



# Etude du comportement à la rupture d'un matériau fragile précontraint : le verre trempé

Hélène Carré

## ► To cite this version:

Hélène Carré. Etude du comportement à la rupture d'un matériau fragile précontraint : le verre trempé. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. NNT : . tel-00529410

**HAL Id: tel-00529410**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00529410>**

Submitted on 25 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DOCTORAT  
DE L'ECOLE NATIONALE  
DES PONTS ET CHAUSSEES**

**Sciences et Techniques du Bâtiment**

Thèse présentée par

**Hélène CARRE**

**Etude du comportement à la rupture  
d'un matériau fragile précontraint :  
le verre trempé**

soutenue le 11 décembre 1996

Jury :

M. Alain EHRLACHER

M. Dominique FRANCOIS

M. Roland PIQUES

M. Jacky MAZARS

M. Laurent DAUDEVILLE

M. René GY

M. Charles BALOCHE

Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur



NS 20422 (4)

X

C'est pour ainsi dire une revanche de  
l'ambition que le désir de plaire à ses amis

Marcel Proust



## REMERCIEMENTS

Cette étude a été réalisée au service des structures du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment avec l'encadrement scientifique du Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan et une collaboration de Saint-Gobain Recherche.

Je tiens à remercier les membres du jury et en particulier les rapporteurs *Dominique FRANÇOIS* et *Roland PIQUES* pour tout l'intérêt et toute l'attention qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie *Jacky MAZARS* qui m'a donné la chance de découvrir la recherche en m'accueillant dans le DEA MAISE. Il m'a fait l'honneur d'être mon directeur de thèse. Je le remercie pour son suivi régulier et particulièrement efficace de l'étude.

Je remercie également *Jacques RILLING* de m'avoir donné l'opportunité de travailler au CSTB et de m'avoir encouragée tout au long de ce travail. Je remercie *Charles BALOCHE* qui a suivi ce travail et m'a permis de réaliser cette thèse dans de très bonnes conditions.

Un travail de thèse se développe à partir d'une synthèse bibliographique. Pour cela, je remercie la documentation du CSTB, en particulier *Brigitte MOUACI* et *Marine CHARNEAU* ainsi que *Elisabeth PAGES* et *Martine LE HAIR* de l'Institut du Verre.

La collaboration avec Saint-Gobain Recherche nous a permis de profiter de connaissances remarquables sur le verre. A ce titre, je tiens à remercier *René Gy* pour sa collaboration active, pour tout l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour son remarquable esprit scientifique. Je remercie également *Jacques PRIEUR* qui m'a aidé à la découpe des petites éprouvettes en verre recuit et qui a réalisé les mesures optiques si utiles à l'étude.

Une grande partie de ce travail a résidé dans l'expérimentation. Pour cela, les conseils de *Bruno MESUREUR* furent indispensables. Je remercie toute l'équipe du laboratoire d'essais et plus particulièrement *Philippe RIVILLON* qui a une énorme responsabilité dans la réussite de ces essais.

La thèse étant destinée à être présentée et diffusée, sa présentation revêt une très grande importance. Je remercie *Florence RENIER* pour m'avoir aidée à la mise en page, à la réalisation de la couverture, et pour bien d'autres choses.

J'ai trouvé au CSTB un cadre de travail particulièrement agréable et accueillant. Je remercie toutes les personnes qui m'ont supporté pendant ces trois ans, en particulier *Brigitte DUPONT* et *Maryse SARRE*. J'adresse un merci tout particulier aux personnes avec qui j'ai pu sympathiser : *Wafa, Anne, Serge, Martine, Eliane, Marine, Marie-Thérèse, Jacques, Alain, Sylvie, Didier, Thierry, Canh, Christian, Jean-Marie, André, Bruno, Pierre, Patrick, Ghassan* ...

La conclusion de ces remerciements ira à *Laurent DAUDEVILLE*. Il fut un soutien de chaque jour. Ses conseils, son travail, son écoute furent une aide inestimable. Sans elle, les pages qui suivent eurent été bien différentes.



## RESUME

L'objectif de ce travail est l'étude du comportement à la rupture d'un matériau fragile précontraint : le verre trempé. Pour la prédiction de la résistance du verre trempé, la connaissance de l'état de précontrainte tridimensionnel est indispensable. Dans le cas de l'utilisation du verre pour les structures du bâtiment (ce qui constitue la première application de ce travail), les éléments sont chargés dans leur plan ; le niveau de précontrainte sur la tranche doit être déterminé. La simulation du traitement de trempe (chauffage et refroidissement brutal) par le code aux éléments finis MARC permet de calculer les contraintes transitoires et résiduelles. Le verre est un matériau viscoélastique dont le comportement varie avec la température.

Le verre est un matériau fragile. Sa résistance dépend directement de son état de surface, des défauts présents dans l'élément. Une analyse statistique permet de relier la probabilité de rupture au niveau de la contrainte appliquée, de prendre en compte l'effet de surface et l'effet de la distribution des contraintes. Des essais de flexion 4 points sur de petits éléments en verre recuit servent à déterminer les caractéristiques de la loi statistique utilisée (loi de Weibull). L'effet de la vitesse de chargement sur la résistance est mis en évidence et pris en compte dans la modélisation. Il est dû à la fissuration sous-critique des défauts préexistants pendant le chargement en raison de la réaction chimique entre le verre et la vapeur d'eau présente dans l'environnement.

Des essais de flexion 4 points sur de grandes poutres en verre recuit permettent de valider la loi statistique pour prédire l'effet de volume dans le verre recuit. Grâce aux résultats des simulations de la trempe et à la connaissance des caractéristiques statistiques de rupture du verre recuit, la prédiction de la résistance de grands éléments en verre trempé est possible. Cette prédiction est validée par des essais de flexion 4 points sur de grandes poutres en verre trempé.

Des essais similaires de longue durée sont programmés pour étudier l'évolution de la résistance du verre recuit et trempé dans le temps.

### Mots clefs :

- verre silico-sodo-calcique
- viscoélasticité
- trempe thermique
- méthode des éléments finis
- rupture
- probabilité de rupture
- effet d'échelle
- fissuration sous-critique
- essais de flexion
- poutre en verre

## ABSTRACT

The aim of this work is to study the fracture behavior of a prestressed material, the tempered glass, and predict its load-carrying capacity. The knowledge of tridimensional stress state is indispensable. In the case of glass building structures, elements are loaded in their plane. The edge prestress level must be determined. Simulation of tempering with the finite elements code MARC allows the calculation of transient and residual stresses. Glass is a viscoelastic material whose behavior varies with temperature.

Glass is brittle. Its resistance depends on its surface state, on flaws of the structure. A statistical analysis allows a link between the failure probability and the applied stress, to take into account both the scale effect and the stress distribution. Four-point bending experimentations with annealed glass small specimens give statistical characteristics corresponding to the Weibull's theory. The loading rate effect is shown and taken into account in the modeling. It is due to the subcritical crack growth of preexisting flaws during loading because of chemical reaction between glass and environmental water vapor.

Four-point bending tests on large annealed glass beams validate the statistical relation for the prediction of volume effect in glass. With computational and experimental results (statistical characteristics of glass failure), the prediction of large tempered glass beams strengths is possible. This prediction is consistent with results of experiments on large annealed and tempered glass beams.

Long-term four-point bending tests on annealed and tempered glass beams are scheduled to study the evolution of annealed and tempered glass resistance under constant loading.

### Key words :

- soda-lime silicate glass
- viscoelasticity
- thermal tempering
- finite element method
- failure
- failure probability
- scale effect
- subcritical crack growth
- bending tests
- glass beam

# SOMMAIRE

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| LISTE DES FIGURES.....                | 13 |
| LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS ..... | 17 |

|                           |    |
|---------------------------|----|
| <b>INTRODUCTION</b> ..... | 23 |
|---------------------------|----|

## CHAPITRE A

### BIBLIOGRAPHIE : COMPORTEMENT ET RUPTURE DU VERRE

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| A.I. COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DU VERRE.....                | 31 |
| A.I.1. Introduction .....                                       | 31 |
| A.I.2. Le verre à température ambiante .....                    | 31 |
| A.I.3. Comportement thermo-mécanique à haute température.....   | 31 |
| A.I.3.a. Théorie du refroidissement instantané.....             | 31 |
| A.I.3.b. Théorie viscoélastique .....                           | 32 |
| A.I.3.c. Théorie structurelle.....                              | 34 |
| A.II. RUPTURE DU VERRE.....                                     | 34 |
| A.II.1. Rupture d'un matériau fragile.....                      | 34 |
| A.II.1.a. Introduction .....                                    | 34 |
| A.II.1.b. Résistance théorique .....                            | 35 |
| A.II.1.c. Résistance d'un solide fragile avec défaut.....       | 35 |
| A.II.1.d. Défauts du verre .....                                | 36 |
| A.II.2. Mécanique de la rupture.....                            | 37 |
| A.II.2.a. Introduction .....                                    | 37 |
| A.II.2.b. Approche de Griffith.....                             | 38 |
| A.II.2.c. Approche d'Irwin .....                                | 38 |
| A.II.2.d. Critères de propagation .....                         | 39 |
| A.II.3. Observation de la rupture du verre.....                 | 40 |
| A.II.3.a. Introduction .....                                    | 40 |
| A.II.3.b. Faciès de rupture .....                               | 40 |
| A.II.3.c. Relation rayon du miroir/contrainte à la rupture..... | 42 |
| A.II.3.d. Rupture du verre trempé.....                          | 43 |
| A.II.4. Fissuration sous-critique .....                         | 45 |
| A.II.4.a. Introduction .....                                    | 45 |
| A.II.4.b. Action de l'eau en fond de fissure .....              | 45 |
| A.II.4.c. Courbe de vitesse de fissuration.....                 | 47 |
| A.II.4.d. Loi de "fatigue statique".....                        | 48 |
| Résumé du chapitre A.....                                       | 49 |

## CHAPITRE B

### SIMULATION DE LA TREMPE DU VERRE

|            |                                                                                      |    |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| B.I.       | INTRODUCTION.....                                                                    | 53 |
| B.II.      | MODELISATION DU COMPORTEMENT DU VERRE POUR LA SIMULATION DU PROCESSUS DE TREMPE..... | 54 |
| B.II.1.    | Comportement mécanique.....                                                          | 54 |
| B.II.1.a.  | Relation contrainte/déformation.....                                                 | 54 |
| B.II.1.b.  | Modèle de Maxwell généralisé.....                                                    | 56 |
| B.II.2.    | Comportement thermo-mécanique du verre stabilisé.....                                | 57 |
| B.II.3.    | Relaxation structurelle.....                                                         | 58 |
| B.II.4.    | Introduction de la température fictive.....                                          | 61 |
| B.III.     | MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS.....                                                 | 62 |
| B.III.1.   | Conditions limites d'échange thermique.....                                          | 62 |
| B.III.2.   | Maillage et conditions limites en déplacement.....                                   | 63 |
| B.III.3.   | Algorithme de résolution.....                                                        | 64 |
| B.III.4.   | Caractéristiques du verre.....                                                       | 65 |
| B.III.4.a. | Caractéristiques mécaniques.....                                                     | 66 |
| B.III.4.b. | Caractéristiques thermiques.....                                                     | 67 |
| B.IV.      | SIMULATIONS ET COMPARAISONS.....                                                     | 68 |
| B.IV.1.    | Effet intérieur.....                                                                 | 69 |
| B.IV.1.a.  | Résultats.....                                                                       | 69 |
| B.IV.1.b.  | Comparaison avec la littérature.....                                                 | 71 |
| B.IV.2.    | Etude de sensibilité.....                                                            | 73 |
| B.IV.3.    | Effet de bord.....                                                                   | 77 |
| B.IV.3.a.  | Evolution de la température au cours du temps.....                                   | 77 |
| B.IV.3.b.  | Contraintes transitoires.....                                                        | 78 |
| B.IV.3.c.  | Contraintes résiduelles.....                                                         | 78 |
| B.IV.3.d.  | Influence du chanfrein.....                                                          | 79 |
| B.IV.4.    | Plaque épaisse trempée.....                                                          | 80 |
| B.IV.4.a.  | Mesure des contraintes résiduelles de trempe.....                                    | 80 |
| B.IV.4.b.  | Mesures optiques sur nos éléments.....                                               | 83 |
| B.IV.4.c.  | Détermination des paramètres de trempe.....                                          | 84 |
| B.IV.4.d.  | Validation de notre simulation.....                                                  | 85 |
| B.IV.4.e.  | Contraintes résiduelles.....                                                         | 85 |
| B.V.       | CONCLUSION.....                                                                      | 86 |
|            | Résumé du chapitre B.....                                                            | 87 |

## CHAPITRE C

### DETERMINATION DES PARAMETRES DE RUPTURE DU VERRE RECUIT

|            |                                                                         |     |
|------------|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| C.I.       | INTRODUCTION .....                                                      | 91  |
| C.II.      | DESCRIPTION DES ESSAIS.....                                             | 91  |
| C.II.1.    | Généralités.....                                                        | 91  |
| C.II.1.a.  | Les échantillons .....                                                  | 91  |
| C.II.1.b.  | Le montage.....                                                         | 92  |
| C.II.2.    | Mesures .....                                                           | 94  |
| C.II.3.    | Vitesse de chargement.....                                              | 94  |
| C.III.     | ANALYSE STATISTIQUE.....                                                | 94  |
| C.III.1.   | Théorie de Weibull .....                                                | 94  |
| C.III.1.a. | Formulation fonctionnelle .....                                         | 95  |
| C.III.1.b. | A partir de la mécanique de la rupture .....                            | 96  |
| C.III.2.   | Méthodes de calcul des paramètres de Weibull.....                       | 97  |
| C.III.2.a. | Méthode de régression linéaire .....                                    | 97  |
| C.III.2.b. | Méthode des moments .....                                               | 98  |
| C.III.2.c. | Méthode de la vraisemblance maximale.....                               | 98  |
| C.III.3.   | Fiabilité des estimateurs.....                                          | 98  |
| C.III.3.a. | Estimation de $m$ .....                                                 | 99  |
| C.III.3.b. | Estimation de $\sigma_0$ .....                                          | 100 |
| C.IV.      | ESSAIS DE CARACTERISATION ET D'IDENTIFICATION.....                      | 100 |
| C.IV.1.    | Courbe type obtenue.....                                                | 100 |
| C.IV.2.    | Paramètres statistiques.....                                            | 101 |
| C.IV.2.a.  | Domaine d'influence des défauts .....                                   | 101 |
| C.IV.2.b.  | Résultats de la première série.....                                     | 103 |
| C.IV.2.c.  | Résultats de la deuxième série .....                                    | 104 |
| C.IV.3.    | Paramètres fractographiques .....                                       | 106 |
| C.V.       | EFFET DE LA VITESSE DE CHARGEMENT .....                                 | 107 |
| C.V.1.     | Mise en évidence .....                                                  | 107 |
| C.V.2.     | Prédiction .....                                                        | 108 |
| C.V.2.a.   | Association des modèles de Weibull et de fissuration sous-critique..... | 108 |
| C.V.2.b.   | Loi de Weibull + loi d'Evans.....                                       | 109 |
| C.V.2.c.   | Loi de Weibull + loi de fissuration exponentielle .....                 | 111 |
| C.V.2.d.   | Evolution de la distribution des défauts au cours du chargement.....    | 113 |
| C.V.3.     | Validation .....                                                        | 120 |
| C.V.3.a.   | Prédiction avec la loi d'Evans .....                                    | 120 |
| C.V.3.b.   | Prédiction avec la loi exponentielle .....                              | 122 |
| C.VI.      | CONCLUSION.....                                                         | 123 |
|            | Résumé du chapitre C .....                                              | 124 |

## CHAPITRE D

### ESSAIS DE RUPTURE SUR GRANDES POUTRES

|           |                                                             |            |
|-----------|-------------------------------------------------------------|------------|
| D.I.      | INTRODUCTION.....                                           | 127        |
| D.II.     | DESCRIPTION DES ESSAIS .....                                | 127        |
| D.II.1.   | Généralités.....                                            | 127        |
| D.II.1.a. | Les échantillons.....                                       | 127        |
| D.II.1.b. | Le montage.....                                             | 127        |
| D.II.2.   | Mesures .....                                               | 130        |
| D.II.3.   | Vitesse de chargement.....                                  | 131        |
| D.III.    | ESSAIS SUR LES POUTRES EN VERRE RECUIT.....                 | 131        |
| D.III.1.  | Mesure du gauchissement .....                               | 131        |
| D.III.2.  | Courbes contrainte/déformation.....                         | 132        |
| D.III.3.  | Résultats .....                                             | 134        |
| D.III.4.  | Analyse du miroir de rupture .....                          | 135        |
| D.IV.     | PREDICTION DE LA RESISTANCE PAR LA THEORIE DE WEIBULL ..... | 135        |
| D.V.      | ESSAIS SUR LES GRANDES POUTRES EN VERRE TREMPE .....        | 136        |
| D.V.1.    | Mesure du gauchissement .....                               | 136        |
| D.V.2.    | Courbes contrainte/déformation.....                         | 137        |
| D.V.3.    | Résultats.....                                              | 139        |
| D.V.4.    | Valeur de la précontrainte.....                             | 139        |
| D.V.5.    | Analyse du miroir de rupture .....                          | 140        |
| D.VI.     | PREDICTION DE LA RESISTANCE DU VERRE TREMPE.....            | 141        |
| D.VII.    | CONCLUSION .....                                            | 142        |
|           | Résumé du chapitre D .....                                  | 144        |
|           | <b>CONCLUSION .....</b>                                     | <b>147</b> |

---

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....                                                    | 151 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES COMPLEMENTAIRES .....                                    | 157 |
| ANNEXE 1 : Détermination de l'énergie d'activation .....                             | 163 |
| ANNEXE 2 : Effet du rapport $h_1 / h_2$ sur la forme de la contrainte de bord .....  | 165 |
| ANNEXE 3 : Traitement complémentaire des résultats des essais d'identification ..... | 167 |
| ANNEXE 4 : Essais de longue durée .....                                              | 171 |



# LISTE DES FIGURES

## INTRODUCTION

|                   |                                                                                            |    |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figure 1 :</b> | Photo de la verrière du laboratoire de Chalcographie .....                                 | 23 |
| <b>Figure 2 :</b> | Photo de l'essai à l'échelle 1 réalisé au CSTB.....                                        | 24 |
| <b>Figure 3 :</b> | Photos de la verrière du hall d'un hotel (avenue Georges V).....                           | 24 |
| <b>Figure 4 :</b> | Photo de l'essai à l'échelle 1 réalisé au CSTB.....                                        | 25 |
| <b>Figure 5 :</b> | Photos des poteaux en verre du hall du centre administratif de Saint Germain en Laye ..... | 25 |
| <b>Figure 6 :</b> | Photo de l'essai à l'échelle 1 réalisé au CSTB.....                                        | 26 |
| <b>Figure 7 :</b> | Vue de dessous de la passerelle en verre de Rotterdam .....                                | 26 |
| <b>Figure 8 :</b> | Vue de côté de la passerelle en verre de Rotterdam.....                                    | 27 |

## CHAPITRE A

|                      |                                                                                              |    |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figure A.1 :</b>  | Etat du verre correspondant à la théorie de Bartenev .....                                   | 32 |
| <b>Figure A.2 :</b>  | Relaxation de la contrainte en fonction de la température de stabilisation et du temps ..... | 32 |
| <b>Figure A.3 :</b>  | Relaxation de la contrainte d'un verre stabilisé en fonction du "temps réduit" .....         | 33 |
| <b>Figure A.4 :</b>  | Elément en traction avec défaut.....                                                         | 35 |
| <b>Figure A.5 :</b>  | Taille et nature des défauts dans le verre .....                                             | 36 |
| <b>Figure A.6 :</b>  | Repérage du champ des contraintes au voisinage du front de fissure.....                      | 39 |
| <b>Figure A.7 :</b>  | Vue générale d'un élément cassé en verre recuit.....                                         | 40 |
| <b>Figure A.8 :</b>  | Dessins de faciès de rupture pour différentes causes de casse.....                           | 41 |
| <b>Figure A.9 :</b>  | Différentes zones du faciès de rupture local.....                                            | 41 |
| <b>Figure A.10 :</b> | Faciès de rupture local pour un élément rectangulaire .....                                  | 41 |
| <b>Figure A.11 :</b> | Faciès de rupture local pour un élément cylindrique .....                                    | 42 |
| <b>Figure A.12 :</b> | Dessin du faciès local de rupture et dimensions caractéristiques.....                        | 42 |
| <b>Figure A.13 :</b> | Variation du facteur de forme en fonction de l'angle .....                                   | 43 |
| <b>Figure A.14 :</b> | Vues générales de la rupture du verre trempé.....                                            | 44 |
| <b>Figure A.15 :</b> | Photos des faciès locaux de rupture du verre trempé.....                                     | 44 |
| <b>Figure A.16 :</b> | Schémas des étapes de la réaction entre le verre et l'eau.....                               | 46 |
| <b>Figure A.17 :</b> | Schéma de propagation de fissure .....                                                       | 46 |
| <b>Figure A.18 :</b> | Courbes de vitesse de fissuration en fonction de $K_I$ pour différents environnements .....  | 47 |

## CHAPITRE B

|                     |                                                                                         |    |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figure B.1 :</b> | Dessin du dispositif de trempé .....                                                    | 53 |
| <b>Figure B.2 :</b> | Représentation du modèle généralisé de Maxwell pour la partie déviatorique .....        | 56 |
| <b>Figure B.3 :</b> | Représentation du modèle de Maxwell généralisé pour la partie volumique.....            | 57 |
| <b>Figure B.4 :</b> | Variations de la fonction de relaxation avec le temps pour différentes températures ... | 58 |

|                      |                                                                                                                                               |    |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figure B.5 :</b>  | Variations du volume spécifique avec la température pour deux vitesses de refroidissement .....                                               | 59 |
| <b>Figure B.6 :</b>  | Variations de la température fictive avec la température.....                                                                                 | 60 |
| <b>Figure B.7 :</b>  | Influence de la prise en compte de l'état de la structure sur les contraintes résiduelles.....                                                | 61 |
| <b>Figure B.8 :</b>  | Variations du coefficient de dilatation thermique équivalent avec la température                                                              | 62 |
| <b>Figure B.9 :</b>  | Schéma des conditions limites thermiques pour la trempe d'une plaque.....                                                                     | 62 |
| <b>Figure B.10 :</b> | Vue du maillage dans le plan YZ.....                                                                                                          | 63 |
| <b>Figure B.11 :</b> | Vue du maillage dans le plan XY.....                                                                                                          | 63 |
| <b>Figure B.12 :</b> | Vue des conditions limites de déplacements.....                                                                                               | 64 |
| <b>Figure B.13 :</b> | Organigramme de la simulation de trempe.....                                                                                                  | 65 |
| <b>Figure B.14 :</b> | Variations de la conductivité thermique avec la température .....                                                                             | 68 |
| <b>Figure B.15 :</b> | Variations de la chaleur spécifique avec la température.....                                                                                  | 68 |
| <b>Figure B.16 :</b> | Variations de la température au cours du temps .....                                                                                          | 69 |
| <b>Figure B.17 :</b> | Variations des contraintes au cours du temps.....                                                                                             | 70 |
| <b>Figure B.18 :</b> | Variations des contraintes transitoires de traction avec les paramètres de trempe .....                                                       | 70 |
| <b>Figure B.19 :</b> | Contrainte résiduelle dans l'épaisseur de la plaque .....                                                                                     | 71 |
| <b>Figure B.20 :</b> | Variation de la contrainte dans l'épaisseur .....                                                                                             | 72 |
| <b>Figure B.21 :</b> | Variation de la contrainte résiduelle de traction avec les paramètres de trempe..                                                             | 73 |
| <b>Figure B.22 :</b> | Contrainte résiduelle dans l'épaisseur pour différentes valeurs de $T_{ref}$ .....                                                            | 75 |
| <b>Figure B.23 :</b> | Variations des contraintes de trempe dans le temps pour différentes valeurs de $T_{ref}$ ....                                                 | 76 |
| <b>Figure B.24 :</b> | Variations de la température en fonction du temps au milieu et au bord de la plaque .....                                                     | 77 |
| <b>Figure B.25 :</b> | Variations de la contrainte $\sigma_{zz}$ en fonction du temps au milieu et au bord de la plaque .....                                        | 78 |
| <b>Figure B.26 :</b> | Variation de la contrainte $\sigma_{zz}$ dans l'épaisseur au milieu et au bord de la plaque.                                                  | 79 |
| <b>Figure B.27 :</b> | Contrainte $\sigma_{zz}$ dans l'épaisseur au milieu et au bord de la plaque pour les calculs avec et sans chanfrein.....                      | 79 |
| <b>Figure B.28 :</b> | Variation de la contrainte $\sigma_{zz}$ en fonction du temps pour les calculs avec et sans chanfrein au milieu et au bord de la plaque ..... | 80 |
| <b>Figure B.29 :</b> | Schéma de propagation et d'émergence de l'"onde réfractée" .....                                                                              | 81 |
| <b>Figure B.30 :</b> | Schéma de principe de l'épibiascope.....                                                                                                      | 82 |
| <b>Figure B.31 :</b> | Photo de l'épibiascope.....                                                                                                                   | 82 |
| <b>Figure B.32 :</b> | Directions principales dans la plaque.....                                                                                                    | 82 |
| <b>Figure B.33 :</b> | Photo du "contrôleur de bord" .....                                                                                                           | 82 |
| <b>Figure B.34 :</b> | Positions des mesures réalisées avec l'épibiascope.....                                                                                       | 83 |
| <b>Figure B.35 :</b> | Position des mesures réalisées avec le "contrôleur de bord".....                                                                              | 83 |
| <b>Figure B.36 :</b> | Variations de l'intégrale de la différence des contraintes principales en fonction de la distance au bord .....                               | 84 |
| <b>Figure B.37 :</b> | Variations de l'intégrale de la différence des contraintes principales en fonction de la distance au bord mesurées et calculées.....          | 85 |
| <b>Figure B.38 :</b> | Courbe de $\sigma_{zz}$ au milieu et au bord de la plaque dans l'épaisseur pour une plaque épaisse .....                                      | 86 |

## CHAPITRE C

|                      |                                                                                                                                        |     |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figure C.1 :</b>  | Caractéristiques géométriques des éléments testés.....                                                                                 | 92  |
| <b>Figure C.2 :</b>  | Photo de la surface de la première série.....                                                                                          | 92  |
| <b>Figure C.3 :</b>  | Photo de la surface de la deuxième série.....                                                                                          | 92  |
| <b>Figure C.4 :</b>  | Schéma des essais de flexion 4 points.....                                                                                             | 92  |
| <b>Figure C.5. :</b> | Variations de la contrainte longitudinale sur la fibre inférieure.....                                                                 | 93  |
| <b>Figure C.6. :</b> | Plaquette à aiguilles.....                                                                                                             | 93  |
| <b>Figure C.7 :</b>  | Schéma du montage.....                                                                                                                 | 93  |
| <b>Figure C.8 :</b>  | Photo du montage.....                                                                                                                  | 93  |
| <b>Figure C.9 :</b>  | Dispositif de mesure de la flèche.....                                                                                                 | 94  |
| <b>Figure C.10.:</b> | Elément fissuré en traction.....                                                                                                       | 96  |
| <b>Figure C.11 :</b> | Variations de l'estimateur normalisé en fonction de l'inverse de la taille de l'échantillon.....                                       | 99  |
| <b>Figure C.12:</b>  | Variations du coefficient de variation en fonction de l'inverse de la racine carrée de la taille de l'échantillon.....                 | 100 |
| <b>Figure C.13 :</b> | Courbe contrainte / déformation obtenue.....                                                                                           | 101 |
| <b>Figure C.14 :</b> | Dessin de la surface oncernée dans la loi de Weibull.....                                                                              | 102 |
| <b>Figure C.15 :</b> | Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture (essais à 0,5 MPa/s)                                                    | 103 |
| <b>Figure C.16 :</b> | Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture (essais à 0,05 MPa/s).....                                              | 104 |
| <b>Figure C.17 :</b> | Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture (essais de la deuxième série à 5 MPa/s).....                            | 105 |
| <b>Figure C.18 :</b> | Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture(essais de la deuxième série à 0,5 MPa/s).....                           | 105 |
| <b>Figure C.19 :</b> | Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture(essais de la deuxième série à 0,05 MPa/s).....                          | 106 |
| <b>Figure C.20 :</b> | Photo du miroir de rupture.....                                                                                                        | 107 |
| <b>Figure C.21 :</b> | Superposition des courbes $P/\sigma_{rupture}$ pour les deux vitesses de la première série.                                            | 107 |
| <b>Figure C.22 :</b> | Evolution du défaut par rapport à sa taille initiale à différents temps.....                                                           | 114 |
| <b>Figure C.23 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts avec le temps ( $\sigma_{appliquée} = 15 \text{ MPa}$ )                            | 115 |
| <b>Figure C.24 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts avec le temps ( $\sigma_{appliquée} = 10 \text{ MPa}$ )                            | 115 |
| <b>Figure C.25 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\sigma_a = 15 \text{ Mpa}$ , $K_{Ith} = 0,15 \text{ MPa.m}^{1/2}$ ).            | 116 |
| <b>Figure C.26 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\sigma_a = 15 \text{ Mpa}$ , $K_{Ith} = 0,20 \text{ MPa.m}^{1/2}$ ).            | 116 |
| <b>Figure C.27 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 15 \text{ Mpa/s}$ ).....                                         | 117 |
| <b>Figure C.28 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 0,5 \text{ Mpa/s}$ ).....                                        | 117 |
| <b>Figure C.29 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 10 \text{ Mpa/s}$ , $K_{Ith} = 0,15 \text{ MPa.m}^{1/2}$ )       | 118 |
| <b>Figure C.30 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 0,5 \text{ Mpa/s}$ , $K_{Ith} = 0,15 \text{ MPa.m}^{1/2}$ )..... | 119 |
| <b>Figure C.31 :</b> | Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 10 \text{ Mpa/s}$ , $K_{Ith} = 0,20 \text{ MPa.m}^{1/2}$ ).....  | 119 |

|                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figure C.32 :</b> Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 0,5 \text{ Mpa/s}$ , $K_{th} = 0,20 \text{ MPa.m}^{1/2}$ )..... | 120 |
| <b>Figure C.33 :</b> Prédiction de la loi de Weibull pour la première série d'essais (avec la loi d'Evans)..                                               | 121 |
| <b>Figure C.34 :</b> Prédiction de la loi de Weibull pour la deuxième série d'essais (avec la loi d'Evans)..                                               | 121 |
| <b>Figure C.35 :</b> Prédiction de la loi de Weibull pour la première série d'essais (avec la loi exponentielle).....                                      | 122 |
| <b>Figure C.36 :</b> Prédiction de la loi de Weibull pour la deuxième série d'essai (avec la loi exponentielle).....                                       | 123 |

## CHAPITRE D

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figure D.1 :</b> Caractéristiques géométriques des grandes poutres .....                                                      | 127 |
| <b>Figure D.2 :</b> Demi-perspective du montage d'essai.....                                                                     | 128 |
| <b>Figure D.3 :</b> Vue générale du montage .....                                                                                | 128 |
| <b>Figure D.4 :</b> Photo du montage.....                                                                                        | 129 |
| <b>Figure D.5 :</b> Photo du montage.....                                                                                        | 129 |
| <b>Figure D.6 :</b> Dessin du dispositif de mesure de la flèche.....                                                             | 130 |
| <b>Figure D.7 :</b> Position et numérotation des capteurs de déplacement horizontaux.....                                        | 130 |
| <b>Figure D.8 :</b> Position et numérotation des jauges .....                                                                    | 131 |
| <b>Figure D.9 :</b> Courbes de gauchissement .....                                                                               | 131 |
| <b>Figure D.10 :</b> Vue en perspective de la déformée de la poutre 1 .....                                                      | 132 |
| <b>Figure D.11 :</b> Vue en perspective de la déformée de la poutre 2 .....                                                      | 132 |
| <b>Figure D.12 :</b> Vue en perspective de la déformée de la poutre 3 .....                                                      | 132 |
| <b>Figure D.13 :</b> Courbe contrainte/déformation à partir de la force et de la flèche mesurées .....                           | 133 |
| <b>Figure D.14 :</b> Courbe contrainte/déformation à partir de la force et des déformations mesurées .....                       | 133 |
| <b>Figure D.15 :</b> Superposition des courbes contrainte/déformation obtenues par mesure de la flèche et des déformations ..... | 134 |
| <b>Figure D.16 :</b> Vue en perspective de la déformée de la poutre trempée 1 .....                                              | 136 |
| <b>Figure D.17 :</b> Vue en perspective de la déformée de la poutre trempée 2.....                                               | 137 |
| <b>Figure D.18 :</b> Courbe contrainte-déformation à partir de la force et de la flèche maximale .....                           | 137 |
| <b>Figure D.19 :</b> Courbe contrainte-déformation à partir de la force et des déformations mesurées .....                       | 138 |
| <b>Figure D.20 :</b> Superposition des courbes contrainte-déformation .....                                                      | 138 |
| <b>Figure D.21 :</b> Variation de la contrainte $\sigma_{zz}$ au milieu et au bord de la plaque dans l'épaisseur ..              | 139 |
| <b>Figure D.22 :</b> Image du miroir de rupture de la première poutre trempée.....                                               | 140 |

# LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS

| Désignation | Définition                                                             | Unité                          |
|-------------|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| A           | paramètre de la loi de vitesse de fissuration puissance                | $m/Pa^n \cdot s \cdot m^{n/2}$ |
| $\bar{A}$   | valeur moyenne de la grandeur A                                        |                                |
| a           | longueur de fissure                                                    | m                              |
| $a_0$       | longueur du défaut initial                                             | m                              |
| $a_c$       | longueur du défaut critique                                            | m                              |
| b           | largeur de fissure                                                     | m                              |
| B           | paramètre de la loi de fissuration exponentielle                       | $m^{1/2}/Pa$                   |
| c           | paramètre de la distribution de défauts                                | sans dimension                 |
| $C_i$       | poids d'une série de Prony                                             | sans dimension                 |
| $C_p$       | chaleur spécifique                                                     | J/kg.K                         |
| $C_{var}$   | coefficient de variation                                               | sans dimension                 |
| $D_c$       | ensemble des défauts critiques                                         |                                |
| $D_{nc}$    | ensemble des défauts non-critiques                                     |                                |
| e           | émissivité                                                             | sans dimension                 |
| E           | module d'Young                                                         | Pa                             |
| f ( )       | fonction                                                               |                                |
| F           | fonction de risque spécifique                                          |                                |
| G           | taux de restitution d'énergie                                          | Pa.m                           |
| G (t)       | module de relaxation en cisaillement                                   | Pa                             |
| $G_g$       | module de relaxation en cisaillement instantané                        | Pa                             |
| $G_e$       | module de relaxation en cisaillement différé                           | Pa                             |
| h           | coefficient de transfert thermique                                     | $W/m^2.K$                      |
| $h_{eq}$    | coefficient de transfert thermique équivalent                          | $W/m^2.K$                      |
| H           | énergie d'activation                                                   | K                              |
| i           | indice                                                                 |                                |
| j           | indice                                                                 |                                |
| J (t)       | fonction de fluage                                                     | 1/Pa                           |
| k           | coefficient                                                            | sans dimension                 |
| K (t)       | module de relaxation en pression hydrostatique                         | Pa                             |
| $K_g$       | module de relaxation en pression hydrostatique instantané              | Pa                             |
| $K_e$       | module de relaxation en pression hydrostatique différé                 | Pa                             |
| $K_\alpha$  | facteurs d'intensité des contraintes (avec $\alpha = I, II$ et $III$ ) | $Pa \cdot m^{1/2}$             |
| $K_{Ic}$    | ténacité                                                               | $Pa \cdot m^{1/2}$             |
| L           | longueur                                                               | m                              |
| $L_v$       | fonction de vraisemblance                                              |                                |
| m           | module de Weibull                                                      | sans dimension                 |

---

|                  |                                                             |                         |
|------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------|
| $m^*$            | module de Weibull intrinsèque                               | sans dimension          |
| $M_i$            | constantes de miroir                                        | $\text{Pa.m}^{1/2}$     |
| $M_v$            | fonction réponse pour le volume spécifique                  | sans dimension          |
| $n$              | paramètre de la loi de vitesse de fissuration puissance     | sans dimension          |
| $\underline{n}$  | normale à la direction du défaut                            |                         |
| $N$              | nombre de fissures                                          | sans dimension          |
| $p$              | paramètre de la distribution des défauts                    | sans dimension          |
| $P_f$            | probabilité de rupture                                      | sans dimension          |
| $P_s$            | probabilité de survie                                       | sans dimension          |
| $q$              | flux de chaleur                                             | $\text{W/m}^2$          |
| $Q$              | paramètre de chargement                                     | sans dimension          |
| $r$              | rayon                                                       | $\text{m}$              |
| $R$              | constante des gaz parfaits                                  | sans dimension          |
| $R(t)$           | module de relaxation                                        | $\text{Pa}$             |
| $s_A$            | écart type de la grandeur A                                 | unité de A              |
| $s^2$            | variance                                                    | $(\text{unité de A})^2$ |
| $S$              | surface                                                     | $\text{m}^2$            |
| $S_0$            | surface unitaire                                            | $\text{m}^2$            |
| $t$              | temps                                                       | $\text{s}$              |
| $t_0$            | coefficient                                                 | sans dimension          |
| $t_f$            | durée de vie                                                | $\text{s}$              |
| $t_{fs}$         | durée de vie sous chargement constant                       | $\text{s}$              |
| $t_{fd}$         | durée de vie sous chargement à vitesse constante            | $\text{s}$              |
| $T$              | température                                                 | $\text{K}$              |
| $T_0$            | température initiale                                        | $\text{K}$              |
| $T_{\text{ext}}$ | température extérieure                                      | $\text{K}$              |
| $T_f$            | température fictive                                         | $\text{K}$              |
| $T_g$            | température de transition vitreuse                          | $\text{K}$              |
| $T_S$            | température de surface                                      | $\text{K}$              |
| $T_{\text{ref}}$ | température de référence                                    | $\text{K}$              |
| $U$              | énergie totale                                              | $\text{W}$              |
| $U_E$            | énergie élastique                                           | $\text{W}$              |
| $U_S$            | énergie de création de surface                              | $\text{W}$              |
| $v$              | vitesse de fissuration                                      | $\text{m/s}$            |
| $v_0$            | paramètre de la loi de vitesse de fissuration exponentielle | $\text{m/s}$            |
| $V$              | volume                                                      | $\text{m}^3$            |
| $V_0$            | volume unitaire                                             | $\text{m}^3$            |
| $w$              | paramètre de forme                                          | sans dimension          |
| $w_{ij}$         | poids d'une série de Prony                                  | sans dimension          |
| $W$              | travail des forces extérieures                              | $\text{W}$              |
| $x$              | coefficient                                                 | sans dimension          |
| $Y$              | facteur de forme                                            | sans dimension          |

---

---

|                  |                                                                                                      |                                  |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $\beta$          | angle                                                                                                | °                                |
| $\beta(T)$       | coefficient de dilatation thermique fonction de la température                                       | 1/K                              |
| $\beta_g$        | coefficient de dilatation thermique du verre solide                                                  | 1/K                              |
| $\beta_l$        | coefficient de dilatation thermique du verre liquide                                                 | 1/K                              |
| $\gamma$         | énergie de création d'une unité de surface                                                           | J/m <sup>2</sup>                 |
| $\Delta t$       | incrément de temps                                                                                   | s                                |
| $\varepsilon$    | déformation                                                                                          | sans dimension                   |
| $\zeta ( )$      | fonction de classe C <sup>1</sup>                                                                    |                                  |
| $\eta$           | viscosité                                                                                            | Pa.s                             |
| $\eta ( )$       | fonction de classe C <sup>1</sup>                                                                    |                                  |
| $\theta$         | angle                                                                                                | °                                |
| $\theta_\lambda$ | coefficients caractéristiques de la viscosité du matériau pour le modèle rhéologique de Kelvin-Voigt | s                                |
| $\theta_\mu$     | coefficients caractéristiques de la viscosité du matériau pour le modèle rhéologique de Maxwell      | s                                |
| $\lambda$        | coefficient de Lamé                                                                                  | Pa                               |
| $\lambda$        | conductivité thermique                                                                               | W/m.K                            |
| $\lambda_i$      | temps de relaxation                                                                                  | s                                |
| $\mu$            | coefficient de Lamé                                                                                  | Pa                               |
| $\nu$            | coefficient de Poisson                                                                               | sans dimension                   |
| $\xi$            | temps fictif                                                                                         | s                                |
| $\xi ( )$        | fonction de classe C <sup>1</sup>                                                                    |                                  |
| $\sigma$         | contrainte                                                                                           | Pa                               |
| $\dot{\sigma}$   | vitesse de contrainte                                                                                | Pa/s                             |
| $\sigma_0$       | paramètre de la loi de Weibull                                                                       | Pa                               |
| $\sigma_0^*$     | paramètre de la loi de Weibull intrinsèque                                                           | Pa                               |
| $\sigma_i$       | résistance en milieu inerte                                                                          | Pa                               |
| $\sigma_S$       | contrainte de chargement constant                                                                    | Pa                               |
| $\sigma_{SB}$    | constante de Stefan-Boltzmann                                                                        | W/m <sup>2</sup> .K <sup>4</sup> |
| $\sigma_u$       | paramètre de la loi de Weibull                                                                       | Pa                               |
| $\phi$           | distribution fictive de température                                                                  |                                  |
| $\Phi$           | fonction changement                                                                                  |                                  |
| $\varphi_i$      | série de Prony                                                                                       |                                  |

---



# INTRODUCTION



## INTRODUCTION

L'objectif de cette étude est la compréhension du comportement à la rupture d'un matériau fragile précontraint. Nous cherchons à prédire la résistance à long terme du verre trempé.

La première application de ce travail est la conception des structures en verre du bâtiment. Des architectes audacieux tentent de faire entrer le verre dans le cercle très fermé des matériaux de structure : pierre, bois, acier et béton. Les principales qualités demandées à ces matériaux sont la résistance, la durabilité et la robustesse. Le verre est très résistant, très pérenne, mais sa fragilité fait peur.

Faute de connaissances approfondies du comportement à la rupture du verre, il n'existe pas en France de code de calcul adapté aux structures en verre. Les coefficients partiels de sécurité utilisés sont plutôt des coefficients d'ignorance. Par ailleurs, les bureaux de contrôle exigent la réalisation d'essais en vraie grandeur pour autoriser la construction de telles structures.

Malgré la complexité de la procédure, son coût très élevé, quelques structures ont déjà été réalisées en France.

Voici quelques exemples.

Une verrière (75 m<sup>2</sup>) soutenue par dix poutres en verre (espacées de 1,40 m) a été installée au laboratoire des musées de France au Louvre afin de couvrir un puits de jour (cf. Figure 1). Les poutres sont constituées de quatre lames de verre recuit de quinze millimètres d'épaisseur assemblées par trois films de polyvinyle de butyral. Elles sont appuyées sur des sabots en acier par l'intermédiaire d'appuis en chloroprène.

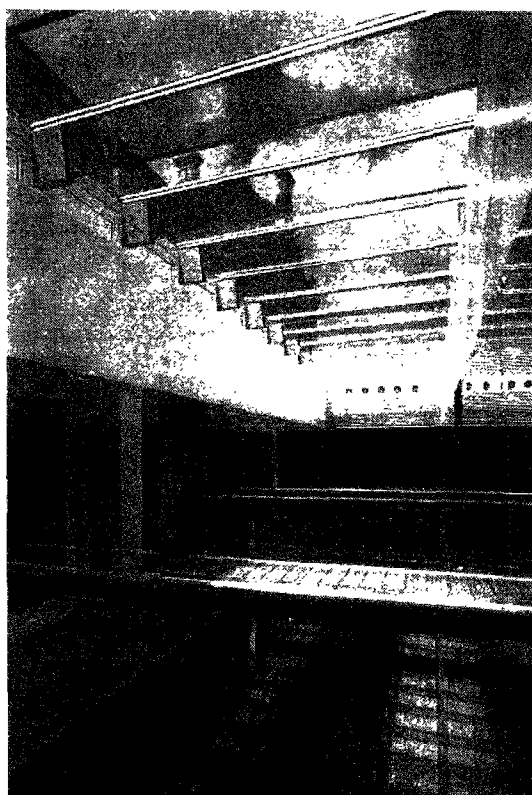


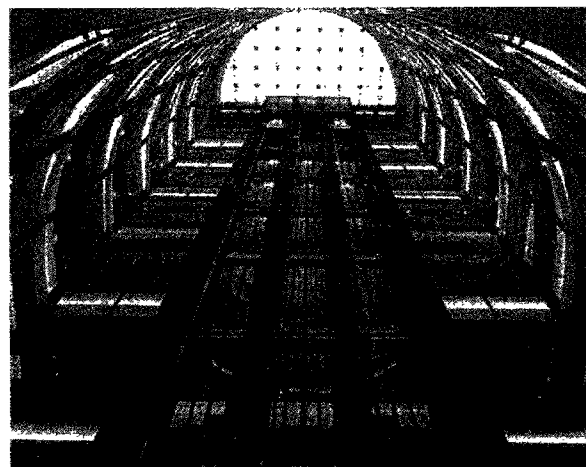
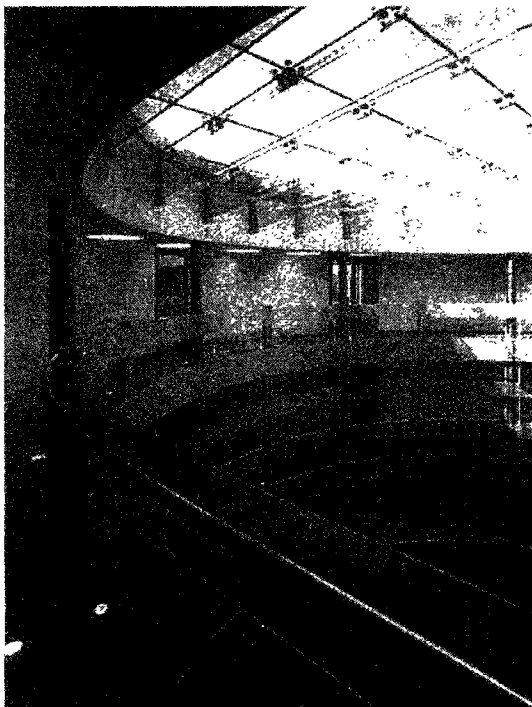
Figure 1 : Photo de la verrière du laboratoire de chalcographie au Louvre

Des essais de flexion à l'échelle un ont été réalisés sur ces poutres au CSTB (cf. Figure 2).



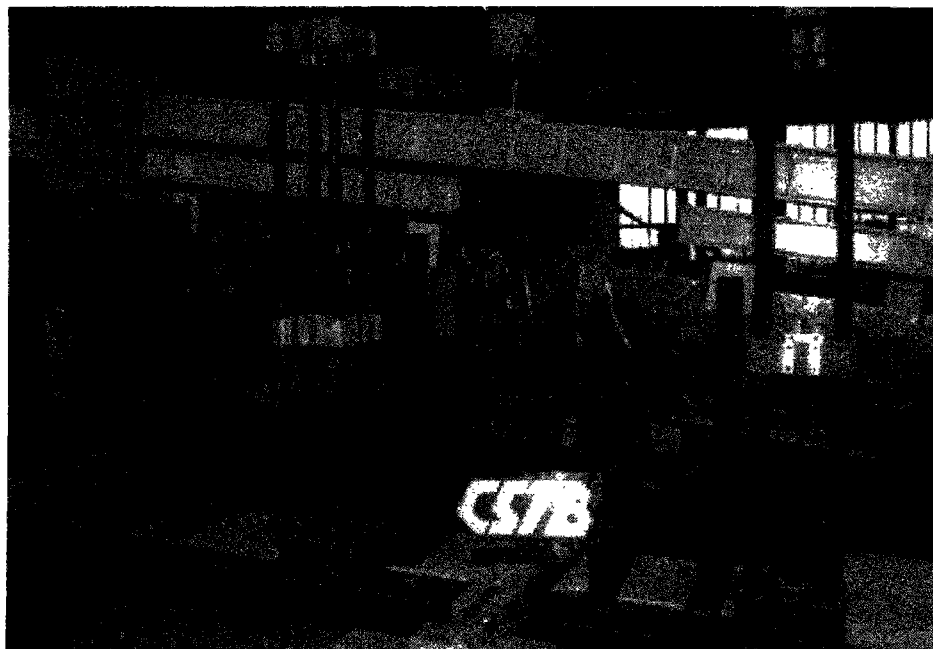
**Figure 2 :** Photo de l'essai à l'échelle un réalisé au CSTB

Le deuxième exemple de structure réalisée en France est une verrière (77 m<sup>2</sup>) installée dans l'atrium de l'immeuble du 53 avenue Georges V (cf. Figure 3). La verrière de forme semi-circulaire est soutenue par huit poutres de longueur variable (4,3 à 7 m). Chaque poutre est constituée de deux lames de verre trempé de 19 mm d'épaisseur assemblées par un film de polyvinyle de butyral. Les poutres sont espacées de 1,50 m et reposent sur des sabots en acier inox garnis de coussins en néoprène.



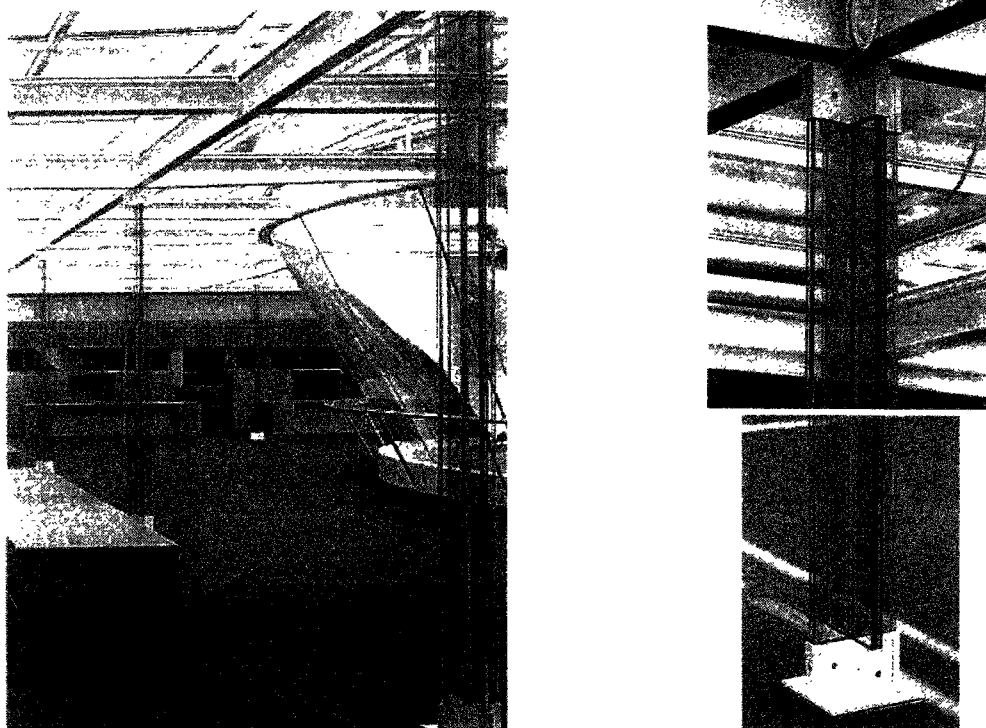
**Figure 3 :** Photo de la verrière du hall d'entrée d'un immeuble (avenue Georges V)

Des essais de flexion à l'échelle un ont également été réalisés sur ces poutres au CSTB (cf. Figure 4).



**Figure 4 :** Photo de l'essai à l'échelle un réalisé au CSTB

Les poteaux en verre du centre administratif de Saint-Germain-en-Laye constituent le troisième exemple de structure en verre (cf. Figure 5). Douze poteaux en verre feuilleté de 3,45 m de hauteur soutiennent une verrière de 750 m<sup>2</sup>. Chaque poteau en forme de croix est constitué d'une lame de 22 cm de large et de deux lames perpendiculaires de 9 cm de large. Chaque lame est constituée de trois plaques de verre recuit (10, 15 et 10 mm).



**Figure 5 :** Photo des poteaux du hall du centre administratif de Saint-Germain-en-Laye

Les poteaux ont été testés en compression (légèrement excentrée) à l'échelle un au CSTB (cf. Figure 6).



**Figure 6 :** Photo de l'essai à l'échelle un réalisé au CSTB

Les procédures de construction sont différentes en France et à l'étranger. La réglementation des Pays-Bas donne plus de libertés, ce qui conduit à des structures plus audacieuses. Voici l'exemple d'une passerelle servant à relier deux bâtiment à Rotterdam (cf. Figure 7 et Figure 8 ). Deux poutres de hauteur variable constituées de trois lames de verre trempé de 10 mm d'épaisseur supportent un plancher composé de deux lames de verre trempé. Les poutres reposent sur des sabots en inox et sont reliées entre elles par des pattes en acier inox.



**Figure 7 :** Vue de dessous de la passerelle de Rotterdam



**Figure 8 :** Vue de côté de la passerelle de Rotterdam

L'utilisation du verre pour les structures du bâtiment conduit à un nouveau type de chargement : plaques chargées dans leur plan de manière prolongée. Il convient alors d'étudier en particulier la résistance en traction de la tranche des plaques.

Les industriels verriers ne produisent pas de verre plat excédant 25 mm d'épaisseur. Le verre feuilleté permet d'augmenter l'épaisseur du verre par collage de plusieurs plaque et d'éviter la chute de morceaux en cas de rupture de l'une des lames. Les plaques sont collées grâce à un film de polyvinyle de butyral. Celui-ci assure la cohésion de l'ensemble en cas de rupture partielle mais n'a aucun rôle dans la résistance mécanique de la structure.

Le verre trempé est également utilisé pour les structures. Son état de précontrainte (compression de surface) lui confère une plus grande résistance que les éléments recuits. Les lames trempées peuvent également être associées par collage avec le polyvinyle de butyral.

Cette étude s'intéresse à la résistance d'une plaque simple trempée.

Le verre trempé est un matériau précontraint. Pour pouvoir prédire sa résistance, il convient d'une part de connaître son état de précontrainte, d'autre part de modéliser sa rupture.

Une recherche bibliographique est réalisée sur le comportement thermo-mécanique du verre et sur sa rupture. Le verre est un matériau viscoélastique à toute température. Son comportement est donc variable avec le temps et la température. La description complète de son comportement nécessite la description de la relaxation des contraintes (ou du fluage) et la prise en compte de l'état de sa structure (sensible à l'histoire thermique). Le verre est

un matériau fragile ce qui conduit à une analyse statistique de la rupture. De plus, la présence de fissuration sous-critique influence sa résistance en fonction de la nature du chargement.

La trempe est un traitement thermique du verre qui conduit à un état de contrainte résiduel. L'introduction du modèle de comportement thermo-mécanique du verre dans un code aux éléments finis permet de simuler la trempe du verre et de calculer l'état de contrainte transitoire et résiduel tridimensionnel dans l'élément. Des travaux antérieurs se sont intéressés à la modélisation de la trempe thermique de plaques de verre infinies. L'aspect tridimensionnel de l'état de contrainte (dû à l'effet de bord) de plaques de taille finie est présenté. Quand les plaques sont chargées dans leur plan, le bord se trouve tendu de manière maximale. La connaissance de la précontrainte de trempe sur la tranche est essentielle pour déterminer la résistance de ces plaques.

Un nombre important d'essais sur de petits éléments en verre recuit permet l'analyse statistique de la rupture du verre. Les échantillons sont testés à plusieurs vitesses de chargement. Cela est destiné à mettre en évidence l'effet de vitesse lié à la fissuration sous-critique due à l'action de l'eau environnante en fond de fissure.

Des essais de flexion sur de grandes poutres en verre recuit et trempé sont destinés à valider les analyses précédentes. L'analyse statistique de rupture du verre recuit permet la prise en compte de l'effet d'échelle. La prédiction de la résistance des grandes poutres en verre recuit est alors possible et peut être comparée aux résultats expérimentaux. L'association des résultats de la simulation de la trempe thermique du verre (validés grâce à des mesures optiques) et de l'analyse statistique de la rupture doit permettre le calcul de la résistance des poutres en verre trempé ce qui sera comparé aux résultats des essais. Une méthode complète de détermination de la résistance du verre trempé est donnée à partir des résultats d'essais sur de petits éléments recuits et des simulations numériques.

Des essais de flexion sur de grandes poutres en verre recuit et trempé de longue durée sont programmés. Ils sont destinés à analyser la résistance à long terme du verre. L'objectif est de voir si la limite de "fatigue statique" existe, et si la précontrainte de trempe évolue dans le temps.

# CHAPITRE A

## BIBLIOGRAPHIE : COMPORTEMENT ET RUPTURE DU VERRE

|           |                                                         |    |
|-----------|---------------------------------------------------------|----|
| A.I.      | Comportement thermomécanique du verre .....             | 31 |
| A.I.1     | Introduction .....                                      | 31 |
| A.I.2.    | Le verre à température ambiante .....                   | 31 |
| A.I.3     | Comportement thermo-mécanique à haute température ..... | 31 |
| A.I.3.a.  | Théorie du refroidissement instantané .....             | 31 |
| A.I.3.b   | Théorie viscoélastique .....                            | 32 |
| A.I.3.c.  | Théorie structurelle .....                              | 34 |
| A.II.     | Rupture du verre .....                                  | 34 |
| A.II.1    | Rupture d'un matériau fragile .....                     | 34 |
| A.II.1.a. | Introduction .....                                      | 34 |
| A.II.1.b. | Résistance théorique .....                              | 35 |
| A.II.1.c  | Résistance d'un solide fragile avec défaut .....        | 35 |
| A.II.1.d. | Défauts du verre .....                                  | 36 |
| A.II.2.   | Mécanique de la rupture .....                           | 37 |
| A.II.2.a. | Introduction .....                                      | 37 |
| A.II.2.b. | Approche de Griffith .....                              | 38 |
| A.II.2.c. | Approche d'Irwin .....                                  | 38 |
| A.II.2.d. | Critères de propagation .....                           | 39 |
| A.II.3    | Observation de la rupture du verre .....                | 40 |
| A.II.3.a. | Introduction .....                                      | 40 |
| A.II.3.b. | Facès de rupture du verre .....                         | 40 |
| A.II.3.c. | Relation rayon du miroir/contrainte à la rupture .....  | 42 |
| A.II.3.d. | Rupture du verre trempé .....                           | 43 |
| A.II.4.   | Fissuration sous-critique .....                         | 45 |
| A.II.4.a. | Introduction .....                                      | 45 |
| A.II.4.b. | Action de l'eau en fond de fissure .....                | 45 |
| A.II.4.c. | Courbe de vitesse de fissuration .....                  | 47 |
| A.II.4.d. | Loi de "fatigue" statique .....                         | 48 |
|           | Résumé du chapitre A .....                              | 49 |



## A. BIBLIOGRAPHIE : COMPORTEMENT ET RUPTURE DU VERRE

### A.I. Comportement thermo-mécanique du verre

#### A.I.1. Introduction

Le verre est un matériau isotrope. Son comportement à température ambiante est élastique linéaire fragile parfait. A très haute température (1100 °C), le verre est un fluide visqueux. Aux températures intermédiaires (autour de 600 °C), le verre est un matériau viscoélastique. Ses caractéristiques varient avec la température mais aussi avec le temps. Le verre est sensible à l'histoire du chargement thermique, à la vitesse de refroidissement ou de chauffage.

Plusieurs modèles existent pour décrire les variations du comportement viscoélastique avec la température. La théorie du refroidissement instantané fut enrichie et affinée pour obtenir des modèles donnant une description plus précise du comportement. Le modèle viscoélastique prend en compte la relaxation des contraintes. L'état de la structure peut aussi influencer le comportement du verre dans le cas de variations assez brutales des sollicitations thermiques. Cette influence de la structure du verre est prise en compte dans le modèle structurel.

#### A.I.2. Le verre à température ambiante

La matériau amorphe étudié ici est un verre flotté silicosodocalcique fourni par Saint-Gobain. La silice est le formateur de verre par excellence. Elle constitue sous sa forme vitreuse ( $\text{SiO}_2$ ) un réseau tridimensionnel désordonné.  $\text{Na}_2\text{O}$  et  $\text{CaO}$  sont les principaux oxydes modificateurs du réseau. Le premier abaisse la viscosité, augmente le coefficient de dilatation et la conductivité électrique, diminue la résistance chimique. Le deuxième modificateur augmente la résistance chimique en diminuant fortement la solubilité du verre<sup>1</sup>. Ce verre d'oxydes est considéré comme un matériau homogène isotrope.

