



École Doctorale SIE

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Échelle
(MSME, FRE 3160 CNRS)
Équipe de Mécanique

Département Acoustique et Éclairage
(DAE, CSTB Grenoble)
Pôle Bruit et Vibration

Spécialité : Mécanique

Thèse présentée et soutenue publiquement
le 14 décembre 2011
en vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université Paris-Est
par

Pierre ROPARS

Modélisation des vibrations d'origine ferroviaire transmises aux bâtiments par le sol

Thèse dirigée par Guy BONNET
et codirigée par Philippe JEAN

Composition du jury :

Mr. Jean-Louis Guyader,	<i>Président</i>	INSA Lyon (LVA)
Mme. Dominique Habault,	<i>Rapporteur</i>	Université Aix Marseille (LMA)
Mr. Geert Degrande,	<i>Rapporteur</i>	Université Catholique de Louvain (Structural Mechanics Section)
Mr. Guy Bonnet,	<i>Examineur</i>	Université Paris-Est (MSME)
Mr. Michel Villot,	<i>Examineur</i>	CSTB Grenoble (DAE - Pôle Bruit et Vibration)
Mr. Philippe Jean,	<i>Examineur</i>	CSTB Grenoble (DAE - Pôle Acoustique Environnementale et urbaine)

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Échelle, Université Paris-Est, 5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée.
Département Acoustique et éclairage, pôle Bruit et Vibration, 24 rue Joseph Fourier, 38400 Saint-Martin-d'Hères.

Organismes participants

Noms & Logos	Coordonnées & Responsables
Université Paris-Est 	Président : Gilles Roussel 5 bd Descartes, Cité Descartes, Champs-sur-Marne 77454 Marne-la-Vallée cedex 2 http ://ent.univ-mlv.fr
École doctorale SIE 	Directeur : Denis Duhamel 6 & 8 avenue Blaise-Pascal, Cité Descartes Champs sur Marne, 77455 Marne-la-Valée http ://www.univ-paris-est.fr/fr/
Laboratoire MSME 	Directeur : Christian Soize 5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée http ://msme.univ-mlv.fr
DAE - Pôle Bruit et Vibration 	Responsable : Michel Villot 24 rue Joseph Fourier, 38400 Saint-Martin-d'Hères http ://dae.cstb.fr
ANRT (Dispositif CIFRE) 	http ://www.anrt.asso.fr

Remerciements

Je profite de cet espace personnel pour exprimer mes sincères remerciements aux nombreuses personnes à qui je dois beaucoup pour cette période doctorale.

Mes remerciements vont en premier lieux a mes encadrants pour m'avoir accepté et guidé durant tout ce temps. Plus particulièrement, je remercie mon directeur de thèse, Guy Bonnet, qui à su me transmettre une passion pour la recherche à travers son optimisme et sa curiosité contagieuse. Je le remercie également pour les nombreuses corrections qu'il a apportées à ce document et que le lecteur ne manquera pas d'apprécier. Je remercie aussi mon encadrant, Michel Villot, qui m'a fait découvrir une physique concrète et un monde industriel stimulant. Je remercie également mon codirecteur de thèse, Philippe Jean, qui m'a donné accès à un univers numérique très riche.

C'est à travers leurs compétences et leurs disponibilités que ces travaux ont pu avancer.

Je remercie également les autres membres du jury ; Jean-Louis Guyader pour avoir accepté de présider la soutenance ainsi que Geert Degrande et Dominique Habault pour leurs rapports et avis sur ce mémoire. Leurs intérêts m'honorent et me donnent une évaluation avisée de mon travail.

Je ne peux hélas pas rapporter ici le nom de toutes les personnes qui ont participé directement ou indirectement à ces travaux ; il y en a énormément.

Mes pensées vont aux occupants du bâtiment A du CSTB de Grenoble qui ont partagé mon quotidien et que je quitte à regret. Quelques pensées particulières pour mes anciens partenaires de bureau envers qui je conserve une grande sympathie.

Je remercie également toute l'équipe du laboratoire MSME de m'accueillir et me permettre de continuer sur cet élan.

Enfin, je dédie cette thèse à ma famille pour son soutien.

Pierre Ropars

Résumé étendu

Contexte et objectif

Dans le contexte actuel les transports ferroviaires sont une solution au problème posé à l'organisation de nos villes. Malheureusement ce mode de transport utilise des machines qui génèrent des vibrations significatives dans le sol. Celles-ci se transmettent aux parois des bâtiments proches qui à leur tour génèrent du bruit à l'intérieur des logements. Bien que les niveaux vibratoires engendrés ne représentent généralement pas de danger pour la structure elle-même, ils peuvent être suffisamment élevés dans les bâtiments pour gêner les habitants.

Il est donc souhaitable d'anticiper les niveaux vibratoires dans le bâtiment avant sa construction. Pour ce faire plusieurs étapes sont nécessaires : la caractérisation de la source (train+voies+sol), l'évaluation de la propagation dans le sol, l'évaluation de l'interaction sol-structure, celle de la propagation dans le bâtiment, et enfin la réémission par le bâtiment de ces vibrations dans la gamme de fréquences et modes de vibrations perceptibles par l'être humain. Dans cette dernière étape deux sources de gênes se distinguent, les vibrations des planchers et le rayonnement des parois dans les logements.

L'objectif de ce travail de thèse est la mise au point d'un outil de prédiction des niveaux vibratoires dans un bâtiment soumis à une sollicitation ferroviaire par le sol. Sous peine d'être irréalisable, un tel objectif doit être précisé. Il peut se décomposer en trois grandes parties : l'excitation, la modélisation de la transmission par les fondations et celle de la réponse du bâtiment. Chacune de ces étapes est traitée séparément dans la méthodologie présentée par ce document.

Méthodologie adoptée

Pour la modélisation du problème de la transmission au bâtiment des vibrations d'origine ferroviaire deux grandes classes se distinguent : les méthodes directes consistant à modéliser l'ensemble sol-fondation-structure et les méthodes de sous-structuration. Les méthodes directes ne sont généralement applicables qu'au prix d'une représentation schématique de la structure du bâtiment étudié. A l'inverse, les méthodes de sous-structuration permettent une modélisation fidèle dans laquelle chaque partie peut être représentée au mieux, y compris en prenant en compte les incertitudes de modélisation. Nous utilisons donc une telle méthode, appelée "méthode des mobilités" [49, 45], dans laquelle le problème est décomposé en deux sous-structures.

La première contient le sol et les fondations du bâtiment, c'est la sous-structure qui contient l'excitation, en conséquence elle est appelée Source. La deuxième se compose du

bâtiment et porte le nom de Récepteur. Leurs comportements sont caractérisés par leurs mobilités déterminées sur leurs interfaces communes. Cette grandeur, appelée également admittance, représente le rapport de la vitesse sur la force résultante en un point de la zone commune à la Source et au Récepteur. L'excitation globale du problème est traduite par la vitesse libre, observée à l'endroit où les mobilités sont déterminées. Elle représente la vitesse induite sur la zone de contact entre les deux sous-structures lorsque l'excitation est appliquée au système Source découplé du système Récepteur.

Lorsque les mobilités de la Source et du Récepteur ainsi que la vitesse libre sont connues, les vitesses et forces appliquées, ainsi que la puissance transmise via les zones de contact peuvent être déterminées. Le résultat final est déterminé par l'application de l'un ou l'autre de ces éléments sur l'interface du Récepteur découplé de la Source.

La méthode des mobilités ne comporte pas de difficulté particulière dans son principe. Par contre, l'obtention des mobilités et de la vitesse libre peut s'avérer délicate. Cela est particulièrement vrai pour le système Source qui nécessite lors de sa caractérisation de prendre en compte l'interaction sol-structure. De même la détermination de la vitesse libre nécessite de considérer l'excitation réelle du problème, la propagation dans le sol et l'interaction sol-structure. Face à ces difficultés, nous utilisons une méthodologie prenant en compte successivement chacune de ces différentes problématiques.

La première étape consiste à modéliser l'excitation du problème. Le traitement complet de l'excitation dans toute sa complexité n'est pas abordé. Les sources de vibration traitées dans ce mémoire sont des forces ponctuelles ou des lignes de forces appliquées à la surface du sol. Ces sources sont toutefois calibrées sur des mesures in situ réalisées au passage d'un train afin de s'approcher au mieux de la situation réelle. La technique de calibration repose sur la détermination d'une fonction de transfert entre une force de spectre constant et une force permettant de retrouver l'accélération mesurée en un point particulier. Le type de sol est par ailleurs choisi afin de représenter plus fidèlement les mesures en plusieurs positions du sol. La comparaison entre plusieurs types de calibration montre que la prise en compte de l'expansion géométrique permet de représenter plus fidèlement les différentes mesures. La majeure partie du spectre de l'excitation obtenue par calibration est contenue dans les tiers d'octaves $60 - 80\text{Hz}$.

L'étape suivante est naturellement la détermination de la mobilité des fondations du bâtiment. Celle-ci est déterminée à l'aide du code Mefissto [25, 26], pour des géométries en 2 ou 2.5 dimensions. Ce code est dédié à l'interaction sol structure et permet de coupler la méthode des éléments de frontière pour représenter le domaine du sol et la méthode des éléments finis pour le domaine de la fondation. Dans cette représentation la zone de contact est discrétisée en plusieurs points. Or une condition pour que l'ensemble des calculs de la méthode des mobilités soit cohérent est que l'interface présente un mouvement de corps rigide.

Pour simplifier cette approche nous remarquons que, dans la gamme de fréquences du problème, la surface étudiée reste plane et que ses dimensions sont petites faces aux longueurs d'ondes. Cette propriété du comportement de l'interface est importante pour pouvoir représenter le mouvement de l'interface par un mouvement de corps rigide. Compte tenu de ce résultat, il est possible d'utiliser différents modèles permettant de représenter la

Source et le Récepteur.

La méthodologie adoptée suppose évidemment certaines simplifications et en particulier que les vibrations restent dans le domaine viscoélastique linéaire. Il suffira pour justifier cette hypothèse de noter que celle-ci est adoptée depuis fort longtemps dans le domaine du génie parasismique malgré l'existence d'amplitudes de vibrations largement plus importantes produisant des non-linéarités d'autant plus élevées.

Une autre simplification réside dans la modélisation par des représentations bidimensionnelles de type 2D ou 2.5D, qui induit des calculs donnant des résultats dans des temps raisonnables. Il convient de noter que les nouvelles méthodes rapides d'éléments de frontière par la technique des multipôles (Fast Multipole BEM ou FMBEM) permettent déjà de traiter des problèmes tridimensionnels dans le domaine du génie parasismique [94].

Enfin une dernière simplification est apportée au niveau de l'interface entre le sol et la structure, l'adhésion à cette interface étant supposée parfaite et n'autorisant pas le glissement.

Dans un troisième temps la méthodologie consiste à déterminer la mobilité du système Récepteur. Ce document présente trois techniques de modélisation de bâtiment : la méthode des éléments finis en 3, 2.5 et 2 dimensions, une approche ondulatoire bidimensionnelle et une approche mixte SEA-Ondulatoire. Toutes possèdent leurs avantages et le choix de l'une ou l'autre dépend essentiellement de la géométrie. Une approche ondulatoire permet un calcul rapide mais reste limitée aux géométries simples en deux dimensions. La méthode des éléments finis, pour laquelle les résultats sont similaires à l'approche ondulatoire, permet d'étudier n'importe quelle géométrie mais demande parfois des temps de calculs importants. La SEA, pour des raisons de densité modale pour les fréquences étudiées, ne peut représenter que des problèmes en trois dimensions relatifs aux mouvements de flexion.

Ces trois modèles peuvent être utilisés pour obtenir les mobilités du bâtiment ainsi que pour évaluer le résultat final du problème. Le calcul des mobilités avec l'approche SEA n'est cependant pas recommandé.

Comme annoncé, chacune de ces trois étapes peut être complétée par la prise en compte d'incertitudes propres au phénomène étudié. Parmi celles déjà mentionnées jusqu'ici, le comportement du sol est certainement celui qui est caractérisé par le plus d'incertitudes. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à décrire la variabilité statistique des mobilités du système Source par un modèle stochastique non-paramétrique. La construction du modèle repose sur une méthode à variables cachées qui permet d'identifier un système mécanique comportant un nombre fini de paramètres dont la réponse est proche de celle du sol. La variabilité des paramètres définissant le sol affecte aussi le calcul de la vitesse "libre", mais ce dernier point n'a pas été abordé.

Lorsque les mobilités et la vitesse libre sont déterminées, les vitesses et forces à l'interface Source-Récepteur, dites de contact, peuvent être calculées. La puissance injectée est alors donnée par la partie réelle effective du produit de ces deux grandeurs. Le résultat final est obtenu en imposant la vitesse de contact, présentée précédemment, au système Récepteur découplé du système Source. A cette fin il est équivalent d'imposer la force de contact. Pour les modèles SEA, la donnée d'entrée est la puissance injectée.

Résultats disponibles et perspectives

Au delà des difficultés évoquées, la méthode n'est pas limitée à une géométrie particulière. Dans ce document la plupart des résultats sont en deux dimensions, mais quelques cas en 2.5 dimensions sont aussi abordés. Dans ceux-ci, le post-traitement nécessaire est plus conséquent.

A titre d'exemple, la Figure 1 montre, pour un bâtiment de six étages en deux dimensions, la comparaison entre une évaluation directe du niveau de vitesses moyennes d'une dalle et le niveau obtenu par notre approche. Le calcul direct est rendu possible par la géométrie simple et bidimensionnelle du problème. Les résultats sont calibrés sur une mesure en champs libre des vibrations générées par le passage d'un lourd train de fret.

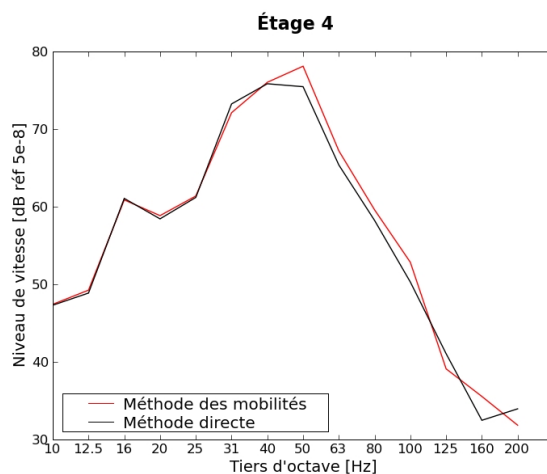


FIGURE 1 – Comparaison : approche directe, méthode des mobilités, de la vitesse de flexion d'une dalle d'un bâtiment de six étages.

Table des matières

Introduction	1
I Méthode des mobilités	7
Avant-propos	8
I.1 Principe physique	9
I.1.1 Force et Vitesse de contact	9
I.1.2 Puissance injectée	10
I.1.3 Interfaçage par la méthode des mobilités	11
I.1.4 Formulation Générale	11
I.1.5 Cas particuliers	13
I.2 Étude bibliographique sur la mobilité et ses applications	14
I.2.1 Définition de la mobilité	14
I.2.2 Fonction caractéristique de Source et Fonction de couplage	15
I.2.3 Mobilités effectives	18
I.2.4 La méthode des mobilités pour l'isolation	20
I.3 Simulations numériques	21
I.3.1 Cas d'un système simple : une poutre semi-infinie	21
I.3.2 Sol semi-infini et structure 2D	23
Conclusion du chapitre	31
II Système Source	
Mobilités - Vitesses Libres - Calibration	33
Avant-propos	34
II.1 Interaction sol-structure et impédances de fondation	35
II.1.1 Définitions	35
II.1.2 Impédance de fondation	37
II.2 Calcul des mobilités	40
II.2.1 Formes des fondations adoptées	40
II.2.2 Procédure de calcul des mobilités	41
II.2.3 Vérifications	44
II.2.4 Mobilités 2D	47
II.2.5 Mobilités 2.5D	48
II.3 Calcul de la vitesse libre de la Source	54
II.3.1 Vitesses libres 2D	54
II.3.2 Vitesse libre 2.5D	55
II.4 Calibration sur des mesures accélérométriques	57
II.4.1 Recalage de l'excitation sur une mesure accélérométrique	57
II.4.2 Recalage des propriétés du sol	59
Conclusion du chapitre	61

III	Système Récepteur	63
	Mobilités & Propagation	63
	Avant-propos	64
III.1	Modélisation par Éléments finis	65
III.1.1	Modèle utilisé	65
III.1.2	Interfaçage par la méthode des mobilités	67
III.2	Modèle ondulatoire bidimensionnel	68
III.2.1	Méthode utilisée	68
III.2.2	Calculs avec ou sans corrélation	75
III.3	Modèle Mixte S.E.A.-Ondulatoire	79
III.3.1	La S.E.A.	79
III.3.2	Modèle de Hassan	84
III.4	Comparaison des modèles : un bâtiment de six étages	89
	Conclusion du chapitre	92
IV	Mobilités Stochastiques des fondations	93
	Avant-propos	94
IV.1	Principe du calcul de la mobilité stochastique	95
IV.2	Principales définitions	96
IV.2.1	Forme des matrices du modèle à variables cachées	96
IV.2.2	Décomposition du problème d'identification	97
IV.3	Première étape et problème de minimisation	98
IV.3.1	Écriture du problème	98
IV.3.2	Résolution du problème de minimisation	101
IV.4	Deuxième étape : identification des sous-matrices	103
IV.5	Construction des impédances et mobilités stochastiques	105
IV.5.1	Ensemble des matrices aléatoires	105
IV.5.2	Modèle des matrices d'impédances non-paramétriques	106
IV.6	Résolution des instabilités	107
IV.6.1	Résolution à partir du théorème de Karitonov	107
IV.6.2	Résolution systématique	111
IV.6.3	Optimisation sur la fonction poids w	114
IV.7	Application	117
IV.7.1	Présentation du cas traité : étude d'une fondation 2D	117
IV.7.2	Vitesses stochastiques moyennes de dalles	119
	Conclusion du chapitre	121
V	Applications	123
	Avant-propos	124
V.1	Comparaison des couplages 2D-2D, 2.5D-2.5D et 2.5-3D	124
V.1.1	Maillage et simulation en deux dimensions	124
V.1.2	Simulations en 2.5 dimensions	125
V.1.3	Maillage et simulations en 2.5/3 dimensions	126
V.1.4	Comparaison entre différentes approches	128
V.2	Application dans le cadre d'une étude expérimentale	129
V.2.1	Calibration sur les mesures	129

V.2.2	Études 2D	130
V.3	Études paramétriques réalisées par des calculs 2D	134
V.3.1	Vérification des mobilités	135
V.3.2	Comparaisons	136
V.3.3	Conclusions	140
	Conclusion du chapitre	141
Conclusion générale		143
A ÉCRITURE GÉNÉRALE DE LA PUISSANCE		149
A.1	ÉQUIVALENCE DES RELATIONS (I.8) ET (I.12)	150
A.2	UTILISATION DE L'EXPRESSION (I.12)	151
B CALCUL DES MOBILITÉS D'UNE POUTRE FINIE OU SEMIE-INFINIE		153
B.1	MOBILITÉ LONGITUDINALE	154
B.1.1	CAS D'UNE POUTRE SEMIE-INFINIE	154
B.1.2	CAS D'UNE POUTRE FINIE	154
B.2	MOBILITÉ DE FLEXION	155
B.2.1	CAS D'UNE POUTRE SEMIE-INFINIE	155
B.2.2	CAS D'UNE POUTRE FINIE	156
C INTRODUCTION À MEFISSTO		159
C.1	MEFISSTO 2D	160
C.1.1	ÉQUATIONS DE PROPAGATION	160
C.1.2	MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS	162
C.1.3	MÉTHODE DES ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE	165
C.1.4	COUPLAGE ÉLÉMENTS FINIS - ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE	167
C.2	MEFISSTO 2.5D	168
C.2.1	DÉCOMPOSITION DE L'INTERFACE SOURCE-RÉCEPTEUR	169
C.2.2	NOTE SUR LA MOYENNE	170
C.2.3	VITESSE LIBRE	171
C.2.4	COMPOSANTES DE LA MOBILITÉ SUR UNE ZDC	173
C.2.5	MOBILITÉ COMPLÈTE	175
C.2.6	VITESSE ET FORCE DE CONTACT	176
Références		177

Introduction

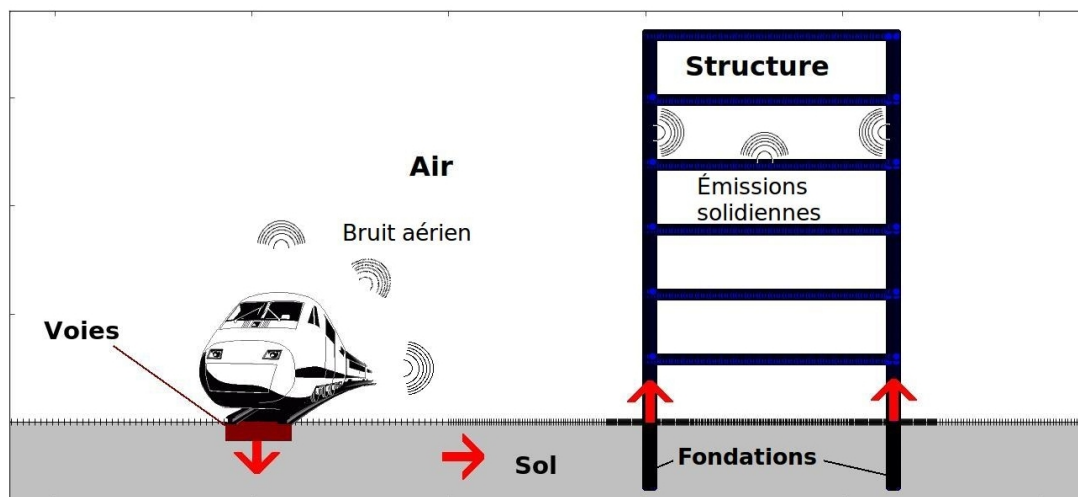


FIGURE 2 – Représentation générale du problème.

Contexte général

La problématique

Dans le développement urbain actuel, les transports constituent une des clés de l'organisation de nos villes. Parmi les modes de transport existants, le transport ferroviaire permet de disposer de réseaux fiables et réguliers. Malheureusement ce mode de transport utilise des machines qui génèrent des vibrations significatives dans le sol. Celles-ci se transmettent aux parois des bâtiments proches qui à leur tour génèrent du bruit à l'intérieur des logements. Or la densification de nos villes oblige ces infrastructures à être de plus en plus proches de nos habitations.

Bien que les niveaux vibratoires engendrés ne représentent généralement pas de danger pour la structure elle-même, ils peuvent être suffisamment élevés dans les bâtiments pour gêner les habitants. Ces gênes peuvent fortement impacter la vie des personnes qui y sont quotidiennement exposées. Actuellement il n'y a pas en France de législation en la matière. Ces niveaux de gênes sont néanmoins caractérisés par certaines normes dans d'autres pays [104, 103]. Un exemple de ces indicateurs est donné dans l'article [60], abordé plus en détails dans le dernier chapitre de ce document.

Il est donc souhaitable d'anticiper les niveaux vibratoires dans le bâtiment avant sa construction. Pour ce faire plusieurs étapes sont nécessaires : la caractérisation de la source (train+voies+sol), l'évaluation de la propagation dans le sol, l'évaluation de l'interaction sol-structure, celle de la propagation dans le bâtiment, et enfin la réémission par le bâtiment de ces vibrations dans la gamme de fréquences et modes de vibrations perceptibles par l'être humain. Dans cette dernière étape deux sources de gênes se distinguent, les vibrations des planchers et le rayonnement des parois dans les logements. Chacune de ces étapes représente à elle seule plusieurs phénomènes physiques dont la modélisation est complexe. Néanmoins, des études spécifiques à toutes ces étapes sont disponibles dans la littérature.

Le problème global est généralement étudié point par point. Néanmoins certains auteurs proposent une étude complète où presque tous ces aspects sont traités. En voici trois exemples. L'étude Convurt a modélisé l'effet d'une voie de RER passant sous des logements

universitaires. Décrite dans la thèse de Arnst [92] cette étude met en œuvre un modèle d'éléments finis et de frontières. Une autre approche est proposée par Hunt [24] qui a développé une modélisation quasi analytique des voies et d'un bâtiment. Plus simplement, Ljunggren propose un modèle de décroissance de niveaux entre les étages d'un bâtiment soumis aux vibrations provenant d'un tunnel ferroviaire [39]. Dans une approche analytique de l'ensemble du problème, un des points importants est la définition précise d'excitation constituée par les convois passant non loin des bâtiments.

La source

Dans une première approche, les principales caractéristiques de l'excitation sont définies par le type de voie, ainsi que par la vitesse et la masse du véhicule. De manière générale, plus le véhicule est lourd et rapide et plus les niveaux engendrés sont élevés. Le type de voie joue un rôle moins immédiat car la transmission au sol de l'énergie dépend de sa conception et de sa qualité.

Il faut tout d'abord considérer la structure, composée des deux rails, des traverses, de la présence éventuelle d'un ballast et d'une dalle rigide. S'ajoute à cela un éventuel système d'isolation placé entre les rails et les traverses constitué généralement de plots résilients. Le type de sol sur lequel cette structure repose modifie de façon significative la réponse de l'ensemble. Tous ces éléments doivent être pris en considération [22] pour notamment obtenir une bonne évaluation de l'atténuation/amplification que crée l'infrastructure.

Parallèlement, les défauts sur les rails et les roues (plats, trous, ...) génèrent des vibrations spécifiques à leurs types et leurs tailles. Ce sont des sources importantes de bruits et de vibrations [65].

Plusieurs ouvrages offrent une description complète des réseaux ferrés et des véhicules, c'est le cas de [81]. La gamme de fréquences dans laquelle ce type de source émet des vibrations y est justifiée. Un modèle en deux dimensions de l'ensemble des éléments d'une voie ferrée excitée par une masse non-suspendue est donné dans [17]. Plus spécifiquement, le tramway a fait récemment l'objet de recherches dans les travaux de thèse de Maldonado [98].

Les caractéristiques du véhicule sont également déterminantes pour l'émission des bruits aériens et solidiens. L'ensemble de l'infrastructure est excité par les roues du train se déplaçant sur les rails ; celles-ci constituent autant de masses "ponctuelles" qui déforment les rails. Elles supportent le train via des suspensions qu'il faut prendre en compte pour caractériser l'excitation. Les différentes sources de bruit solidiennes et aériennes du véhicule sont données dans [13]. L'effet du déplacement rectiligne d'une force appliquée en surface d'un demi-espace homogène est étudié, par exemple, dans [2, 91].

Pour des voies enterrées l'infrastructure peut isoler des vibrations. Cela est attribué à la différence d'impédances entre les matériaux de construction du tunnel (pierre, béton) et le sol [30]. Un tunnel peut également amplifier certaines fréquences et jouer le rôle de guide pour les ondes perçues. Les niveaux les plus forts sont atteints autour de la fréquence 63 Hz [15]. De plus, le comportement d'un tunnel est fonction du type de voie [14]. L'ensemble des paramètres importants dans l'émission et la propagation des vibrations d'une voie ferrée enterrée est donné dans [44].

En général, il est possible de distinguer deux sortes de sources en surface : celles pour lesquelles la vitesse du train est inférieure à la célérité des ondes de Rayleigh dans le sol et

celles pour lesquelles la vitesse est supérieure à cette célérité [42, 69]. Ce point ne concerne toutefois que les trafics à grande vitesse. Comme cette thèse est concernée en premier lieu par le trafic urbain, la vitesse de la source sera toujours largement inférieure à la célérité des ondes de Rayleigh.

