ^{h_i} régulière et quasi-uniforme dans Ω_i où h_i présente la taille de la maille. On suppose que le deux triangulations sont mutuellement indépendantes sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ dans le sens où un triangle d'une triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre.

Posons $V_{h_i} = V_{h_i}(\Omega_i)$ l'espace des foctions linéaires et continues par morceaux sur τ^{h_i}, qui s'annulent sur $\partial\Omega \cap \Omega_i$.

Pour $w \in C(\overline{\Gamma_i})$, soit :

$$V_{h_i}^{(w)} = \{v \in h_i; v = 0 \;\; sur \;\; \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, v = \;\; pi_{h_i}(w) \;\; sur \;\; \Gamma_2\}. \tag{2.10}$$

π_{h_i} l'opérateur d'interpolation sur Γ_i .

On suppose aussi que les matrices qui résultent de la discrétisation des problèmes (2.7) et (2.8) sont des M-matrices.

On trouvera dans [32] des conditions géométriques simples pour lesquelles l'hypothèse du(PMD) est satisfaite.

Algorithme discret

Partant de $u_{1h}^0 = u_{2h}^0 = r_h M u_h^0 = k$, nous définissons les analogues discretes des suites de Schwarz continues respectivement par : $(u_{1h}^{n+1}) \in V_{h_1}^{(u_{2h}^n)}$ où (u_{1h}^{n+1}) est la solution de :

$$\begin{cases} a_1(u_{1h}^{n+1}, v - u_{1h}^{n+1}) \geq (f_1(u_{1h}^n), v - u_{1h}^{n+1}) & \forall v \in V_{h_1}^{(u_{2h}^n)} \\ u_{1h}^{n+1} \leq r_h M u_{1h}^n & v \leq r_h M u_{1h}^n \\ u_{1h}^{n+1} = u_{2h}^n & \text{sur } \Gamma_1, v = u_{2h}^n \text{ sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Et $(u_{2h}^{n+1}) \in V_{h2}^{(u_{1h}^{n+1})}$ telle que (u_{2h}^{n+1}) est la solution de :

$$\begin{cases} a_2(u_{2h}^{n+1}, v - u_{2h}^{n+1}) \geq (f_2(u_{2h}^n), v - u_{2h}^{n+1}) & \forall v \in V_{h_2}^{(u_{1h}^n)} \\ u_{2h}^{n+1} \leq r_h M u_{2h}^n & v \leq r_h M u_{2h}^n \\ u_{2h}^{n+1} = u_{1h}^n & \text{sur } \Gamma_2,\ v = u_{2h}^n \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \tag{2.12}$$

Nous terminons cette section par la version discrete de la proposition (3.1). On note : $w_h = \sigma(f(u_h), Mu_h, \pi_h g), \tilde{w}_h = \sigma_h(f(\tilde{u_h}, M\tilde{u_h}, \pi_h \tilde{g})$, Où $u_h, \tilde{u_h} \in K_g(u_h)$

Proposition 2.2

$$\|w_h - \tilde{w_h}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq \|f(u_h) - f\tilde{u_h})\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|Mu_h - M\tilde{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|\pi_h g - \pi_h \tilde{g}\|_{L^\infty(\Gamma_i)},$$

$\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega_j, i, j = 1, 2$ *et* $i \neq j$.

Preuve. : Analogue à celle de la proposition (3.1). ■

Remarque 2.2 *Si* $Mu_h = M\tilde{u_h}$*, on obtient :*

$$\|w_h - \tilde{w_h}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq \|f(u_h) - f\tilde{u_h})\|_{L^\infty(\Omega_i)} + \|\pi_h g - \pi_h \tilde{g}\|_{L^\infty(\Gamma_i)}.$$

2.4 Estimation d'erreur en norme L^∞

Cette section est consacrée à la démonstration du résultat principal de ce chapitre.Pour cela, nous commençons par introduire deux suites auxiliaires discretes et un lemme introduit dans [12, 23].

Notre contribution est de démontrer que ce lemme reste vrai pour notre problème (l'obstacle et le second membre dépendent de la solution).

2.4.1 Suites auxiliaires

Nous introduisons deux suites discretes auxiliaires comme suit :

Partons de : $w_{ih}^0 = u_{ih}^0 = k, i = 1, 2$. Définissons la suite (w_{1h}^{n+1}) telle que $w_{1h}^{n+1} \in V_{h_1}^{u_2^n}$

solution de

$$\begin{cases} a_1(w_{1h}^{n+1}, v - w_{1h}^{n+1}) \geq (f_1(u_{1h}^n), v - w_{1h}^{n+1}) & \forall v \in V_{h_1}^{(u_2^n)} \\ w_{1h}^{n+1} \leq r_h M u_{1h}^n & v \leq r_h M u_{1h}^n. \end{cases} \tag{2.13}$$

Et (w_{2h}^{n+1}) telle que $w_{2h}^{n+1} \in V_{h_2}^{(u_1^{n+1})}$ est la solution de :

$$\begin{cases} a_2(w_{2h}^{n+1}, v - w_{2h}^{n+1}) \geq (f_2(_{2h}^n), v - w_{2h}^{n+1}) & \forall v \in V_{h_2}^{(u_1^{n+1})} \\ w_{2h}^{n+1} \leq r_h M u_{2h}^n & v \leq r_h M u_{2h}^n. \end{cases} \tag{2.14}$$

Notons que w_{ih}^{n+1} est l'approximation par élément fini de u_i^{n+1} définie dans (2.7) et (2.8).