A température ambiante, le verre est un solide élastique. La déformation élastique due à une sollicitation correspond à des mouvements réversibles d'atomes, de molécules. Le comportement du verre peut alors être décrit par deux paramètres : module d'Young ( $E$ ) et coefficient de Poisson ( $\nu$ ).

#### A.I.3. Comportement thermo-mécanique à haute température

##### A.I.3.a. Théorie du refroidissement instantané

Le premier modèle de comportement thermo-mécanique du verre fut développé par Bartenev en 1948<sup>2</sup>. Il introduit la température de solidification  $T_g$  qui correspond au changement brutal de comportement du verre (cf. Figure A.1) :

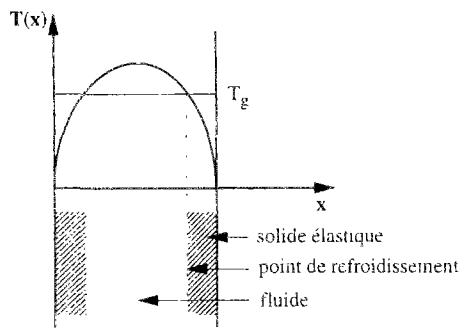
- ✗  $T > T_g$  verre = fluide incapable de supporter les contraintes
- ✗  $T \leq T_g$  verre = solide élastique sans fluage ni relaxation des contraintes

<sup>1</sup> ZARZYCKI J., *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982

<sup>2</sup> GARDON R., *Thermal tempering of glass* in *Glass : Science and Technology* (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

BARTENEV G. M., *Zh. Tekh. Fiz.*, 1948, vol. 18, pp 383-388

BARTENEV G. M., *Zh. Tekh. Fiz.*, vol. 19, pp 1423-1433, (1949)



**Figure A.1 :** Etat du verre correspondant à la théorie de Bartenev

Une distribution fictive de la température,  $\phi$  est introduite telle que :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{dT}{dx} \Big|_{T=T_g}$$

$$\sigma(x) = \frac{E\alpha}{1-\nu} [\bar{\Phi}(x) - \Phi(x)]$$

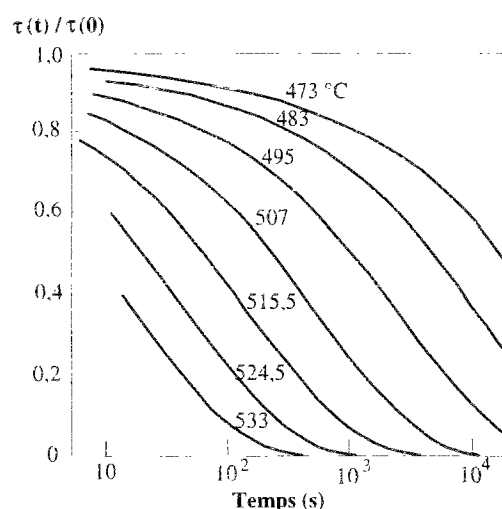
avec  $E$  = module d'Young  
 $\alpha$  = coefficient de dilatation thermique  
 $\nu$  = coefficient de Poisson  
 $\bar{\Phi}(x)$  = valeur moyenne de  $\Phi(x)$

### A.1.3.b. Théorie viscoélastique

Dans la théorie viscoélastique, le changement de comportement du verre entre fluide visqueux et solide élastique s'effectue sur un certain intervalle de température (et non pas brutalement comme dans le cas de la théorie du refroidissement instantané). Sur cette zone de transformation, le verre a un comportement viscoélastique décrit grâce à des fonctions de relaxation variables avec la température.

#### A.1.3.b.α. Matériau viscoélastique thermorhéologiquement simple

Un matériau viscoélastique est dit thermorhéologiquement simple si un changement de température peut être pris en compte par un changement de l'échelle de temps<sup>3</sup>. Cela peut être illustré par les résultats des essais de torsion de Kurkjian<sup>4</sup> :



**Figure A.2 :** Relaxation de la contrainte en fonction de la température de stabilisation et du temps

<sup>3</sup> SCHWARZL F., STAVERMAN A.J., *Time-temperature dependance of linear viscoelastic behavior* in Journal of Applied Physics, 1952, vol. 23, n° 8

GARDON R., *Thermal tempering of glass* in Glass : Science and Technology (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

<sup>4</sup> KURKJIAN C. R., *Relaxation of torsional stress in the transformation range of soda-lime-silicate glass* in Physics and Chemistry of glasses, 1963, vol. 4, n° 4

Ces courbes illustrent trois aspects importants de la réponse du verre à une sollicitation :

- ✗ La réponse instantanée du verre est élastique à toute température. A basse température, la phase élastique est suffisamment longue pour pouvoir considérer le verre comme un solide élastique
- ✗ La réponse à long terme du verre est celle d'un fluide visqueux entraînant la relaxation des contraintes. A haute température, la relaxation des contraintes débute suffisamment tôt pour pouvoir considérer le verre comme un fluide visqueux.
- ✗ Pour le verre stabilisé, les courbes de relaxation des contraintes tracées en fonction du logarithme du temps ont toutes la même forme. Cela permet, en introduisant le temps fictif, de tracer une courbe de relaxation "maîtresse" à la température de base ( $T_B$ ) arbitrairement choisie (cf. Figure A.3).

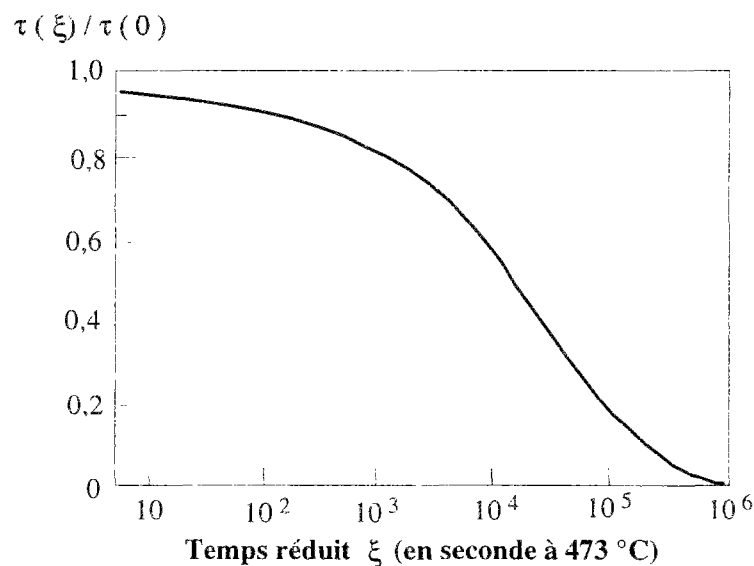
La "fonction changement" ou "facteur de décalage"  $\Phi$  est alors définie par :

$$\ln[\Phi(T)] = \ln\left(\frac{\eta}{\eta_B}\right) = \frac{H}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_B}\right)$$

avec  $\eta$  = viscosité à la température  $T$   
 $\eta_B$  = viscosité à la température  $T_B$   
 $H$  = énergie d'activation  
 $R$  = constante des gaz parfaits

Cette fonction permet de modifier l'échelle de temps. Le temps est compté plus vite au-delà de  $T_B$  et plus lentement en deçà de  $T_B$ . Le temps mesuré est appelé "temps réduit" :  $\xi$ <sup>5</sup>. Il est défini par :

$$d\xi = \Phi(T)dt$$



**Figure A.3 :** Relaxation de la contrainte d'un verre stabilisé en fonction du "temps réduit"

Le verre est considéré comme un matériau viscoélastique thermorhéologiquement simple quand sa structure est stabilisée.

<sup>5</sup> LEE E. H., ROGERS T. G., WOO T. C., *Residual stresses in a glass plate cooled symmetrically from both surfaces* in Journal of the American Ceramic Society, 1965, vol. 48, n°9, pp 480-487

### A.I.3.b.β. Relation contrainte-déformation

La formulation fonctionnelle contrainte-déformation s'écrit pour un matériau viscoélastique<sup>6</sup> :

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-t') \frac{d\epsilon(t')}{dt'} dt' \quad \text{avec } R(t-t') = \text{module de relaxation}$$

En cisaillement,  $R(t) = G(t)$  et en traction uniaxiale pure  $R(t) = E(t)$ .

En général, l'état de contrainte n'est ni du cisaillement pur, ni de la traction pure. On peut alors définir le module de relaxation  $R(t)$ <sup>7</sup> qui relie contraintes et déformations pour un système général.

Si en plus des variations de déformations, la température varie, le temps réduit  $\xi$  doit être substitué au temps réel :

$$\sigma(\xi) = \int_0^\xi R(\xi - \xi') \frac{d\epsilon(\xi')}{d\xi'} d\xi'$$

Le modèle viscoélastique donne une description du comportement du verre plus proche de la réalité que le au modèle de refroidissement instantané. Dans le cas de la simulation de la trempe thermique, le modèle viscoélastique permet le calcul des contraintes transitoires et des contraintes résiduelles. Cependant, dans le cas où la température initiale de trempe est faible, les résultats semblent assez éloignés de la réalité. En cours de trempe, la relaxation des contraintes s'accompagne de changements de la structure qui affectent la densité et la viscosité du verre. Le verre n'est plus thermorhéologiquement simple.

### A.I.3.c. Théorie structurelle

La théorie permet de prendre en compte l'influence de l'état de la structure qui affecte la viscosité et la densité du verre.

Nous utiliserons ce modèle pour décrire le comportement du verre dans les simulations de la trempe thermique. Le modèle sera donc décrit en détail dans le chapitre B (§ B.II).

## A.II. Rupture du verre

### A.II.1. Rupture d'un matériau fragile

#### A.II.1.a. Introduction

Une fibre de verre vierge (fibre très fine sans défaut) a une résistance à la traction de plusieurs gigapascals<sup>8</sup>. Par contre, un élément de verre macroscopique a une résistance de traction comprise entre 10 et 100 mégapascals.

La résistance du verre peut être augmentée après passage dans l'acide fluorhydrique. De même, si le verre est laissé inerte dans l'eau après abrasion, sa résistance augmente. Ces

---

<sup>6</sup> GARDON R., *Thermal tempering of glass* in Glass . Science and Technology (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

<sup>7</sup> MUKI R., STERNBERG E., *On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties* in Journal of Applied Mechanics, 1961 , pp 193-207

<sup>8</sup> DOREMUS R. H., *Fracture in Glass Science*, 2<sup>e</sup> ed . A Wiley Interscience Publication, 1994 (Science and Technology of Materials ser.)

traitements modifient la surface du verre. Comme on peut le voir à travers ces exemples, la résistance du verre est directement liée à son état de surface.

Voici quelques valeurs de résistance d'éléments de verre<sup>9</sup>

- produit classique : 14 à 70 MPa
- baguette de verre fraîchement réalisée : 70 à 140 MPa
- baguette de verre après abrasion : 14 à 35 MPa
- fibre humide, éraflée : 3 à 7 MPa
- fibre de verre manipulée : 350 à 700 MPa
- fibre de verre fraîchement réalisée : 0,7 à 2,1 GPa

#### A.II.1.b. Résistance théorique

C'est Orowan en 1949 qui proposa un critère de rupture des matériaux fragiles en terme de paramètres atomiques<sup>10</sup>. La résistance théorique (contrainte de rupture théorique) s'écrit directement en fonction de la distance inter-atomique et de l'énergie de création d'une unité de surface :

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a_0}}$$

avec  $E$  = module d'Young

$\gamma$  = énergie de création d'une unité de surface

$a_0$  = distance inter-atomique

Alors, avec  $\gamma = 3,5 \text{ J/m}^2$  et  $a_0 = 0,2 \text{ nm}$ , la contrainte de rupture théorique atteint :  $\sigma_{th} = 35 \text{ GPa}$ <sup>9</sup>.

Griffith a expliqué (en 1920) la différence entre la résistance de fibres de verre et les éléments macroscopiques par la présence de défauts à la surface du verre.

#### A.II.1.c. Résistance d'un solide fragile avec défauts

La présence d'un défaut crée des concentrations de contraintes près de l'extrémité de fissure. Inglis (1913)<sup>11</sup> démontre que la contrainte maximale de traction est au sommet du défaut elliptique de longueur  $2a$  et de petit axe  $2b$ .

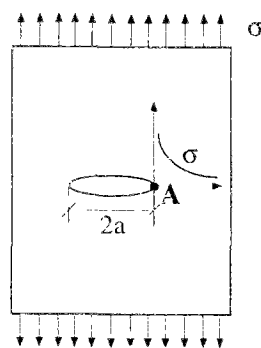


Figure A.4 : Élément en traction avec défaut

Il modélise la fissure par un défaut elliptique. La contrainte maximale (en A) est supérieure à la contrainte nominale (loin du défaut) mais elle est finie.

$$\sigma_{max} = \sigma \left[ 1 + \frac{2a}{b} \right]$$

avec  $\sigma$  = contrainte nominale

$2a$  = longueur de la fissure

$2b$  = petit axe de la fissure

Alors, pour une structure présentant un défaut, la rupture intervient quand la contrainte maximale en fond de fissure  $\sigma_{max}$  atteint la contrainte théorique  $\sigma_{th}$ .

<sup>9</sup> VARSHNEYA A. K., *Fundamentals in organic glasses*, Harcourt Brace & Company, 1994

<sup>10</sup> LAWN B. R., WILSHAW T. R., *Atomistic aspects of crack propagation in Fracture of Brittle Solids*, Cambridge University Press 1975 (Cambridge Solid State Science ser.)

<sup>11</sup> FREIMAN S. W., *Elasticity and Strength in Glasses in Glass Science and Technology* (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

### A.II.1.d. Défauts du verre

#### Défauts volumiques

Les défauts volumiques du verre<sup>12</sup> sont pratiquement toujours négligeables devant les défauts de surface. Cependant, le verre peut présenter des inclusions de sulfure de Nickel (NiS). Ils peuvent conduire à la rupture spontanée d'éléments en verre trempé. En effet, lors d'un chauffage, par le soleil par exemple, le sulfure de Nickel change de phase, gonfle et entraîne une rupture brutale.

Ces défauts, peu courants, seront négligés dans cette étude.

#### Défauts surfaciques

Les défauts de surface sont prépondérants pour l'étude de la résistance du verre. Ils peuvent être séparés en quatre groupes<sup>13</sup> :

- **fissures longues** : fissure de plusieurs centièmes de millimètres de profondeur visibles au microscope ou à l'oeil nu.
- **fissures microscopiques** : ces défauts apparaissent lors de la fabrication du verre ou lors de contact avec d'autres objets. On en compte plusieurs milliers au centimètre carré. Ils peuvent être rendus visibles chimiquement.
- **particules adhérent à la surface** : ces défauts constituent des points faibles du verre. Ces particules peuvent s'incorporer à cause d'un environnement poussiéreux lors de la fabrication.
- **changement à la surface** : attaque de la surface lors de la fabrication

Plus ces défauts sont profonds, plus la résistance de l'élément est faible. La forme de ces fissures est également importante. Une forme très effilée conduit à une concentration de contrainte très importante en fond de fissure et à une résistance plus faible de l'élément.

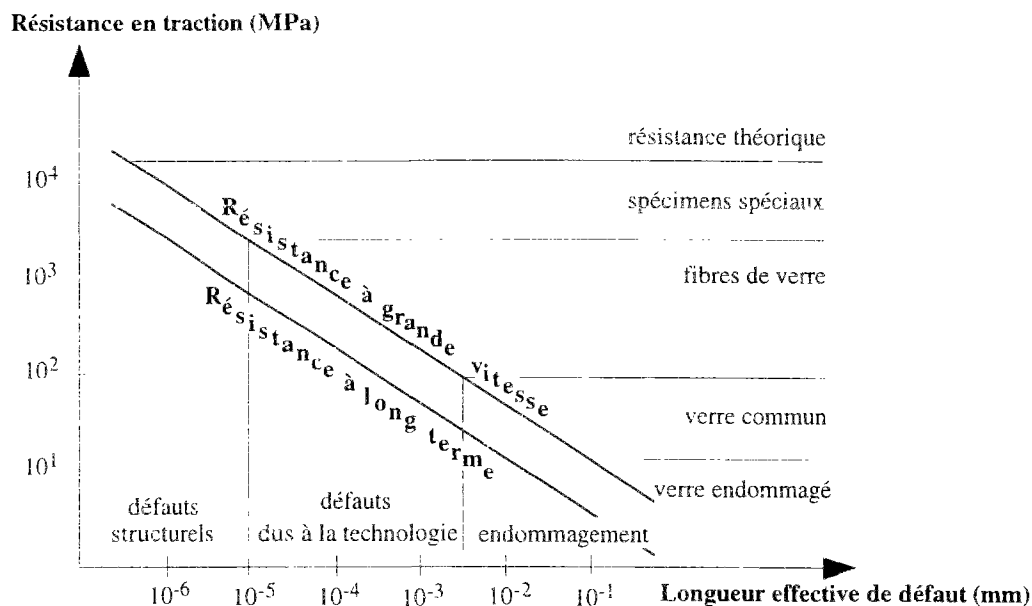


Figure A.5 : Taille et nature des défauts dans le verre<sup>14</sup>

<sup>12</sup> WAGNER R, *Inclusions de sulfure de Nickel dans le verre* in Glasstech. Ber., 1977, vol 50, n° 11, pp 296-300

<sup>13</sup> MENCIK J., *Strength and Fracture of Glass and Ceramics*, Elsevier, 1992 (Glass Science and Technology)

Dans cette étude, des essais permettront de caractériser la résistance d'éléments de verre (c'est à dire leur état de surfaces). Le verre testé est non-endommagé et les défauts sont issus de la fabrication et du polissage des tranches (défauts technologiques).

## A.II.2. Mécanique de la rupture

### A.II.2.a. Introduction

La mécanique de la rupture s'intéresse à l'étude des fissures macroscopiques<sup>15</sup>. A partir des caractéristiques des défauts et des propriétés du matériau, la mécanique de la rupture permet de déterminer la résistance à la rupture de l'élément.

La mécanique de la rupture suppose l'existence d'une fissure initiale dans la structure étudiée et un système de sollicitations extérieures. La fissure initiale est soit une fissure créée par endommagement sous l'effet de cette sollicitation, soit un défaut créé lors de l'élaboration du matériau ou de sa mise en forme. Pour l'étude de la rupture du verre, nous nous situons dans le deuxième cas.

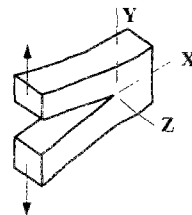
Les défauts présents dans la structure tendent à redistribuer les champs de contraintes internes en provoquant des concentrations de contraintes en pointe de fissure. Pour déterminer la résistance à la rupture, il faut étudier la distribution des contraintes autour de la fissure.

On fait l'hypothèse que le matériau est homogène isotrope et que son comportement est élastique linéaire. Bien qu'une zone plastique ou endommagée soit toujours présente en pointe de fissure ("process zone"), l'analyse élastique linéaire fournit une bonne schématisation de la réalité.

Pour une fissure en milieu plan, on distingue trois cinématiques remarquables du déplacement relatif des lèvres de la fissure :

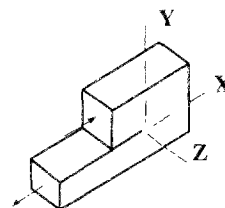
#### *mode I :*

ouverture par tension avec déplacement perpendiculaire à la fissure



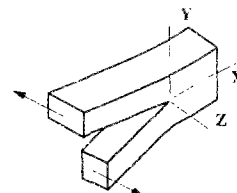
#### *mode II :*

ouverture par cisaillement dans le plan perpendiculaire au bord principal de la fissure



#### *mode III :*

mode déchirant, cisaillement hors plan avec déplacement parallèle au bord



<sup>15</sup> MENCIK J., *Strength and Fracture of Glass and Ceramics*, Elsevier, 1992 (Glass Science and Technology)

<sup>15</sup> ISA BAR-ON, *Applied fracture mechanics*, in *Ceramics and Glasses* ASM International, 1991 (Engineered Materials Handbook Ser., vol. 4)  
ZAPZYCKIJ, *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982

### A.II.2.b. Approche de Griffith

L'approche de Griffith<sup>16</sup> est fondée sur des notions énergétiques (approche globale). Lors de la fissuration s'établit une compétition entre l'énergie élastique restituée lors de l'avancée de fissure et l'énergie dissipée par création de nouvelles surfaces.

L'énergie totale du système est :

$$U = (-W + U_E) + U_S$$

avec  $-W + U_E$  = énergie mécanique  
 $W$  = travail des forces extérieures  
 $U_E$  = énergie élastique  
 $U_S$  = énergie due aux surfaces créées

A l'équilibre :

$$\frac{dU}{da} = 0$$

avec  $a$  = longueur de fissure

L'énergie libérée au cours d'un accroissement de fissure est indépendante du mode de chargement. On définit une force généralisée d'extension de fissure :

$$G = \frac{d}{da}(-W + U_E)$$

$G$  est appelé taux de restitution d'énergie ; il définit la vitesse de libération d'énergie de déformation (la vitesse étant définie par rapport à la longueur de fissure et non par rapport au temps).

### A.II.2.c. Approche d'Irwin

L'approche d'Irwin<sup>17</sup> est une approche locale permettant de décrire les champs de contraintes, déformations et déplacements près du fond de fissure.

Dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  rapportées à l'extrémité de la fissure (cf. Figure A.6), on montre que les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes sont de la forme (en écrivant le premier terme du développement limité des contraintes) :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^\alpha(\theta)$$

avec  $\alpha = I, II$  ou  $III$   
 $K_\alpha$  = facteurs d'intensité des contraintes  
 $r, \theta$  = coordonnées cylindriques du point considéré  
 $f_{ij}^\alpha$  = fonctions de  $\theta$

et les déplacements correspondants sont :

$$u_i = \sqrt{\frac{K_\alpha}{2E}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i^\alpha(\theta)$$

Un point important est que les contraintes sont singulières en pointe de fissure, le déplacement est évidemment fini.

---

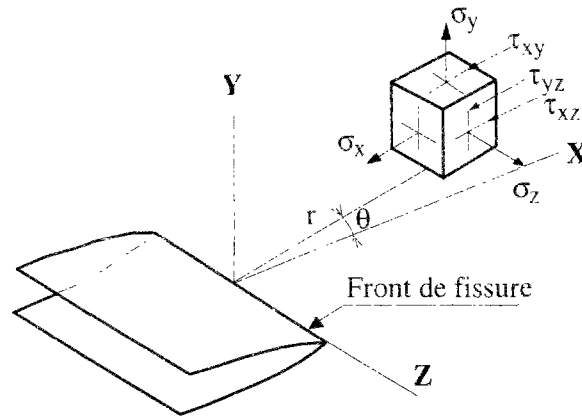
<sup>16</sup> FRANCOIS D. PINEAU A., ZAOUI A., *Comportement mécanique des matériaux*, Paris : Hermès, 1993

ZARZYCKI J., *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982

<sup>17</sup> FRANCOIS D., PINEAU A., ZAOUI A., *Comportement mécanique des matériaux*, Paris : Hermès, 1993

ISA BAR-ON, *Applied fracture mechanics* in *Ceramics and Glasses* ASM International, 1991 (Engineered Materials Handbook Ser., vol. 4)

ZARZYCKI J., *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982



**Figure A.6 :** Repérage du champ des contraintes au voisinage du front de fissure

Les grandeurs  $K_\alpha$  sont les facteurs d'intensité des contraintes. Ils sont fonction de la géométrie de la fissure et de la façon dont sont appliquées les charges extérieures. Ils permettent de déterminer l'intensité des champs locaux de contraintes et de déplacements.

Dans le cas du verre, seul le mode I est étudié. Il est prépondérant devant les deux autres modes. Le facteur d'intensité des contraintes en mode I s'écrit :

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{pour une fissure dans une plaque infinie}$$

$$K_I = Y\left(\frac{a}{w}\right)\sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{pour une plaque finie de largeur } w$$

On remarque que les  $\sigma_{ij}$  deviennent infinies à la pointe de la fissure (pour  $r \rightarrow 0$ ). Ceci ne correspond évidemment pas à la réalité, mais constitue une singularité mathématique due aux hypothèses d'un matériau continu et d'un front de fissure à rayon de courbure nul. Cette singularité disparaît pour un matériau à structure discrète.

#### **A.II.2.d. Critères de propagation**

Liés aux deux approches de la mécanique de la rupture, deux critères de propagation existent.

##### **Critère de Griffith (approche globale) :**

fissuration si  $G \geq G_c$  avec  $G_c$  = taux de restitution d'énergie critique

##### **Critère d'Irwin (approche locale) :**

fissuration si  $K \geq K_c$  avec  $K_c$  = ténacité

Dans le cas d'un matériau parfaitement élastique, ces deux critères de fissuration sont équivalents. Dans cette étude, nous utiliserons le critère d'Irwin.

Pour le critère de propagation, on considère donc  $G_c = G_{Ic}$  ou  $K_I = K_{Ic}$ . La résistance en mode II est beaucoup plus importante que celle obtenue en mode I.

Pour un problème plan, la direction de propagation est en général exprimée sous la forme d'un angle :

$$\theta \text{ tel que } \sigma_{\theta\theta} \text{ est maximal}$$

$$\theta \text{ tel que } K_{II} = 0 \text{ (mode I)}$$

Ces deux critères donnent des résultats très proches.

### A.II.3. Observation de la rupture du verre

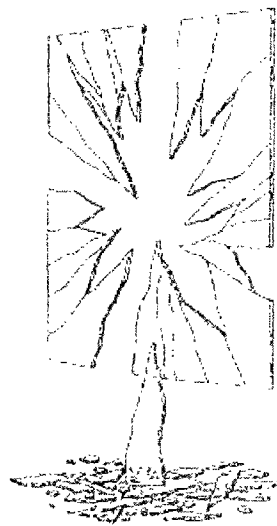
#### A.II.3.a. Introduction

Les faciès de rupture du verre sont caractéristiques du matériau. La rupture du verre est brutale ; son observation n'est en général pas possible sauf avec une caméra ultra-rapide. L'observation globale a posteriori permet de déterminer la cause de la rupture : choc mécanique, choc thermique... D'autre part, l'observation du faciès local de rupture (à partir de l'origine de la rupture) permet de retrouver la contrainte locale ayant conduit à la rupture.

#### A.II.3.b. Faciès de rupture du verre

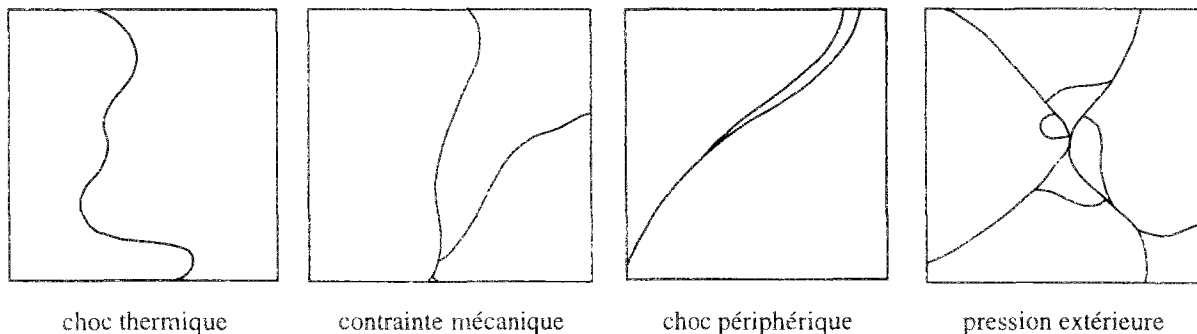
##### Aspect global

Le verre recuit se casse en gros morceaux pointus et très coupants<sup>18</sup> (cf. Figure A.7).



**Figure A.7 :** Vue générale d'un élément cassé en verre recuit

Les schémas globaux de rupture (orientation, forme, bifurcation des macrofissures) sont différentes suivant le type de sollicitation auquel le verre a été soumis avant rupture. Plus l'énergie extérieure fournie pour la rupture est grande, plus le nombre de morceaux est grand<sup>19</sup> (cf. Figure A.8).



---

<sup>18</sup> McMASTER R. A., SHETTERLY D. M., BUENO A. G., *Annealed and tempered glass in Ceramics and Glasses*, ASM International, 1991 (Engineered Materials Handbook, vol. 4)

<sup>19</sup> SAVOY E., *Traité technique du verre*, 2<sup>e</sup> éd., Savoy E., 1989, 301 p

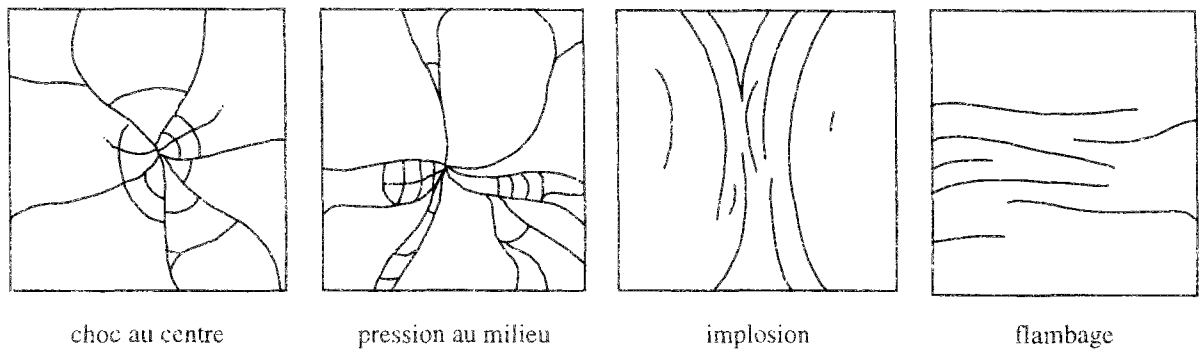


Figure A.8 : Dessins de faciès de rupture pour différentes causes de rupture

### Aspect local

Le faciès de rupture local du verre est caractéristique du matériau verre et de certaines céramiques. A partir de l'origine de rupture, trois zones concentriques peuvent être distinguées<sup>20</sup> (cf. Figure A.9) :

- **le miroir** : zone brillante
- **la zone grenue** : microbifurcations
- **les lancettes** : creux et bosses

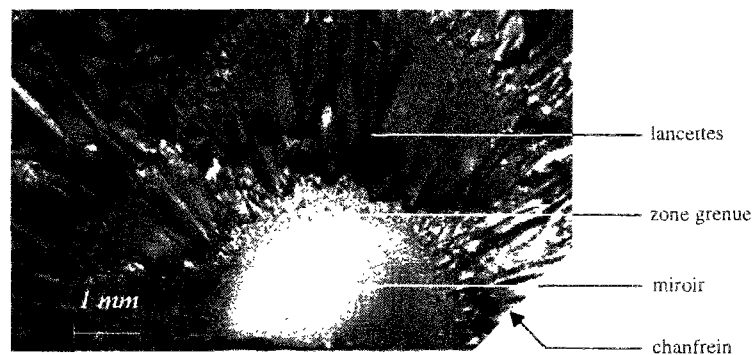


Figure A.9 : Différentes zones du faciès de rupture local (obtenues sur un échantillon étudié dans ce travail)

Ces différentes zones ne sont pas toujours parfaitement concentriques en particulier au bord pour un élément rectangulaire (cf. Figure A.10) et dans le cas d'éléments cylindriques (cf. Figure A.11)<sup>21</sup>.

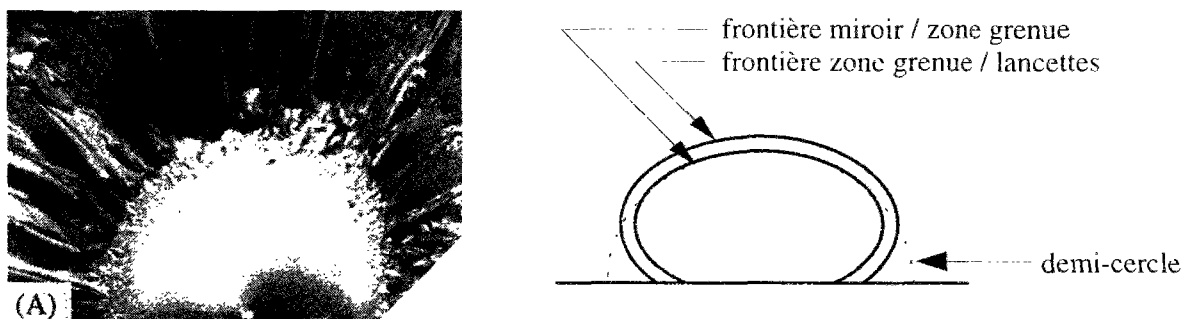


Figure A.10 : Faciès de rupture local pour un élément rectangulaire

<sup>20</sup> ZARZYCKI J., *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982

DOREMUS R. H., KAY J. F., *Initial crack paths in glass : influence of temperature and composition* in *Journal of Materials Science*, 1979, vol. 14, pp 2236-2240

<sup>21</sup> KIRCHNER H. P., KIRCHNER J. W., *Fracture mechanics of fracture mirrors* in *Journal of the American Ceramic Society*, 1979, vol. 62, n° 3-4, pp 198-202

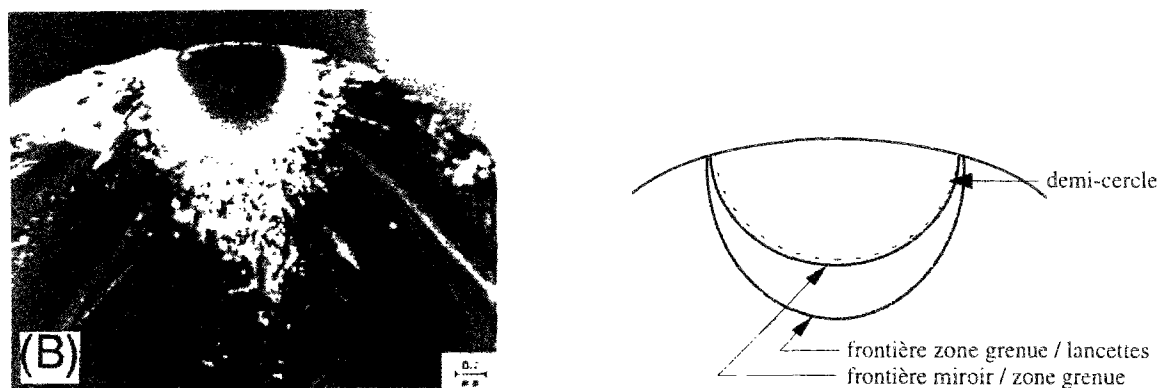


Figure A.11 : Faciès de rupture local pour un élément cylindrique

Ce faciès de rupture local est caractéristique du verre. Les frontières entre ces différentes régions caractéristiques correspondent à des valeurs particulières du facteur d'intensité des contraintes.

### A.II.3.c. Relation rayon du miroir / contrainte à la rupture

En 1959, Shand a montré expérimentalement que l'on peut relier le rayon de la frontière entre les zones (miroir, zone grenue et lancette - cf. Figure A.12) avec la contrainte de rupture par<sup>22</sup> :

$$\sigma_f = \frac{M_j}{\sqrt{r_j}}$$

avec  $M_i$  = constantes de miroir

$j = 1$  pour la frontière miroir-zone grenue

$j = 2$  pour la frontière zone grenue-lancettes

$r_i$  = rayons des frontières

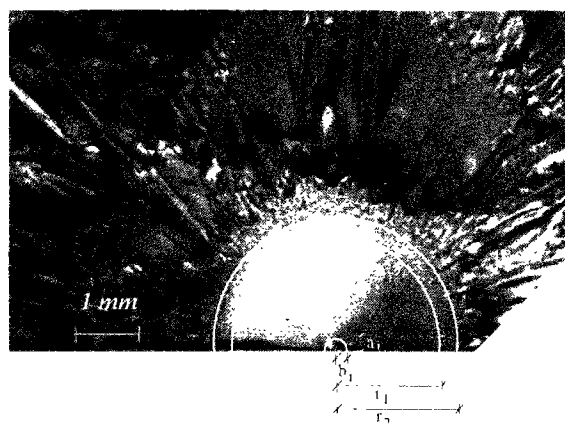


Figure A.12 : Dessin du faciès local de rupture et dimensions caractéristiques

Cette équation est issue de la mécanique linéaire élastique de la rupture (permettant de relier contrainte et facteur d'intensité des contraintes). La frontière entre le miroir et la zone grenue correspond au lieu où le facteur d'intensité des contraintes est égal au facteur d'intensité des contraintes de bifurcation des fissures ( $K_{cb}$ ). Le miroir a une forme quasi semi-circulaire (il se referme près des bords). Le facteur de forme correspondant à une fissure semi-circulaire débouchante dans un milieu semi-infini en traction est pratiquement

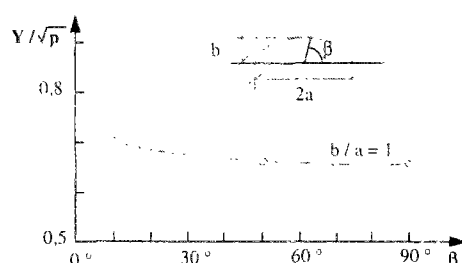
<sup>22</sup> VARSHNEYA A. K., *Fundamentals in organic glasses*, Harcourt Brace & Company, 1994

JACOB L., *Stress levels causing thermal fractures can be predicted more accurately in Glass Digest*, 1988, vol. 11, pp 76-78

ZARZYCKI J., *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982

SHAND E. B., *Breaking stress of glass determined from dimensions of fracture of mirrors in Journal of the American Ceramic Society*, 1959, vol. 42, n° 10, pp 474-477

constante assez loin des bords (cf. Figure A.13). Alors, dans la zone où le miroir est semi-circulaire, un facteur d'intensité des contraintes peut être déterminé et la constante de miroir calculée.



**Figure A.13 :** Variation du facteur de forme en fonction de l'angle<sup>23</sup>

De nombreuses études se sont intéressées à ce point et donnent des valeurs de constantes de miroirs (cf. Tableau A.1).

**Constantes de miroir pour le verre silico-sodocalcique (MPa.m<sup>1/2</sup>)<sup>24</sup>**

| frontière miroir-zone grenue (M <sub>1</sub> ) | frontière zone grenue-lancettes (M <sub>2</sub> ) |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1,7 (Abdel-Latif et al., 1977) <sup>25</sup>   | 2,0 (Kirchner et Gruver, 1974) <sup>26</sup>      |
| 1,7 (Bansal et Duckworth, 1977) <sup>27</sup>  | 2,1 (Mecholsky et al., 1976) <sup>29</sup>        |
| 1,9 (Kerper et Scuderi, 1965) <sup>28</sup>    |                                                   |
| 1,9 (Mechalsky et al., 1976) <sup>29</sup>     |                                                   |
| 1,9 (Johnson et Holloway, 1966) <sup>30</sup>  |                                                   |

**Tableau A.1 :** Valeurs des constantes de miroir issues de la littérature

Grâce à l'observation du faciès de rupture local, on peut retrouver la contrainte de rupture. Cette mesure n'est pas très précise et constitue plutôt une vérification ou une estimation dans le cas d'une rupture accidentelle.

#### A.II.3.d. Rupture du verre trempé

Lors de la rupture d'un élément, il s'établit un équilibre entre l'énergie potentielle élastique qui disparaît et l'énergie de surface qui apparaît plus l'énergie cinétique de fissuration<sup>31</sup>. Le verre trempé présente des contraintes résiduelles, donc une grande énergie potentielle ce qui explique la très grande surface créée lors de la rupture et la très grande vitesse de fissuration. Ainsi, plus les contraintes de trempé sont importantes, plus le nombre de morceaux créés lors de la rupture est important<sup>32</sup> (cf. Figure A.14).

<sup>23</sup> ISIDA M., NOGUCHI H., YOSHIDA T., Tension and Bending of finite thickness plates with semi-elliptical surface crack, International Journal of Fracture, vol. 26, pp. 157-188, 1994

<sup>24</sup> FREIMAN S. W., *Elasticity and Strength in Glasses in Glass : Science and Technology* (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

<sup>25</sup> ABDEL-LATIF A. I. A., TRESSLER R. E., BRADT R. C., International Journal of Fracture Mechanics, 1976, vol. 59, pp 174-175

<sup>26</sup> KIRCHNER H. P., GRUYER R. M., *Fracture Mechanics of Ceramics*, vol 3, pp 205-229, New York : Plenum Press (Bradt R. C., Hasselman D. P. H., Lange F. F., Ed.), 1978

BANSAL G. K., DUCKWORTH W. H., Journal of the American Ceramic Society, 1977, vol. 60, pp 304-310

<sup>28</sup> KERPER M. J., SCUDERI T. G., Relation of strength of thermally tempered glass to fracture mirrors size in American Ceramic Society Bulletin, 1965, vol. 44, n° 12, pp 953-955

<sup>29</sup> MECHOLSKY J. J., FREIMAN S. W., RICE R. W., Journal of Material Science, 1976, vol. 11, pp 1310-1319

<sup>30</sup> JOHNSON J. W., HOLLOWAY D. G., Philosophic Magazine, 1966, vol. 14, pp 731-743

<sup>31</sup> ACLOQUE P., Etude cinématographique ultra-rapide du mécanisme de fracture du verre trempé in Symposium sur la résistance mécanique du verre et les moyens de l'améliorer. Florence, 25-29 septembre 1961

<sup>32</sup> McMASTER R. A., SHETTERLY D. M., BUENO A. G., *Annealed and tempered glass in Ceramics and Glasses*, ASM International, 1991 (Engineered Materials Handbook, vol. 4)

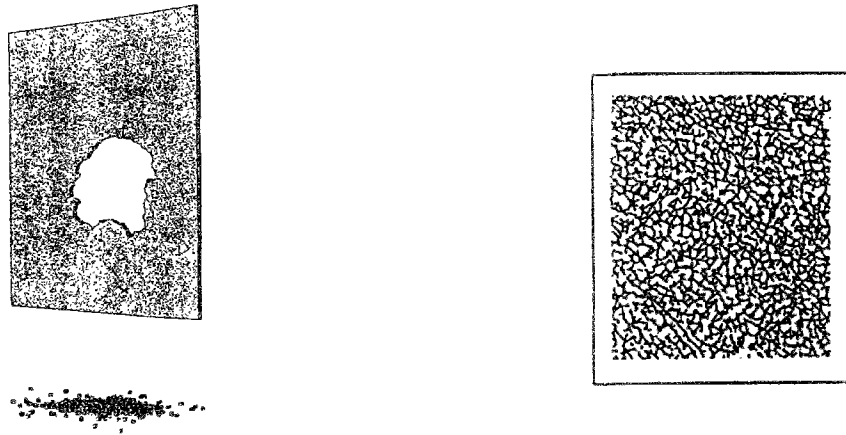
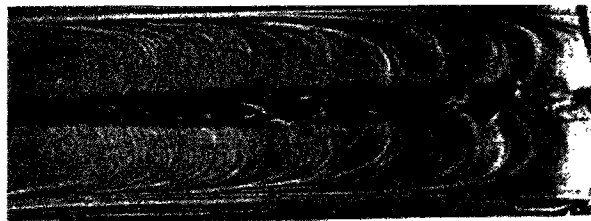


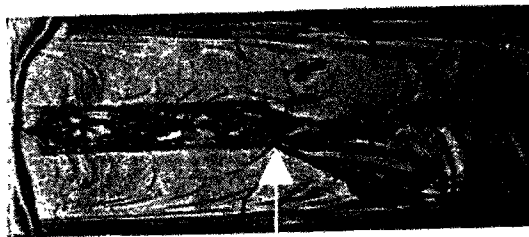
Figure A.14 : Vues générales de la rupture du verre trempé

A partir de l'origine de rupture, on retrouve le même faciès de rupture que celui décrit précédemment pour le verre recuit : miroir, zone grenue et lancettes. L'énergie libérée étant beaucoup plus importante que dans le cas du verre recuit, toutes les surfaces présentent des faciès tourmentés :



**fissuration primaire :**

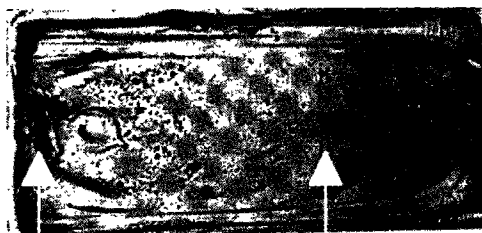
Les marques sont uniformes d'un bout à l'autre de la face de rupture. La zone centrale d'arrachement, pointillée et tourmentée traduit un état de forte contrainte. Les lignes en forme de crosse sur la partie miroir des faces latérales de rupture du verre trempé sont dues à l'intersection du front de rupture avec l'onde élastique transversale émise à l'occasion de microbifurcations.



bifurcation

**bifurcation :**

On retrouve à gauche les traces d'une fissure primaire. La partie centrale est ensuite tourmentée ce qui montre une augmentation des concentrations de contrainte. La photo se termine par une bifurcation amorcée au centre vers le bas.



départ

arrêt

**fissuration secondaire :**

La fissuration secondaire est peu tourmentée. Le départ de la fissure se trouve à l'extrémité gauche alors que l'arrêt se voit à l'extrémité droite.

Figure A.15 : Photos des faciès locaux de rupture du verre trempé<sup>33</sup>

<sup>33</sup> ACLOQUE P., Influence de l'état de contrainte du verre sur les modalités de sa fracture in IV<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Paris, 1956

La vitesse de propagation des fissures dans le verre trempé est de l'ordre de 1500 m/s. Lors des bifurcations, les mêmes stigmates de départ se retrouvent : un point nodal, un miroir et une zone dans laquelle apparaissent progressivement la bande grenue et les lignes en forme de crosse. La présence de la zone miroir est due au fait que la fissure n'a pas atteint sa vitesse limite instantanément.

#### A.II.4. Fissuration sous-critique

##### A.II.4.a. Introduction

La fatigue statique fut découverte par Grenet en 1899<sup>34</sup>. Il mit en évidence la dépendance de la résistance du verre vis-à-vis de la vitesse d'application de la charge et de la durée de chargement.

Le terme "fatigue statique" utilisé dans le cas du verre ne correspond pas tout à fait au terme fatigue utilisé par les mécaniciens. Celui-ci fait référence aux phénomènes observés dans le cas d'un chargement cyclique. La "fatigue statique" peut se produire sous chargement constant pour le verre.

Ce phénomène est plus prononcé lorsque l'atmosphère contient de la vapeur d'eau ; il est plus faible dans le vide, en atmosphère desséchée et à basse température. Les courbes de résistance en fonction du temps sont donc différentes en fonction de l'environnement, de l'état de surface... Cependant, dans un système de coordonnées réduites, on obtient une courbe unique dite "courbe universelle de fatigue" pour un verre donné<sup>35</sup> :

*abscisse* : durée de vie  $t_f$  divisée par le temps pour lequel la résistance diminue de moitié à 77 K ( $t_{0,5}$ )

*ordonnée* : résistance observée  $\sigma$  divisée par celle observée à 77 K ( $\sigma_N$ )

##### A.II.4.b. Action de l'eau en fond de fissure

Cette dépendance en temps de la résistance mécanique est expliquée par le concept de "corrosion sous contrainte". Il existe une réaction d'hydrolyse dans les verres de silicates par adsorption d'humidité. Michalske et Frieman<sup>36</sup> ont montré que la réaction entre le verre et l'eau se fait en trois étapes (cf. Figure A.16) :

**Etape 1** : Une molécule d'eau est adsorbée en fond de fissure déformée. Il y a formation d'une liaison hydrogène. L'interaction se fait par une force d'attraction de Van der Waals.

**Etape 2** : Les liaisons Si - O et O - H sont cassées par transfert d'un proton et d'un électron. Deux groupes silanols apparaissent liés par une liaison hydrogène.

**Etape 3** : La liaison hydrogène casse et la surface de rupture se trouve couverte par deux groupes silanols.

<sup>34</sup> GRENET L., *Mechanical strength of glass* in Bull. Soc. Enc. Nat. Paris (Ser. 5), 1899, vol. 4, pp 838-848

WIEDERHORN S. M., *Influence of water vapor on crack propagation in soda-lime-silicate glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1967, vol. 50, n° 8, pp 407-417

<sup>35</sup> ZARZYCKI J., *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982

MOULD R. E., *Fundamental phenomena in materials science*, New York : Plenum, 1967, vol. 4, p 119

<sup>36</sup> MICHALSKE T. A., BUNKER B. C., *Slow fracture model based on strained silicate structures* in Journal of Applied Physics, 1984, vol. 56, n° 10

MICHALSKE T. A., FREIMAN S. W., *A molecular mechanism for stress corrosion in vitreous silica* in Journal of the American Ceramic Society, 1983, vol. 66, n° 4, pp 284-288

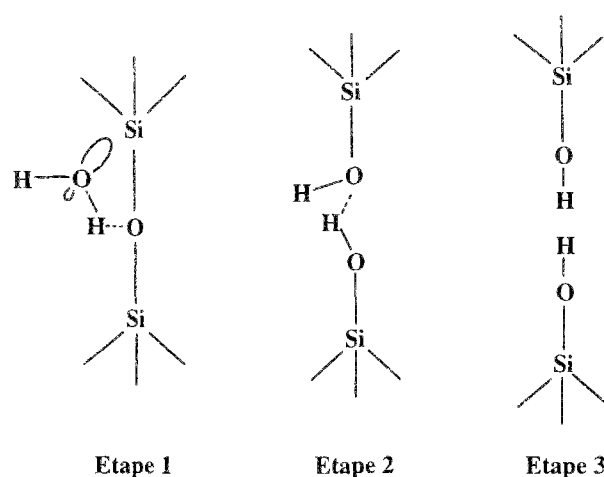


Figure A.16 : Schémas des étapes de la réaction entre le verre et l'eau

Cette réaction entre le verre et l'humidité environnante est favorisée par les déformations en fond de fissure et par la chaleur. De plus, cette réaction est sensible au pH de la solution. Plus le pH est élevé, plus la réaction est importante. Lors d'une propagation lente, le pH en fond de fissure est contrôlé par l'environnement. La réaction est beaucoup plus forte dans une solution 1 N NaOH que dans 1 N HCl. Par contre, lors d'une propagation rapide de fissure, le pH est contrôlé par la composition du verre. Le comportement est alors le même quel que soit l'environnement<sup>37</sup>.

Quand le verre n'est pas soumis à une contrainte, la corrosion est uniforme dans la fissure. Le rayon de courbure tend à augmenter de même que la résistance puisque les concentrations de contraintes diminuent (cf. Figure A.17(a)). C'est l'"effet Joffe"<sup>38</sup>. Par contre, en présence de contraintes d'extension en fond de fissure, la vitesse de réaction progresse plus rapidement en fond de fissure. La fissure devient plus aiguë et la résistance diminue (cf. Figure A.17(b)).

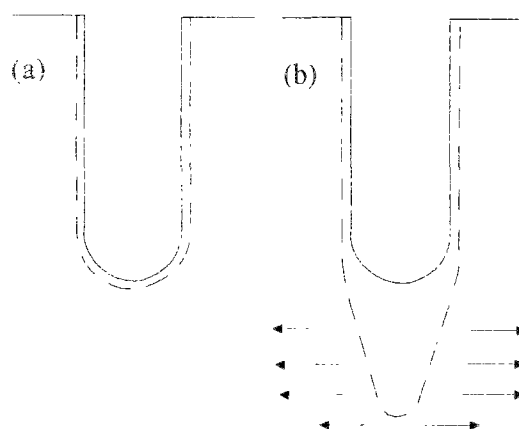


Figure A.17 : Schéma de propagation de fissure

On appelle **limite de fatigue** l'état de contrainte pour lequel s'établit un équilibre entre l'arrondissement du fond de fissure et la propagation de fissure.

<sup>37</sup> WIEDERHORN S. M., *Crack growth as an interpretation of static fatigue* in Journal of Non Crystalline Solid, 1975, vol. 19, n° 1, pp 169-181

<sup>38</sup> ZARZYCKI J., *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982

CHARLES R. J., HILLIG W. B., *The kinetics of glass failure by stress corrosion* in Symposium sur la résistance du verre et les moyens de l'améliorer, Charleroi, 1962 (Union Centrale Continentale du Verre)

#### A.II.4.c. Courbe de vitesse de fissuration

Pour décrire la fatigue statique, Wiederhorn<sup>39</sup> a mesuré la vitesse de fissuration en fonction du facteur d'intensité des contraintes pour différentes conditions d'environnement et de températures pour du verre silico-sodo calcique (cf. Figure A.18). Cinq régions peuvent être distinguées sur ces courbes<sup>40</sup> :

**Région 0 :** En deçà d'une certaine limite du facteur d'intensité des contraintes ( $K_{Ith}$  appelé limite de fatigue statique), le verre ne semble pas présenter de fissuration. Cette valeur est mal connue et difficile à mesurer puisqu'elle concerne les vitesses de fissuration très faibles.

**Région I :** La vitesse de fissuration dépend de  $K_I$  et de l'environnement. Elle est contrôlée par la réaction chimique (par le potentiel chimique des éléments réactifs).

**Région II :** La vitesse de fissuration dépend peu de  $K_I$ . La réaction est limitée par le transport de vapeur d'eau de l'environnement vers la pointe de fissure.

**Région III :** La vitesse de fissuration est indépendante de  $K_I$  et de l'environnement. La fissuration dans cette zone est difficile à expliquer. Elle est observable en particulier dans les verres riches en silice. Wiederhorn explique ce comportement par la présence d'effets électrostrictifs en fond de fissure. Le modèle développé relie la pente de la vitesse de fissuration en fonction de  $K_I$  avec les constantes diélectriques du verre et du milieu ambiant.

**Région IV :** A partir d'un certain moment, la vitesse de fissuration n'augmente plus. La vitesse maximale de fissuration qui puisse être atteinte est la valeur correspondante à  $K_{cb}$ . C'est une valeur du facteur d'intensité des contraintes caractéristique du matériau correspondant au moment où la fissure bifurque.

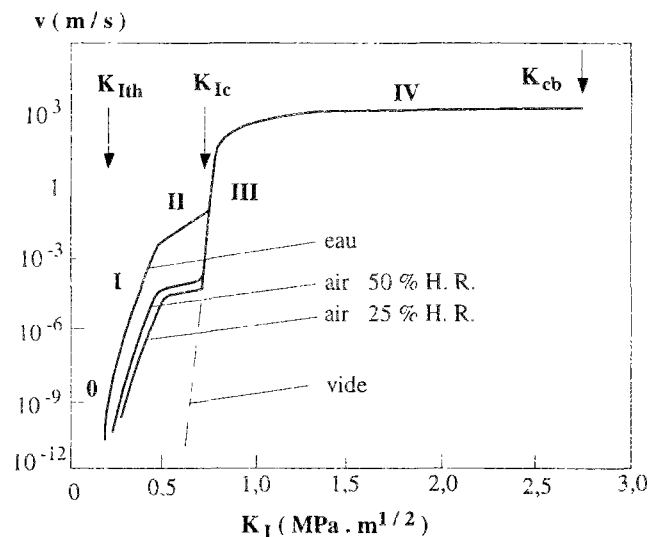


Figure A.18 : Courbes de vitesse de fissuration en fonction de  $K_I$  pour différents environnements<sup>41</sup>

<sup>39</sup> WIEDERHORN S. M., FREIMAN S. W., FULLER E. R., SIMMONS C. J. *Effects of water and other dielectrics on crack growth* in Journal of Material Science, 1982, vol. 17, pp 3460-3478

<sup>40</sup> MENCIK J., *Strength and fracture of glass and ceramics*, Glass Science and Technology, Elsevier (1992)  
ZARZYCKI J., *Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982

<sup>41</sup> MENCIK J., *Strength and Fracture of Glass and Ceramics*, Elsevier, 1992 (Glass Science and Technology)

#### A.II.4.d. Loi de "fatigue" statique

La théorie de Charles et Hillig permet de déterminer la vitesse de fissuration à partir des caractéristiques du verre et du milieu environnant. Le problème est de déterminer le changement de forme des contours des défauts sous l'influence de la contrainte et de l'environnement réactif. Une équation différentielle donne la géométrie de la fissure en fonction du temps. L'intégration complète de cette équation est très difficile et n'est utile que si toutes les caractéristiques physiques du système sont spécifiées (ce qui est souvent difficile).

Deux types d'équations, déterminés à partir des résultats expérimentaux, sont généralement utilisés pour décrire la fissuration sous-critique :

##### *Loi exponentielle<sup>42</sup> :*

$$v = v_0 \exp(BK_I)$$

avec  $v$  = vitesse de fissuration  
 $v_0, B$  = paramètres de la loi  
 $K_I$  = facteur d'intensité des contraintes

Cette relation peut être retrouvée à partir d'une réalité physique : cinétique chimique de réaction.

##### *Loi puissance (loi d'Evans)<sup>43</sup> :*

$$v = AK_I^n$$

avec  $v$  = vitesse de fissuration  
 $A, n$  = paramètres de la loi  
 $K_I$  = facteur d'intensité des contraintes

Cette relation est plus simple à utiliser. Elle ne peut pas être reliée à un phénomène physique mais donne une meilleure approximation des résultats expérimentaux.

Les paramètres de ces loi de vitesse de fissuration ( $v_0, B, A$  et  $n$ ) dépendent du matériau étudié et de l'environnement (taux d'humidité relative et température ambiantes en particulier).

---

<sup>42</sup> MICHALSKE T. A., BUNKER B. C., SMITH W. L., *Fatigue mechanisms in high strength silica glass fibers* in Journal of the American Ceramic Society, 1991, vol. 74, n° 8, pp 1993-1996  
 GEHRKE E., ULLNER C., HAHNERT M., *Effect of corrosive media on crack growth of model glasses and commercial silicate glasses* in Glass. Tech. Ber., 1990, vol. 63, n° 9, pp 255-265  
 RITTER J. E., SHERBURNE C. L., *Dynamic and static fatigue of silicate glass* in Journal of the American Ceramic Society, vol. 54, n° 12, pp 601-605 (1971)  
 CHARLES R. J., HILLIG W. B., *The kinetics of glass failure by stress corrosion* in Symposium sur la résistance du verre et les moyens de l'améliorer, Charleroi, 1962 (Union Centrale Continentale du Verre)  
<sup>43</sup> GUPTA P. K., INNISS D., KURKJIAN C. R., BROWNLOW D. L., *Determination of crack velocity as a function of stress intensity from static fatigue data* in Journal of the American Ceramic Society, 1994, vol. 77, n° 9, pp 2445-2449  
 SAKAGUSHI S., SAWAKI Y., ABE Y., KAWASAKI T., *Delayed failure in silica glass* in Journal of Materials Science, 1982, vol. 17, pp 3460-3478  
 EVANS A. G., *Slow crack growth in brittle materials under dynamic loading conditions* in International Journal of Fracture, 1974, vol. 10, n° 2, pp 251-259

*Résumé du chapitre A*

L'étude bibliographique a permis de recenser les modèles de comportement thermo-mécaniques pour la description du verre. Le modèle d'origine (théorie du refroidissement instantané) a été enrichi lors de travaux successifs pour conduire au modèle viscoélastique prenant en compte l'état de la structure.

La rupture du verre peut être caractérisée par trois points essentiels : son aspect fragile, son faciès caractéristique et la présence de fissuration sous-critique. La fragilité du verre conduit à montrer l'importance de la présence de défauts dans la structure (en surface en particulier). L'observation macroscopique du faciès de rupture permet de déterminer le type de sollicitation ayant conduit à la ruine de l'élément. Son observation microscopique donne une estimation de la valeur de la contrainte de rupture. Le verre est sensible à la présence d'eau dans son environnement. La réaction chimique entre l'eau et le verre en fond de fissure est activée par la température et les déformations. Elle conduit à une propagation stable des fissures préexistantes. Le verre apparaît sensible à la vitesse de chargement.