Objectif et contour de la thèse

L'objectif de ce travail de thèse est la mise au point d'un outil de prédiction des niveaux vibratoires dans un bâtiment soumis à une sollicitation ferroviaire par le sol. Comme annoncé dans le contexte général, un tel objectif doit être précisé. Il peut se décomposer en trois grandes parties : l'excitation, la modélisation de la transmission par les fondations et celle de la réponse du bâtiment.

Il a déjà été dit que l'excitation ferroviaire est d'une grande complexité. Dans tout ce mémoire, l'excitation sera constituée soit par une force ponctuelle appliquée à la surface du sol, soit par une ligne de forces appliquée également en surface. Cette représentation suppose en particulier que l'excitation soit suffisamment éloignée du bâtiment étudié. Le niveau d'approximation induit par la simplification ainsi apportée peut être atténué en calibrant ces forces pour reproduire au mieux les effets observés expérimentalement.

A l'autre extrémité de la transmission des vibrations, les aspects liés au rayonnement acoustique des parois du bâtiment, qui peuvent être déduits des niveaux vibratoires des dalles et planchers [85], ainsi que ceux liés à la gêne occasionnée par les vibrations n'ont pas été abordés. Le travail réalisé dans ce mémoire se limite à la prévision des vibrations engendrées dans la structure du bâtiment.

En résumé, le mémoire est consacré à la modélisation de la réponse d'une structure soumise à l'excitation transmise par les fondations et en provenance d'une excitation ferroviaire représentée par une force ponctuelle ou par une ligne de force.

Méthodologie adoptée

Parmi les différentes méthodologies adoptées dans la littérature pour la modélisation de la transmission au bâtiment des vibrations d'origine ferroviaire, on peut distinguer deux grandes classes : les méthodes directes consistant à modéliser l'ensemble (sol + fondation + structure) et les méthodes de sous-structuration. De manière simplifiée, on peut considérer que les méthodes directes ne peuvent être appliquées qu'au prix d'une représentation assez schématique de la structure du bâtiment étudié.

Par ailleurs, si l'on se réfère au génie parasismique, les méthodes de sous-structuration sont utilisées depuis des décennies, découplant l'étude de la propagation dans le sol et la modélisation de la structure. Leurs avantages sont nombreux :

- possibilité de sous-traiter les problèmes séparés à des prestataires distincts.
- possibilité d'utiliser des méthodes modales pour la structure.
- mise en œuvre de temps de calcul modérés
- possibilité de modéliser les incertitudes d'une sous-structure, comme effectué ici au Chapitre V.

La difficulté majeure de l'utilisation de ces méthodes réside dans le stockage des variables permettant d'interfacer les deux sous-structures, qui nécessite un grand soin dans la

mise en œuvre.

Compte tenu de ce constat, la méthode adoptée dans ce mémoire, dite “méthode des mobilités”, est une méthode par sous-structuration de principe similaire aux méthodes par sous-structuration utilisées dans le génie parasismique. Une première sous-structure est constituée par le sol et la fondation du bâtiment. La partie du bâtiment située au dessus de la fondation constitue la deuxième sous-structure.

La modélisation de la première sous-structure sera effectuée en utilisant un code de calcul permettant la modélisation de l’excitation dans un espace de sol semi-infini et de la fondation reposant sur le sol. Le domaine contenant le sol est représenté par la méthode des équations intégrales et le domaine contenant la fondation est représenté par la méthode des éléments finis. Le code de calcul (dénommé Mefissto) permettant cette modélisation a été développé par Jean [25, 26] et offre une représentation soit en 2D (calcul plan) soit en 2.5D (calcul d’un ouvrage de grande longueur avec des sources ponctuelles ou situées parallèlement au bâtiment). En comparaison, la modélisation du domaine du sol par éléments finis aurait conduit à un nombre de degrés de liberté prohibitif car, si ce type de méthode reste viable aux basses fréquences du domaine du génie parasismique, elle ne l’est plus dans le domaine des vibrations atteignant plusieurs centaines de hertz.

Dans ce mémoire, l’interaction entre les deux sous-structures est modélisée par l’intermédiaire de la “mobilité” de chaque sous-structure, ce qui induit la dénomination de la méthode. La mobilité du domaine sol-fondation est en relation biunivoque avec “l’impédance” utilisée dans le domaine des basses fréquences en génie parasismique. Toutefois, les méthodes de représentation de l’impédance par des formules analytiques, souvent utilisées en génie parasismique [43, 101], ne sont plus applicables pour les vibrations de hautes fréquences.

La méthodologie adoptée suppose évidemment certaines simplifications et en particulier que les vibrations restent dans le domaine viscoélastique linéaire. Il suffira pour justifier cette hypothèse de noter que celle-ci est adoptée depuis fort longtemps dans le domaine du génie parasismique malgré l’existence d’amplitudes de vibrations largement plus importantes produisant des non-linéarités d’autant plus élevées. Une autre simplification réside dans la modélisation par des représentations bidimensionnelles de type 2D ou 2.5D, qui induit des calculs donnant des résultats dans des temps raisonnables. Il convient de noter que les nouvelles méthodes rapides d’éléments de frontière par la technique des multipôles (Fast Multipole BEM ou FMBEM) permettent déjà de traiter des problèmes tridimensionnels dans le domaine du génie parasismique [94]. Enfin une dernière simplification est apportée au niveau de l’interface entre le sol et la structure, l’adhésion à cette interface étant supposée parfaite et n’autorisant pas le glissement.

Structuration du mémoire

Dans le cadre qui vient d’être décrit, le premier chapitre de ce document décrit la méthode des mobilités. Celle-ci nous permet de découpler le problème en deux sous problèmes qui sont alors étudiés séparément. Développée dans les années 80, cette technique est originalement destinée à calculer la réponse d’une structure aux sollicitations apportées par des machines vibrantes résidant dans le bâtiment étudié [45]. Classiquement le sous-système contenant l’excitation est appelé Source et l’autre Récepteur. Cette méthode n’ajoute aucune

approximation et lorsque les systèmes Source et Récepteur sont parfaitement caractérisés, la réponse globale obtenue est exacte.

Le deuxième chapitre aborde la modélisation du système Source, c'est-à-dire celle de la propagation dans le sol et du comportement des fondations. Ce chapitre traite de ce fait de l'interaction sol-structure. La propagation dans les milieux sol et fondation est traitée en utilisant le code "Mefissto" précité. La représentation de l'excitation apportée par la voie ferrée est assurée en utilisant une calibration des simulations sur des mesures de vibration sur site induites par une source réelle (campagne Vibsolfret [60, 63]).

Dans le troisième chapitre, ce sont les modélisations de la superstructure qui sont présentées. Il existe bien des façons d'aborder un bâtiment et une comparaison des principales techniques utilisées pour le modéliser constituait un objectif partiel de ce mémoire. C'est pourquoi quatre méthodes ont été utilisées : un code d'éléments finis 3D (Nastran), un code d'éléments de frontières couplés à des éléments finis 2D et 2.5D (Mefissto) ainsi qu'une approche ondulatoire en deux dimensions et une approche mixte S.E.A.-ondulatoire. La SEA a été étudiée en utilisant un code nommé Catras, développé au CSTB, qui est dédié aux calculs SEA dans les bâtiments. Une comparaison des résultats obtenus avec chacune de ces méthodes est présentée à la fin du Chapitre III.

Avec les trois premières parties il est déjà possible de prédire les vibrations d'origine ferroviaire dans un bâtiment. Toutefois, il existe de nombreuses incertitudes qui peuvent entacher les résultats obtenus. Une incertitude importante réside dans la connaissance des propriétés de sol. Pour compléter l'approche et pour prendre en compte les approximations faites dans la modélisation du sol nous avons cherché à quantifier l'impact des incertitudes liées aux propriétés des sols de fondation sur la réponse du bâtiment. Le quatrième chapitre tente donc d'évaluer la partie des incertitudes liées aux mobilités des fondations. Pour ce faire, nous utilisons les résultats de thèse de Cottureau [95] qui sont basés sur la méthode des variables cachées et l'approche stochastique développée par Soize [55].

Enfin un cinquième et dernier chapitre présente plusieurs applications de notre approche utilisant la méthode des mobilités. Dans un premier temps une comparaison entre des résultats en 2, 2.5 et 3 dimensions est proposée pour un cas simple. Suite à cela nous présentons une étude paramétrique en deux dimensions basée sur la campagne de mesures Vibsolfret. Enfin, une courte étude paramétrique en deux dimensions sur l'impact des propriétés de sols est proposée.

Nota bene

Afin de compléter la liste des outils utilisés, il faut mentionner deux langages. La quasi-totalité des calculs effectués pour le traitement des données a été implémentée à l'aide du langage informatique *python* [109, 108]. Ce langage, sous licence libre, est présent dans les systèmes d'exploitations GNU-Linux les plus courants. Dans le même esprit ce document a été rédigé en $\text{\LaTeX}$ qui est un langage d'édition de texte également sous licence libre [106].

Chapitre I

Méthode des mobilités

Sommaire

Avant-propos	8
I.1 Principe physique	9
I.2 Étude bibliographique sur la mobilité et ses applications	14
I.3 Simulations numériques	21
Conclusion du chapitre	31

Avant-propos

Comme indiqué dans l'introduction, nous cherchons à obtenir une approche découplée, par sous-structures, du problème des vibrations d'origine ferroviaire transmises aux bâtiments. La décomposition est une étape essentielle qui conditionne tout le reste de la démarche. C'est pourquoi elle fait l'objet du premier chapitre de ce document.

L'approche par sous-structures qui va être utilisée permet de séparer en deux parties la géométrie relative au problème considéré. Ces deux parties sont composées d'une part du sol avec les fondations et d'autre part de la superstructure. Ce chapitre aborde le problème de leur couplage et notamment la détermination des vitesses présentes aux pieds de la superstructure avec et sans couplage, ainsi que des puissances transmises à la structure.

La méthode de sous-structuration, dite "méthode des mobilités", qui va être décrite dans ce chapitre permet justement de décrire les grandeurs physiques à l'interface entre deux systèmes vibrants [79, 45]. Grâce à cette méthode, de nombreux systèmes complexes peuvent être décomposés et les problèmes de vibrations sur de tels systèmes peuvent être résolus par l'intermédiaire de deux sous-problèmes plus simples. Cela a pour avantage de simplifier le problème global en découplant ses difficultés et de réduire l'étude globale lorsque l'une des sous-parties est déjà connue.

La plupart des études rapportées dans la littérature qui utilisent cette méthode traitent de machines vibrantes rattachées à une structure. Néanmoins, rien en théorie n'empêche cette approche de s'appliquer à notre problématique, rejoignant ainsi les nombreuses applications des méthodes utilisant la sous-structuration de systèmes complexes, comme par exemple la technique des "impédances" utilisée à basses fréquences en génie parasismique.

Pour utiliser la méthode des mobilités il est nécessaire de connaître les comportements vibratoires des sous-systèmes choisis pour "découper" le problème global. Classiquement le sous-système sur lequel est appliquée l'excitation est appelé Source, et l'autre sous-système est appelé Récepteur. Dans ce document, la Source est presque toujours un sol dans lequel sont incluses des fondations et le Récepteur désigne une structure sans les fondations. Une fois que les sous-systèmes sont définis, la méthode se décompose en trois étapes :

- 1) la détermination des caractéristiques vibratoires des deux sous-systèmes découplés par l'intermédiaire de leurs mobilités,
- 2) la détermination de la vitesse du système Source découplé à l'emplacement de l'interface Source-Récepteur lorsque l'excitation du problème global est appliquée,
- 3) le calcul des vitesses, forces présentes à interface ou des puissances transmises lorsque les deux sous-systèmes sont reliés.

Malgré la complexité des différentes opérations à réaliser, la méthode des mobilités est un outil puissant, car si les comportements des sous-systèmes sont parfaitement connus, les grandeurs obtenues à leur interface sont exactes (voir paragraphe I.3.1).

Lorsque l'ensemble des étapes (1 – 3) est achevé, la solution recherchée, par exemple la vitesse de flexion d'une dalle de la superstructure, se déduit des caractéristiques du sous-système concerné et de l'excitation appliquée à l'interface prenant en compte les caractéristiques des deux sous-systèmes.

Ce chapitre a pour but de présenter la méthode des mobilités ainsi qu'un aperçu des possibilités qu'elle offre. Dans une première partie nous présenterons le principe physique sur lequel elle repose. Puis une revue de la littérature portant sur la méthode des mobilités sera présentée et enfin quelques simulations numériques illustreront ce chapitre.

I.1 Principe physique

La méthode a pour but de décrire les phénomènes vibratoires à l'interface entre deux objets rigidement couplés à partir, des caractéristiques de ces mêmes objets découplés. La connaissance des comportements des deux parties du système est nécessaire car, sauf cas particuliers, le couplage modifie de façon significative les réactions des deux sous-systèmes.

Une étape importante est la prédiction des efforts et des vitesses présents à l'interface entre les deux objets. Si cette étape peut être réalisée, alors le flux de puissance à travers l'interface peut donc également être déterminé. C'est pourquoi la sous-section suivante montre comment les vitesses et les forces observables à l'interface entre les deux objets couplés peuvent être obtenus en étudiant séparément les deux sous-systèmes.

Le raisonnement proposé ci-dessous est emprunté à l'ouvrage de Cremer, Heckel et Hungar (1973) [79]. À partir des expressions de la vitesse et de la force, la puissance est ensuite obtenue dans sa forme la plus simple. Cela nous amènera à généraliser ces grandeurs complexes dans le domaine fréquentiel, puis à les décomposer pour tenter d'obtenir une écriture des composantes de la puissance permettant de séparer la contribution des différentes composantes de la vitesse libre. Enfin deux cas particuliers sont présentés.

I.1.1 Force et Vitesse de contact

En métrologie il est connu qu'un capteur posé sur un objet modifie son comportement vibratoire.

Supposons que la force d'excitation $F(t)$ appliquée à distance du point x_0 induise la vitesse v_L au point x_0 , comme illustré sur la Figure 1. Cette vitesse sera dans la suite appelée vitesse libre. Si l'on applique une force F_0 au point x_0 , cette force induit une vitesse v qui est reliée à F_0 par l'intermédiaire de l'impédance Z , soit : $v = F_0/Z$.

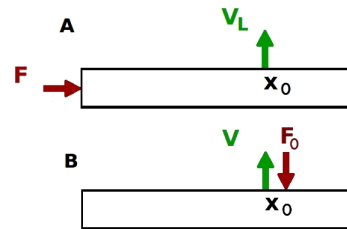


FIGURE I.1 – Schéma illustratif de la vitesse libre (A) et de l'impédance de Source (B).

Dans ce document nous utiliserons plus généralement la mobilité, ou admittance, qui se définit dans ce chapitre comme l'inverse de l'impédance et qui est notée $Y = \frac{1}{Z}$. Puisque ce sous-système contient l'excitation, l'impédance est dite impédance de source, notée Z_S , d'où :

$$Z_S = \frac{F_0}{v}$$

Si maintenant nous plaçons au point x_0 un récepteur tel qu'un capteur accélérométrique, le reste n'ayant pas changé, nous observons généralement une autre vitesse en x_0 . Appelée vitesse de contact, elle est représentée sur la Figure I.2 par la notation v_c .

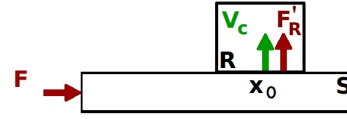


FIGURE I.2 – Schéma illustratif de la vitesse de contact.

Or cette vitesse peut être vue comme la vitesse libre diminuée de la part de vitesse transmise au Récepteur.

$$v_c = v_L - \frac{F'_R}{Z_S}$$

La force de réaction, noté ici F'_R peut se calculer à l'aide de l'impédance du récepteur Z_R et de la vitesse de contact par la relation $F'_R = Z_R v_c$. Après quelques manipulations simples la vitesse de contact s'écrit à l'aide du produit entre la vitesse libre et un terme faisant intervenir les mobilités des systèmes Source et Récepteur.

$$v_c = v_L \frac{Y_R}{Y_S + Y_R} \quad (\text{I.1})$$

Il faut noter que ce raisonnement est indépendant de l'excitation imposée. Naturellement, l'intérêt de la méthode est de calculer cette vitesse de contact avec une ou plusieurs vitesses libres induites par un ou plusieurs types d'excitations "réelles" pour lesquelles on cherche la réponse du système global.

La force de contact f_c est obtenue à partir de la définition de l'impédance du récepteur et peut donc s'exprimer à partir de la vitesses libre et des mobilités de la Source et du Récepteur.

$$f_c = \frac{v_L}{Y_S + Y_R} \quad (\text{I.2})$$

I.1.2 Puissance injectée

On appelle puissance injectée la puissance transmise par la Source au Récepteur. Dans notre représentation l'écoulement de l'énergie est conventionnellement établi dans ce sens car c'est le système Source qui contient l'excitation étudiée. Celle-ci est, de plus, supposée nettement supérieure à toutes autres formes d'excitations potentiellement présentes (bruits extérieurs, bruits des appareils de mesures, ...). Cela établit une convention de signe qui indique que si cette puissance est positive elle s'écoule dans le sens Source-Récepteur, ce qui est toujours le cas lorsque qu'il n'y a qu'un point de contact entre la source et le récepteur [46]. Si la puissance est négative alors elle s'écoule dans l'autre sens.

Dans ce document la puissance injectée est donnée par la partie effective de la puissance active, i.e. la moitié de la partie réelle de la puissance complexe. Cette dernière est notée Q et représente le produit $f_c^T v_c^*$. La partie imaginaire de Q est appelée partie réactive. Dans le cas simple présenté dans la précédente sous-section, c'est-à-dire correspondant à un seul degré de liberté (ddl) et un seul point de contact (pdc) sur l'interface source-récepteur, toutes

les grandeurs de (I.1) et (I.2) sont des complexes scalaires, la puissance injectée s'écrit alors [68] :

$$P = \frac{1}{2} \Re(f_c^T v_c^*) = \frac{1}{2} |v_L|^2 \frac{\Re(Y_R)}{|Y_S + Y_R|^2} \quad (I.3)$$

Il faut noter qu'en général les mobilités sont calculées à partir de vitesses considérées comme ponctuelles. En réalité, la transmission des efforts s'effectue à travers des surfaces. L'approximation implicite adoptée dans le concept de "mobilité ponctuelle" est que les dimensions des surfaces réalisant le transfert des efforts sont largement inférieures à la plus petite longueur d'onde rencontrée. Comme on le verra dans ce qui suit, les équations (I.1), (I.2) et (I.3) se généralisent très bien au cas général où le nombre de degrés de liberté présents à l'interface est quelconque. Cependant il faudra prendre en compte que dans la réalité une partie des composantes des mobilités et/ou des vitesses sont très difficiles à mesurer, voire inaccessibles.

I.1.3 Interfaçage par la méthode des mobilités

Pour obtenir la réponse du système global il existe plusieurs possibilités. Le choix dépend essentiellement de la méthode utilisée pour modéliser le système qui contient l'emplacement de l'observation, en général le Récepteur. Celui-ci doit être excité par l'une des grandeurs calculées à l'interface Source-Récepteur. En particulier, il est possible d'imposer soit la force de contact, soit la vitesse de contact. Les deux choix sont équivalents. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que lorsque la vitesse de contact est imposée, la force résultante sur la zone de contact, compte tenu de la présence à l'interface de l'impédance du Récepteur, est donnée par :

$$f = v_c / Y_R = f_c \quad (I.4)$$

De même lorsque le choix d'imposer la force de contact est adopté, la vitesse résultante sur la zone de contact est telle que :

$$v = f_c Y_R = v_c \quad (I.5)$$

I.1.4 Formulation Générale

Interfaces constituées de plusieurs zones

Dans le cas général, l'interface Source-Récepteur peut posséder plusieurs zones distinctes. Chaque zone sera traitée comme rigide et donc caractérisée par trois degrés de liberté de translation et trois degrés de liberté de rotation, c'est-à-dire six degrés de liberté au total, soit $N_{ddl} = 6$. Dans la suite, nous appellerons ces zones "points de contact" ou "zones de contact", en nombre N_{pdc} . La puissance injectée peut toujours se calculer à l'aide des vitesses et des forces de contacts mais celles-ci sont maintenant des vecteurs de dimension $N_{ddl} \times N_{pdc}$ composantes. Ces deux grandeurs sont obtenues à l'aide du même raisonnement

que celui exposé au premier paragraphe de ce chapitre et s'écrivent maintenant sous forme de produits de matrices [68] :

$$(f_c) = ([Y_S] + [Y_R])^{-1}(v_L) \quad (\text{I.6})$$

$$(v_c) = [Y_R]([Y_S] + [Y_R])^{-1}(v_L) \quad (\text{I.7})$$

Dans ces conditions l'expression de la puissance injectée est :

$$Q = (v_L)^T ([Y_S]^T + [Y_R]^T)^{-1} [Y_R]^* ([Y_S]^* + [Y_R]^*)^{-1} (v_L)^* \quad (\text{I.8})$$

$$P = \frac{1}{2} \Re \{ (v_L)^T ([Y_S]^T + [Y_R]^T)^{-1} [Y_R]^* ([Y_S]^* + [Y_R]^*)^{-1} (v_L)^* \} \quad (\text{I.9})$$

où les vitesses libres sont des vecteurs de dimension égale à $N_t = N_{ddl} \times N_{pdc}$ et les mobilités des matrices de taille $N_t \times N_t$.

Décomposition de la puissance transmise pour un cas à deux degrés de liberté

La puissance transmise au récepteur se décompose naturellement suivant les degrés de liberté de la vitesse de contact et de la force de contact. Toutefois, un des objectifs de la méthode des mobilités repose sur l'obtention de résultats à partir des impédances des sous-structures et de la vitesse libre. Il est donc important de séparer dans la puissance transmise les termes induits par les différentes composantes de la vitesse libre. Dans ce but, cette sous-section montre comment il est possible de répartir la puissance transmise de la Source au Récepteur entre différents termes faisant intervenir les degrés de liberté de la vitesse libre.

Pour illustrer cette remarque, nous présentons l'étude d'un cas simple correspondant à une poutre semi-infinie en flexion dont une partie joue le rôle de la Source et l'autre celui du Récepteur. Ces sous-systèmes sont reliés par deux degrés de liberté, une translation (η) et une rotation (α), et un seul point de contact sur leur interface commune. Les mobilités et vitesses utilisées s'écrivent :

$$v_L = \begin{pmatrix} \eta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad Y_X = \begin{bmatrix} Y_X^{F\eta} & Y_X^{F\alpha} \\ Y_X^{M\eta} & Y_X^{M\alpha} \end{bmatrix}$$

$$[Y_S + Y_R]^{-1} = Y_{SR}^{-1} = Z_{SR}$$

où les indices F , M , η et α représentent respectivement la force appliquée, le moment appliqué, les vitesses de flexion et de rotation et X prend la forme S pour la Source et R pour le Récepteur.

La puissance se calcule en déroulant la relation (I.9) et donne :

$$Q = (\eta Z_{SR}^{F\eta} + \alpha Z_{SR}^{F\alpha}) ((Y_R^{F\eta*} Z_{SR}^{F\eta} + Y_R^{F\alpha*} Z_{SR}^{M\eta*}) \eta^* + (Y_R^{F\eta*} Z_{SR}^{F\alpha} + Y_R^{F\alpha*} Z_{SR}^{M\alpha*}) \alpha^*)$$

$$+ (\eta Z_{SR}^{M\eta} + \alpha Z_{SR}^{M\alpha}) ((Y_R^{M\eta*} Z_{SR}^{F\eta} + Y_R^{M\alpha*} Z_{SR}^{M\eta*}) \eta^* + (Y_R^{M\eta*} Z_{SR}^{F\alpha} + Y_R^{M\alpha*} Z_{SR}^{M\alpha*}) \alpha^*)$$

Cette expression peut se développer (en prenant Z_{SR} noté Z et Y_R noté Y) sous la forme :

$$Q = |\eta|^2 (|Z^{F\eta}|^2 Y^{F\eta*} + Z^{F\eta*} Z^{M\eta} Y^{F\alpha*} + Z^{M\eta*} Z^{F\eta} Y^{F\eta*} + |Z^{M\eta}|^2 Y^{F\alpha*})$$

$$+ \eta^* \alpha (Z^{F\eta*} Z^{F\alpha} Y^{F\eta*} + Z^{F\eta*} Z^{M\alpha} Y^{F\alpha*} + Z^{M\eta*} Z^{F\alpha} Y^{F\eta*} + Z^{M\eta*} Z^{M\alpha} Y^{F\alpha*})$$

$$+ |\alpha|^2 (|Z^{F\alpha}|^2 Y^{M\eta*} + Z^{F\alpha*} Z^{M\alpha} Y^{M\alpha*} + Z^{M\alpha*} Z^{F\alpha} Y^{M\eta*} + |Z^{M\alpha}|^2 Y^{M\alpha*}) \quad (\text{I.10})$$

$$+ \alpha^* \eta (Z^{F\alpha*} Z^{F\eta} Y^{M\eta*} + Z^{F\alpha*} Z^{M\eta} Y^{M\alpha*} + Z^{M\alpha*} Z^{F\eta} Y^{M\eta*} + Z^{M\alpha*} Z^{M\eta} Y^{M\alpha*})$$

dans laquelle il est visible que la puissance peut se décomposer en quatre parties différentes. Si l'on considère les deux premiers termes, ils correspondent à la partie de la puissance transmise par l'intermédiaire du degré de liberté de translation et les deux derniers à la partie de la puissance transmise par l'intermédiaire du degré de liberté de rotation.

Lorsque les mobilités croisées sont nulles, c'est à dire lorsque les degrés de liberté sont découplés, la puissance injectée s'écrit :

$$Q = |\eta|^2 |Z_{RS}^{F\eta}|^2 Y_R^{F\eta*} + |\alpha|^2 |Z_{RS}^{M\alpha}|^2 Y_R^{M\alpha*} \quad (\text{I.11})$$

et l'on peut donc déterminer les parties de la puissance transmise correspondant à chaque degré de liberté.

Une expression analogue s'obtient lorsque l'interface comporte deux points de contact au lieu de deux degrés de liberté au même point, en remplaçant les degrés de liberté correspondants dans l'expression de la puissance transmise.

Pour un nombre quelconque de degrés de liberté, la relation générale (I.8) donnant la puissance transmise peut également s'exprimer comme (voir l'Annexe A.1) :

$$Q = v_L^{i*} Z_{RS}^{ip*} Y_R^{pm*} Z_{RS}^{mj} v_L^j \quad 1 < i, p, m, j < N_{ddl} \quad (\text{I.12})$$

où l'on adopte la convention d'Einstein pour la sommation des indices répétés et où N_{ddl} est le nombre de degrés de liberté du système.

Cas général

Lorsque ce calcul est réalisé avec plusieurs degrés de liberté et plusieurs points de contact, les mobilités sont des matrices de dimensions $N_{ddl} \times N_{pdc}$. L'expression des mobilités se met alors sous la forme d'une matrice carrée dont les composantes sont des sous-matrices carrées relatives, par exemple, à un transfert entre deux points de contact. Dans ce cas, les termes des sous matrices décrivent le comportement de la Source ou du Récepteur selon un ddl ou un couplage entre deux ddl. De même, la vitesse libre est un vecteur de $N_{ddl} \times N_{pdc}$ composantes disposées dans le même ordre.

Dès lors que toutes les sous-matrices Y^{nn} sont disposées de la même façon, les expressions (I.8) et (I.12) restent valides [68].

I.1.5 Cas particuliers

L'observation des relations (I.2) et (I.1) permet d'identifier deux cas particuliers.