Lemme 2.3 *Nous avons :*

$$\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2$$

$$\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1$$

Preuve. Pour simplifier les écritures, on note :

$$|.|_1 = \|.\|_{L^\infty(\Gamma_1)}; |.|_2 = \|.\|_{L^\infty(\Gamma_2)}$$

$$\|.\|_1 = \|.\|_{L^\infty(\Omega_1)}; \|.\|_2 = \|.\|_{L^\infty(\Omega_2)}$$

$$\pi_{h_1} = \pi_{h_2} = \pi_h, h_1 = h_2 = h.$$

Pour $n = 0$, en utilsant la remarque (2.2), nous obtenons :

$$\|u_1^1 - u_{1h}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{1h}^1\|_1 + \|w_{1h}^1 - u_{1h}^1\|_1$$

$$\leq \|u_1^1 - w_{1h}^1\|_1 + \|f_1(u_1^0) - f_1(u_{1h}^0\|_1 + |\pi_h M u_2^0 - \pi_h M u_{2h}^0|_1$$

$$\leq \|u_1^1 - w_{1h}^1\|_1 + |Mu_2^0 - Mu_{2h}^0|_1$$

$$\|u_1^1 - u_{1h}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{1h}^1\|_1 + \|Mu_2^0 - Mu_{2h}^0\|_2.$$

Et du le lemme (2.2) on aura :

$$\|u_1^1 - u_{1h}^1\|_1 \leq \|u_1^1 - w_{1h}^1\|_1 + \|u_2^0 - u_{2h}^0\|_2. \tag{2.15}$$

Et de la même manière on obtient :

$$\|u_2^1 - u_{2h}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{2h}^1\|_2 + \|w_{2h}^1 - u_{2h}^1\|_2$$

$$\leq \|u_2^1 - w_{2h}^1\|_2 + \|f_2(u_{2h}^0) - f_2(u_{2h}^0\|_2 + |\pi_h M u_1^1 - \pi_h M u_{1h}^1|_2$$

$$\leq \|u_2^1 - w_{2h}^1\|_2 + |M u_1^1 - M u_{1h}^1|_2$$

$$\leq \|u_2^1 - w_{2h}^1\|_2 + \|M u_1^1 - M u_{1h}^1\|_1,$$

qui donne

$$\|u_2^1 - u_{2h}^1\|_2 \leq \|u_2^1 - w_{2h}^1\|_2 + \|u_1^1 - u_{1h}^1\|_1.$$

De (2.15) on aura :

$$\|u_2^1 - u_{2h}^1\|_2 \leq \|u_1^1 - w_{1h}^1\|_1 + \|u_2^0 - u_{2h}^0\|_2 + \|u_2^1 - w_{2h}^1\|_2, \tag{2.16}$$

d'où :

$$\|u_1^1 - u_{1h}^1\|_1 \leq \sum_{p=1}^{1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^{0} \|u_2^0 - u_{2h}^0\|_2$$

$$\|u_2^1 - u_{2h}^1\|_2 \leq \sum_{p=0}^{1} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1$$

.

Pour $n = 1$.

$$\|u_1^2 - u_{1h}^2\|_1 \leq \|u_1^2 - w_{1h}^2\|_1 + \|w_{1h}^2 - u_{1h}^2\|_1$$

$$\leq \|u_1^2 - w_{1h}^2\|_1 + \|f(u_{1h}^1 - f(u_{2h}^1\|_1 + |\pi_h M u_2^1 - \pi_h M u_{2h}^1|_1$$

$$\leq \|u_1^2 - w_{1h}^2\|_1 + |M u_2^1 - M u_{2h}^1|_1$$

$$\leq \|u_1^2 - w_{1h}^2\|_1 + \|u_2^1 - u_{2h}^1\|_2$$

.

De (2.16) nous obtenons :

$$\|u_1^2 - u_{1h}^2\|_1 \leq \|u_2^1 - w_{1h}^2\|_1 + \|u_2^1 - w_{2h}^1\|_2 + \|u_1^1 - w_{1h}^1\|_1 + \|u_2^0 - u_{2h}^0\|_2. \tag{2.17}$$

De la même manière nous obtenons :

$$\|u_2^2 - u_{2h}^2\|_2 \leq \|u_2^2 - w_{2h}^2\|_2 + \|w_{2h}^2 - u_{2h}^2\|_2$$

$$\leq \|u_2^2 - w_{2h}^2\|_2 + \|f(u_{2h}^2) - f(u_{2h}^2)\|_2 + |\pi_h M u_1^2 - \pi_h M u_{1h}^2|_2$$

$$\leq \|u_2^2 - w_{2h}^2\|_2 + \|u_1^2 - u_{1h}^2\|_1.$$

De (2.17) on trouve :

$$\|u_2^2 - u_{2h}^2\|_2 \leq \|u_2^2 - w_{2h}^2\|_2 + \|u_2^1 - w_{1h}^2\|_1 + \|u_2^1 - w_{2h}^1\|_2 + \|u_1^1 - w_{1h}^1\|_1 + \|u_2^0 - u_{2h}^0\|_2.$$

D'où :

$$\|u_1^2 - u_{1h}^2\|_1 \leq \sum_{p=1}^{2} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^{1} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2,$$

et

$$\|u_2^2 - u_{2h}^2\|_2 \leq \sum_{p=0}^{2} \|u_1^p - w_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{2} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1.$$

Passant à la seconde étape, et suppposons que :

$$\|u_2^n - u_{2h}^n\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1. \tag{2.18}$$

Démontrons la première inégalité (pour $i = 1$) :

$$\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{1h}^{n+1}\|_1 + \|w_{1h}^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1$$

$$\leq \|u_1^{n+1} - w_{1h}^{n+1}\|_1 + |\ f_1(u_{1h}^n) - f_1(u_{1h}^n)\|_1 + |\pi_h M u_2^n - \pi_h M u_{2h}^n|_1$$

$$\leq \|u_1^{n+1} - w_{1h}^{n+1}\|_1 + \|M u_2^n - M u_{2h}^n\|_2$$

$$\leq \|u_1^{n+1} - w_{1h}^{n+1}\|_1 + \|u_2^n - u_{2h}^n\|_2.$$

De (2.18) on obtient :

$$\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \|u_1^{n+1} - w_{1h}^{n+1}\|_1 + \sum_{p=0}^{n} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=1}^{n} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1.$$