# CHAPITRE B

## SIMULATION DE LA TREMPE DU VERRE

|            |                                                                                       |    |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| B.I.       | Introduction.....                                                                     | 53 |
| B.II.      | Modélisation du comportement du verre pour la simulation du processus de trempe ..... | 54 |
| B.II.1.    | Comportement mécanique.....                                                           | 54 |
| B.II.1.a.  | Relation contrainte/déformation.....                                                  | 54 |
| B.II.1.b.  | Modèle de Maxwell généralisé.....                                                     | 56 |
| B.II.2.    | Comportement thermo-mécanique du verre stabilisé.....                                 | 57 |
| B.II.3.    | Relaxation structurelle.....                                                          | 58 |
| B.II.4.    | Introduction de la température fictive.....                                           | 61 |
| B.III.     | Modélisation par éléments finis.....                                                  | 62 |
| B.III.1.   | Conditions limites d'échange thermique.....                                           | 62 |
| B.III.2.   | Maillage et conditions limites en déplacement.....                                    | 63 |
| B.III.3.   | Algorithme de résolution.....                                                         | 64 |
| B.III.4.   | Caractéristiques du verre.....                                                        | 65 |
| B.III.4.a. | Caractéristiques mécaniques.....                                                      | 66 |
| B.III.4.b. | Caractéristiques thermiques.....                                                      | 67 |
| B.IV.      | Simulations et comparaisons.....                                                      | 68 |
| B.IV.1.    | Effet intérieur.....                                                                  | 69 |
| B.IV.1.a.  | Résultats.....                                                                        | 69 |
| B.IV.1.b.  | Comparaison avec la littérature.....                                                  | 71 |
| B.IV.2.    | Etude de sensibilité.....                                                             | 73 |
| B.IV.3.    | Effet de bord.....                                                                    | 77 |
| B.IV.3.a.  | Evolution de la température au cours du temps.....                                    | 77 |
| B.IV.3.b.  | Contraintes transitoires.....                                                         | 78 |
| B.IV.3.c.  | Contraintes résiduelles.....                                                          | 78 |
| B.IV.3.d.  | Influence du chanfrein.....                                                           | 79 |
| B.IV.4.    | Plaque épaisse trempée.....                                                           | 80 |
| B.IV.4.a.  | Mesure des contraintes résiduelles de trempe.....                                     | 80 |
| B.IV.4.b.  | Mesures optiques sur nos éléments.....                                                | 83 |
| B.IV.4.c.  | Détermination des paramètres de trempe.....                                           | 84 |
| B.IV.4.d.  | Validation de notre simulation.....                                                   | 85 |
| B.IV.4.e.  | Contraintes résiduelles.....                                                          | 85 |
| B.V.       | Conclusion.....                                                                       | 86 |
|            | Résumé du chapitre B.....                                                             | 87 |



## B. SIMULATION DE LA TREMPE DU VERRE

### B.I. Introduction

L'objectif de la simulation de la trempe thermique du verre est de déterminer les contraintes transitoires et résiduelles dues à ce traitement. La trempe thermique du verre consiste en un refroidissement brutal par jets d'air du verre chauffé au delà de 600°C (cf. Figure B.1). Ce traitement thermique provoque l'apparition de contraintes au cours du refroidissement en raison des forts gradients thermiques dans l'élément, et de contraintes résiduelles car le verre a un comportement viscoélastique variable avec la température.

Le calcul des contraintes transitoires permet d'évaluer les risques de rupture du verre en cours de trempe, de pouvoir éventuellement quantifier l'évolution de défauts préexistants. Les contraintes résiduelles donnent l'état de précontrainte du verre à la fin du traitement. La connaissance de ces contraintes est indispensable pour prédire la résistance du verre trempé.

Ce chapitre concernant la simulation de la trempe thermique du verre est séparé en trois parties. La première partie s'intéresse à l'effet intérieur : trempe d'une plaque infinie. Les résultats de nos simulations sont comparés à des résultats expérimentaux issus de la littérature. Le modèle choisi et les données caractérisant le matériau utilisées pour décrire le comportement thermo-mécanique du verre sont alors validés.

La deuxième partie du chapitre concerne l'analyse de l'effet de bord. L'état de contrainte résiduel d'une plaque trempée de taille finie est tridimensionnel. Les refroidissements appliqués sur les tranches induisent de très fortes variations de contrainte près des bords.

Ces simulations ont pour but de connaître l'état de contrainte des plaques de verre épaies (19 mm d'épaisseur) testées ensuite en flexion 4 points. Cela est présenté dans la troisième partie. Des mesures optiques, sur ces éléments, des contraintes résiduelles vont permettre à la fois de déterminer certains paramètres de trempe, et de valider nos simulations. Nous disposons alors des contraintes résiduelles sur la tranche nécessaires à l'évaluation de la résistance des éléments trempés en flexion 4 points.

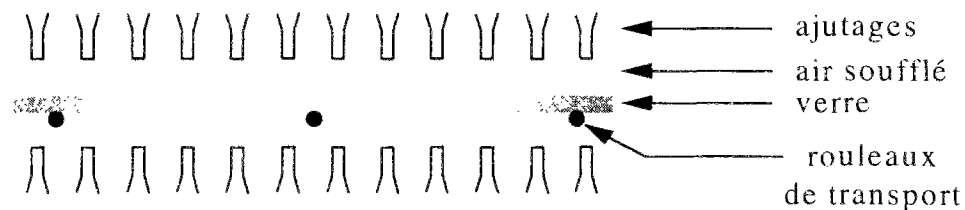


Figure B.1 : Dessin du dispositif de trempe

## B.II. Modélisation du comportement du verre pour la simulation du processus de trempe

Le modèle de comportement utilisé pour les simulations est le modèle de Narayanaswamy<sup>1</sup>. Le verre est décrit en tant que matériau viscoélastique. De plus, son comportement variable avec le temps est aussi fonction de la température. Ce modèle prend donc en compte la relaxation des contraintes mais aussi la relaxation structurale (influence de l'état de la structure du verre sur son comportement).

### B.II.1. Comportement mécanique

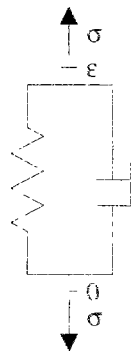
#### B.II.1.a. Relation contrainte / déformation

Un comportement viscoélastique peut être présenté par une formulation thermodynamique ou par une formulation fonctionnelle. L'approche fonctionnelle qui sera utilisée ici est plus simple à formuler et plus simple d'emploi<sup>2</sup>.

##### B.II.1.a.α. Formulation thermodynamique

L'approche thermodynamique consiste à considérer le problème du point de vue énergétique. Il s'agit de respecter les principes de la thermodynamique. Il faut définir un potentiel thermodynamique duquel dérivent les lois d'état. En relaxation, les contraintes peuvent alors être reliées aux déformations et, de même, en fluage, la dérivée des déformations est reliée aux contraintes.

La variable observable est la déformation totale  $\varepsilon$ , sa variable associée est la contrainte  $\sigma$ . Le modèle rhéologique de Kelvin - Voigt s'écrit en relaxation :



$$\sigma = \lambda [\text{Tr}(\varepsilon) + \theta_\lambda \text{Tr}(\dot{\varepsilon})] \mathbf{1} + 2\mu [\varepsilon + \theta_\mu \dot{\varepsilon}]$$

avec  $\sigma$  = contrainte  
 $\varepsilon$  = déformation  
 $\theta_\lambda, \theta_\mu$  = coefficients caractéristiques de la viscosité du matériau  
 $\lambda, \mu$  = coefficient de Lamé  
 $\nu$  = coefficient de Poisson

Le modèle rhéologique de Maxwell s'écrit en fluage:



$$\dot{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left[ \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1} \right] - \frac{\nu}{E} \left[ \text{Tr}(\dot{\sigma}) + \frac{\text{Tr}(\sigma)}{\tau_2} \right] \mathbf{1}$$

avec  $\sigma$  = contrainte  
 $\varepsilon$  = déformation  
 $E$  = module d'Young  
 $\tau_1, \tau_2$  = coefficients caractéristiques de la viscosité du matériau

<sup>1</sup> NARAYANASWAMY O. S., *Stress and structural relaxation in tempering glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1978, vol. 61, n° 3-4, pp 146-152

<sup>2</sup> LEMAITRE J., CHABOCHE J. L., *Mécanique des matériaux solides*, Paris : Dunod-Bordas (1985)

Pour représenter des comportements viscoélastiques complexes, les modèles présentés précédemment peuvent être associés. L'identification de ces associations de ressorts et d'amortisseurs devient rapidement insoluble. Le passage au nombre de modèles infini ou au continu se fait par la notion de spectres de fluage ou de relaxation.

Pour la viscoélasticité linéaire, l'approche fonctionnelle présente des avantages incontestables sur l'approche par variables d'état discrètes.

### B.II.1.a.β. Formulation fonctionnelle

En fluage, la formulation fonctionnelle consiste à écrire une fonctionnelle  $\varepsilon(t)$  de toute l'histoire de la contrainte :

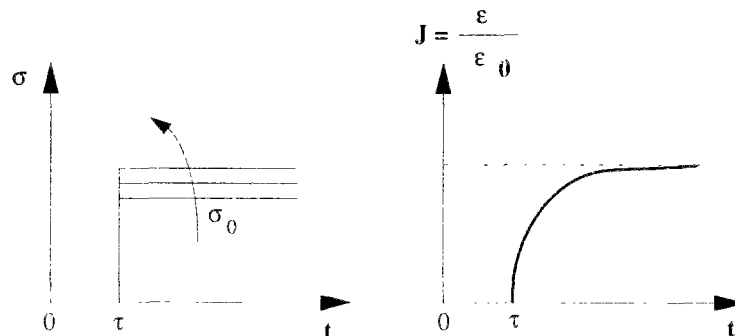
$$\varepsilon(t) = \mathcal{J}(\sigma(t)) \quad -\infty \leq t \leq t \quad \text{avec } \mathcal{J} = \text{fonctionnelle}$$

L'écriture en relaxation est la forme duale pour la recherche de la réponse  $\sigma(t)$  à une sollicitation de déformation  $\varepsilon(t)$ .

#### Fonction fluage :

On cherche la réponse  $\varepsilon(t)$  à une sollicitation unidimensionnelle  $\sigma(t)$  d'un matériau viscoélastique.

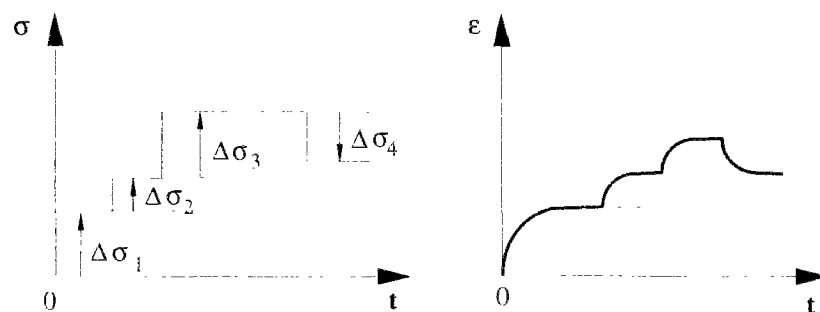
*Soit un chargement en fonction échelon*



La réponse  $\varepsilon(t)$  est :  $\varepsilon = J(t - \tau)\sigma_0$

La fonction de fluage  $J(t - \tau)$  est caractéristique de la viscoélasticité unidimensionnelle du matériau.

*Soit un chargement en fonction étagée*



La réponse  $\varepsilon(t)$  est :  $\varepsilon(t) = \sum J(t - t_i)\Delta\sigma_i$

Soit un chargement en fonction continue ou continue par morceaux et dérivable

Une fonction chargement quelconque peut être considérée comme la limite d'une fonction étagée. La réponse  $\varepsilon(t)$  s'exprime sous la forme d'une intégrale de Riemann à laquelle il faut ajouter des discontinuités éventuelles.

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau + \sum_{j=1}^n J(t-t_j) \Delta\sigma_j$$

### Fonction relaxation :

On cherche la réponse  $\sigma(t)$  à une sollicitation unidimensionnelle  $\varepsilon(t)$ . Avec la même démarche que dans le cas du fluage, la réponse à une sollicitation quelconque s'écrit :

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau + \sum_{j=1}^n R(t-t_j) \Delta\varepsilon_j$$

Dans le cas d'une sollicitation tridimensionnelle, on peut séparer la partie volumique et la partie déviatorique pour écrire la réponse  $\sigma(t)$  :

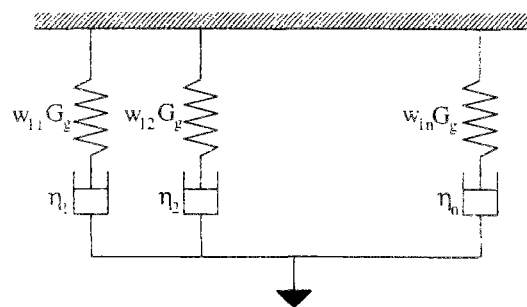
$$\begin{cases} s_{ij}(x, t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} e_{ij}(x, t') dt' \\ \bar{\sigma}(x, t) = \int_{-\infty}^t K(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \bar{\varepsilon}(x, t') dt' \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= s_{ij} + \bar{\sigma} \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \\ G &= \text{module de relaxation en cisaillement} \\ K &= \text{module de relaxation en pression hydrostatique} \end{aligned}$$

Le modèle de comportement du verre utilisé dans cette étude est écrit en relaxation des contraintes.

### B.II.1.b. Modèle de Maxwell généralisé

Le modèle de Maxwell généralisé est un modèle rhéologique discret. C'est l'association en parallèle de plusieurs modèles de Maxwell (ressort et amortisseur en série). Il est utilisé pour décrire la partie déviatorique (**Figure B.2**) et la partie volumique (avec en plus un ressort seul en parallèle, cf. Figure B.3) du comportement du verre<sup>3</sup>.

#### B.II.1.b.α. Partie déviatorique



**Figure B.2 :** Représentation du modèle généralisé de Maxwell pour la partie déviatorique

<sup>3</sup> DUFFRENE L., *Comportement viscoélastique d'un verre silico-sodocalcique dans le domaine des températures intermédiaires*, thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris soutenue le 21 décembre 1994

GYR, DUFFRENE L., LABROT M., *New insights into the viscoelasticity of glass*, in Journal of Non-Crystalline Solids, 1994, vol. 175, pp 103-117

Le module de relaxation de cisaillement s'écrit avec les modules de cisaillement instantané ( $G_g$ ) et différé ( $G_e$ ), et une série de Prony ( $\Psi_1(t)$ ). Celle-ci est la somme de termes exponentiels à 2 paramètres  $w_{1i}$  (poids) et  $\tau_{1i}$  (temps de relaxation). Le module de cisaillement différé est nul.

$$G(t) = 2G_g \Psi_1(t)$$

$$\text{avec } \Psi_1(t) = \sum_{i=1}^{n_1} w_{1i} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{1i}}\right)$$

$$\tau_{1i} = \frac{\eta_i}{w_{1i} G_g}$$

$G_g$  = module de cisaillement instantané  
 $G_e$  = module de cisaillement différé = 0

### B.II.1.b.β. Partie volumique

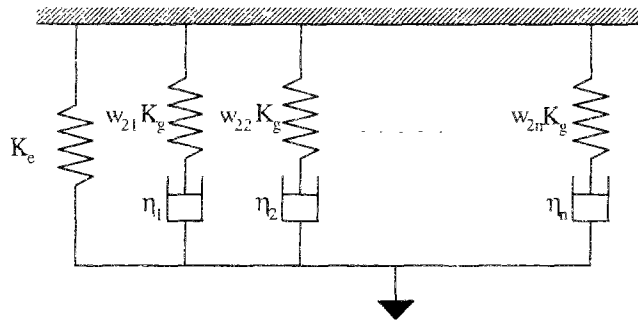


Figure B.3 : Représentation du modèle de Maxwell généralisé pour la partie volumique

Le module volumique de relaxation s'écrit de même avec les modules volumiques instantané ( $K_g$ ) et différé ( $K_e$ ), et une série de Prony ( $\Psi_2(t)$ ). Le module volumique différé est non nul ce qui correspond au ressort seul en parallèle.

$$K(t) = 3K_e - (3K_e - 3K_g)\Psi_2(t)$$

$$\text{avec } \Psi_2(t) = \sum_{i=1}^{n_2} w_{2i} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{2i}}\right)$$

$$\tau_{2i} = \frac{\eta_i}{w_{2i} K_g}$$

$K_g$  = module volumique instantané  
 $K_e$  = module volumique différé

### B.II.2. Comportement thermo-mécanique du verre stabilisé

Quand sa structure est stabilisée, le verre est un matériau thermorhéologiquement simple<sup>4</sup>. Le matériau présente les mêmes comportements à différentes températures et seule la vitesse des mécanismes microstructuraux de réorganisation (temps moyen de relaxation par exemple) varie avec la température. L'une des deux variables, temps ou température peut être éliminée. Si la fonction de relaxation est connue à une température de référence  $T_{ref}$ , elle peut être déterminée pour n'importe quelle autre température.

<sup>4</sup> SCHWARZL F., STAVERMAN A.J., *Time-temperature dependance of linear viscoelastic behavior* in Journal of Applied Physics, 1952, vol. 23, n° 8  
 NARAYANASWAMY O. S., *Stress and structural relaxation in tempering glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1978, vol. 61, n° 3-4, pp 146-152  
 GARDON R., *Thermal tempering of glass* in Glass - Science and Technology (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

Le temps réduit  $\xi$  est introduit pour permettre la transformation en température. Ainsi, pour les fonctions  $\psi_i(t)$ , on a :

$$\Psi_{i_T}(t) = \Psi_{i_{T_{ref}}}(\xi)$$

avec  $\xi(t) = \int_0^t \frac{\tau_{ref}}{\tau(T, t')} dt' = \text{temps réduit}$   
 $\tau_{ref} = \text{temps de relaxation à } T_{ref}$   
 $\tau(T, t') = \text{temps de relaxation à } T$

Le verre étant considéré comme thermorhéologiquement simple (pour un état stable), les poids des séries de Prony définissant G et K restent constants avec la température. Seuls les temps de relaxation changent. La loi d'Arrhénius est couramment utilisée pour représenter cette influence de la température sur le comportement viscoélastique. La variation des temps de relaxation (ou de la viscosité) est calculée grâce au "facteur de décalage"  $\Phi(T)$ .

$$\xi(t, T) = \int_0^t \frac{\tau_{ref}}{\tau(T, t')} dt' = \int_0^t \Phi(T(t)) dt'$$

avec  $\ln(\Phi(T)) = -\frac{H}{R} \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right)$   
 $H = \text{énergie d'activation}$   
 $R = \text{constante des gaz parfaits}$

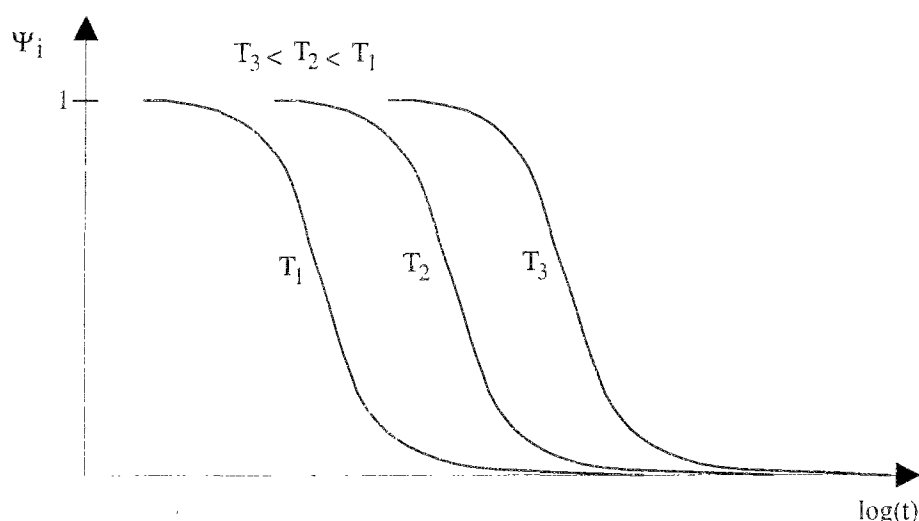


Figure B.4 : Variations de la fonction de relaxation avec le temps pour différentes températures

### B.II.3. Relaxation structurelle

La trempe du verre est un traitement thermique brutal. En cours de refroidissement, la structure du verre n'est pas stabilisée. Le verre étant sensible à la vitesse de chargement thermique, l'état de la structure doit être pris en compte dans les calculs<sup>5</sup>.

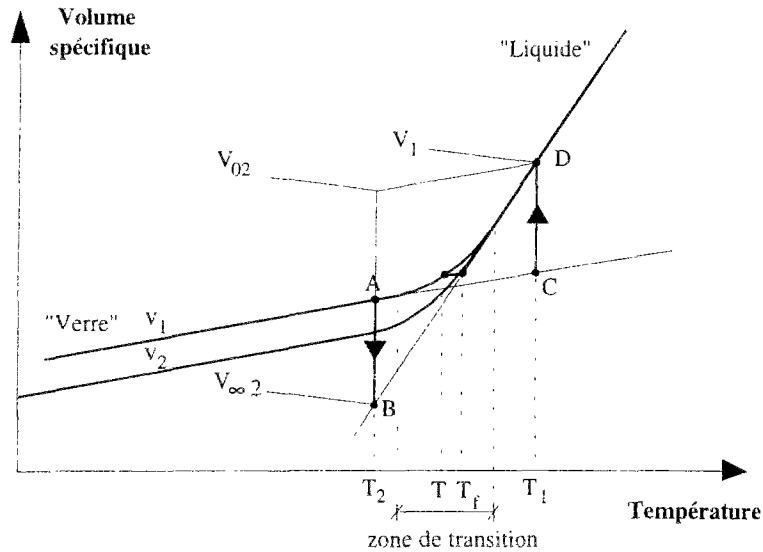
L'influence de la vitesse de chargement thermique peut être mise en évidence sur la courbe du volume spécifique en fonction de la température (cf. Figure B.5).

Quand le verre est chauffé jusqu'à la température  $T_2$  (point A de la Figure B.5) en dessous de  $T_g$  (température de transformation), la structure du verre continue à évoluer vers un état stable : état correspond au verre liquide (point B de la Figure B.5). Cette

<sup>5</sup> NARAYANASWAMY O. S., GARDON R., *Calculation of residual stress in glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1969, vol. 52, n° 10, pp 554-558  
 NARAYANASWAMY O. S., *A model of structural relaxation in glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1971, vol. 54, n° 10, pp 491-498  
 GARDON R., *Thermal tempering of glass* in Glass : Science and Technology (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980  
 GUILLEMET C., *Annealing and tempering of glass* in XV<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Leningrad, 1989  
 DUFFRENE L., *Comportement viscoélastique d'un verre silico-sodocalcique dans le domaine des températures intermédiaires*, thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris soutenue le 21 décembre 1994

évolution est appelée relaxation structurelle directe représentée par le chemin AB. Cette évolution est très importante si le verre se trouve à une température proche de  $T_g$ . Par contre, si la température est largement en deçà de  $T_g$ , ce phénomène devient tellement lent qu'il n'est pas observable.

Si le verre est chauffé brutalement jusqu'à  $T_1$  au delà de  $T_g$ , le volume du verre évolue vers une valeur largement en dessous de la droite "liquide" (point C de la Figure B.5). L'évolution suit le prolongement de la droite "verre". Cette configuration instable évolue vers un état stable : verre liquide (point D de la Figure B.5). Cette évolution est appelée relaxation structurelle inverse.



**Figure B.5 :** Variations du volume spécifique avec la température pour deux vitesses de refroidissement

Il y a donc plusieurs états solides possibles pour du verre refroidi dépendant de la vitesse de refroidissement.

En 1946, Tool<sup>6</sup> a introduit la température fictive ( $T_f$ ) pour prendre en compte l'état de la structure du verre. Il utilise l'évolution du volume spécifique avec la température pour décrire les variations de  $T_f$  :

- ✓  $T_f = T$  si  $T$  est au-delà de la zone de transition
- ✓  $T_f =$  intersection entre la droite "liquide" et la parallèle à la droite "verre" si  $T$  se trouve dans la zone de transition
- ✓  $T_f =$  intersection entre la droite "liquide" et la droite "verre" si  $T$  est en deçà de la zone de transition

Avec les variations de volume montrées précédemment, on introduit la fonction réponse qui s'exprime en fonction du volume spécifique ou de la température fictive :

$$M_v(t) = \frac{V(t) - V_{\infty,2}}{V_{0,2} - V_{\infty,2}} = \frac{T_f - T_2}{T_1 - T_2}$$

avec  $T_1 - T_2$  saut de température  
 $T_f$  = température fictive instantanée à  $T_2$   
 $V$  = volume spécifique instantané  
 $V_{0,2}$  = volume juste après le changement de température  
 $V_{\infty,2}$  = volume d'équilibre à  $T_2$

<sup>6</sup> TOOL A. Q., Relation between inelastic deformability and thermal expansion of glass in its annealing range in Journal of the American Ceramic Society, vol. 29, n° 9, pp 240-253 (1946)

La dépendance en température de la fonction réponse est obtenue au moyen du temps réduit  $\xi$ .  $M_v(t)$  peut être considérée comme la fonction de relaxation volumique qui permet de définir les variations de la température fictive :

$$T_f(t) = T(t) - \int_0^t M_v[\xi(t) - \xi(t')] \frac{dT(t')}{dt'} dt'$$

Par analogie avec la relaxation d'origine visqueuse, la fonction réponse est le plus souvent écrite sous une forme discrète par une série de Prony :

$$M_v(\xi) = \sum_{i=1}^n C_i \exp\left(-\frac{\xi}{\lambda_i}\right)$$

Les variations de la température fictive sont calculées avec l'algorithme de Markovskiy et Soules<sup>7</sup> :

$$T_f(t) = \frac{T_f(t - \Delta t) + T(t) \frac{\Delta t}{\lambda_i}}{1 + \frac{\Delta t}{\lambda_i}}$$

$$\lambda_i = \lambda_{\text{ref}} \exp\left\{-\frac{H}{R} \left[ \frac{1}{T_{\text{ref}}} - \frac{x}{T(t)} - \frac{1-x}{T_f(t - \Delta t)} \right]\right\}$$

avec  $H$  = énergie d'activation au-delà de la zone de transition  
 $x$  tel que  $xH$  = énergie d'activation en deçà de la zone de transition

$$T_f(t) = \sum_{i=1}^n C_i T_{f,i}(t)$$

$$T_f(0) = T_0$$

Les temps de relaxation structuraux ( $\lambda_i$ ) sont considérés comme proportionnels aux temps de relaxation en cisaillement. Le facteur multiplicatif  $k$  est ajusté à partir d'une courbe dilatométrique<sup>8</sup>. Le meilleur accord est trouvé pour  $k = 9$ .

La Figure B.6 montre les variations de la température fictive en fonction de la température pour un refroidissement de trempe donné.

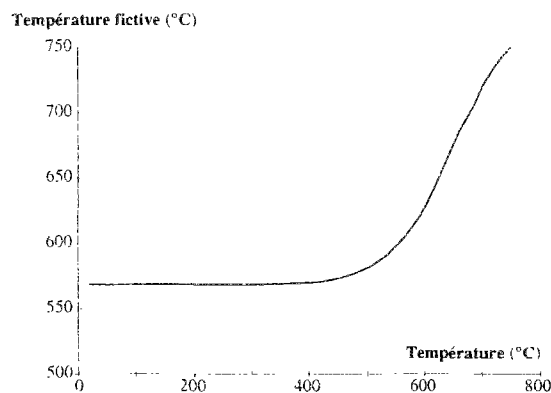


Figure B.6 : Variations de la température fictive avec la température

<sup>7</sup> MARSHALL D. B., LAWN B. R., *Surface flaws in glass* in Fracture in ceramic materials, (Evans A. G. Ed.) Noyes Publication, 1984

BURKE M. A., SOULES T. F., BUSBEY R. F., KHESON S. M., *Finite-element calculation of stresses in glass parts undergoing viscous relaxation* in Journal of the American Ceramic Society, 1987, vol. 70, n° 2, pp 90-95

<sup>8</sup> GUILLEMET C., GY R., LABROT M., Viscosity, configurational entropy and structural relaxation of silica-soda-lime glass in XVI<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Madrid, 4-9 octobre 1992

La température fictive permet de prendre en compte l'état de la structure du verre. Toutes les caractéristiques du matériau varient avec la température, mais aussi avec la température fictive. Dans ces calculs, la température est introduite dans les variations des caractéristiques viscoélastiques du matériau à travers l'expression du temps réduit :

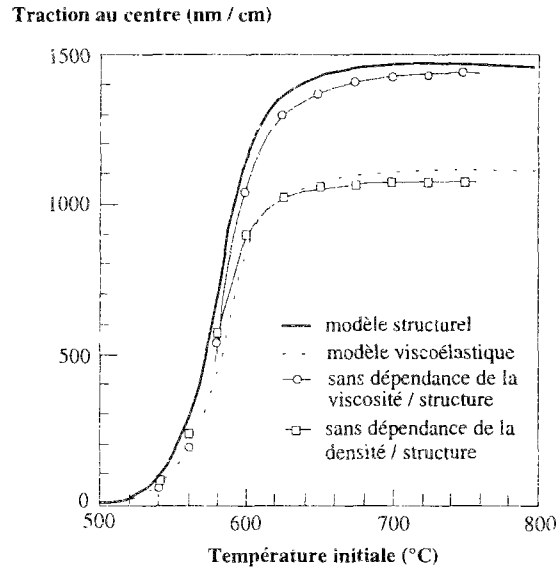
$$\xi(t, T, T_f) = \int_0^t \frac{\tau_{ref}}{\tau(T, t')} dt' = \int_0^t a(T(t), T_f(t)) dt'$$

avec  $\ln(a(T, T_f)) = -\frac{H}{R} \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{x}{T} - \frac{1-x}{T_f} \right)$   
 $x = \text{constante } (0 < x < 1)$   
 $H = \text{énergie d'activation}$   
 $R = \text{constante des gaz parfaits}$

De même, les caractéristiques thermiques sont fonction de la température et de la température fictive.

#### B.II.4. Introduction de la température fictive

La dépendance de la viscosité vis-à-vis de l'état de la structure n'induit pratiquement aucune variation de contrainte résiduelle. Par contre, la dépendance de la densité avec l'état de la structure est très importante pour le calcul des contraintes résiduelles (cf. Figure B.7).



**Figure B.7 :** Influence de la prise en compte de l'état de la structure sur les contraintes résiduelles<sup>9</sup>

Les variations de la viscosité avec la température fictive ne sont pas prises en compte dans nos simulations. La dépendance de la densité avec l'état de la structure est introduite dans nos calculs à travers les variations du coefficient de dilatation thermique ("équivalent") avec la température.

$$\epsilon_{th} = \beta_g (T(t) - T_f(t)) + \beta_l (T_f(t) - T_0)$$

avec  $\beta_g = \text{coefficient de dilatation thermique du verre solide}$   
 $\beta_l = \text{coefficient de dilatation thermique du verre liquide}$   
 $T_0 = \text{température initiale}$

Alors, le coefficient de dilatation peut être pris variable avec la température :

$$\frac{\Delta \epsilon_{th}}{\Delta T} = \beta(T) = \beta_g + (\beta_l - \beta_g) \frac{\Delta T_f}{\Delta T}$$

<sup>9</sup> GARDON R., *Thermal tempering of glass* in *Glass : Science and Technology* (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

En connaissant les variations de la température fictive avec la température, les variations du coefficient de dilatation thermique avec la température peuvent être déterminées (cf. Figure B.8) pour chaque cas de refroidissement.

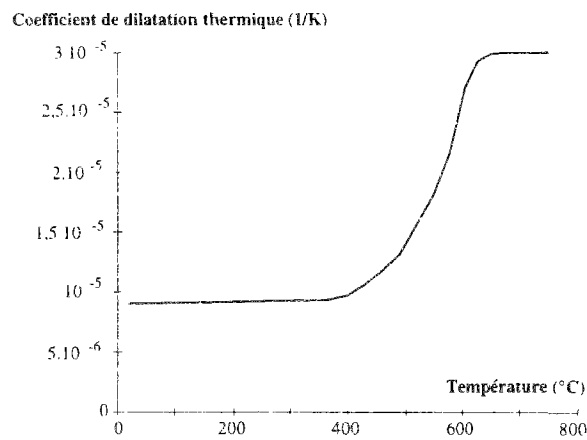


Figure B.8 : Variations du coefficient de dilatation thermique équivalent avec la température

### B.III. Modélisation par éléments finis

#### B.III.1. Conditions limites d'échange thermique

La structure modélisée se trouve à une température uniforme au début du calcul (température supérieure à 600 °C). C'est une hypothèse assez forte puisque, dans la réalité, entre la sortie four et le début du refroidissement de trempe, la température de surface peut légèrement diminuer par refroidissement "naturel".

Le refroidissement brutal est modélisé numériquement par une convection forcée. A chaque face refroidie est appliquée une convection forcée caractérisée par un coefficient de transfert thermique  $h$  (décrivant l'effet thermique des jets d'air) et la température de l'air soufflé  $T_{\text{ext}}$ . Dans le cas de la modélisation de la trempe d'une plaque de verre, et en considérant trois plans de symétrie, trois convections forcées sont nécessaires (cf. Figure B.9).

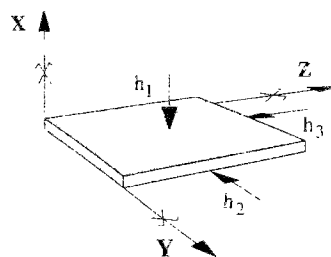
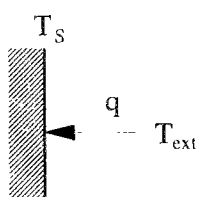


Figure B.9 : Schéma des conditions limites thermiques pour la trempe d'une plaque

La condition limite d'échange par convection forcée s'écrit :



$$q = h(T_s - T_{\text{ext}})$$

avec  $q$  = flux de chaleur  
 $h$  = coefficient de transfert thermique  
 $T_s$  = température de surface  
 $T_{\text{ext}}$  = température de l'air soufflé

Le rayonnement est pris en compte dans la convection forcée par l'intermédiaire du coefficient de transfert thermique équivalent. La condition aux limites d'échange par rayonnement s'écrit par équivalence avec la convection :

$$\begin{aligned} q &= \sigma_{SB} e (T_S^4 - T_{ext}^4) \\ &= \sigma_{SB} e (T_S^3 + T_S^2 T_{ext} + T_S T_{ext}^2 + T_{ext}^3) (T_S - T_{ext}) \\ &= h_{eq} (\sigma_{SB}, e, T_S, T_{ext}) (T_S - T_{ext}) \end{aligned}$$

avec  $q$  = flux de chaleur  
 $\sigma_{SB}$  = coefficient de Stefan-Boltzmann  
 $e$  = émissivité  
 $T_S$  = température de surface  
 $T_{ext}$  = température ambiante  
 $h_{eq}(\sigma_{SB}, e, T_S, T_{ext})$  = coefficient de transfert thermique équivalent

Nous supposons  $h_{eq}$  (prenant en compte à la fois la convection forcée et les échanges radiatifs) constant pour la simulation du processus de trempe.

### B.III.2. Maillage et conditions aux limites en déplacement

Les résultats qui nous intéressent sont les champs de contraintes au milieu de la plaque et sur la tranche en partie courante. Le problème à résoudre ne dépend pas de la variable  $z$ . Il s'agit d'un problème plan car ne dépendant que des variables  $x$  et  $y$ . Néanmoins, nous utilisons des éléments tridimensionnels pour prendre en compte les déformations d'origine thermique selon  $z$ .

Ne pouvant de manière simple (à cause des conditions aux limites assez difficiles à garantir : section droite restant droite) modéliser la trempe d'une bande infinie de verre (élément de verre de longueur infinie suivant  $z$ ), nous simulons alors la trempe d'une plaque de verre très longue suivant  $z$ . Par symétrie, seul  $1/8^{\text{ème}}$  de la plaque est étudié avec le code aux éléments finis MARC. Le maillage est particulièrement fin dans les zones de forts gradients de contraintes : dans l'épaisseur de la plaque et près des bords (cf. Figure B.10 et Figure B.11).

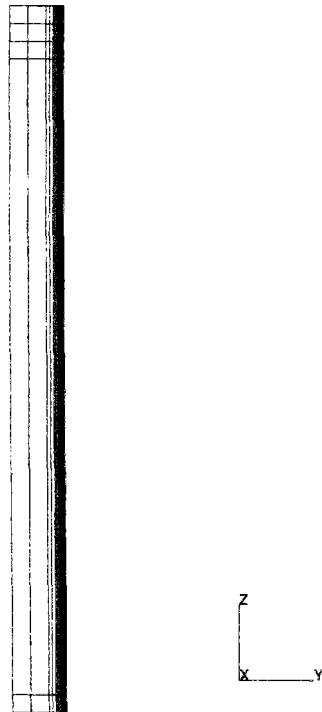


Figure B.10 : Vue du maillage dans le plan YZ

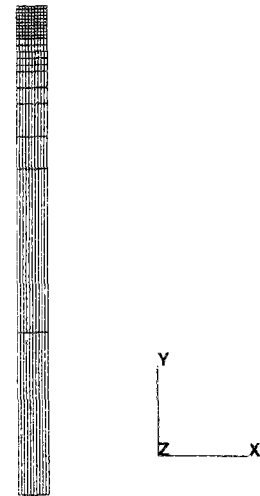


Figure B.11 : Vue du maillage dans le plan XY

L'effet de bord n'est pas étudié suivant  $z$  car le problème est exactement similaire à celui de l'effet de bord suivant  $y$ .

Les conditions aux limites de déplacement correspondent aux conditions limites de symétrie : 3 plans de symétrie (cf. Figure B.12). Le déplacement des noeuds situés dans les plans de symétrie est bloqué perpendiculairement à ces plans.

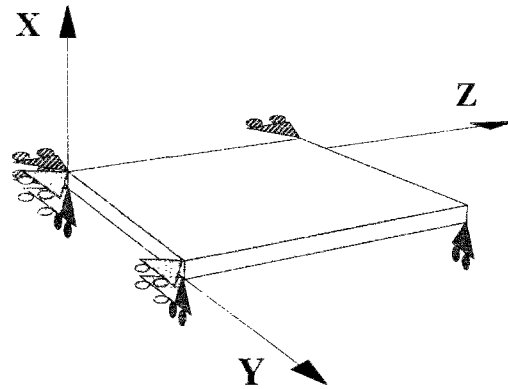


Figure B.12 : Vue des conditions aux limites de déplacements

### B.III.3. Algorithme de résolution

Le calcul est un calcul thermo-mécanique. A chaque pas de temps, les calculs thermique et mécanique sont faits successivement (sans interaction). Un calcul découplé sur tout l'intervalle de temps considéré obligerait à mettre en mémoire le champ thermique à chaque pas de temps (car il est indispensable à la détermination des caractéristiques mécanique) ce qui serait très lourd. Le problème mécanique est résolu grâce à l'algorithme de Newton-Raphson.

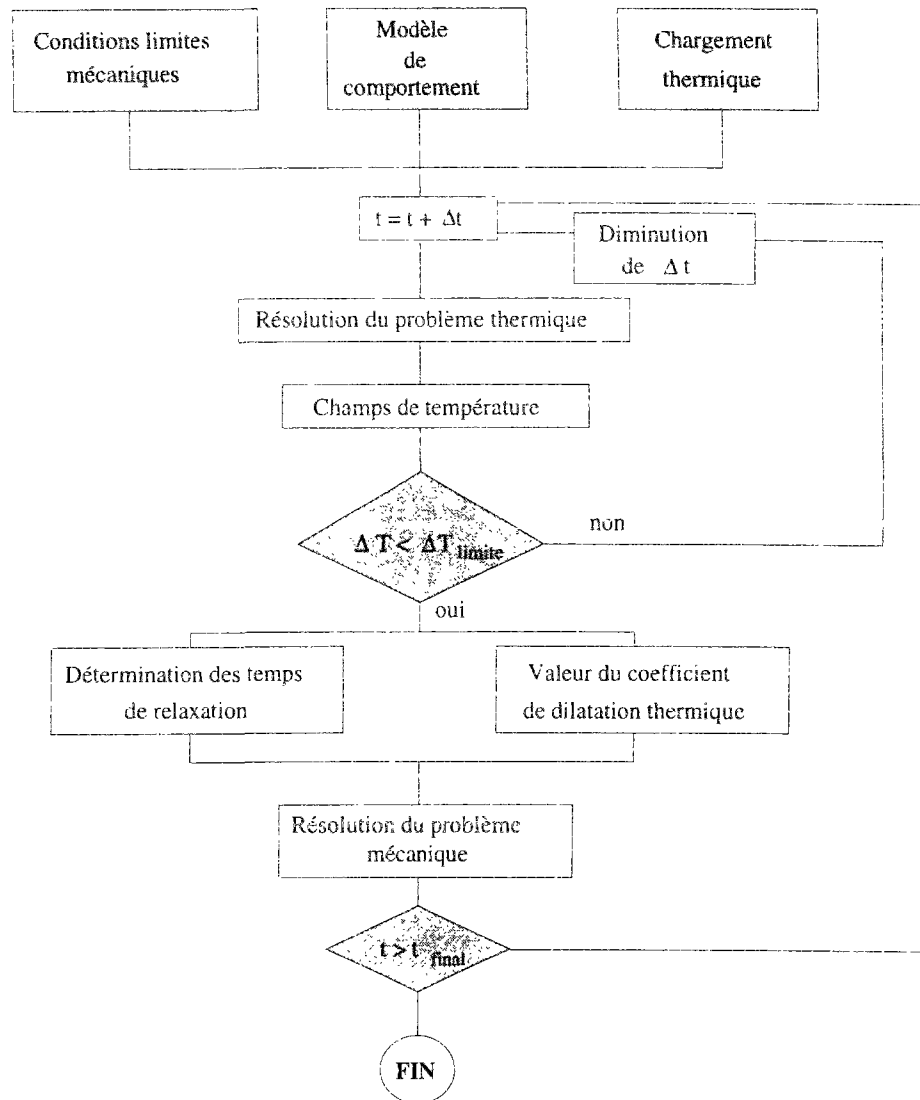


Figure B.13 : Organigramme de la simulation de trempe

A chaque pas de temps, le champs de température est calculé (par résolution incrémentale de l'équation de la chaleur) en fonction des caractéristiques thermiques du matériau, des conditions limites, et du chargement thermique. Le pas de temps est calculé automatiquement pour que le changement de température à chaque itération, en tout point de la structure, soit inférieur à une valeur limite donnée.

Connaissant la température en tout point de la structure, le comportement du matériau est connu en tout point. Par un calcul mécanique incrémental, les champs de déformations et de contraintes sont déterminés.

La fin des calculs est gouvernée, soit par la durée maximale de trempe, soit par le nombre maximal d'incréments de temps.

#### B.III.4. Caractéristiques du verre

Le verre est un matériau ancien, étudié depuis très longtemps. Cependant, les caractéristiques thermiques et mécaniques trouvées dans les travaux antérieurs sont assez différentes les unes des autres. Il est alors difficile d'extraire de la littérature des valeurs fiables des caractéristiques du verre étudié. Voici deux exemples de caractéristiques du verre silico-sodocalcique :

✕ le module d'Young

| E (MPa) | Référence              |
|---------|------------------------|
| 73 000  | PIGANIOL <sup>10</sup> |
| 74 526  | SINHA <sup>11</sup>    |
| 70 000  | SAVOY <sup>12</sup>    |
| 70 000  | MENCIK <sup>13</sup>   |
| 71 000  | DUFFRENE <sup>14</sup> |

✕ la conductivité thermique

| $\lambda$ (W / m.K) | Référence                  |
|---------------------|----------------------------|
| 0,8793              | SINHA <sup>15</sup>        |
| 1,672               | ZARZYCKI <sup>16</sup>     |
| 0,836               | BURKE et al. <sup>17</sup> |

Ces grandes variations des caractéristiques peuvent être dues d'une part aux différentes méthodes de détermination de ces valeurs et d'autre part à la grande variabilité de la composition du verre. Nous utiliserons dans les calculs des données récentes et correspondant au verre float silicosodocalcique Saint-Gobain que nous testerons ensuite lors des essais mécaniques.

#### B.III.4.a. Caractéristiques mécaniques

Les caractéristiques nécessaires pour alimenter le modèle de comportement de Narayanaswamy sont :

✕ les caractéristiques élastiques à température ambiante<sup>18</sup> :

module d'Young :  $E = 7.10^{10}$  Pa

coefficient de Poisson :  $\nu = 0,22$

✕ les caractéristiques viscoélastiques<sup>19</sup> :

$T_{ref} = 869$  K     $H/R = 55\ 000$  K (cf. Annexe 1)

| Partie déviatorique     |                 |
|-------------------------|-----------------|
| $G_i (10^9 \text{ Pa})$ | $\tau_{li} (s)$ |
| 1,5845                  | $6,658.10^{-5}$ |
| 2,3539                  | $1,197.10^{-3}$ |
| 3,4857                  | $1,514.10^{-2}$ |
| 6,5582                  | $1,672.10^{-1}$ |
| 8,2049                  | $7,497.10^{-1}$ |
| 6,4980                  | 3,292           |

| Partie volumique        |                 |
|-------------------------|-----------------|
| $K_i (10^9 \text{ Pa})$ | $\tau_{2i} (s)$ |
| 0,7588                  | $5,009.10^{-5}$ |
| 0,7650                  | $9,945.10^{-4}$ |
| 0,9806                  | $2,022.10^{-3}$ |
| 7,301                   | $1,925.10^{-2}$ |
| 13,47                   | $1,199.10^{-1}$ |
| 10,896                  | 2,033           |

<sup>10</sup> PIGANIOL P. Les industries verrières, Paris : Dunod, 1966

<sup>11</sup> SINHA N. K., Stress state in tempered glass plate and determination of heat-transfer rate in Experimental Mechanics, 1978, vol. 18, n° 1, pp 25-34

<sup>12</sup> SAVOY E., Traité technique du verre, 2<sup>e</sup> éd., Savoy E., 1989, 301 p

<sup>13</sup> MENCIK J., Strength and Fracture of Glass and Ceramics, Elsevier, 1992 (Glass Science and Technology)

<sup>14</sup> DUFFRENE L., Comportement viscoélastique d'un verre silico-sodocalcique dans le domaine des températures intermédiaires, thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris soutenue le 21 décembre 1994

<sup>15</sup> SINHA N. K., Stress state in tempered glass plate and determination of heat-transfer rate in Experimental Mechanics, 1978, vol. 18, n° 1, pp 25-34

<sup>16</sup> ZARZYCKI J., Les verres et l'état vitreux, Paris : Masson, 1982

<sup>17</sup> BURKE M. A., SOULES T. F., BUSBEY R. F., KHESON S. M., Finite-element calculation of stresses in glass parts undergoing viscous relaxation in Journal of the American Ceramic Society, 1987, vol. 70, n° 2, pp 90-95

<sup>18</sup> MENCIK J., Strength and Fracture of Glass and Ceramics, Elsevier, 1992 (Glass Science and Technology)

<sup>19</sup> DUFFRENE L., Comportement viscoélastique d'un verre silico-sodocalcique dans le domaine des températures intermédiaires, thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris soutenue le 21 décembre 1994

$$K_e / K_g = 0,18$$

- ✕ les caractéristiques structurelles nécessaires au calcul de  $T_f^{20}$  :

$$H/R = 55\,000\text{ K (cf. Annexe 1)}$$

| Partie structurelle   |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| $C_i$                 | $\lambda_i$ (s)       |
| $5,523 \cdot 10^{-2}$ | $5,965 \cdot 10^{-4}$ |
| $8,205 \cdot 10^{-2}$ | $1,077 \cdot 10^{-2}$ |
| $1,215 \cdot 10^{-1}$ | $1,362 \cdot 10^{-1}$ |
| $2,286 \cdot 10^{-1}$ | 1,505                 |
| $2,860 \cdot 10^{-1}$ | 6,747                 |
| $2,265 \cdot 10^{-1}$ | 29,63                 |

- ✕ le coefficient de dilatation thermique :

Le calcul étant thermo-mécanique, le coefficient de dilatation thermique est nécessaire pour la détermination des déformations d'origine thermique. Le coefficient de dilatation thermique est bien connu à température ambiante, mais difficile à déterminer à haute température (l'incertitude sur la valeur de  $\beta_l$  reste assez élevée). On considère que sa valeur triple à peu près quand le verre passe de l'état solide à l'état liquide. Ces données sont fournies par Saint-Gobain Recherche.

$$\begin{aligned} \text{verre solide (température ambiante) : } & \beta_g = 9 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \text{verre liquide (haute température) : } & \beta_l = 25 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{aligned}$$

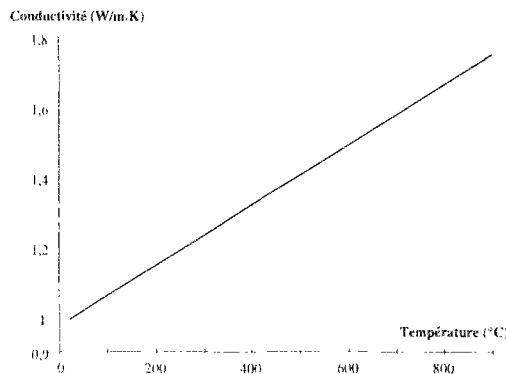
Ces valeurs sont utilisées en particulier pour déterminer les variations du coefficient de dilatation thermique "équivalent" variable avec la température.

#### B.III.4.b. Caractéristiques thermiques

Les caractéristiques thermiques sont nécessaire à la résolution de l'équation de la chaleur : conductivité thermique et chaleur spécifique. Ces caractéristiques sont variables avec la température et la température fictive. Les variations avec la température fictive sont négligées et les courbes en fonction de la température sont fournies par Saint-Gobain Recherche.

- ✕ conductivité thermique (en W / m.K) (phonique)<sup>21</sup>

$$\lambda = 0,975 + 8,58 \cdot 10^{-4} T \quad \text{avec } T \text{ en } ^\circ\text{C}$$



<sup>20</sup> GUILLEMET C., GY R., LABROT M., Viscosity, configurational entropy and structural relaxation of silica-soda-lime glass in XVII<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Madrid, 4-9 octobre 1992

<sup>21</sup> ANDRE S., Identification de la diffusivité phonique du verre par méthode flash de 20°C à 500°C, thèse de l'Institut National Polytechnique de Nancy soutenue en 1992

Figure B.14 : Variations de la conductivité thermique avec la température

✕ chaleur spécifique (en J / kg.K)<sup>22</sup>

$$C_{p,l} = 1433 + 6,5 \cdot 10^{-3} T$$

verre liquide ( $T > T_g = 850 \text{ K}$ )

$$C_{p,s} = 893 + 0,4 T - 1,8 \cdot 10^{-7} / T^2$$

verre solide ( $T < T_g$ )

avec T en K

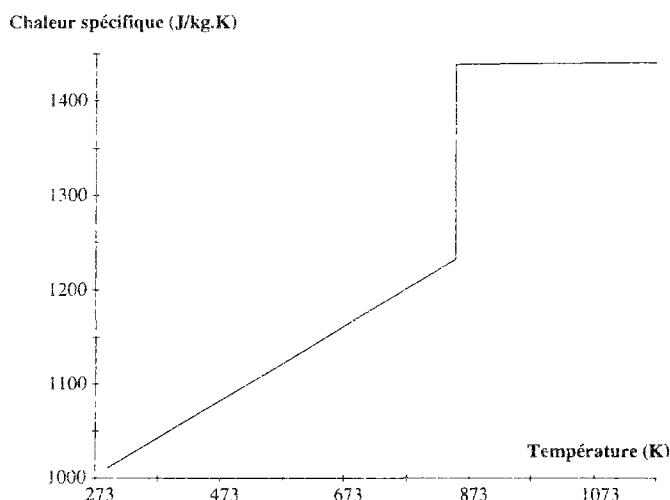


Figure B.15 : Variations de la chaleur spécifique avec la température

## B.IV. Simulations et comparaisons

Ces simulations ont pour objectif de déterminer les contraintes de trempe d'une plaque de verre. La première partie (de ce paragraphe) décrit l'effet intérieur<sup>23</sup> c'est à dire ce qui se passe au milieu d'une plaque infinie (deux dimensions infinies). La deuxième partie s'intéresse à l'effet de bord : observation du bord d'une bande infinie (élément infini dans une direction). Comme il a été déjà mentionné, l'étude de l'effet de bord selon z ne présente aucun intérêt.

L'étude de la trempe d'une plaque de 0,61 cm d'épaisseur permet la comparaison avec les résultats de travaux antérieurs. De nombreuses études ont été menées sur ce type de verre (verre silico-sodocalcique). Cette comparaison permet de valider nos simulations et en particulier le modèle de comportement thermo-mécanique du verre.

L'étude de la trempe d'une plaque épaisse (19 mm d'épaisseur) est destinée à caractériser des éléments qui seront ensuite testés en flexion 4 points. La connaissance de l'état de contrainte au bord est indispensable pour la prédiction de la résistance à la rupture.

<sup>22</sup> GUILLEMET C., GY R., LABROT M., Viscosity, configurational entropy and structural relaxation of silica-soda-lime glass in XVI<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Madrid, 4-9 octobre 1992

<sup>23</sup> CARRE H., DAUDEVILLE L., Finite element calculation of stresses in tempered glass in 1st International Symposium on Thermal Stresses and Related Topics, Hamamatsu (Japan), 5-7 juin 1995

CARRE H., DAUDEVILLE L., Calculs par éléments finis des contraintes résiduelles de trempe in 12<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Strasbourg, 4-8 septembre 1995

CARRE H., DAUDEVILLE L., Numerical Simulation of soda-lime silicate glass tempering in Journal de Physique IV, Colloque C1, supplément au Journal de Physique III, 1996, vol. 6, pp 175-185

### B.IV.1. Effet intérieur

#### B.IV.1.a. Résultats

##### B.IV.1.a.α. Variations avec le temps

##### ✕ Températures au cours du temps

Lors de la trempe, la surface se refroidit plus vite que le cœur du verre (cf. Figure B.16). Il apparaît un gradient thermique (pouvant être supérieur à  $150^{\circ}\text{C}$ ) dans l'épaisseur qui provoque l'apparition de contraintes au cours du traitement.

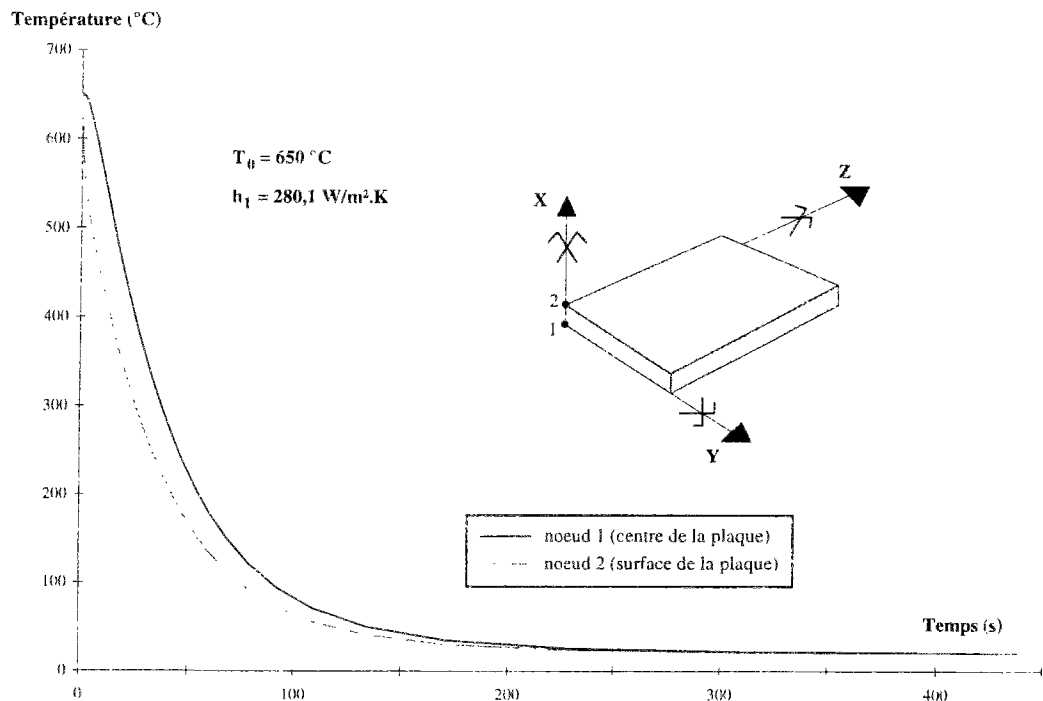


Figure B.16 : Variations de la température au cours du temps

##### ✕ Contraintes au cours du temps

Etant donné le gradient thermique dans l'épaisseur de la plaque et les variations du comportement avec la température, le verre trempé présente des contraintes résiduelles quand la température de la plaque est redevenue uniforme, égale à  $20^{\circ}\text{C}$ .

Au début du refroidissement, la surface se refroidit beaucoup plus vite que le cœur du verre. La surface se contracte plus vite ; elle entraîne le cœur de la plaque en compression et se trouve en traction par équilibre. Cela explique donc l'apparition de contraintes de traction en surface au début du refroidissement qui peuvent provoquer la rupture au cours du traitement thermique.

Quand la température de surface passe en dessous de la température de transition qui correspond à un changement assez brutal de comportement, la surface se fige. Le cœur de la plaque encore liquide continue à se refroidir et à se contracter. Il entraîne la surface en compression et se trouve en traction par équilibre. Ainsi, après quelques dizaines de secondes, les courbes de contraintes se stabilisent (cf. Figure B.17) avec la surface en compression et le cœur en traction.

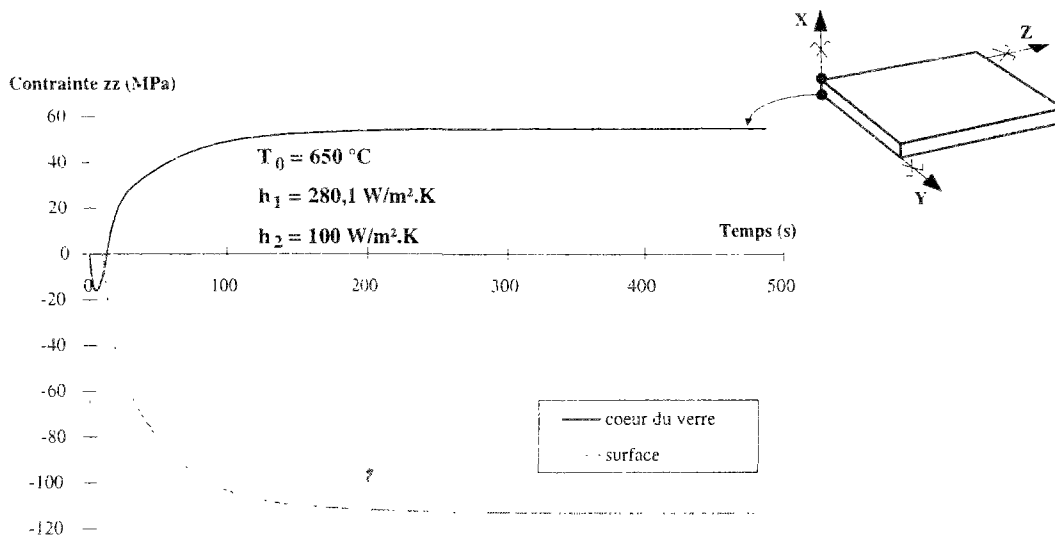


Figure B.17 : Variations des contraintes au cours du temps

### ✕ Contraintes transitoires de traction

Comme nous l'avons vu plus haut, le verre subit des contraintes de traction au début du refroidissement. Ces tractions peuvent provoquer la rupture du verre en cours de trempe. Elles sont très sensibles à la température initiale de trempe ( $T_0$ ) et à la vitesse de refroidissement ( $h_1$ ) (cf. Figure B.18). La contrainte de traction augmente de manière très significative quand la température initiale est inférieure à 650°C. Cette augmentation est d'autant plus importante que le coefficient de transfert thermique est important.