Lorsque le Récepteur est beaucoup plus mobile que la Source, i.e. $|Y_R| \gg |Y_S|$, la relation (I.1) se simplifie :

$$v_c = v_L \frac{Y_R}{Y_S + Y_R} \simeq v_L \frac{Y_R}{Y_R} = v_L \quad (\text{I.13})$$

et la Source est dite "de vitesse". Le Récepteur n'influençant que très peu la Source, ce dernier est soumis à une vitesse proche de celle qui existerait sans sa présence.

A l'inverse, lorsque $|Y_R| \ll |Y_S|$, la relation (I.2) donne :

$$f_c = \frac{v_L}{Y_S + Y_R} \simeq \frac{v_L}{Y_S} = F_R \quad (\text{I.14})$$

où F_R est la force de réaction, au point de contact, appliquée sur la Source lorsque la vitesse en ce point est égale à la vitesse libre. On parle alors de "source de force" car la force de contact ne dépend quasiment que de la Source.

I.2 Étude bibliographique sur la mobilité et ses applications

Dans la littérature, la méthode des mobilités a inspiré de nombreux chercheurs dans de nombreux domaines. Ceux-ci concernent aussi bien l'importance des couplages entre degrés de liberté, que la façon de caractériser le système Source, ou encore les moyens à mettre en œuvre pour réduire la puissance injectée. Les quelques lignes qui suivent portent sur la définition des mobilités et donnent un aperçu des recherches publiées à ce jour dans ce contexte.

I.2.1 Définition de la mobilité

La mobilité peut être définie comme l'inverse de l'impédance, qui est un terme plus courant en physique. Chaque domaine physique possède une définition propre de l'impédance. En mécanique il s'agit du rapport entre une force, exercée ou résultante, et une vitesse, ou un déplacement associé, la dernière définition étant la plus utilisée dans le domaine du génie parasismique. La mobilité caractérise, comme son nom l'indique, la capacité de l'objet à vibrer sous l'action d'une force.

Dans la méthode des mobilités, la définition usuelle est le rapport de la vitesse ponctuelle sur la force exercée ; c'est la forme que nous utiliserons dans la majeure partie de ce document. Néanmoins, les fondations sont souvent caractérisées par une impédance calculée avec le déplacement. Pour faire la différence, les expressions utilisant le déplacement seront notées avec l'indice u alors que celles exprimant un rapport avec la vitesse n'auront pas d'indice particulier.

Il existe quatre formes de mobilités différentes, chacune d'entre elles relie une force et une vitesse différentes.

- 1 La plus facile à définir et à utiliser est la **mobilité d'entrée** ou "point mobility", définie par Cremer & al [79] (p.241). Elle relie une vitesse et une force portées par le même degré de liberté et se situant au même endroit.
- 2 La **mobilité de couplage** relie une force appliquée sur un degré de liberté à une vitesse portée par un autre degré de liberté observées au même point.
- 3 La **mobilité de transfert** est définie comme le rapport d'une vitesse en un point sur la force appliquée sur le même degré de liberté en un autre point.
- 4 Enfin la mobilité reliant une vitesse et une force portées par deux ddl différents en deux points de l'espace différents est appelée **mobilité de couplage transféré**.

Pour rendre compte de toutes ces possibilités la mobilité s'écrit avec quatre indices :

$$Y_{ij}^{AB} = \frac{v_j(x_B)}{F_i(x_A)} \quad (\text{I.15})$$

où $v_j(x_B)$ et $F_i(x_A)$ sont respectivement la composante de la vitesse portée par le degré de liberté j au point x_B et la force présente sur le ddl i au point x_A . Usuellement l'ensemble de ces termes est regroupé dans une matrice qui représente la mobilité entière sur la zone considérée de l'objet étudié, les termes présentés précédemment étant alors des composantes de la mobilité. Dans ce document le terme seul au singulier, "la mobilité", fait généralement référence à la matrice et le terme au pluriel "les mobilités" aux composantes de la matrice.

Généralement les mobilités sont des grandeurs ponctuelles, les forces et les vitesses considérées sont observées en un point, i.e. sur une surface dont les dimensions sont bien inférieures aux longueurs d'ondes mises en jeu. Il est cependant possible de définir les composantes des mobilités pour des surfaces plus grandes [19]. Par ailleurs, il est possible de les définir dans l'espace des nombres d'onde, ce qui permet d'obtenir des mobilités dans un espace en 2.5D. Un exemple de ce type de mobilité est présenté plus en détails dans le Chapitre II.

Les mobilités de fondation ou de bâtiment expriment une grandeur matricielle ponctuelle qui réunit toutes les valeurs des mobilités d'entrées, de couplages et de transferts que l'on peut obtenir pour un tel système dont la surface se comporte comme une surface rigide. Le nombre de degrés de liberté est alors au maximum de 6. Ceux-ci doivent être caractérisés sur tous les points ayant un intérêt pour l'étude envisagée. Dans notre problématique il s'agit des zones de contact (zdc) entre les fondations et le bâtiment ; leur nombre peut, si les fondations ne sont pas trop larges, être assimilé au nombre de ces dernières. Ainsi les mobilités constituent, dans le cas général, une matrice $6N \times 6N$, où N est le nombre de fondations. Dans une étude en deux dimensions, il y a trois degrés de liberté et Y est une matrice $3N \times 3N$.

Ces grandeurs sont sensibles à l'ensemble des propriétés du système comme les propriétés élastiques, les masses volumiques des constituants ou la géométrie. De plus les mobilités doivent respecter le principe de causalité (la réponse à un signal d'entrée dans le système représenté par la mobilité doit être causale) et celui de réciprocité (la mobilité est représentée par une matrice symétrique).

Il existe de nombreuses façons de déterminer les composantes d'une mobilité et cela est l'objet du deuxième paragraphe du Chapitre II. Toutes les méthodes usuelles en mécanique sont applicables, qu'elles soient analytiques [38, 31], numériques [91], expérimentales [100] ou empiriques [82].

I.2.2 Fonction caractéristique de Source et Fonction de couplage

L'un des atouts de la méthode des mobilités est de pouvoir exploiter des résultats portant sur un sous-système connu, et en particulier sa mobilité, dès que celui-ci est présent dans le système entier. Le système Source est particulièrement concerné par ces recherches. En effet l'objectif des études exposées dans ce paragraphe est de présenter des objets qui, comme le décrit Moorhouse (2001) [46], possèdent les qualités qui doivent permettre :

- de comparer les Sources entre elles ainsi que leurs différentes composantes,
- de prédire le niveau de vibration lorsque la Source est connectée à un Récepteur et que la mobilité de ce dernier est connue,
- de quantifier la capacité de la source à délivrer de la puissance.

Les objets présentés ici ne dépendent que des caractéristiques de la Source et peuvent toujours être associés à une fonction de couplage de la forme : $C_{SR} = Q/S$, où S est la fonction caractéristique de la source, C_{SR} la fonction de couplage Source-Récepteur et Q la puissance complexe. Une liste très fournie des grandeurs disponibles à l'époque est donnée par Wolde et Gadefelt (1987) [61].

Parmi ceux qui retiennent notre intérêt, le plus ancien est celui de Mondot et Petersson (1980) défini dans l'article [45] avec lequel les auteurs proposent une description de la puissance transmise par une machine vibrante à une superstructure. Après avoir rappelé le principe décrit dans le paragraphe précédent, les auteurs introduisent les notions de puissance active et réactive ainsi que le concept de "source descriptor" que nous appellerons la "fonction caractéristique de Source".

Cette grandeur permet de comparer les systèmes sources entre eux indépendamment des systèmes récepteurs. Elle est construite à partir des seules caractéristiques de la Source, c'est-à-dire la vitesse libre v_L et la mobilité Y_S , représentant respectivement les vibrations internes de la Source et son comportement dynamique sur l'interface considérée. Sa définition se déduit directement de l'expression de la puissance complexe effective Q' qui est associée à la puissance complexe Q définie par (I.3) avec $Q' = Q/2$.

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{1}{2} |\tilde{v}_L|^2 \frac{Y_R}{|Y_S + Y_R|^2} = S \cdot C_{SRf} \\ S &= \frac{1}{2} \frac{|\tilde{v}_L|^2}{Y_S^*} \quad C_{SRf} = \frac{Y_R Y_S^*}{|Y_S + Y_R|^2} \end{aligned} \quad (I.16)$$

La grandeur S est la "fonction caractéristique de Source".

Le deuxième terme C_{SRf} caractérise l'interaction entre la Source et le Récepteur et s'écrit :

$$C_{SRf} = \frac{Y_R Y_S^*}{|Y_S + Y_R|^2} = \frac{\alpha e^{j\Delta\Phi}}{\alpha^2 + 2\alpha \cos(\Delta\Phi) + 1} \quad (I.17)$$

où $\Delta\Phi = \Phi_R - \Phi_S$ est la différence de phase entre la mobilité du Récepteur et celle de la Source, $\alpha = |Y_R|/|Y_S|$ étant le rapport des amplitudes des mobilités Récepteur et Source. En plus de décrire le comportement du couplage Source-Récepteur, ce terme permet de calculer directement la puissance complexe à partir de la fonction caractéristique de Source associée.

L'étude de l'influence des paramètres α et $\Delta\Phi$ permet de dégager la tendance selon laquelle le terme C_{SRf} présente un maximum global pour $\alpha = 1$ qui s'atténue lorsque $\Delta\Phi$ tend vers zéro.

À partir de la relation $P = |J_{term}| C'_{SRf}$, Ohlrich (2001) définit des grandeurs un peu différentes [68] :

$$J_{term} = \frac{\langle v_L^2 \rangle_t}{|Y_S|} \quad (I.18)$$

$$C'_{SRf} = \frac{|Y_R| |Y_S|}{|Y_S + Y_R|^2} \cos(\varphi_R) = \frac{\cos(\varphi_R)}{|Y_S|/|Y_R| + |Y_R|/|Y_S| + 2\cos(\varphi_R - \varphi_S)} \quad (I.19)$$

où φ_R et φ_S sont les phases des mobilités du Récepteur et de la Source, $\langle v_L \rangle_t$ la vitesse libre moyennée sur le temps et le terme C'_{SRf} la fonction de couplage Source-Récepteur.

À l'aide de ce coefficient de couplage, l'influence de la différence de phase est étudiée. L'auteur montre que pour un rapport $|Y_R|/|Y_S|$ donné, C'_{SRf} diminue lorsque la différence de phase tend vers 0, et ceci d'autant plus que le rapport précédent est proche de l'unité, ce qui est tout à fait en accord avec les résultats de [45].

Moorhouse propose trois objets définis également à partir de v_L et Y_S [46]. Le premier de ces objets est appelé puissance maximale accessible (*MAP*) et traduit, comme son nom l'indique, la puissance maximale que peut fournir la Source au Récepteur. L'auteur nous en donne la définition à partir de la relation (I.8).

$$S_a = \Re\{Q(Y_R = Y_S^*)\} = \frac{|\overline{v_L}|^2}{4\Re(Y_S)} \quad (\text{I.20})$$

L'inconvénient de la *MAP* est que lorsque la mobilité de la source est purement imaginaire la *MAP* devient infinie, auquel cas, cette grandeur ne présente plus d'intérêt. Évidemment, la puissance transmise reste finie lorsque l'on couple cette Source à un Récepteur. À noter aussi que cet objet est plutôt sensible aux erreurs de mesure et peut s'avérer être un outil peu stable.

Le deuxième objet est déduit du cas où la Source et le Récepteur ont des mobilités identiques. Le système global est alors formé par la Source accolée à un système Récepteur identique. La grandeur complexe obtenue, dimensionnée comme une puissance, est dite puissance miroir et s'écrit :

$$S_m = Q(Y_R = Y_S) = \frac{|\overline{v_L}|^2}{4Y_S^*} \quad (\text{I.21})$$

Enfin, l'auteur introduit la puissance caractéristique (*CP*), quadruple de la puissance miroir. Pour un problème à une dimension, *CP* est identique à la fonction caractéristique introduite par Mondot & al. Moorhouse explicite la forme prise par cette fonction lorsque la mobilité est caractérisée par plusieurs degrés de liberté :

$$S_c = (v_L)^T [Y_S]^{-*} (v_L)^* \quad (\text{I.22})$$

Un avantage de S_c est facilement visible dans le cas d'une poutre en flexion. Pour ce système à une dimension et deux degrés de liberté, la vitesse v_L a deux composantes et les mobilités Y_R et Y_S sont des matrices carrées de dimension 2×2 .

$$v_L = \begin{pmatrix} \eta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} \eta_0/F & \eta_0/M \\ \alpha_0/F & \alpha_0/M \end{bmatrix} \quad (\text{I.23})$$

où η est un mouvement de translation, α un mouvement de rotation, F une force et M un moment. S_c est une somme des contributions de tous les degrés de liberté et peut se mettre sous la forme présentée ci-dessous.

$$S_c = (v_L)^T [Y_S^*]^{-1} (v_L)^* = |\eta|^2 Z_{F\eta}^* + \eta \alpha^* Z_{F\alpha}^* + |\alpha|^2 Z_{M\alpha}^* + \alpha \eta^* Z_{M\eta}^* \quad (\text{I.24})$$

Tous les termes ont la dimension d'une puissance et peuvent donc être comparés entre eux, contrairement aux différentes composantes de v_L et de Y_S . Un autre avantage est que, contrairement à la *MAP*, la *CP* n'est jamais infinie et est peu sensible aux erreurs. Enfin, la *CP* calculée avec les mobilités couplées a la particularité intéressante de souligner les modes globaux (i.e. présents à tous les points de contact).

I.2.3 Mobilités effectives

Suivant la définition des mobilités donnée au paragraphe I.2.1 de ce chapitre nous pouvons définir trois formes de couplages : les couplages entre degrés de liberté au même point, les couplages entre les points de contact et les couplages mixtes reliant un ddl en un point de contact à un autre ddl en un autre point de contact. La prise en compte de l'ensemble de ces couplages est certes possible, mais conduit à manipuler des matrices qui sont mal conditionnées car tous les couplages ont une importance plus ou moins grande selon la situation envisagée. Les chercheurs ont donc été amenés à définir la notion de "mobilité effective" qui représente une matrice ou un scalaire constitué par les termes significatifs de la matrice de mobilité.

L'une des premières études sur l'importance des termes croisés dans la puissance injectée a été publiée par Petersson et Plunt en (1981) [48]. Dans cet article, les auteurs cherchent à disposer d'outils synthétiques permettant de représenter l'interaction entre Source et Récepteur, autrement dit de mobilités effectives. Afin de conserver le formalisme des relations (I.3), (I.2) et (I.1) à un degré de liberté et un point de contact, ils proposent la notion de "mobilité d'entrée effective" $Y^{nn\Sigma}$ et de "mobilité globale effective" Y^{EEF} . Ces deux quantités sont destinées à simplifier les calculs de l'évaluation de la puissance injectée et de réduire le nombre de mesures nécessaires à sa caractérisation.

La mobilité d'entrée effective est une estimation de la mobilité globale qui prend en compte uniquement les composantes correspondant aux mobilités d'entrées de toutes les zones de contact. L'importance de chaque zone est traduite par l'intermédiaire d'une pondération des forces de contact afférentes à chaque zone.

A l'inverse, la mobilité globale effective se base sur une considération plus générale. À partir de l'écriture classique de la puissance, les auteurs introduisent la notion de "force effective" telle que : $F^{EEF} = Q / \sqrt{\langle \tilde{v}_c^2 \rangle}$ où Q et $\langle \tilde{v}_c^2 \rangle$ sont respectivement la puissance complexe totale transmise au Récepteur et la moyenne quadratique spatiale de la valeur *rms* de la vitesse pour tout les points de contact. La mobilité globale effective est alors définie par le rapport de la vitesse moyenne à la force effective.

Utilisant ces valeurs pour interpréter des résultats expérimentaux, les auteurs montrent que l'utilisation des mobilités globales effectives conduit à une bonne estimation de la puissance injectée. L'utilisation des mobilités d'entrées effectives conduit également à de bons résultats sous réserve que les forces exercées sur tous les points de contact soient d'amplitude comparable.

Petersson et Gibbs (1993) [50] présentent une étude de l'influence des différents points de contact sur la fonction caractéristique de la Source. L'idée principale est d'obtenir un critère permettant de quantifier l'importance des termes de couplage dans le calcul des forces et vitesses de contact. Pour ce faire, ils définissent une mobilité d'entrée effective qui peut se décomposer comme la somme d'un terme direct Y_{ii}^{nn} et de trois sommes qui expriment les contributions des termes de couplages, des mobilités de transferts et des termes doublement croisés. Avec cette décomposition, les auteurs donnent une condition permettant de définir dans quelles conditions les termes de transfert entre les points de contact, ou de couplage entre les degrés de liberté, peuvent être négligés.

A l'aide de cette mobilité effective, les auteurs observent qu'au-delà d'une certaine fréquence ou d'une certaine distance entre les points de contact, les termes de transferts des mobilités peuvent être négligés.

Dans les publications récentes, certains auteurs reprennent l'idée de mobilité effective et abordent l'effet des termes de couplages sur la fonction caractéristique de Source. C'est notamment le cas dans l'article de congrès de Ohlrich (2001) dans lequel l'auteur retrouve des conclusions analogues à celles de [50]. Une approche similaire est proposée par Spah et al [56].

Dans le même ordre d'idée, Spah, Gibbs et Fisher (2003) [72] ont étudié trois différentes procédures pour caractériser une "mobilité globale" dans le cadre d'une étude expérimentale. Les auteurs montrent que, sur l'ensemble du spectre, négliger les termes secondaires des mobilités donne des comportements comparables au cas où ces termes sont considérés, sauf en ce qui concerne les pics en amplitude.

Les mobilités effectives sont également utilisées pour simplifier l'étude de l'impact de différentes formes d'excitations. Sur ce point nous retenons les travaux de Hammer et Petersson (1988) [19]. Contrairement à l'approche ponctuelle, dans la réalité les excitations sont toujours appliquées sur des surfaces. L'article précité étudie comment prédire la puissance injectée lorsque l'excitation est distribuée sur une zone spatiale donnée. La puissance complexe transmise sur une surface est égale par définition à l'intégrale sur cette surface du "vecteur contrainte" par la vitesse en chaque point de la zone considérée. A partir de la relation entre la puissance complexe et la force de réaction, $Q = Y|F|^2$, ils en déduisent la mobilité "équivalente" pour un système à un degré de liberté et un point de contact en utilisant une extension de la mobilité effective définie dans [48].

En comparant les puissances obtenues avec une excitation ponctuelle et une excitation distribuée sur une zone donnée, les auteurs remarquent qu'un changement dans les conditions d'excitations impacte peu la transmission de la puissance active (i.e. la partie réelle). Un facteur important à considérer est la distribution géométrique des forces. En effet, la puissance transmise atteint un minimum lorsque les forces d'excitations sont uniformément distribuées sur la zone considérée et un maximum lorsque la distribution des forces est concentrée. De plus, les auteurs soulignent qu'en champ lointain, la réaction du Récepteur ne dépend que peu de la distribution des forces, ce qui est physiquement compréhensible.

Plusieurs études montrent clairement qu'une excitation sous la forme d'un moment n'est pas forcément négligeable. La fonction caractéristique de la Source obtenue lorsque l'excitation est un moment peut devenir en moyennes et hautes fréquences équivalente, voire supérieure, à celle obtenue lorsque l'excitation est une force [50, 100]. De ce fait aucun des degrés de liberté ne doit être négligé dans le cas général [50]. L'effet du type d'excitation sur la puissance injectée est également abordé dans les articles de Petersson et Heckl (1996) [51] et Fulford et Petersson (1999) [16].

I.2.4 La méthode des mobilités pour l'isolation

Il existe peu de méthodes pour réduire les vibrations des structures. La plus répandue est certainement la mise en place d'un matériau résilient entre la Source et le Récepteur. Cette méthode est applicable dans la plupart des situations. Dans le cadre fixé à ce mémoire, ce sont souvent les voies ferrées qui sont traitées de cette manière. Toutefois, certains bâtiments sont aussi équipés de ce type de matériau entre les fondations et la superstructure [30].

L'approche présentée par Koh et White (1995) [32], propose un moyen passif et un moyen actif basés sur la méthode des mobilités. L'étude se place dans le cadre usuel de la bibliographie, à savoir le cas d'une machine vibrante supportée par une structure (plaque ou poutre).

L'idée est d'obtenir à l'interface Source-Récepteur des interférences entre la force initiale et un moment ajouté. Pour la forme passive de l'isolation, les auteurs proposent de placer la source sur un pied dissymétrique qui, lorsque la Source exerce une force, transmet un moment qui dépend de la forme du pied ajouté. Les auteurs proposent également une méthode active pour réduire les vibrations transmises. Celle-ci consiste à appliquer au milieu du pied ajouté une nouvelle force qui s'adapte pour que l'interférence entre le moment créé et la force soit effective sur tout le spectre. Les résultats présentés par les auteurs montrent que la réduction de la puissance transmise est significative. Dans un deuxième article [33], les auteurs valident expérimentalement ces résultats.

Avec une méthode sensiblement différente, Benassi et Elliott (2005) [3] étudient aussi comment réduire de façon active la puissance transmise à une structure. Leur approche consiste à appliquer une force en un point du système vibrant pour interférer avec l'excitation initiale. Ils proposent une optimisation du point d'application et de l'amplitude de la force à appliquer.

I.3 Simulations numériques

Ces simulations présentent des cas relativement simples d'application de la méthode des mobilités.

I.3.1 Cas d'un système simple : une poutre semi-infinie

Le système est composé d'une partie finie qui joue le rôle de la source et d'une partie semi-infinie qui est le récepteur.

Pour simplifier les notations, les dépendances temporelles sont omises, la convention utilisée étant une dépendance de la forme $e^{-j\omega t}$.

La partie finie de la poutre est excitée en compression simple par une force longitudinale, et l'objectif est entre autre de calculer la puissance transmise à la partie semi-infinie. Pour utiliser la méthode des mobilités, il est nécessaire de calculer les trois grandeurs v_L , Y_S et Y_R qui sont obtenues en considérant les sous-problèmes suivants :

- le système Source seul excité par la force initiale F en $x = 0$,
- le système Source seul excité par une force longitudinale unitaire au point de contact $x = L_x$,
- le système Récepteur seul excité par une force longitudinale unitaire au point de contact $x = L_x$,
- la combinaison des résultats précédents avec la méthode des mobilités.

Tout cela se traduit par les situations décrites sur les schémas suivants :

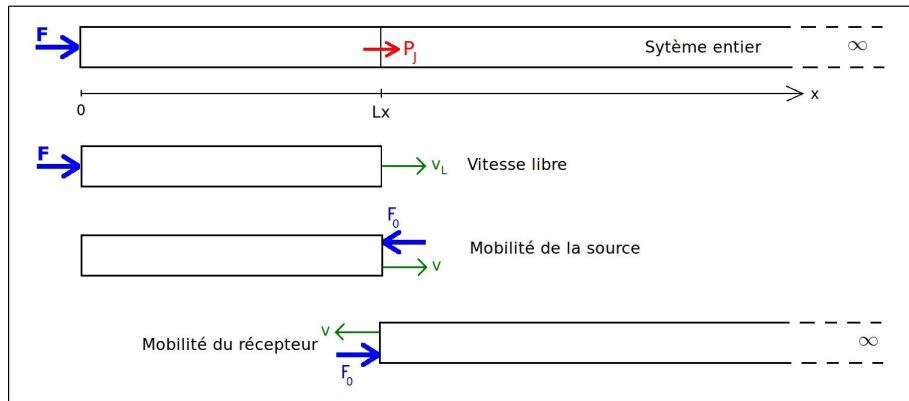


FIGURE I.3 – Schémas des différentes situations utiles au calcul de la puissance injectée

a) Pour calculer la vitesse libre, il faut considérer l'équation de propagation d'une onde longitudinale dans une poutre finie et la résoudre avec les conditions aux limites appropriées. Après résolution v_L s'écrit (voir Annexe B.1) :

$$v_L = v(x = L_x) = \frac{-C_L F e^{2jkL_x}}{SE \sin(kL_x)} \quad . \quad (\text{I.25})$$

où C_L , F , S , E et k sont respectivement la célérité des ondes longitudinales, la force appliquée, la section de la poutre, le module d'Young et le nombre d'onde ($k = \omega/C_L$).

b) et c) À partir de la même équation de propagation, d'une excitation unitaire et de conditions aux limites adaptées, les mobilités de la Source et du Récepteur s'écrivent (Annexe B.2) :

$$Y_S = \frac{-jC_L}{SE \tan(kL_x)} \quad (\text{I.26})$$

$$Y_R = \frac{-C_L}{SE} \quad (\text{I.27})$$

d) En reprenant les notations du paragraphe précédent et en remarquant que $C_L/SE = \sqrt{E/\rho}/SE = 1/S\rho C_L$, la puissance injectée se calcule facilement :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} |v_L|^2 \frac{\Re(Y_R)}{|Y_S + Y_R|^2} \\ P &= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{-C_L}{SE} \right) \frac{|C_L F|^2}{|SE \sin(kL_x)|^2} \frac{|SE \tan(kL_x)|^2}{|-C_L(\tan(kL_x) + j)|^2} \\ P &= \frac{1}{2} \Re \left(\frac{-C_L |F|^2}{SE} \right) = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{-|F|^2}{S\rho C_L} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Il est évidemment plus rapide d'écrire directement la puissance à partir des vitesses et forces du système entier,

$$P = 1/2 \Re(f^T v^*) \quad \text{avec} \quad v|_{x=L_x} = \frac{-F}{S\rho C_L} e^{jkL_x} \quad \text{et} \quad f|_{x=L_x} = F e^{jkL_x} ,$$

ce qui donne une expression identique :

$$P = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{-|F|^2}{S\rho C_L} \right) . \quad (\text{I.29})$$

Il est remarquable que, dans ce cas précis, la puissance est indépendante de la fréquence dès lors que la force exercée l'est également. La mobilité du Récepteur est également indépendante de la fréquence, mais pas la vitesse libre ni la mobilité de la Source. Il en résulte que la force de contact dépend également de la fréquence. Ceci est illustré par la force de contact tracée dans la Figure I.4. Ici la poutre possède les caractéristiques du béton ($E_b = 26\text{GPa}$, $\rho = 2400\text{kg/m}^3$, $\nu = 0.3$ et $\eta = 0.05$). Le nombre d'onde k tient compte de la dissipation par l'intermédiaire d'un coefficient de pertes internes η introduit par un module d'Young complexe, $E = E_b(1 + j\eta)$. Les propriétés géométriques de la poutre sont données par l'épaisseur h qui est de vingt centimètres. La force de contact est déduite des expressions données dans les étapes **a)**, **b)** et **c)**.

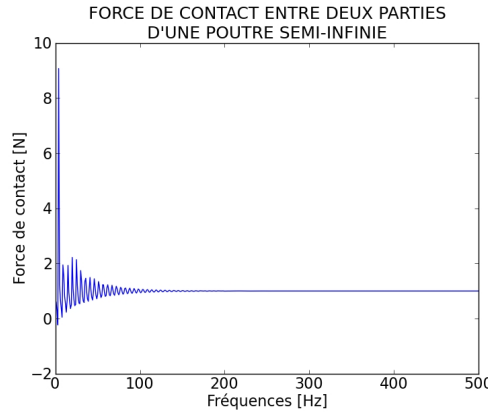


FIGURE I.4 – Force de contact f_c entre la partie finie et la partie semi-infinie d'une poutre excitée par une force longitudinale

Il est visible que la valeur de la force de contact oscille entre 10 et 0 et tend rapidement vers la valeur 1 comme observé en référence [50].

I.3.2 Sol semi-infini et structure 2D

Maintenant que le concept de la méthode des mobilités a été introduit et que toutes les grandeurs utiles ont été définies, ce paragraphe présente les différents résultats établis sur un système du type de ceux étudiés dans ce document, à savoir une superstructure excitée par le sol via ses fondations. A travers différents cas, les courbes qui suivent montrent l'influence des termes croisés dans la valeur de la puissance injectée.