Par conséquent :

$$\|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^{n} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2. \tag{2.19}$$

Pour la seconde inégalité ($i = 2$), on a :

$$\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq \|u_2^{n+1} - w_{2h}^{n+1}\|_2 + \|w_{2h}^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2$$

$$\leq \|u_2^{n+1} - w_{2h}^{n+1}\|_2 + |\ f_2(u_{2h}^n) - f_2(u_{2h}^n)\|_2 + |\pi_h M u_1^{n+1} - \pi_h M u_{1h}^{n+1}|_2$$

$$\leq \|u_2^{n+1} - w_{2h}^{n+1}\|_2 + \|M u_1^{n+1} - M u_{1h}^{n+1}\|_1$$

$$\leq \|u_2^{n+1} - w_{2h}^{n+1}\|_2 + \|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_1.$$

De (2.19) on obtient :

$$\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq \|u_2^{n+1} - w_{2h}^{n+1}\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^{n} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2$$

.

Par conséquent :

$$\|u_2^{n+1} - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2 + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1.$$

■

2.4.2 Estimation d'erreur en norme L^∞

Nous terminons par une estimation d'erreur.

Théorème 2.8 *Soient u et u_h respectivement, les solutions des problèmes continu et discret, on posons $h = \max(h_1, h_2)$, alors il existe une constante C indépendante de h et n telle que :*

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2.$$

Preuve. Nous donnons la preuve pour $i = 1$. Le cas $i = 2$ est similaire.
En effet, soit $K = \max(k_1, k_2)$, en utilisant le lemme(2.3) et le théorème (2.4) on obtient :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} + \|u_1^{n+1} - u_{1h}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)}$$

$$\leq \|u_1 - u_1^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} + \sum_{p=1}^{n+1} \|u_1^p - w_{1h}^p\|_1 + \sum_{p=0}^{n+1} \|u_2^p - w_{2h}^p\|_2$$

$$\leq K^{2n} \|u^0 - u\|_{L^\infty(\Gamma_1)} + 2(n+1)C_1 h^2 |\log h|^2$$

$$\leq K^{2n} (\|u^0 - u_h\|_{L^\infty(\Gamma_1)} + \|u_h - u\|_{L^\infty(\Gamma_1)}) \ + 2(n+1)C_1 h^2 |\log h|^2$$

.

Posons $K^{2n} \leq h^2$ nous obtenons :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq Ch^2 |\log h|^3$$

. ■ Dans ce qui suit, on va citer quelques résultats obtenus, pour des problèmes qui répresentent des cas particuliers de notre problème, selon la dépendence du second membre et l'obstacle avec la solution.

1. Si l'obstacle et le second membre ne dépendent pas de la solution :
   ($Mu = \Psi$ et $f(u) = f$).

Notre problème devient :

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f, v-u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K \\ u \leq \psi; & v \leq \psi. \end{cases}$$

Dans [12] le résultat d'approximation est donné par :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2.$$

2. Si l'obstacle dépend seulement de la solution :($f(u) = f$).

   Notre problème devient :

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f, v-u) & \forall v \in K \\ u \leq Mu; & Mu \geq 0 \\ Mu = k + \inf\limits_{\varepsilon \geq 0, x+\varepsilon \in \overline{\Omega}} u(x+\varepsilon); & \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi; & \text{dans} \Gamma_0 \text{ et } u = 0 \text{ dans } \Gamma / \Gamma_0. \end{cases}$$

   Dans[20], le résultat d'estimation trouvés est le suivant :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2.$$

3. Si le second membre dépend seulement - non linéairement- de la solution : ($Mu = \Psi$). Notre problème sera comme suit :

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f(u), v-u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K(u) \\ u \leq \psi; & v \leq \psi. \end{cases}$$

   Dans [23] le résultat d'estimation obtenue est :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3, \quad i = 1, 2.$$

4. Si le second membre et l'obstacle dépendent-linéairement- de la sulution ($f(u) = f + ru_\alpha, Mu = Mu_\alpha$).

   Nous obtenons une inéquation quasi-variationnelle liée à un problème de contrôle ergodique définie comme suit :

$$\begin{cases} b(u_\alpha, v - u_\alpha) \geq (f + ru_\alpha, v - u_\alpha) & \alpha \in (0,1) \\ u_\alpha \leq Mu_\alpha; & v \leq Mu_\alpha. \end{cases}$$

   Dans [31] le résultat d'approximation est donné par :

$$\|u_{\alpha_i} - u_{\alpha_i h}^{n+1}\|_\infty \leq C\alpha^{-2}h^2|\log h|^4, \;\; i = 1, 2.$$

5. Si le second membre dépend seulemment -linéairement-de la solution :

   ($Mu = \Psi$ et $f(u) = f + \lambda u$).

   Notre problème devient une inéquation variationnelle a opérateur non coercif :

$$\begin{cases} a(u, v - u) \geq (f + \lambda u, v - u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K \\ u \leq \psi; & v \leq \psi. \end{cases}$$

   Dans [35] l'estimation obtenue est :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2|\log h|^3, \quad i = 1, 2.$$

Chapitre 3

Amélioration de la Convergence Uniforme

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une deuxième approche dans le but d'amiliorer le résultat obtenu précédement.
Cette approche se base entre un résultat de convergence qu'on va l'éprouver et celle de la convergence uniforme de Cortey-Dumont [9] de l'approximation en éléments finis pour les inéquations variatinnelles, qu'on va l'adapter à notre problème.

3.2 Problème continu d'I.Q.V

3.2.1 Hypothèses et notations

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Pour $u, v \in H^1(\Omega)$, considérons la forme bilinéaire suivante :

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1\le i,j\le n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x) u.v \Big) dx, \qquad (3.1)$$

où $a_{ij}(x), a_i(x), a_0(x), x \in \overline{\Omega}, 1 \leq i, j \leq n$ sont suffisamment réguliers et satisfont les conditions suivantes :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2, \xi \in \mathbb{R}^n, \nu > 0, \tag{3.2}$$

$$a_0(x) \geq \beta > 0, \tag{3.3}$$

où β est une constante.