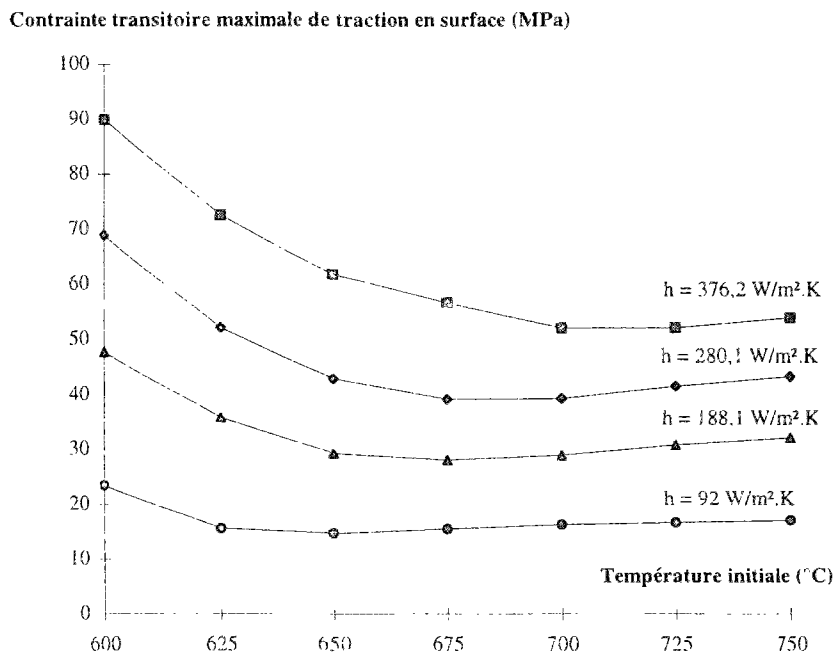
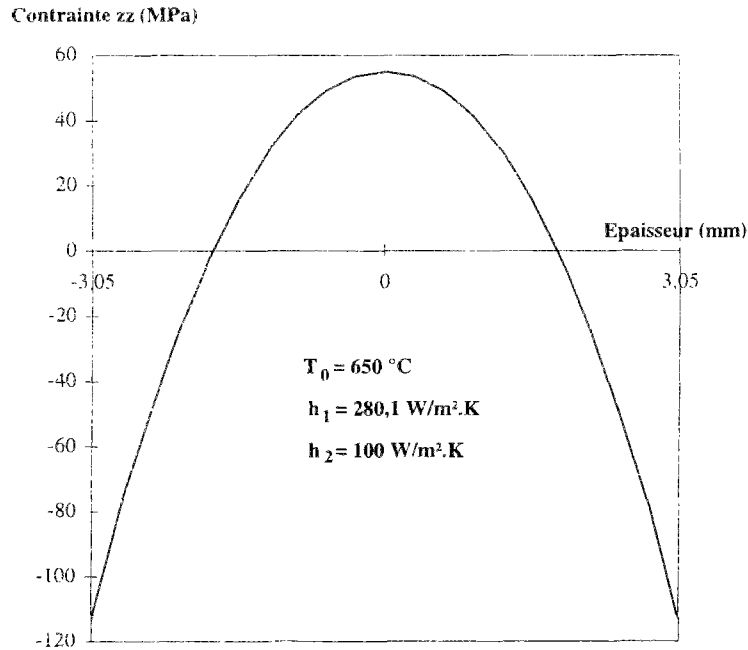


Figure B.18 : Variations des contraintes transitoires de tractions avec les paramètres de trempe

### B.IV.1.a.β. Contraintes résiduelles

La courbe des contraintes en fonction du temps fait clairement apparaître les contraintes résiduelles à la fin du refroidissement (cf. Figure B.17). Au milieu de la plaque, les

contraintes sont identiques dans les deux directions du plan de la plaque. Ces contraintes ont une forme parabolique suivant l'épaisseur de la plaque. La surface se trouve en compression avec une contrainte pratiquement deux fois plus élevée en valeur absolue que la traction au coeur de la plaque (cf. Figure B.19).



**Figure B.19 :** Contrainte résiduelle dans l'épaisseur de la plaque

La courbe des contraintes résiduelles dans l'épaisseur est de forme parabolique quels que soient les paramètres de trempe. Cependant, le rapport entre la contrainte de surface et la contrainte au coeur de la plaque évolue en particulier avec les paramètres de trempe (température initiale et coefficients de transfert thermique).

Des formulations analytiques existent pour calculer la contrainte au centre d'une plaque infinie, au coeur du verre. La courbe de contrainte dans l'épaisseur est considérée comme parabolique avec un rapport 2 entre les valeurs extrêmes (en valeur absolue). La contrainte au coeur du verre peut s'écrire<sup>24</sup> :

$$\sigma_m = \frac{E\beta c}{24(1-\nu)\lambda} l^2 v$$

avec  $E$  = module d'Young  
 $\beta$  = coefficient de dilatation thermique  
 $c$  = chaleur spécifique volumique  
 $\lambda$  = conductivité thermique  
 $l$  = épaisseur de la plaque  
 $v$  = vitesse de refroidissement

Cette formule fournit la contrainte au centre d'une plaque infinie. Dans le cas d'une plaque finie, les variations des contraintes au bord sont plus complexes. Elles ne peuvent pas être décrites par des formules analytiques. Les calculs sur code aux éléments finis vont permettre de déterminer l'état de contraintes tridimensionnel de plaques de dimensions finies.

#### **B.IV.1.b. Comparaisons avec la littérature**

De nombreux travaux ont été réalisés pour mesurer et calculer les contraintes de trempe en partie courante d'une plaque de verre de 0,61 cm d'épaisseur. La comparaison des

<sup>24</sup> GUILLEMET C. Annealing and tempering of glass in XV<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Leningrad. 1989

résultats de nos simulations avec les mesures expérimentales des contraintes résiduelles permet de vérifier la validité du modèle de comportement thermo-mécanique du verre utilisé.

L'effet de bord pourra alors être analysé avec la garantie que le modèle de comportement utilisé est bien adapté.

#### **B.IV.1.b.α. Contrainte dans l'épaisseur**

Des mesures optiques sur des éléments en verre trempé peu épais permettent de déterminer la courbe des contraintes résiduelles dans l'épaisseur<sup>25</sup>.

En connaissant les caractéristiques de la trempe réalisée (température initiale, température de l'air soufflé et coefficient de transfert thermique), nous pouvons comparer les résultats de nos simulations avec ces mesures (cf. Figure B.20). Les caractéristiques thermiques et mécaniques ont été données précédemment, et les caractéristiques de trempe sont données avec les mesures. Les résultats de la simulation sont tout à fait en accord avec les mesures réalisées.

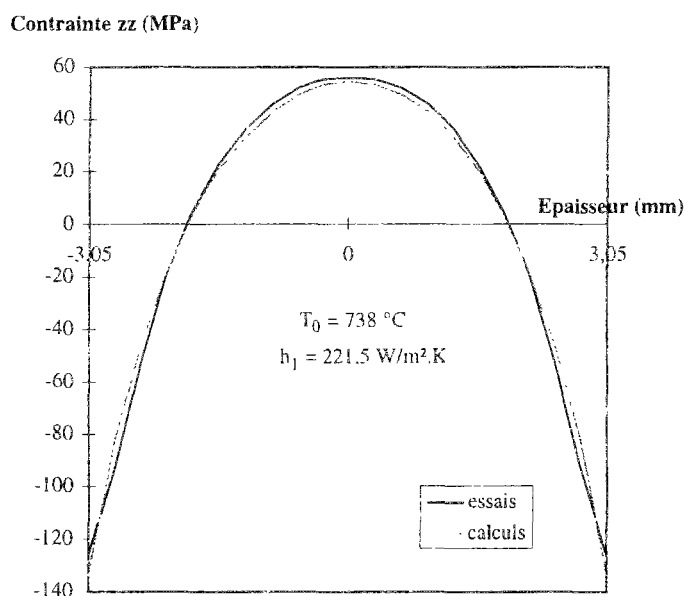


Figure B.20 : Variation de la contrainte dans l'épaisseur

#### **B.IV.1.b.β. Contrainte résiduelle de traction au coeur de la plaque**

Les contraintes résiduelles de trempe dépendent de la rapidité du refroidissement. Plus  $h$  est élevé, plus le refroidissement est rapide, plus les contraintes résiduelles sont élevées. D'autre part, les contraintes résiduelles augmentent quand la température initiale augmente. A partir de 680 °C environ, la contrainte résiduelle de traction au centre se stabilise.

La comparaison des résultats des calculs avec les mesures issues de la littérature<sup>26</sup> montre une bonne concordance sur un large domaine de coefficient de transfert thermique et de température initiale de trempe.

<sup>25</sup> NARAYANASWAMY O. S., GARDON R. : *Calculation of residual stress in glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1969, vol. 52, n° 10, pp 554-558

<sup>26</sup> NARAYANASWAMY O. S., *Stress and structural relaxation in tempering glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1978, vol. 61, n° 3-4, pp 146-152

GARDON R. : *Thermal tempering of glass* in Glass : Science and Technology (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

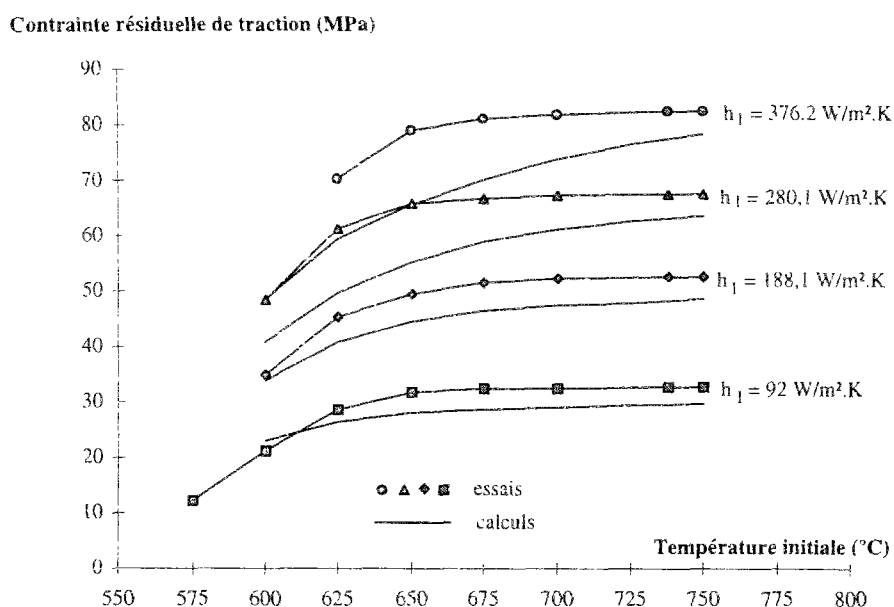


Figure B.21 : Variation de la contrainte résiduelle de traction avec les paramètres de trempe

#### B.IV.2. Etude de sensibilité

Une des difficultés rencontrées pour effectuer ces calculs a été de rassembler des caractéristiques thermiques et mécaniques fiables correspondant au verre étudié. Certains paramètres étant difficiles à mesurer, l'incertitude sur leur valeur reste élevée. L'étude de sensibilité des calculs aux caractéristiques du matériau est réalisée à partir d'un cas moyen,  $T_0 = 650^\circ\text{C}$  et  $h_1 = 280 \text{ W/m}^2.\text{K}$ , pour une plaque mince. Quatre valeurs sont prises pour chaque caractéristique autour de la valeur donnée plus haut (§ B.III.4) : + 20 %, + 10 %, - 10 %, - 20 %. Les paramètres étudiés sont :

**paramètres mécaniques :**  $E$  (module d'Young),  $\nu$  (coefficient de Poisson),  $\beta_g$  (coefficient de dilatation thermique du verre solide),  $\beta_l$  (coefficient de transfert thermique du verre liquide)

**paramètres viscoélastiques :**  $T_{\text{ref}}$  (température de référence)

**paramètres thermiques :**  $C_p$  (chaleur spécifique),  $\lambda$  (conductivité thermique)

L'effet de ces variations sur l'effet intérieur est observé par : la contrainte résiduelle au coeur de la plaque, en surface, et la contrainte transitoire maximale de traction en surface.

#### Influence du module d'Young :

|                                 | Contrainte résiduelle<br>au coeur (MPa) | Contrainte résiduelle<br>de surface | Contrainte transitoire<br>maximale de surface |
|---------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|
| <b>0,8 x E</b>                  | 44,2 (- 20 %)                           | - 91,2 (+ 20)                       | 34,4 (- 20)                                   |
| <b>0,9 x E</b>                  | 49,7 (- 10)                             | - 103 (+ 10)                        | 38,6 (- 10)                                   |
| <b>E = 7.10<sup>10</sup> Pa</b> | 55,2                                    | - 114                               | 42,9                                          |
| <b>1,1 x E</b>                  | 60,7 (+ 10)                             | - 125 (- 10)                        | 47,2 (+ 10)                                   |
| <b>1,2 x E</b>                  | 66,3 (+ 20)                             | - 137 (- 20)                        | 51,5 (+ 20)                                   |

Les contraintes obtenues en cours et à la fin de la trempe sont directement proportionnelles à la valeur du module d'Young. Son influence est donc tout à fait significative.

**Influence du coefficient de Poisson :**

|                  | Contrainte résiduelle<br>au cœur (MPa) | Contrainte résiduelle<br>de surface | Contrainte transitoire<br>maximale de surface |
|------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $0,8 \times \nu$ | 61,5 (+ 11)                            | - 134 (- 18)                        | 14,3 (- 67)                                   |
| $0,9 \times \nu$ | 56,4 (+ 2)                             | - 117 (- 3)                         | 33,4 (- 22)                                   |
| $\nu = 0,22$     | 55,2                                   | - 114                               | 42,9                                          |
| $1,1 \times \nu$ | 55,4 (0)                               | - 114 (0)                           | 50,1 (+ 17)                                   |
| $1,2 \times \nu$ | 56,4 (+ 2)                             | - 115 (- 1)                         | 56,7 (+ 31)                                   |

Les variations du coefficient de Poisson donne des résultats qui ne sont pas interprétables de manière simple. Ces effets ne sont pas symétriques (par rapport à la valeur initiale du coefficient de Poisson). L'influence est particulièrement importante pour les contraintes transitoires.

**Influence du coefficient de dilatation thermique solide :**

|                                      | Contrainte résiduelle<br>au cœur (MPa) | Contrainte résiduelle<br>de surface | Contrainte transitoire<br>maximale de surface |
|--------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $0,8 \times \beta_s$                 | 59,9 (- 6)                             | - 109 (+ 4)                         | 40,5 (- 6)                                    |
| $0,9 \times \beta_s$                 | 53,6 (- 3)                             | - 112 (+ 2)                         | 41,7 (- 3)                                    |
| $\beta_s = 9,10^{-6} \text{ K}^{-1}$ | 55,2                                   | - 114                               | 42,9                                          |
| $1,1 \times \beta_s$                 | 56,9 (+ 3)                             | - 116 (- 2)                         | 44,1 (+ 3)                                    |
| $1,2 \times \beta_s$                 | 58,5 (+6)                              | - 119 (-4)                          | 45,3 (+ 6)                                    |

Les variations du coefficient de dilatation thermique solide conduisent à des variations des contraintes transitoires et résiduelles. Cependant, son influence n'est pas aussi importante que celle observée expérimentalement. Cela peut représenter une limitation du modèle utilisé.

**Influence du coefficient de dilatation thermique liquide :**

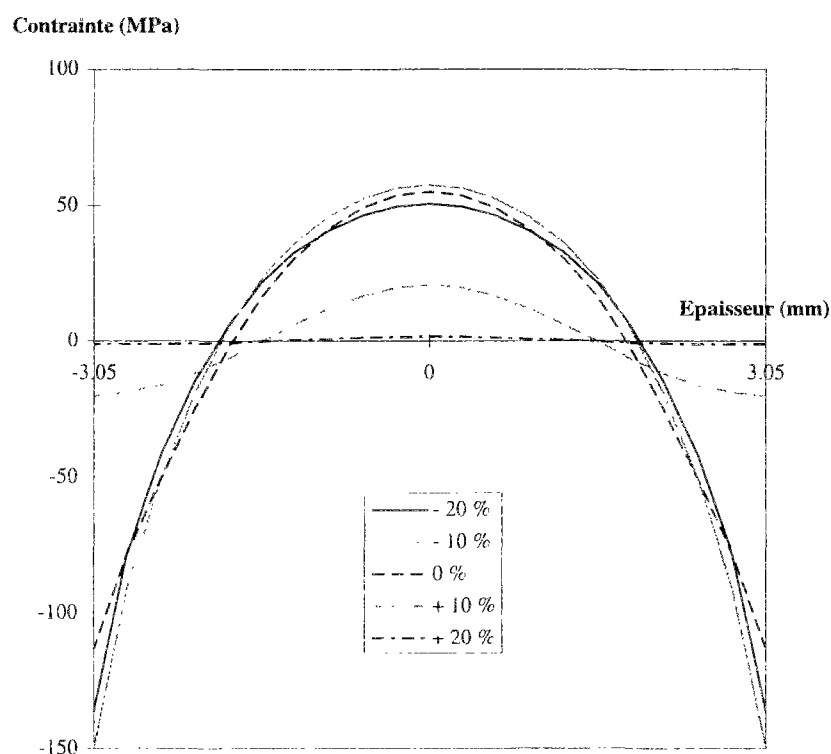
|                                       | Contrainte résiduelle<br>au cœur (MPa) | Contrainte résiduelle<br>de surface | Contrainte transitoire<br>maximale de surface |
|---------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $0,8 \times \beta_l$                  | 47,5 (- 14 %)                          | - 96 (+ 16)                         | 36,7 (- 14)                                   |
| $0,9 \times \beta_l$                  | 51,4 (- 7)                             | - 105 (+ 8)                         | 39,9 (- 7)                                    |
| $\beta_l = 25,10^{-6} \text{ K}^{-1}$ | 55,2                                   | - 114                               | 42,9                                          |
| $1,1 \times \beta_l$                  | 59,1 (+ 7)                             | - 123 (- 8)                         | 46,0 (+ 7)                                    |
| $1,2 \times \beta_l$                  | 62,8 (+ 14)                            | - 132 (- 16)                        | 49,0 (+ 14)                                   |

Les contraintes transitoires et résiduelles au milieu de la plaque sont très significativement affectées par le coefficient de dilatation thermique liquide. Ce paramètre assez mal connu est important pour les simulations de la trempe thermique.

**Influence de la température de référence :**

|                           | Contrainte résiduelle<br>au coeur (MPa) | Contrainte résiduelle<br>de surface | Contrainte transitoire<br>maximale de surface |
|---------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $0,8 \times T_{ref}$      | 50,6 (- 8)                              | - 136 (- 20)                        | 41,6 (- 3)                                    |
| $0,9 \times T_{ref}$      | 57,5 (+ 4)                              | - 150 (- 31)                        | 39,4 (- 8)                                    |
| $T_{ref} = 864 \text{ K}$ | 55,2                                    | - 114                               | 42,9                                          |
| $1,1 \times T_{ref}$      | 20,7 (- 63)                             | - 20 (+ 82)                         | 88,4 (+ 106)                                  |
| $1,2 \times T_{ref}$      | 1,66 (- 97)                             | - 1 (+ 99)                          | 84,4 (+ 97)                                   |

La température de référence est un paramètre très important pour les calculs des contraintes de trempe. Elle représente la température à laquelle les paramètres viscoélastiques sont connus et donnés. Pour la connaître avec précision, il faut mesurer les variations de la viscosité avec la température.



**Figure B.22 :** Contrainte résiduelle dans l'épaisseur pour différentes valeurs de  $T_{ref}$

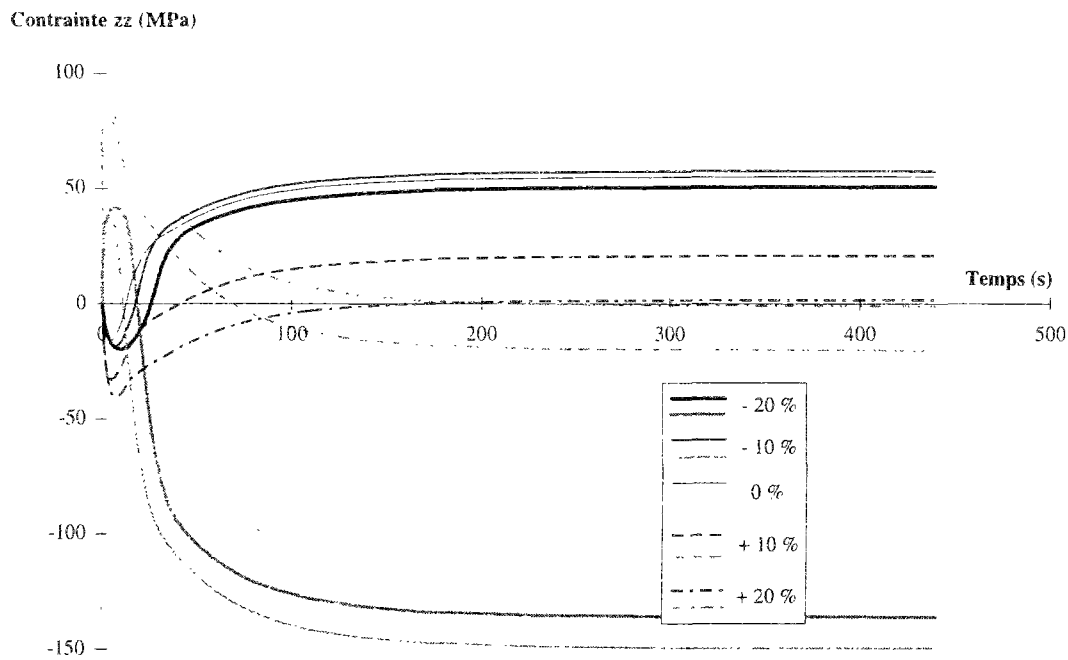


Figure B.23 : Variations des contraintes de trempe dans le temps pour différentes valeurs de  $T_{ref}$

### Influence de la chaleur spécifique :

|                  | Contrainte résiduelle<br>au coeur (MPa) | Contrainte résiduelle<br>de surface | Contrainte transitoire<br>maximale de surface |
|------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $0,8 \times C_p$ | 55,2 (0)                                | - 114 (0)                           | 45,2 (+ 5)                                    |
| $0,9 \times C_p$ | 55,2 (0)                                | - 114 (0)                           | 43,4 (+ 1)                                    |
| $C_p$            | 55,2                                    | - 114                               | 42,9                                          |
| $1,1 \times C_p$ | 55,2 (0)                                | - 114 (0)                           | 42,5 (- 1)                                    |
| $1,2 \times C_p$ | 55,2 (0)                                | - 114 (0)                           | 42,2 (- 2)                                    |

La chaleur spécifique apparaît comme un paramètre peu influent pour les calculs de la trempe thermique du verre. Une variation de 20 % de la chaleur spécifique entraîne une variation inférieure à 4 % des contraintes transitoires et résiduelles au milieu de la plaque.

### Influence de la conductivité thermique :

|                      | Contrainte résiduelle<br>au coeur (MPa) | Contrainte résiduelle<br>de surface | Contrainte transitoire<br>maximale de surface |
|----------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $0,8 \times \lambda$ | 62,4 (+ 13 %)                           | - 126 (- 11)                        | 53,7 (+ 25)                                   |
| $0,9 \times \lambda$ | 58,5 (+ 6)                              | - 120 (- 5)                         | 47,9 (+ 12)                                   |
| $\lambda$            | 55,2                                    | - 114                               | 42,9                                          |
| $1,1 \times \lambda$ | 52,1 (- 6)                              | - 109 (+ 5)                         | 38,6 (- 10)                                   |
| $1,2 \times \lambda$ | 49,5 (- 10)                             | - 104 (+ 9)                         | 35,5 (- 21)                                   |

La conductivité thermique a une influence assez sensible sur les contraintes de trempe, en particulier la contrainte transitoire maximale de traction en surface. Une variation de la conductivité entraîne une variation de la contrainte résiduelle deux fois plus faible.

Cette étude de sensibilité met en évidence quatre paramètres particulièrement influents sur les résultats des calculs de trempe : la température de référence, le module d'Young, le coefficient de dilatation thermique du verre liquide et la conductivité thermique. La température de référence peut être déterminée de manière précise en mesurant les variations de la viscosité en fonction de la température. Le module d'Young peut également être mesuré avec précision grâce à un essai mécanique par exemple. En revanche, le coefficient de dilatation thermique du verre liquide est connu avec une incertitude importante car très difficile à mesurer. Enfin, la conductivité thermique est assez bien connue, et son influence est légèrement plus faible que les paramètres précédents.

### B.IV.3. Effet de bord

Les éléments trempés étant de taille finie, l'état de contrainte résiduel est tridimensionnel. A cause du refroidissement sur les tranches, des effets de bord apparaissent.

#### B.IV.3.a. Evolution de la température au cours du temps

Les courbes des variations des températures (au centre et au bord de la structure) en fonction du temps montrent l'apparition d'un gradient thermique dans l'épaisseur (en particulier au milieu de la plaque comme vu pour l'effet intérieur). L'effet de bord est clairement visible car les trois points de surface (points 2, 3 et 4) se refroidissent plus vite que le point au coeur de la plaque (point 1). La température se stabilise à 20 °C après quelques dizaines de secondes (cf. Figure B.24).

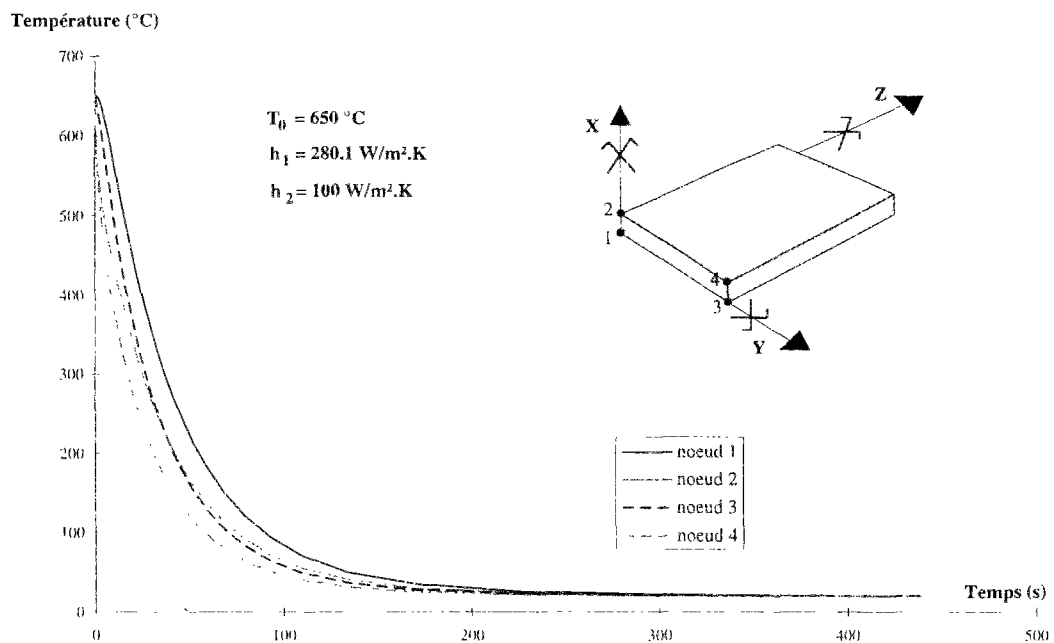


Figure B.24 : Variations de la température en fonction du temps au milieu et au bord de la plaque

### B.IV.3.b. Contraintes transitoires

L'inversion du signe des contraintes de surface et au cœur de la plaque au cours du refroidissement se retrouve ici. La contrainte transitoire de traction au coin de la plaque (point 4) est très forte. Cette contrainte diminue largement quand le maillage comporte un chanfrein comme nous le verrons plus loin. A la fin du refroidissement (température homogène à 20°C dans toute la structure), les trois points de surface (points 2, 3 et 4) se trouvent en compression alors que le point au cœur du verre est en traction (cf. Figure B.25).

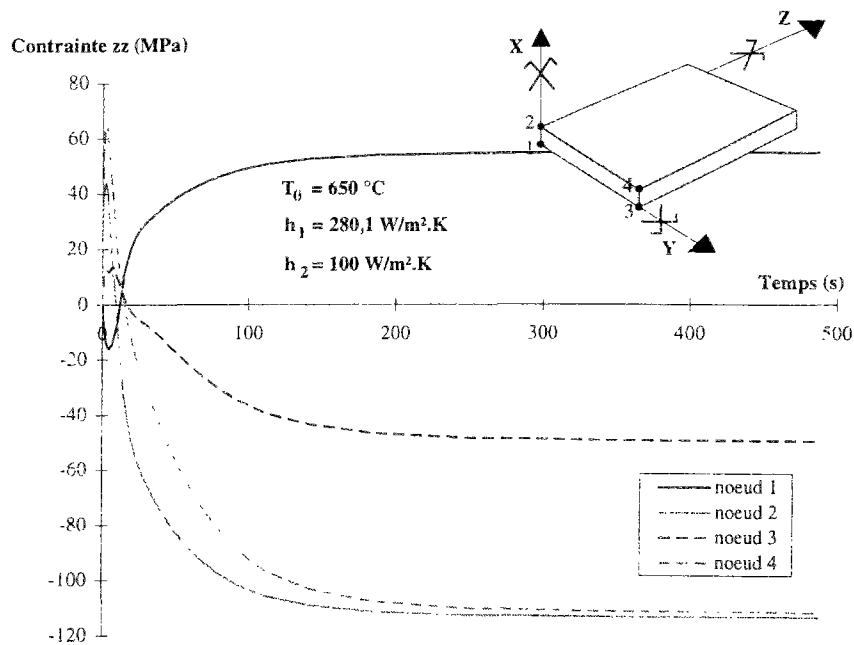


Figure B.25 : Variations de la contrainte  $\sigma_{zz}$  en fonction du temps au milieu et au bord de la plaque

### B.IV.3.c. Contraintes résiduelles

Les contraintes au centre et sur la tranche sont paraboliques dans l'épaisseur (cf. Figure B.26). La forme de la contrainte au bord varie en particulier avec le rapport entre le coefficient de transfert thermique sur le plan de la plaque et sur la tranche (cf. Annexe 3). Dans le cas où ce rapport est proche de 1, la contrainte sur la tranche est pratiquement constante.

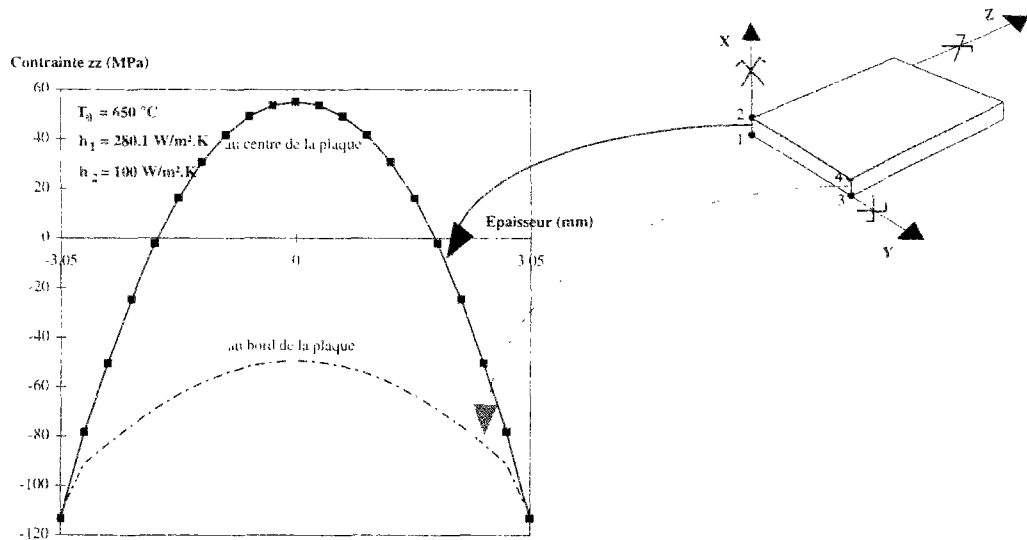


Figure B.26 : Variation de la contrainte  $\sigma_{zz}$  dans l'épaisseur au milieu et au bord de la plaque

#### B.IV.3.d. Influence du chanfrein

Le chanfrein introduit pour les plaques mince (6,1 mm d'épaisseur) a une largeur de 0,5 mm. Le coefficient de transfert thermique est le même sur l'arête abattue que sur la tranche. La présence du chanfrein n'a aucune influence sur les contraintes résiduelles (cf. Figure B.27). Par contre, la présence du chanfrein modifie la valeur de la contrainte transitoire de traction au coin de la plaque. Quand l'arête est abattue, cette valeur est plus faible (cf. Figure B.28).

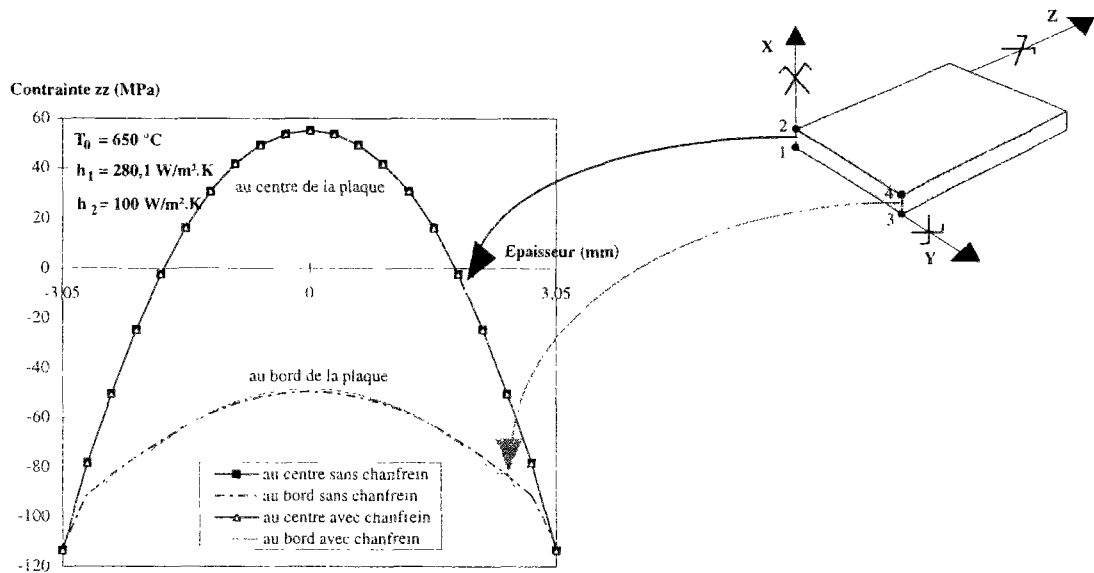
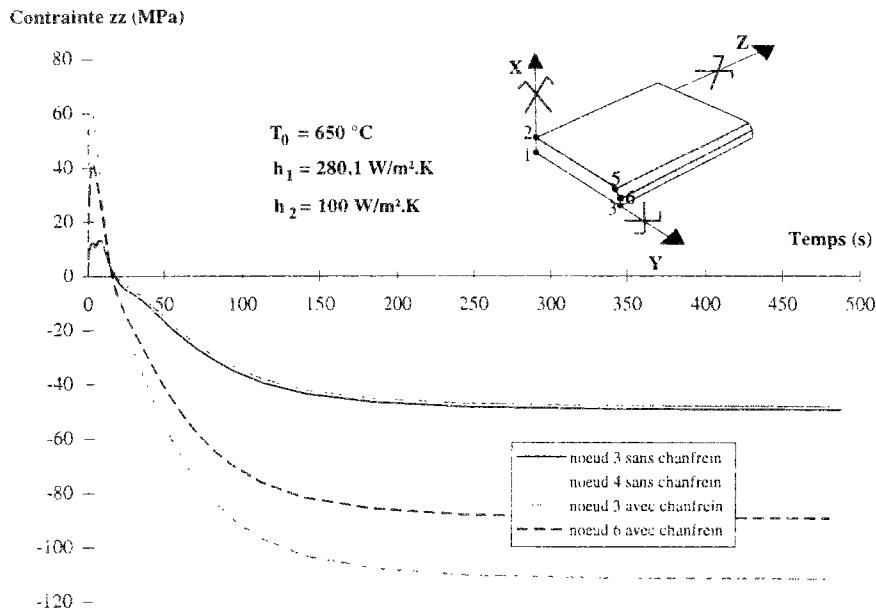


Figure B.27 : Contrainte  $\sigma_{zz}$  dans l'épaisseur au milieu et au bord de la plaque pour les calculs avec et sans chanfrein



**Figure B.28 :** Variation de la contrainte  $\sigma_{zz}$  en fonction du temps pour les calculs avec et sans chanfrein au milieu et au bord de la plaque

#### B.IV.4. Plaque épaisse trempée

Des poutres en verre trempé seront testées en flexion 4 points comme on le verra dans la suite de l'étude. Ces simulations doivent permettre de connaître l'état de contrainte résiduel dans ces éléments pour pouvoir en prédire leur résistance<sup>27</sup>.

Ces éléments sont des poutres en verre silico-sodo-calcique de 19 mm d'épaisseur. Toutes les caractéristiques de la trempe effectuée sur ces éléments ne sont pas accessibles directement. Ainsi, la température initiale de trempe et la température de l'air soufflé sont connues (620 et 20 °C respectivement), mais les coefficients de transfert thermique  $h_1$  et  $h_2$  sont inconnus. Il faut donc les déterminer de manière indirecte, à partir de mesures optiques des contraintes résiduelles.

##### B.IV.4.a. Mesure des contraintes résiduelles de trempe

Le verre trempé est un matériau précontraint. Différentes méthodes existent pour mesurer les contraintes résiduelles que l'on peut classer en deux catégories : les méthodes destructives et les méthodes non-destructives. Nous détaillons et nous utiliserons ici des méthodes optiques. Elles ont l'avantage de ne détruire ni endommager le matériau.

##### B.IV.4.a.α. Méthodes destructives<sup>28</sup>

Parmi les méthodes de mesure destructives des contraintes résiduelles, les plus courantes sont :

##### *mesure par comptage des fragments :*

Le verre trempé se rompt en nombreux petits morceaux. Un nombre minimal de morceaux par unité de surface permet de garantir une compression de surface minimale.

<sup>27</sup> DAUDEVILLE L., CARRE H., *Analysis of residual stresses and of load-bearing capacity of tempered glass plates* in Journal de Physique (à paraître)

<sup>28</sup> The Glass Development Centre of Philips' Gloeilampenfabrieken, *Etude bibliographique* in Symposium sur la résistance mécanique du verre et les moyens de l'améliorer, Florence, 25-29 septembre 1961 (Union Scientifique Continentale du Verre)  
GARDON R., *Thermal tempering of glass* in Glass : Science and Technology (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl. Ed.), Academic Press, 1980

**mesure par relaxation des contraintes :**

Pour des éléments faiblement trempés, la rupture se produit avec peu de fragments. Une jauge de déformation est collée sur l'élément. Le verre est ensuite découpé autour de la jauge pour permettre la relaxation totale des contraintes. La mesure donnée alors par la jauge fournit l'opposé de la contrainte résiduelle relâchée.

**mesure par indentation<sup>29</sup> :**

L'indentation (avec une pointe Vickers par exemple) permet de réaliser un défaut de taille et de forme connue. La taille du défaut créé varie avec la charge d'indentation appliquée. La contrainte de rupture peut être reliée à la taille et à la forme de la fissure créée et aux contraintes résiduelles. Celles-ci peuvent alors être déterminées après de nombreux essais.

**mesure par pelage :**

Une petite épaisseur est enlevée à la surface de l'élément. La relaxation des contraintes induite provoque une déformation de l'élément. Alors, connaissant l'épaisseur de l'élément et sa courbure, les contraintes résiduelles peuvent être déterminées.

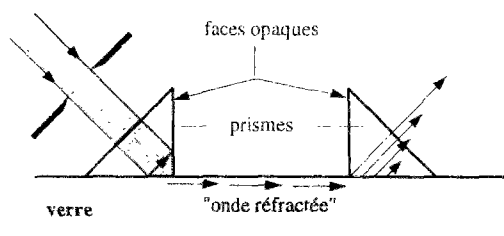
**B.IV.4.a.β. Mesures des contraintes résiduelles par moyens optiques**

Le verre est un matériau transparent qui devient biréfringent lorsqu'il est trempé en raison de son état précontraint. Cela permet l'emploi des techniques de photoélasticimétrie<sup>30</sup> pour mesurer les contraintes résiduelles.

**Mesure de la contrainte de surface**

La mesure de la contrainte de surface d'un matériau transparent peut se faire par réfractométrie ou par polarimétrie. La deuxième méthode plus récente fut développée en particulier par Guillemet et Acloque<sup>31</sup>. Une onde lumineuse limitée latéralement tombant sur une surface plane de séparation de deux milieux transparents (sous l'incidence limite de réflexion totale) entraîne l'apparition, au-delà du domaine géométrique de l'onde réfléchie, d'une onde parallèle appelée "onde réfractée". Elle provient d'un flux d'énergie qui se propage dans le second milieu, le long de la surface de séparation.

Deux prismes reposant sur une surface plane d'un volume de verre permettent la propagation d'une onde (par l'intermédiaire d'une couche de liquide d'indice plus élevé que le verre) le long de la surface libre sans perte d'énergie (cf. Figure B.29).



**Figure B.29 : Schéma de propagation et d'émergence de l'"onde réfractée"**

<sup>29</sup> HAGAN J. J., SWAIN M. V., FIELD J. E., *Evaluation of residual stresses in thermally toughened materials* in *Physics and Chemistry of Glasses*, 1977, vol. 18, n° 5

MARSHALL D. B., LAWN B. R., *Measurement of nonuniform distribution of residual stresses in tempered glass discs* in *Glass Technology*, 1978, vol. 19 n° 3, pp. 57-60

<sup>30</sup> NOVOTNY V., *Relation entre les contraintes au voisinage de la surface des verres trempés, déterminées à l'aide d'un épibiascope, leur degré de trempe et leur destruction après casse* in *Verres et réfractaires*, 1981, vol. 35, n° 5

<sup>31</sup> ACLOQUE P., GUILLEMET C., *Sur l'onde de réflexion totale*, Académie des Sciences, séance du 27 juin 1960

GUILLEMET C., ACLOQUE P., *Nouvelles méthodes optiques de détermination des contraintes au voisinage des surfaces des milieux transparents* in 28 Conférence des analyses des contraintes, Paris, 11-14 avril 1962

L'épibiascope permet l'observation de l'"onde réfractée" qui rend compte de l'état des contraintes existant dans les couches superficielles. Il comprend un polariseur en entrée, un compensateur et un analyseur en sortie pour permettre les mesures<sup>32</sup> (cf. Figure B.30 et Figure B.31).

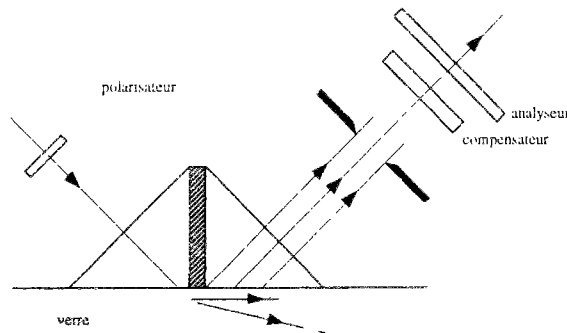


Figure B.30 : Schéma de principe de l'épibiascope

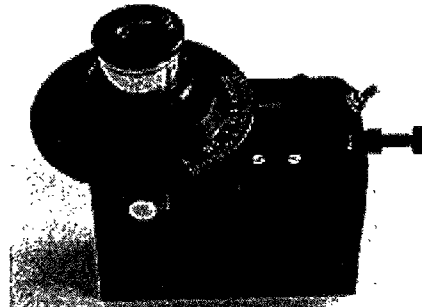


Figure B.31 : Photo de l'épibiascope<sup>33</sup>

### Mesure optique de la contrainte moyenne dans l'épaisseur

Une plaque trempée a un état de contrainte bidimensionnel en son milieu. Pour un faisceau de lumière traversant la plaque (d'épaisseur  $e$ ) perpendiculairement à son plan, la différence de chemin optique s'écrit<sup>34</sup> (cf. Figure B.32 : Directions principales dans la plaque :

$$R_x = K \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) dx$$

avec  $K$  = coefficient  
 $e$  = épaisseur de la plaque

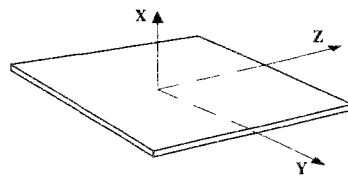


Figure B.32 : Directions principales dans la plaque

Grâce au "contrôleur de bord" qui analyse un faisceau de lumière traversant la plaque perpendiculairement à son plan, on obtient l'intégrale dans l'épaisseur de la différence des contraintes principales dans le plan de la plaque (cf. Figure B.33).

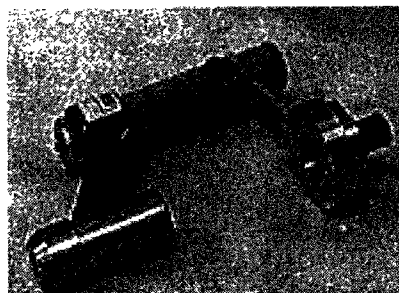


Figure B.33 : Photo du "contrôleur de bord"<sup>35</sup>

<sup>32</sup> REDNER A. S., *How to measure stress in glass* in Glass Digest, June 15, 1994

<sup>33</sup> ABEN H., GUILLEMET C., *Photoelasticity of glass*, 1993, Springer-Verlag Berlin Heideberg

<sup>34</sup> SINHA N. K., *Stress state in tempered glass plate and determination of heat-transfer rate* in Experimental Mechanics, 1978, vol. 18, n° 1, pp 25-34

<sup>35</sup> ABEN H., GUILLEMET C., *Photoelasticity of glass*, 1993, Springer-Verlag Berlin Heideberg

**B.IV.4.b. Mesures optiques sur nos éléments**

Des mesures optiques sont réalisées par Monsieur Prieur (technicien de Saint-Gobain Recherche) sur les 5 éléments de verre trempé qui seront ensuite cassés en flexion 4 points (cf. chapitre E). Ces mesures sont destinées d'une part à caractériser la trempe réalisée sur ces éléments, et à déterminer les paramètres de trempe nécessaires aux simulations. Deux types de mesures sont réalisés : avec l'épibiascope et avec le contrôleur de bord.

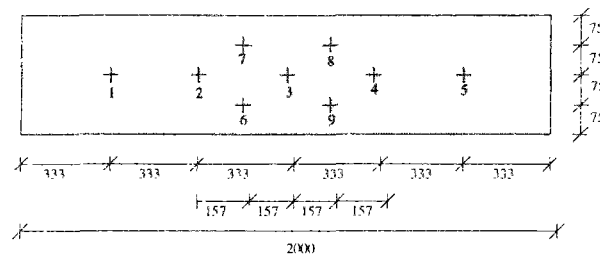
**Mesures avec l'épibiascope :**

Sur chaque élément, 18 mesures sont réalisées côté étain (cf. Figure B.34) en 9 points dans deux directions (parallèlement et perpendiculaire au petit côté de l'élément). Ce nombre important de mesures permet de vérifier l'uniformité de la trempe. Les valeurs obtenues sont :

moyenne = 120,4 MPa

écart type = 4,9 MPa

avec une incertitude de mesure =  $\pm 6$  MPa



**Figure B.34 :** Positions des mesures réalisées avec l'épibiascope

Les résultats montrent bien que le traitement de trempe réalisé est homogène sur toute la surface.

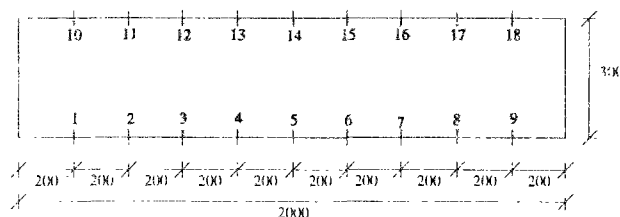
**Mesures avec le contrôleur de bords :**

L'épibiascope ne permet de réaliser des mesures que sur la face étain. Les contraintes au bord de la plaque (sur la tranche) sont inaccessibles. Le contrôleur de bord permet tout de même de déterminer la moyenne de la différence des contraintes principales dans l'épaisseur. La présence du chanfrein empêche de faire des mesures strictement au bord de l'élément ; elles commencent à 1,5 mm de la tranche. 18 mesures sont réalisées sur chaque élément (cf. Figure B.35) :

moyenne = 72,0 MPa

écart type = 3,3 MPa

avec précision de mesure =  $\pm 1,2$  MPa

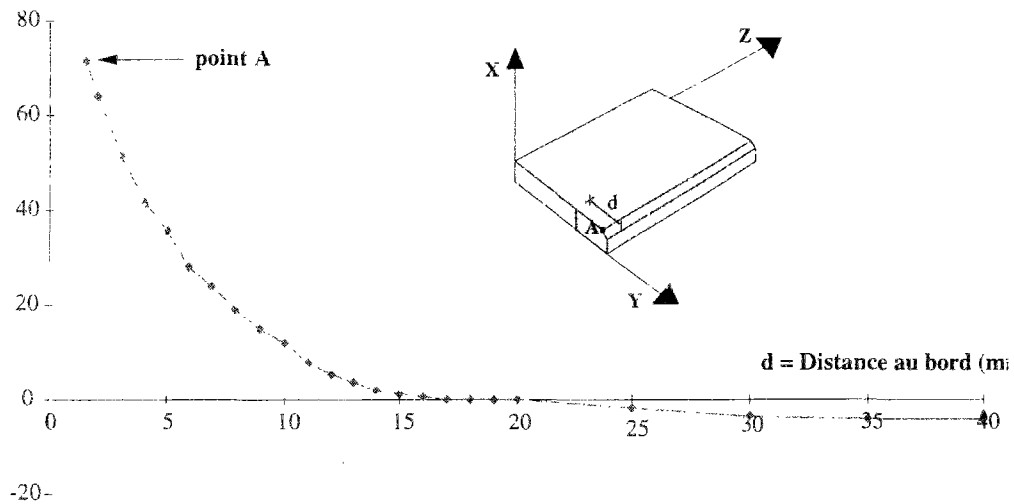


**Figure B.35 :** Position des mesures réalisées avec le "contrôleur de bord"

Les résultats obtenus montrent que, de même que la trempe est uniforme en surface au centre de la plaque, elle est également uniforme au bord sur les tranches principales de l'élément.

Les variations des contraintes en partant du bord sont intéressantes pour les applications de structure. Ne pouvant déterminer ces variations directement, les mesures réalisées avec le contrôleur de bord permettent de déterminer la variation de l'intégrale dans l'épaisseur de la différence des contraintes principales à partir du bord :

**Intégrale de la différence des contraintes principales (MPa)**



**Figure B.36 :** Variations de l'intégrale de la différence des contraintes principales en fonction de la distance au bord

#### **B.IV.4.c. Détermination des paramètres de trempe**

La trempe uniforme d'une plaque de verre est un traitement thermique caractérisé par quatre paramètres :

- ✗  $T_0$  = température du verre avant le refroidissement
- ✗  $h_1$  = coefficient de transfert thermique de la convection forcée perpendiculaire au plan de la plaque
- ✗  $h_2$  = coefficient de transfert thermique de la convection forcée appliquée sur les tranches de l'élément (avec  $h_3 = h_2$ )
- ✗  $T_{\text{ext}}$  = température de l'air soufflé

La température initiale de trempe et la température de l'air soufflé sont deux paramètres assez faciles à déterminer lors de la réalisation de la trempe. Ces données sont fournies par le fabricant (Saint-Gobain) :

$$\begin{aligned}T_0 &= 620\text{ }^{\circ}\text{C} \\T_{\text{ext}} &= 20\text{ }^{\circ}\text{C}\end{aligned}$$

Par contre, les coefficients de transfert thermique  $h_1$  et  $h_2$  sont très difficiles à déterminer expérimentalement. Ne pouvant en disposer de manière directe, nous les déterminons de manière inverse grâce aux mesures optiques réalisées et aux simulations de trempe.

Le coefficient de transfert thermique  $h_1$  contrôle l'état des contraintes au milieu de la plaque. Grâce aux mesures réalisées avec l'épibiascope de la contrainte de surface,  $h_1$  peut être déterminé en calant les simulations :

$$h_1 = 135 \text{ W/m}^2.\text{K}$$

Le coefficient de transfert thermique  $h_2$  contrôle avec  $h_1$  l'état des contraintes au bord de la plaque. Avec un point de la courbe de l'intégrale de la différence des contraintes principales en fonction de la distance au bord (point A sur la Figure B.36),  $h_2$  peut être déterminé de manière inverse par calage des simulations :

$$h_2 = 115 \text{ W/m}^2.\text{K}$$

#### B.IV.4.d. Validation de la simulation

Parmi les mesures optiques réalisées, les contraintes de surface obtenues avec l'épibiascope et un point de la courbe obtenu avec le contrôleur de bord ont été utilisés pour déterminer la valeur des coefficient de transfert thermique. Les résultats de la simulation et des mesures expérimentales peuvent être comparés sur le reste de la courbe de l'intégrale de la différence des contraintes principales en fonction de la distance au bord (cf. Figure B.37). La bonne concordance des résultats montre la validité des simulations. Celles-ci donnent la valeur de la contrainte sur la tranche de manière fiable.

Intégrale de la différence des contraintes principales (MPa)

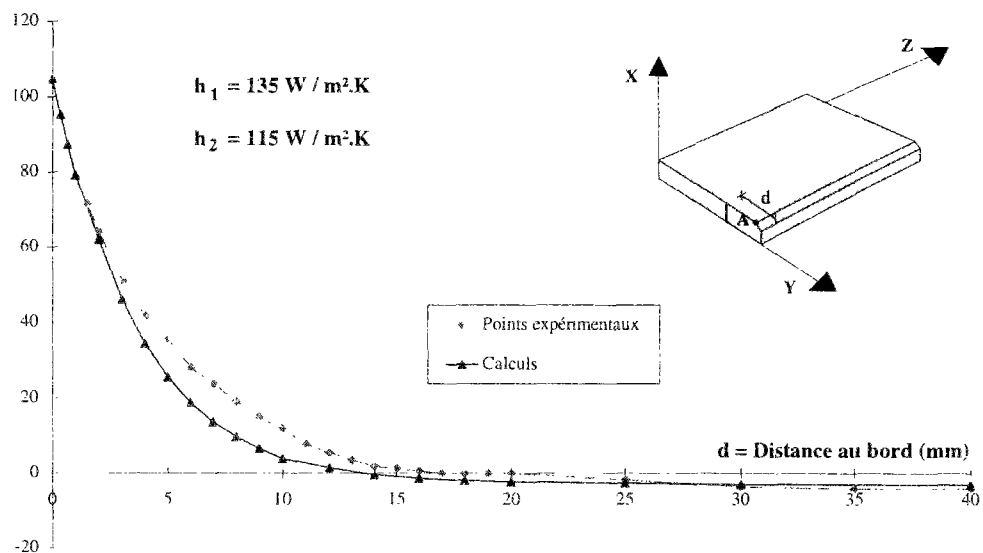
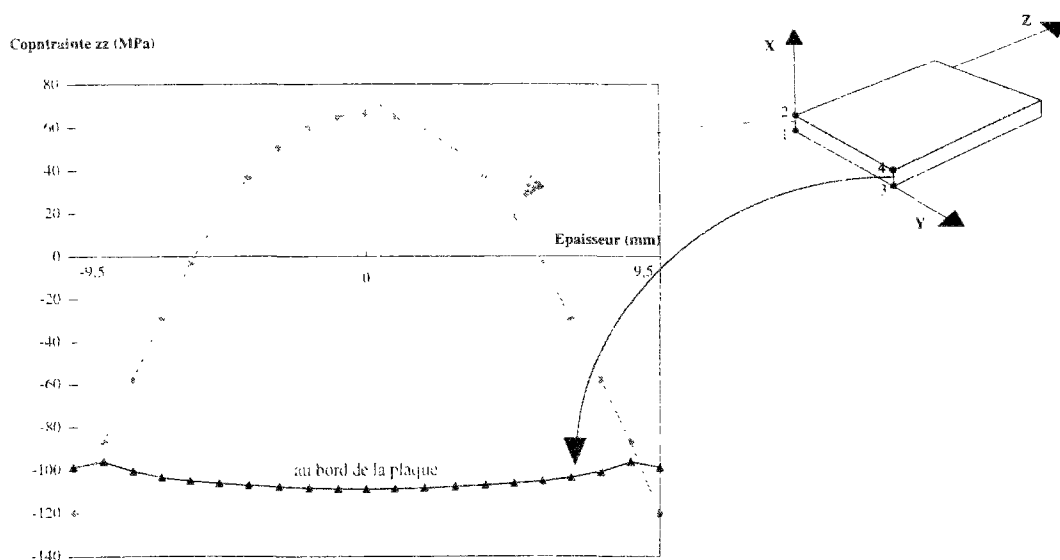


Figure B.37 : Variations de l'intégrale de la différence des contraintes principales en fonction de la distance au bord mesurées et calculées

#### B.IV.4.e. Contraintes résiduelles

La contrainte résiduelle au milieu de la plaque est parabolique comme vu précédemment avec l'analyse de l'effet intérieur. La contrainte de surface est deux fois plus importante (en valeur absolue) que la contrainte au cœur du verre. La contrainte résiduelle au bord de la plaque est pratiquement constante dans l'épaisseur et légèrement inférieure à la contrainte de surface au centre de la plaque (cf. Figure B.38).



**Figure B.38 :** Courbe de  $\sigma_{zz}$  au milieu et au bord de la plaque dans l'épaisseur pour une plaque épaisse

## B.V. Conclusion

Les simulations du traitement de trempe permettent de calculer l'état de contrainte transitoire et résiduel d'une plaque de verre. L'analyse de l'effet intérieur montre les variations de la température, des contraintes au milieu de la plaque. La comparaison des résultats des calculs avec des résultats issus de la littérature valide bien le choix du modèle de Narayanaswamy pour décrire le comportement thermo-mécanique du verre et des données mécaniques et thermiques caractéristiques du matériau étudié. Une étude de sensibilité montre l'influence relative des caractéristiques du verre sur les résultats des calculs.

Les variations des contraintes sur les tranches de la plaque sont connues grâce à l'analyse de l'effet de bord. La forme de la contrainte sur le bord dépend fortement du rapport entre les valeurs des coefficients de transfert thermique associés aux convections forcées appliquées sur le bord et sur le plan de la plaque. L'état de contrainte tridimensionnel est alors accessible grâce à ces simulations.

Dans le cas des plaques épaisses testées ensuite en flexion 4 points, les coefficients de transfert thermiques (inaccessibles lors de la fabrication) sont identifiés grâce à des mesures optiques. Dans ce cas, la contrainte sur le bord (suivant l'épaisseur de la plaque) est pratiquement constante, et légèrement inférieure à la contrainte de compression de surface au centre de la plaque. Ces résultats des simulations sont validés de manière satisfaisante grâce aux mesures optiques.

*Résumé du chapitre B*

L'objet de ce chapitre est de présenter des simulations par le code aux éléments finis MARC de la trempe du verre. La trempe est un traitement thermique qui consiste à refroidir brutalement par jets d'air du verre chauffé au-delà de 600 °C. L'effet des jets d'air considéré comme uniforme est modélisé par une convection forcée sur chaque face de la plaque.

Le gradient thermique dans l'épaisseur et les variations du comportement mécanique du verre avec la température provoquent l'apparition de contraintes transitoires et résiduelles. L'analyse des résultats est faite en deux parties : effet intérieur (résultats au centre de la plaque) et effet de bord (résultats près des tranches de la plaque).

Les résultats des simulations de la trempe d'une plaque mince sont comparés à des résultats issus de travaux antérieurs. La bonne concordance des valeurs montre que le modèle de Narayanaswamy décrit de manière satisfaisante le comportement thermo-mécanique du verre, et que les caractéristiques matérielles utilisées sont bien adaptées. Une étude de sensibilité aux caractéristiques thermiques et mécaniques montre l'importance du module d'Young, du coefficient de dilatation thermique du verre liquide et surtout de la température de référence (associée aux caractéristiques viscoélastiques).

L'état de contrainte tridimensionnel est déterminé dans toute la plaque. En raison de l'effet de bord, toute la surface de la plaque se trouve en compression à la fin du traitement. La forme de la contrainte sur le bord (suivant l'épaisseur) est très sensible à la valeur du coefficient de transfert thermique de la convection forcée appliquée sur le bord pour une convection sur le plan de la plaque donnée.

Ces calculs servent en particulier à simuler la trempe d'une plaque épaisse (élément testé ensuite en flexion 4 points). Grâce à des mesures optiques des contraintes résiduelles de ces poutres, les paramètres de trempe sont identifiés. Dans le cas des plaques épaisses étudiées, la contrainte sur la tranche de la plaque est pratiquement constante dans l'épaisseur et légèrement inférieure à la contrainte de compression de surface au milieu de la plaque. Les simulations sont validées grâce à des mesures optiques.