Étude d'une poutre semi-enterrée en deux dimensions

Les résultats proposés ici montrent la puissance injectée dans une poutre finie en béton de dix mètres de haut rattachée à une fondation, également en béton, de trois mètres de profondeur, de même section (20cm), enterrée dans un sol. Ce dernier a des caractéristiques moyennes et entre dans la catégorie b du classement des sols de la norme de construction parasismique [102] avec une célérité $C_S = 200\text{ m/s}$ pour les ondes de cisaillement.

Le maillage utilisé pour la simulation numérique est schématisé sur la Figure I.5. La structure est modélisée par des éléments finis à neuf noeuds (trois par côtés et un au centre), et les surfaces limitant le sol par des éléments de frontières. L'excitation appliquée au sous-système Source est représentée par une force ponctuelle, située à la surface du sol à dix mètres des fondations. Elle s'exprime dans l'espace de Fourier par $F(\omega) = F_0\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ où l'amplitude à chaque fréquence est unitaire $F_0 = 1$.

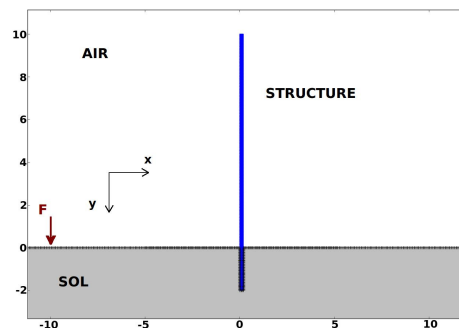


FIGURE I.5 – Géométrie du calcul complet de la puissance injectée dans une poutre finie.

I.3. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Les puissances injectées et vitesses de contact, définies dans les paragraphes précédents, sont calculées avec des mobilités simulées par le code Mefissto dans les situations visibles sur le dessin de la Figure I.6. Puis elles sont comparées à un calcul direct, c'est à dire lorsque tout le système (sol+fondation+superstructure) est simulé par le même code de calcul. Le post-traitement des données permet de tracer les valeurs absolues de la vitesse de contact et le niveau de la puissance, i.e. $10\log(P/P_{\text{réf}})$ (Figure I.7).

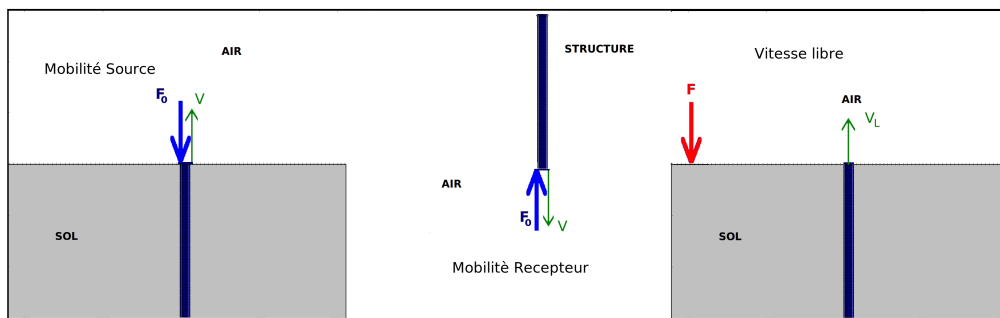


FIGURE I.6 – Schéma des différentes configurations utiles au calcul des grandeurs à l'interface Source Récepteur.

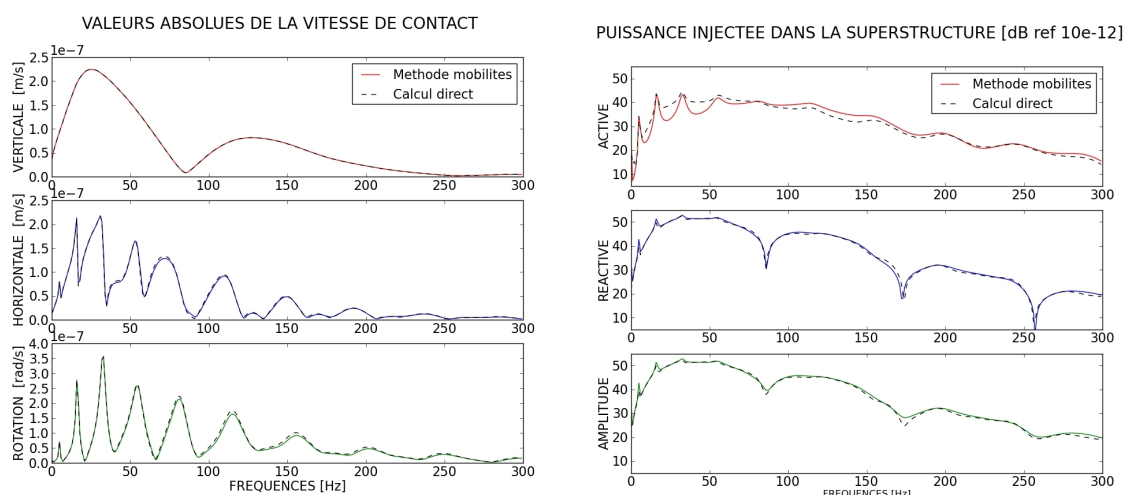


FIGURE I.7 – Comparaison des résultats d'un calcul complet avec ceux obtenus par la méthode des mobilités : A gauche les vitesses de contact (de haut en bas : composante verticale, composante horizontale, rotation) ; A droite la puissance à l'interface (de haut en bas : partie réelle, partie imaginaire, valeur absolue).

Les résultats sont proches mais ne sont pas complètement identiques comme le montrent les figures ci-dessus. Les différences observées ont pour origine le calcul des mobilités [70]. Cette configuration a la particularité de ne pas permettre aux vibrations de se dissiper dans la superstructure car cette dernière a des dimensions similaires ou inférieures aux longueurs d'ondes auxquelles elle est soumise. Le calcul de la mobilité du récepteur est donc très sensible au maillage et doit, dans ce cas précis, être réalisé à l'aide d'un maillage très fin. De plus, la puissance est principalement réactive et la composante active, plus petite, est moins bien évaluée.

La différence la plus significative est portée par la partie réelle de la puissance et n'excède pas $5dB$. Les autres composantes de la puissance, ainsi que toutes celles de la vitesse de contact sont proches des résultats de référence.

En outre, il est possible d'observer deux autres phénomènes sur la puissance, plus marqués dans le cas du calcul par la méthode des mobilités : des creux d'amplitudes présents sur les valeurs imaginaires et absolues et des pics visibles en début de spectre de la partie réelle. Ces comportements découlent respectivement des modes longitudinaux et verticaux de la superstructure. Pour s'en convaincre il suffit de comparer les fréquences auxquelles ces singularités apparaissent et celles des modes propres de la structure. Pour une poutre de dix mètres libre aux deux extrémités, la fréquence fondamentale des modes de flexion est égale à $10Hz$ et celle des ondes de compression aux alentours de $100Hz$. Les modes observés sur la puissance injectée à la superstructure sont visiblement aux alentours de 8 et $85Hz$. Les différences entre les deux couples de valeurs peuvent s'expliquer par les conditions aux limites imposées par la connexion avec la partie enterrée qui ne correspondent pas aux conditions aux limites adoptées pour la poutre libre aux deux extrémités.

Afin de comparer l'importance relative des différents degrés de liberté nous pouvons observer les termes constitutifs de la fonction caractéristique de Source donnée par l'équation (I.24). La vitesse libre possède ici trois composantes et la mobilité de la Source, tout comme celle du Récepteur, neuf :

$$v_L = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_\alpha \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{Lx} & Y_{Ly} & Y_{L\alpha} \\ Y_{Fx} & Y_{Fy} & Y_{F\alpha} \\ Y_{Mx} & Y_{My} & Y_{M\alpha} \end{pmatrix},$$

où les indices (L, x) , (F, y) et (M, α) représentent respectivement la composante de la force et de la vitesse sur les directions verticale, horizontale et sur la rotation. La puissance caractéristique est ici un complexe scalaire composé de neuf termes :

$$\begin{aligned} S_c &= 0.5((S_{xx} + S_{yx} + S_{\alpha x}) + (S_{xy} + S_{yy} + S_{\alpha y}) + (S_{x\alpha} + S_{y\alpha} + S_{\alpha\alpha})) \\ S_c &= 0.5(v_x(v_x^* Z_{Lx}^* + v_y^* Z_{Fx}^* + v_\alpha^* Z_{Mx}^*) \\ &\quad + v_y(v_x^* Z_{Ly}^* + v_y^* Z_{Fy}^* + v_\alpha^* Z_{My}^*) + v_\alpha(v_x^* Z_{L\alpha}^* + v_y^* Z_{F\alpha}^* + v_\alpha^* Z_{M\alpha}^*)) \end{aligned} \quad (I.30)$$

L'expression (I.31) ci-dessus se découpe en trois groupes de termes, chacun observé sur un degré de liberté différent. Chaque groupe est composé par la somme de trois produits dont un représente l'apport direct et les deux autres les composantes croisées aboutissant à un mouvement sur ce degré de liberté. Le terme direct semble porter la majeure partie de l'information du moins pour la composante longitudinale de S_c . En ce qui concerne les deux autres composantes, les termes correspondant à la force transverse et au moment sont de grandeur comparable et bien supérieure à celui correspondant à la force dans l'axe de la fondation. L'illustration de ce résultat est donnée sur le graphique ci-dessous (Figure I.8) sous la forme du niveau de la valeur absolue de la Source caractéristique, i.e. $L_S = 10 \log(|S_c|/|S_{\text{réf}}|)$.

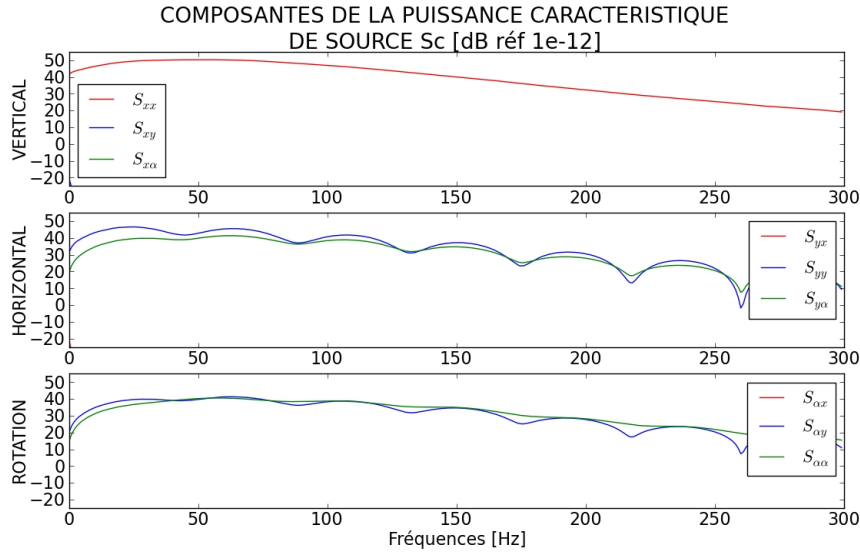


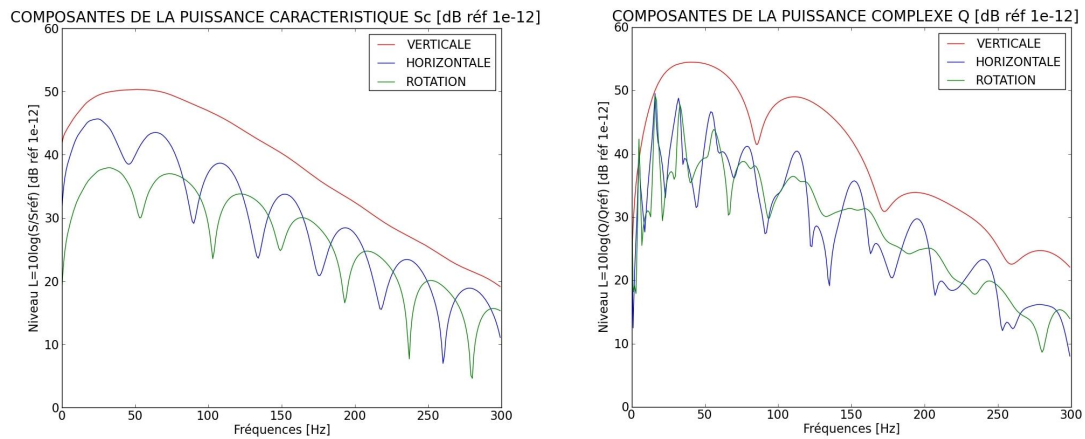
FIGURE I.8 – Comparaison des niveaux des termes constituant la contribution d'un ddl dans S_c .

Les courbes mentionnées dans la légende et non visibles sur la figure sont inférieures de plus de 10dB à la limite inférieure de l'axe des abscisses.

L'importance relative de chacun des degrés de liberté dépend de l'excitation de départ, de la géométrie du système étudié et de ses caractéristiques. Par exemple, il est facilement concevable que pour une excitation de type sismique en onde de compression, c'est-à-dire pour une onde plane provenant du sol sous les fondations, une structure rectiligne telle que la poutre présentée ici, réagit principalement dans son axe et que la composante transverse est négligeable. Dans notre cas, l'excitation est appliquée sur la surface du sol et l'onde incidente sur la structure est une onde de Rayleigh [75]. La réponse de la superstructure est plus complexe. Les composantes de la vitesse libre ne peuvent pas toutes être comparées entre elles car elles ne possèdent pas toutes la même dimension (m/s et rad/s). Néanmoins les termes de S_c et de la puissance complexe Q portés par les différents degrés de liberté, c'est-à-dire la somme des trois termes présents sur chaque ddl , sont comparables et comparés sur les courbes de la Figure I.9.

Ces résultats sont en accord avec ceux de [50] : la composante dans l'axe de la poutre est prépondérante en début de spectre mais diminue plus rapidement et sa contribution se rapproche de celles des autres composantes et notamment de celle de la rotation.

Par ailleurs, la contribution du Récepteur dans la puissance complexe est ici facilement observable. La puissance caractéristique de Source présente des modes relatifs à la poutre enterrée, alors que dans la puissance complexe la réponse montre une superposition de modes dus aux deux parties de la poutre dont les conditions aux bords sont différentes. Ces courbes permettent d'observer que la composante principale de la puissance Q , portée par le degré de liberté longitudinal, est modulée par le système Récepteur. Cela confirme les commentaires sur les écarts entre les calculs de la puissance injectée et les pics en amplitude observés sur la Figure I.7.

FIGURE I.9 – Comparaison du niveau des apports de chacun des degrés de liberté dans S_c et Q .

Importance relative des points de contact

Le cas présenté ici est celui d'un bâtiment 2D de six étages, formé par un assemblage de poutres et relié au sol par des fondations de trois mètres de profondeur. L'épaisseur de la structure est de vingt centimètres et les caractéristiques du sol sont celles du sol moyen utilisé dans le cas précédent.

L'excitation est toujours une force unitaire dans l'espace de Fourier, localisée en surface à dix mètres de la première fondation. Chacune des fondations représente un "point de contact" pour lequel il faut considérer les trois *ddl* accessibles. Le schéma de la situation ci-contre retrace les données géométriques de la simulation. Dans la même optique que dans le paragraphe précédent, les mobilités et vitesses nécessaires à la méthode des mobilités sont déterminées à l'aide du code Mefisto.

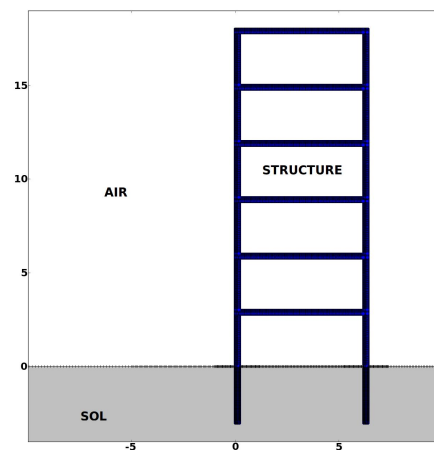


FIGURE I.10 – Géométrie du système complet avec la Source et le Récepteur.

Après résolution des étapes (1-3) énumérées dans l'avant propos de ce chapitre, les valeurs absolues de la vitesse de contact sont connues et comparées à celles de la vitesse obtenue par un calcul direct comme le montre la Figure I.11. Comme dans le cas précédent, les vitesses de contact et la puissance sont proches de celles données par le calcul complet.

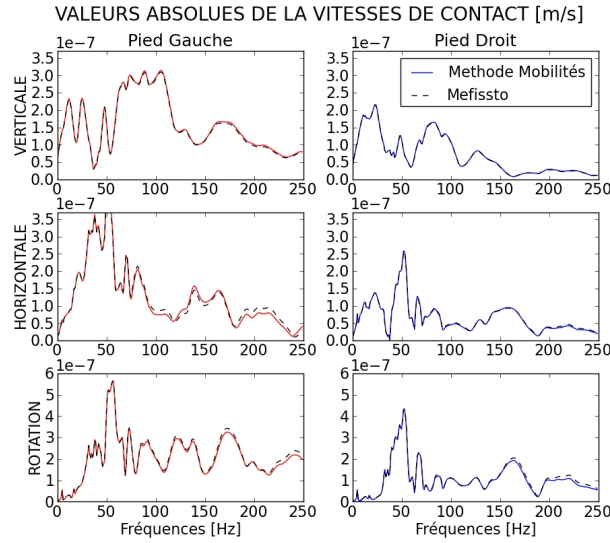


FIGURE I.11 – Vitesses de contact sur les différents degrés de liberté entre la fondation et la superstructure pour les deux pieds du bâtiment. Calcul par la méthode des mobilités en traits pleins de couleurs et calcul direct en traits pointillés noirs.

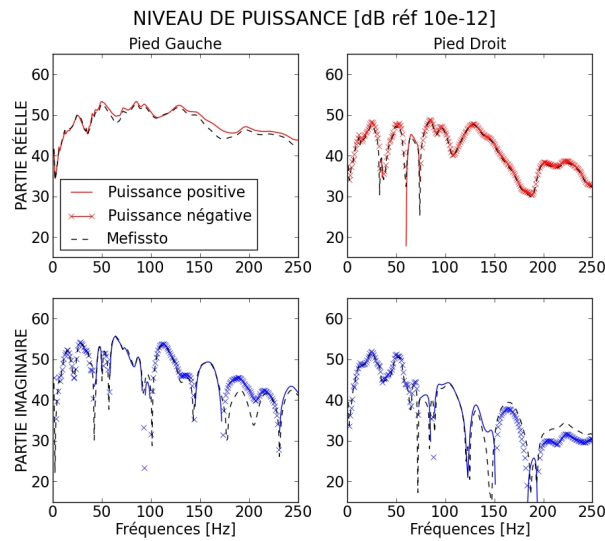


FIGURE I.12 – Puissance injectée dans la superstructure sur chacun des deux points de contact, de haut en bas : partie réelle, partie imaginaire ; calcul par la méthode des mobilités en traits pleins de couleurs et calcul direct en traits pointillés noirs.

Une remarque intéressante peut être mentionnée concernant les courbes de la puissance injectée, i.e. la partie réelle de la Figure I.12. En observant le signe de la partie active on peut remarquer que celle-ci est positive sur le pied gauche, proche de l'excitation, et globalement négative sur le pied droit. Cela signifie que l'énergie provient du sol par le point de contact le plus proche de l'excitation et est retransmise au sol par l'intermédiaire de la structure et du deuxième points de contact.

Pour évaluer l'importance relative de chaque composante, il est possible d'observer le niveau des composantes de S_c . Celles-ci sont définies pour chaque couplage entre les degrés

de liberté et chaque transfert entre les points de contact. Une façon simple d'observer séparément les différentes composantes est de calculer S_c par étapes. Dans un premier temps son expression peut s'écrire par blocs relatifs aux points de contact.

$$\begin{aligned}
 S_c &= (v_L)^T [Z_S]^* (v_L)^* \\
 &= \begin{pmatrix} (v_L^1) \\ (v_L^2) \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_S^{11} & Z_S^{12} \\ Z_S^{21} & Z_S^{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (v_L^1)^* \\ (v_L^2)^* \end{pmatrix} \\
 &= v_L^{1T} Z_S^{11} v_L^{1*} + v_L^{1T} Z_S^{12} v_L^{2*} + v_L^{2T} Z_S^{22} v_L^{2*} + v_L^{2T} Z_S^{21} v_L^{1*} \\
 &= S_c^1 + S_c^{12} + S_c^2 + S_c^{21}
 \end{aligned} \tag{I.31}$$

où S_c^1 , S_c^{12} , S_c^2 et S_c^{21} représentent respectivement la composante directe au premier point de contact, la composante de transfert du premier au deuxième point de contact, la composante directe du deuxième point de contact et la composante de transfert du deuxième au premier point de contact. Chacune des contributions déterminées ci-dessus peut être décomposée en la somme des contributions de chaque degré de liberté de la même manière que dans l'expression (I.31) du paragraphe précédent.

$$S_c^i = S_{xx}^i + S_{xy}^i + S_{x\alpha}^i + S_{y\alpha}^i + S_{yx}^i + S_{yy}^i + S_{\alpha x}^i + S_{\alpha y}^i + S_{\alpha\alpha}^i$$

Cette décomposition de S_c est exposée sur la Figure I.13 pour chacune des composantes S_c^i ($i = 11, 12, 21, 22$).

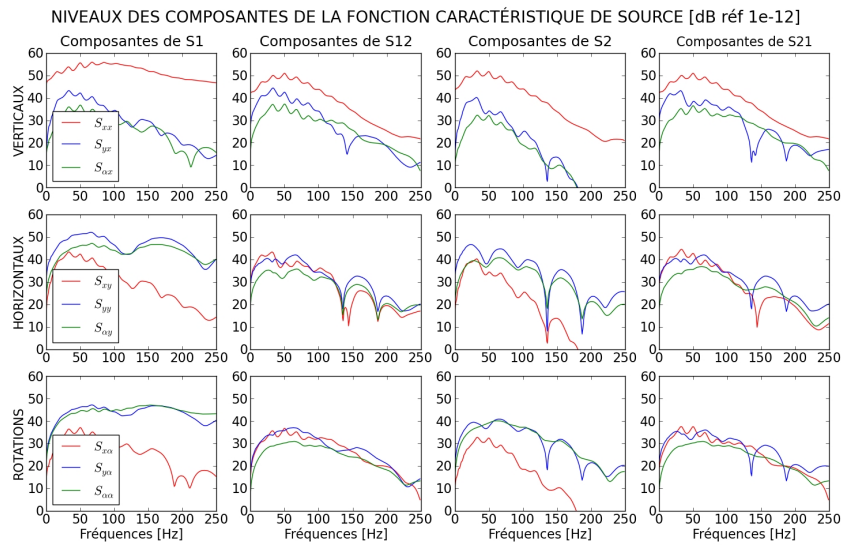


FIGURE I.13 – Comparaison du niveau des termes constituant la contribution d'un degré de liberté dans S_c^1 , S_c^{12} , S_c^2 et S_c^{21} .

Sur la Figure I.13 les contributions des termes croisés sont nettement plus importantes que pour le cas à un seul point de contact. La géométrie du problème crée une interaction entre les différents degrés de liberté et augmente les termes de couplages. Pour le cas précédent, excepté pour les termes couplant la flexion et la rotation, ces termes reliant les degrés de liberté sont supposés nuls du fait de la symétrie du problème.

I.3. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

A présent, les trois termes relatifs à chaque degré de liberté de S_c et Q , pour chacun des points de contact, sont sommés et leurs niveaux sont comparés entre eux sur la Figure I.14.

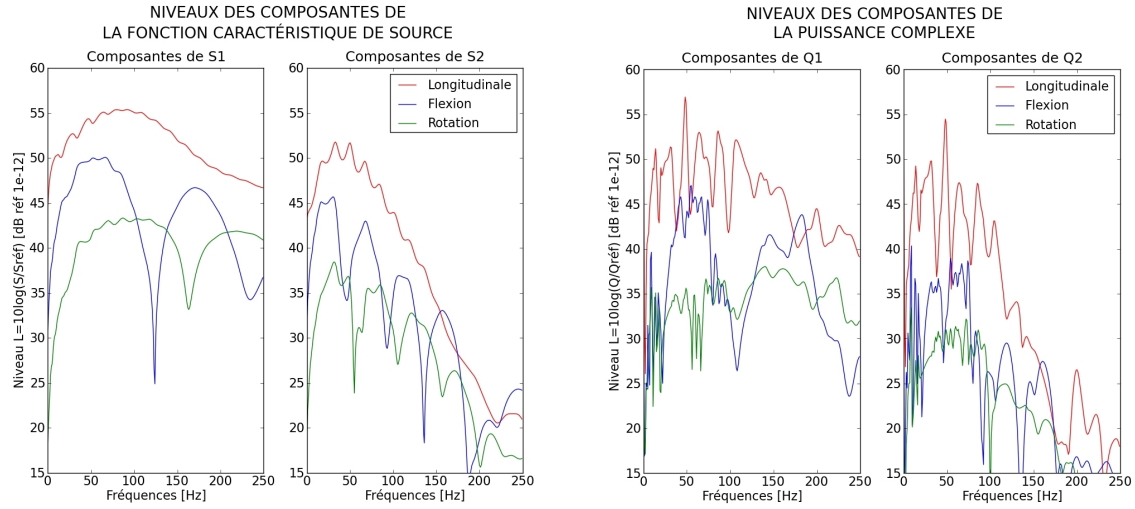


FIGURE I.14 – Comparaison des apports de chacun des degrés de liberté dans les fonctions caractéristiques de Source et les puissances complexes relatives aux zones de contact.

Ces courbes montrent également que, comme dans le cas précédent, la contribution du degré de liberté longitudinal, i.e. vertical, est prépondérante en début de spectre. En fin de spectre, la capacité de la source à transmettre de la puissance est portée par tous les degrés de liberté. Les mêmes tendances sont visibles sur la puissance complexe Q . En comparant S_c et Q il est visible que le Récepteur perturbe le signal, en ajoutant la contribution de nombreux modes de structure, mais ne change pas sa forme générale.

Enfin, la comparaison des deux composantes relatives aux points de contact est tracée sur la Figure I.15. Celle-ci nous permet de visualiser l'importance de chacun des points de contact dans la transmission de la puissance.

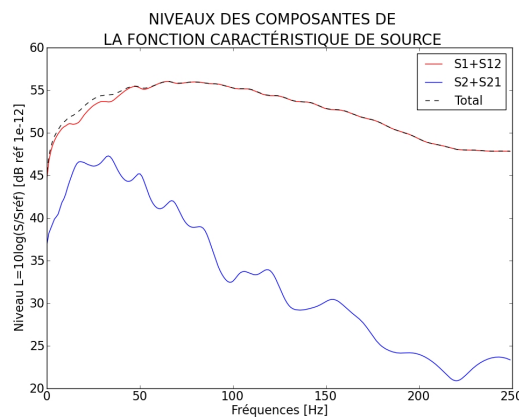


FIGURE I.15 – Comparaison des composantes relative aux points de contact dans S_c .

Il est facilement observable que pour un sol moyen, la contribution S_c^2 est quatre fois inférieure ($-6dB$) à celle de S_c^1 dès $50Hz$. Cette limite dépend à la fois de la distance entre les fondations et des caractéristiques des matériaux.

Conclusion du chapitre

Nous avons présenté la méthode des mobilités et quelques résultats qui lui sont rattachés. En résumé cette technique nous permet de découpler le problème en deux sous-systèmes constitués par la Source et le Récepteur. Ceux-ci sont composés d'une part du sol contenant les fondations avec l'excitation et d'autre part de la superstructure. Les deux sous-systèmes sont caractérisés par leurs mobilités définies en fonction du modèle utilisé pour les représenter. Cela s'accompagne de la vitesse libre qui traduit la réponse du système Source non couplé à l'excitation réelle du problème.