M opérateur donné par :

$$Mu = k + \inf_{\varepsilon \geq 0, x+\varepsilon \in \overline{\Omega}} u(x+\varepsilon),$$

$k > 0$.

M satisfait :

$$Mu \in W^{2,\infty}(\Omega), Mu \geq 0, \quad sur \quad \partial\Omega : 0 \leq g \leq Mu, \tag{3.4}$$

où g une fonction régulière définie sur $\partial\Omega$.

Soient $f(.)$ une fonction non linéaire, non décroissaante et lipschitzienne, α une constante qui vérifiant :

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1, \quad f \in L^\infty(\Omega), \tag{3.5}$$

et $K_g(u)$ est un convexe fermé et non vide définie par :

$$K_g(u) = \{v \in H^1(\Omega), v = g \quad sur \quad \partial\Omega, v \leq Mu \quad dans \quad \Omega\}$$

.

3.2.2 Problème continu

Considérons le problème suivant :

Trouver $u \in k_g(u)$ solution de

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f(u), v-u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K_g(u) \\ u \leq Mu; & v \leq Mu \\ u = g; & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

3.2.3 Existence et unicité de la solution continue d'I.Q.V

Théorème 3.1 *[5] Sous les hypothèses et les notations précédentes, le problème* (3.6) *admet au plus une solution.*

On peut montrer que la solution continue du problème (3.6) coincide avec le point fixe de la contraction, qui nous assure l'unicité.
Considérons l'application suivante :

$$T : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$$

$$\omega \longmapsto T(\omega) = \xi,$$

où ξ est la solution de l'I.Q .V :

$$\begin{cases} a(\xi, v-\xi) \geq (f(\omega), v-\xi) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K(u) \\ \xi \leq Mu; & v \leq Mu. \end{cases}$$

Théorème 3.2 *[11] Sous l'hypothèse (3.5), l'application T est une contraction dans $L^\infty(\Omega)$ de constante $\dfrac{\alpha}{\beta}$.*
Donc T possède un point fixe unique qui coincide avec la solution du problème (3.6).

Preuve. :

Soients $\omega, \tilde{\omega}$ dans $\in$L$^\infty(\Omega)$ et notons par : $\xi = T(\omega) = \sigma(f(\omega))$ $\tilde{\xi} = T\tilde{\omega} = \sigma(f(\tilde{\omega}))$.
Posons : $\Phi = \frac{1}{\beta}\|f(\omega) - f(\tilde{\omega}\|_{L^\infty(\Omega)}$.
On a : $f(\omega) \leq f\tilde{\omega} + \|f(\omega) - f(\tilde{\omega}\|_{L^\infty(\Omega).}$
En utilisant (3.3), on obtient : $f(\omega) \leq f(\tilde{\omega}) + a_0\Phi$.
Alors d'aprés un résultat de comparaison dans les inéquations variationnelles coercives, on a : $\sigma(f(\omega)) \leq \sigma(f(\tilde{\omega}) + a_0\Phi.)$ D'où $\sigma(f(\omega)) \leq \sigma(f(\tilde{\omega})) + \Phi$.
Donc : $\xi \leq \tilde{\xi} + \Phi$.

De la même manière, en interchangeant le rôle de ξ et $\tilde{\xi}$, on obtient :

$\tilde{\xi} \leq \xi + \Phi.$

Par conséquent : $\|T\omega - T\omega\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta}\|f(\omega) - f(\tilde{\omega})\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Comme $f(.)$est lipchitizienne, on aboutit à :

$\|T\omega - T\omega\|_\infty \leq \frac{\alpha}{\beta}\|f(\omega) - f(\tilde{\omega})\|_\infty$.

L'hypothèse (3.5) nous assure la contraction de T. ■

3.2.4 Régularité de la solution continue d'I.Q.V

Théorème 3.3 *[5] Sous les hypothèses précédantes et l'hypothèse du (PMD) nous avons :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \quad 2 \leq p \leq \infty$$

.

3.2.5 Propriété de monotonie de la solution continue d'I.Q.V

. Noton par : $u = \sigma(f(u)), \tilde{u} = \sigma(f(\tilde{u}))$, telle que u et $\tilde{u}$ dans $K_g(u)$ les solutions du problème (3.6), avec les seconds membres $f(u)$ et $f(\tilde{u})$ respectivement.

Lemme 3.1 *[15, 37] Si $f(u) \geq f(\tilde{u})$, alors $u \geq \tilde{u}$.*

Théorème 3.4 *Sous les conditions du lemme précédent, nous avons :*

$$\|\sigma(f(u)) - \sigma(f(\tilde{u}))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta}\|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Preuve. :

Posons :

$$\Phi = \frac{1}{\beta}\|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On a :

$$f(u) \leq f\tilde{u} + \frac{1}{\beta}\|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

D'aprés (3.3), on obtient :

$$f(u) \leq f(\tilde{u}) + \frac{a_0}{\beta} \times \Phi.$$

Le lemme (3.1) nous donne :

$$\sigma(f(u)) \leq \sigma(f(\tilde{u}) + a_0 \times \Phi).$$

Donc

$$\sigma(f(u)) \leq \sigma(f(\tilde{u})) + \Phi.$$

Alors

$$\sigma(f(u)) - \sigma(f(\tilde{u})) \leq \Phi.$$

De la même manière, on obtient :

$$\sigma(f(\tilde{u})) - \sigma(f(u)) \leq \Phi.$$

D'où :

$$\|\sigma(f(u)) - \sigma(f(\tilde{u}))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta}\|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

■

3.2.6 Algorithme de Schwarz continu

Décomposition du domaine

On décompose Ω en deux sous-domaines Ω_1, Ω_2 tel que : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

La solution u du (3.6) satisfait la condition de régularité local suivante :

$$u_i \in W^{2,p}(\Omega_i) \;\text{ pour }\; 2 \leq p < \infty; \;\; i = 1, 2$$

on note par : $\partial\Omega_i$ la frontière de $\Omega_i \;\; i = 1, 2$, $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$, $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$ telle que $\bar{\Gamma_1} \cap \bar{\Gamma_2} = \emptyset$.