# CHAPITRE C

## DETERMINATION DES PARAMETRES DE RUPTURE DU VERRE RECUIT

|            |                                                                          |     |
|------------|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| C.I.       | Introduction au programme expérimental .....                             | 91  |
| C.II.      | Description des essais de caractérisation et d'identification .....      | 91  |
| C.II.1.    | Généralités .....                                                        | 91  |
| C.II.1.a.  | Les échantillons .....                                                   | 91  |
| C.II.1.b.  | Le montage .....                                                         | 92  |
| C.II.2.    | Mesures .....                                                            | 94  |
| C.II.3.    | Vitesse de chargement .....                                              | 94  |
| C.III.     | Analyse statistique .....                                                | 94  |
| C.III.1.   | Théorie de Weibull .....                                                 | 94  |
| C.III.1.a. | Formulation fonctionnelle .....                                          | 95  |
| C.III.1.b. | A partir de la mécanique de la rupture .....                             | 96  |
| C.III.2.   | Méthodes de calcul des paramètres de Weibull .....                       | 97  |
| C.III.2.a. | Méthode de régression linéaire .....                                     | 97  |
| C.III.2.b. | Méthode des moments .....                                                | 98  |
| C.III.2.c. | Méthode de la vraisemblance maximale .....                               | 98  |
| C.III.3.   | Fiabilité des estimateurs .....                                          | 98  |
| C.III.3.a. | Estimation de $m$ .....                                                  | 99  |
| C.III.3.b. | Estimation de $\sigma_0$ .....                                           | 100 |
| C.IV.      | Résultats des essais de caractérisation et d'identification .....        | 100 |
| C.IV.1.    | Courbe type obtenue .....                                                | 100 |
| C.IV.2.    | Paramètres statistiques .....                                            | 101 |
| C.IV.2.a.  | Domaine d'influence des défauts .....                                    | 101 |
| C.IV.2.b.  | Résultats de la première série .....                                     | 103 |
| C.IV.2.c.  | Résultats de la deuxième série .....                                     | 104 |
| C.IV.3.    | Paramètres tractographiques .....                                        | 106 |
| C.V.       | Effet de la vitesse de chargement .....                                  | 107 |
| C.V.1.     | Mise en évidence .....                                                   | 107 |
| C.V.2.     | Prediction .....                                                         | 108 |
| C.V.2.a.   | Association des modèles de Weibull et de fissuration sous-critique ..... | 108 |
| C.V.2.b.   | Loi de Weibull + loi d'Evans .....                                       | 109 |
| C.V.2.c.   | Loi de Weibull + loi de fissuration exponentielle .....                  | 111 |
| C.V.2.d.   | Evolution de la distribution des défauts au cours du chargement .....    | 113 |
| C.V.3.     | Validation .....                                                         | 120 |
| C.V.3.a.   | Prediction avec la loi d'Evans .....                                     | 120 |
| C.V.3.b.   | Prediction avec la loi exponentielle .....                               | 122 |
| C.VI.      | Conclusion .....                                                         | 123 |
|            | Resumé du chapitre C .....                                               | 124 |



## **C. DETERMINATION DES PARAMETRES DE RUPTURE DU VERRE RECUIT**

### **C.I. Introduction au programme expérimental**

L'objectif de la campagne expérimentale est de déterminer toutes les données nécessaires à l'évaluation de la résistance du verre recuit et trempé. Le verre est un matériau à rupture fragile, très sensible à la distribution des défauts de surface. Les résultats sont donc exploités de manière statistique car ces défauts sont trop petits, trop nombreux et trop difficiles à détecter pour être dénombrés de manière déterministe. Un polissage industriel sur du verre épais (19 mm) généralement utilisé pour les structures en verre est caractérisé. Les éléments sont fournis par la société Saint-Gobain.

Les éléments chargés dans leur plan sont testés en flexion 4 points. Ce type de chargement permet d'obtenir une zone uniformément tendue en sous-face, entre les charges.

Le chapitre C s'intéresse aux essais sur de petits éléments en verre recuit. Deux séries de 60 essais sont réalisées sur des éléments fabriqués séparément, c'est-à-dire polis séparément. Le nombre important d'essais permettra de déterminer les paramètres statistiques de Weibull associés à chaque polissage. Les essais sont effectués avec plusieurs vitesses de chargement pour mettre en évidence l'effet de vitesse dû à la fissuration sous-critique.

Le chapitre D concerne les essais sur de grands éléments. De grandes poutres en verre recuit ayant subi le même polissage que la première série de petits éléments sont testées. Ces essais permettent de valider la loi de Weibull pour la prédiction de l'effet de volume dans le verre. De grandes poutres trempées sont ensuite cassées. Ces essais ont pour but de valider la prédiction de la résistance du verre trempé faite à partir des résultats sur les petits éléments et des résultats de la simulation de trempe.

Un programme d'essais de longue durée (plusieurs mois) ayant pour objectif d'appréhender la résistance de ces éléments de verre à plus long terme est présenté en annexe 3. Les questions qui se posent sont l'existence d'une limite de fatigue statique, l'efficacité de la trempe comme protection contre la propagation des défauts et la validité de la loi de fatigue statique généralement admise.

### **C.II. Description des essais de caractérisation et d'identification**

Le but de ces essais est de caractériser de manière statistique un polissage industriel (joint plat poli) ainsi que d'appréhender l'effet de la fatigue statique grâce à différentes vitesses de chargement accessibles sur la machine d'essai. La comparaison des résultats obtenus pour les deux séries de petits éléments nous permettra de voir l'effet des polissages différents.

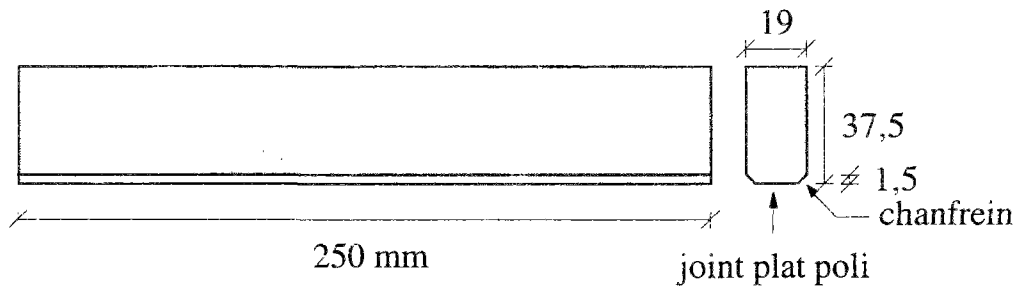
#### **C.II.1. Généralités**

##### ***C.II.1.a. Les échantillons***

Nous réalisons des essais de flexion 4 points sur de petits éléments en verre recuit.

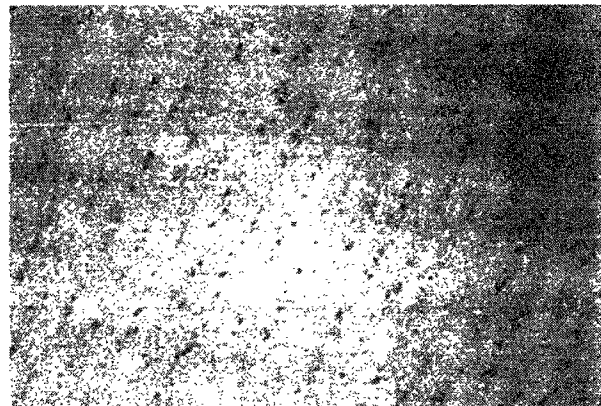
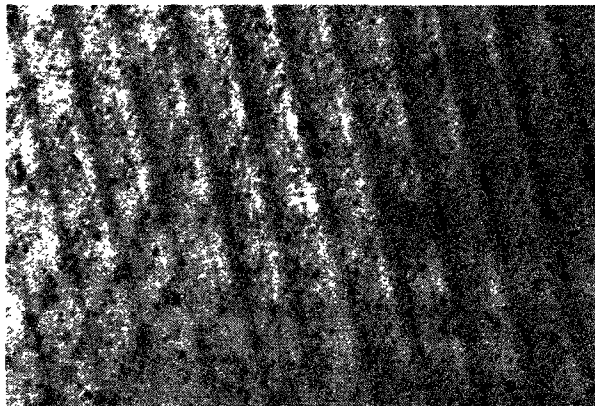
Les caractéristiques géométriques sont données sur la Figure C.1. Le verre float ( obtenu par "flottage" sur un bain d'étain) silico-sodo-calcique étudié a pour composition chimique approximative :

| SiO <sub>2</sub> | Na <sub>2</sub> O | CaO  | MgO | Autres |
|------------------|-------------------|------|-----|--------|
| 71 %             | 14 %              | 10 % | 4 % | 1 %    |



**Figure C.1 :** Caractéristiques géométriques des éléments testés

La face inférieure, qui sera la plus sollicitée en traction au cours de l'essai, est une surface polie industriellement du type "joint plat poli". Le polissage implique une nature de surface caractéristique. Ainsi, les petits éléments ont été fabriqués en deux séries. Les polissages sont différents comme le montrent les photos ci-dessous (à la même échelle) :

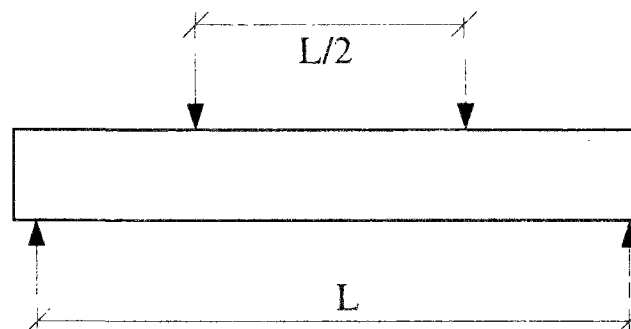


**Figure C.2 :** Photo de la surface de la première série

**Figure C.3 :** Photo de la surface de la deuxième série

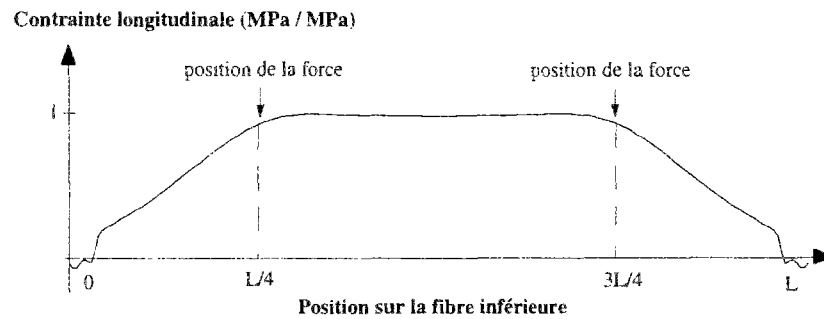
#### **C.II.1.b. Le montage**

Le montage a été conçu pour que les charges soient écartées au maximum. La surface tendue doit être la plus grande possible pour que les applications statistiques soient significatives, tout en garantissant la bonne uniformité des contraintes en sous-face entre les charges.



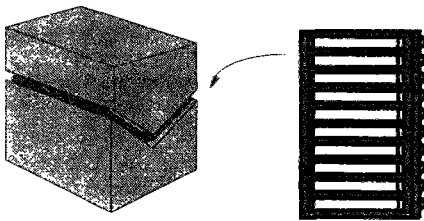
**Figure C.4 :** Schéma des essais de flexion 4 points

Un calcul par le code aux éléments finis MARC nous permet de vérifier l'uniformité de la zone tendue en sous-face :

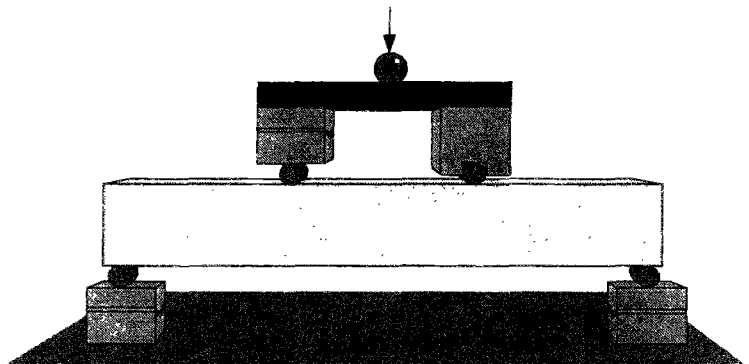


**Figure C.5 :** Variations de la contrainte longitudinale sur la fibre inférieure

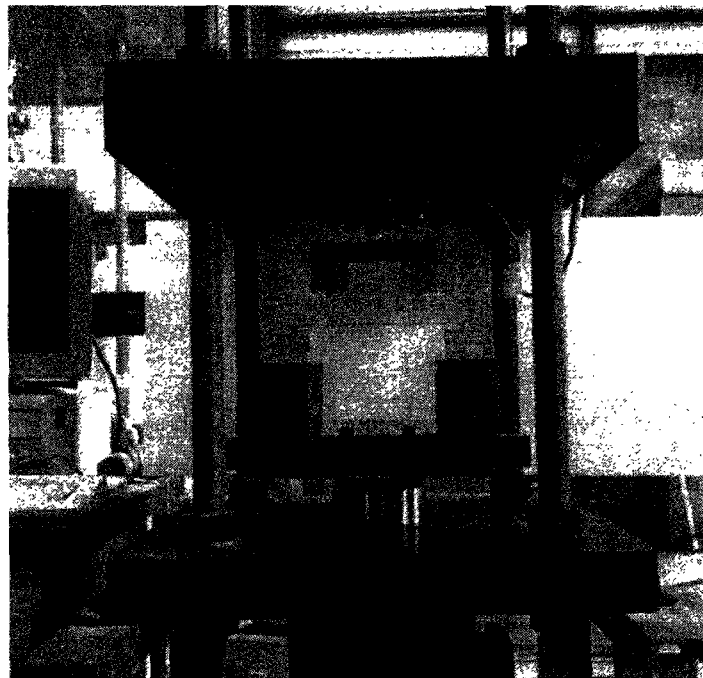
Les essais sont réalisés dans un cadre rigide muni d'un vérin hydraulique et d'un capteur de force. Des plaquettes à aiguilles (cf. Figure C.6) permettent de garantir l'isostaticité du montage.



**Figure C.6 :** Plaquette à aiguilles



**Figure C.7 :** Schéma du montage



**Figure C.8 :** Photo du montage

### C.II.2. Mesures

Deux types de mesures sont réalisées : la force appliquée et la flèche maximale de l'élément testé.

Un capteur de force placé sur le vérin hydraulique permet de mesurer la charge appliquée. La capacité de la cellule d'effort est  $50 \text{ kN} \pm 0,5 \%$ .

La mesure de la flèche est directe. Comme le montre la Figure C.9, deux capteurs de déplacement solidaires de l'éléments testé, grâce à un petit portique, donnent le déplacement maximal de la fibre supérieure (au milieu de l'élément) par rapport au déplacement de la fibre supérieure sur appui.

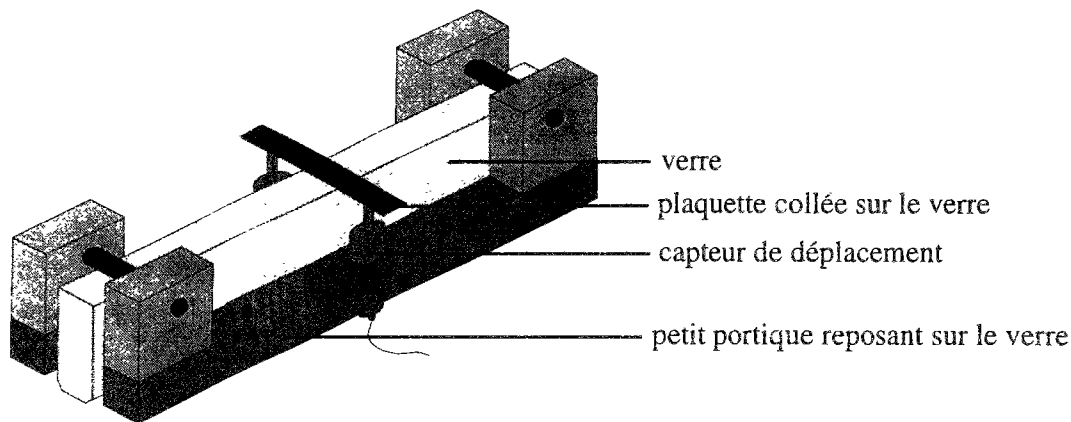


Figure C.9 : Dispositif de mesure de la flèche

### C.II.3. Vitesse de chargement

Tous les essais sont réalisés à vitesse de chargement constante. Plusieurs vitesses sont testées pour mettre en évidence l'effet de vitesse dû à la fissuration sous-critique au cours du chargement. Pour la première série d'éprouvettes, deux vitesses sont utilisées : 0,05 et 0,5 MPa/s, et trois vitesses pour la deuxième série : 0,05, 0,5 et 5 MPa/s.

## C.III. Analyse statistique

La rupture fragile est l'une des meilleures illustrations du rôle du hasard dans les phénomènes physiques<sup>1</sup>. La principale source stochastique dans la rupture est la population de microdéfauts résultant de processus technologiques particuliers.

La mécanique statistique de la rupture prend en compte la distribution aléatoire des défauts de la structure pour définir la résistance de l'élément. Dans cette présentation, la contrainte de rupture n'est pas une valeur déterministe mais chaque valeur de contrainte appliquée est reliée à une probabilité de rupture. La mécanique statistique de la rupture est utilisée ici à travers la loi de Weibull.

### C.III.1. Théorie de Weibull

La loi établie par Weibull est une loi empirique qui permet de déterminer la probabilité de rupture en fonction de la contrainte appliquée<sup>2</sup> :

---

<sup>1</sup> CHUDNOVSKY A., GORELIK M., Statistical fracture mechanics - basic concepts and numerical realization, Probamat, Cachan, 23-25 novembre 1993, NATO E-Science, (Breyse D. Ed., Kluwer Pubs.)

<sup>2</sup> WEIBULL W. A., A statistical distribution function of wide applicability in Journal of Applied Physics, 1951, vol. 18, p293  
WEIBULL W. A., A survey of statistical effects in the field of material failure in Applied Mechanics Reviews, 1952, vol. 5, n° 11

$$P_f = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{V_0} \int_V \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m dV \right]$$

avec  $V_0$  = volume unitaire  
 $m$  = module de Weibull  
 $\sigma_u$  = contrainte pour  $P_f = 0$   
 $\sigma_0$  = facteur normalisant  
 $V$  = volume

$m$  est compris entre 5 et 20 pour les céramiques en général. Plus  $m$  est grand, moins les contraintes de rupture sont dispersées. D'autre part, plus  $\sigma_0$  est grand, plus la contrainte moyenne est élevée et plus les contraintes sont dispersées.

L'analyse de Weibull comprend l'hypothèse que la rupture se produit à partir du défaut le plus critique, et qu'il n'existe pas d'interaction entre les défauts. C'est la théorie du maillon le plus faible par opposition à une conception en parallèle qui comprend une redistribution des contraintes.

Cette loi est en général bien adaptée pour la prédiction de la rupture des matériaux fragiles. Elle peut être retrouvée d'une part avec une formulation fonctionnelle et d'autre part à partir de la mécanique de la rupture. Cette dernière approche permet de donner une signification physique au module de Weibull (même si elle repose sur certaines hypothèses).

### C.III.1.a. Formulation fonctionnelle

La théorie de Weibull est déduite du théorème de probabilité. Celui-ci dit que la probabilité d'occurrence d'un événement composé de deux événements indépendants est le produit des probabilités des deux événements<sup>3</sup>.

$$P_s = \text{probabilité cumulée de survie} \quad \text{et} \quad P_f = \text{probabilité de rupture} = 1 - P_s$$

Soit  $V$  un corps soumis à un champ de contrainte constant  $\sigma$ .

$$P_s(V_1 + V_2, \sigma) = P_s(V_1, \sigma) \cdot P_s(V_2, \sigma) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \{ \} \\ V_1 \cup V_2 &= V \end{aligned}$$

Pour un taux d'accroissement de volume  $\Delta V$ , on obtient par linéarisation :

$$\begin{aligned} P_s(V + \Delta V, \sigma) &= P_s(V, \sigma) \cdot P_s(\Delta V, \sigma) \\ &= P_s(V, \sigma) + P_s'(V, \sigma) \cdot \Delta V \end{aligned}$$

Pour  $V \rightarrow 0$

$$\frac{P_s'(V, \sigma)}{P_s(V, \sigma)} = \frac{P_s(\Delta V, \sigma) - 1}{\Delta V} = P_s'(0, \sigma) = -\frac{F(\sigma)}{V_0}$$

avec  $P_s(0, \sigma) = 1$   
 $F(\sigma) > 0$   
 $F$  = fonction de risque spécifique

Par intégration, sur le volume, on aboutit à :

$$\ln P_s(V, \sigma) = \int_V \frac{F(\sigma)}{V_0} dV \quad \text{avec} \quad V_0 = \text{volume unitaire}$$

La probabilité cumulée de rupture s'écrit alors :

$$P_f(V, \sigma) = 1 - P_s(V, \sigma) = 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{V_0} \int_V F(\sigma) dV \right\}$$

<sup>3</sup> KITTL P., DIAZ G., *Weibull's fracture statistics, or probabilistic strength of materials : state of the art in Res Mechanics*, International Journal of Structural Mechanics and Material Science, 1988, vol. 24, n° 2, pp 99-207

Les résultats d'essais sont généralement en accord avec la forme analytique proposée par Weibull pour la fonction de risque spécifique.

$$F(\sigma) = \begin{cases} \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m & \sigma \geq \sigma_u \\ 0 & 0 \leq \sigma \leq \sigma_u \end{cases}$$

avec  $\sigma_u$  = contrainte pour laquelle la probabilité de rupture est nulle  
 = 0 pour un matériau fragile

La probabilité de rupture s'écrit alors :

$$P_f = 1 - \exp \left( - \frac{1}{V_0} \int_V \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m dV \right)$$

### C.III.1.b. A partir de la mécanique de la rupture

Soit un matériau fragile en traction soumis à la contrainte  $\sigma$  (loin du défaut) <sup>4</sup>.

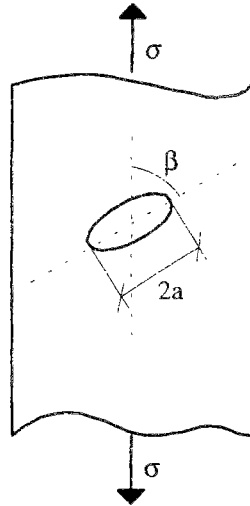


Figure C.10.: Élément fissuré en traction

La densité de probabilité de demi-longueur de fissure est :  $f(a)$ . La probabilité de rupture (de l'élément comportant une fissure) peut être déterminée en intégrant  $f(a)$  sur la demi-longueur de fissure ( $a$ ) et sur l'orientation du défaut ( $\beta$ ) :

$$P_f(\sigma) = \iint f(a) da d\beta$$

Poliniecki et Wilshaw ont trouvé grâce à des résultats expérimentaux une expression de  $f(a)$  :

$$f(a) = \frac{c^{p-1}}{(p-2)!} a^{-p} \exp \left( - \frac{c}{a} \right)$$

avec  $a$  = demi-longueur du défaut  
 $c, p$  = paramètres de la distribution des défauts

<sup>4</sup> JAYATILAKA A. S., TRUSTRUM K., *Statistical Approach to brittle fracture* in Journal of Materials Science, 1977, vol 12, pp 1426-1430

Pour un nombre de fissures  $N$  assez grand, la probabilité de rupture s'écrit :

$$P_f(\sigma) \cong 1 - \exp\{-NP_{fi}(\sigma)\}$$

$$= 1 - \exp\left\{k_i N \int_V \sigma^{2n-2} dV\right\}$$

avec  $k_i$  = coefficient  
 $N$  = nombre de défauts

On retrouve donc bien la formule de Weibull avec  $m = 2p-2$  (en reliant la longueur de fissure et la contrainte appliquée par le facteur d'intensité des contraintes). Le module de Weibull  $m$  qui était jusque là considéré comme un paramètre empirique peut donc être relié aux propriétés de la distribution des tailles de défauts dans le matériau. Il a donc une signification physique.

### C.III.2. Méthodes de calcul des paramètres de Weibull

Il existe trois méthodes principales pour la détermination des paramètres de Weibull<sup>5</sup> : la méthode de régression linéaire, la méthode des moments et la méthode de la vraisemblance maximale. D'autres méthodes moins utilisées sont également développées dans la littérature : méthode graphique, méthode du chi 2 ...

#### C.III.2.a. Méthode de régression linéaire

La méthode de régression linéaire est un cas particulier de la méthode des moindres carrés. L'expression de la loi de Weibull peut être "linéarisée" par :

$$y_i = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-P_{fi}}\right)\right) = m \ln \sigma_i - \ln \sigma_0$$

avec  $i$  = rang de l'élément dans l'échantillon (classé par ordre croissant de contrainte de rupture)  
 $P_{fi}$  = probabilité de rupture de l'élément de rang  $i$   
 $\sigma_i$  = contrainte de rupture de l'élément de rang  $i$   
 $m, \sigma_0$  = paramètres de Weibull  
 $\sigma_u = 0$

$m$  et  $\sigma_0$  peuvent alors être déterminés par la méthode des moindres carrés. L'expression de  $m$  est alors :

$$m = \frac{\sum_i y_i \ln \sigma_i - \frac{1}{N} \sum_i y_i \sum_i \ln \sigma_i}{\sum_i (\ln \sigma_i)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_i \ln \sigma_i\right)^2}$$

De plus, plusieurs expressions existent pour déterminer la probabilité de rupture de chaque élément de l'échantillon ( $P_{fi}$ ) :

$$P_{fi} = \frac{i-0,5}{N} \qquad P_{fi} = \frac{i}{N+1} \qquad P_{fi} = \frac{i-0,3}{N+0,4} \qquad P_{fi} = \frac{i-0,25}{N+0,25}$$

avec  $N$  = nombre d'éléments dans l'échantillon

La première expression de la probabilité de rupture donnée ci-dessus sera utilisée dans l'analyse des résultats d'essais.

<sup>5</sup> LANGLOIS R., *Estimation of Weibull parameters* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 10, pp 1049-1051

KHALILI A., KRAMP K., *Statistical properties of Weibull estimators* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 26, pp 6741-6752

LEON M., KITTL P., *On the estimation of Weibull's parameters in brittle materials* in Journal of Materials Science, 1985, vol.20, pp 3778-3782

TRUSTRUM K., JAYATILAKA A. S., *On estimating the Weibull modulus for a brittle material* in Journal of Materials Science, 1979, vol. 14, pp 1080-1084

### C.III.2.b. Méthode des moments

Les deux premiers moments de la distribution de Weibull sont :

$$\begin{aligned} \text{la contrainte moyenne} \quad \bar{\sigma} &= \sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \\ \text{la variance} \quad s^2 &= \frac{\sum (\sigma_i - \bar{\sigma})^2}{n-1} = \sigma_0^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que la moyenne et la variance trouvées expérimentalement sont égales à celles de la distribution entière (pour un nombre infini d'éléments), l'expression de la moyenne et de la variance permet de déterminer  $m$  et  $\sigma_0$ .

### C.III.2.c. Méthode de la vraisemblance maximale

La méthode de la vraisemblance maximale donne des paramètres de Weibull permettant d'approcher au mieux les résultats expérimentaux. La probabilité que les résultats expérimentaux soient reproduits doit être maximisée. Cela revient à ce que tous les  $\sigma_i$  se produisent simultanément c'est à dire que le produit des probabilités de rupture doit être maximal.

On définit alors la fonction de vraisemblance  $L_v$  :

$$L_v = f(\sigma_1)f(\sigma_2)...f(\sigma_N) = \prod_i f(\sigma_i) \quad \text{avec} \quad f(\sigma) = \frac{dP_f}{d\sigma}$$

$$P_f = 1 - \exp(-\alpha\sigma^m)$$

On a encore :

$$\ln(L_v) = N \ln(m) + N \ln(\alpha) + (m-1) \sum_i \ln(\sigma_i) - \alpha \sum_i \sigma_i^m$$

Cette fonction doit être maximisée vis-à-vis des variables  $m$  et  $\sigma_0$ . Cela peut être écrit sous la forme du système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln(L_v)}{\partial m} &= 0 \\ \frac{\partial \ln(L_v)}{\partial \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{N}{m} + \sum_i \ln(\sigma_i) - \alpha \sum_i \sigma_i^m \ln(\sigma_i) &= 0 \\ \frac{N}{\alpha} - \sum_i \sigma_i^m &= 0 \end{aligned} \right.$$

Le module de Weibull peut être calculé en éliminant  $b$  entre les deux équations précédentes:

$$\frac{N}{m} + \sum_i \ln(\sigma_i) - N \frac{\sum_i \sigma_i^m \ln(\sigma_i)}{\sum_i \sigma_i^m} = 0$$

### C.III.3. Fiabilité des estimateurs

Plusieurs travaux récents ont été réalisés pour évaluer la qualité des méthodes de calcul des paramètres de Weibull vues plus haut<sup>6</sup>. Les propriétés des estimateurs sont difficiles à

<sup>6</sup> TRUSTRUM K., JAYATILAKA A. S., *On estimating the Weibull modulus for a brittle material* in Journal of Materials Science, 1979, vol. 14, pp 1080-1084  
LANGLOIS R., *Estimation of Weibull parameters* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 10, pp 1049-1051

obtenir analytiquement. On a alors recours aux simulations (simulations de Monte-Carlo dans ce cas).

### C.III.3.a. Estimation de $m$

La comparaison du  $m_{\text{vrai}}$  (inhérent à la simulation) et du  $m_{\text{calculé}}$  par chaque méthode, permet de déterminer le biais de chaque estimateur en fonction du nombre d'échantillons (cf. Figure C.11).  $m_{\text{calculé}}$  tend vers le  $m_{\text{vrai}}$  pour un nombre infini d'échantillons. Ce biais peut-être corrigé connaissant le nombre d'échantillons testés grâce aux coefficients donnés dans le Tableau C.1.

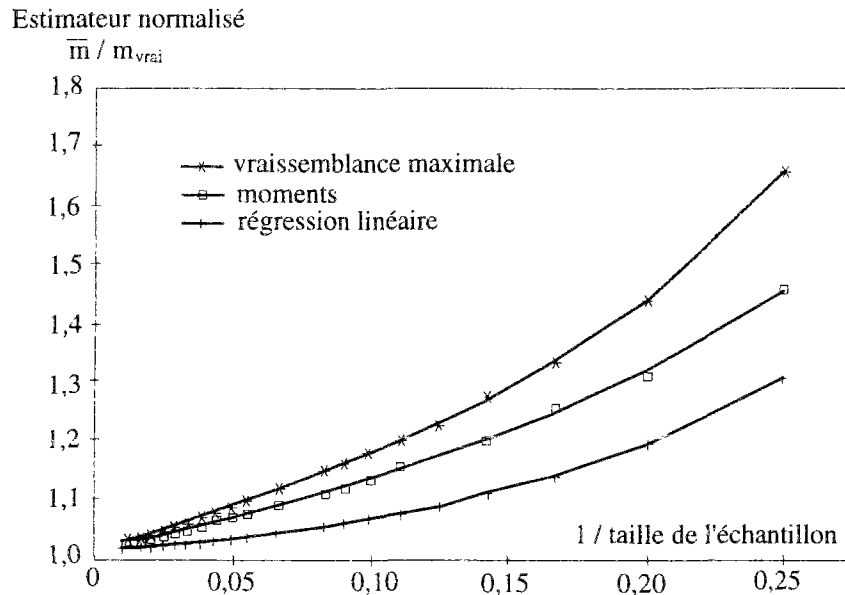


Figure C.11 : Variations de l'estimateur normalisé en fonction de l'inverse de la taille de l'échantillon<sup>7</sup>

| n  | Méthodes        |               |                        |
|----|-----------------|---------------|------------------------|
|    | Moindres carrés | Moments       | Vraisemblance maximale |
| 5  | 1,192 ± 0,667   | 1,311 ± 0,747 | 1,433 ± 0,789          |
| 6  | 1,142 ± 0,556   | 1,244 ± 0,611 | 1,334 ± 0,623          |
| 7  | 1,101 ± 0,453   | 1,189 ± 0,493 | 1,264 ± 0,492          |
| 8  | 1,080 ± 0,409   | 1,158 ± 0,440 | 1,221 ± 0,431          |
| 9  | 1,068 ± 0,376   | 1,139 ± 0,399 | 1,189 ± 0,382          |
| 10 | 1,057 ± 0,347   | 1,122 ± 0,365 | 1,167 ± 0,349          |
| 12 | 1,038 ± 0,305   | 1,095 ± 0,314 | 1,133 ± 0,299          |
| 14 | 1,032 ± 0,284   | 1,083 ± 0,288 | 1,112 ± 0,266          |
| 16 | 1,026 ± 0,260   | 1,072 ± 0,260 | 1,097 ± 0,237          |
| 18 | 1,021 ± 0,245   | 1,064 ± 0,242 | 1,084 ± 0,221          |
| 20 | 1,016 ± 0,231   | 1,055 ± 0,227 | 1,074 ± 0,205          |
| 30 | 1,007 ± 0,189   | 1,037 ± 0,179 | 1,049 ± 0,159          |
| 40 | 1,002 ± 0,162   | 1,027 ± 0,151 | 1,036 ± 0,134          |
| 50 | 1,001 ± 0,146   | 1,022 ± 0,134 | 1,028 ± 0,117          |

Tableau C.2 : Valeurs du module de Weibull pour différentes taille d'échantillon et différentes méthodes<sup>8</sup>

<sup>7</sup> KHALILI A., KRAMP K., *Statistical properties of Weibull estimators* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 26, pp 6741-6752

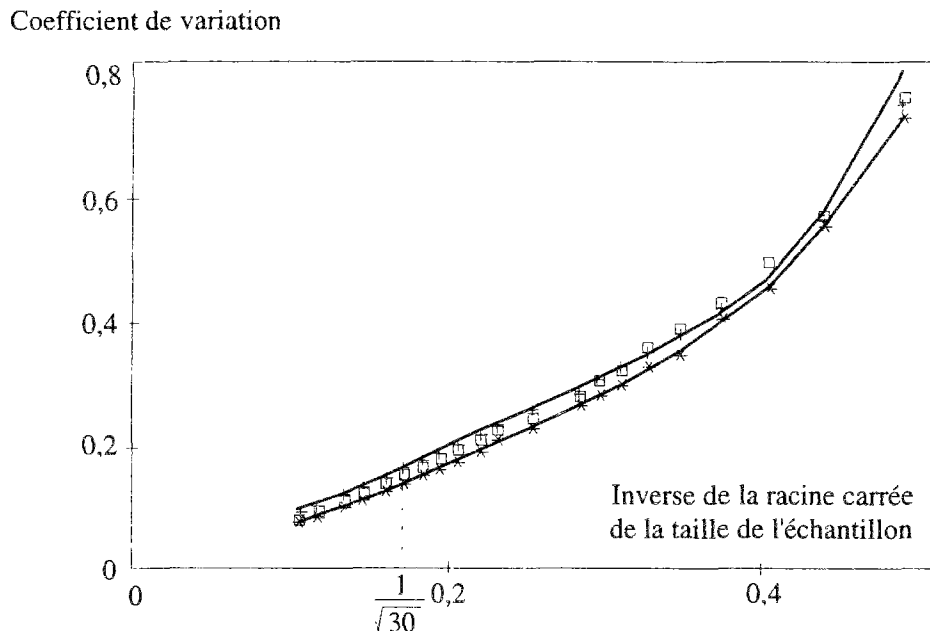
<sup>8</sup> KHALILI A., KRAMP K., *Statistical properties of Weibull estimators* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 26, pp 6741-6752

<sup>8</sup> LANGLOIS R., *Estimation of Weibull parameters* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 10, pp 1049-1051

Le coefficient de variation  $C_{\text{var}}$  permet d'estimer la dispersion des résultats :

$$C_{\text{var},m} = \frac{s}{\bar{m}} \quad \text{avec } s = \text{écart-type} \\ \bar{m} = \text{valeur moyenne de } m$$

La Figure C.12 montre que le coefficient de variation est très sensible au nombre d'échantillons quand celui-ci est inférieur à 30 en particulier. La méthode de la vraisemblance maximale donne le coefficient de variation minimal quel que soit le nombre d'échantillon. C'est donc la méthode que nous adopterons par la suite pour déterminer  $m$  et  $\sigma_0$ .



**Figure C.12:** Variations du coefficient de variation en fonction de l'inverse de la racine carrée de la taille de l'échantillon<sup>9</sup>

### C.III.3.b. Estimation de $\sigma_0$

L'estimation de  $\sigma_0$  ne varie pas de manière sensible en fonction de la méthode employée. La dispersion observée est symétrique et du même ordre pour les trois méthodes. De plus, elle est négligeable devant celle de  $m$ .

## C.IV. Résultats des essais de caractérisation et d'identification

Deux séries d'essais sont réalisés sur 60 petits éléments de verre recuit. Les deux séries d'éléments ayant été polies séparément, deux distributions de défauts (correspondant aux deux façonnages) seront caractérisées. D'autre part, afin de mettre en évidence un effet de vitesse dû à la fatigue statique du verre, les éléments sont testés avec plusieurs vitesses de chargement dans le milieu du laboratoire (15 à 20 °C et 50 % H.R. environ).

### C.IV.1. Courbe type obtenue

Les mesures réalisées fournissent directement la courbe charge / flèche. La courbe contrainte / déformation est déduite des informations globales précédentes en prenant en

<sup>9</sup> KHALILI A., KRAMP K., *Statistical properties of Weibull estimators* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 26, pp 6741-6752

compte à la fois l'effet du coefficient de Poisson et l'effet de l'effort tranchant (cf. Figure C.13).

En raison de la grande homogénéité chimique du verre testé (nécessaire pour que la qualité optique du produit soit garantie), on s'attend à ce que l'essentiel des variations du module d'Young apparemment mesurées soit le reflet des dispersions liées au dispositif expérimental et non intrinsèque au matériau. La comparaison des valeurs du module d'Young obtenues pour les différents essais montre la qualité des essais. De plus, les deux courbes contrainte-déformation tracées grâce aux mesures de la flèche doivent être confondues pour montrer que le chargement se fait bien dans le plan.

Valeur du module d'Young obtenue :

$$\text{moyenne : } \bar{E} = 70\,700 \text{ MPa}$$

$$\text{écart type : } s_E = 1\,600 \text{ MPa}$$

La valeur moyenne obtenue correspond bien à la valeur attendue (autour de  $7 \cdot 10^{10}$  Pa) et l'écart-type est assez faible.

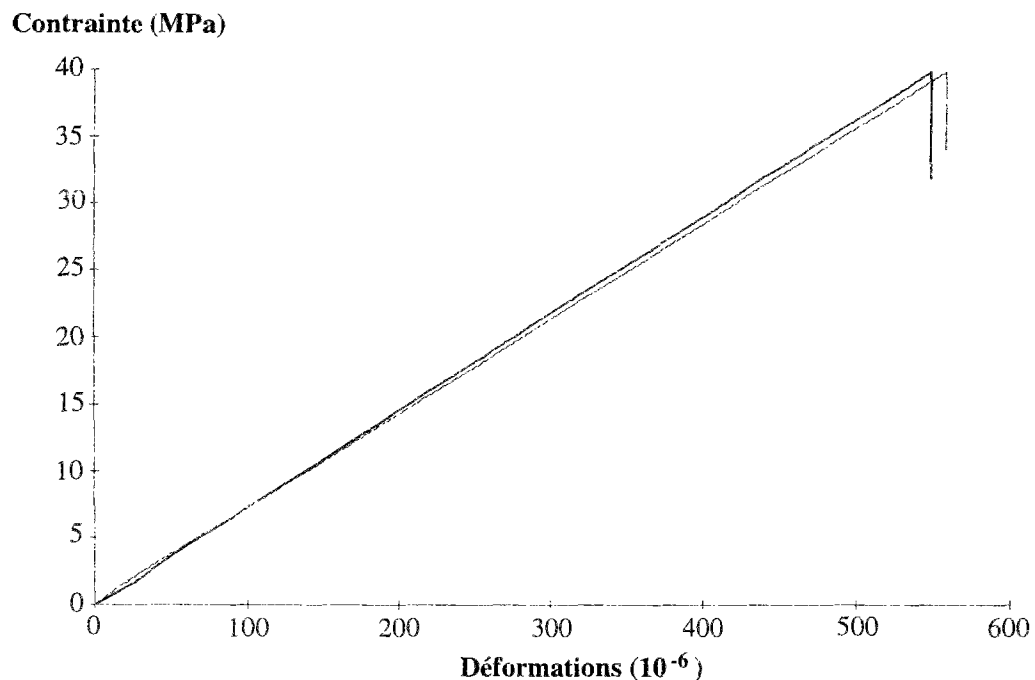


Figure C.13 : Courbe contrainte / déformation obtenue à l'aide des capteurs de déplacement (cf. Figure C.9)

## C.IV.2. Paramètres statistiques

### C.IV.2.a. Domaine d'influence des défauts

Pour les éléments étudiés, les défauts volumiques sont négligés devant les défauts surfaciques. Cette hypothèse est confirmée par le lieu des origines de rupture qui se trouvent toutes en surface. D'autre part, les défauts de surface créés lors de la fabrication du verre (sur les faces principales de la plaque) sont négligés devant les défauts présents sur la tranche "polie" mécaniquement. Les quelques éléments ayant une origine de rupture en dehors de la tranche, entre les forces appliquées, sont éliminés lors de l'analyse des résultats.

La loi de Weibull utilisée pour nos essais comprend une intégrale sur la surface  $S$  : tranche inférieure entre les forces appliquées (cf. Figure C.14) :

$$P_f = 1 - \exp\left(-\frac{1}{S_0} \int_S \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dS\right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{bL}{2S_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right)$$

avec  $b$  = largeur de l'élément  
 $L$  = distance entre appuis  
 $S_0$  = surface unitaire  
 $\sigma$  = contrainte appliquée  
 $m, \sigma_0$  = paramètres de Weibull

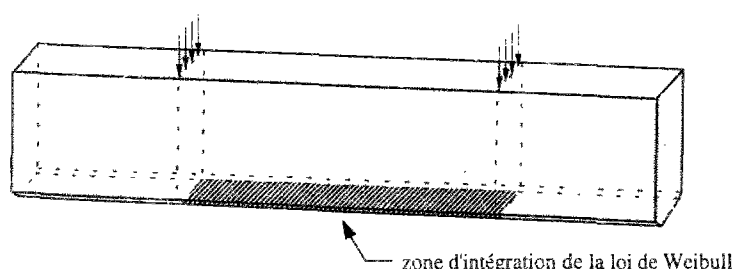


Figure C.14 : Dessin de la surface concernée dans la loi de Weibull

Certains essais ont dû être éliminés car l'origine de rupture ne se situe pas dans la zone d'influence des défauts définie ci-dessus :

| Cause d'élimination                                                                                                                                              | Description |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- la rupture se produit <i>en dehors des forces</i></li> </ul> première série : 6 cas<br>deuxième série : 1 cas           |             |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- la rupture se produit <i>en dehors de la tranche polie</i></li> </ul> première série : 2 cas<br>deuxième série : 11 cas |             |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- la rupture se produit <i>sur l'appui</i></li> </ul> première série : 2 cas<br>deuxième série : 3 cas                    |             |

Les cas éliminés à cause d'une rupture en dehors des forces peuvent être étudiés avec les autres essais si la loi de Weibull est écrite en prenant en compte les parties triangulaires des contraintes (entre appuis et forces). Cette analyse est développée en Annexe 3.

Les cas éliminés à cause d'une rupture en dehors de la tranche peuvent encore être séparés en deux familles : origine de rupture sur le chanfrein et origine de rupture sur une face verticale. Le chanfrein, de même que la tranche inférieure, est une surface polie

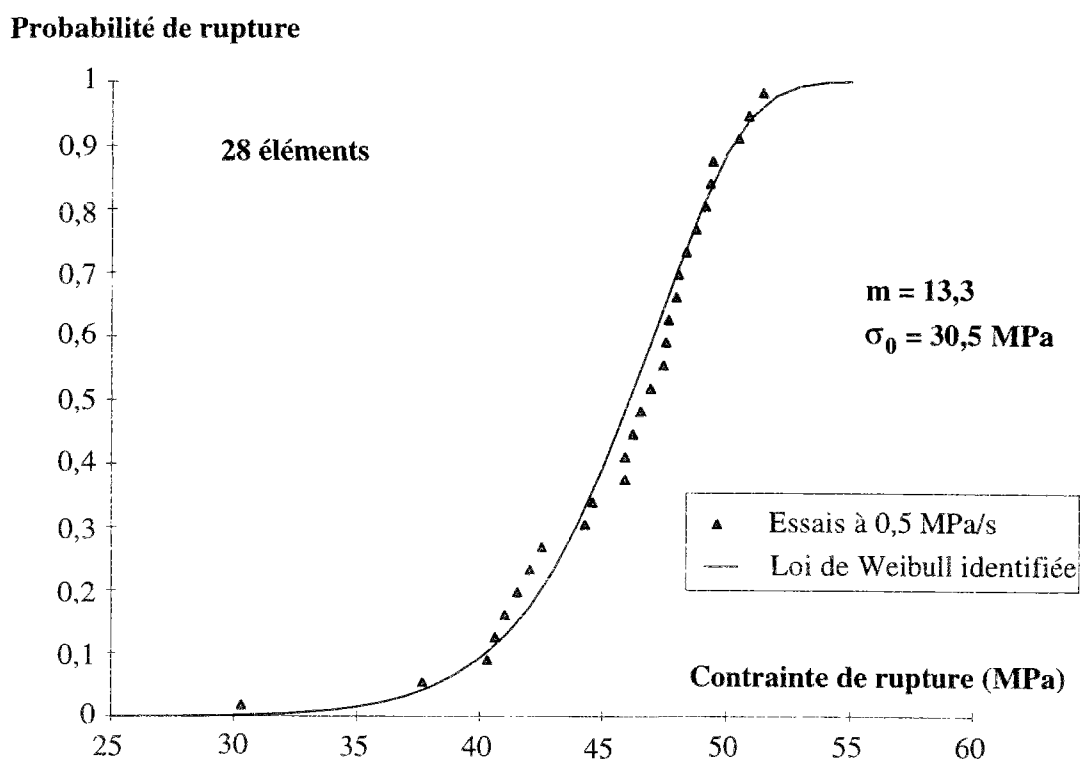
mécaniquement. La distribution des défauts sur le chanfrein peut être considérée comme identique à celle présente sur la tranche. L'analyse des résultats prenant en considération les éléments ayant rompu à partir du chanfrein est développée en Annexe 3.

Les paramètres de Weibull sont calculés avec la méthode de la vraisemblance maximale qui donne le coefficient de variation le plus faible comme vu précédemment. Grâce au tableau D.1., le module de Weibull peut être corrigé connaissant le nombre d'éléments testés.

#### C.IV.2.b. Résultats de la première série d'essais

Pour la première série d'éléments, deux vitesses de chargement sont testées : 0,5 et 0,05 MPa/s. Les contraintes moyennes obtenues sont respectivement : 45,4 et 41,2 MPa. On voit ici une manifestation de l'effet de vitesse sur la contrainte moyenne. Les courbes de probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture sont :

**X pour la première vitesse de chargement : 0,5 MPa/s**



**Figure C.15 :** Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture (essais à 0,5 MPa/s)

Les résultats montrent une grande dispersion des contraintes de rupture :

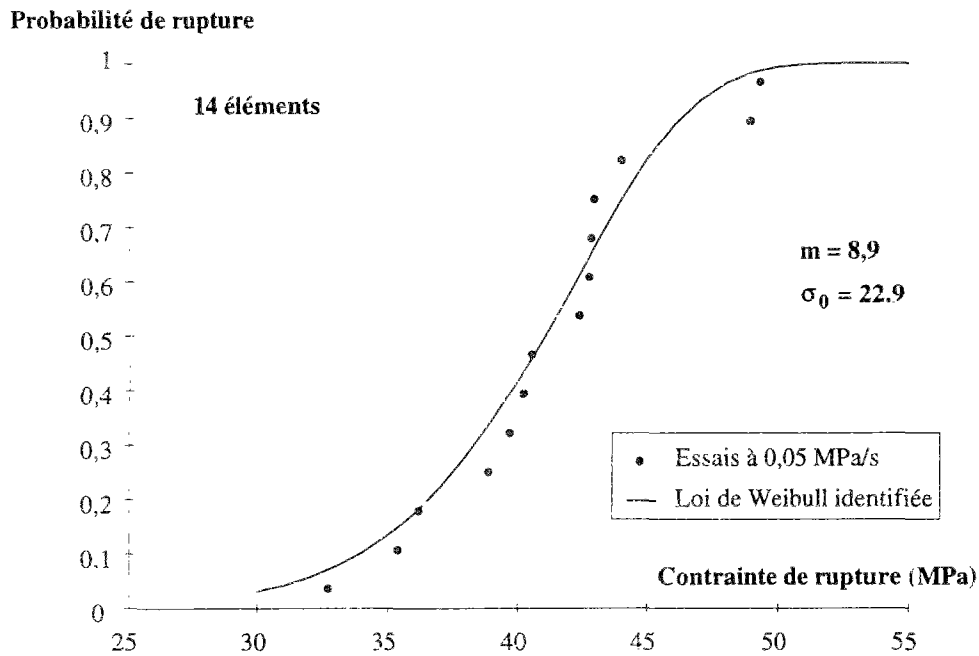
$$\sigma_{\text{minimale}} = 30,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{moyenne}} = 45,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{maximale}} = 51,5 \text{ MPa}$$

Cela prouve bien que la résistance de ces éléments ne peut pas être définie de manière déterministe. Une analyse statistique est indispensable pour prendre en compte cette grande variabilité.

**X** pour la deuxième vitesse de chargement : 0,05 MPa/s



**Figure C.16** : Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture (essais à 0,05 MPa/s)

Les résultats sont également très dispersés avec une contrainte de rupture moyenne plus faible que pour la première vitesse :

$$\sigma_{\text{minimale}} = 32,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{moyenne}} = 41,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{maximale}} = 49,3 \text{ MPa}$$

L'incertitude sur le module de Weibull identifié est d'autant plus grande que le nombre d'éléments dans l'échantillon est faible (cf. Tableau C.2). Ainsi, les intervalles de confiance de  $m$  à 90 % près sont pour la première série d'essais :

$$\text{vitesse 1} = 0,5 \text{ MPa/s} \quad 11,5 \leq m \leq 16,1$$

$$\text{vitesse 2} = 0,05 \text{ MPa/s} \quad 7,1 \leq m \leq 12,7$$

#### **C.IV.2.c. Résultats de la deuxième série**

Pour la deuxième série d'éléments, trois vitesses de chargement sont testées : 5 puis 0,5 et 0,05 MPa/s. Les contraintes moyennes obtenues sont respectivement : 56,1 puis 54,7 et 50,2 MPa. Les courbes de probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture sont :

✕ pour la première vitesse de chargement : 5 MPa/s

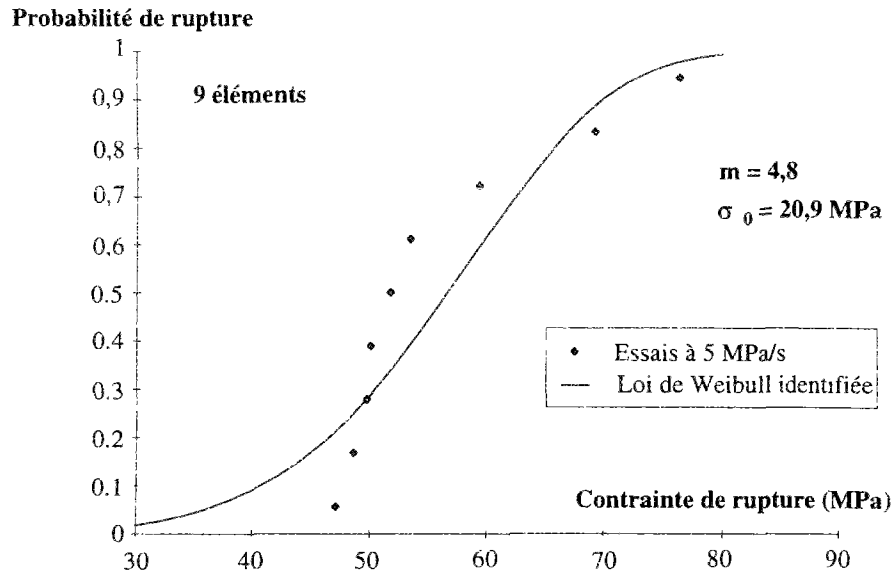


Figure C.17 : Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture (essais de la 2<sup>e</sup> série à 5 MPa/s)

Les valeurs extrêmes et la contrainte à rupture moyenne sont de :

$$\sigma_{\text{minimale}} = 47,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{moyenne}} = 56,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{maximale}} = 76,3 \text{ MPa}$$

✕ pour la deuxième vitesse de chargement : 0,5 MPa/s

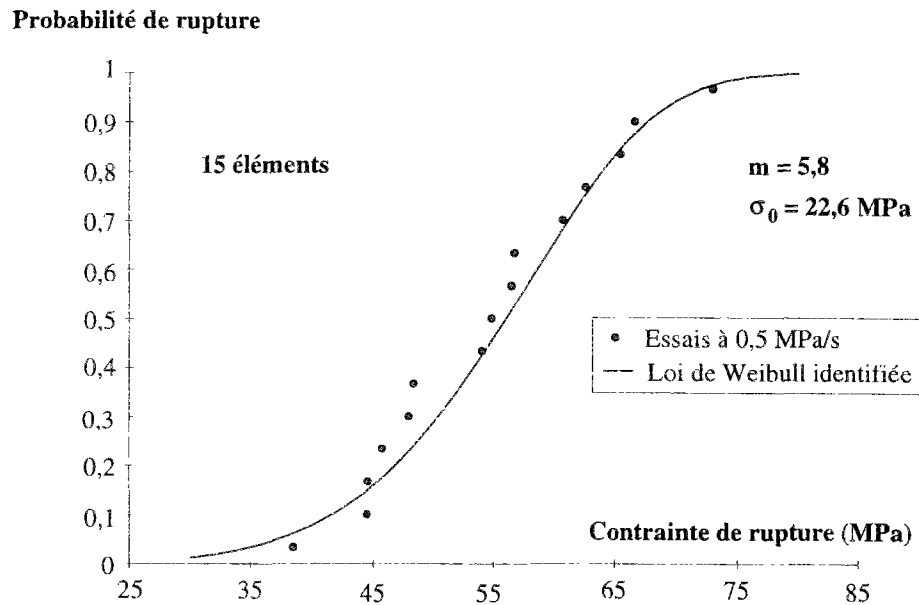


Figure C.18 : Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture (essais de la 2<sup>e</sup> série à 0,5 MPa/s)

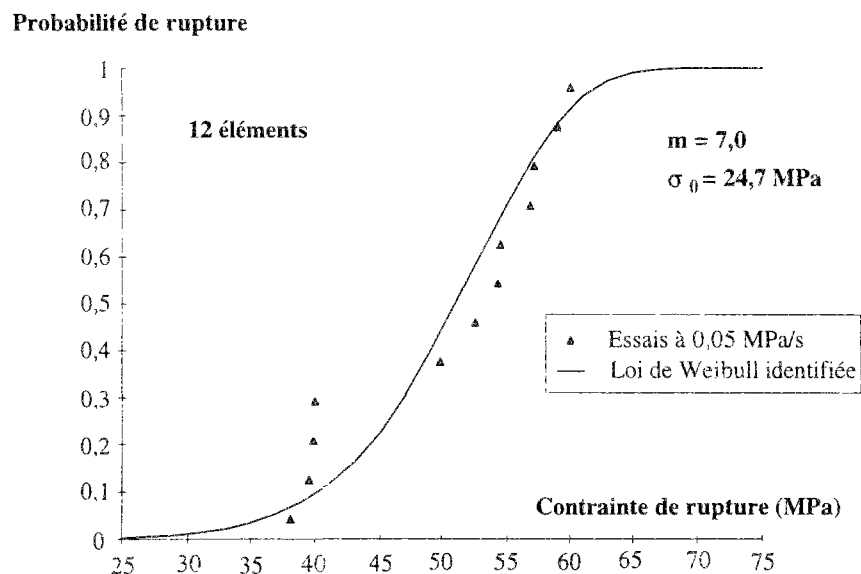
Les valeurs extrêmes et la contrainte à rupture moyenne sont de :

$$\sigma_{\text{minimale}} = 38,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{moyenne}} = 54,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{maximale}} = 73,0 \text{ MPa}$$

**X** pour la troisième vitesse de chargement : 0,05 MPa/s



**Figure C.19** : Probabilité de rupture en fonction de la contrainte de rupture (essais de la 2<sup>e</sup> série à 0,05 MPa/s)

Les valeurs extrêmes et la contrainte à rupture moyenne sont de :

$$\sigma_{\text{minimale}} = 38,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{moyenne}} = 50,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{maximale}} = 60,0 \text{ MPa}$$

Les intervalles de confiance de m à 90 % près sont pour la deuxième série d'essais :

|                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| vitesse 1 = 5 MPa/s    | $3,5 \leq m \leq 8,3$  |
| vitesse 2 = 0,5 MPa/s  | $4,7 \leq m \leq 8,0$  |
| vitesse 3 = 0,05 MPa/s | $5,4 \leq m \leq 10,5$ |

Les intervalles de confiance sont particulièrement importants pour cette série car le nombre d'éléments par échantillon est faible. Il est cependant à noter que les trois modules de Weibull ont une large plage de valeur en commun.

Il apparaît au vue des résultats des deux séries que les éléments présentant un meilleur état de surface (éléments de la deuxième série) ont des contraintes à rupture plus élevées en moyenne mais aussi plus dispersées. Il semble que même pour un polissage de grande qualité, la présence d'un défaut important fera chuter considérablement les valeurs minimales.

### C.IV.3. Paramètres fractographiques

Pour chaque essai, le rayon du miroir de rupture est mesuré (cf. Figure C.20). Connaissant la contrainte de rupture calculée de manière globale, la constante du miroir peut être déterminée.

$$\text{moyenne} = 1,85 \text{ MPa.m}^{1/2}$$

$$\text{écart-type} = 0,073$$

Le facteur de forme correspondant aux défauts de surface du verre testé est :

$$Y = 1,12 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cong 1,26$$

Le facteur d'intensité des contraintes de bifurcation peut alors être calculé :

$$K_{cb} = Y M_i = 2,33 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

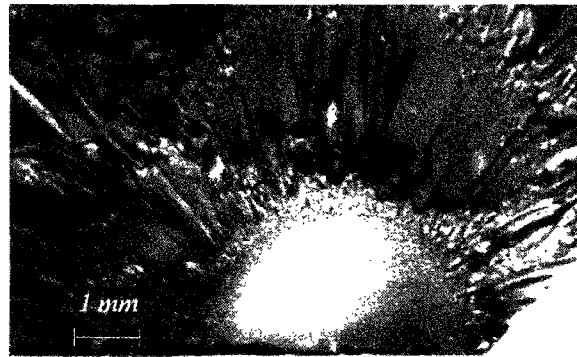


Figure C.20 : Photo du miroir de rupture

La connaissance de la constante de miroir permet d'évaluer la contrainte de rupture. Cette méthode donne une estimation de la résistance à 10 % près pour la constante de miroir moyenne obtenue. La contrainte de rupture calculée n'est qu'une approximation mais permet de vérifier l'ordre de grandeur des mesures globales réalisées. Dans le cas d'une rupture accidentelle (sans instrumentation), la mesure du miroir de rupture est le seul moyen de déterminer la contrainte de rupture (connaissant la constante de miroir)

## C.V. Effet de la vitesse de chargement

### C.V.1. Mise en évidence

La comparaison des essais réalisés à différentes vitesses met bien en évidence l'effet de la fatigue statique. En effet, avant la rupture, pendant le chargement, les défauts de surface du verre se propagent d'une manière stable. Plus la vitesse de chargement est grande, plus la contrainte à rupture est importante.

Cet effet de vitesse est clairement visible sur les résultats de la première série :

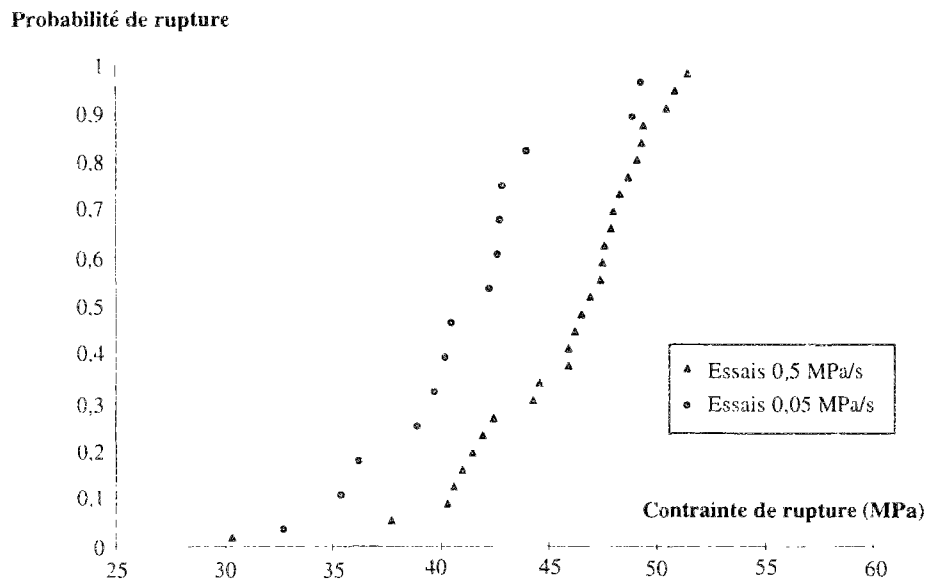


Figure C.21 : Superposition des courbes  $P_f/\sigma_{\text{rupture}}$  pour les deux vitesses de la première série

Il apparaît donc que les coefficients apparents de Weibull précédemment identifiés dépendent de la vitesse de chargement. Les paramètres de Weibull caractéristiques de l'état de surface du verre testé (correspondant à des essais en milieu inerte, en l'absence de fatigue statique) ne peuvent pas être déterminés directement à partir des essais. En associant la loi de vitesse de fissuration et la loi statistique de Weibull, l'effet de vitesse et la nature de l'environnement peuvent être pris en compte. Des paramètres de Weibull caractéristiques du verre, pour un façonnage donné, sont alors déterminés.