Le principe du calcul repose sur une combinaison des mobilités de la Source et du Récepteur ainsi que de la vitesse libre. Les grandeurs recherchées sont les forces et les vitesses présentes à l'interface entre les fondations et le bâtiment. Pour ce faire, les relations à utiliser sont les équations (I.1) (I.2) et (I.3). Celles-ci se généralisent pour un nombre quelconque de fondations et de degrés de liberté (équations (I.6) (I.7) et (I.8)). Les forces de contact et vitesses de contact ainsi définies sont utilisées pour déterminer la puissance injectée dans le bâtiment.

La formulation de ces grandeurs est exacte dans la mesure où les résultats des différents sous-calculs sont exacts. Des erreurs introduites dans le calcul numérique des mobilités peuvent toutefois affecter le calcul de l'ensemble.

Plusieurs types de simplifications sont parfois possibles dans l'expression des mobilités. En général se sont les termes croisés des mobilités que l'on cherche à négliger. Un indicateur sur l'importance de ces termes est donné dans [50]. Dans le cas général tous les termes doivent être pris en compte.

À travers différentes simulations numériques nous avons confronté la méthode des mobilités à un calcul complet. Les mobilités et la vitesse libre sont déduites d'un calcul effectué avec le même code de calcul que celui servant à la simulation directe. Dans les cas présentés, la vitesse de contact obtenue par la méthode des mobilités est toujours satisfaisante. Cela est vrai quel que soit le degré de liberté observé. Néanmoins l'estimation de la puissance injectée fait apparaître des écarts entre les résultats du calcul par sous-structures et ceux du calcul complet. Pour le cas très réactif d'une poutre enterrée dans un sol moyen, un écart, dû aux approximations numériques, a été observé entre les deux types de calculs.

Lorsque le système étudié possède plusieurs zones de contact, le signe de la puissance injectée nous informe sur le sens de l'écoulement de l'énergie. Cela est illustré avec l'exemple d'un bâtiment de six étages à deux fondations. Dans ce cas il est très clair que l'énergie entre dans le bâtiment par son pied le plus proche de l'excitation et en sort par l'autre côté.

Quelque soit le nombre de degrés de liberté et le nombre de zones de contact, plusieurs outils permettent de quantifier l'importance relative des différents termes constituant la mobilité sur la puissance injectée. Le premier outil utilisé ici est la fonction caractéristique de Source S_c définie par Moorhouse [46]. Cette grandeur permet d'observer la capacité du système Source à délivrer de la puissance. Une comparaison de cet indicateur avec la puissance complexe permet d'observer clairement l'impact du Récepteur sur la puissance complexe. Cet outil est très utile pour l'analyse et l'interprétation des phénomènes se déroulant entre les fondations et le bâtiment.

Néanmoins, la méthode des mobilités est sensible aux erreurs introduites dans l'évaluation des mobilités. Une grande attention doit donc être portée à leur obtention. Ce point fera l'objet des deux chapitres suivants.

Chapitre II

Systeme Source Mobilités - Vitesses Libres - Calibration

Sommaire

Avant-propos	34
II.1 Interaction sol-structure et impédances de fondation	35
II.2 Calcul des mobilités	40
II.3 Calcul de la vitesse libre de la Source	54
II.4 Calibration sur des mesures accélérométriques	57
Conclusion du chapitre	61

Avant-propos

Dans le chapitre précédent nous avons vu que la méthode utilisée pour déterminer la puissance transmise au bâtiment est exacte à l'approximation près sur les valeurs obtenues pour les mobilités de la Source et du Récepteur. Ce chapitre a pour but de présenter la méthodologie permettant de caractériser les systèmes Sources utilisés dans ce document.

Comme expliqué précédemment l'étude du système Source nécessite de simuler numériquement le sol et les fondations du bâtiment mises en mouvement par l'excitation réelle, à savoir une voie ferrée en activité. L'analyse d'un tel système demande de recourir à plusieurs domaines d'études. L'excitation, par exemple, a été étudiée par de nombreux auteurs et le nombre de modèles existants pour cette problématique est considérable [98, 17]. De même le sol est un sujet d'étude très large et fait l'objet de recherches depuis de nombreuses années. Plusieurs études ont fait état de difficultés rencontrées lors de la modélisation du sol, dues en particulier à une dispersion considérable des propriétés mécaniques existantes, à la présence de stratifications en présences sur les sites d'étude, ... Enfin, l'interaction sol-structure est également un problème complexe et de nombreuses recherches sont en cours [96, 93] dans ce domaine.

Pour obtenir les mobilités et la vitesse libre du système Source dans un cas réaliste plusieurs étapes sont nécessaires. La première consiste à déterminer les caractéristiques de l'excitation et du sol. Pour caractériser l'ensemble (excitation+sol), nous avons recours à la calibration d'un ensemble (propriétés de sol + force ponctuelle appliquée en surface du sol) qui représente au mieux la réponse du sol correspondant à des enregistrements en situation réelle. Cette première étape est discutée dans les paragraphes II.4.1 et II.4.2. Ils aboutissent à un couple (excitation,sol) qui nous permet de simuler la vitesse libre de la Source (paragraphe II.3).

Une fois les paramètres du sol connus, il est alors possible de procéder à la détermination des mobilités. Les différentes formes choisies dans ce document pour représenter les fondations sont données dans le paragraphe II.2.1. La détermination de la mobilité est alors abordée au travers d'un exemple dans le paragraphe II.3. Celle-ci demande de quantifier pour chaque force unitaire, appliquée successivement sur tous les degrés de liberté de toutes les zones de contact, la réponse de la fondation comprenant tous les degrés de liberté de toutes les zones de contact. Pour un calcul plan, et dans l'hypothèse d'un déplacement de corps rigide d'une unique fondation (correspondant à un "point de contact"), le nombre de simulations nécessaires est de trois, une pour chaque degré de liberté. Le cas particulier des mobilités dans une géométrie en 2.5D est exposé à la fin du paragraphe II.2.

Afin d'introduire certaines notions utiles au processus de caractérisation de la Source, la première partie de ce chapitre donne quelques définitions générales et quelques exemples bibliographiques d'impédance de fondation. Le reste du chapitre aborde alors les différentes étapes du calcul.

II.1 Interaction sol-structure et impédances de fondation

L'interaction sol-structure se rapporte aux différents domaines d'étude faisant intervenir un bâtiment et un sol. Dans notre cas cette interaction est abordée à travers les mobilités/impédances des fondations du bâtiment. C'est en effet le comportement de ces dernières que nous souhaitons caractériser ici et notamment par leurs mobilités qui sont les grandeurs utilisées dans la méthode introduite au Chapitre I.

Cette section présente différentes définitions et quelques résultats portant sur l'interaction sol-structure.

II.1.1 Définitions

Fondation

Une fondation est définie comme la partie d'un bâtiment qui supporte le poids de la structure et qui le retransmet au sol sur lequel elle repose. Les fondations sont classées en deux catégories, les fondations superficielles et les fondations enterrées.

Les caractéristiques des fondations sont déterminées à partir des efforts imposés par le bâtiment, des propriétés des sols de fondation et des possibles sollicitations extérieures. Dans le cas du bâtiment, les forces exercées sont généralement statiques et représentées par la descente des charges. Toutefois, il existe des fondations spécifiquement conçues pour supporter de grandes machines vibrantes qui répondent alors à des excitations dynamiques. Les forces extérieures qui s'appliquent à des fondations peuvent également être statiques et dynamiques, en particulier dans le cas de sollicitations sismiques.

Dans ce manuscrit, seules les forces dynamiques extérieures font l'objet d'étude. Plus particulièrement, nous cherchons à évaluer la réponse des fondations à une excitation de type ferroviaire. Les fondations sont supposées dimensionnées pour répondre de façon satisfaisante aux autres sollicitations. Une description des formes usuelles de fondation est proposée dans le paragraphe II.3 de ce chapitre. Elle est principalement basée sur les ouvrages de Turaud (1991) [90] et de Gunaratne (2006) [83].

La littérature n'est, à la connaissance de l'auteur, pas très abondante dans le domaine de la réponse aux vibrations apportées par les transports. En revanche, on rencontre une littérature plus fournie sur les sollicitations apportées par les machines vibrantes ou par les séismes, domaines dans lesquels l'interaction sol-structure a été largement étudiée.

Sol

Le sol est un milieu très difficile à modéliser pour plusieurs raisons. Il a un comportement élasto-plastique, c'est-à-dire élastique pour de petites déformations et plastiques pour de grandes déformations, et il est fortement inhomogène, en raison d'une augmentation de la raideur avec la profondeur. De plus, le comportement des sols est également anisotrope car il dépend des contraintes permanentes appliquées, qui sont elles mêmes anisotropes [87]. Néanmoins, les vibrations étudiées dans ce mémoire sont d'amplitude suffisamment petite pour que le sol puisse être considéré comme linéairement élastique et isotrope.

L'hétérogénéité et l'anisotropie du sol ne seront pas prises en compte et ce milieu sera assimilé à un demi-espace élastique homogène et isotrope. Les calculs peuvent être réalisés

Type	Vitesse de cisaillement (m/s)	Module d'Young (MPa)	Densité volumique (kg/m^3)
Sol dur	> 400	> 800	1800
Sol moyen	$400 > c_T > 150$	200	1600
Sol mou	< 150	< 50	1400

TABLE II.1 – Classement des sols choisis selon la Norme NF-P 06-13

en deux ou trois dimensions. De nombreuses études sont réalisées dans ce domaine en deux dimensions (ou en 2.5D comme on le verra ci-après). Les récents travaux de Chaillat & al (2005) [94] utilisant la méthode des multipôles rapides permettent toutefois d'envisager dans un futur proche des simulations de structures tridimensionnelles qui conduisent à des temps de calcul raisonnables.

Bien souvent, pour que la modélisation soit suffisamment réaliste, il est nécessaire de considérer un espace multicouche. Les sols naturels se présentent souvent sous la forme d'un milieu stratifié dans lequel les différentes couches peuvent avoir des caractéristiques très différentes. Dans cette approche, le sol est alors modélisé par différentes couches homogènes élastiques. De nombreux auteurs se sont penchés sur ce problème et y ont apporté des réponses analytiques, semi-analytiques ou numériques [28, 84, 27, 41]. Il faut noter toutefois que ces études concernent plutôt le génie parasismique, car pour le problème de vibrations traité dans ce mémoire (force en surface éloignée de la structure), la transmission se réalise principalement par ondes de Rayleigh, transportant l'énergie vibratoire dans une zone proche de la surface et l'effet de la stratification est considérablement réduit dans ce cas (voir le chapitre V).

Un certain nombre de non-linéarités peuvent également apparaître au niveau de l'interaction sol-structure, si l'interface n'est pas parfaite, en raison du glissement potentiel à l'interface sol-fondation. Là encore, compte tenu du faible niveau d'amplitude des vibrations, il sera supposé qu'un tel glissement n'apparaît pas et qu'il n'existe pas de décollement comme on peut l'observer dans certains cas pour de forts niveaux de sollicitations en génie parasismique [97, 96].

Dans le but de prendre en compte l'effet de la rigidité du sol sur l'interaction sol-structure, trois milieux homogènes isotropes élastiques dénommés sol mou, moyen et dur, seront considérés. Ils correspondent à la classification donnée dans la norme parasismique de 1998 [102]. Ces trois types de sol correspondent à des niveaux caractéristiques de la vitesse de propagation des ondes de cisaillement, reportés dans le Tableau II.1.

Il existe d'autres formes de classification plus complètes et complexes comme le système unifié de la classification des sols (USCS) [83] demandant toutefois une approche plus fine des caractéristiques propres du sol étudié (granulosité, hydrométrie ...).

Idéalement, les valeurs de vitesses de cisaillement du sol peuvent être déterminées de plusieurs façons, en laboratoire ou in-situ [73, 62].

Les valeurs obtenues peuvent varier en fonction du taux d'humidité, de la température ou de l'historique des contraintes [35, 40, 1]. Ces propriétés sont faiblement variables en fonction de la fréquence et peuvent, pour de petites déformations, être considérées comme indépendantes de la fréquence.

Mobilité

Une définition générale des mobilités est donnée dans le premier chapitre. Pour rappel, les expressions des mobilités utilisant le déplacement seront notées avec l'indice u alors que celles exprimant un rapport entre une vitesse et une force n'auront pas d'indice particulier.

Pour différencier toutes les composantes de la mobilité, celles-ci s'écrivent avec quatre indices :

$$Y_{ij}^{AB} = \frac{v_j(x_B)}{F_i(x_A)} \quad (\text{II.1})$$

où $v_j(x_B)$ et $F_i(x_A)$ sont respectivement la composante de la vitesse portée par le degré de liberté j au point x_B et la force présente sur le ddl i au point x_A .

Rappelons également que les zones de contact des fondations seront considérées comme rigides, ce qui conduit à un nombre de coefficients intervenant dans la mobilité égal à $6N \times 6N$ dans le cas 3D, où N est le nombre de fondations, ou $3N \times 3N$ dans le cas plan.

Comme cela est décrit dans le premier chapitre, ces grandeurs sont sensibles à toutes les propriétés du système. Les mobilités d'une fondation dépendent également fortement des caractéristiques du sol. Par exemple, lorsque le sol est très rigide, les fondations ont peu d'importance dans l'excitation transmise au Récepteur [87, 99].

Il existe de nombreuses façons de déterminer les composantes d'une mobilité et c'est précisément l'objet de la deuxième partie de ce paragraphe.

Vitesses libres

La vitesse libre du système Source de notre problème est déterminée à partir d'un système constitué de la fondation, du sol et d'une force calibrée en surface. Dans la méthode des mobilités, elle est définie comme la vitesse observée sur les zones de contact lorsque l'excitation du problème est appliquée au système Source découplé du système Récepteur.

II.1.2 Impédance de fondation

L'impédance, ou la mobilité, d'une fondation n'est accessible à un calcul explicite direct que dans les cas les plus simples. Certains auteurs ont, en simplifiant les configurations rencontrées, proposé des formes analytiques pour des fondations circulaires sur un sol homogène ou composé par des couches homogènes. Ces méthodes sont très utilisées en ingénierie parasismique et sont complétées dans le cas d'ouvrages sensibles (en particulier dans le domaine nucléaire) par des simulations numériques.

L'une des approches les plus anciennes est celle proposée par Barkan (1959) [76] pour l'étude des fondations supportant de grosses machines vibrantes. L'auteur étudie, entre autres choses, le cas d'une fondation de surface circulaire sur laquelle est placée une lourde machine vibrante. Le système est étudié en considérant la fondation comme infiniment

rigide (sans déformation) et le sol comme un ensemble de ressorts et d'amortisseurs. Son approche conduit à trois équations du mouvement formant deux systèmes, un pour le mouvement vertical et un autre pour les mouvements horizontal et de rotation qui sont couplés. Ces deux systèmes sont donc étudiés séparément. D'une façon générale, l'auteur décompose les termes d'impédances, comme il est usuel de le faire, suivant la relation :

$$A_u = A_{sta}\eta \quad (\text{II.2})$$

où A_{sta} est l'impédance observée à basses fréquences c'est à dire dans un cas correspondant à la réponse statique et η est un module de rigidité dynamique permettant de déterminer la variation du terme d'impédance en fonction de la fréquence. Une telle décomposition se retrouve chez de nombreux auteurs.

Les mouvements horizontaux et de rotation sont généralement couplés, les termes de couplage de la matrice d'impédance étant symétriques.

Un état de l'art des résultats connus en 1975 pour la détermination numérique des impédances de fondation est donné dans l'article de Hadhjan, Luco et Tsai [18]. Les auteurs étudient principalement deux techniques : l'approche continue et la méthode des éléments finis. Un des points importants est de représenter correctement les conditions de radiation à l'infini. Les auteurs notent que les simulations bidimensionnelles peuvent introduire dans certains cas un biais important.

Une étude approfondie sur la détermination des impédances des fondations a été publiée par Gazetas (1991) [82]. L'approche adoptée permet une approximation des différentes composantes de l'impédance d'une fondation rigide par des relations algébriques simples destinées à l'ingénierie, pour les cas de géométries rencontrés dans la pratique. L'impédance définie dans cette étude représente le rapport d'une force sur un déplacement et se fonde, comme dans l'approche de Barkan, sur l'analogie entre le sol et un ensemble plus ou moins complexe de ressorts amortis. Cette analogie dépend à la fois du mouvement imposé à la fondation, de la forme des fondations et des caractéristiques du sol. Dans cet ouvrage, l'impédance est écrite comme :

$$\mathcal{Z}_u = \frac{P}{u} = K_u + j\omega C_u \quad (\text{II.3})$$

où K_u et C_u sont des fonctions de la pulsation ω .

K_u forme la partie réelle de l'impédance et peut être interprétée comme la raideur dynamique. Elle regroupe les effets de la rigidité et de l'inertie du sol. Sa dépendance fréquentielle provient de l'inertie, car les propriétés "élastiques" du sol peuvent en général être considérées comme indépendantes de la fréquence.

La partie imaginaire ωC_u est représentative de deux sortes de dissipations. Les pertes correspondant à l'"amortissement géométrique", c'est-à-dire à l'énergie portée par les ondes émises par la fondation et s'éloignant de celle-ci et les pertes internes dues au frottement interne des matériaux situés sous la fondation (pertes par hystérésis).

L'auteur propose différentes relations algébriques pour les termes de raideur et de dissipations K_u et C_u en fonction du type de fondation et du type de sol.

Une méthode simplifiée pour déterminer les impédances de fondation, en prenant en compte éventuellement la stratification des sols, est la “méthode des cônes” due à Meek et Wolf [43]. À titre d’exemple, l’expression finale des termes dynamiques de l’impédance d’une fondation circulaire sur sol homogène obtenue par cette méthode pour tous les types de mouvement et d’excitation se met sous la forme [99] :

$$Z_u = Z_{stat}(k + ja_0c) \quad (II.4)$$

où Z_{stat} , k , c et $a_0 = \omega r_0 / \beta$ sont l’impédance statique, le module de raideur dynamique, le module d’amortissement dynamique et la fréquence adimensionnelle, composée de la pulsation multipliée par le rayon du radier et divisée par la vitesse de propagation des ondes de cisaillement β . Il est intéressant de remarquer que cette expression combine les formes adoptées dans les relations (II.2) et (II.3). Pour l’ensemble des mouvements, les modules de raideur et d’amortissement dynamiques sont donnés dans le Tableau II.2, où ν est le coefficient de Poisson, θ est l’angle de rotation autour d’un axe horizontal et ϕ l’angle de rotation autour d’un axe vertical .

	Tamis (k_{xx})	Pompage (k_{zz})	Roulis ($k_{\theta\theta}$)	Torsion ($k_{\phi\phi}$)
Raideur dynamique (k)	1	1	$1 - \frac{a_0^2}{3(\frac{512(1-2\nu)}{81\pi^2(1-\nu)^3} + a_0^2)}$	$1 - \frac{a_0^2}{3((\frac{32}{9\pi})^2 + a_0^2)}$
Amortissement dynamique (c)	$\frac{8}{\pi}(2 - \nu)$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{(1+\nu)^{3/2}}{(1+\nu)^{1/2}}$	$\frac{3\pi}{16\sqrt{2}} \frac{(1+\nu)^{3/2}}{(1+\nu)^{1/2}} \frac{a_0^2}{\frac{512(1-2\nu)}{81\pi^2(1-\nu)^3} + a_0^2}$	$\frac{3\pi}{32} \frac{a_0^2}{3((\frac{32}{9\pi})^2 + a_0^2)}$

TABLE II.2 – Expressions des modules dynamiques de raideur et d’amortissement d’une fondation superficielle circulaire sur un sol homogène déduites du modèle de cône.

Ces termes dynamiques sont à multiplier par les coefficients de l’impédance “statique” à fréquence nulle qui peut être trouvée dans [82].

Ces expressions donnent de bonnes approximations des impédances de fondations circulaires tant que le coefficient de Poisson est inférieur à 1/3. Dans le cas contraire, une correction du modèle doit être introduite.

Ces outils restent bien adaptés pour une gamme de fréquences correspondant au domaine du génie parasismique, c’est à dire inférieures à 20Hz. Dans le domaine de vibrations pouvant atteindre plusieurs centaines de hertz, de tels outils ne sont plus adaptés. C’est la raison pour laquelle les mobilités de fondation seront déterminées numériquement dans la suite.

II.2 Calcul des mobilités

Pour calculer les mobilités d'une fondation nous avons utilisé une méthode numérique. Dans le cas d'une excitation ferroviaire la gamme de fréquences à considérer ($[10 - 250] Hz$) et l'amplitude des vibrations nous permettent un certain nombre de simplifications. Cependant, des contraintes liées tant à la géométrie voulue qu'aux méthodes utilisées sont à respecter.

- Le sol doit être considéré comme un milieu semi-infini car il a la capacité de dissiper toute l'énergie transportée par les ondes s'éloignant de la structure. Cette condition est appelée condition de radiation à l'infini. C'est la raison pour laquelle la méthode des éléments de frontière a été adoptée pour représenter la zone de sol. Il est connu toutefois que la présence d'une stratification comportant une sous-couche très raide a tendance à diminuer la perte d'énergie par radiation. Cet effet peut être pris en compte en étudiant une stratification comportant un sol plus raide en profondeur.
- La structure est de dimensions finies et est généralement constituée d'éléments assimilés à des plaques minces ou à des poutres. Or ces éléments ont un comportement vibratoire très sensible aux dimensions et aux conditions aux limites. Pour ces éléments, une étude en éléments de frontière est moins bien adaptée que la méthode des éléments finis.

II.2.1 Formes des fondations adoptées

Critères gouvernant le choix des fondations

Il existe plusieurs formes de fondations qui répondent à des exigences de stabilité du bâtiment. On peut classer ces fondations en trois grandes familles : les fondations superficielles, les fondations enterrées et les fondations profondes.

Dans la première famille, la structure incluse dans le système Source a la forme d'un radier, c'est-à-dire une plaque, généralement en béton, qui occupe la surface au sol du bâtiment. Ce type de fondation n'est adapté que pour des cas dans lesquels le bâtiment est petit (maison individuelle de plain pied par exemple), et le sol suffisamment stable. Dans ce système, comme dans tous les autres, les fondations incluent un vide sanitaire et des canalisations passant sous le bâtiment.

La deuxième famille comporte des solutions adaptées à des cas où la stabilité du bâtiment demande une attention particulière à l'assise qu'il a sur le sol. Il peut s'agir de longrines, pieux ou caissons enterrés supportés par des semelles.

En ingénierie, les fondations sont classées en fonction des éléments de soutien qui peuvent être des colonnes ou des murs. Les fondations se distinguent dans chacune des catégories selon la forme des semelles (communes ou individuelles). Le dimensionnement des semelles est assuré pour éviter le poinçonnement du sol de fondation et limiter le tassement du sol sous l'ouvrage. Les semelles sont typiquement trois ou quatre fois plus grandes que la surface horizontale du mur ou de la colonne qu'elles supportent.

Les fondations profondes comportent principalement les pieux, qui sont solidaires de la base de l'ouvrage et les inclusions rigides (moins courantes) qui renforcent le sol sans être solidaires de l'ouvrage. Cette dernière catégorie ne sera pas étudiée dans le mémoire compte tenu des outils adoptés qui ne permettent de prendre que des géométries représentées en 2D ou 2.5D, alors que les pieux nécessiteraient de représenter des géométries en trois dimensions.

Formes de fondations typiques choisies

Nous avons choisi trois formes de fondations correspondant à des cas typiques rencontrés dans la pratique. Évidemment, les formes adoptées sont simplifiées car des éléments secondaires, tels que les réseaux de canalisations, ne sont pas représentés.

Les fondations choisies sont représentées dans la Figure II.1 et correspondent à des fondations sur semelles, un radier en surface et un caisson enterré. Les pieds des superstructures sont dessinés en pointillés, permettant d'identifier les "zones de contact" entre les deux sous-structures, au droit desquelles sont transmis les efforts entre sous-structures et pris en compte via la mobilité de chacune d'entre elles. On note que cette surface correspond à une coupure à un niveau choisi arbitrairement entre la fondation et la structure elle-même.

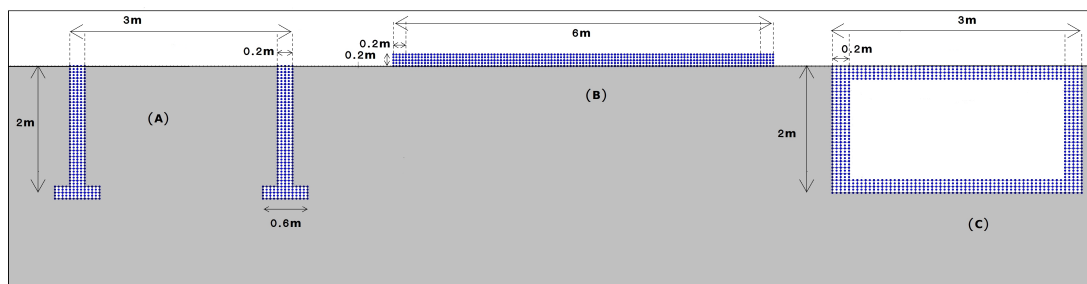


FIGURE II.1 – Schéma des trois types de fondations choisies dans cette étude, (A) : fondations sur semelles, (B) : radier en surface, (C) : caisson enterré.

II.2.2 Procédure de calcul des mobilités

Compte tenu des trois types de fondations choisies, et de la coupure choisie pour la décomposition en sous-structures, il est nécessaire de représenter un domaine hétérogène comportant la fondation d'une part et le sol environnant d'autre part. La méthode numérique choisie est une méthode mixte (FE-BE) couplant Éléments Finis (ou Finite Element, FE) et Éléments de Frontière (ou Boundary Element BE). Le code utilisé, développé au CSTB par Jean, est dénommé Mefissto [25, 26]. Le tenseur de Green choisi dans la méthode ne permet pas de prendre en compte la surface libre et le maillage d'éléments de frontière doit donc comporter une représentation de la surface libre du sol en complément de l'interface sol-fondation, la fondation étant représentée elle-même par éléments finis.

II.2. CALCUL DES MOBILITÉS

Le maillage de la surface libre doit être suffisamment étendu de part et d'autre de l'ouvrage pour représenter convenablement une surface de sol supposée infinie. La méthode peut également permettre de représenter une stratification à condition de mailler par éléments de frontière les couches de sol stratifiées.

À l'interface entre les deux domaines, la continuité des vitesses et la conservation des efforts permettent d'assurer le couplage. L'ensemble des calculs est effectué dans l'espace de Fourier, fréquence par fréquence. Les mobilités sont déterminées en appliquant différents types d'efforts sur la zone de contact.

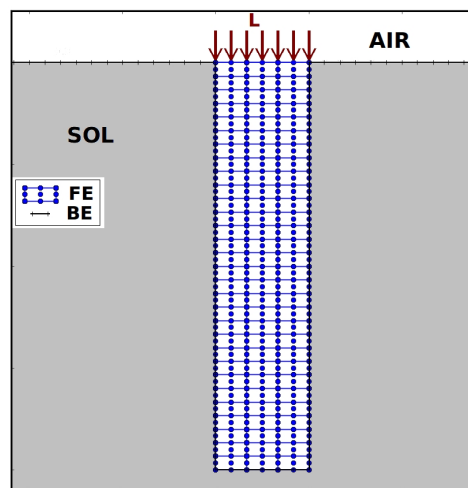


FIGURE II.2 – Illustration de l'excitation verticale d'une fondation pour le calcul de sa Mobilité.