Algorithme de Schwarz

Soit la procédure suivante :

choisissant : $u_1^0 = u_2^0 = k$, la méthode alternée de Schwarz appliquée au problème continu conduit à la résolution de deux sous-problèmes suivants :

(u_1^{n+1}) sur Ω_1 telle que $u_1^{n+1} \in K(u_1^n)$ solution de

$$\begin{cases} a_1(u_1^{n+1}, v - u_1^{n+1}) \geq (f_1(u_1^n), v - u_1^{n+1}) \\ u_1^{n+1} \leq M u_1^n; \\ u_1^{n+1} = u_2^n \;\; \text{sur}\Gamma_1 \qquad\qquad\qquad v = u_2^n \;\text{ sur }\;\; \Gamma_1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Et (u_2^{n+1}) sur Ω_2 telle que $u_2^{n+1} \in K(u_2^n)$ solution de

$$\begin{cases} a_2(u_2^{n+1}, v - u_2^{n+1}) \geq (f_2(u_2^n), v - u_2^{n+1}) \\ u_2^{n+1} \leq M u_2^n \\ u_2^{n+1} = u_1^n \;\text{ sur }\; \Gamma_2 \qquad\qquad\qquad v = u_1^n \;\text{ sur }\; \Gamma_2, \end{cases} \tag{3.8}$$

où $f_i = f_{\Omega_i}, i = 1, 2$ et $(a_i(u, v)$ la forme bilinéaire définie dans (3.1).

3.3 Problème discret d'I.Q.V

On note par V_h l'espace d'éléments finis standards des fonctions linéaires continues par morceaux sur Ω. L'analogue discret du problème (3.6) consiste à :

Trouver $u_h \in K_{gh}(u_h)$ solution de

$$\begin{cases} a(u_h, v - u_h) \geq (f(u_h), v - u_h) & \forall u_h, v \in K_{gh}(u_h) \\ u_h \leq r_h M u_h & \\ u_h = \pi_h g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.9}$$

où $f \in L^{\infty}(\Omega)$; $Mu_h = k + \inf\limits_{\varepsilon \geq 0, x+\varepsilon \in \overline{\Omega}} u_h(x+\varepsilon)$ et

$$K_{gh}(u_{u_h}) = \{v \in V_h : v = \pi_h g \text{ sur } \partial\Omega; v \leq r_h M u_h \text{ dans } \Omega\},$$

π_h l'opérateur d'interpolation sur $\partial\Omega$ et r_h l'opérateur de restriction en élément finie usuelle sur Ω.

3.3.1 Hypothèse du principe du maximum discret

On suppose que la matrice qui résulte de la discrétisation du problème (3.1) est une M-matrice [32].

3.3.2 Existence et unicité de la solution discrete d'I.Q.V

Théorème 3.5 *[5] Sous les hypothèses précédentes et le principe du maximum discret, le problème (3.9) admet au plus une solution discrete qui coincide avec l'unique point fixe de l'application suivante :*

$$T_h : L^{\infty}(\Omega) \longrightarrow V_h$$

$$\omega \longmapsto T_h(\omega) = \xi_h,$$

où $\xi_h = \sigma_h(f(\omega))$ est la solution discrete de l'I.Q .V :

$$\begin{cases} a(\xi_h, v_h - \xi_h) \geq (f(\omega), v_h - \xi_h) & \textit{dans} \quad \Omega, \forall v \in V_h \\ \xi_h \leq r_h M u_h; & v_h \leq r_h M u_h. \end{cases}$$

Théorème 3.6 *[11] Sous l'hypothèse (3.5), l'application T_h est une contraction dans $L^\infty(\Omega)$ de constante $\frac{\alpha}{\beta}$.*
Donc T_h possède un point fixe unique qui coincide avec la solution du problème (3.9).

Preuve. :

Similaire au cas continu. ■

3.3.3 Propriété de monotonie de la solution discrete d'I.Q.V

De la même manière qu'au cas continu on a :
Pour tout u_h et $\tilde{u_h}$ dans $K_g(u_h)$ nous avons :

Lemme 3.2 *[15, 37] Si $f(u_h) \leq f(\tilde{u_h})$, alors $u_h \leq \tilde{u_h}$.*

Théorème 3.7 *Sous les conditions du lemme précédant et l'hypothèse du (PMD), on a :*

$$\|\sigma_h(f(u_h)) - \sigma_h(f(\tilde{u_h}))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta}\|f(u_h) - f(\tilde{u_h})\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Preuve. :

Similaire au cas continu.

■ L'estimation d'erreur d'approximation entre la solution continue u et la solution discrète u_h est assuré par le théorème (2.7).

3.3.4 Algorithme de Schwarz discret

Discrétisation

Pour $i = 1, 2$, on établiit une triangulation τ^{h_i} régulière et quasi-uniforme dans Ω_i où h_i présente la taille de la maille. On suppose que le deux triangulations sont mutuellement indépendantes sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ dans le sens où un triangle d'une triangulation n'appartient pas nécessairement à l'autre.

Posons $V_{h_i} = V_{h_i}(\Omega_i)$ l'espace des fonctions continues par morceaux sur τ^{h_i} qui s'annulent sur $\partial\Omega \cap \Omega_i$.

Pour $w \in C(\overline{\Gamma_i})$, on définit :

$$V_{h_i}^{(w)} = \{v \in h_i ; v = 0 \ \text{ sur } , \partial\Omega_i \cap \partial\Omega ; v = \pi_{h_i}(w) \ \text{ sur } \Gamma_2\}, \tag{3.10}$$

π_{h_i} l'opérateur d'interpolation sur Γ_i .