Les conditions environnementales des essais (température et humidité relative) ne peuvent être contrôlées. Elles seront considérées comme constantes et identiques pour tous les essais. La vitesse de fissuration n'étant pas très sensible aux conditions d'essais dans la plage observée (entre 15 et 20 °C et entre 40 et 70 % H.R.), la loi de vitesse de fissuration en fonction du facteur d'intensité des contraintes sera prise identique pour tous les essais.

## C.V.2. Prédiction

### C.V.2.a. Association des modèles de Weibull et de fissuration sous-critique

La rupture des matériaux fragiles tels que le verre est due aux défauts distribués aléatoirement dans la structure. Ces défauts doivent être pris en compte pour la prédiction de la résistance des éléments. La propagation stable des défauts est observée au cours du chargement pour de nombreux matériaux ; elle est due à la présence d'eau dans l'environnement pour le cas du verre<sup>10</sup>.

La distribution des tailles des défauts initiaux est caractérisée par une fonction densité de probabilité  $f_0$ . Cette fonction dépend de plusieurs paramètres :

$a$  : taille du défaut

$\underline{n}$  : normale à la direction du défaut

$w$  : paramètre de forme

Pour un niveau de charge donné, l'ensemble des défauts  $D$  peut-être séparé en deux sous-ensembles :

$D_c$  = ensemble des défauts critiques

$$= \{a, \underline{n}, w \mid K_I(a, \underline{n}, w; Q) \geq K_{Ic}\} \quad \text{avec } Q = \text{paramètre de chargement}$$

$D_{nc}$  = ensemble des défauts non critiques

$$= \{a, \underline{n}, w \mid K_I(a, \underline{n}, w; Q) < K_{Ic}\}$$

Si la propagation des défauts est instable, la probabilité cumulée de rupture  $P_{F0}(Q)$  peut s'écrire directement :

$$P_{F0} = \int_{D_c} f_0(a, \underline{n}, w) da d\underline{n} dw$$

Dans le cas d'une propagation stable des défauts, il faut tenir compte de l'évolution des paramètres  $a$ ,  $\underline{n}$  et  $w$ . Après un temps  $t$  de chargement, les paramètres  $a$ ,  $\underline{n}$  et  $w$  deviennent  $A$ ,  $\underline{N}$  et  $W$ .

$$A = \zeta(a, \underline{n}, w; Q, \tau)$$

<sup>10</sup> HILD F., MARQUIS D., *Fiabilité des matériaux avec défauts en propagation stable* in Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 1995, t. 320, Série IIb, pp 57-62  
HILD F., MARQUIS D., Influence of subcritical propagation of initial flaws on the reliability of brittle structures, Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium, Nottingham, 30 août-3 septembre 1994 (Parker D. F., England A. H. Ed.), Kluwer, 1995, pp 269-274

$$\underline{N} = \eta(a, \underline{n}, w; Q, \tau) \quad \text{avec } \zeta, \eta, \xi \text{ de classe } C^1$$

$$W = \xi(a, \underline{n}, w; Q, \tau)$$

Alors, la probabilité de rupture de l'élément après un chargement pendant le temps  $\tau$  peut s'écrire :

$$P_{F0}(Q, \tau) = \int_{D_c^*} f_0(a, \underline{n}, w) da d\underline{n} dw$$

$$\text{avec } D_c^* = \text{ensemble des défauts initiaux devenus critiques après } t$$

$$= \{a, \underline{n}, w \mid K_I[\zeta(a, \underline{n}, w; Q, t), \eta(a, \underline{n}, w; Q, t), \xi(a, \underline{n}, w; Q, t); Q] \geq K_{Ic}\}$$

L'effet de vitesse observé est dû à la différence d'évolution de l'ensemble des défauts initiaux en fonction de la vitesse de chargement.

### C.V.2.b. Loi de Weibull + loi d'Evans

Les paramètres de Weibull intrinsèques au matériau peuvent être définis pour la résistance du verre en milieu inerte (dans le vide ou à très basse température) dans lequel la fissuration sous-critique n'existe pas ou est négligeable.

La loi de Weibull apparente est directement liée à la distribution des défauts au moment de la rupture. Les défauts du verre se propageant au cours du chargement, les paramètres apparents de Weibull dépendent de la vitesse de chargement. Ce ne sont pas des caractéristiques du matériau considéré.

La loi d'Evans est une loi de fissuration sous-critique reliant la vitesse de fissuration au facteur d'intensité des contraintes. C'est une loi à deux paramètres souvent utilisée car facile à intégrer<sup>11</sup>. Elle s'écrit :

$$v = \frac{da}{dt} = AK_I^n$$

$$\text{avec } a = \text{longueur du défaut}$$

$$A, n = \text{paramètres de la loi d'Evans}$$

$$K_I = \sigma Y a^{1/2}$$

$$= \text{facteur d'intensité des contraintes}$$

### C.V.2.b.α. Chargement constant

En négligeant la taille du défaut initial par rapport à la taille du défaut final, l'intégration de la loi d'Evans permettant de calculer la durée de vie donne :

$$t_{fs} = \frac{2}{n-2} \frac{1}{AY^2 K_{Ic}^{n-2}} \frac{\sigma_i^{n-2}}{\sigma_s^n} \quad (*)$$

$$\text{avec } t_{fs} = \text{durée de vie sous chargement constant}$$

$$\sigma_i = \text{résistance en milieu inerte}$$

$$\sigma_s = \text{contrainte constante appliquée}$$

La loi de Weibull caractéristique du matériau (pour un façonnage donné) s'écrit :

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \int_s \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_0^*} \right)^{m^*} dS \right]$$

$$\text{avec } \sigma_i = \text{résistance en milieu inerte}$$

$$m^*, \sigma_0^* = \text{paramètres intrinsèques}$$

<sup>11</sup> HELFINSTINE J. D., Adding static and dynamic fatigue effect directly to the Weibull distribution in Journal of the American Ceramic Society, 1980, vol. 63, p 425

Remplacer  $\sigma_i$  par sa valeur issue de l'équation (\*) permet de déterminer la loi de Weibull pour le chargement considéré en fonction des paramètres intrinsèques :

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \int_s \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_0^*} \right)^{\frac{nm^*}{n-2}} \left( \frac{t_{fs}}{t_0} \right)^{\frac{m^*}{n-2}} dS \right]$$

$$= 1 - \exp \left[ - \int_s \left( \frac{\sigma_s}{\sigma_0} \right)^m dS \right]$$

avec  $t_0 = \frac{2}{n-2} \frac{1}{AY^2 K_{lc}^{n-2}} \sigma_0^{*2}$

### C.V.2.b.β. Chargement à vitesse constante

#### ✗ En négligeant la taille du défaut initial

L'intégration de la loi d'Evans permet de calculer la durée de vie. En négligeant la taille du défaut initial par rapport à celle du défaut final, on obtient :

$$t_{fd}^{n+1} = (n+1) \frac{2}{n-2} \frac{1}{AY^2 K_{lc}^{n-2}} \frac{\sigma_i^{n-2}}{\dot{\sigma}^n} \quad (**)$$

avec  $t_{fd}$  = durée de vie sous chargement à vitesse constante  
 $\sigma_i$  = résistance en milieu inerte  
 $\dot{\sigma}$  = vitesse de contrainte appliquée

En remplaçant  $\sigma_i$  par sa valeur issue de l'équation (\*\*), la loi de Weibull peut être déterminée pour une vitesse de chargement donnée en fonction des paramètres de Weibull intrinsèques :

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \int_s \left( \frac{\sigma_d}{\sigma_0^*} \right)^{\frac{nm^*}{n-2}} \left( \frac{t_{fd}}{t_0} \right)^{\frac{m^*}{n-2}} \left( \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{m^*}{n-2}} dS \right]$$

$$= 1 - \exp \left[ - \int_s \left( \frac{\sigma_d}{\sigma_0} \right)^m dS \right]$$

avec  $t_0 = \frac{2}{n-2} \frac{1}{AY^2 K_{lc}^{n-2}} \sigma_0^{*2}$

Les paramètres apparents sont reliés aux paramètres intrinsèques par :

$$m = \frac{m^*(n+1)}{n-2}$$

$$\sigma_0 = \sigma_0^* (\dot{\sigma} t_0 (n+1))^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sigma_0^* \left( \dot{\sigma}^{\frac{1+\frac{2}{n}}{n}} \left( \frac{2(n+1)}{n-2} \frac{1}{AY^2 K_{lc}^{n-2}} \right)^{\frac{1}{n}} \right)$$

L'association de la loi de Weibull et de la loi d'Evans prédit un module apparent de Weibull constant quelle que soit la vitesse de chargement.

#### ✗ Sans négliger la taille du défaut initial

L'intégration de la loi d'Evans permet de calculer la durée de vie en fonction de la taille du défaut initial et de la taille du défaut final ( $a_0$  et  $a_c$ ), de la caractéristique géométrique du défaut et du chargement (Y) et des paramètres de la fissuration sous-critique dans le milieu donné (A et n).

$$t_f = \left[ (n+1) \frac{2-n \left( a_c^{\frac{2-n}{2}} - a_0^{\frac{2-n}{2}} \right)}{A Y^n \dot{\sigma}^n} \right]^{\frac{1}{n+1}}$$

avec  $t_f$  = durée de vie sous chargement quelconque

Les tailles du défaut initial et du défaut final sont reliées à la ténacité par :

$$a_0 = \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_i Y} \right)^2$$

avec  $\sigma_i$  = résistance en milieu inerte

$$a_c = \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_c Y} \right)^2$$

avec  $\sigma_c = \dot{\sigma} t_f$  = contrainte de rupture

On dispose alors de l'expression de la résistance en milieu inerte en fonction des caractéristiques de rupture du matériau et de la vitesse de chargement :

$$\sigma_i = \frac{K_{Ic}}{Y} \left[ \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma Y} \right)^{2-n} + \frac{n-2}{2} A Y^n \frac{\sigma^{n+1}}{\dot{\sigma}^{n+1}} \right]^{\frac{1}{n-2}} \quad (***)$$

La probabilité de rupture du verre en milieu inerte (dans le vide, ou à très basse température) s'écrit avec la loi de Weibull :

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \frac{S}{S_0} \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_0^*} \right)^{m^*} \right]$$

avec  $\sigma_i$  = résistance en milieu inerte  
 $\sigma_0^*$ ,  $m^*$  = paramètres intrinsèques de Weibull

Alors, en remplaçant  $\sigma_i$  par sa valeur issue de l'équation (\*\*\*), on arrive à l'expression de la probabilité de rupture du matériau dans le milieu donné pour une vitesse de chargement donnée :

$$P_f = 1 - \exp \left[ - \frac{S}{S_0} \left( \frac{\frac{K_{Ic}}{Y} \left[ \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma Y} \right)^{2-n} + \frac{n-2}{2(n+1)} A Y^n \frac{\sigma^{n+1}}{\dot{\sigma}^{n+1}} \right]^{\frac{1}{n-2}}}{\sigma_0^*} \right)^{m^*} \right]$$

Dans le cas où la taille du défaut initial n'est pas négligée devant celle du défaut final, les deux paramètres de Weibull  $m$  et  $\sigma_0$  dépendent de la vitesse de chargement (contrairement au cas précédent où  $m$  est constant quelle que soit la vitesse de chargement). L'influence de la taille du défaut initial est particulièrement important dans le cas d'un chargement très rapide.

#### C.V.2.c. Loi de Weibull + loi exponentielle

La vitesse de fissuration peut également être décrite par une loi exponentielle à deux paramètres :

$$v = \frac{da}{dt} = v_0 \exp(BK_I) \quad \text{avec } v_0, B = \text{paramètres de la loi de vitesse de fissuration}$$

$$= v_0 \exp(B\sigma Y \sqrt{a}) \quad \begin{array}{l} a = \text{longueur du défaut} \\ K_I = \text{facteur d'intensité des contraintes} \end{array}$$

L'intégration de cette loi permet de calculer la durée de vie<sup>12</sup>. Pour un chargement à vitesse constante, on obtient :

$$\text{Soit } x = \sqrt{a} \quad da = 2x dx \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} da$$

$$t_f = \int_{\sqrt{a_0}}^{\sqrt{a_c}} \frac{1}{v_0} 2x \exp(-B\sigma Y x) dx \quad \text{avec } \begin{array}{l} a_0 = \text{taille du défaut initial} \\ a_c = \text{taille du défaut final} \end{array}$$

$$t_f = \frac{-2}{v_0} \left[ \frac{\exp(-B\sigma Y x)}{(B\sigma Y)^2} (B\sigma Y x + 1) \right]_{\sqrt{a_0}}^{\sqrt{a_c}}$$

### ✗ En négligeant la taille du défaut initial

En faisant l'hypothèse que le défaut final est très grand devant le défaut initial, on a :

$$t_f = \frac{2}{v_0} \left[ \frac{\exp\left(-B \frac{\sigma_c K_{Ic}}{\sigma_i}\right)}{(B\sigma_c Y)^2} \left( B \frac{\sigma_c K_{Ic}}{\sigma_i} + 1 \right) \right] = \frac{\sigma_c}{\dot{\sigma}} \quad \text{avec } \begin{array}{l} \dot{\sigma} = \text{vitesse de chargement} \\ K_{Ic} = \text{ténacité} \\ \sigma_c = \text{contrainte de rupture} \end{array}$$

La deuxième hypothèse est :  $B \frac{\sigma_c K_{Ic}}{\sigma_i} \ll 1$

$$\sigma_i = \frac{-B\sigma_c K_{Ic}}{\ln\left(\frac{\sigma_c v_0 (BY\sigma_c)^2}{\dot{\sigma}}\right)} \quad (****)$$

La rupture du verre est caractérisée par la probabilité de rupture en milieu inerte (dans le vide ou à très basse température) :

$$P_f = 1 - \exp\left[\frac{-1}{S_0} \int_S \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0^*}\right)^{m^*} dS\right] \quad \text{avec } \begin{array}{l} \sigma_i = \text{résistance en milieu inerte} \\ \sigma_0^*, m^* = \text{paramètres de Weibull intrinsèques} \end{array}$$

En remplaçant  $\sigma_i$  par sa valeur issue de l'équation (\*\*\*\*), la probabilité de rupture s'écrit pour un environnement donné, pour une vitesse de chargement donnée :

$$P_f = 1 - \exp\left[-\frac{S}{S_0} \left( \frac{-B\sigma K_{Ic}}{\sigma_0^* \ln\left(\frac{\sigma v_0 (BY\sigma)^2}{\dot{\sigma}}\right)} \right)^{m^*}\right]$$

<sup>12</sup> MICHALSKE T. A., BUNKER B. C., *Slow fracture model based on strained silicate structures* in Journal of Applied Physics, 1984, vol. 56, n° 10

**✕ Sans négliger la taille du défaut initial**

Sans négliger la taille du défaut initial par rapport à celle du défaut final, la durée de vie s'écrit :

$$t_f = \frac{2}{v_0(B\sigma_c Y)^2} \left[ \exp\left(-B \frac{\sigma_c K_{lc}}{\sigma_i}\right) \left( B \frac{\sigma_c K_{lc}}{\sigma_i} + 1 \right) - \exp(-BK_{lc})(BK_{lc} + 1) \right] = \frac{\sigma_c}{\dot{\sigma}}$$

En faisant l'hypothèse que  $B \frac{\sigma_c K_{lc}}{\sigma_i} \ll 1$ , la contrainte de rupture en milieu inerte s'écrit :

$$\sigma_i = \frac{-B\sigma_c K_{lc}}{\ln\left(\frac{\sigma_c^3}{\dot{\sigma}} \frac{2(BY)^2}{v_0} + \exp(-BK_{lc})(BK_{lc} + 1)\right)}$$

En remplaçant  $\sigma_i$  par son expression dans la loi de Weibull en milieu inerte, la probabilité de rupture s'écrit pour un environnement et une vitesse de chargement donnés :

$$P_f = 1 - \exp\left[-\frac{S}{S_0} \left( \frac{B\sigma_c K_{lc}}{\sigma_0^* \ln\left(\frac{\sigma}{\dot{\sigma}} \frac{v_0(BY\sigma)^2}{2} + \exp(-BK_{lc})(BK_{lc} + 1)\right)} \right)^{m^*}\right]$$

**C.V.2.d. Evolution de la distribution des défauts au cours du chargement**

**C.V.2.d.α. Détermination de la distribution des défauts**

Les essais de flexion 4 points sur la première série de petits barreaux de verre recuit ont permis de déterminer les paramètres apparents de Weibull pour la vitesse de chargement 0,5 MPa/s :

$$m = 13,3 \quad \sigma_0 = 30,5 \text{ MPa}$$

L'association de la loi de Weibull et de la loi d'Evans (loi de vitesse de fissuration puissance) sert à calculer les paramètres intrinsèques de Weibull (correspondant à la résistance en milieu inerte, à la distribution initiale des tailles de défauts) à partir des paramètres apparents :

$$m^* = 11,1 \quad \sigma_0^* = 24,0 \text{ MPa}$$

Comme vu dans le chapitre C (§ C.III.1), la loi de Weibull peut-être retrouvée en intégrant la densité de probabilité liée à la distribution des tailles de défauts proposée par Poliniecki et Wilshaw :

$$f(a) = \frac{c^{p-1}}{(p-2)!} a^{-p} e^{-\frac{c}{a}} \quad \text{avec } c, p = \text{paramètres de la distribution} \\ a = \text{taille du défaut}$$

A partir des paramètres intrinsèques de Weibull, les paramètres de la distribution de défauts peuvent être déterminés :

$$p = 6,55 \quad c = 4,789 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

La loi d'Evans est une loi puissance facile à utiliser pour décrire la fissuration sous-critique dans le verre. Elle est extrêmement brutale. L'évolution de la taille du défaut à différents

temps (pour un chargement constant) en fonction de la taille du défaut initial suit la droite  $y = x$  au début puis présente pratiquement une asymptote verticale (cf. Figure C.22).

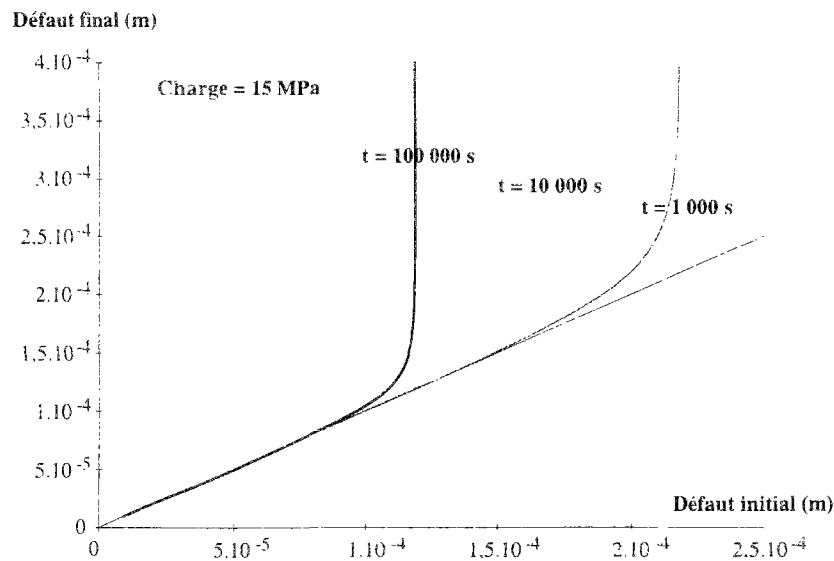


Figure C.22 : Evolution du défaut par rapport à sa taille initiale à différents temps

#### C.V.2.d.β. Evolution sous chargement constant

La charge appliquée est constante :  $\sigma_c$ . En intégrant la loi d'Evans, la taille du défaut après un temps  $t$  peut être reliée à la taille initiale du défaut :

$$a = \left[ a_0^{\frac{2-n}{2}} - \frac{n-2}{2} A \sigma_c^n Y^n t \right]^{\frac{2}{2-n}} = u(a_0)$$

La densité de probabilité de la distribution initiale des défauts est :  $f_0(a)$ . La densité de probabilité de la distribution des défauts après un temps  $t$  est :

$$f_t(a) = \frac{f_0(a)}{u'(a_0)}$$

#### ✗ Loi d'Evans sans seuil

Sous chargement constant assez important, après un temps assez long, la distribution des défauts dans la structure a évolué. L'évolution de la forme de la courbe ne semble pas en accord avec le fait que l'intégrale de la densité de probabilité doit rester constante et égale à 1. L'évolution apparente de l'aire sous la courbe est due au fait que la loi de vitesse de fissuration est brutale ; plus le temps de chargement est grand, plus la valeur de l'intégrale de  $f(a)$  dans la queue de courbe (pour les gros défauts) est importante.

Voici des courbes de distribution des défauts dans le verre pour deux niveaux de contrainte (15 et 10 MPa) à différents temps.

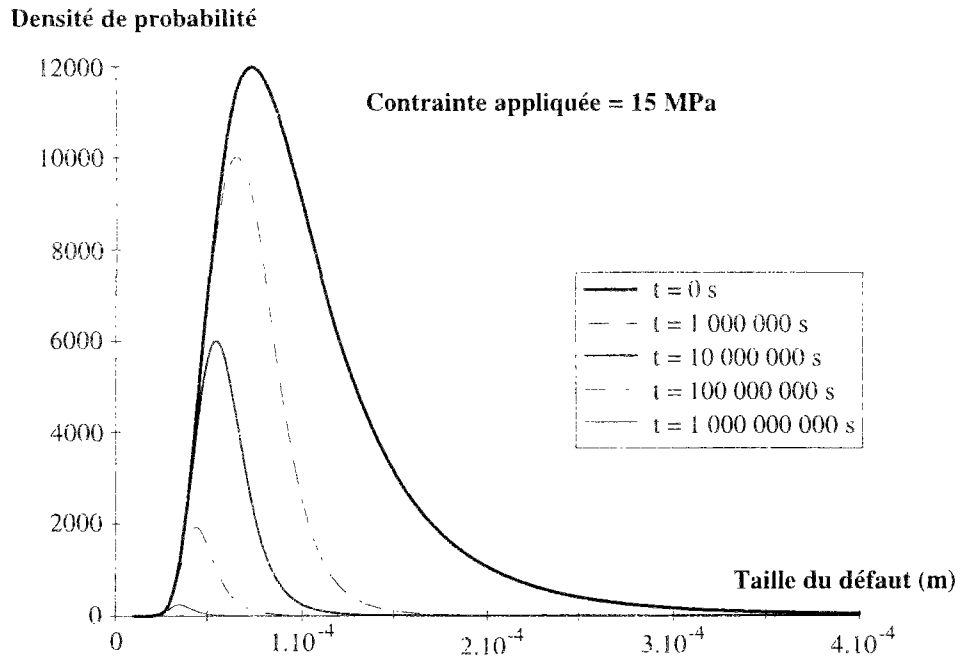


Figure C.23 : Evolution de la distribution des tailles de défauts avec le temps ( $\sigma_{\text{appliquée}} = 15$  MPa)

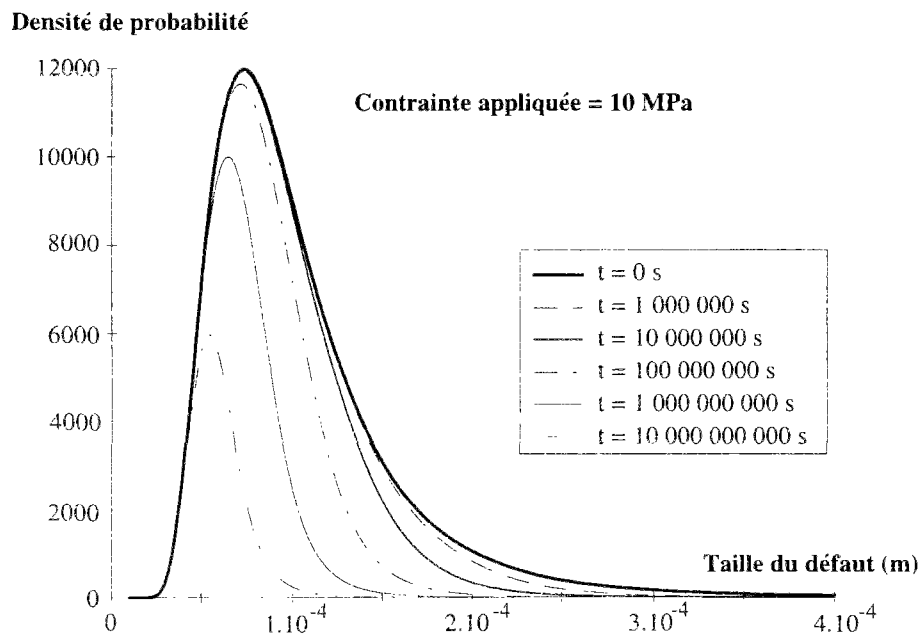


Figure C.24 : Evolution de la distribution des tailles de défauts avec le temps ( $\sigma_{\text{appliquée}} = 10$  MPa)

### ✕ Loi d'Evans avec seuil

La loi de vitesse de fissuration est mal connue pour les très faibles vitesses. Il existe peut-être un facteur d'intensité des contraintes seuil ( $K_{\text{Ith}}$ ) en deçà duquel la vitesse de fissuration est nulle. La loi de vitesse de fissuration s'écrit alors :

$$\begin{aligned} v &= 0 & \text{si } K_I < K_{\text{Ith}} \\ v &= AK_I^n & \text{si } K_I \leq K_{\text{Ith}} \end{aligned}$$

Si  $K_{\text{Ith}} = 0,10 \text{ MPa.m}^{1/2}$ , la présence du seuil n'a pratiquement aucune influence sur l'évolution de la distribution des défauts.

Si  $K_{Ith} = 0,15 \text{ MPa.m}^{1/2}$  :

Densité de probabilité

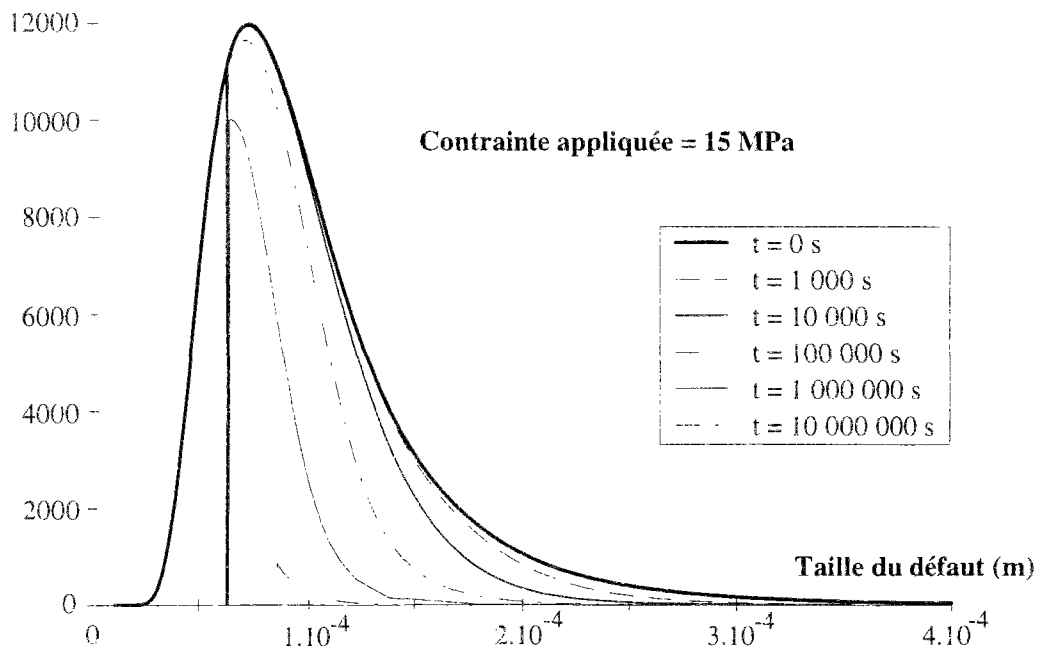


Figure C.25 : Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\sigma_a = 15 \text{ MPa}$ ,  $K_{Ith} = 0,15 \text{ MPa.m}^{1/2}$ )

Après un temps assez long (10 000 s dans le cas donné ici), l'influence du facteur d'intensité des contraintes seuil montre son influence. En deçà d'une certaine taille de défauts, la distribution ne s'est pas modifiée. Au-delà de cette valeur, les défauts ont grossi. La distribution des tailles de défauts est alors séparée en deux familles.

Si  $K_{Ith} = 0,20 \text{ MPa.m}^{1/2}$  :

Densité de probabilité

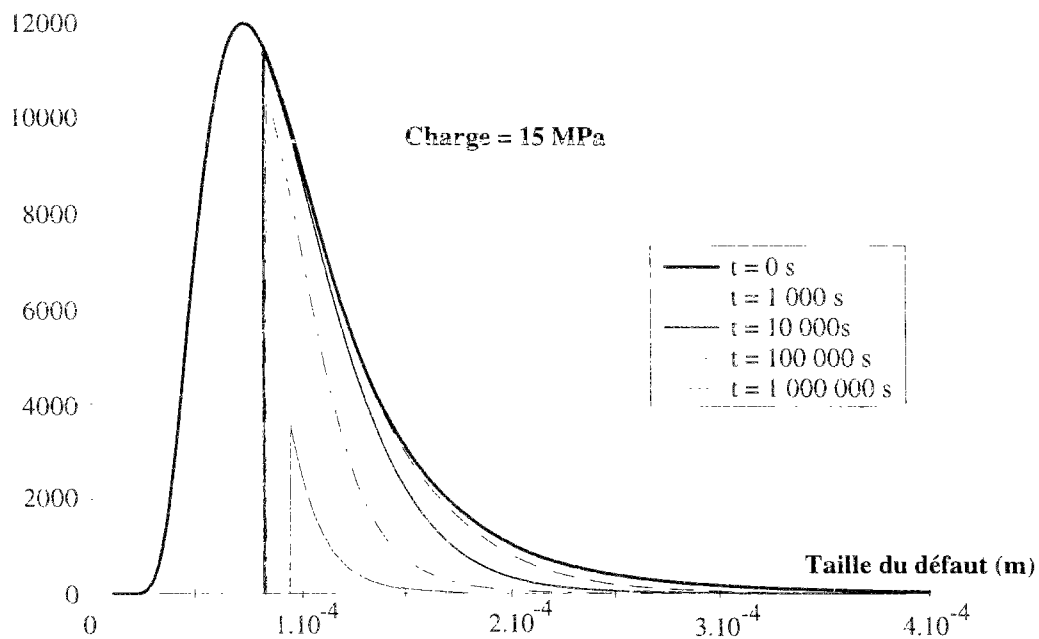


Figure C.26 : Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\sigma_a = 15 \text{ MPa}$ ,  $K_{Ith} = 0,20 \text{ MPa.m}^{1/2}$ )

Si  $K_{Ith}$  est plus important ( $0,20 \text{ MPa.m}^{1/2}$  ici), l'effet de seuil est visible pour des temps de chargement plus courts, pour des tailles de défauts plus grandes.

#### C.V.2.d.χ. Evolution sous chargement à vitesse constante

##### ✕ Loi d'Evans sans seuil

La vitesse de chargement est :  $\dot{\sigma}$ . En intégrant la loi d'Evans, la taille du défaut après un temps  $t$  peut être reliée à la taille initiale du défaut par :

$$a = \left[ a_0^{\frac{2-n}{2}} + \frac{2-n}{2(n+1)} A \sigma_0^n Y^n t^{n+1} \right]^{\frac{2}{2-n}}$$

L'évolution de la distribution des défauts est observée pour plusieurs vitesses de chargement, à plusieurs temps.

$$\dot{\sigma} = 10 \text{ MPa/s}$$

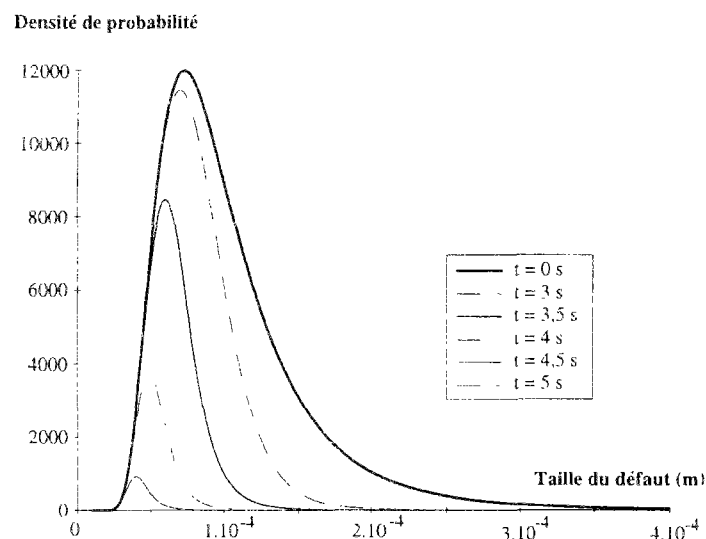


Figure C.27 : Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 15 \text{ MPa/s}$ )

$$\dot{\sigma} = 0,5 \text{ MPa/s}$$

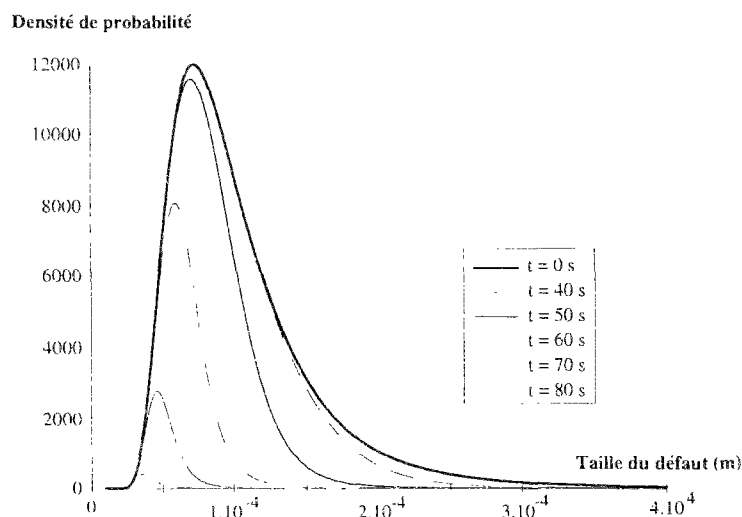


Figure C.28 : Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 0,5 \text{ MPa/s}$ )

### ✕ Loi d'Evans avec seuil

La loi d'Evans avec seuil est :

$$\begin{aligned} v &= 0 & \text{si } K_I < K_{Ith} \\ v &= AK_I^n & \text{si } K_I \geq K_{Ith} \end{aligned}$$

Au facteur d'intensité des contraintes seuil correspond une taille de défaut seuil ( $a_{th}$ ). La valeur de cette taille limite de défaut évolue avec le temps car la contrainte appliquée évolue dans le temps. L'intégration de la loi de vitesse de fissuration permet de déterminer la longueur de défaut au temps  $t$  en fonction de la taille du défaut initial :

$$\int_{a_{th}}^a a^{-\frac{n}{2}} da = \int_{\frac{K_{Ith}}{\dot{\sigma} Y \sqrt{a_0}}}^t A Y^n \dot{\sigma}^n t^n dt$$

$$a = \left[ a_0^{\frac{2-n}{2}} + \frac{2-n}{2(n+1)} A \dot{\sigma}^n Y^n \left( t^{n+1} - \left( \frac{K_{Ith}}{\dot{\sigma} Y \sqrt{a_0}} \right)^{n+1} \right) \right]^{\frac{2}{2-n}}$$

L'effet de la loi d'Evans avec seuil est observée pour plusieurs vitesses de chargement, à plusieurs temps et pour plusieurs facteurs d'intensité des contraintes seuil.

Si  $K_{Ith} = 0.15 \text{ MPa.m}^{1/2}$  :

$$\dot{\sigma} = 10 \text{ MPa/s}$$

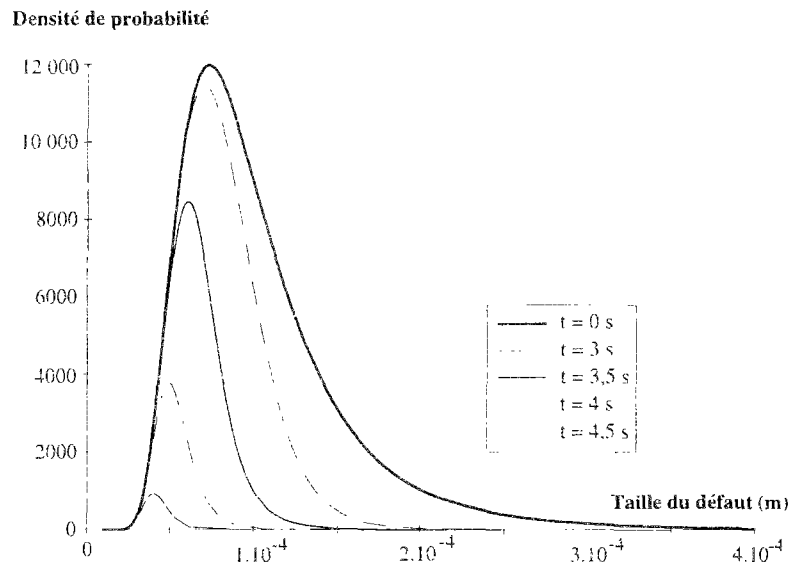


Figure C.29 : Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 10 \text{ MPa/s}$ ,  $K_{Ith} = 0,15 \text{ MPa.m}^{1/2}$ )

$$\dot{\sigma} = 0,5 \text{ MPa/s}$$

Densité de probabilité

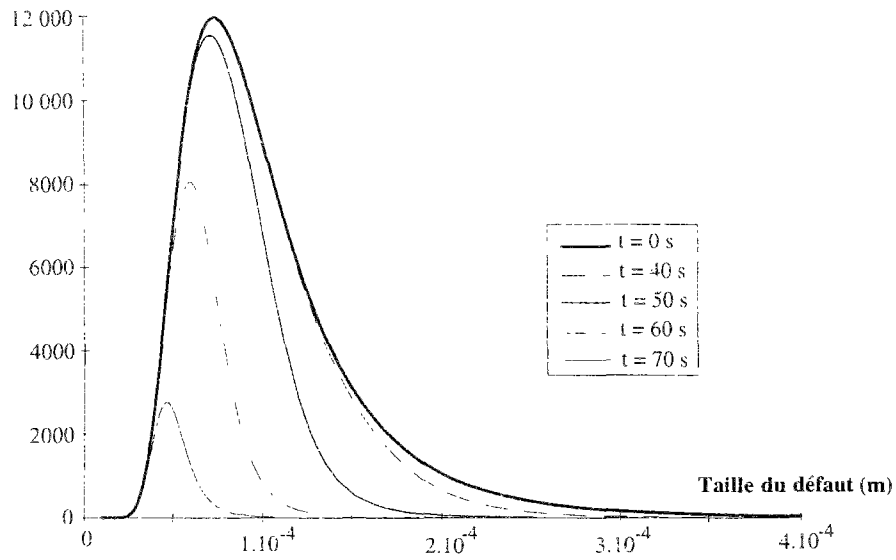


Figure C.30 : Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 0,5 \text{ MPa/s}$ ,  $K_{\text{Ith}} = 0,15 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ )

Si  $K_{\text{Ith}} = 0,20 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$  ;

$$\dot{\sigma} = 10 \text{ MPa/s}$$

Densité de probabilité

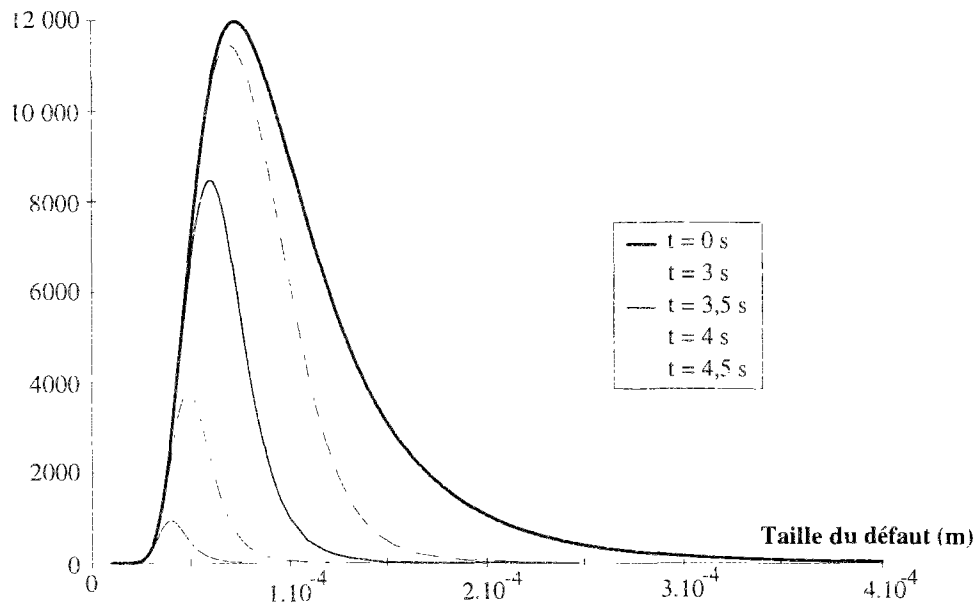
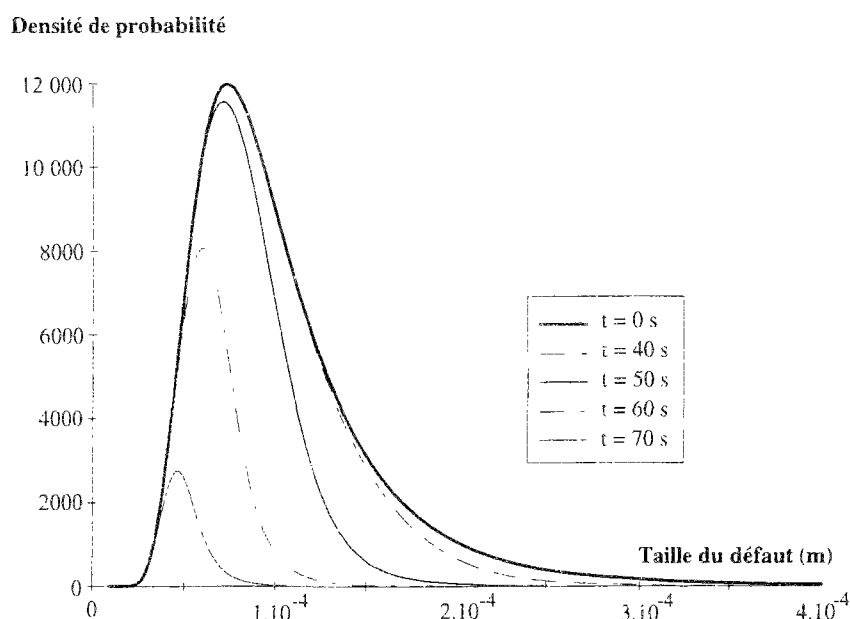


Figure C.31 : Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 10 \text{ MPa/s}$ ,  $K_{\text{Ith}} = 0,20 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ )

$$\dot{\sigma} = 0,5 \text{ MPa/s}$$



**Figure C.32 :** Evolution de la distribution des tailles de défauts ( $\dot{\sigma} = 0,5 \text{ MPa/s}$ ,  $K_{Ith} = 0,20 \text{ MPa.m}^{1/2}$ )

Pour les vitesses de chargement étudiées ici, pour les valeurs de facteur d'intensité des contraintes envisagées, il n'existe aucun effet de seuil.

### C.V.3. Validation

L'humidité relative et la température ambiantes ne peuvent pas être contrôlées dans le hall d'essai. La loi de vitesse de fissuration sera considérée comme identique pour tous les essais. Elle correspond à un cas courant d'humidité relative pour la température ambiante (autour de 20°C).

#### C.V.3.a. Prédiction avec la loi d'Evans

##### C.V.3.a.α. Loi d'Evans utilisée

La loi d'Evans utilisée ici est identifiée sur la courbe de vitesse de fissuration en fonction du facteur d'intensité des contraintes fournie par Saint-Gobain Recherche (pour du verre de 3 mm d'épaisseur). Les paramètres de la loi d'Evans identifiés sont :

$$n = 12,76 \quad \text{et} \quad A = 0,124 \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} v \text{ en m/s} \\ K_I \text{ en MPa.m}^{1/2} \end{matrix}$$

Les paramètres de la loi exponentielle identifiés sont :

$$v_0 = 4,41.10^{-4} \quad \text{et} \quad B = 37,92 \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} v \text{ en m/s} \\ K_I \text{ en MPa.m}^{1/2} \end{matrix}$$

##### C.V.3.a.β. Prédiction pour la première série d'essais

Les paramètres de Weibull sont identifiés à partir des essais à 0,5 MPa/s. L'association du modèle de Weibull et de la loi d'Evans permet de prédire la loi apparente de Weibull pour les essais à 0,05 MPa/s.

La prédiction est d'abord réalisée en négligeant la taille du défaut initial par rapport à celle du défaut final :

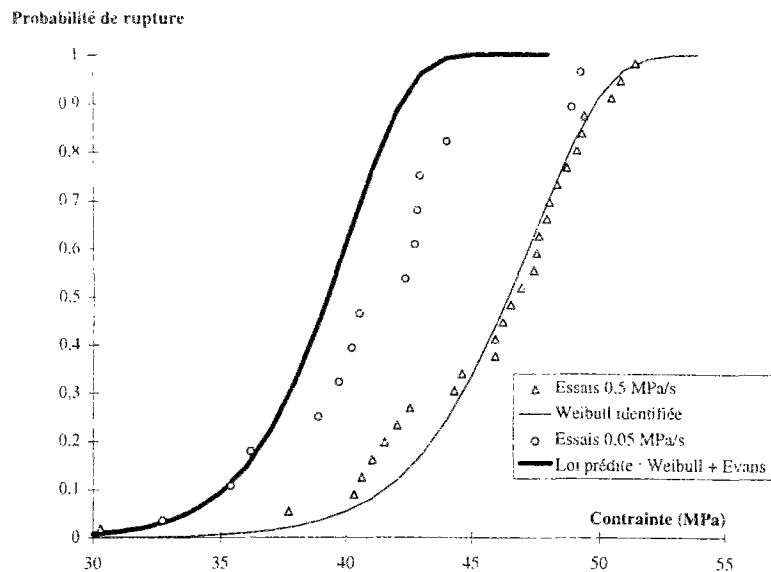


Figure C.33 : Prédiction de la loi de Weibull pour la première série d'essais (avec loi d'Evans)

La comparaison de la loi de Weibull prédite et de la loi de Weibull identifiée montre une différence assez importante. Cependant la loi de vitesse de fissuration semble bien adaptée pour prendre en compte l'effet de vitesse. La loi de vitesse de fissuration utilisée semble surestimer l'effet de la vitesse de chargement. Cela peut être dû à la différence d'environnement entre les essais d'identification réalisés ici et l'expérimentation ayant permis de déterminer la loi de vitesse de fissuration. De plus la vitesse de fissuration a été déterminée avec du verre plus fin.

La prédiction est ensuite réalisée sans négliger la taille du défaut initial par rapport à celle du défaut final. Elle donne le même résultat que le cas précédent.

#### C.V.3.a.χ. Prédiction pour la deuxième série d'essais

Les paramètres de Weibull sont identifiés à partir des essais à 0,5 MPa/s. Les lois de Weibull apparentes pour les essais à 0,05 et 5 MPa/s sont prédites grâce à l'association de la loi de Weibull et de la loi d'Evans.

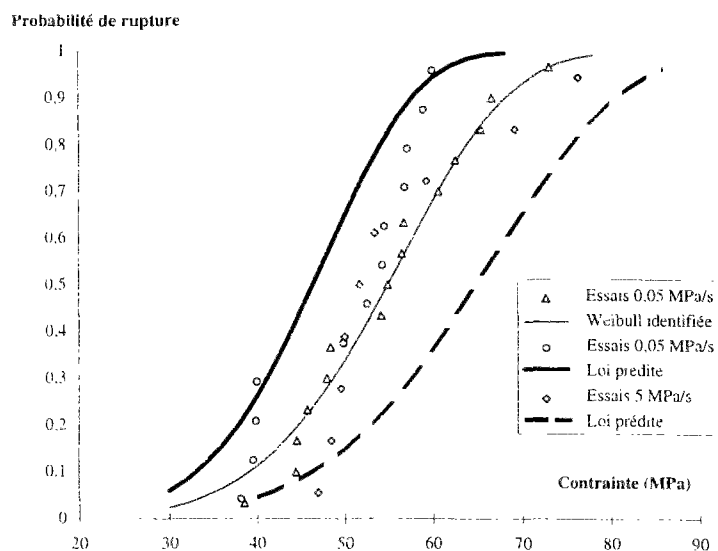


Figure C.34 : Prédiction de la loi de Weibull pour la deuxième série d'essais (avec loi d'Evans)

La prédiction réalisée pour la deuxième série d'essais est de qualité médiocre. La deuxième série d'essais ne met pas aussi clairement en évidence l'effet de vitesse que la première série. Cela peut être dû au trop faible nombre d'individus dans chaque population. Dans ces conditions les conclusions sur la comparaison des résultats expérimentaux et de la prédiction sont délicates.

### C.V.3.b. Prédiction avec la loi exponentielle

#### C.V.3.b.α. Loi exponentielle utilisée

La loi d'Evans et la loi exponentielle sont différentes pour les faibles valeurs de  $K_I$ . Dans cette zone, la loi exponentielle prédit des vitesses beaucoup plus importantes.

#### C.V.3.b.β. Prédiction pour la première série d'essais

Les paramètres de Weibull sont identifiés à partir des essais à 0,5 MPa/s. L'association du modèle de Weibull et de la loi de fissuration exponentielle permet de prédire la loi apparente de Weibull pour les essais à 0,05 MPa/s.

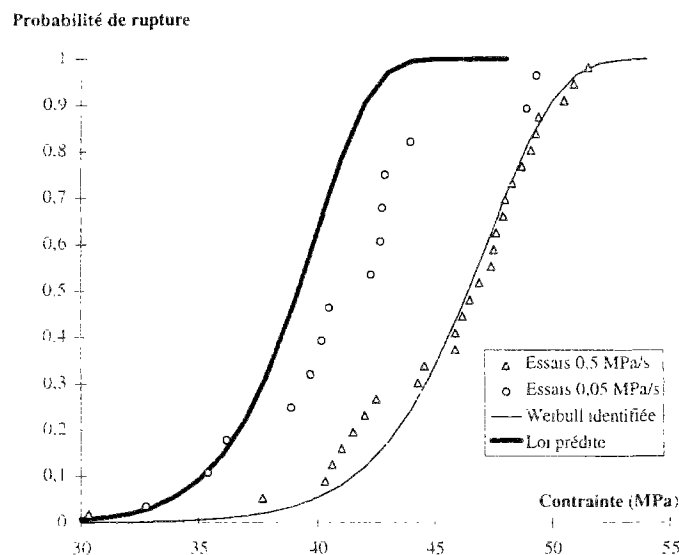
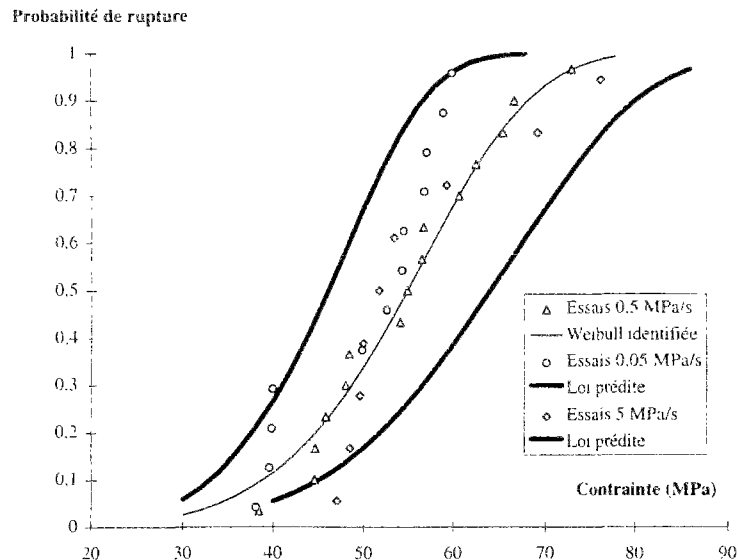


Figure C.35 : Prédiction de la loi de Weibull pour la première série d'essais (avec loi exponentielle)

L'association loi de Weibull et loi exponentielle donne une prédiction de la deuxième vitesse d'essais très peu différente de celle obtenue avec la loi d'Evans.

#### C.V.3.b.χ. Prédiction pour la deuxième série d'essais

Les paramètres de Weibull sont identifiés à partir des essais à 0,5 MPa/s. Les lois de Weibull apparentes pour les essais à 0,05 et 5 MPa/s sont prédites grâce à l'association de la loi de Weibull et de la loi de fissuration exponentielle.



**Figure C.36 :** Prédiction de la loi de Weibull pour la deuxième série d'essais (avec loi exponentielle)

La prédiction est pratiquement identique au cas de l'association de la loi de Weibull et de la loi d'Evans. L'effet de la prise en compte du défaut initial est également négligeable dans le cas de l'association de la loi de Weibull et de la loi exponentielle.

## C.VI. Conclusion

Les essais de flexion 4 points (à vitesse de chargement constante) sur les petits barreaux en verre recuit permettent de mesurer les paramètres statistiques de rupture, le paramètre fractographique (permettant de relier la contrainte de rupture et le rayon du miroir de rupture) et d'étudier l'effet de la vitesse de chargement.

Les paramètres de Weibull obtenus pour les deux séries d'essais sont assez différents. Cela prouve que les polissages industriels des tranches réalisés séparément conduisent à des distributions de défauts différentes. La loi de Weibull permet la prise en compte de l'effet d'échelle (effet de surface pour le verre) et de la distribution des contraintes. L'effet de surface sera utilisé pour la prédiction de la résistance des grandes poutres qui seront testées en flexion 4 points.

La mesure du miroir de rupture donne la contrainte de rupture connaissant la constante de miroir. Celle-ci permet de déterminer après rupture la contrainte de rupture. C'est une caractéristique du matériau étudié.

En raison de la présence de fissuration sous-critique, le verre est sensible à la vitesse de chargement. Les essais sont réalisés à plusieurs vitesses de chargement. L'association de la loi statistique de Weibull et d'une loi de vitesse de fissuration (loi puissance ou loi exponentielle) permet bien de prédire la loi statistique pour une deuxième vitesse de chargement. La loi puissance donne une prédiction satisfaisante pour la première série d'essais. La loi exponentielle fournit des prédictions correctes pour les deux séries d'essais.

*Résumé du chapitre C*

Deux séries de 60 essais de flexion 4 points à vitesse de chargement constante sont réalisés sur de petits barreaux de verre recuit. La face testée (la plus tendue) est la tranche polie de plaque de verre, un polissage du type "joint plat poli" (polissage industriel). Les éléments sont cassés avec plusieurs vitesses de chargement.

Le verre étant un matériau fragile. Sa résistance de traction ne peut être vue comme une valeur déterministe, mais doit être analysée de manière probabiliste. La loi de Weibull permet de relier la probabilité de rupture à la contrainte appliquée en prenant en compte l'effet de volume (effet de surface pour le verre) et l'effet de la distribution des contraintes.

Les paramètres de Weibull sont déterminés pour chaque série d'essai et chaque vitesse de chargement à partir des résultats expérimentaux, avec la méthode de la vraisemblance maximale. Les paramètres sont différents pour les deux séries d'essais, ce qui signifie que des polissages différents (réalisés séparément) induisent des familles de défauts différentes.

L'analyse fractographique (la mesure du miroir de rupture) permet de calculer la contrainte de rupture connaissant la constante du miroir. Les nombreux essais fournissent la valeur de cette constante caractéristique du matériau pour le verre silico-sodocalcique étudié.

Le verre est sensible à l'action de l'eau en fond de fissure qui provoque la propagation stable des défauts préexistants. Ce phénomène est mis en évidence ici par l'effet de la vitesse de chargement. Plus le chargement est rapide, plus la contrainte de rupture est importante. L'association de la loi de Weibull et d'une loi de vitesse de fissuration permet de réaliser le passage de la loi statistique (probabilité de rupture en fonction de la contrainte appliquée) d'une vitesse de chargement à une autre.

# CHAPITRE D

## ESSAIS DE RUPTURE SUR GRANDES POUTRES

|           |                                                             |     |
|-----------|-------------------------------------------------------------|-----|
| D.I.      | Introduction .....                                          | 127 |
| D.II.     | Description des essais.....                                 | 127 |
| D.II.1.   | Généralités.....                                            | 127 |
| D.II.1.a. | Les échantillons .....                                      | 127 |
| D.II.1.b. | Le montage .....                                            | 127 |
| D.II.2.   | Mesures .....                                               | 130 |
| D.II.3.   | Vitesse de chargement .....                                 | 131 |
| D.III.    | Essais sur les poutres en verre recuit.....                 | 131 |
| D.III.1.  | Mesure du gauchissement.....                                | 131 |
| D.III.2.  | Courbes contrainte/déformation .....                        | 132 |
| D.III.3.  | Résultats .....                                             | 134 |
| D.III.4.  | Analyse du miroir de rupture.....                           | 135 |
| D.IV.     | Prediction de la résistance par la théorie de Weibull ..... | 135 |
| D.V.      | Essais sur les grandes poutres en verre trempé.....         | 136 |
| D.V.1.    | Mesure du gauchissement.....                                | 136 |
| D.V.2.    | Courbes contrainte/déformation .....                        | 137 |
| D.V.3.    | Résultats .....                                             | 139 |
| D.V.4.    | Valeur de la précontrainte .....                            | 139 |
| D.V.5.    | Analyse du miroir de rupture .....                          | 140 |
| D.VI.     | Prediction de la résistance du verre trempé .....           | 141 |
| D.VII.    | Conclusion.....                                             | 142 |
|           | Résumé du chapitre D .....                                  | 144 |



## D. ESSAIS DE RUPTURE SUR GRANDES POUTRES

### D.I. Introduction

Des essais de flexion 4 points sur de grandes poutres sont réalisés pour valider les modélisations réalisées. Deux types d'éléments sont testés : des poutres en verre recuit et des poutres en verre trempé. Les éléments ont été façonnés de la même manière que la première série de petits éléments de verre recuit déjà testés.

Le but de cette première série d'essais est de mettre en évidence l'effet d'échelle dans le verre (effet de surface). La résistance de ces éléments est prédite grâce à la loi de Weibull déterminée lors des essais sur les petits éléments. Cette prédiction est comparée avec les résultats des essais<sup>1</sup>.

La deuxième série d'essais consiste à tester des éléments de verre trempé. La prédiction de la résistance de ces éléments doit associer la modélisation de la rupture du verre (loi de Weibull) et les résultats des simulations de la trempe thermique du verre. Les résultats des essais permettent de valider cette prédiction.

### D.II. Description des essais

#### D.II.1. Généralités

##### D.II.1.a. Les échantillons

Les grandes poutres sont réalisées dans le même matériau que les petits éléments : verre float silico-sodo-calcique de 19 mm d'épaisseur. Les bords sont chanfreinés, la tranche est issue du même polissage industriel que la première série de petits éléments. Les caractéristiques géométriques sont présentées sur la Figure D.1.

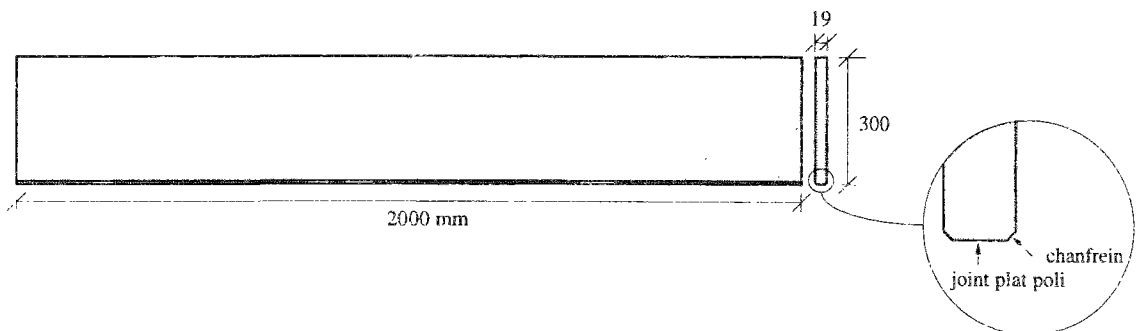


Figure D.1 : Caractéristiques géométriques des grandes poutres

##### D.II.1.b. Le montage

Les grandes poutres sont chargées dans leur plan en flexion 4 points. Des roulements à billes permettent de garantir l'isostaticité du système. Des plaques métalliques munies d'une interface en téflon de part et d'autre de la poutre permettent d'éviter son gauchissement. Cette précaution est indispensable étant donné le très grand élançement des éléments testés (cf. Figure D.2).