Plus de détails sur le code Mefissto sont donnés dans l'Annexe C qui lui est consacrée.

Les mobilités sont déterminées par un nombre de simulations égal au nombre de degrés de liberté. Les forces nodales appliquées sont identiques sur toute la zone de contact et leur somme est égale à l'unité, pour les efforts horizontaux et verticaux. La mobilité nécessite également d'appliquer un moment sur la zone de contact, qui est obtenu en appliquant une répartition linéaire de forces nodales, le moment résultant étant unitaire. En toute rigueur, il faudrait assurer que la zone de contact se comporte rigidement. Toutefois, il a été vérifié que la zone de contact se comporte bien de cette façon, en raison de la rigidité importante du béton de structure, comme indiqué dans la sous-section II.2.3.

Les composantes des vitesses sur ces mêmes nœuds sont alors recueillies pour donner les N_{ddl} composantes de la mobilité générées par l'excitation étudiée. Dans cet espace à deux dimensions le nombre de degrés de liberté est trois : deux translations et une rotation dans le plan. Le nombre de simulation à effectuer est égal, dans la procédure utilisée, au nombre de distributions de forces différentes qu'il faut considérer, soit exactement le même nombre que celui des degrés de liberté de toutes les zones de contact. Des schémas illustratifs de ces calculs pour les composantes déduites d'une force transverse (F) et d'un moment (M) sont donnés sur la Figure II.3. La Figure II.2 illustre une excitation longitudinale (L).

Dans ce document, la majorité des calculs sont en deux dimensions. Néanmoins, les ondes en provenance de la source se propagent également dans la direction parallèle à la voie et en vue d'évaluer cet effet, certains cas ont été traités en 2.5D à l'aide du même logiciel (voir l'annexe C.2). Dans cette représentation le nombre de degrés de liberté accessibles est, comme en trois dimensions, de six : trois translations et trois rotations.

Pour bien définir la matrice des mobilités, il convient de noter que celle-ci se décompose en sous-matrices carrées relatives aux zones de contact, i.e. aux différentes fondations. Ces sous-matrices sont composées de N_{ddl}^2 termes donnant le rapport entre une composante de la vitesse résultante (ici, pour le cas 2D v_x , v_y ou v_α) et une force appliquée sur un degré de

liberté (L , F ou M).

$$Y^{ij} = \begin{pmatrix} Y_{Lx}^{ij} & Y_{Ly}^{ij} & Y_{L\alpha}^{ij} \\ Y_{Fx}^{ij} & Y_{Fy}^{ij} & Y_{F\alpha}^{ij} \\ Y_{Mx}^{ij} & Y_{My}^{ij} & Y_{M\alpha}^{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{II.5})$$

où i est l'indice du point où est appliquée la force d'excitation et j l'indice du point d'observation de la vitesse.

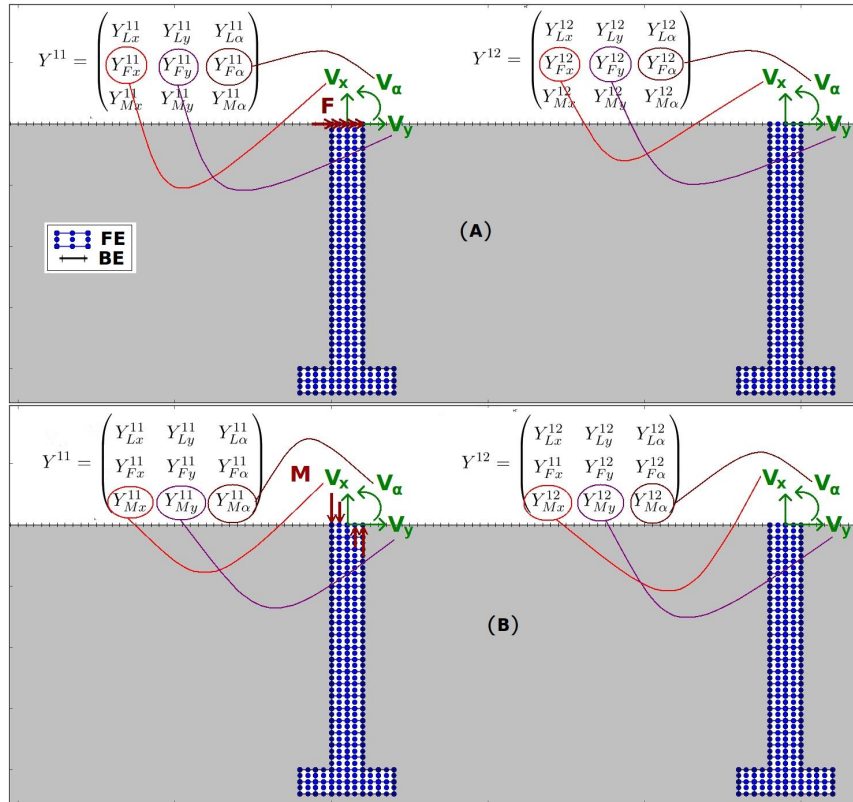


FIGURE II.3 – Schéma illustratif de l'obtention des composantes de la mobilité données par une excitation verticale (A) et un moment (B) des fondations sur semelles.

Lorsque toutes les fondations ont été caractérisées, toutes les sous-matrices Y^{ij} sont connues et la matrice complète s'écrit :

$$Y = \begin{pmatrix} Y^{11} & Y^{12} \\ Y^{21} & Y^{22} \end{pmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Dans le cas à deux fondations où celles-ci sont identiques, la symétrie du problème permet de réduire le nombre de simulations. C'est le cas dans l'exemple présenté sur la Figure II.3 où l'on peut remarquer que $Y^{11} = Y^{22}$ et $Y^{12} = Y^{21}$.

II.2. CALCUL DES MOBILITÉS

Milieu	Compression	Cisaillement	Torsion	Flexion	Rayleigh
Demi-espace homogène	$\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	$\times$	$\times$	$\frac{0.862+1.14\nu}{1+\nu}c_T$
Poutre	$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\times$	$\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$	$(\omega^2 \frac{Eh^2}{12\rho})^{1/4}$	$\times$
Plaque	$\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$	$\sqrt{\frac{E(1-2\nu)}{2\rho(1-\nu)(1-\nu^2)}}$	$\times$	$(\omega^2 \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)})^{1/4}$	$\times$

TABLE II.3 – Expressions usuelles des célérités des ondes dans les différentes zones du problème.

II.2.3 Vérifications

Il est important de vérifier que chaque zone de contact se comporte de façon rigide car si ce n'était pas le cas, il serait nécessaire de considérer chaque point du maillage de la zone de contact comme un degré de liberté, ce qui augmenterait de façon importante les dimensions de la matrice de mobilité et limiterait donc fortement l'intérêt de la méthode.

Pour s'en assurer, deux vérifications complémentaires sont données sur les deux figures qui suivent. La première représente les longueurs d'ondes relatives aux principales ondes présentes dans le sol et la fondation. Celles-ci sont les ondes de compression, de cisaillement et de Rayleigh dans le sol ainsi que les ondes de compression, de cisaillement, de torsion et de flexion dans une plaque ou une poutre. Elles ont été déterminées à partir de leurs célérités, dont les expressions sont accessibles dans la littérature [79, 75], et résumées dans le tableau II.3. Les symboles (λ, μ) représentent les constantes de Lamé et (E, ν) le module d'Young et le coefficient de Poisson, ρ est la masse volumique, h l'épaisseur de la plaque ou de la poutre, ω la pulsation et c_T la célérité des ondes transverses.

Les longueurs d'ondes sont déduites du rapport de la célérité concernée et de la fréquence $\Lambda_i = c_i/f$. Elles sont tracées sur la Figure II.4 avec les valeurs suivantes $E_{sol} = 200e6Pa$, $\rho_{sol} = 1600g/m^3$, $\nu_{sol} = 0.257$, $E_{bat} = 26e9Pa$, $\rho_{bat} = 2400g/m^3$, $\nu_{bat} = 0.3$ et $h = 0.2m$.

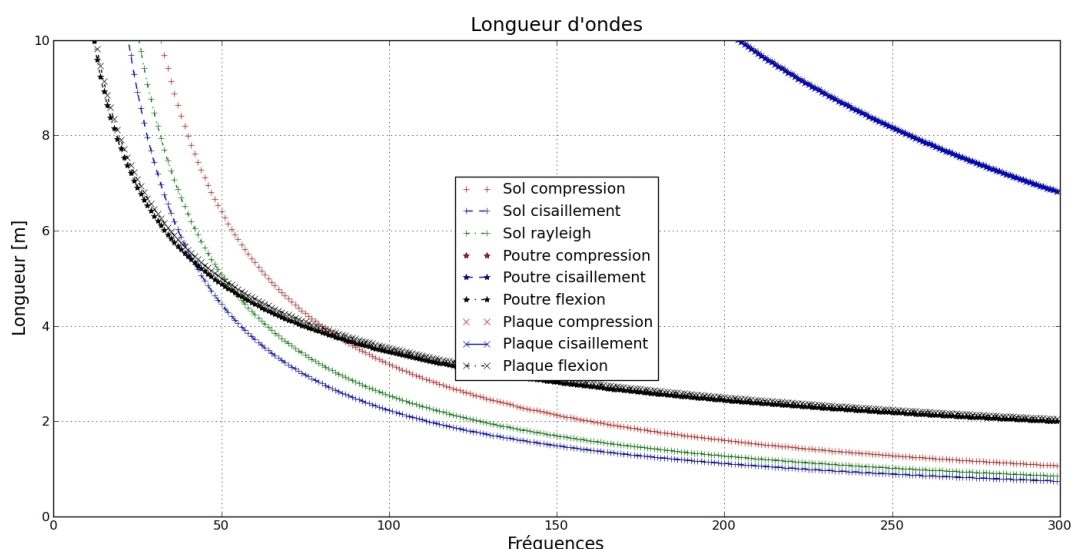


FIGURE II.4 – Longueurs d'ondes rencontrées dans les différentes zones du problème

On observe que, quel que soit le type d'onde, les longueurs mises en jeu sont bien

supérieures aux dimensions de la surface de la zone de contact dont la dimension est de l'ordre de quelques dizaines de centimètres, même dans le cas du radier où les zones de contact sont placées au bas des voiles verticaux.

Plus directement, il est possible de vérifier que la zone de contact subit un déplacement de corps rigide, quels que soient les efforts appliqués (Force verticale, Force horizontale, Moment), autrement dit que la zone de contact reste plane. Pour ce faire, la Figure II.5 montre la zone déformée dans les différents cas étudiés pour un sol moyen.

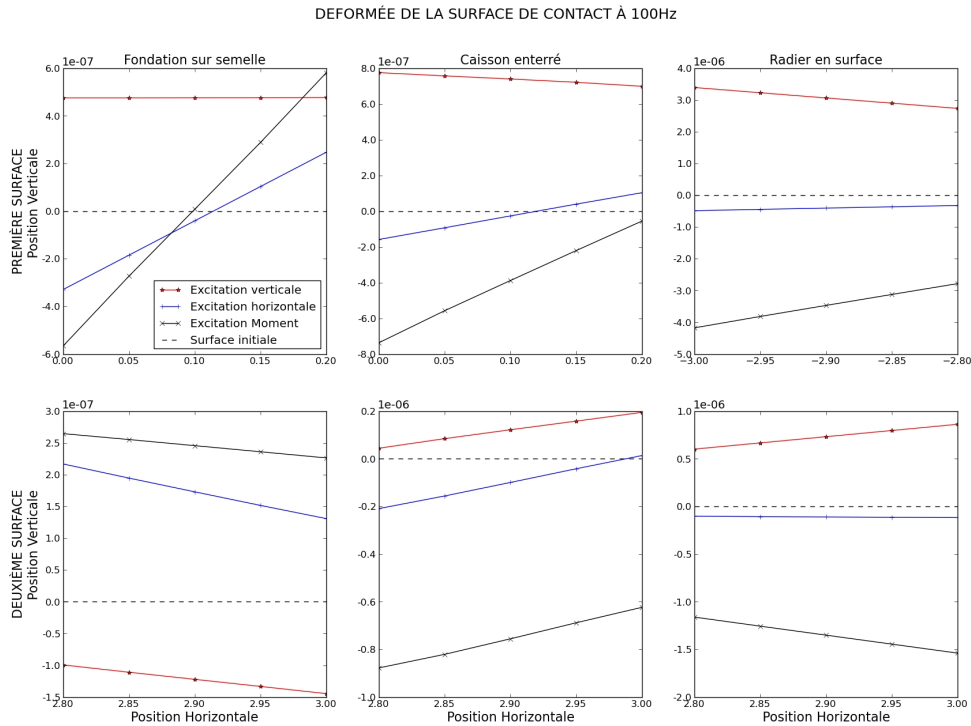


FIGURE II.5 – Déformées des surfaces des fondations lors de l'application des distributions de forces à $100Hz$.

Il est donc possible de vérifier directement sur cette figure que les sections planes restent planes.

Une troisième vérification peut s'effectuer sur la symétrie des mobilités. Comme le prescrit le principe de réciprocité de Rayleigh [88] les mouvements générés sur un *ddl* par une force appliquée sur un deuxième *ddl* doivent être identiques à ceux générés sur le deuxième *ddl* par une force appliquée sur le premier *ddl*. Cette observation est simple à effectuer : il suffit de tracer simultanément les composantes symétriquement opposées par rapport à la diagonale de la mobilité en fonction de la fréquence. Dans cette optique, les trois ensembles de courbes de la Figure II.6 représentent certaines des composantes mentionnées pour les trois types de fondations présentés dans le paragraphe précédent.

II.2. CALCUL DES MOBILITÉS

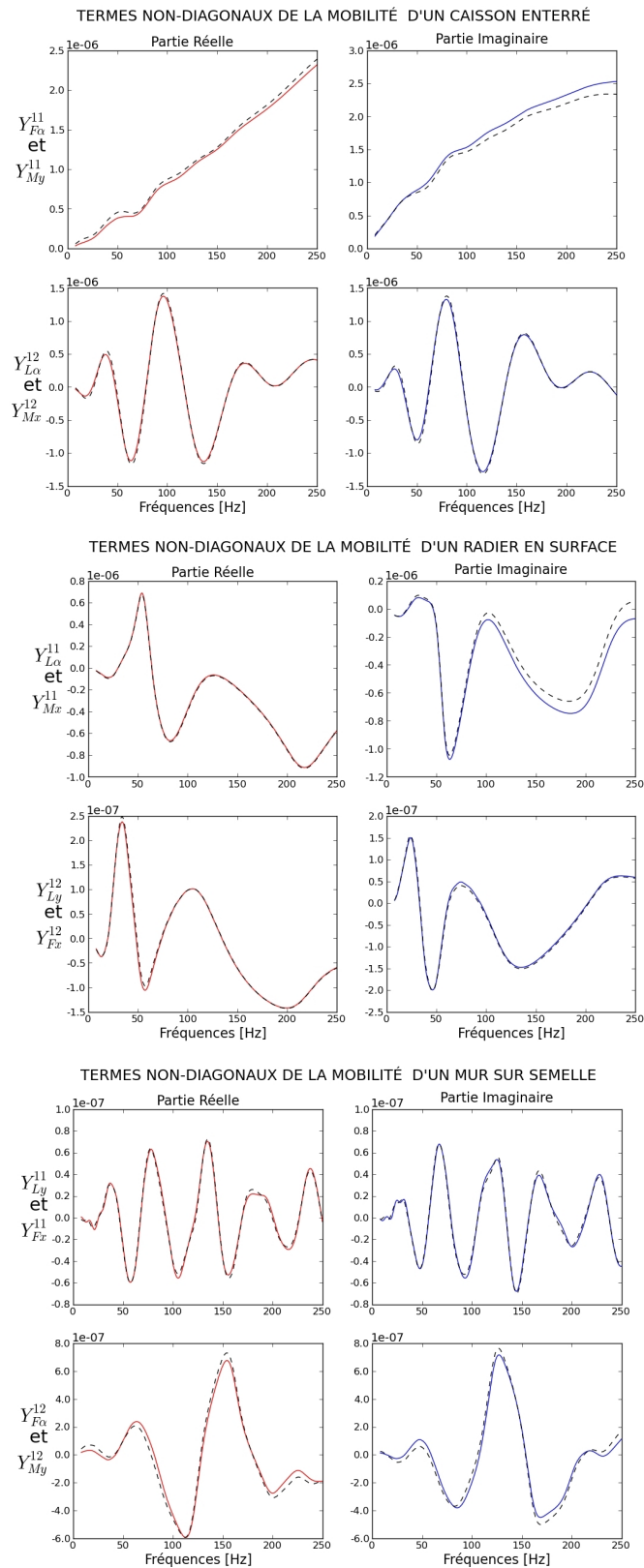


FIGURE II.6 – Symétrie des trois types de fondations supportées par un sol moyen.

Avec les courbes présentées, seules les sous-matrices Y^{11} et Y^{12} sont affichées car, par construction du maillage, les égalités suivantes sont toujours respectées : $Y^{11} = Y^{22}$ et $Y^{12} = Y^{21}$. À l'exception de certaines parties imaginaires, les mobilités sont superposées et la symétrie est bien respectée.

II.2.4 Mobilités 2D

La réponse d'une fondation dépend des caractéristiques du sol, de sa forme et de la présence d'autres fondations à proximité. Dans ce paragraphe, nous verrons les trois formes distinctes, le radier, la fondation sur semelle et le caisson. Pour chacune de ces configurations, nous observons les tendances des composantes de leurs mobilités d'entrées et de transferts lorsqu'elles reposent sur un sol de caractéristiques moyennes.

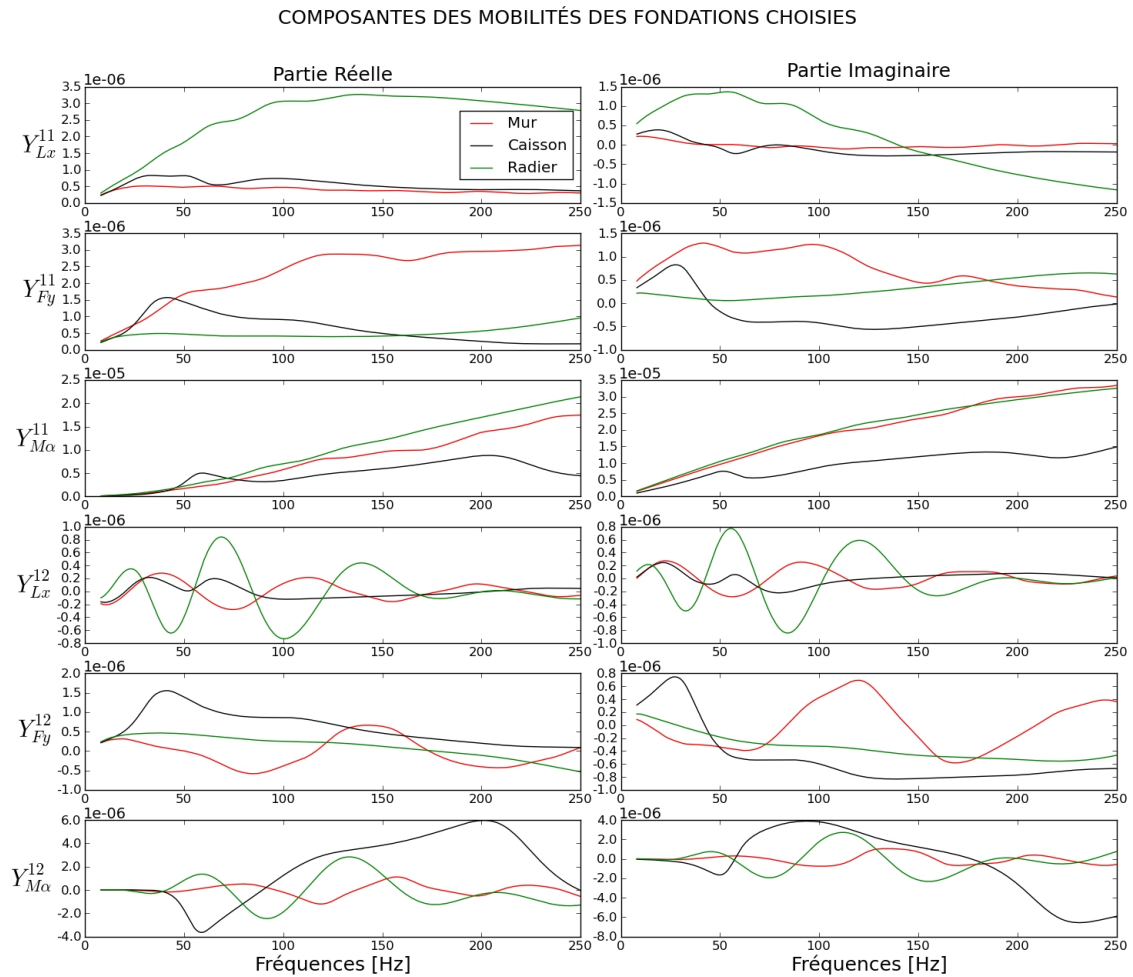


FIGURE II.7 – Mobilités d'entrée et de transfert des trois types de fondations supportées par un sol homogène moyen.

Les six ensembles de courbes du haut représentent les mobilités d'entrées, soit respectivement du premier au troisième les termes diagonaux de la matrice de mobilité correspondant de bas en haut à des efforts verticaux, des efforts horizontaux et des moments

II.2. CALCUL DES MOBILITÉS

appliqués au même point. On peut noter que le degré de liberté le plus sensible n'est pas le même pour tous les types de fondation. Pour le radier, le mouvement vertical est nettement supérieur au mouvement horizontal alors que pour les deux autres c'est le degré de liberté horizontal qui est le plus sensible.

Sur les six ensembles de courbes situés dans la zone inférieure de la Figure II.7, ce sont les mobilités de transferts qui sont visibles. Pour celles-ci, la prépondérance des mouvements horizontaux ou verticaux a la même tendance que pour les mobilités d'entrées. En revanche, la rotation est ici plus forte pour le caisson que pour le radier.

Parallèlement à ces observations, il est intéressant d'évaluer l'importance relative des mobilités de transfert. Ces composantes traduisent l'importance de la corrélation entre les deux zones de contact. Afin d'obtenir un indicateur sur l'importance des termes de transfert, nous proposons d'observer le rapport mobilité de transfert sur mobilité d'entrée dans les différents cas (Figure II.8).

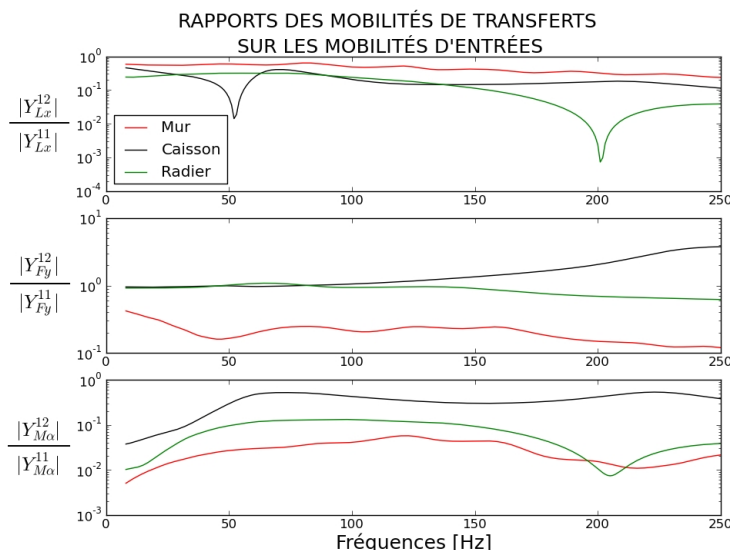


FIGURE II.8 – Rapports de la mobilité de transfert sur la mobilité d'entrée pour les trois types de fondations supportées par un sol homogène moyen.

D'après ces courbes les composantes de transferts ont, au moins pour l'un des trois degrés de liberté observés, une importance significative. Il est donc souhaitable de conserver ces composantes dans les trois situations décrites ici.

II.2.5 Mobilités 2.5D

Les calculs 2D présentés précédemment correspondent à un déplacement plan (dans le plan (x, y)), c'est-à-dire un déplacement simultané de tous les points d'une fondation (supposée infinie) situés sur une même droite perpendiculaire au plan (x, y) . Comme on le verra par la suite, ce calcul est bien adapté pour des sources constituées d'une ligne de forces parallèle à l'axe Oz agissant toutes en phase.

Si l'on veut représenter la réponse de la même fondation à une force ponctuelle harmonique située en surface du sol, ou à une ligne de sources de longueur finie suivant l'axe $0z$, il est indispensable de prendre en compte la propagation des ondes dans la direction z . C'est l'objet du calcul 2.5D.

En pratique, la mobilité est déterminée en appliquant au problème étudié une transformée de Fourier spatiale pour la variable z , ce qui revient à résoudre le problème pour chaque nombre d'onde, noté k_z . L'application de la transformée de Fourier inverse permet d'obtenir alors le déplacement dans l'espace réel (voir Annexe C.2 Mefissto 2.5D).

Principe de la simulation numérique

Il a été vu précédemment que le calcul 2D de la mobilité est réalisé en décrivant la zone de la fondation par des éléments finis, l'interface avec le sol étant définie par éléments de frontière. Pour le cas 2.5D, il serait nécessaire de remplacer les éléments finis par des éléments finis spectraux qui ne sont pas présents dans le code Mefissto. Dans ce cas, il est toutefois possible de contourner la difficulté en représentant le domaine correspondant à la fondation par des éléments de frontière.

Comme précédemment, pour déterminer les termes de mobilité relatifs à une zone de contact, il convient d'appliquer une distribution de forces sur la zone de contact. Une autre difficulté apparaît car la zone de contact de la fondation est a priori infinie dans la direction z et une force appliquée dans le plan $z = 0$ par exemple induit des déplacements variant avec z . Pour prendre en compte l'interaction entre les zones de la fondation situées à des distances z différentes, il a été mis en place une approximation reposant sur le découpage de la fondation en zones $S_1, S_2, \dots, S_n$ de même largeur comme indiqué en Figure II.9.

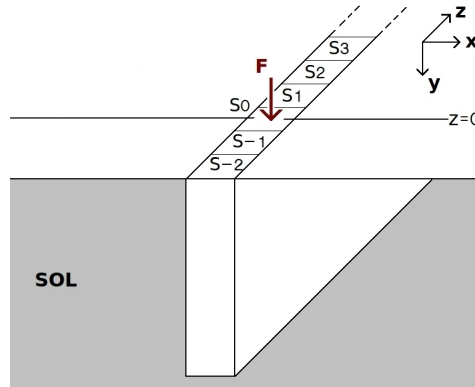


FIGURE II.9 – Représentation des zones de contact d'une fondation en 2.5D.

Il est alors possible d'appliquer une répartition d'efforts sur chaque zone S_i et de déterminer les vitesses induites sur la zone S_j . Ces déplacements sont obtenus en fonction de k_z et le retour dans l'espace réel est alors obtenu par :

$$v_i(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{v}_i(x, y, k_z) e^{jk_z z} dk_z \quad (\text{II.7})$$

où i peut prendre les valeurs x, y ou z .