On suppose aussi que les matrices qui résultent de la discrétisation des problèmes (3.7) et (3.8) sont des M-matrices[32].

Algorithme discret

Partant de $u_{1h}^0 = u_{2h}^0 = r_h M u_h^0 = k$, nous définissons les analogues discrets des suites de Schwarz continues definie dans (3.7) et (3.8) respectivement par : $(u_{1h}^{n+1}) \in V_{h_1}^{(u_{2h}^n)}$ où (u_{1h}^{n+1}) est la solution de :

$$\begin{cases} a_1(u_{1h}^{n+1}, v - u_{1h}^{n+1}) \geq (f_1(u_{1h}^n), v - u_{1h}^{n+1}) & \forall v \in V_{h_1}^{(u_{2h}^n)} \\ u_{1h}^{n+1} \leq r_h M u_{1h}^n & v \leq r_h m u_{1h}^n \\ u_{1h}^{n+1} = u_{2h}^n & \text{sur } \Gamma_1, v = u_{2h}^n \text{ sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Et $(u_{2h}^{n+1}) \in V_{h2}^{(u_{1h}^{n+1})}$ telle que (u_{2h}^{n+1}) est la solution de :

$$\begin{cases} a_2(u_{2h}^{n+1}, v - u_{2h}^{n+1}) \geq (f_2(u_{2h}^n), v - u_{2h}^{n+1}) & \forall v \in V_{h_2}^{(u_{1h}^n)} \\ u_{2h}^{n+1} \leq r_h M u_{2h}^n & v \leq r_h M u_{2h}^n \\ u_{2h}^{n+1} = u_{1h}^n & \text{sur } \Gamma_2, v = u_{2h}^n \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Nous finissons cette section par la version discrète de la convergence géométrique basé sur la lipschitiziannité de la solution et le second membre, l'un par rapport à l'autre.

Lemme 3.3 *Sous les conditions de (3.1) à (3.5), les suitess (u_{1h}^{n+1}) et (u_{2h}^{n+1}) : $n \geq 0$ convergent géométriquement vers la solution unique u_h du problème discret(3.1), plus précisément, il existe une constante $\Theta \in (0,1)$ telle que pour tout $n \geq 0$, on a :*

$$\|u_{ih} - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq \Theta^{n+1}\|u_h - u_{ih}^0\|_{L^\infty(\Omega)},\ i = 1, 2.$$

Preuve. Utilisant la proposition (3.1), où f est une fonction Lipshitzienne avec une constante α on a : pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}\|u_{ih} - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} &= \|\sigma_h(f(u_{ih})) - \sigma_{ih}(f(u_h^n))\|_{L^\infty(\Omega_i)} \\ &\leq \frac{1}{\beta}\|f(u_{ih}) - f(u_{ih}^n)\|_{L^\infty(\Omega_i)} \\ &\leq \frac{\alpha}{\beta}\|u_{ih} - u_{ih}^n\|_{L^\infty(\Omega_i)}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\|u_{ih} - u_{ih}^{n}\|_{L^\infty(\Omega_i)} &\leq \frac{1}{\beta}\|f(u_{ih}) - f(u_{ih}^{n-1})\|_{L^\infty(\Omega_i)} \\ &\leq \frac{\alpha}{\beta}\|u_{ih} - u_{ih}^{n-1}\|_{L^\infty(\Omega_i)}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|u_{ih} - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} &\leq (\frac{\alpha}{\beta})^2\|u_{ih} - u_{ih}^{n-1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \\ &\leq ... \leq ... \leq (\frac{\alpha}{\beta})^{n+1}\|u_{ih} - u_{ih}^0\|_{L^\infty(\Omega_i)}.\end{aligned}$$

Posons $\Theta = \dfrac{\alpha}{\beta}$, de (3.5) nous avons : $\Theta \in (0, 1)$.
Alors :

$$\|u_{ih} - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq \Theta^{n+1}\|u_h - u_{ih}^0\|_{L^\infty(\Omega_i)}.$$

■

3.4 Approximation en norme L^∞

Dans cette section, nous donnons une amélioration d'estimation d'erreur en norme L^∞ pour le problème étudié, qui se base sur une combinaison entre la version discrete de la convergence géométrique établie dans le lemme (3.3) et une adaptation de la convergence uniforme introduit par Cortey-Dumont [16].

On rappel que notre problème discret est le suivant :

$$\begin{cases} a(u_h, v - u_h) \geq (f(u_h), v - u_h) & \forall u_h, v \in K_{gh}(u_h) \\ u_h \leq r_h M u_h & \\ u_h = \pi_h g & \text{sur}\partial\Omega. \end{cases}$$

Posons $\overline{u_h}$ solution de l'équation suivante :

$$a_h(\overline{u_h}, v_h) = a(u, v_h), \tag{3.13}$$

où u est la solution du problèm continu (3.6). De [16] nous avons les resultats suivants :

$$\begin{cases} \|u - \overline{u_h}\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq ch^2 |\log h|^2, \\ \|u - r_h u\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq ch^2 |\log h|^2. \end{cases} \tag{3.14}$$

De (3.4) on a :

$$\rho(x) = Mu(x)/_{B(x_0, ch)}, \tag{3.15}$$

où $B(x_0, ch)$ est la boulle de centre x_0 et de rayon ch, ρ est la restriction de Mu sur $B(x_0, ch)$.

Si, on a :

$$u(x_0) = Mu(x_0) = \rho(x_0)$$

Alors

$$|u(x) - \rho(x)| \leq ch^2 |\log h|^2, \forall x \in B(x_0, ch). \tag{3.16}$$

Remarque 3.1 *La nature de notre prolème est l'existence d'une frontière libre entre l'ensemble de coincidence Ω_0 et son complémentaire dans Ω telle que :*

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid u(x) = Mu(x)\}.$$

Soit l'ensemble suivant, qui est l'approximation discrete de l'ensemble de coincidence :

$$\Omega_{0h} = \{x \in \cup T_h / T_h \cap \Omega_0 \neq \emptyset\},$$

où T_h est un élément de triangulation τ_h.