<sup>1</sup> CARRE H., *Détermination de la résistance du verre trempé pour son utilisation en génie civil* in 14<sup>ème</sup> Rencontres Universitaires de Génie Civil, Clermont-Ferrand, 9-10 mai 1996

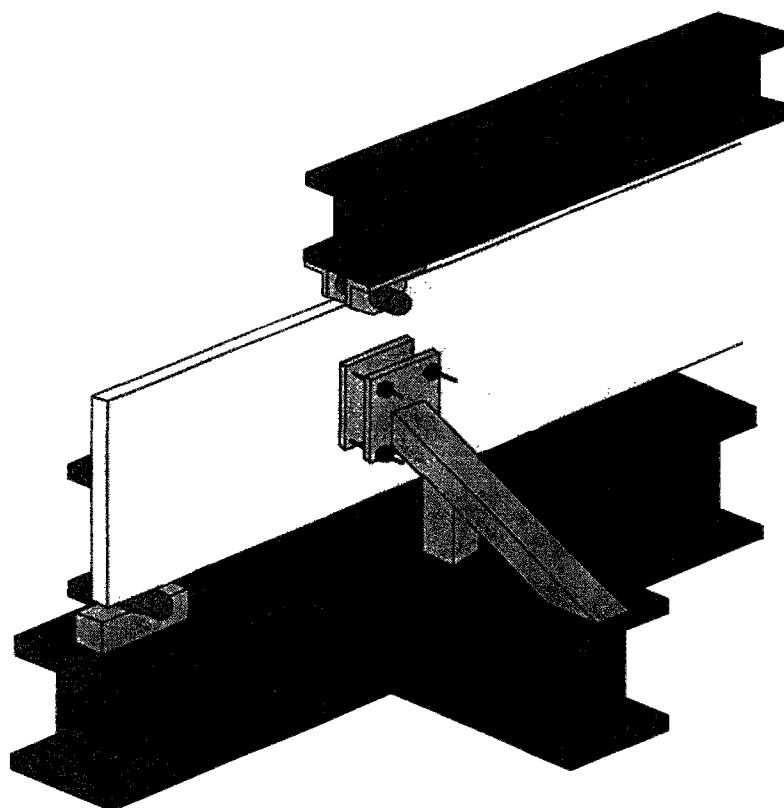


Figure D.2 : Demi-perspective du montage d'essai

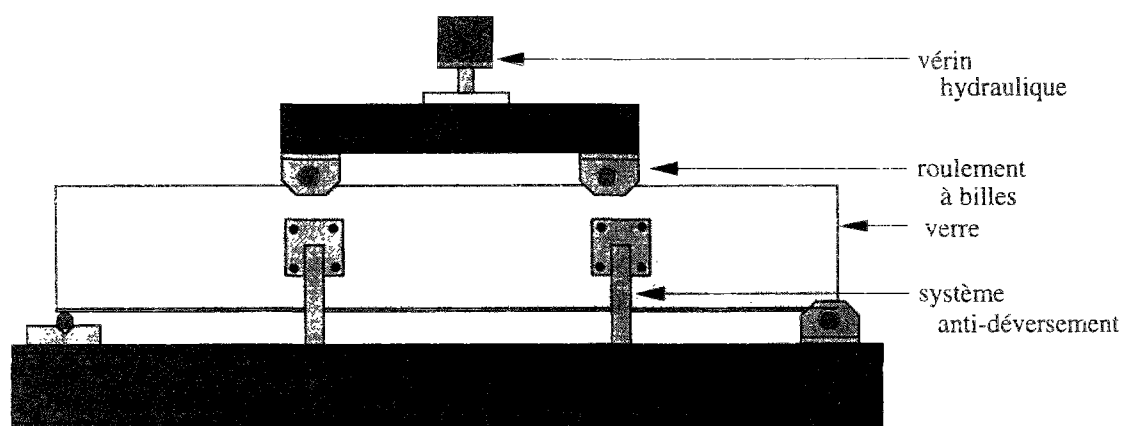


Figure D.3 : Vue générale du montage

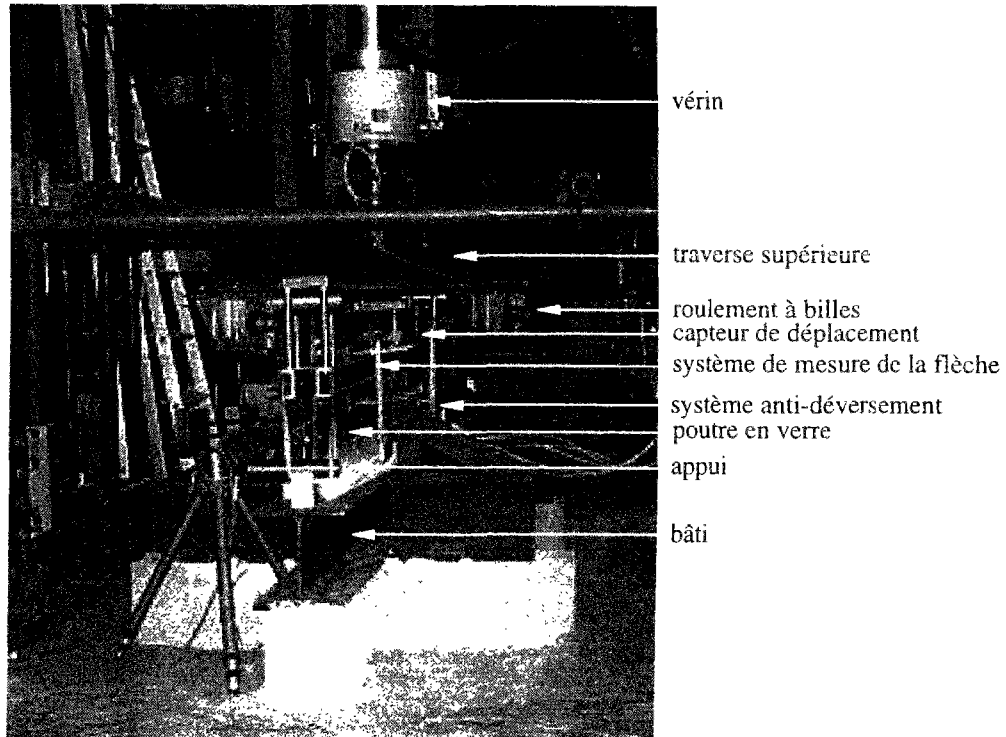


Figure D.4 : Photo du montage

Le vérin hydraulique est accroché à un cadre rigide formé de quatre poteaux et de poutres en tête. Cela permet de garantir à la fois la verticalité et la stabilité du vérin.

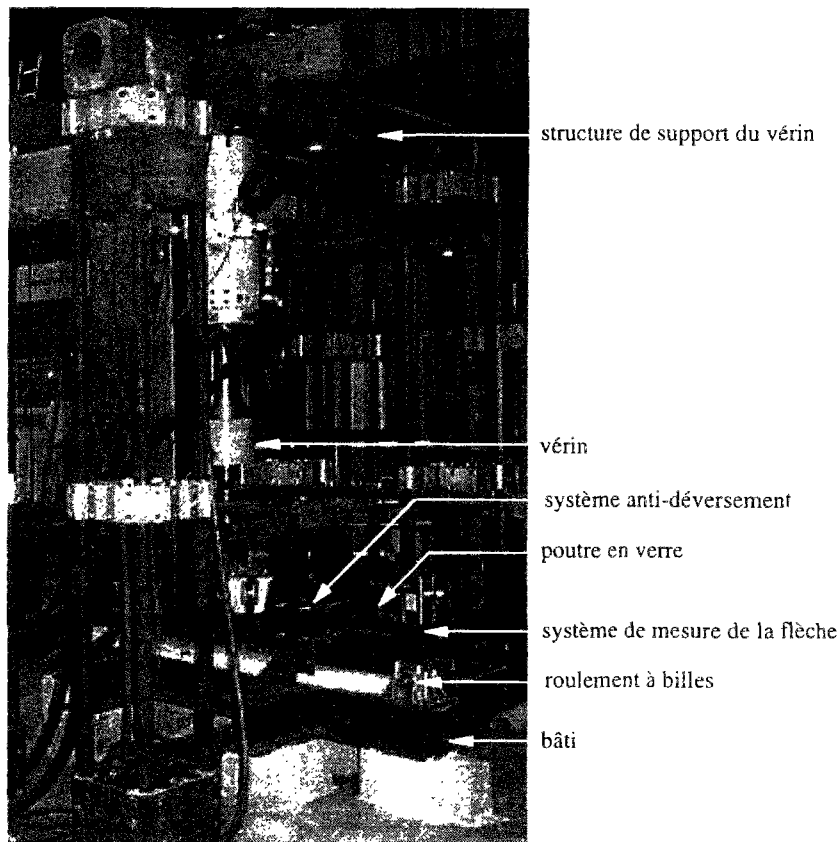
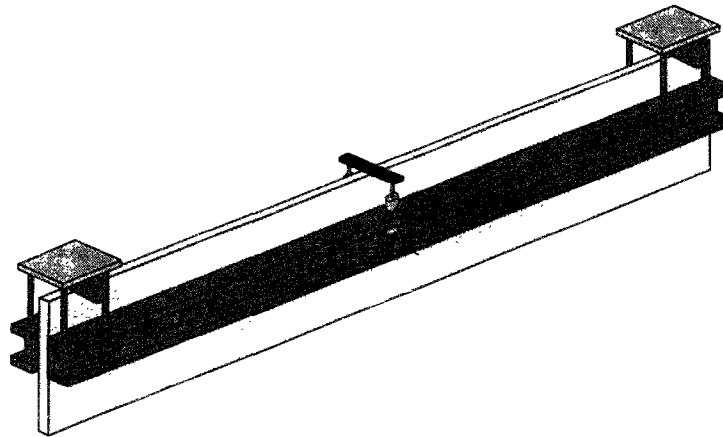


Figure D.5 : Photo du montage

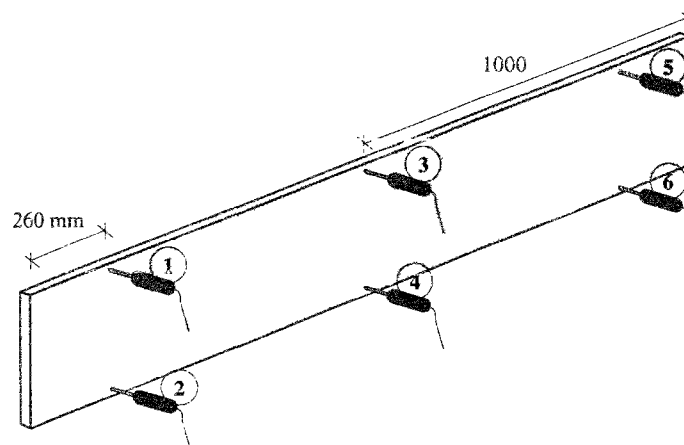
### D.II.2. Mesures

Quatre types de mesures sont réalisés pendant ces essais : la force appliquée, la flèche maximale, des déplacements horizontaux et des déformations. La force est mesurée grâce à un capteur de force placé sur le vérin hydraulique d'une capacité de  $250 \text{ kN} \pm 0,5 \%$ . Le système de mesure de la flèche maximale reprend le même principe que celui utilisé lors des essais sur les petits éléments (cf. Figure D.6).



**Figure D.6 :** Dessin du dispositif de mesure de la flèche

6 capteurs de déplacement placés d'un côté de la poutre mesurent le déplacement des plaques de verre perpendiculairement à leur plan (cf. Figure D.7). Ces mesures permettent de contrôler la nature du chargement. C'est en effet la principale inconnue de nos essais étant donné le très grand élancement des poutres. Ainsi, l'efficacité du système anti-déversement peut être observée.



**Figure D.7 :** Position et numérotation des capteurs de déplacement horizontaux

Des jauges de déformation collées sur les éléments de verre mesurent des déformations locales. Les jauges ont une longueur de grille de 7 mm. Le collage exige un ponçage mécanique et une attaque à l'oxyde de cérium de la surface ce qui crée des défauts qui risquent de perturber les essais si ceux-ci se trouvent dans la zone de traction maximale. Les jauges sont donc collées sur les côtés des poutres, c'est-à-dire en dehors de la zone où la rupture doit se produire. Elle se trouvent quand même proche de la zone de tension maximale ce qui permet de déterminer la déformation au lieu de rupture.

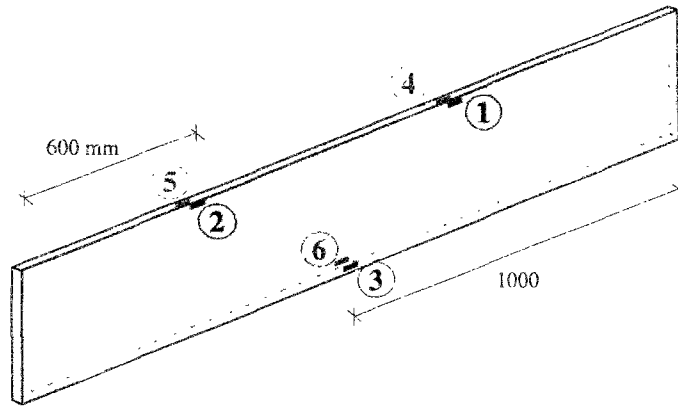


Figure D.8 : Position et numérotation des jauges

### D.II.3. Vitesse de chargement

Les essais sont réalisés à vitesse de chargement constante : 0,05 MPa/s. En reprenant la même vitesse que l'une de celles utilisées pour les essais sur les petits éléments, la comparaison peut être directe pour mettre en évidence l'effet d'échelle.

## D.III. Essais sur les poutres en verre recuit

### D.III.1. Mesures du gauchissement

Six capteurs de déplacement placés orthogonalement au plan du verre permettent de mesurer les déplacements de la poutre perpendiculairement à son plan (cf. § D.II.2). Ces mesures doivent permettre d'observer la qualité du chargement : charge bien centrée, appliquée dans le plan de la poutre. Cela constitue également une vérification de l'efficacité des systèmes anti-déversement.

Le déplacement horizontal des poutres a tendance à augmenter avec la charge. Voici un exemple des courbes obtenues :

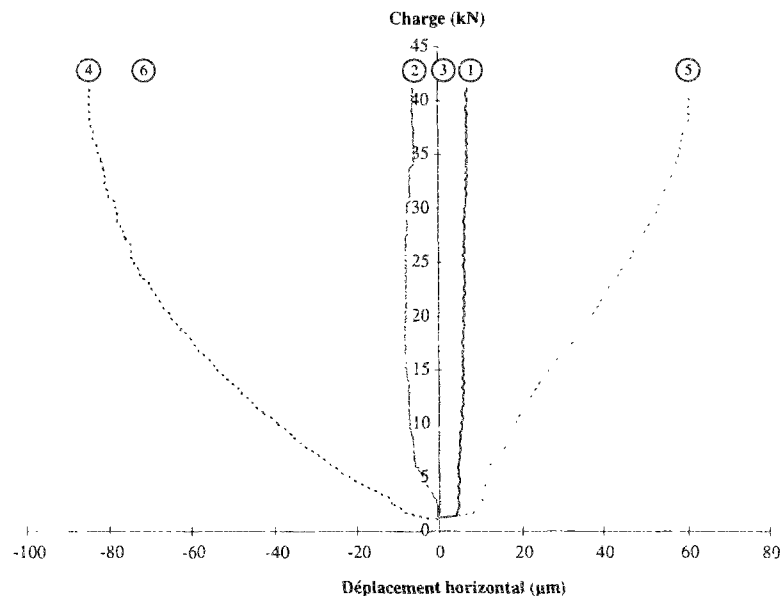


Figure D.9 : Courbes de gauchissement

Le déplacement horizontal maximal n'excède pas  $200\text{ }\mu\text{m}$  pour chaque essai. Ces valeurs sont faibles en valeur absolue et l'effet sur les moments fléchissants est négligeable. La forme globale des déformées de ces poutres est différente pour chaque essai. La poutre 1 semble avoir subi une torsion (cf. Figure D.10), la poutre 2 un déplacement de la fibre comprimée à chaque extrémité (cf. Figure D.11) et la poutre 3 un déplacement symétrique de la fibre inférieure et supérieure.

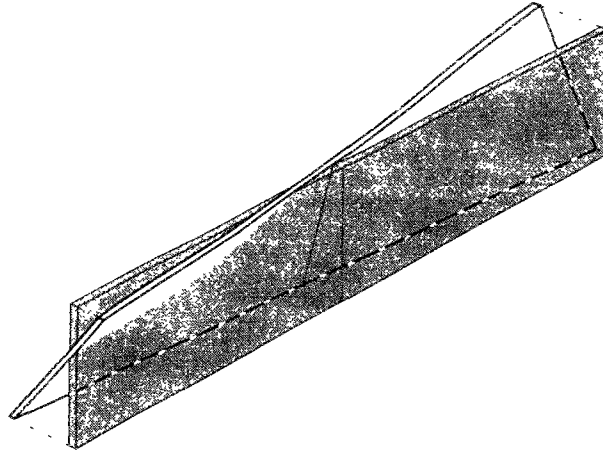


Figure D.10 : Vue en perspective de la déformée de la poutre 1

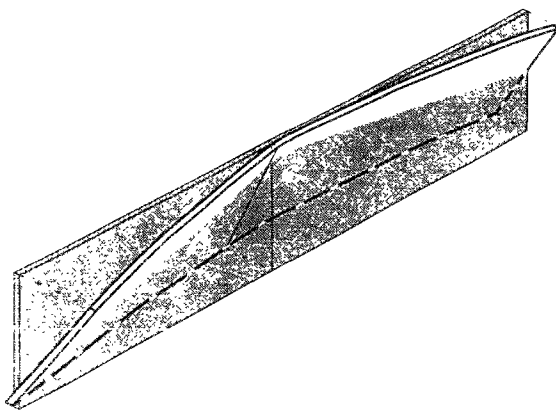


Figure D.11 : Vue en perspective de la déformée de la poutre 2

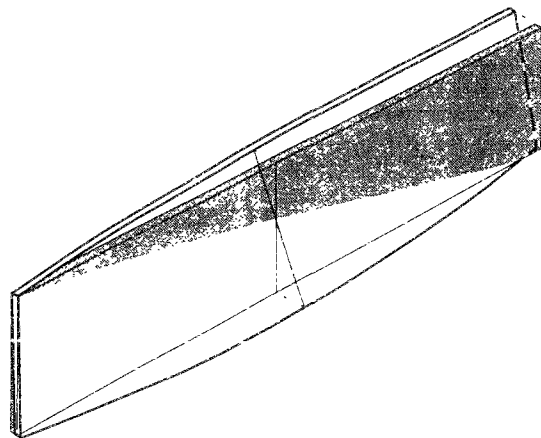


Figure D.12 : Vue en perspective de la déformée de la poutre 3

### D.III.2. Courbe contrainte/déformation

La courbe contrainte/déformation de traction/compression peut être obtenue de deux manières (cf. Figure D.13 et Figure D.14). Les contraintes maximales de traction et de compression sont calculées à partir de la force appliquée mesurée. La déformation maximale est calculée d'une part à partir de la flèche maximale mesurée. Ce calcul prend en compte l'effet du coefficient de Poisson et l'effet de l'effort tranchant. D'autre part, les déformations obtenues par les jauges permettent également de calculer la déformation maximale. Ce calcul prend en compte la position réelle des jauges.

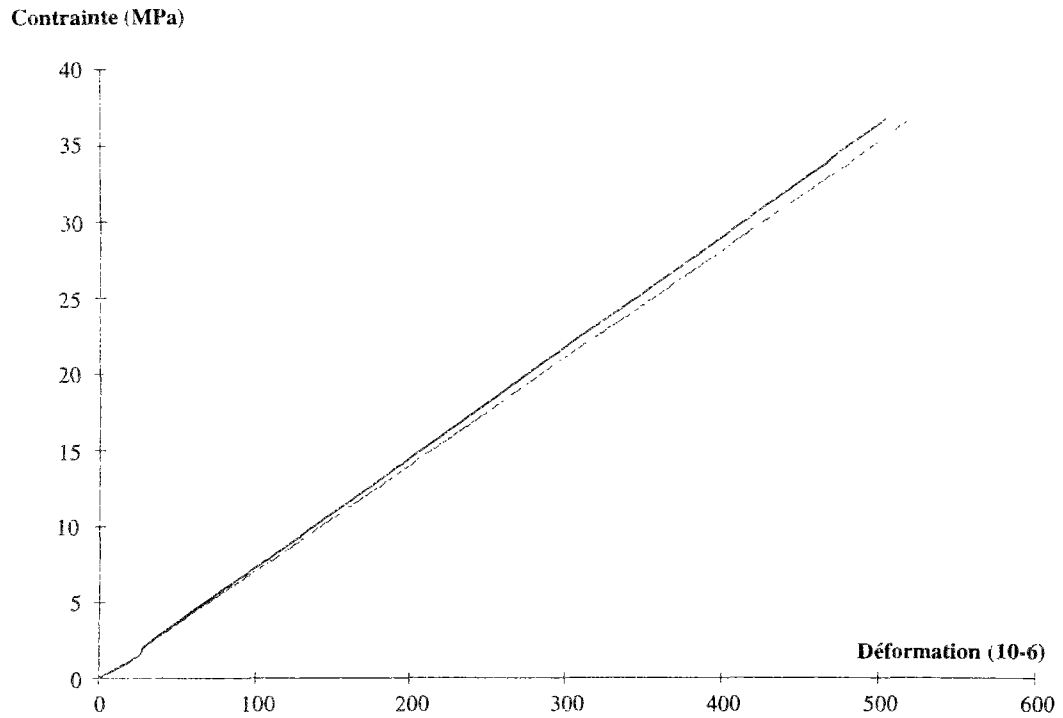


Figure D.13 : Courbe contrainte/déformation obtenue à partir de la force et de la flèche mesurées

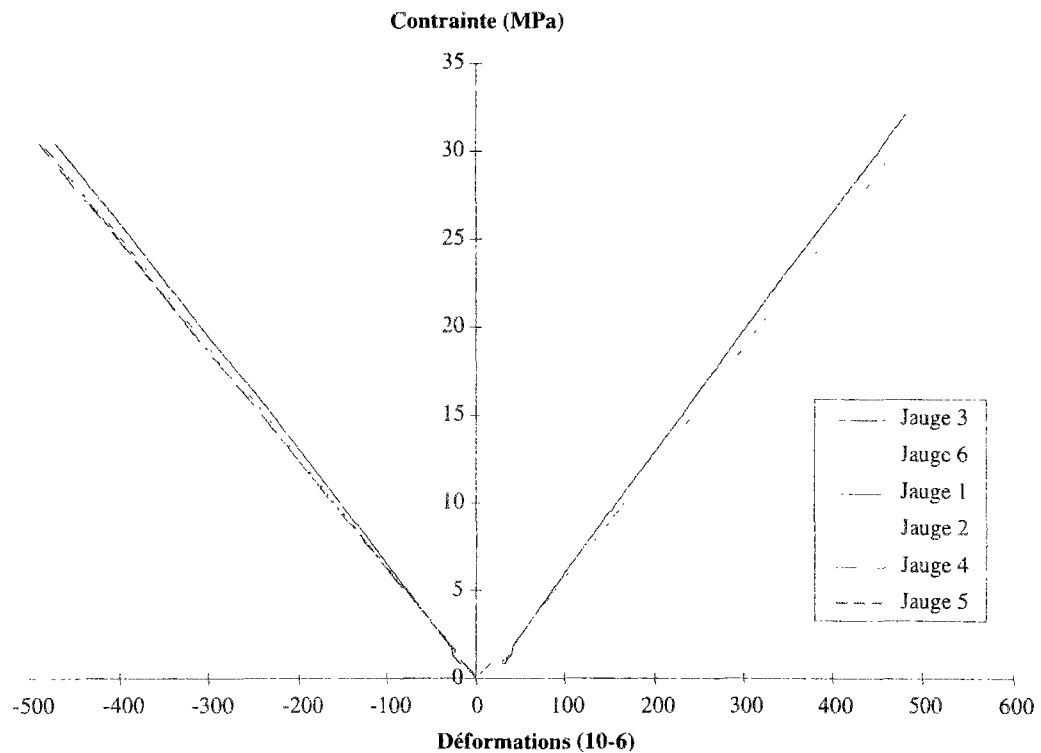
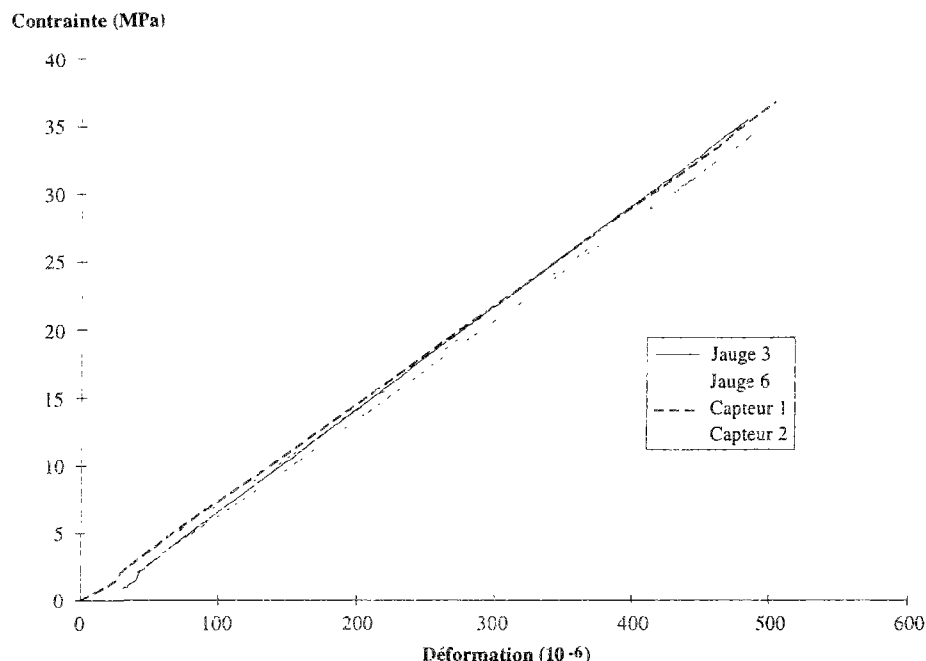


Figure D.14 : Courbe contrainte/déformation obtenue à partir de la force et des déformations mesurées

Les courbes présentent un défaut de linéarité au départ. Cela est dû à un écart entre la commande et le signal de commande réel puisque ce défaut est observé lors d'un essai à vide (sans mise en route du vérin hydraulique).

Ces deux calculs des courbes contrainte/déformation conduisent bien à la même courbe caractéristique du verre (cf. Figure D.15). De plus le module d'Young mesuré est bien le même que celui déterminé lors des petits essais.



**Figure D.15 :** Superposition des courbes contrainte/déformation obtenues avec la flèche et des déformations

### D.III.3. Résultats

Parmi les 5 essais réalisés sur les grands éléments en verre recuit, 3 sont exploitables. Une poutre a cassé sur l'appui, une autre présente son origine de rupture en dehors de la tranche inférieure, sur le côté.

La valeur du module d'Young déterminée à partir des mesures réalisées est un bon estimateur de la qualité des essais. Pour chaque poutre, 8 valeurs du module d'Young sont disponibles :

- 6 à partir des déformations des jauges et de la mesure de la charge appliquée
- 2 à partir des flèches mesurées avec les capteurs de déplacement et de la charge

Les valeurs du module d'Young obtenues sont :

|            | Poutre 1                                 | Poutre 2                       | Poutre 3                       |
|------------|------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| moyenne    | $\bar{E} = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ | $\bar{E} = 7,09 \cdot 10^{10}$ | $\bar{E} = 7,12 \cdot 10^{10}$ |
| écart-type | $s_E = 0,16 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$    | $s_E = 0,25 \cdot 10^{10}$     | $s_E = 0,21 \cdot 10^{10}$     |

Les contraintes à rupture obtenues sont :

| Poutre 1                      | Poutre 2          | Poutre 3          |
|-------------------------------|-------------------|-------------------|
| $\sigma_1 = 25,5 \text{ MPa}$ | $\sigma_2 = 36,7$ | $\sigma_3 = 31,7$ |

**D.III.4. Analyse du miroir de rupture**

Les essais sur les petits éléments ont permis de déterminer la constante de miroir  $M_I$  (cf. § D.IV.4). Cette constante doit permettre de retrouver la contrainte locale de rupture à partir de l'observation du faciès de rupture : mesure du miroir.

La constante déterminée est :  $M_I = 1,85 \text{ MPa.m}^{1/2}$

| Contrainte déterminée<br>à partir de la mesure<br>du miroir | Contrainte<br>déterminée à partir<br>des mesures globales |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 27,1 MPa                                                    | 25,5 MPa                                                  |
| 33,2                                                        | 31,7                                                      |
| 40,4                                                        | 36,7                                                      |

Ainsi, l'observation des faciès de rupture permet bien l'estimation de la contrainte de rupture à 10 % près.

**D.IV. Prédiction de la résistance par la théorie de Weibull**

La loi de Weibull vue précédemment permet de prendre en compte à la fois l'effet de surface (taille de l'échantillon) ainsi que l'effet de la distribution des contraintes (type de chargement appliqué : traction, flexion 4 points, flexion 3 points ...). A partir des résultats de la première série, à la vitesse 0,5 MPa/s, les contraintes à rupture des grandes poutres peuvent être prédites.

Les paramètres de Weibull obtenus lors de la première série d'essais sur les petits éléments à 0,5 MPa/s sont :

$$m = 13,3$$

$$\sigma_0 = 30,5 \text{ MPa}$$

L'association de la loi de Weibull et de la loi d'Evans permet de prédire les paramètres correspondants à une vitesse de chargement de 0,05 MPa/s (cf. § D.IV.3) :

$$m = 13,3$$

$$\sigma_0 = 26,7 \text{ MPa}$$

Ces paramètres permettent de donner la probabilité de rupture des grandes poutres en fonction de la contrainte appliquée. Comme pour les petits éléments, la surface d'intégration de la loi de Weibull est la tranche inférieure de l'élément entre les deux forces. On a alors :

$$P_f = 1 - \exp\left(-0,019 \times 0,98 \left(\frac{\sigma}{26,7}\right)^{13,3}\right)$$

|      |              |                                              |
|------|--------------|----------------------------------------------|
| pour | $P_f = 0,20$ | $\sigma_{\text{rupture}} = 32,2 \text{ MPa}$ |
|      | moyenne      | $\sigma_{\text{rupture}} = 34,6$             |
|      | $P_f = 0,80$ | $\sigma_{\text{rupture}} = 37,3$             |

La moyenne de la loi de Weibull est :

$$\text{moyenne} = \int_0^{\infty} \sigma \frac{dP_f(\sigma)}{d\sigma} d\sigma \quad \text{avec } P_f(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{S}{S_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right)$$

$$\text{moyenne} = \sigma_0 \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{1}{m}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad \text{avec } \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{x-1} dt$$

Ces valeurs sont à comparer avec les résultats des essais :

$$\sigma_1 = 25,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 31,7$$

$$\sigma_2 = 36,7$$

$$\text{moyenne} = 31,3 \text{ MPa}$$

Les résultats des essais sont assez bien en accord avec les prédictions réalisées à partir de la loi de Weibull déterminée lors des essais sur les petits éléments. Cependant, le faible nombre d'essais sur les grandes poutres ne permet pas de donner une grande fiabilité aux résultats.

## D.V. Essais sur les poutres en verre trempé

Les éléments de verre trempé sont testés de la même manière que les éléments en verre recuit. Les éléments sont chargés à la même vitesse avec la même instrumentation. Grâce aux mesures optiques et aux simulations de la trempe du verre, le champ des contraintes est connu dans tout l'élément.

L'objectif de ces essais est de valider le mode de calcul de la résistance du verre trempé proposée.

### D.V.1. Courbes de gauchissement

Les capteurs de déplacement horizontaux permettent de déterminer la déformée de l'élément hors de son plan. Cela montre que les systèmes anti-déversement sont efficaces et que les moments autres que le moment principal de flexion sont négligeables.

Les deux poutres de verre trempées testées se déforment de la même façon hors-plan (cf. Figure D.16 et Figure D.17). La fibre supérieure comprimée s'arrondit et se déplace beaucoup plus que la fibre inférieure en particulier au milieu de la poutre (suivant la longueur). Le déplacement horizontal maximal est inférieur à 1.2 mm au cours de l'essai.

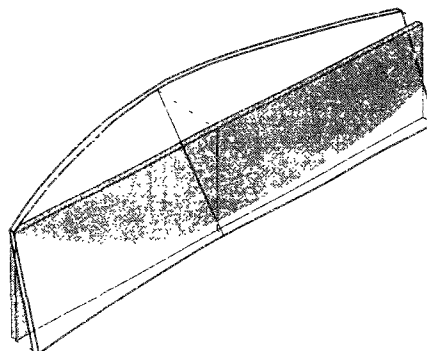


Figure D.16 : Vue en perspective de la déformée de la poutre trempée 1

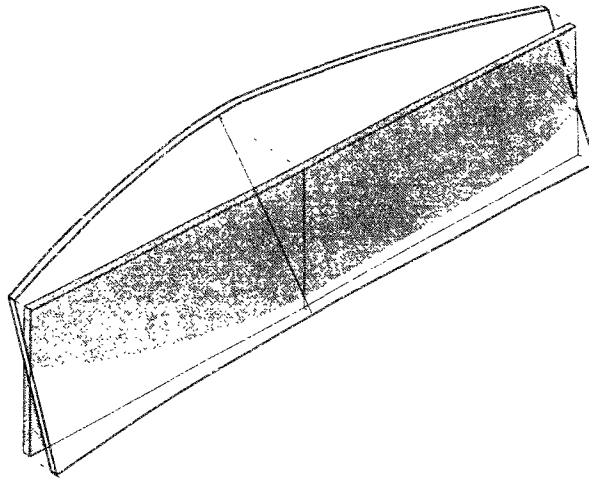


Figure D.17 : Vue en perspective de la déformée de la poutre trempée 2

### D.V.2. Courbes contrainte / déformation

De même que pour les essais sur les éléments de verre recuit, les courbes contrainte-déformation déterminées à partir des mesures réalisées montrent la qualité de ces essais.

Les courbes obtenues sont bien linéaires et pratiquement superposables. Le module d'Young est bien, en moyenne, celui déterminé lors des essais sur les petits éléments.

Les courbes obtenues à partir des mesures de la flèche maximale et de la charge appliquée sont :

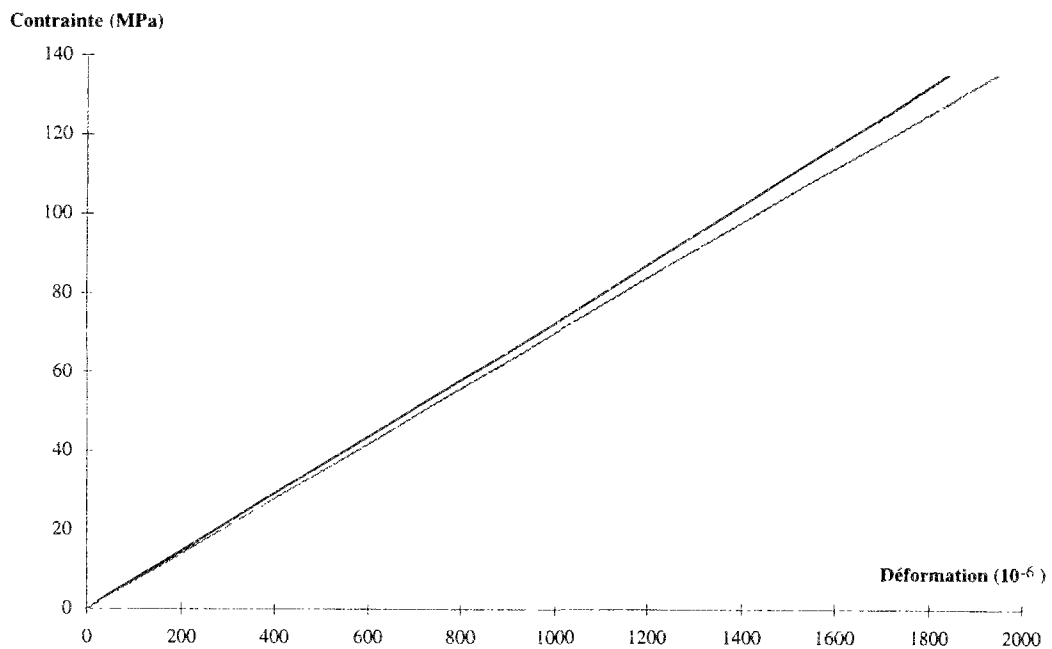
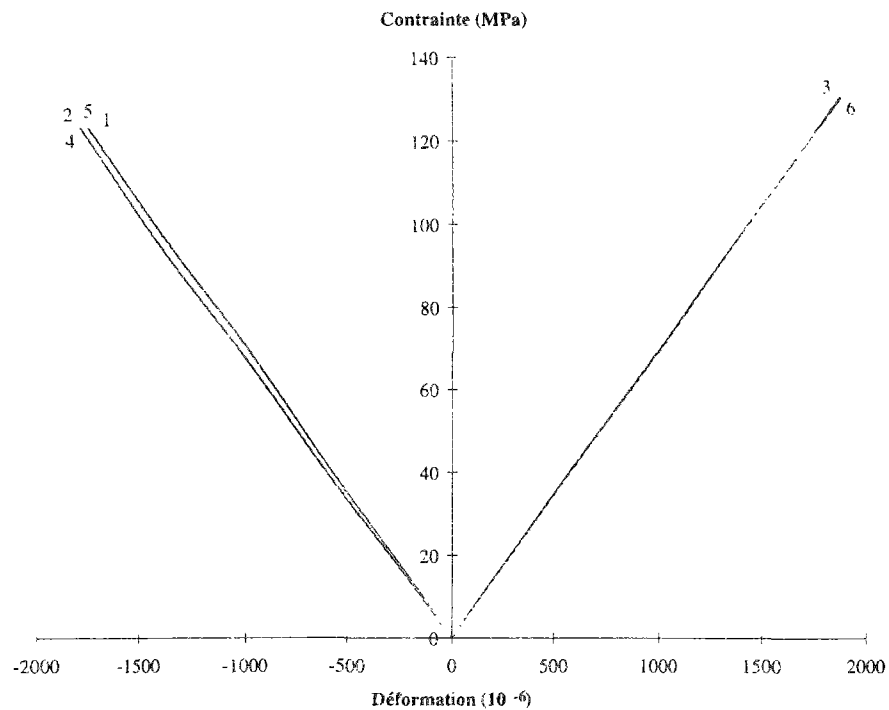


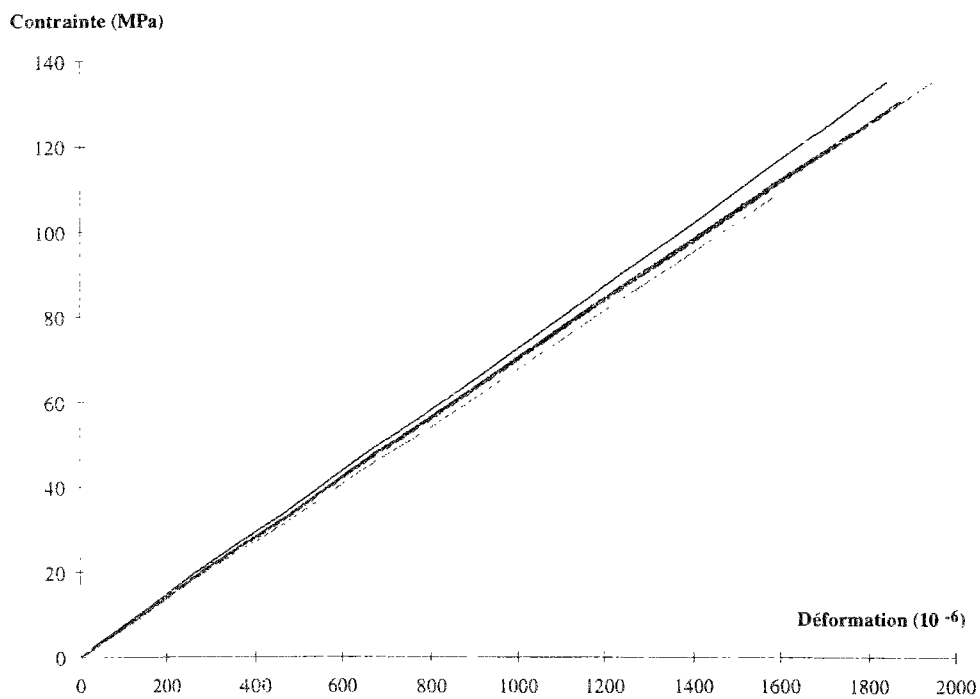
Figure D.18 : Courbe contrainte-déformation à partir de la force et de la flèche maximale

Les courbes obtenues à partir des mesures des déformations (grâce aux jauges) et de la charge appliquée sont :



**Figure D.19 :** Courbe contrainte-déformation à partir de la force et des déformations mesurées

Les courbes contrainte-déformation sont superposables ce qui montre la bonne qualité de nos essais (chargement s'effectuant bien dans le plan des éléments) :



**Figure D.20 :** Superposition des courbes contrainte-déformation

### D.V.3. Résultats

Parmi les trois essais réalisés, deux seulement sont exploitables. Une poutre a été cassée brutalement par erreur de manipulation. Pour chaque essai, huit valeurs du module d'Young sont déterminées :

| Poutre 1                    | Poutre 2                 |
|-----------------------------|--------------------------|
| $\bar{E} = 6,98.10^{10}$ Pa | $\bar{E} = 6,97.10^{10}$ |
| $s_E = 0,17.10^{10}$ Pa     | $s_E = 0,12.10^{10}$     |

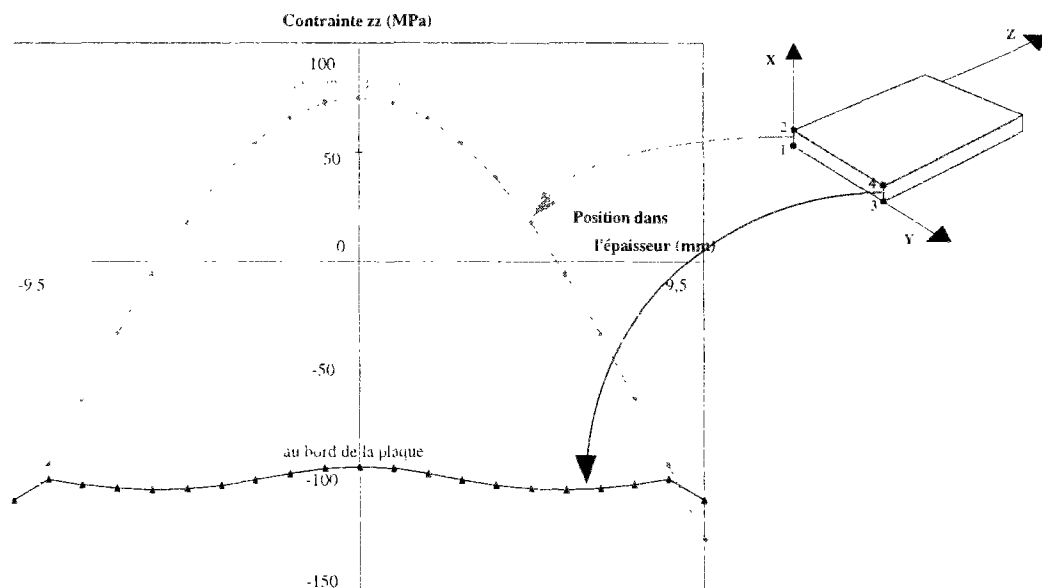
Les contraintes à rupture obtenues pour les deux essais sont :

| Poutre 1               | Poutre 2               |
|------------------------|------------------------|
| $\sigma_1 = 118,6$ MPa | $\sigma_2 = 135,1$ MPa |

### D.V.4. Valeur de la précontrainte

La connaissance de l'état de précontrainte des poutres en verre trempé testées est essentielle pour la détermination de leur résistance. Grâce aux mesures optiques et aux simulations de la trempe du verre, le champ des contraintes est connu dans tout l'élément. La principale valeur intéressante ici est la contrainte résiduelle sur la tranche qui est tendue de manière maximale lors des essais de flexion 4 points.

La précontrainte calculée est de la forme :



**Figure D.21 :** Variation de la contrainte  $\sigma_{zz}$  au milieu et au bord de la plaque dans l'épaisseur

La contrainte sur la tranche de l'élément est pratiquement constante dans l'épaisseur de l'élément :

minimum au milieu = 98,7 MPa  
 moyenne dans l'épaisseur = 104,4  
 maximum au bord = 108,9

### D.V.5. Analyse du miroir de rupture

L'état de contrainte sur le miroir des éléments en verre recuit testés en flexion 4 points est pratiquement constant. Le miroir a alors une forme semi-circulaire (comme vu précédemment). En revanche, dans le cas du verre trempé, l'état de contrainte n'est pas uniforme sur le miroir. Les contraintes résiduelles de trempé présentent un fort gradient près du bord. Le miroir de rupture a alors une forme semi-elliptique (cf. Figure D.22).

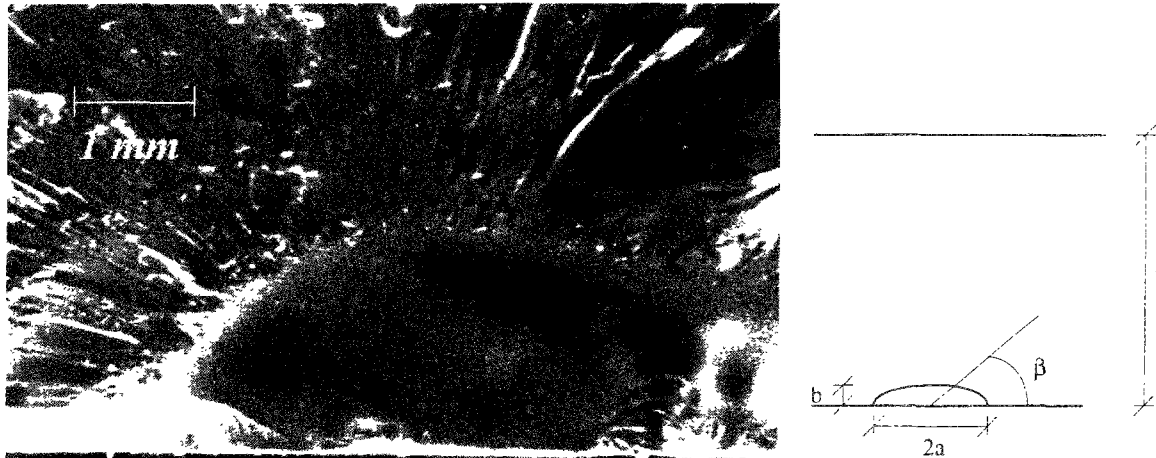


Figure D.22 : Image du miroir de rupture de la première poutre trempée

L'analyse fractographique des éléments en verre trempé permet une évaluation des contraintes résiduelles. Par superposition de l'état de précontrainte et de la contrainte de chargement, le facteur d'intensité des contraintes s'écrit<sup>2</sup> :

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_A \sqrt{r} Y_F(\beta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_R \sqrt{r} Y_R(\beta)$$

avec  $\sigma_A$  = contrainte apparente appliquée  
 $\sigma_R$  = contrainte résiduelle  
 $\theta$  = angle de repère de la position sur le miroir  
 $r$  = taille du miroir pour l'angle  $\beta$   
 $Y_F(\theta)$  = facteur de forme associé au chargement de flexion  
 $Y_R(\theta)$  = facteur de forme associé à la contrainte résiduelle

La zone de transition miroir-zone grenue correspond à la bifurcation de la fissure, au facteur d'intensité des contraintes de bifurcation ( $K_{cb}$ ). Le rayon du miroir peut alors être relié à  $K_{cb}$  par :

$$K_{cb} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_A \sqrt{r} Y_F(\beta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_R \sqrt{r} Y_R(\beta)$$

La contrainte résiduelle peut être calculée par :

$$\sigma_R = \sigma_A \frac{Y_F(\beta)}{Y_R(\beta)} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{K_{cb}}{\sqrt{r} Y_R(\beta)}$$

avec  $K_{cb} = 2,33 \text{ MPa.m}^{1/2}$

$Y_F(\beta) = 1,67$  pour  $b = 90^\circ$ ,  $\frac{b}{a} = 0,75$  et  $\frac{b}{t} = 0$

$Y_R(\beta) = 1,44$  pour  $b = 90^\circ$ ,  $\frac{b}{a} = 0,75$  et  $\frac{b}{t} = 0,15$

<sup>2</sup> CONWAY J. C., MECHOLSKY J. J., Use of crack branching data for measuring near surface residual stresses in tempered glass in Journal of the American Ceramic Society, 1989, vol. 72, n° 9, pp 1584-1587

KERPER M. J., SCUDERI T. G., Relation of strength of thermally tempered glass to fracture mirrors size in American Ceramic Society Bulletin, 1965, vol. 44, n° 12, pp 953-955

Les formules précédentes donnent les contraintes résiduelles pour le grand axe et le petit axe de la fissure :

**Poutre 1**

Petit axe du miroir = 1,7 mm

contrainte de rupture = 118,6 MPa

**Contrainte résiduelle = 103 MPa**

**Poutre 2**

Petit axe du miroir = 0,93 mm

contrainte de rupture = 135,1 MPa

**Contrainte résiduelle = 110 MPa**

La valeur de la contrainte résiduelle de surface déterminée par l'analyse fractographique est tout à fait comparable à la valeur issue de nos simulations de trempe (moyenne sur la tranche = 104,4 MPa).

**D.VI. Prédiction de la résistance du verre trempé**

La méthode la plus simple de détermination de la résistance du verre trempé est la méthode de superposition. On fait deux hypothèses :

- ✕ les défauts ne sont pas affectés par le traitement de trempe
- ✕ la trempe donne des contraintes résiduelles connues de manière déterministe.

Lors de l'essai de flexion, l'effort appliqué commence par décompresser la surface. Lorsque la surface se trouve sans contrainte, l'essai devient similaire à celui réalisé sur les éléments en verre recuit. La méthode de superposition consiste alors à écrire :

$$\begin{aligned} & \textbf{Résistance du verre trempé} \\ & = \\ & \textbf{Résistance du verre recuit + précontrainte au lieu de rupture} \end{aligned}$$

La résistance du verre recuit, comme vu au chapitre précédent, est connue par une approche statistique : loi de Weibull. La précontrainte au lieu de rupture (contrainte résiduelle de compression sur la tranche de l'élément) est déterminée grâce aux simulations de trempe (cf. § B.IV.3.e). Cette valeur est considérée comme déterministe ce qui est confirmé par les mesures optiques des contraintes résiduelles sur les poutres trempées. Les valeurs sont uniformes en partie courante de chaque éléments et sont égales entre les 3 éléments.

On obtient donc :

$$\begin{array}{rclclcl}
 P_f = 0,2 & \sigma = 32,2 & & P_f = 0,2 & \sigma = 130,9 \text{ MPa} \\
 \text{moyenne} & \sigma = 34,6 & + & 98,7 & = & \text{moyenne} & \sigma = 133,3 \\
 P_f = 0,8 & \sigma = 37,3 & & P_f = 0,8 & \sigma = 136,0
 \end{array}$$

Ces résultats sont à comparer avec les mesures réalisées lors des essais

$$\sigma_1 = 118,6 \text{ MPa}$$

$$\text{moyenne} = 126,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 135,1 \text{ MPa}$$

La comparaison des résultats d'essais et de la prédiction montre une bonne concordance. Mais, nous disposons d'un trop faible nombre d'essais pour conclure de manière certaine sur la qualité de notre prédiction.

La bonne concordance entre les prédictions et les résultats d'essais semble montrer qu'il n'y a pas de propagation ou de guérison des défauts en cours de trempe. Cette conclusion pourrait peut-être être différente dans des conditions de trempe différentes (température initiale de trempe plus faible ou coefficients de transfert thermique plus élevés). Pour pouvoir étudier l'évolution des défauts en cours de trempe, il conviendrait de prendre en compte d'une part le comportement du verre (comportement viscoélastique fonction de la température et du chargement passé) et d'autre part l'état de contrainte (déterminé grâce aux simulations numériques de trempe). Les contraintes transitoires de traction se produisent au début du refroidissement, alors que le verre est encore très chaud (600 °C environ). Pour appréhender la fissuration du verre dans ce cas, il faut utiliser un modèle de fissuration en milieu viscoélastique : le modèle de Dugdale<sup>3</sup>, le modèle de Schapery<sup>4</sup> ...

## D.VII. Conclusion

Les essais sur les grandes poutres en verre recuit mettent clairement en évidence l'effet de surface dans le verre. La résistance des grands éléments est nettement inférieure à celle des petits barreaux testés précédemment. La loi de Weibull permet bien de prendre en compte cet effet. La prédiction de la contrainte de rupture est satisfaisante même si le nombre d'essais de validation est faible (prédiction de la moyenne à 10 % près).

Grâce aux résultats fractographiques des petits éléments, la mesure des miroirs de rupture des poutre en verre trempé permet de déterminer la précontrainte au lieu de rupture. Les mesures et les résultats des simulations numériques sont concordants (à 10 % près).

L'analyse fractographique connaissant les contraintes de rupture des éléments permet de déterminer la précontrainte au lieu de rupture. Ces valeurs expérimentales correspondent tout à fait au résultat de la simulation numérique de la trempe d'une plaque épaisse.

<sup>3</sup> DUGDALE D. S., *Yielding of steel sheets containing slits* in J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol.8, pp 102-104

VALENTIN G. H., GUSTAFSSON P. J., RANTA-MAUNUS A., GOWDA S., *Application of fracture mechanics to timber structures RILEM state-of-the-art report*, Technical Research Centre of Finland, 1991 (research note 1262)

<sup>4</sup> SCHAPERY R. A., *A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media, I. Theoretical development* in International Journal of Fracture, 1975, vol. 11, n°1

SCHAPERY R. A., *A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media, II. Approximate methods of analysis* in International Journal of Fracture, 1975, vol. 11, n° 3

SCHAPERY R. A., *A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media, III. Analysis of continuous growth* in International Journal of Fracture, 1975, vol. 11, n° 4

La méthode de superposition fournit une prédiction de la résistance des poutres trempées connaissant les paramètres intrinsèques de Weibull (issus des essais sur les petits éléments) et l'état de précontrainte (déterminé par simulation de la trempe sur code aux éléments finis). Cette prédiction très simple donne des résultats très satisfaisants avec néanmoins la limitation du faible nombre d'essais réalisés.

*Résumé du chapitre D*

Les essais de flexion sur les grandes poutres sont destinées à valider les théories et les calculs présentés précédemment. La vitesse de chargement est constante et les éléments sont de même nature que les petits barreaux de la première série (même polissage).

Les poutres sont chargées dans leur plan ce qui est un peu délicat étant donné le très grand élanement des éléments. Des patins anti-déversement permettent d'éviter les déplacements hors plan. La bonne concordance des courbes contrainte-déformation déterminées à partir des différents dispositifs de mesure (capteurs de déplacement, jauges et capteur de force) montrent que la qualité du chargement est satisfaisante.

La résistance des poutres en verre recuit est prédite par la loi de Weibull à partir des résultats sur les petits éléments. Cette loi statistique semble donc bien adaptée pour prédire l'effet de surface dans le verre. La mesure des miroirs donne bien la contrainte de rupture (à 10 % près) à l'aide de la constante de miroir déterminée lors des essais de caractérisation.

La méthode de superposition permet de prédire la résistance des poutres en verre trempé. La superposition de la précontrainte au bord (déterminée lors des simulations de la trempe du verre) et de la loi statistique de Weibull donne la loi prédite de résistance. Résultats expérimentaux et calculs sont en bon accord même si le nombre d'essais est faible. L'analyse fractographique des poutres trempées donne la valeur de précontrainte à l'origine de rupture. Ce résultat est très proche des résultats des simulations.

## **CONCLUSION**



---

## CONCLUSION

L'analyse bibliographique a permis le choix du modèle de comportement thermo-mécanique du verre. Le verre a un comportement viscoélastique variable avec la température (en particulier autour de la température de transition). Le modèle de Narayanaswamy utilisé prend en compte la relaxation des contraintes mais aussi l'état de la structure grâce à la température fictive ce qui est particulièrement important quand le chargement thermique est brutal, quand la structure du verre n'a pas le temps de se stabiliser. Grâce à des travaux précédents, les caractéristiques mécaniques et thermiques du verre float silico-sodo-calcique sont connues.

La trempe thermique (refroidissement brutal par jets d'air après chauffage) est simulée sur un code aux éléments finis. La comparaison des résultats des calculs avec des résultats d'essais issus de la littérature montre une bonne concordance des contraintes résiduelles au centre de la plaque (effet intérieur). Le modèle de Narayanaswamy semble tout à fait approprié pour décrire le comportement thermo-mécanique du verre même pour un chargement thermique brutal tel que la trempe. La bonne concordance essais-calculs confirme également le choix des caractéristiques thermiques et mécaniques.

La simulation de la trempe d'une plaque donne les états de contrainte tridimensionnel transitoires et résiduels. La contrainte de surface et l'intégrale de la différence des contraintes principales dans l'épaisseur sont facilement mesurables sur des éléments trempés par moyens optiques. Ces mesures permettent d'identifier les coefficients de transfert thermique caractérisant le refroidissement dans le plan de la plaque et sur la tranche. L'état de contrainte résiduel peut alors être déterminé. Les résultats des calculs sont validés grâce à des mesures de l'intégrale de la différence des contraintes principales en plusieurs points près du bord. Le bon accord entre simulation et mesures expérimentales confirme la bonne qualité des calculs.

Des essais nombreux de flexion 4 points sur de petits éléments en verre recuit sont destinés à caractériser de manière statistique la rupture du verre recuit. Les paramètres de la loi de Weibull, reliant la probabilité de rupture à la contrainte appliquée, sont identifiés. Grâce à plusieurs vitesses de chargement, l'effet de vitesse est mis en évidence. L'association de la loi de Weibull et d'une loi de vitesse de fissuration (loi d'Evans ou loi exponentielle) permet de prédire la loi statistique pour différentes vitesses de chargement à partir des résultats d'une vitesse de chargement.

La loi de Weibull sert à prendre en compte l'effet de volume (effet de surface pour le verre) et l'effet de la distribution des contraintes. Des essais de flexion 4 points sont réalisés sur de grandes poutres en verre recuit de même nature que les petits éléments (composition et polissage des bords en particulier). La loi de Weibull permet de prédire leur résistance à partir des résultats des essais sur les petites éprouvettes. Le bon accord entre prédiction et résultats des essais montre que la loi de Weibull est bien adaptée pour prendre en compte l'effet de volume dans le verre (même si les essais de validation sont peu nombreux).

Grâce aux analyses précédentes, la prédiction de la résistance du verre trempé est possible. L'état de contrainte d'un élément trempé est la superposition de l'état de précontrainte initial et de l'état de contrainte dû au chargement. L'état de précontrainte est connu grâce aux simulations et considéré comme déterministe. La loi statistique donnant la probabilité de rupture des poutres en verre trempé peut être obtenue par la méthode de superposition, en supposant que la distribution des défauts observée dans le verre recuit n'a pas été modifiée par la trempe. La loi de Weibull obtenue pour les grandes poutres en verre recuit est

superposée à l'état de précontrainte issu des simulations. La prédiction correspond bien aux résultats des essais. L'hypothèse faite qui considère que la distribution des défauts dans le verre trempé est la même que dans le verre recuit semble valable même si le nombre d'essais de validation sur les grandes poutres en verre trempé est faible. Nous disposons donc d'une méthode complète de prédiction de la résistance du verre trempé.

Les simulations de la trempe thermique donnent l'état de contrainte tridimensionnel transitoire et résiduel. Elles peuvent servir à prédire la rupture des éléments en cours de trempe, à garantir un état de compression important sur les tranches en assurant un bon refroidissement des bords. L'influence de la géométrie de la structure peut également être étudiée (dimensions de la pièce, forme et taille du chanfrein). La trempe d'éléments de forme plus complexe pourrait également être simulée. Les plaques trouées en particulier sont utilisées pour réaliser les assemblages. L'état de contrainte autour du trou conditionne généralement la résistance des éléments.