Les rotations sont obtenues à partir de considérations géométriques sur les composantes des translations. Dans l'exemple qui suit, nous identifions deux points dans l'état initial du

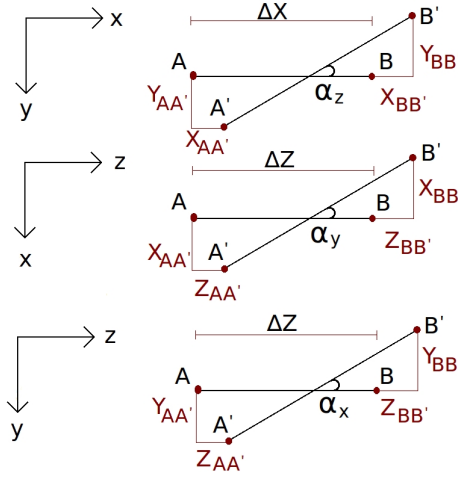


FIGURE II.10 – Représentation des grandeurs utiles au calcul des rotations.

maillage, A et B , et nous observons leurs déplacements après application de l'excitation. Leurs nouvelles positions sont notées A' et B' . Ces déplacements sont, puisque le modèle est harmonique, obtenus en divisant les vitesses par $j\omega$. La rotation est donnée par l'angle que forme le segment AB avec le segment $A'B'$ (Figure II.10) et la vitesse de rotation est le produit de cet angle par la pulsation. L'angle recherché est indiqué par l'indice de l'axe autour duquel le segment pivote. Par exemple, d'après les relations trigonométriques usuelles, l'angle α_z est donné par la relation suivante :

$$\alpha_z = \arctan \left(\frac{Y_{AA'} - Y_{BB'}}{\Delta X + X_{AA'} - X_{BB'}} \right)$$

Ceci nous amène à définir les vitesses de rotation à partir des vitesses en deux points du maillage, n et $n-1$, par les relations qui suivent :

$$\dot{\alpha}_x = j\omega \arctan \left(\frac{v_y^n - v_y^{n-1}}{j\omega \Delta z + v_z^n - v_z^{n-1}} \right) \quad (\text{II.8})$$

$$\dot{\alpha}_y = j\omega \arctan \left(\frac{v_x^n - v_x^{n-1}}{j\omega \Delta z + v_z^n - v_z^{n-1}} \right) \quad (\text{II.9})$$

$$\dot{\alpha}_z = j\omega \arctan \left(\frac{v_y^n - v_y^{n-1}}{j\omega \Delta x + v_x^n - v_x^{n-1}} \right) \quad (\text{II.10})$$

Remarquons au passage que les vitesses, de l'ordre de 10^{-6} m/s , sont toujours bien inférieures aux termes $\omega \Delta z$ et $\omega \Delta x$ qui représentent le produit de la distance entre deux points du maillage et la pulsation. Celui-ci est typiquement de l'ordre de $10^{-2} 2\pi f$ où f est la fréquence comprise entre 10 et 250 Hz . Les définitions précédentes peuvent se simplifier grâce au développement limité de la fonction $\arctan$ au premier ordre, qui n'est autre que l'argument de cette fonction.

Les composantes créées par un moment sont, dans les cas des moments M_z et M_y , obtenues directement par une simulation où le moment est appliqué de façon similaire au cas en deux dimensions. Pour les composantes générées par un moment M_x autour de l'axe x

les composantes sont déduites par la superposition des vitesses résultantes d'une distribution de forces ponctuelles sur la surface de la fondation, selon la relation suivante :

$$v_i(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-N_z/2}^{N_z/2} W_{Ml} \hat{v}_i(x, y, k_z) e^{jk_z(z+l\delta z)} dk_z$$

où l'indice i peut prendre les valeurs x, y ou z et W_M est une fonction de pondération à prendre en compte sur les forces appliquées pour générer le moment M_x .

La relation précédente peut se mettre sous la forme :

$$v_i(x, y, z) = \sum_{l=-N_z/2}^{N_z/2} W_{Ml} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{v}_i(x, y, k_z) e^{jk_z(z+l\delta z)} dk_z \quad (\text{II.11})$$

qui permet de calculer ces vitesses. La réponse à une force ponctuelle appliquée sur un z donné étant connue, cette relation correspond donc à un post-traitement des résultats.

Pour la composante de la mobilité $Y_{M_x \alpha_x}$, une difficulté supplémentaire apparaît. Selon la relation (II.10), il faut quantifier l'effet du moment en des points situés à une distance δz du plan $z = 0$. Pour cela, la relation précédente est légèrement modifiée et prend en compte le changement de position :

$$v_i(x, y, z + \delta z) = \sum_{l=-N_z/2}^{N_z/2} W_{Ml} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{v}_i(x, y, k_z) e^{jk_z(z+\delta z+l\delta z)} dk_z \quad (\text{II.12})$$

La rotation est finalement obtenue par la relation (II.10) où les vitesses v_i^n et v_i^{n-1} sont donnée par les situations (A) et (B) de la Figure II.11.

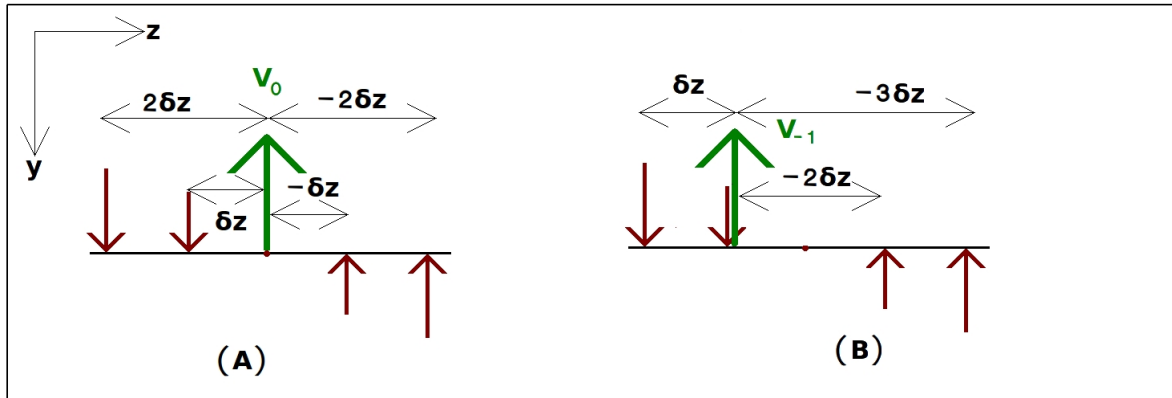


FIGURE II.11 – Représentation des distances Force-Vitesse à prendre en compte pour les vitesses induites par un moment M_x selon la distance entre le plan $z = 0$ et le point considéré.

Une description détaillée de toute cette procédure fait l'objet du deuxième paragraphe de l'Annexe C.

Observation de la “mobilité” dans le plan fréquence-nombre d’onde

Un résultat intéressant est l’observation de résultats intermédiaires en fonction du nombre d’onde k_z . Ayant appliqué les efforts sur la zone S_0 centrée sur l’axe Ox en fonction de k_z , il est possible de déterminer la moyenne des vitesses observées dans cette zone en fonction de x, y, k_z pour chaque fréquence d’excitation.

On peut alors représenter ce rapport dans le plan d’onde-fréquences (k_z, f) . Ce résultat est reporté Figure II.12 pour les parties réelles des seules composantes d’entrée relatives aux degrés de liberté portés par x et y .

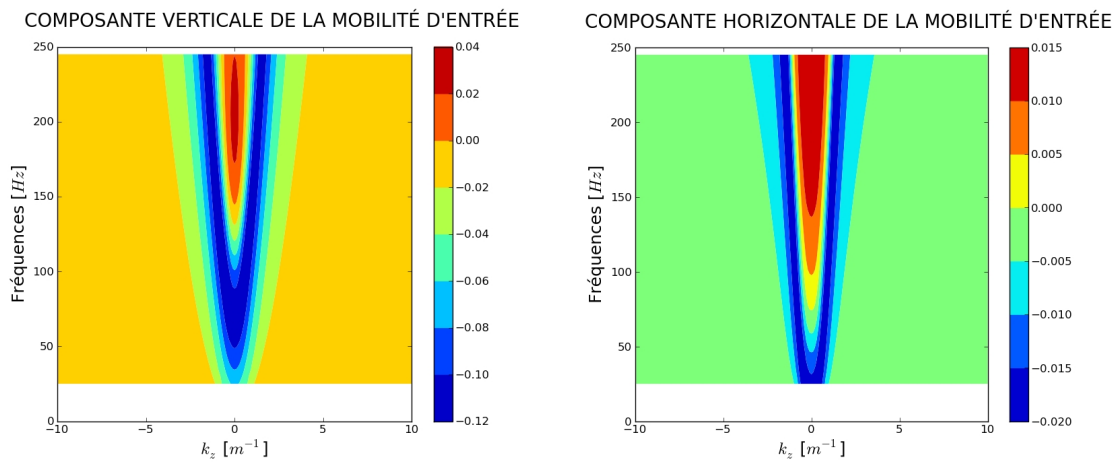


FIGURE II.12 – Partie réelle des composantes de la mobilité d’entrée Y_{Ly}^{11} et Y_{Fx}^{11} dans le plan fréquence-nombre d’onde.

Toutes les composantes réelles de la mobilité sont symétriques par rapport à l’axe $k_z = 0$ car elles évoluent, pour une fréquence donnée, en $\cos(k_z z)$. D’autre part on peut remarquer que seule la zone proche de $k_z = 0$ est significative, cette zone s’élargissant quand la fréquence augmente. Lorsque l’amplitude du nombre d’onde augmente, les valeurs des composantes de la mobilité tendent vers 0. Bien entendu, la symétrie observée est due à la position centrale de la zone observée.

Vérification du calcul effectué à l’aide de la mobilité 2.5D

Pour illustrer ce paragraphe, nous avons calculé par un calcul direct et par la méthode des mobilités les vitesses au bord d’une fondation d’un voile en béton enterré dans un sol moyen sur un mètre. La représentation du problème complet est donnée sur la Figure II.13.

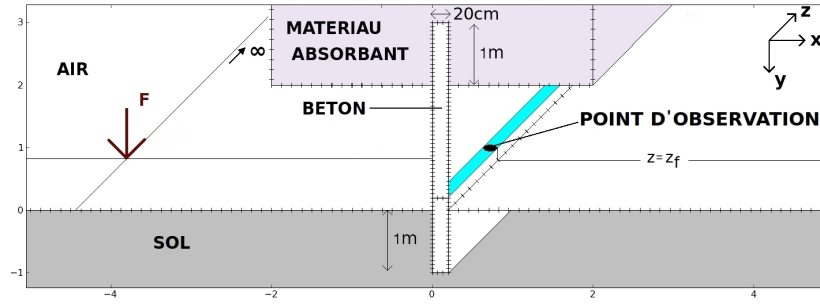


FIGURE II.13 – Représentation du maillage utilisé pour le calcul complet d'un voile de 20cm d'épaisseur enterré sur un mètre dans un sol moyen.

Le matériau absorbant placé sur la superstructure, dont les caractéristiques sont identiques à celles d'un sol moyen, est destiné à simuler les pertes d'énergie acoustique dans l'ensemble de la structure. De plus, il permet d'éviter d'éventuels modes de corps rigide dans les simulations des composantes de la mobilité du système Récepteur, modes qui pourraient apparaître car la superstructure est de petite taille.

Ce système est découplé au niveau de la zone de contact en un système Source et un système Récepteur. Après caractérisation de ces deux systèmes par leurs mobilités, la vitesse de contact est calculée et comparée à la vitesse obtenue au point d'observation par un calcul direct sans sous-structures (Figure II.14).

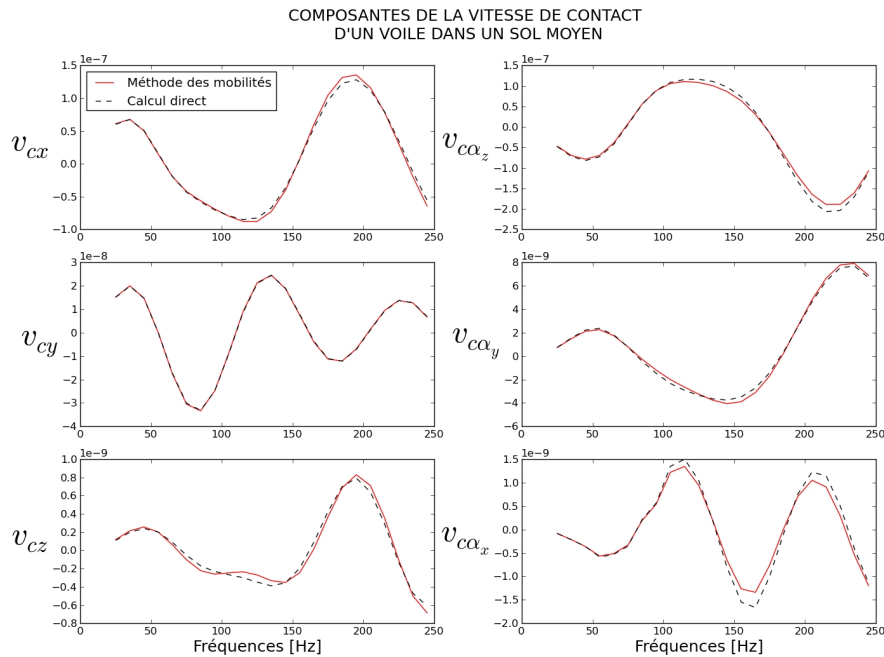


FIGURE II.14 – Comparaison entre les composantes de la vitesse de contact et le calcul complet d'un voile de 20cm d'épaisseur enterré sur un mètre dans un sol moyen en 2.5D.

Ces résultats permettent donc de valider la méthode permettant de coupler Source et Récepteur à l'aide de la "mobilité 2.5D".

II.3 Calcul de la vitesse libre de la Source

II.3.1 Vitesses libres 2D

Les vitesses libres sont déterminées avec le même logiciel (Mefissto) que celui utilisé pour le calcul des mobilités. La sollicitation est constituée par une ligne de force harmonique d'amplitude unité. Nous ne calculons pas la réponse de la fondation à une excitation ferroviaire réelle, mais la réponse à une force unitaire ($1N/Hz/m$) en surface. Comme l'ensemble des calculs est linéaire, et que les résultats sont stockés sous la forme d'un ensemble de valeurs numériques, ces résultats peuvent être recombinaés pour obtenir la réponse à une force ponctuelle d'amplitude quelconque en fonction de la fréquence. Cette amplitude peut être calibrée pour ajuster au mieux les vibrations induites par une source ferroviaire comme on le verra par la suite. On note que la "vitesse libre" obtenue au cours de ces calculs ne correspond pas au sens habituel utilisé par exemple en génie parasismique qui correspond à la vitesse à la surface du sol en l'absence de l'ouvrage et de ses fondations. La vitesse réellement "libre", c'est-à-dire sans fondation sera utilisée dans le calibrage de la force appliquée en section suivante.

La vitesse libre d'une Source en deux dimensions et à deux zones de contact prend la forme d'un vecteur à six composantes similaire à (II.13).

$$v_L = (v_{Lx}^1 \quad v_{Ly}^1 \quad v_{L\alpha}^1 \quad v_{Lx}^2 \quad v_{Ly}^2 \quad v_{L\alpha}^2)^T \quad (\text{II.13})$$

où les vitesses $v_{L\alpha}^k$ correspondent à des vitesses de rotation. Afin d'illustrer le calcul effectué pour la détermination des composantes de la vitesse libre, voici un schéma récapitulant l'ensemble des éléments de la simulation.

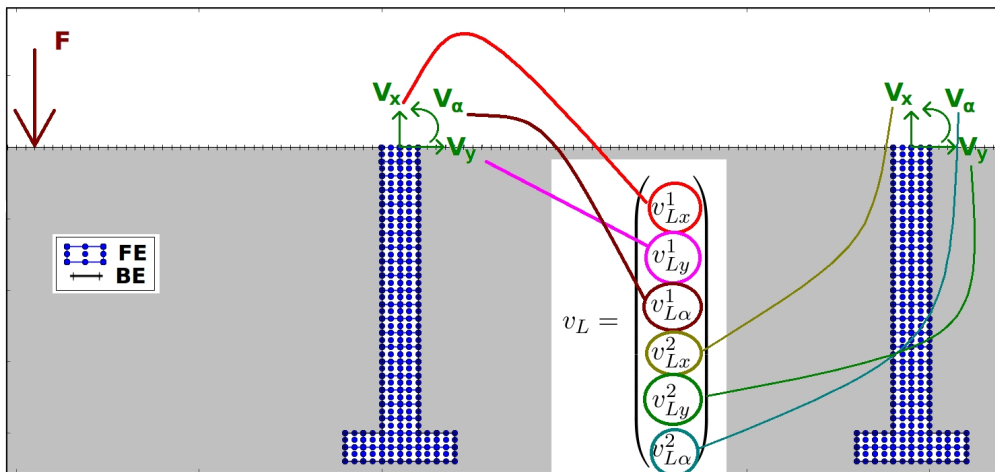


FIGURE II.15 – Schéma de la simulation permettant d'obtenir la vitesse libre non-calibrée du système source.

Cette procédure donne, pour les trois types de fondations 2D étudiées ici, les amplitudes des composantes tracées sur la figure qui suit.

VITESSES LIBRES DES FONDATIONS

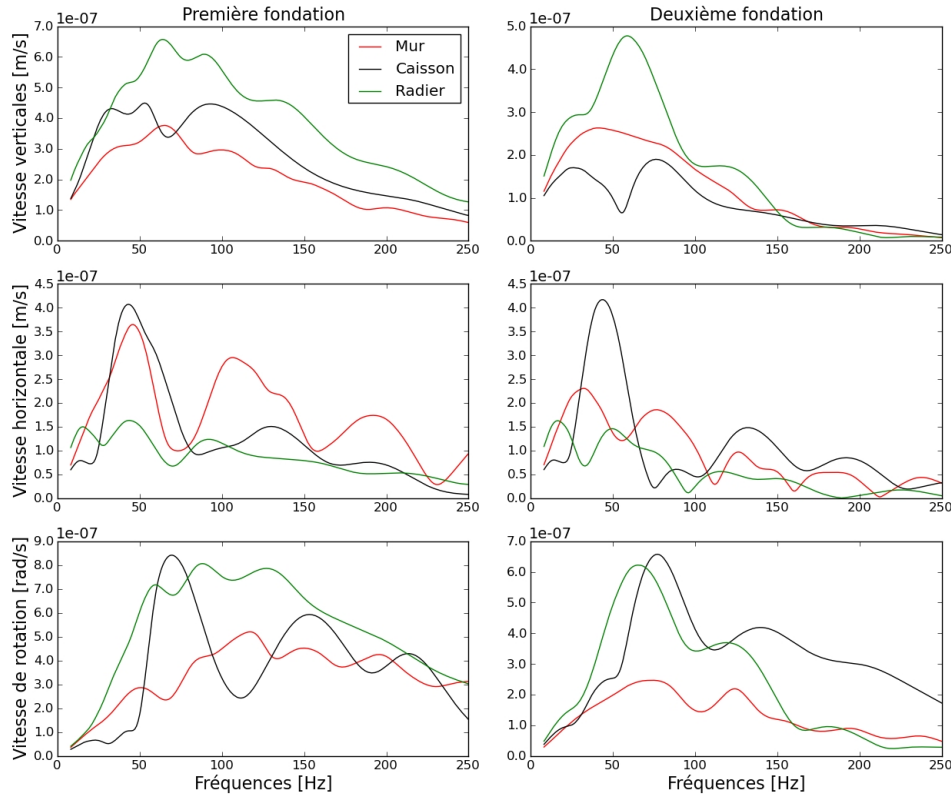


FIGURE II.16 – Amplitudes des composantes de la vitesse libre non-calibrée aux deux points de contact des fondations étudiées.

On peut remarquer que dans tous les cas la vitesse observée sur la deuxième zone de contact est inférieure à celle observée sur la première zone. Cela est dû à l'atténuation de l'onde lors de la propagation entre la première zone et la deuxième.

On peut également observer que les composantes horizontales des vitesses sont globalement plus faibles pour le radier que pour les deux autres fondations. En revanche, la composante verticale est équivalente pour tous les types de fondations.

II.3.2 Vitesse libre 2.5D

Les vitesses libres en 2.5D sont déterminées, comme pour la mobilité, en fonction du nombre d'onde suivant z , pour une force ponctuelle harmonique unité placée à l'emplacement de l'excitation.

Avec une géométrie en 2.5D il est possible d'obtenir une autre représentation de l'excitation de la vitesse libre. En effet, il est possible de calculer la vitesse libre de la fondation en réponse à une ligne de forces décorrélées sur une ligne de sources de longueur donnée. Ce type de "vitesse libre" est obtenue en intégrant en énergie les réponses de la fondation en $z = 0$ pour les différentes positions des forces sur la ligne de sources placée sur l'axe des z .

II.3. CALCUL DE LA VITESSE LIBRE DE LA SOURCE

La réponse finale dans l'espace des nombres d'onde est de la forme :

$$\hat{v}_L(k_z) = \sqrt{\int_{z_{min}}^{z_{max}} |\hat{v}_{Li}(k_z)|^2 dz} \quad (\text{II.14})$$

où les $\hat{v}_{Li}$ sont les réponses du système Source à la force F_i placé sur l'axe $(x, y) = (-5, 0)$ à la position z_i .

La figure qui suit (Figure II.17) propose une comparaison des vitesses libres obtenues en $z = 0$ pour une ligne de forces décorréelées de 20m centrée sur $z = 0$ et une force ponctuelle placée sur le même axe. Ces vitesses sont représentées par leurs valeurs absolues.

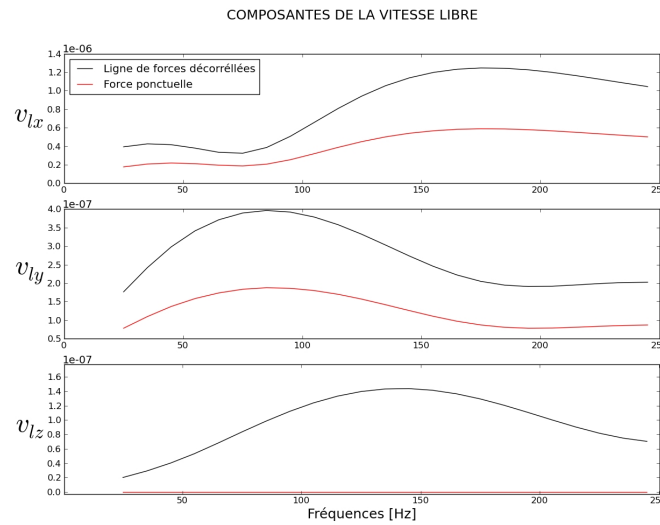


FIGURE II.17 – Vitesse libre d'une fondation de type mur enterré en $z = 0$, modélisée en 2.5D

Sur cette figure on peut observer que les réponses en fréquence ont des formes similaires. Toutefois, la réponse pour le déplacement suivant z sur l'axe de la Source, qui doit être nulle dans le cas corrélé, est non nulle dans le cas décorrélé. Ce résultat est clairement dû à ce que le déplacement suivant z s'annule en raison des accords de phase pour le calcul des signaux corrélés, mais que l'accord de phase n'existe plus pour les signaux décorrélés, les effets correspondant à des points symétriques par rapport à Ox ne s'équilibrent plus, mais au contraire s'ajoutent.

II.4 Calibration sur des mesures accélérométriques

II.4.1 Recalage de l'excitation sur une mesure accélérométrique

La procédure choisie pour calibrer les vitesses libres se base sur des mesures d'accélération en surface du sol. Ces mesures doivent s'effectuer dans les conditions les plus proches possibles de celles voulues dans l'étude du système Source, mis à part que le sol ne soutient alors aucune structure (mesures en champs libre). Ces mesures sont donc supposées effectuées dans le même sol que celui du système Source, avec la même excitation (même voie, même train), par des accéléromètres placés à intervalles réguliers sur une ligne perpendiculaire à la voie, mesurant l'accélération verticale au sol.

Ces résultats connus, il est alors possible de déterminer la transformée de Fourier de la force ponctuelle permettant de reproduire au mieux les enregistrements réalisés. Pour ce faire, on utilise le modèle numérique comportant uniquement le sol modélisé par éléments de frontière et l'on détermine la réponse R à des forces harmoniques dans le temps d'amplitude unité comme indiqué sur la Figure II.18, ce qui constitue le "calcul de référence".

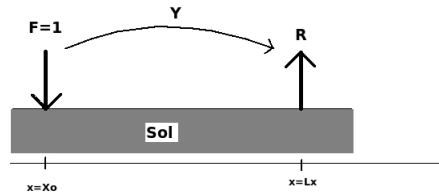


FIGURE II.18 – Schéma représentant la méthode de calcul de la fonction de transfert.

Soit $v_1(f)$ la vitesse simulée en un point de mesure, fonction de la fréquence f , et soit $M(f)$ la vitesse mesurée. Le spectre de la force ponctuelle calibrée à appliquer au niveau de la source est alors donné par $F_c(f) = M(f)/v_1(f)$, qui sera dénommé "fonction de transfert de calibration". Il est alors possible de convoluer cette fonction de transfert de calibration avec la "vitesse libre" déterminée pour une force unitaire constante en fonction de la fréquence (cf. section précédente) pour obtenir la réponse à la sollicitation correspondant aux résultats de mesure.

Ce recalage dépend évidemment du point de mesure choisi et des propriétés de sol qui sont introduites dans le calcul de référence. Dans un premier temps, le recalage est effectué sur un signal choisi parmi ceux obtenus aux différents points de mesure. L'utilisation des autres séries de mesures fera l'objet de la sous-section suivante.

Avec le signal choisi, et pour des propriétés élastiques de sol données, il est possible de déterminer le spectre de force appliquée qui reproduit exactement le signal mesuré. Il est donc possible d'attribuer à chaque jeu de propriétés élastiques de sol une fonction de transfert de calibration.

Dans ce contexte, une amélioration peut être apportée à la calibration pour tenir compte du fait que la voie ferrée n'est pas ponctuelle. Pour cela il faut prendre en compte une répartition de forces sur une longueur δx correspondant à la largeur de la voie. En raison de la linéarité de la solution, la réponse peut être obtenue en déterminant la réponse à une source ponctuelle en différents points situés sur une bande de largeur δx comme indiqué sur la Figure II.19.

II.4. CALIBRATION SUR DES MESURES ACCÉLÉROMÉTRIQUES

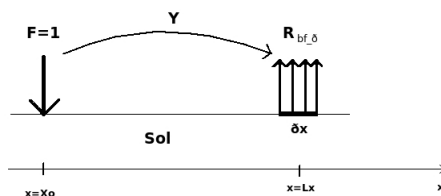


FIGURE II.19 – Schéma de la méthode de calcul de la fonction de transfert.

La réponse cherchée est, dans le cadre de la Figure II.19, obtenue en sommant les contributions énergétiques décorrélées portées par chaque point du maillage appartenant à la zone de largeur δx considérée.

Avec cette procédure, l'excitation est parfaitement déterminée pour des caractéristiques données du système Source et des mesures données. Pour illustrer ce paragraphe nous proposons d'observer la réponse à l'excitation du sol par un lourd train de Fret dont la mesure en champ libre a été effectuée par la SNCF sur le site de Macon (étude Vibsolfret).

Les composantes de la vitesse libre calibrée, correspondant à une fondation sur semelle reposant sur un sol "moyen", sont données sur la Figure II.20 et permettent la comparaison avec les vitesses libres non calibrées obtenues en section précédente.