Le lemme qui suit est similaire au lemme donné dans [16], pour les inéquations variationnelles.

Lemme 3.4 *Sous les conditions de (3.1) à (3.5) et de (3.13) à (3.16), on a les deux éstimations suivantes :*

$$\|u - Mu\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq ch^2 |\log h|^2,$$

et

$$\|Mu - r_h M u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq ch^2 |\log h|^2.$$

Preuve. :

Donnons T_h dans Ω_h, il existe x_0 de T_h telle que : $u(x_0) = Mu(x_0)$.

De plus $T_h \subset B(x_0, ch)$.

Donc pour tout x dans T_h on a : $u(x) \leq Mu(x)$.

Puisque u est la solution de l'inéquation quasi-variationnelle, et d'aprés (3.15) et (3.16), on a :

$$u(x) \leq \rho(x) \leq u(x) + ch^2 |\log h|^2 \leq Mu(x) + ch^2 |\log h|^2,$$

d'autre coté en utillisant (3.16), on obtient :

$$\rho(x) \leq u(x) + ch^2 |\log h|^2.$$

Donc :

$$\forall x \in B(x_0, ch) : Mu(x) \leq u(x) + ch^2 |\log h|^2.$$

Alors

$$\|u - Mu\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq ch^2|\log h|^2.$$

Pour la seconde éstimation de (3.14) on a :

$$\|u - r_h u\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq ch^2|\log h|^2,$$

et

$$r_h u \leq r_h M u_h \leq -r_h u + ch^2|\log h|^2.$$

Donc

$$\|Mu - r_h M u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} = \|Mu - r_h M u_h + u - u + r_h u - r_h u\|$$

$$\|Mu - u\| + \|u - r_h u\| + \|r_h u - r_h M u_h\|$$

.

Alors

$$\|Mu - r_h M u_h\| \leq ch^2|\log h|^2.$$

■ Dans ce qui suit, on peut tirer un lemme qui joue un rôle éssentiel dans notre résultat.

Lemme 3.5 *Sous les conditions de (3.1) à (3.5) et de (3.13) à (3.16), avec le principe du maximum discret, il existe une constante C_2 indépendente de h telle que :*

$$\|u_h - r_h M u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq C_2 h^2|\log h|^2.$$

Preuve. :

Utilisons le Théorème (2.7) et le Lemme (3.4). Nous obtenons :

$$\|u_h - r_h M u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq \|u_h + u - u - Mu + Mu - r_h M u_h\|$$

$$\leq \|u_h - u\| + \|u - Mu\| + \|Mu - r_h M u_h\|$$
$$\leq C_2 h^2 |\log h|^2.$$

■

3.4.1 Estimation d'erreur en norme L^∞

Nous terminons par une amélioration de l'estimation d'erreur en norme L^∞.

Théorème 3.8 *Sous les même conditions précédantes il existe une constante C independante de h telle que :*

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2|\log h|^2, \;\; i = 1, 2.$$

Preuve. Pour $i = 1, 2$ on a :

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq \|u_i - u_{ih}\| + \|u_{ih} - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)}.$$

En utilisant le théorème 3.8 et le lemme 3.3 nous obtenons :

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C_1 h^2|\log h|^2 + \Theta^{n+1}\|u_h - u_{ih}^0\|_{L^\infty(\Omega_i)}.$$

Suite à notre choix $u_{ih}^0 = r_h M u_h^0$, et le lemme 3.5 nous obtenons :

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C_1 h^2|\log h|^2 + K^{n+1} C_2 h^2 |\log h|^2$$
$$\leq (C_1 + \Theta^{n+1} C_2) h^2 |\log h|^2.$$

Alors

$$\|u_i - u_{ih}^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq Ch^2|\log h|^2.$$

■

Conclusion

Dans ce travail on a étudié la convergence uniforme, pour une inéquation quasi- variationnelle d'ordre général dans le sens où le second membre et l'obstacle dépendent de la solution, en utilisant la méthode de décomposition en deux sous-domaine.

Notre problème est comme suit :

Trouver $u \in k_g(u)$ solution de

$$\begin{cases} a(u, v-u) \geq (f(u), v-u) & \text{dans} \quad \Omega, \forall v \in K_g(u) \\ u \leq Mu; & v \leq Mu \\ u = g; & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Ensuite nous avons donné une amélioration qui concerne l'estimation d'erreur en norme L^∞ pour le problème étudié, qui se base sur une combinaison entre la version discrete de la convergence géométrique et une adaptation de la convergence uniforme introduit par Cortey-Dumont de l'approximation par éléments finis pour l'inéquation variationnelle.

Notre résultat d'approximation est le suivant :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2, \quad i = 1, 2.$$

Bibliographie

[1] L.Badea, *On the Schawarz alternting method with more than two sub-domains for non linear monotone problems*, SIAM Joural on Numerical Analysis, 28(2001),993-1007.

[2] C.Baiocchi, *estimation d'erreure dans L^∞ pour les inéquations a obstacle*, lecture notes math .606 (1977) p.27-34

[3] C.Baiocchi,Note au C.R.A.S t.278 (1978),pp.1201- 1204.

[4] M.Beggas and M.Haiour, *The uniform convergence of Schwarz method for quasi-variationnal inequalities*, GJPAM vol 11 (6), (2015),4501-4510.

[5] A. Benssoussan and J.L.Lions, *Application of Variational Inequalities in Stochastic Control*,North-Holland Publishing Company,1982.

[6] A. Benssoussan and J.L.Lions, Impluse Control and Quasi-Variational Inequalities, Gauthier Villars, Paris, 1984.

[7] S. Boulaaras, M. Haiour, *The finite element approximation of evolutionary Hamilton–Jacobi– Bellman equations with nonlinear source terms*, Indagationes Mathematicae, Volume 24, Issue 1, 2013, Pages 161-173.