L'association de la loi statistique et des simulations de trempe permettent la prédiction de la résistance du verre trempé à long terme. La loi de vitesse de fissuration doit être validée pour des charges de longue durée (en particulier pour les applications au bâtiment), c'est à dire pour des vitesses de fissuration très faibles.

L'évolution de la précontrainte de trempe doit également être prise en compte dans le cas de chargement très prolongé. Le comportement viscoélastique du verre à toute température peut induire une évolution de son état de contrainte.

# **BIBLIOGRAPHIE**



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**ABDEL-LATIF A. I. A., TRESSLER R. E., BRADT R. C.**

International Journal of Fracture Mechanics, 1976, vol. 59, pp 174-175

**ABEN H., GUILLEMET C.**

Photoelasticity of glass, 1993, Springer-Verlag Berlin Heideberg

**ACLOQUE P.**

Etude cinématographique ultra-rapide du mécanisme de fracture du verre trempé in Symposium sur la résistance mécanique du verre et les moyens de l'améliorer, Florence, 25-29 septembre 1961

**ACLOQUE P. GUILLEMET C.**

Sur l'onde de reflexion totale, Académie des Sciences, scéance du 27 juin 1960

**ACLOQUE P.**

Influence de l'état de contrainte du verre sur les modalités de sa fracture in IV<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Paris, 1956

**ANDRE S.**

Identification de la diffusivité phonique du verre par méthode flash de 20°C à 500°C, thèse de l'Institut National Polytechnique de Nancy soutenue en 1992

**BANSAL G. K., DUCKWORTH W. H.**

Journal of the American Ceramic Society, 1977, vol. 60, pp 304-310

**BARTENEV G. M.**

Le phénomène de trempe du verre in Zh. Tekh. Fiz., vol. 18, pp 383-388 (1948)

**BARTENEV G. M.**

Zh. Tekh. Fiz., 1949, vol. 19, pp 1423-1433, (1949)

**BURKE M. A., SOULES T. F., BUSBEY R. F., KHESON S. M.**

Finite-element calculation of stresses in glass parts undergoing viscous relaxation in Journal of the American Ceramic Society, 1987, vol. 70, n° 2, pp 90-95

**CARRE H., DAUDEVILLE L.**

Finite element calculation of stresses in tempered glass in 1st International Symposium on Thermal Stresses and Related Topics, Hamamatsu (Japan), 5-7 juin 1995

**CARRE H., DAUDEVILLE L.**

Calculs par éléments finis des contraintes résiduelles de trempe in 12ème Congrès Français de Mécanique, Strasbourg, 4-8 septembre 1995

**CARRE H., DAUDEVILLE L.**

Numerical Simulation of soda-lime silicate glass tempering in Journal de Physique IV, Colloque C1, supplément au Journal de Physique III, 1996, vol. 6, pp 175-185

**CARRE H.**

Détermination de la résistance du verre trempé pour son utilisation en génie civil in 14ème Rencontres Universitaires de Génie Civil, Clermont-Ferrand, 9-10 mai 1996

**CHARLES R. J., HILLIG W. B.**

The kinetics of glass failure by stress corrosion in Symposium sur la résistance du verre et les moyens de l'améliorer, Charleroi, 1962 (Union Centrale Continentale du Verre)

**CHUDNOVSKY A., GORELIK M.**

Statistical fracture mechanics - basic concepts and numerical realization, Probamat, Cachan, 23-25 novembre 1993, NATO E-Science, (Breysse D. Ed., Kluwer Pubs.)

**CONWAY J. C., MECHOLSKY J. J.**

Use of crack branching data for measuring near surface residual stresses in tempered glass in Journal of the American Ceramic Society, 1989, vol. 72, n° 9, pp 1584-1587

**DAUDEVILLE L., CARRE H.**

Analysis of residual stresses and of load-bearing capacity of tempered glass plates in Journal de Physique (à paraître)

**DOREMUS R. H.**

*Fracture in Glass Science*, 2<sup>e</sup> ed., A. Wiley Interscience Publication, 1994 (Science and Technology of Materials ser.)

**DOREMUS R. H., KAY J. F.**

*Initial crack paths in glass : influence of temperature and composition* in *Journal of Materials Science*, 1979, vol. 14, pp 2236-2240

**DUFFRENE L.**

*Comportement viscoélastique d'un verre silico-sodocalcique dans le domaine des températures intermédiaires*, thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris soutenue le 21 décembre 1994

**DUGDALE D. S.**

*Yielding of steel sheets containing slits* in *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol.8, pp 102-104

**EVANS A. G.**

*Slow crack growth in brittle materials under dynamic loading conditions* in *International Journal of Fracture*, 1974, vol. 10, n° 2, pp 251-259

**FRANCOIS D., PINEAU A., ZAOUI A.**

*Comportement mécanique des matériaux*, Paris : Hermes, 1993

**FREIMAN S. W.**

*Elasticity and Strength in Glasses* in *Glass : Science and Technology* (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

**GARDON R.**

*Thermal tempering of glass* in *Glass : Science and Technology* (D. R. Uhlmann et N. J. Kreidl, Ed.), Academic Press, 1980

**GEHRKE E., ULLNER C., HAHNERT M.**

*Effect of corrosive media on crack growth of model glasses and commercial silicate glasses* in *Glass. Tech. Ber.*, 1990, vol. 63, n° 9, pp 255-265

**The Glass Development Centre of Philips' Gloeilampenfabrieken**

*Etude bibliographique* in *Symposium sur la résistance mécanique du verre et les moyens de l'améliorer*, Florence, 25-29 septembre 1961 (Union Scientifique Continentale du Verre)

**GRENET L.**

*Mechanical strength of glass* in *Bull. Soc. Enc. Nat. Paris (Ser. 5)*, 1899, vol. 4, pp 838-848

**GUILLEMET C., ACLOQUE P.**

*Nouvelles méthodes optiques de détermination des contraintes au voisinage des surfaces des milieux transparents* in 2<sup>e</sup> Conférence des analyses des contraintes, Paris, 11-14 avril 1962

**GUILLEMET C.**

*Annealing and tempering of glass* in XV<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Leningrad, 1989

**GUILLEMET C., GY R., LABROT M.**

*Viscosity, configurational entropy and structural relaxation of silica-soda-lime glass* in XVI<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Madrid, 4-9 octobre 1992

**GUPTA P. K., INNISS D., KURKJIAN C. R., BROWNLOW D. L.**

*Determination of crack velocity as a function of stress intensity from static fatigue data* in *Journal of the American Ceramic Society*, 1994, vol. 77, n° 9, pp 2445-2449

**GY R., DUFFRENE L., LABROT M.**

*New insights into the viscoelasticity of glass* in *Journal of Non-Crystalline Solids*, 1994, vol. 175, pp 103-117

**HAGAN J. J., SWAIN M. V., FIELD J. E.,**

*Evaluation of residual stresses in thermally toughened materials* in *Physics and Chemistry of Glasses*, 1977, vol. 18, n° 5

**HELFINSTINE J. D.**

*Adding static and dynamic fatigue effect directly to the Weibull distribution* in *Journal of the American Ceramic Society*, 1980, vol. 63, p 425

**HILD F., MARQUIS D.**

*Fiabilité des matériaux avec défauts en propagation stable* in Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 1995, t. 320, Série IIB, pp 57-62

**HILD F., MARQUIS D.**

Influence of subcritical propagation of initial flaws on the reliability of brittle structures, Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium, Nottingham. 30 août-3 septembre 1994 (Parker D. F., England A. H. Ed.), Kluwer, 1995, pp 269-274

**ISA BAR-ON**

*Applied fracture mechanics*, in Ceramics and Glasses ASM International, 1991 (Engineered Materials Handbook Ser., vol. 4)

**ISIDA M., NOGUCHI H., YOSHIDA T.**

*Tension and Bending of finite thickness plates with semi-elliptical surface crack* in International Journal of Fracture, vol. 26, pp. 157-188, 1994

**JACOB L.**

*Stress levels causing thermal fractures can be predicted more accurately* in Glass Digest, 1988, vol. 11, pp 76-78

**JAYATILAKA A. S., TRUSTRUM K.**

*Statistical Approach to brittle fracture* in Journal of Materials Science, 1977, vol. 12, pp 1426-1430

**JOHNSON J. W., HOLLOWAY D. G.**

Philosophic Magazine, 1966, vol. 14, pp 731-743

**KERPER M. J., SCUDERI T. G.**

*Relation of strength of thermally tempered glass to fracture mirrors size* in American Ceramic Society Bulletin, 1965, vol. 44, n° 12, pp 953-955

**KHALILI A., KRAMP K.**

*Statistical properties of Weibull estimators* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 26, pp 6741-6752

**KIRCHNER H. P., GRUYER R. M.**

*Fracture Mechanics of Ceramics*, vol.3, pp 205-229, New York : Plenum Press (Bradt R. C., Hasselman D. P. H., Lange F. F., Ed.), 1978

**KIRCHNER H. P., KIRCHNER J. W.**

*Fracture mechanics of fracture mirrors* in Journal of the American Ceramic Society, 1979, vol. 62, n° 3-4, pp 198-202

**KITTL P., DIAZ G.**

*Weibull's fracture statistics, or probabilistic strength of materials : state of the art* in Res Machnica, International Journal of Structural Mechanics and Material Science, 1988, vol. 24, n° 2, pp 99-207

**KURKJIAN C. R.**

*Relaxation of torsional stress in the transformation range of soda-lime-silicate glass* in Physics and Chemistry of glasses, 1963, vol. 4, n° 4

**LANGLOIS R.**

*Estimation of Weibull parameters* in Journal of Materials Science, 1991, vol. 10, pp 1049-1051

**LAWN B. R., FULLER E. R.**

*Measurement of thin-layer surface stresses by indentation fracture* in Journal of Materials Science, 1984, vol. 19, pp. 4061-4067

**LAWN B. R., WILSHAW T. R.**

*Atomistic aspects of crack propagation* in Fracture of Brittle Solids, Cambridge University Press, 1975 (Cambridge Solid State Science ser.)

**LEE E. H., ROGERS T. G., WOO T. C.**

*Residual stresses in a glass plate cooled symetrically from both surfaces* in Journal of the American Ceramic Society, 1965, vol. 48, n°9, pp 480-487

**LEMAITRE J., CHABOCHE J. L.**

*Mécanique des matériaux solides*, Paris : Dunod-Bordas (1985)

**LEON M., KITTL P.**

*On the estimation of Weibull's parameters in brittle materials* in Journal of Materials Science, 1985, vol.20, pp 3778-3782

**MARSHALL D. B., LAWN B. R.**

*Measurement of nonuniform distribution of residual stresses in tempered glass discs* in Glass Technology, 1978, vol. 19 n° 3, pp. 57-60

**MARSHALL D. B., LAWN B. R.**

*Surface flaws in glass* in Fracture in ceramic materials, (Evans A. G. Ed.) Noyes Publication, 1984

**McMASTER R. A., SHETTERLY D. M., BUENO A. G.**

*Annealed and tempered glass* in Ceramics and Glasses, ASM International, 1991 (Engineered Materials Handbook, vol. 4)

**MECHOLSKY J. J., FREIMAN S. W., RICE R. W.**

*Analyse de la surface de fracture des céramiques* in Journal of Material Science, 1976, vol. 11, n° 7, pp 1310-1319

**MENCIK J.**

*Strength and Fracture of Glass and Ceramics*, Elsevier, 1992 (Glass Science and Technology)

**MICHALSKE T. A., FREIMAN S. W.**

*A molecular mechanism for stress corrosion in vitreous silica* in Journal of the American Ceramic Society, 1983, vol. 66, n° 4, pp 284-288

**MICHALSKE T. A., BUNKER B. C.**

*Slow fracture model based on strained silicate structures* in Journal of Applied Physics, 1984, vol. 56, n° 10

**MICHALSKE T. A., BUNKER B. C., SMITH W. L.**

*Fatigue mechanisms in high strength silica glass fibers* in Journal of the American Ceramic Society, 1991, vol. 74, n° 8, pp 1993-1996

**MICHALSKE T. A., BUNKER B. C.**

*A chemical kinetics model for fracture* in Journal of the American Ceramic Society, 1993, vol. 76, n° 10, pp 2613-2618

**MOULD R. E.**

*Fundamental phenomena in materials science*, New York : Plenum, 1967, vol. 4, p 119

**MUKI R., STERNBERG E.**

*On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties* in Journal of Applied Mechanics, 1961, pp 193-207

**NARAYANASWAMY O. S.**

*A model of structural relaxation in glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1971, vol. 54, n° 10, pp 491-498

**NARAYANASWAMY O. S.**

*Stress and structural relaxation in tempering glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1978, vol. 61, n° 3-4, pp 146-152

**NARAYANASWAMY O. S., GARDON R.**

*Calculation of residual stresses in glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1969, vol. 52, n° 10, pp 554-558

**NOVOTNY V.**

*Relation entre les contraintes au voisinage de la surface des verres trempés, déterminées à l'aide d'un épibiascope, leur degré de trempe et leur destruction après casse* in Verres et réfractaires, 1981, vol. 35, n° 5

**PIGANIOL P.**

*Les industries verrières*, Paris : Dunod, 1966

**REDNER A. S.**

*How to measure stress in glass* in Glass Digest, june 15, 1994

**RITTER J. E., SHERBURNE C. L.**

*Dynamic and static fatigue of silicate glass* in Journal of the American Ceramic Society, vol. 54, n° 12, pp 601-605 (1971)

**SAKAGUSHI S., SAWAKI Y., ABE Y., KAWASAKI T.**

*Delayed failure in silica glass* in Journal of Materials Science, 1982, vol. 17, pp 3460-3478

**SAVOY E.**

*Traité technique du verre*, 2<sup>e</sup> éd., Savoy E., 1989, 301 p

**SCHAPERY R. A.**

*A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media, I. Theoretical development* in International Journal of Fracture, 1975, vol. 11, n° 1

**SCHAPERY R. A.**

*A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media, II. Approximate methods of analysis* in International Journal of Fracture, 1975, vol. 11, n° 3

**SCHAPERY R. A.**

*A theory of crack initiation and growth in viscoelastic media, III. Analysis of continuous growth* in International Journal of Fracture, 1975, vol. 11, n° 4

**SCHWARZL F., STAVERMAN A.J.**

*Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior* in Journal of Applied Physics, 1952, vol. 23, n° 8

**SHAND E. B.**

*Breaking stress of glass determined from dimensions of fracture of mirrors* in Journal of the American Ceramic Society, 1959, vol. 42, n° 10, pp 474-477

**SINHA N. K.**

*Stress state in tempered glass plate and determination of heat-transfer rate* in Experimental Mechanics, 1978, vol. 18, n° 1, pp 25-34

**TOOL A. Q.**

*Relation between inelastic deformability and thermal expansion of glass in its annealing range* in Journal of the American Ceramic Society, vol. 29, n° 9, pp 240-253 (1946)

**TRUSTRUM K., JAYATILAKA A. S.**

*On estimating the Weibull modulus for a brittle material* in Journal of Materials Science, 1979, vol. 14, pp 1080-1084

**VALENTIN G. H., GUSTAFSSON P. J., RANTA-MAUNUS A., GOWDA S.**

*Application of fracture mechanics to timber structures RILEM state-of-the-art report*, Technical Research Centre of Finland, 1991 (research note 1262)

**VARSHNEYA A. K.**

*Fundamentals in organic glasses*, Harcourt Brace & Company, 1994

**WAGNER R.**

*Inclusions de sulfure de Nickel dans le verre* in Glasstech. Ber., 1977, vol. 50, n° 11, pp 296-300

**WEIBULL W. A.**

*A statistical distribution function of wide applicability* in Journal of Applied Physics, 1951, vol. 18, p293

**WEIBULL W.A.**

*A survey of statistical effects in the field of material failure* in Applied Mechanics Reviews, 1952, vol. 5, n° 11

**WIEDERHORN S. M.**

*Influence of water vapor on crack propagation in soda-lime-silicate glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1967, vol. 50, n° 8, pp 407-417

**WIEDERHORN S. M.**

*Crack growth as an interpretation of static fatigue* in Journal of Non Crystalline Solid, 1975, vol. 19, n° 1, pp 169-181

**WIEDERHORN S. M., FREIMAN S. W., FULLER E. R., SIMMONS C. J.**

*Effects of water and other dielectrics on crack growth* in Journal of Material Science, 1982, vol. 17, pp 3460-3478

**ZARZYCKI J.**

*Les verres et l'état vitreux*, Paris : Masson, 1982



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES COMPLEMENTAIRES

### Comportement thermo-mécanique du verre

**AVRAMOV I., VASSILEVT.**

*Relaxation in glass : Theory and application* in the Second Conference of the European Society of Glass Science and Technology, Venise, 21-24 juin 1993

**GARDON R.**

*The tempering of flat glass by forced convection* in VII<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Belgique, 1965 (Institut national du verre, Charleroi)

### Le verre trempé

**AKEYOSHI K., KANAI E.**

*Mechanical properties of tempered glass* in VII<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Bruxelles, 1965

**BREARLEY W., HOLLOWAY D. G.**

*The effect of heat-treatment on the braking strength of glass* in Physics and Chemistry of glasses, 1963, vol. 4, n° 3, pp 69-75

**GULATI S.**

*Thermomechanical behavior of tempered silicate glass* in the Second Conference of the European Society of Glass Science and Technology, Venise, 21-24 juin 1993

**HAGAN, J. T., SWAIN M. V., FIELD J. E.**

*Evaluation of residual stresses in thermally toughened materials* in Physics and Chemistry of Glasses, 1977, vol. 18, n° 5, pp 101-102

**MARSHALL D. B., LAWN B. R.**

*Measurement of nonuniform distribution of residual stresses in tempered glass discs* in Glass Technology, 1978, vol. 19, n° 3, pp 57-58

**McMASTER R. A.**

*Fundamentals of tempered glass* in Ceram. Eng. Sci. Proc., 1989, vol. 10, n° 3-4, pp 193-206

**MILKINEN V.**

*Heat strengthening versus tempering* in Glass Industry, 1993, vol. 74, n° 7, pp 14-16

**NORDBERG M. E., MOCHEL E. L., GARFINKEL H. M., OLCOTT J. S.**

*Strengthening by ion exchange* in Journal of the American Ceramic Society, 1964, vol. 47, n° 5, pp 215-219

**SHUTOV A. I., CHISTYAKOV A. A., PROKOFEVNA T. P.**

*Distribution des contraintes dans le verre lors de la trempe par jets d'air* in Steklo. Keram., 1981, col. 3, pp 13-14

**VARNER J. R., HALLWIG W., WALTER A.**

*Impact damage on annealed and tempered flat glass* in Journal of Non-Crystalline Solids, 1980, vol. 38 & 39, pp 413-418

## Rupture du verre

### Rupture d'un matériau fragile

**HILD F.**

De la rupture des matériaux à comportement fragile, thèse de doctorat de l'Université Paris 6, soutenue le 16 décembre 1992

**KURZ W., MERCIER J. P., ZAMBELLI G.**

Introduction à la rupture des matériaux, Presses Polytechniques Romandes, 1987

**FREIMAN S. W.**

*Brittle fracture behavior of Ceramics* in Ceramic Bulletin, 1988, vol. 67, n° 2, pp 392-402

**PLETKA B. J., WIEDERHORN S. M.**

*A comparison of failure predictions by strength and fracture mechanics techniques* in Journal of Materials Science, 1982, vol. 17, pp 1247-1268

**LAWN B. R., WILSHAW T. R.**

*Atomistic aspects of crack propagation* in Fracture of brittle solids, Cambridge University Press, 1975 (Cambridge Solid State Science ser.)

**SHAND E. B.**

*Experimental study of fracture of glass : I, the fracture process* in Journal of the American Society, 1954, vol. 37, n° 2, pp 52-60

### Défauts du verre

**CREUZET F., ABRIOU D., ARRIBART H.**

*Observation of glass surfaces at a nanometre scale using atomic force microscopy* in the Second Conference of the European Society of Glass Science and Technology, Venise, 21-24 juin 1993

**CREUZET F., GUILLOTEAU E., ARRIBART H.**

*Characterization of surface involved in the fracture of glass* in the Second European Conference of the European Society of Glass Science and Technology, Venise, 21-24 juin 1993

**ERNSBERG F. M.**

*Recherche sur l'origine et de la fréquence du phénomène d'apparition des pailles de Griffith sur des surfaces de verre* in XIV<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Washington, 1962

**SHAND E. B.**

*Correlation of strength of glass with fracture flaws measured size* in Journal of the American Ceramic Society, 1961, vol. 44, n° 9, pp 451-455

**CORDIE P., MOREL D.**

*Etude des défauts à l'origine des casses de fibres de verre* in XII<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Hambourg, 4-9 juillet 1983

### Aspect probabiliste de la rupture

**ASAO M., AOKI K.**

Fracture probability of large dimension glass plate estimated from accurately fracture probability of small test pieces in X<sup>e</sup> Congrès International du Verre, Kyoto, juillet 1974

**BEASON W. L., MORGAN J. R., ASCE M.**

*Glass failure prediction model* in Journal of Structural Engineering, 1984, vol. 10, n° 2, pp 196-213

**ICHIKAWA M.**

*Relationship between Weibull moduli for tensile and bending fracture strength of brittle solids (the case of three-parameter Weibull distribution)* in Engineering Fracture Mechanics, 1993, vol. 46, n° 5, pp 843-848

**ICHIWA M.**

*Stress state dependence of the shape parameter of the three-parameter Weibull distribution in relation of fracture ceramics* in Engineering Fracture Mechanics, 1991, vol. 39, n° 4, pp 751-755

**LAMON J.**

*Statistical approaches to failure for ceramic reliability assessment* in Journal of the American Ceramic Society, 1988, vol. 71, n° 2, pp 106-112

**MIGLIORE A. R., ZANOTTO E. D.**

*The effect of the flexure testing procedure on the fracture statistics of glasses* in Glass Technology, 1995, vol. 36, n° 2, pp 65-66

**NILSSON A.**

Stochastic characterization of glass strength properties, The Swedish Council for Building Research, Stockholm, 1993 (n° 860983-4)

**PETERLIK**

*The validity of Weibull estimators* in Journal of Materials Science, 1995, vol. 30, pp 1972-1976

**TRUSTRUM K., JAYATILAKA A. DE S.**

*Applicability of Weibull analysis for brittle materials* in Journal of Materials Science, 1983, vol. 18, pp 2765-2770

### Fissuration sous-critique

**CHOI S. R., RITTER J. E., JAKUS K.**

*Failure of glass with subthreshold flaws* in Journal of the American Ceramic Society, 1990, vol. 73, n° 2, pp 268-274

**CHUANG T., FULLER E. R.**

*Extended Charles-Hillig Theory for stress corrosion cracking of glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1992, vol. 75, n° 3, pp 540-545

**EVANS A. G.**

A method of evaluating the time-dependent failure characteristics of brittle materials - and its application to polycrystalline alumina in Journal of Materials Science, 1972, vol. 7, pp 1137-1146

**FETT T., MUNZ D.**

*Determination of v-KI curves by a modified evaluation of lifetime measurements in static bending tests* in Journal of the American Ceramic Society, 1985, vol. 68, n° 8, pp c-213 c-215

**FISK G. A., MICHALSKE T. A.**

*Laser-based and thermal studies of stress corrosion in vitreous silica* in Journal of Applied Physics, 1985, vol. 58, n° 7, pp 2736-2741

**HILLIG W. B., CHARLES R. J.**

*Surfaces, Stress-dependent surface reactions, and strength* in High-Strength Materials, New-York : Wiley, 1964 (Zackay V. F.)

**HOHNE L., ULLNER C.**

*Modelling of time strength behavior of soda-lime-silica glass in moist environments* in Glastechn. Ber. Glass Sci., 1994, vol. 67, n° 8, pp 220-226

**JAKUS K., RITTER J. E., SULLIVAN J. M.**

*Dependency of fatigue predictions on the form of the crack velocity equation* in Journal of the American Ceramic Society, 1981, vol. 64, n° 6, pp 372-374

**JEWELL J. M., SHELBY J. E.**

*Effects of water content on the properties of sodium aluminosilicate glasses* in Journal of the American Ceramic Society, 1992, vol. 75, n° 4, pp 878-883

**LAWN B. R., MARSHALL D. B.**

*Fatigue strength of glass : A controlled flaw study* in Fracture of Ceramic Materials, Noyes Publication, 1984 (Evans A. G.)

**MICHALSKE T. A., FULLER E. R.**

*Closure and repropagation of healed cracks in silicate glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1985, vol. 68, n° 11, pp 586-590

**MICHALSKE T. A., BUNKER B. C.**

*A chemical kinetics model for glass fracture* in Journal of the American Ceramic Society, 1993, vol. 76, n° 10, pp 2613-2618

**OROWAN E.**

*The fatigue of glass under stress* in Nature, 1944, vol. 154, n° 3906, pp 341-342

**RITTER J. E., SHERBURNE C. L.**

*Dynamic and static fatigue of silicate glasses* in Journal of the American Ceramic Society, 1971, vol. 54, n° 12, pp 601-605

**WIEDERHORN S. M., TOWNSEND P. R.**

*Crack healing in glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1970, vol. 53, n° 9, pp 486-489

**WIEDERHORN S. M., JONNISON H.**

*Effect of electrolyte pH on crack propagation in glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1973, vol. 56, n° 4, pp 192-197

**WIEDERHORN S. M.**

*Strength of glass - A fracture mechanics approach* in Xe Congrès International du Verre, 11 juillet 1974

**WILKINS B. J. S., DUTTON R.**

*Static fatigue limit with particular reference of glass* in Journal of the American Ceramic Society, 1976, vol. 59, n° 3-4, pp 108-112

**YODA M., NAGAO M.**

*Fracture and subcritical growth characteristics of indented cracks on soda-lime glass* in Engineering Fracture Mechanics, 1993, vol. 46, n° 5, pp 789-796

**ZIRL D. M., GAROFALINI S. H.**

*Structure of sodium aluminosilicate glass surfaces* in Journal of the American Ceramic Society, 1992, vol. 75, n° 9, pp 2353-2362

### **Rupture en milieu viscoélastique**

**GUILLEMET C.**

*Fracture et plasticité des verres* in La Revue de Metallurgie-CIT/Science et Génie des Matériaux, février 1995, pp 253-263

**MARSH D. M.**

*Plastic flow and fracture of glass* in Proc. Roy. Soc. A, 1964, vol. 282, plate 9, pp 33-42

**MUELLER H. K., KNAUSS W. G.**

*Crack propagation in a linearly viscoelastic strip* in Journal of Applied Mechanics, june 1971, pp 483-488

**ZNATY E.**

*Propagation des fissures en milieu viscoélastique*, thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées soutenue le 28 avril 1982

# ANNEXES

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Annexe 1 : Détermination de l'énergie d'activation .....                             | 163 |
| Annexe 2 : Effet du rapport $h_1/h_2$ sur la forme de la contrainte de bord.....     | 165 |
| Annexe 3 : Traitement complémentaire des résultats des essais d'identification ..... | 167 |
| Annexe 4 : Essais de longue durée .....                                              | 171 |



## ANNEXE 1 : DETERMINATION DE L'ENERGIE D'ACTIVATION

L'énergie d'activation  $H$  est un paramètre du facteur de décalage  $\Phi(T)$  permettant de prendre en compte l'effet de la température sur les temps de relaxation (dans les séries de Prony définissant  $G$  et  $K$ ) :

$$\frac{\tau_i}{\tau_{iref}} = \Phi(T) \quad \text{avec} \quad \Phi(T) = \frac{-H}{R} \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right)$$

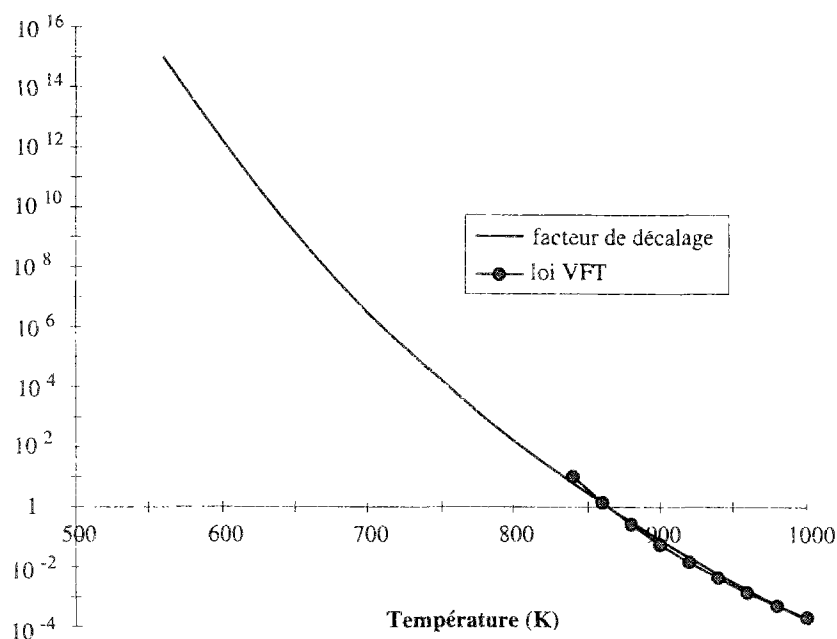
La variation de la viscosité en fonction de la température est souvent donnée par la loi empirique de Vogel-Fulcher-Tammann<sup>1</sup> (VFT) :

$$\begin{aligned} \text{Log}(\eta) &= A + \frac{B}{T - T_0} & \text{pour } T > T_g \\ &= -1,993 + \frac{4003,5}{T - 542} & \text{avec } \eta = \tau_1 > G \end{aligned}$$

La comparaison des deux lois au-delà de  $T_g$  permet de déterminer la valeur du rapport  $H/R$  :

$$\frac{H}{R} = 55\,000 \text{ K}$$

Rapport des temps de relaxation à  $T$  par rapport à  $T_{ref}$



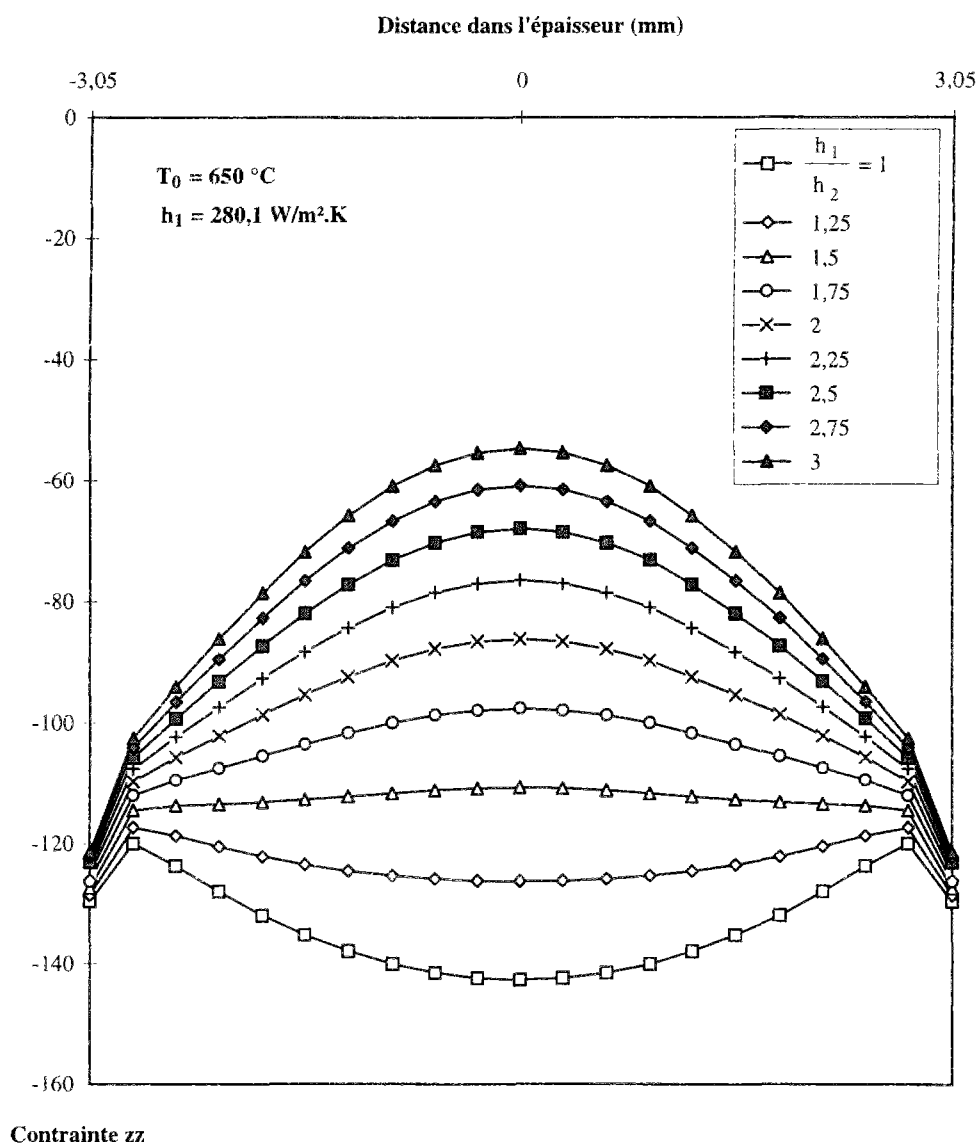
Rapport des temps de relaxation à  $T$  et  $T_{ref}$  en fonction de la température

<sup>1</sup> DUFFRENE L., *Comportement viscoélastique d'un verre silico-sodocalcique dans le domaine des températures intermédiaires*, thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris soutenue le 21 décembre 1994



## ANNEXE 2 : EFFET DU RAPPORT $h_1/h_2$ SUR LA FORME DE LA CONTRAINTE DE BORD

Quand le rapport  $h_1/h_2$  ( $h_1$  correspondant à la convection sur le plan de la plaque et  $h_2$  sur les bords de la plaque) évolue, la contrainte  $zz$  sur la tranche de la plaque change de forme. Si  $h_2$  est inférieure à  $h_1$ , la compression au milieu de la tranche est plus faible que la compression sur l'arête. En revanche, si  $h_2$  est supérieure à  $h_1$ , la compression est plus forte au milieu du bord.



Pour garantir une compression sur le bord proche de la contrainte de surface, il convient de bien refroidir la tranche (c'est à dire d'avoir un coefficient de transfert thermique assez élevé).

contrainte maximale  
contrainte minimale

2,5 –

$T_0 = 650\text{ °C}$   
 $h_1 = 280,1\text{ W/m}^2\text{.K}$

2 –

1,5 –

1 –

0,5 –

0

 $\frac{h_1}{h_2}$ 

0

0,5

1

1,5

2

2,5

3

## ANNEXE 3 : ANALYSE COMPLEMENTAIRE DES ESSAIS D'IDENTIFICATION

Trois type d'essais d'identification ont été éliminés lors de l'analyse initiale des résultats :

- rupture en dehors des forces
- rupture en dehors de la tranche inférieure
- rupture sur appui.

Les parties triangulaires de la répartition des contraintes le long des éléments de flexion 4 points peuvent être intégrées dans la loi de Weibull. Elle s'écrit alors (pour la configuration de chargement vue plus haut :

$$P_f = 1 - \exp \left\{ \frac{-bL}{2} \left( 1 + \frac{1}{m+1} \right) \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\}$$

Dans ce cas, les cas éliminés en raison de l'origine de rupture se trouvant en dehors des forces peuvent être réintégrés dans l'analyse.

De plus, dans la deuxième cause d'élimination, deux cas peuvent être distingués :

- rupture sur le chanfrein
- rupture sur une face verticale.

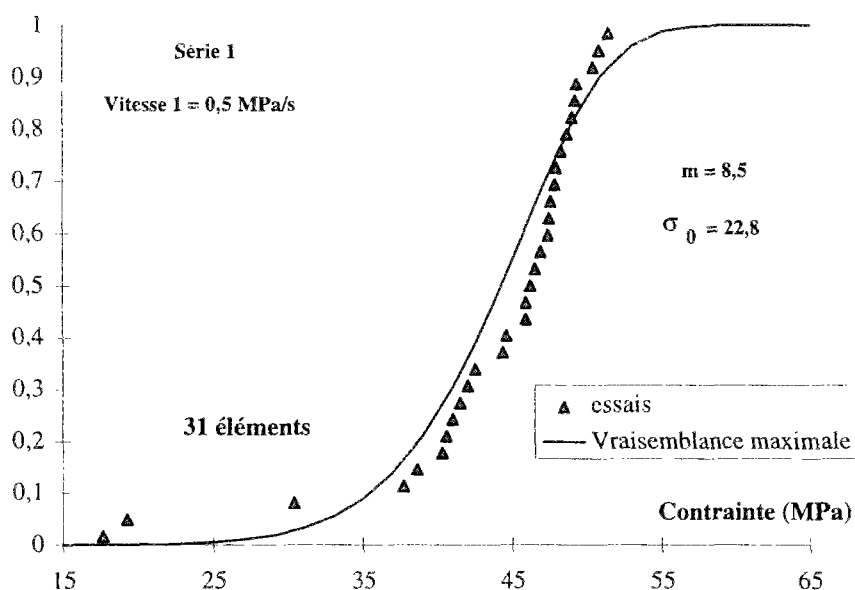
Le chanfrein, de même que la face inférieure est une face polie mécaniquement. La répartition des défauts à sa surface peut être considérée comme identique à celle de la tranche inférieure. Les cas de rupture sur chanfrein sont alors conservés dans l'étude. L'influence du chanfrein sur l'état de contrainte est négligée.

Les paramètres de Weibull sont identifiés avec la méthode de la vraisemblance maximale.

### Première série :

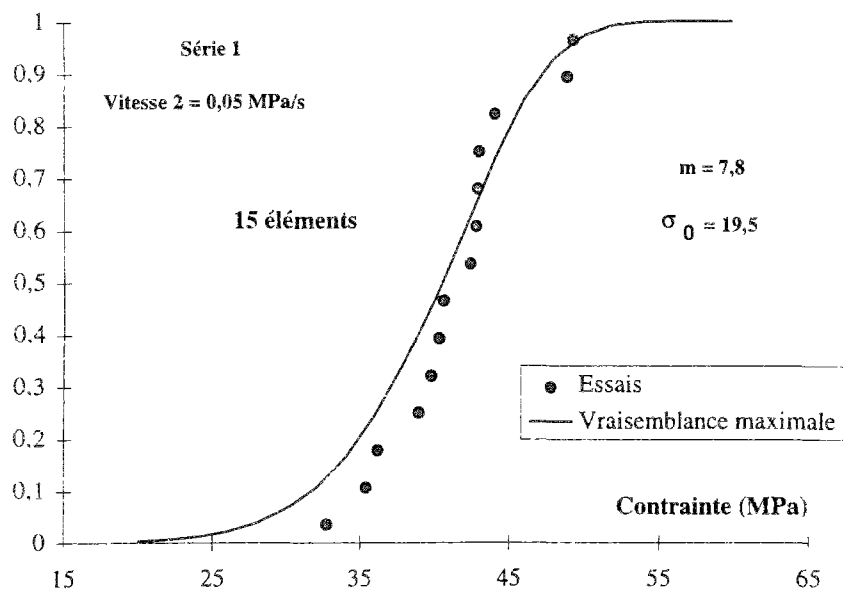
*vitesse = 0,5 MPa/s*

Probabilité de rupture



*vitesse = 0,05 MPa/s*

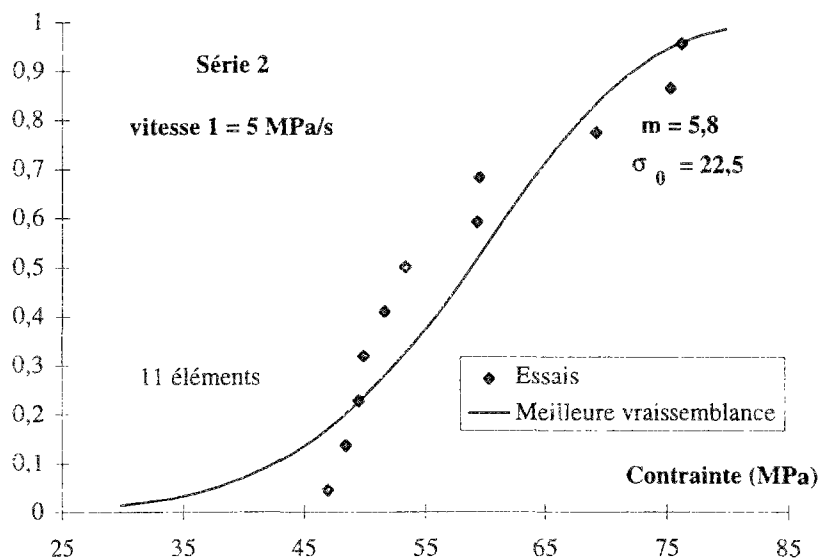
Probabilité de rupture



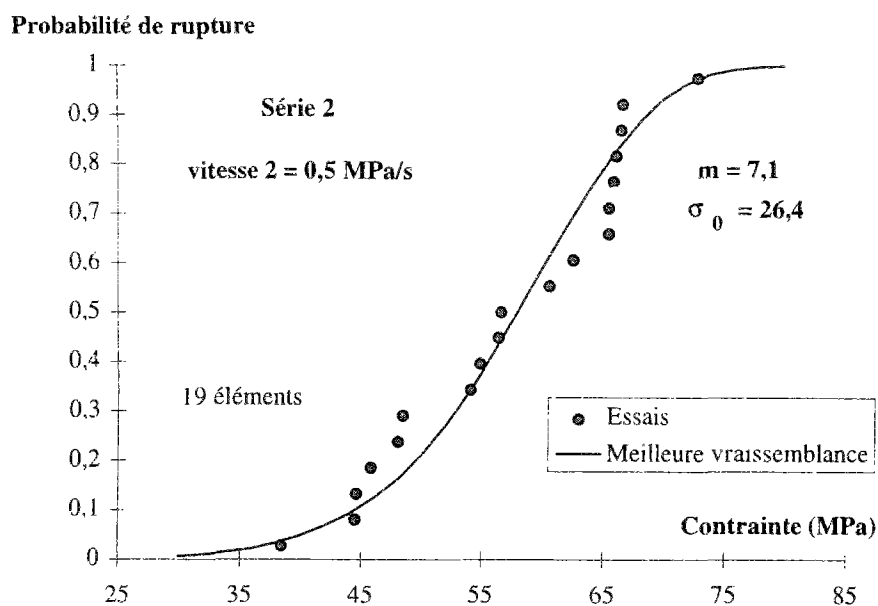
Deuxième série :

*vitesse = 5 MPa/s*

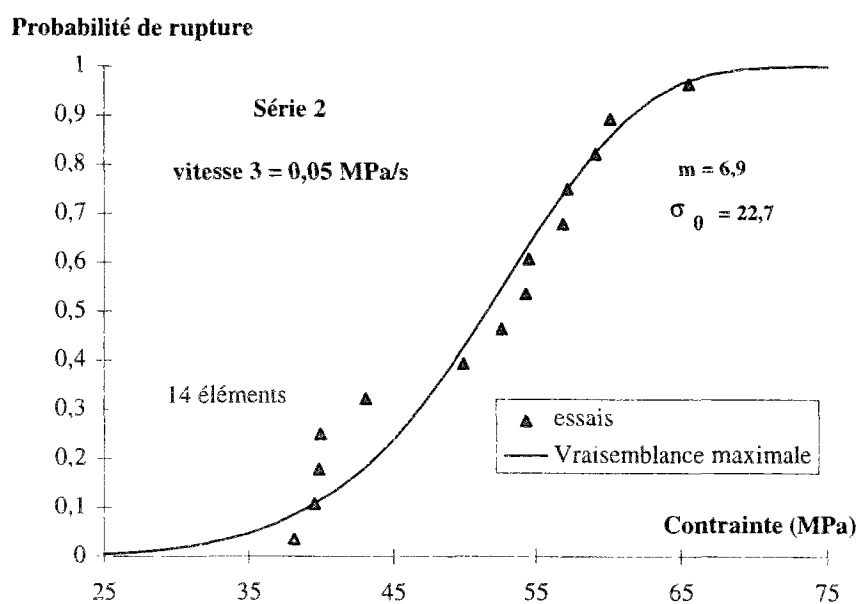
Probabilité de rupture



*vitesse = 0,5 MPa/s*



*vitesse = 0,05 MPa/s*



Les modules de Weibull obtenus sont assez différents de ceux identifiés dans l'analyse initiale en particulier pour la première série d'essais. L'effet de la vitesse de chargement est toujours visible. Les cas éliminés pour rupture en dehors des forces introduisent des contraintes à rupture très faibles.



## ANNEXE 4 : ESSAIS DE LONGUE DUREE

### I. INTRODUCTION

L'utilisation du verre pour les structures du bâtiment exige l'estimation de l'évolution de sa résistance à long terme.

La particularité du verre pour l'étude de sa résistance dans le temps est l'existence de la "fatigue statique". Le verre chargé est sensible à l'action de l'eau qui provoque la fissuration stable des défauts préexistants. Sous charge maintenue, la résistance (contrainte à rupture) d'un élément en verre diminue au cours du temps (à cause de la propagation stable du plus gros défaut). La loi de vitesse de fissuration est mal connue pour les vitesses très faibles ( $v < 10^{-12}$  m/s). Plusieurs travaux semblent montrer l'existence d'une limite de fatigue statique (KI en deçà duquel les fissures ne se propagent pas).

De plus, dans le cas du verre trempé, il pourrait se produire une évolution de la précontrainte au cours du temps (par relaxation des contraintes résiduelles de trempe). Alors la limite (en contrainte) en deçà de laquelle les défauts ne se propagent pas diminuerait et la résistance également.

Des essais de longue durée (sur de grandes poutres en verre recuit et trempé) sont programmés pour étudier ces phénomènes. Ce sont les mêmes essais que ceux présentés au chapitre précédent : essais de flexion 4 points avec chargement dans le plan des plaques. Les éléments ont également les mêmes caractéristiques (même état de surface des tranches en particulier).

L'objectif de ces essais est de mettre en évidence les phénomènes prépondérants qui gouvernent l'évolution de la résistance du verre dans le temps. L'existence d'une limite de fatigue statique et l'évolution de la précontrainte dans le temps sont les deux principales voies d'investigation.

### II. DESCRIPTION DES ESSAIS

#### II.1. Généralités

##### II.1.a. Les échantillons

Les grandes poutres utilisées pour réaliser les essais de longue durée sont similaires à celles testées à rupture présentées précédemment (cf. Figure II.1).

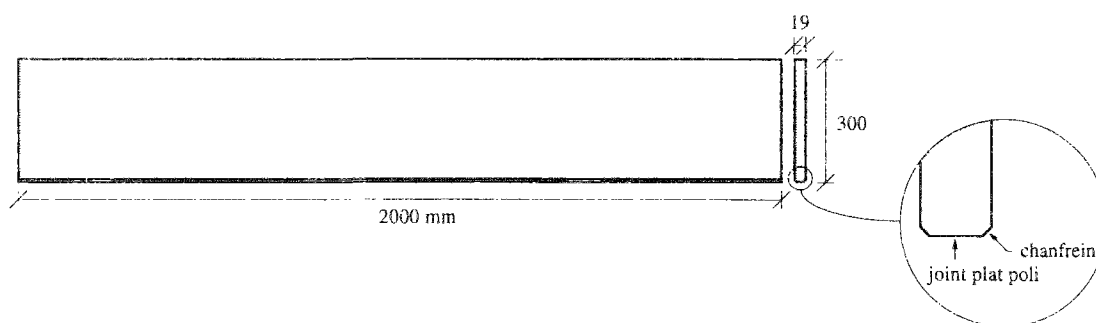


Figure II.1 : Dessin des grandes poutres

### II.1.b. Le montage

Les grandes poutres sont chargées dans leur plan en flexion 4 points avec les systèmes anti-déversement déjà vus (cf. Figure II.5).

Une grosse poutre et quatre tiges filetées permettent de réaliser un cadre. Entre ce cadre et la poutre de répartition de la charge, un vérin plat se dilatant par mise en pression de l'huile qu'il contient permet d'appliquer la charge.

Le vérin plat est formé d'un boudin métallique reliées à deux membranes métalliques plus souples au milieu contenant de l'huile. L'huile mise sous pression provoque l'écartement des deux membranes. Sous pression maintenue, le vérin permet de garantir un déplacement de ses deux faces.

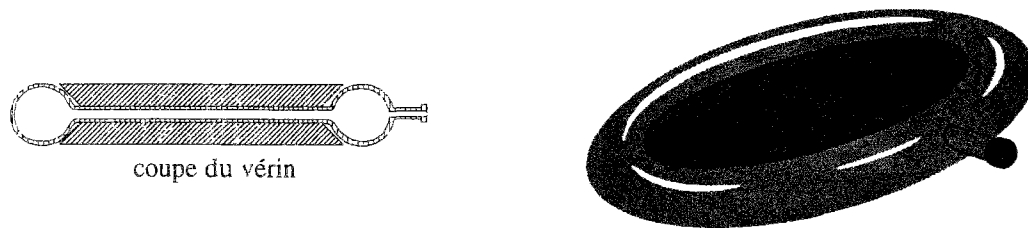


Figure II.2 : Vues du vérin plat à vide



Figure II.3 : Vues du vérin plat sous pression

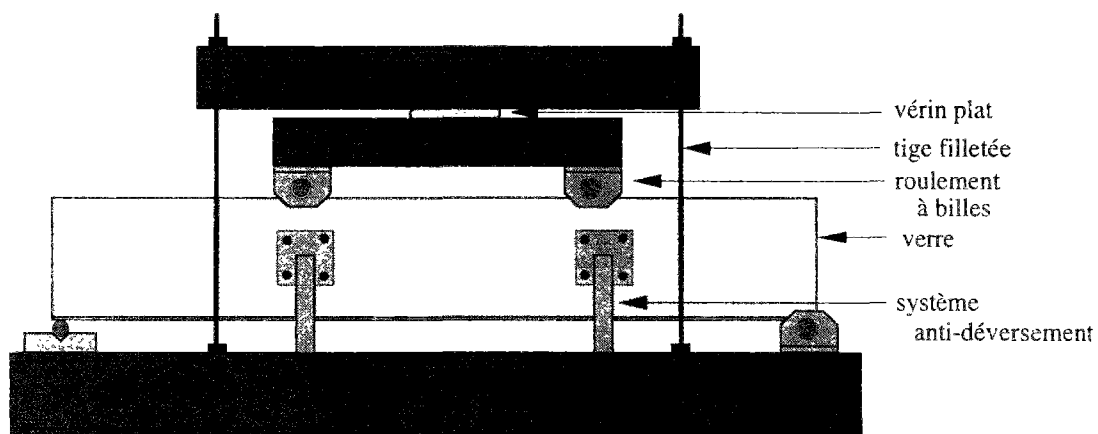


Figure II.4 : Vue générale du montage

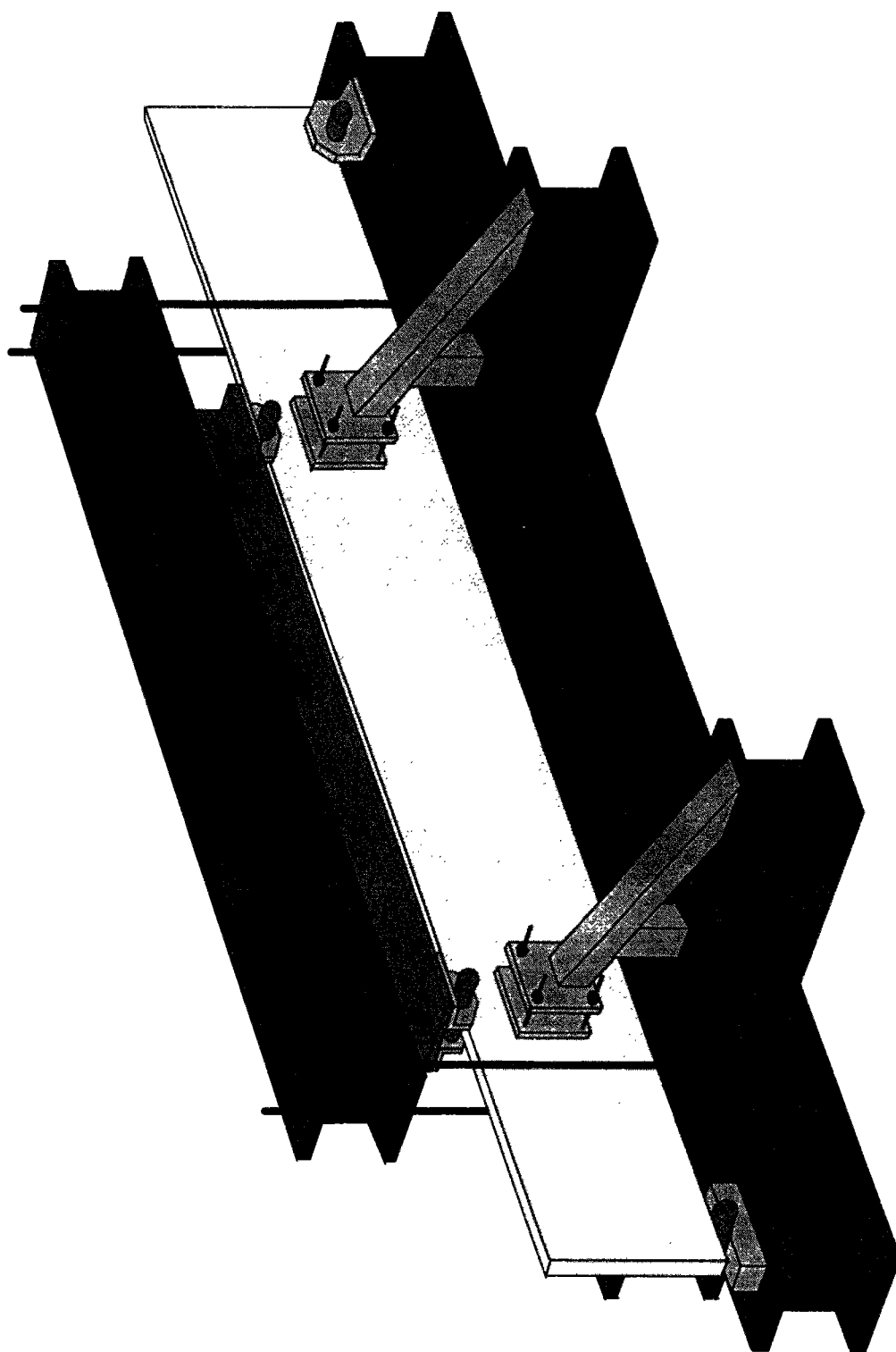


Figure II.5 : Perspective du montage d'essai

## II.2. Mesures

Deux types de mesures sont réalisées lors des essais : la pression de l'huile dans les vérins plats et la déformation de la fibre inférieure.

### II.2.a. Mesure de la pression

Les vérins plats sont étalonnés pour pouvoir relier la pression de l'huile et la charge appliquée. Le vérin plat est équipé d'un manomètre à sa sortie (cf. Figure II.6).

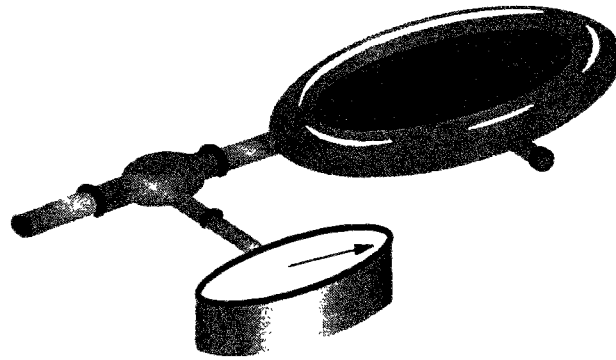


Figure II.6 : Dessin du vérin plat équipé

Le vérin plat est placé entre une plaque métallique rigide et un capteur de force accroché à une plaque métallique rigide. Le vérin est gonflé. A chaque valeur de pression correspond une valeur de charge.

Des cycles de pression permettent de vérifier la reproductibilité du système. Elle est ensuite maintenue pendant 48 heures pour vérifier que la charge reste bien constante dans le temps.

### II.2.b. Mesures des déformations

Des jauges de déformations sont placées de part et d'autre de la plaque au milieu de la fibre supérieure.

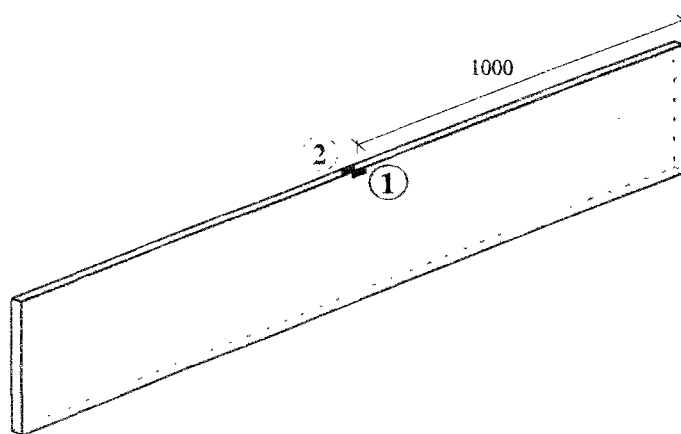


Figure II.7 : Position et numérotation des jauges

Les jauges sont placées en partie supérieure pour que leur présence ne puisse en aucun cas perturber les essais (à cause des défauts créés lors de leur collage). Les déformations fournies par les jauges donnent la contrainte maximale de compression en fibre supérieure connaissant le module d'Young mesuré lors des essais réalisés précédemment.

### III. CHARGES APPLIQUEES

Quatre niveaux de chargements sont choisis : deux pour les poutres en verre recuit et deux pour les poutres en verre trempé.

#### III.1. Charges des poutres en verre recuit

La première charge est déterminée pour que le facteur d'intensité des contraintes soit inférieur au facteur d'intensité des contraintes seuil (en deçà duquel il n'existe pas a priori de fissuration sous critique). La charge appliquée conduit à une contrainte maximale de traction :

$$\sigma \text{ telle que } K_I < K_{Ith} \equiv 0,15 \text{ MPa.m}^{1/2}$$

La contrainte moyenne de rupture obtenue lors des essais à rupture est : 31,3 MPa. Cette valeur correspond au facteur d'intensité de contrainte égal à la ténacité du verre ( $K_{Ic} = 0,75 \text{ MPa.m}^{1/2}$ ) pour une vitesse de chargement de 0,05 MPa/s. Alors la charge choisie est telle que la contrainte maximale de traction dans l'élément est : 5 MPa.

Les deux poutres soutenant cette charge ne devraient donc pas présenter de fissuration sous-critique. Les éléments seront donc intacts dans ce cas à la fin de l'essai, après 6 mois de chargement. Ils seront alors testés jusqu'à rupture à 0,05 MPa/s. Les valeurs des contraintes de rupture seront comparées au valeur déjà obtenues.

La deuxième charge choisie est telle que le facteur d'intensité des contraintes est très supérieur au facteur d'intensité des contraintes limite. La charge appliquée choisie est telle que la contrainte maximale de traction soit :

$$\sigma \text{ telle que } K_I > K_{Ith} \equiv 0,15 \text{ MPa.m}^{1/2}$$

La contrainte maximale de traction choisie est : 20 MPa.

La rupture peut alors intervenir au cours de l'essai. La durée de vie sera notée et permettra d'observer l'effet de la fissuration sous-critique. Si les éléments ne sont pas cassés à la fin du chargement, ils seront testés jusqu'à rupture avec une vitesse de chargement de 0,05 MPa/s. La contrainte de rupture montrera l'effet de la "fatigue" statique.

#### III.2. Charges des poutres en verre trempé

La contrainte maximale est choisie pour que la contrainte maximale dans l'élément soit une légère traction au début du chargement. La précontrainte de compression sur la tranche est en moyenne : 100 MPa (comme déterminé par nos simulations). La charge appliquée choisie est telle que :

$$\sigma_{max} = 5 \text{ MPa}$$

La charge apparente appliquée correspond alors à une contrainte de 105 MPa. L'objectif de cet essai est de vérifier l'efficacité de la trempe pour éviter la fissuration sous-critique (en refermant les défauts de surface grâce à la précontrainte de compression) et si le niveau de précontrainte évolue au cours du temps. L'élément ne devrait donc présenter aucun endommagement au cours de l'essai et rester entier. Si tel est le cas, l'élément sera ensuite cassé après un chargement à 0,05 MPa/s. Les résultats pourront être comparés à ceux obtenus pour les poutres en verre recuit chargées à 5 MPa.