[8] S. Boulaaras, M. Haiour, *The theta time scheme combined with a finite element spatial approximation of Hamilton-Jacobi-Bellman equation*, Computational Mathematics and Modeling, Volume 25 Issue 3(2014), 423-438.

[9] M.Boulbrachene,*Optimal L^∞-error estimate for varaliation inequalities with nonlinear source termms*, Appl.Math.Letters 15, (2002),1013-1017.

[10] M.Boulbrachene, M. Haiour and S.Saadi,L^∞ *estimates for a system of quasi variational inequalities*, IJMMS,(2003), 1-10.

[11] M.Boulbrachene and M.Haiour and B. Chentouf,*On a noncoircive system of quasi variational inequalities related to stochastic control problems*, Journal of inequalities in pure and applied mathematics, 3(2002),1-14.

[12] M.Boulbrachene and S.Saadi,*Maximum norm analysis of an over lapping non matching grids method for the obstacl problem*, Hindawi pub. cop (2006),1-10.

[13] A.Breton et C.Leguay,*Application du contrôle stochastiqueà la gestion des centrales thermiques et hydroliques*,colloque IRIA.Théorie de contrôle(1974).

[14] P.G.Ciarlet and Lions J. L. *Handbook of Numerical Analysis : Finite Element Methods (Part 1).* North-Holland, Amsterdam.(1991).

[15] P. Cortey-Dumont and E. Loinger, sur l'approximation d'une I.Q.V liée à des problèmes d'infiltratio en milieu poreux,Calcolo XIX(Fasc.II),125-152,(1982).

[16] Ph.Cortey-Dumont,*On finite element approximation in the* L^∞*-norm of variational inequalities*, Numerische Mathematik 47(1985),no.1,45-57.

[17] Ph.Cortey-Dumont, Sur les inéquations variationnelles à opérateur non coercif, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 19 (1985),no.2,195-212.

[18] M.Goursat et G.Maarek,Nouvelle approche de gestion du stocks,comparaison avec les méthodes classiques.Rapport Laboria n 148.

[19] M. Haiour, S. Boulaaras, *Uniform Convergence of Schwarz Method for Elliptic Quasi-Variational Inequalities Related to Impulse Control Problem*, An- Najah Univ. J. Res. (N. Sc.) 24 (2010), 71-89.

[20] M.Haiour and S.Boulaaras,*Overlapping domain decomposition method for elliptic quasi-varational inqualities related to impulse control problem with mixed boundary conditions*,Pro.I.Acad,sci(Math Sci), Vol 121,No.4,2011,481-493.

[21] M.Haiour et E.Hadidi, *Uniform convergence of Schwarz method for varational inqualities*,Applied mathematical sciences,Vol 4,2010,no.12,595-602.

[22] M.Haiour et E.Hadidi,Uniform convergence of Schwarz mrthod for non coercive variatonal inequalities simple proof ,Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications,4(2010),1423-1434.

[23] M.Haiour et E.Hadidi, *Uniform convergence of Schwarz method for varational inqualities for noncoercive variationam inequalities*, Int.J.Contemp.Math. sci Vol 4,2009,no.29,1423-1434.

[24] J.Hannouzet and P.Joly,*Convergence uniform des iteres dfinissant la solution d'une inéquation quasi-variantionnelle*,C.R.Acad.Sci.Paris,Serie A,286(1978).

[25] P.L.Lions and P.Perthame,*Une remarque sur les opérateurs nonlinéaire intervenant dand les inéquations quasi-variationnele*, Annal.Fac.Sci Toulouse 5,1983,259-263.

[26] P.L.lions,*On the Schwarz alternating method I .First international symposium on domain decomposition methods for partial diffentiel equations*,SLAM,philadelfia 1988.

[27] P.L.lions,*On the Schwarz alternating method II Stochastic interpretation and order properties,domain decomposition methods*, (Losangeles,calif,1988),SLAM,philadelfia 1989.

[28] P.L.lions,*On the Schwarz alternating method, III A Variant for Nonoverlapping Subdomains*, Proc.3rd Conference on Domain Decomposition Methods , SIAM, Philadelphia (1990) ,202-223.

[29] C.Leguay,*Application du contrôle stachastique à un problème de gestion optimale d'énergie* .Thèse docteur ingénieeur,Paris IX (1975).

[30] G.H.Meyer,*Free boudray problems with nonlinear source terms*, Numer.Math.43(1984), 463-482.

[31] H.Mechri and S.Saadi,*Overlapping nonmateching grid method for the ergodic control quasi-varational inqualities*,Amer.J.Comput.Math,3, 2013,27-31.

[32] P.A.Raviart, J.M.Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, 3^{eme} tirage 1992.

[33] M.Robin,Contrôle optimale de file d'attente,Rapport Laboria n 117.

[34] A.H.Schwarz Gesammeatte Mathematishe Abhand Lunger ,Volume 2. Springer, Berlin. First Pubished in Vierteljahrsschrift der Nturforsch. Gesellschaft in Zurich 15 (1870), 272-286.

[35] S.Saadi and A.Mehri,L^{∞}*-error estimate of Schwarz algorithm for noncoercive variational inequalities*, Appl. math. 5(2014),572-580.

[36] D.kinderlehrer,G.Stampacchia,An introduction to variational inequalities and their applications.Academic Press(1980).

[37] C.verdi.Convergence of the approximate free boundary for the multidimensional one-Stefan problem,J.Comp Mech.(1985).

[38] G.Zeng and S.Zhou, *Schwarz altgorithm of the solution of variational inequalities with nonlinear source terms*, Appl.Math.comput,1988,23-35.

[39] G.Zeng and S.Zhou, *On monotone and geometric convergence of Schwarz two-sided obstacle problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 35(1998),600-616. Hindawi pub. cop (2006),1-10 .

[40] S.Z.Zhou,An additive Schwarz algorithm for variational inequality,Proc.Domain decomposition methods in science and engineering,New York,(1997),pp.133-138.