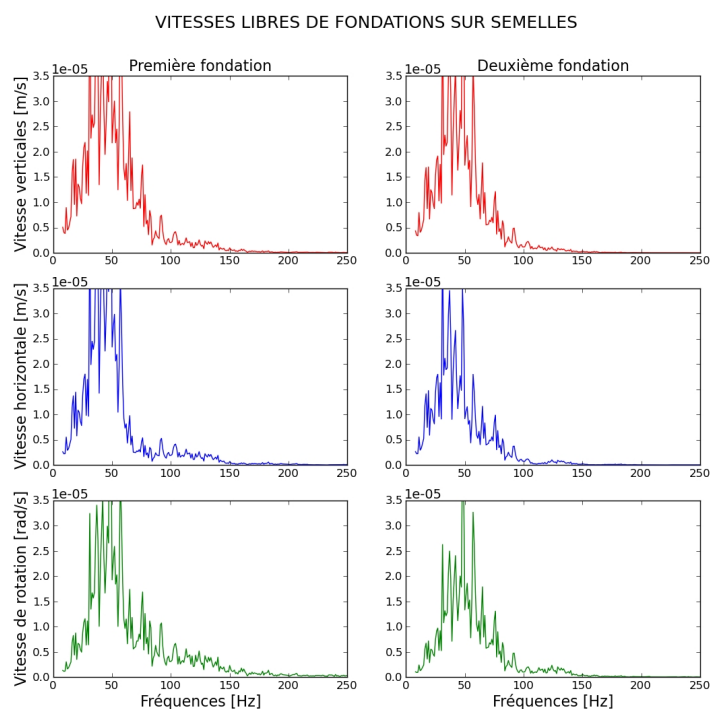


FIGURE II.20 – Valeurs absolues des composantes de la vitesse libre calibrée aux deux points de contact des fondations sur semelles.

En comparant les vitesses libres présentées ici et les vitesses libres non-calibrées obtenues dans la section précédente, il est possible d'observer l'impact de la calibration qui modifie évidemment profondément le spectre de la vitesse libre.

II.4.2 Recalage des propriétés du sol

Si l'on dispose de plusieurs mesures accélérométriques, il est possible d'utiliser ce jeu de mesures pour estimer au mieux les propriétés viscoélastiques du sol qui servent à réaliser les simulations numériques.

Pour ce faire, il faut cette fois comparer les résultats des simulations à l'expérimentation sur l'ensemble des points de mesures. De cette manière il est possible d'observer si la simulation reproduit bien les différents signaux captés par les accéléromètres.

Dans notre démarche, cela revient donc à faire, pour la même mesure trois simulations (une pour chaque type de sol) au cours desquelles les signaux sont calculés aux différents points d'observations. Les résultats sont reportés en Figure II.21 où sont donnés (en pointillés) les résultats expérimentaux et (en traits pleins) les résultats du calcul.

Logiquement, on constate que les courbes mesurées et calculées se superposent pour la zone choisie pour calibrer la force, comme indiqué en sous-section précédente (correspondant à une distance de 6m). Néanmoins, les résultats de mesure correspondant aux autres points d'observations ne se superposent pas aux résultats du calcul. L'écart le plus faible est obtenu pour un sol moyen, mais reste significatif même dans ce cas.

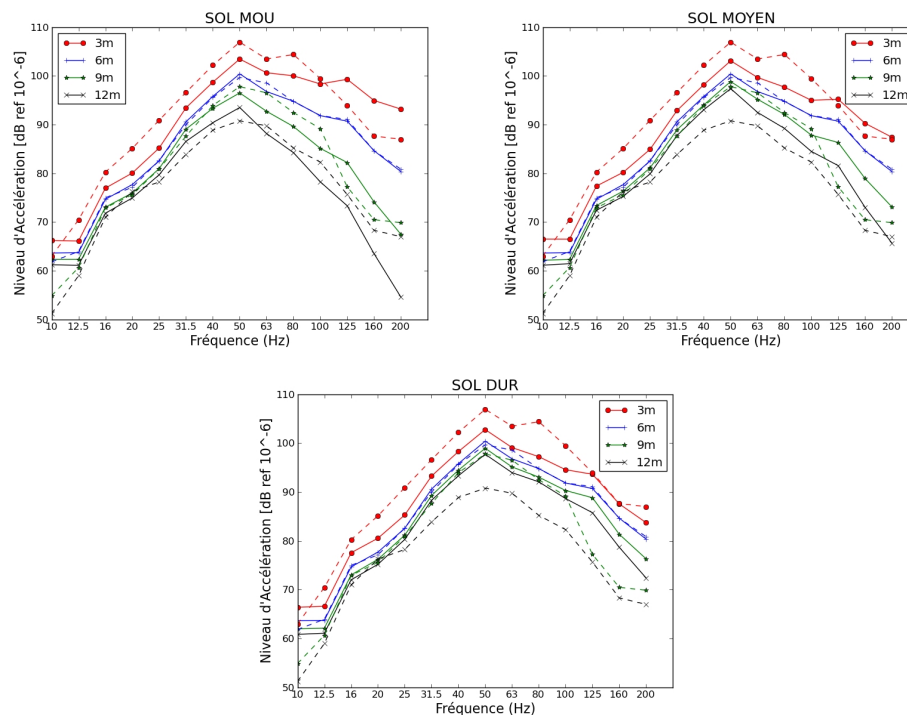


FIGURE II.21 – Comparaison des niveaux d'accélération mesurés en quatre points du sol et calculés lors de la calibration des caractéristiques du sol en deux dimensions. Traits continus : simulation, traits pointillés : mesure

Les résultats précédents laissent penser que la calibration est difficile à effectuer en raison de l'expansion géométrique des ondes en provenance de la source qui est mal prise en

II.4. CALIBRATION SUR DES MESURES ACCÉLÉROMÉTRIQUES

compte dans le calcul 2D. La même calibration a donc été réalisée en utilisant la modélisation 2.5D. Les résultats ont été reportés en Figure II.22.

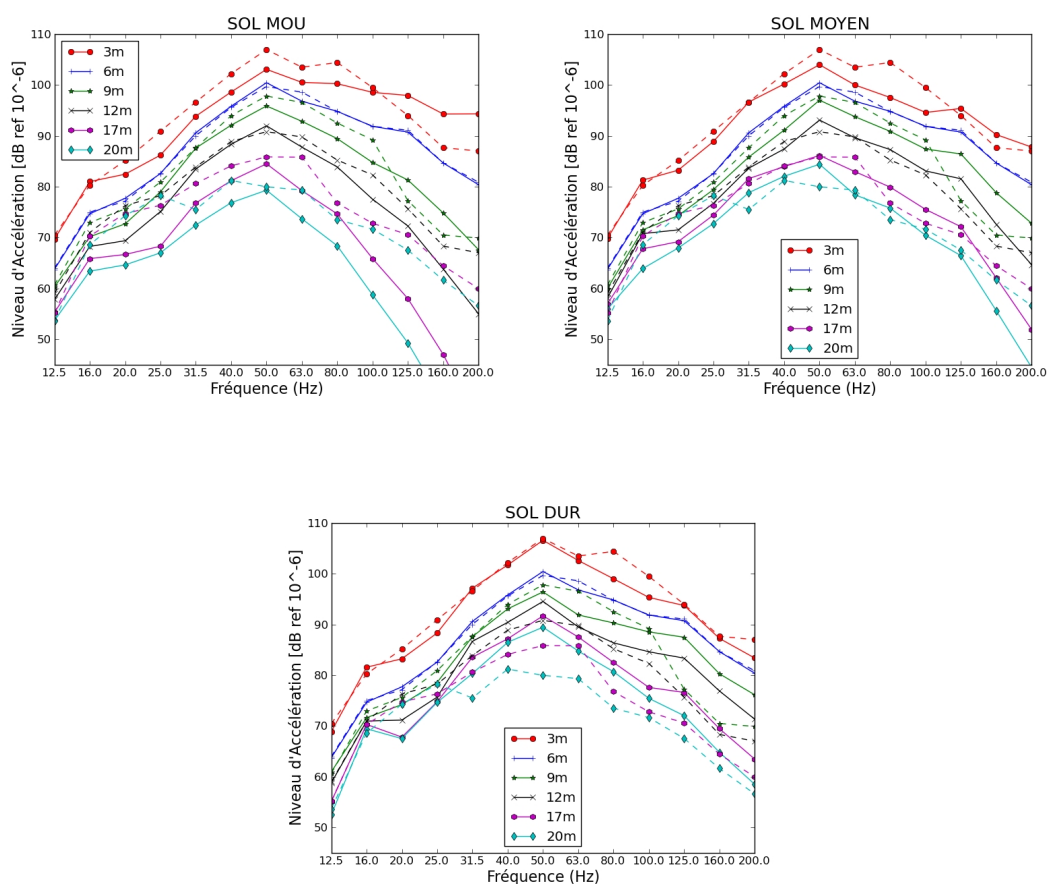


FIGURE II.22 – Comparaison des niveaux d’accélération mesurés en quatre points de sol et calculés lors de la calibration des caractéristiques du sol en 2.5D pour un sol mou, un sol moyen et un sol dur. Traits continus : simulation, traits pointillés : mesure

Le recouvrement entre résultats expérimentaux et théoriques est nettement meilleur que dans le cas 2D, ce qui laisse penser que la prise en compte de l’atténuation géométrique via des calculs tridimensionnels semble nécessaire pour reproduire correctement les mesures.

Comme pour le cas en deux dimensions, les caractéristiques de sol les plus aptes à modéliser les courbes expérimentales sont celles d’un sol moyen.

Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis la caractérisation du système Source en trois étapes comprenant l'identification de la force ponctuelle "équivalente" appliquée à la surface du sol, la vitesse libre au niveau des zones de contact entre sous-systèmes et la mobilité de la Source. Ces différentes étapes utilisent le code Mefissto reposant sur un calcul mixte éléments finis-éléments de frontière.

La première étape permet d'identifier un couple (excitation, sol) permettant de représenter au mieux la situation à modéliser. Pour ce faire, la force est calibrée sur un point de mesure pour les différents types de sol à disposition. L'ensemble des points de mesures est ensuite confronté à la simulation excitée par la force calibrée. La situation qui correspond le mieux aux mesures permet d'estimer les propriétés de sol les mieux adaptées à reproduire les résultats expérimentaux. Les calculs peuvent être réalisés soit dans le cas 2D, les forces appliquées correspondant à une ligne de sources en phase, soit à l'aide de calcul 2.5D permettant d'obtenir la réponse à une force ponctuelle ou la réponse à une ligne de sources décorréliées de longueur finie.

Dans une deuxième étape, la réponse à la sollicitation obtenue en fin de première étape permet d'obtenir la "vitesse libre". Celle-ci correspond à la vitesse au niveau de la zone de contact entre sous-structures obtenue par application de la sollicitation dans un domaine comportant le sol et les fondations situées sous les zones de contact. Les fondations sont représentées soit par des éléments finis pour les calculs 2D, soit par des éléments de frontière pour les calculs 2.5D.

La troisième et dernière étape permet de déterminer la mobilité des fondations. Celle-ci est déduite de plusieurs simulations dont le nombre dépend du nombre de fondations et du nombre de *ddl* de chaque fondation. Au cours de chacune de ces simulations il convient d'appliquer une distribution de forces dans la direction d'un *ddl* de chaque zone de contact. La vitesse sur un *ddl* d'une zone de contact produit la composante de la mobilité relative au couple (force, vitesse) considéré. Comme pour la vitesse libre, ces mobilités peuvent être définies dans le cas d'une géométrie traitée soit en 2D, soit en 2.5D.

À travers les exemples donnés dans ce chapitre plusieurs remarques peuvent être émises.

Concernant l'importance des termes d'entrée, de couplage et de transfert dans les mobilités des fondations, nos résultats montrent qu'aucune simplification ne ressort des résultats. L'amplitude des différents termes obtenus au cours des simulations dépend fortement de la géométrie des fondations ainsi que de la rigidité du sol. Néanmoins les termes d'entrée restent globalement supérieurs aux termes de couplage.

Dans les géométries en 2.5D les grandeurs déduites par la méthode des mobilités, comme les vitesses et forces de contact, doivent être calculées dans l'espace de Fourier, la transformée inverse ne s'appliquant qu'à la fin du processus.

Enfin, il convient de rappeler que tous ces calculs sont valides dans une gamme de fréquences limitée car les dimensions des "zones de contact" doivent être largement inférieures aux longueurs d'ondes rencontrées dans le problème dynamique de propagation d'onde, ce qui est réalisé si les "zones de contact" ont une longueur de l'ordre de quelques décimètres comme adopté dans notre étude. Il convient donc de choisir les "zones de contact" de façon judicieuse pour que cette condition soit réalisée.

Par ailleurs, les fréquences les plus élevées conduisent aussi à une augmentation du nombre d'éléments de frontière, augmentant d'autant la longueur des calculs.

Chapitre III

Système Récepteur Mobilités & Propagation

Sommaire

Avant-propos	64
III.1 Modélisation par Éléments finis	65
III.2 Modèle ondulatoire bidimensionnel	68
III.3 Modèle Mixte S.E.A.-Ondulatoire	79
III.4 Comparaison des modèles : un bâtiment de six étages	89
Conclusion du chapitre	92

Avant-propos

L'objectif final de la méthode des mobilités est de déterminer les vibrations apportées à une structure et il faut pour ce faire étudier la propagation des vibrations dans le Récepteur constitué principalement par la structure du bâtiment considéré. Rappelons que la méthode des mobilités nécessite de déterminer la mobilité du Récepteur, puis la réponse de la structure sous l'action des efforts appliqués dans les zones de contact entre sous-structures ou sous l'action des vitesses imposées sur ces mêmes zones. Dans cette optique, plusieurs approches sont possibles. Il n'est toutefois pas possible d'adopter les simplifications apportées dans le domaine du génie parasismique correspondant à des gammes de fréquences où le nombre de modes de la structure est faible. En effet, dans notre cas les longueurs d'ondes dans la structure sont typiquement de l'ordre de grandeur d'un étage. Il est nécessaire de modéliser les murs et les dalles de chaque étage. Néanmoins, les éléments tels que les fenêtres ou les portes ne seront pas pris en compte dans nos calculs.

Les modèles de propagation utilisés pour représenter la structure ont donc tous la capacité de décrire les comportements des plaques/poutres qui représentent les murs et les dalles de la structure. Chacun de ces modèles permet d'obtenir des niveaux vibratoires moyens soit directement soit grâce à la connaissance des mouvements présents localement.

Ce chapitre a pour but de décrire les différents modèles utilisés pour décrire le système Récepteur. Cette description comprend la mobilité du Récepteur et la propagation jusqu'aux dalles. Pour chacune des méthodes, quelques lignes seront consacrées à l'interfaçage avec la méthode des mobilités. Cette étape est cruciale car elle rend compte des spécificités de chacune des méthodes et de l'utilisation qui en est faite. Elle nous donne ainsi des éléments pour le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes.

Ces modèles sont, dans l'ordre d'apparition, les modèles numériques (BEM et FEM), un modèle ondulatoire 2D décrit par Bosmans [5] ou Bareille [93], un modèle S.E.A. (Statistical Energy Analysis) et un modèle mixte ondulatoire-S.E.A décrit par Hassan [20]. Les deux derniers sont complémentaires car ils ne permettent d'étudier un problème complet que lorsqu'ils sont associés.

III.1 Modélisation par Éléments finis

Il est possible de citer deux grandes familles de méthodes numériques : les Éléments Finis (FEM) et les Éléments Finis de Frontières (BEM). Chacune ont leurs avantages et leurs inconvénients. La Méthode des éléments finis permet la modélisation d'éléments de forme complexe et est la principale méthode utilisée pour le calcul des structures. La méthode des éléments finis de frontière permet de modéliser des systèmes infinis mais présente peu d'intérêt dans le cas d'études de structures finies (voir Annexe C.1). D'ailleurs, il n'existe pas à notre connaissance de codes de calcul par équations intégrales dédiées au calcul dynamique de structures de bâtiment. Toutefois, la présence des éléments de frontière dans le code Mefissto permet de réaliser des calculs en 2.5D. Les éléments finis seront donc utilisés pour les calculs 2D et 3D et les éléments de frontière pour les calculs 2.5D. Il convient de noter également que le code Mefissto permet également de modéliser l'ensemble (Source+Récepteur), sans sous-structuration, et comparer avec les résultats obtenus avec ceux produits par la méthode des mobilités, permettant ainsi de tester les approximations qui peuvent s'introduire via la sous-structuration.

III.1.1 Modèle utilisé

Deux codes sont utilisés dans le cadre de cette étude : le code d'éléments finis 3D nommé Nastran [107] et le code FEM-BEM Mefissto [25, 26], présenté antérieurement.

Comme pour le système Source nous nous plaçons dans l'optique de l'approche par la méthode des mobilités. Ainsi les modélisations des bâtiments doivent respecter certaines conditions, à savoir des "zones de contact" caractérisées par un déplacement de corps rigide, ce qui correspond en pratique à des dimensions petites devant les longueurs d'ondes correspondant à la propagation dans la structure. Par ailleurs, il est nécessaire de vérifier la symétrie de la matrice de mobilité. À titre d'exemple les figures qui suivent (Figures III.2 et III.3) montrent les déformées des zones de contact (pieds du bâtiment) et la symétrie des mobilités d'un bâtiment 2D de six étages.

Ces résultats sont obtenus grâce à une simulation Mefissto dans laquelle les éléments utilisés sont des éléments quadratiques à neufs nœuds, uniformément repartis sur tout le maillage, celui-ci étant schématisé sur la Figure III.1. Pour observer la conservation de la planéité des zones de contact, nous proposons la même représentation que celle utilisée dans le deuxième chapitre, c'est à dire la représentation de la position finale et de la position initiale de nœuds placés sur les zones de contact. La Figure III.2 montre ainsi les positions de sections correspondant aux zones de contact lors de l'application des efforts sur ces zones et il est donc possible de vérifier que chaque section subit un déplacement de corps rigide quels que soient les efforts appliqués.

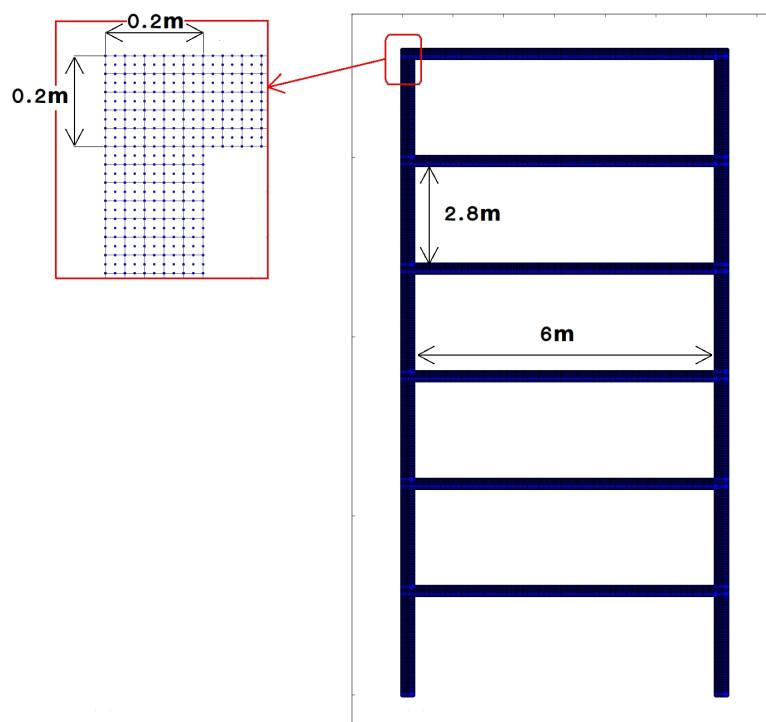


FIGURE III.1 – Schéma d'un bâtiment de six étages, en haut à gauche : détails du maillage.

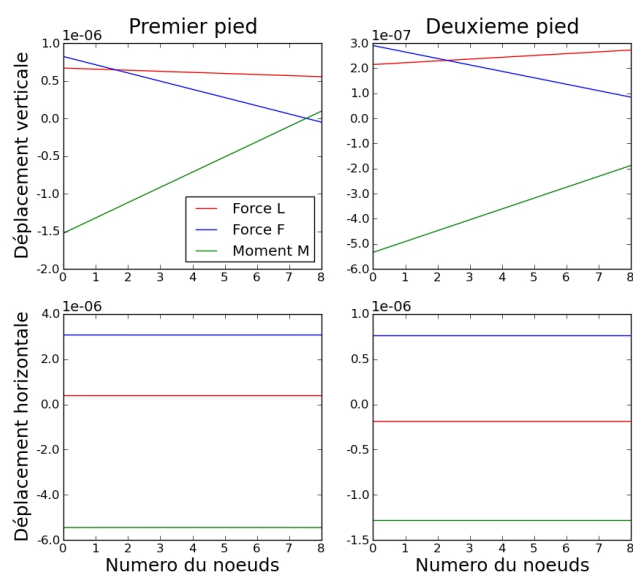


FIGURE III.2 – Déformation de la zone de contact du bâtiment à $100H_z$.

La répartition des forces nodales est identique à celle utilisée pour le calcul de mobilité du système Source et il en est de même de leur spectre. Pour vérifier la symétrie des mobilités obtenues nous proposons d'observer les composantes non-diagonales des mobilités Y^{ii} et Y^{ij} sur l'ensemble du spectre, i et j sont les indices des différentes zones de contact (Figure III.3). Ainsi nous comparons les composantes opposées par rapport à la diagonal de

la mobilité de couplage ainsi que les composantes de couplages transférés.

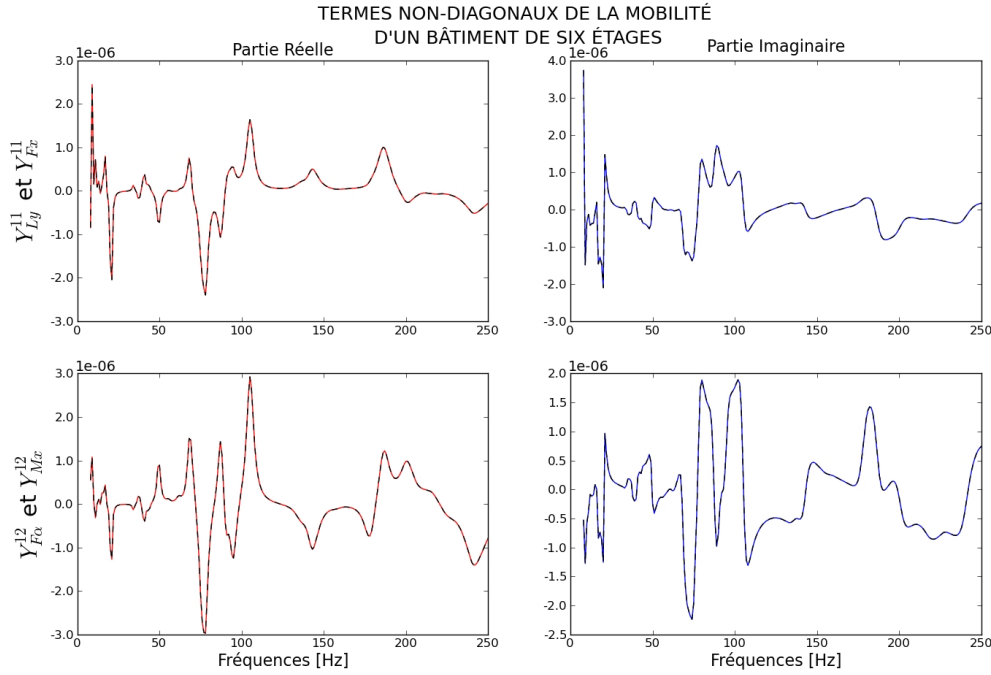


FIGURE III.3 – Symétrie de la mobilité du système Récepteur déterminée par le code Mefissto.

Les courbes reportées sur la Figure III.3 montrent bien que les termes symétriques sont identiques quelle que soit la fréquence.

III.1.2 Interfaçage par la méthode des mobilités

L'interfaçage avec le système Source est réalisé en imposant soit la force de contact soit la vitesse de contact, déduites de la méthodes des mobilités (Chapitre I). Les deux choix sont normalement équivalents. En pratique, il est donc nécessaire de déterminer les forces de contact ou les vitesses de contact à partir de la vitesse libre, de la mobilité de la Source et de la mobilité du Récepteur. Ces forces de contact se traduisent par le torseur comprenant les composantes de la résultante et le moment résultant transmis par la zone de contact. L'interfaçage est alors réalisé en appliquant des forces nodales dont l'amplitude varie linéairement le long de la zone de contact et dont le torseur équivalent est égal au torseur des forces de contact.

III.2 Modèle ondulatoire bidimensionnel

Le deuxième modèle de propagation dans la superstructure fournit une description des ondes se propageant dans le bâtiment. Ce dernier est une structure qui peut se décomposer en plusieurs éléments de type dalle ou mur. L'approche proposée consiste à décrire le comportement de chacun de ces éléments par une équation de propagation et d'assembler ensuite ces éléments entre eux. Ce type de modélisation tire profit du fait qu'en deux dimensions, les éléments de plaque permettent une propagation uniquement dans le plan, pouvant être représentée simplement par la dynamique des poutres.

Pour modéliser un bâtiment nous utilisons donc un assemblage d'éléments simples (poutres). Le comportement de chaque élément est traduit par un ensemble d'équations de propagation accompagnées de leurs conditions aux limites. Ces dernières permettent le couplage avec les éléments voisins. L'application de conditions aux limites du système de poutres obtenu permet alors la résolution du système complet. La description de la méthode proposée va comporter la description locale par l'intermédiaire des équations de propagation de chaque type d'onde dans chaque élément, puis l'assemblage prenant en compte les conditions de raccordement entre les différents éléments.

L'étude de la dynamique de tels systèmes constitués de poutres a fait l'objet de nombreux travaux. On notera en premier lieu l'étude des vibrations de systèmes simples dans l'ouvrage de Cremer & al [79]. Une étude complète des modes de vibrations de poutres est décrite dans Timoshenko [89], mais aussi dans plusieurs références sur le sujet [75, 85, 31]. Les travaux de Ljunggren apportent également un grand nombre de résultats sur les mobilités des plaques [36, 37, 38].

Enfin l'assemblage d'éléments simples formant une structure complexe est abordé par Bosmans, Veimer & Mees [5, 4], Cremer & al [79], Clough et Penzien [77] et Doyle [80].

III.2.1 Méthode utilisée

L'objectif est de décrire un assemblage plan de poutres sous sollicitations dynamiques permettant de simuler de façon simplifiée la réponse dynamique d'une structure de bâtiment.

Description des éléments constitutifs

Chaque sous-élément, qu'il soit vertical (mur) ou horizontal (dalle) est représenté par les équations d'une poutre mince et son comportement est décrit par les équations d'Euler-Bernoulli. Cela suppose que les seules ondes considérées sont les ondes longitudinales et les ondes de flexions. Cela se justifie par la gamme de fréquences étudiée $[10 - 300]Hz$ qui implique $\Lambda \gg 6h$ pour une poutre en béton [79], où Λ est la plus petite longueur d'onde rencontrée et h l'épaisseur de la poutre qui est de l'ordre de quelques dizaines de centimètres.

Les formes de solutions adoptées ici sont celles que l'on retrouve classiquement dans la littérature. Pour les ondes de compression, l'expression locale de l'équation de propagation

peut se mettre sous la forme suivante :

$$D\Delta v - \rho\ddot{v} = F \quad (\text{III.1})$$

où v est le déplacement longitudinal et où D et ρ sont le module de rigidité en compression (comprenant un terme d'amortissement matériel) et la masse volumique de l'élément considéré. Pour la "poutre", représentant en fait la section d'une plaque de grandes dimensions transversales, le module longitudinal est un module de rigidité calculé en déformations planes et est un peu différent du module d'Young ($D = \frac{E}{(1-\nu^2)}$). Les solutions admissibles de cette équation s'écrivent sous la forme d'une somme de deux composantes de la forme $U_l(t \pm \frac{x}{C_l})$ où x et t sont les variables de l'espace et du temps, C_l est la célérité de l'onde de compression dans l'élément considéré, égale à $\sqrt{D/\rho}$.

L'expression des ondes de flexion peut se déduire de l'équation locale ci-dessous :

$$B\nabla^4 u - \rho\ddot{u} = F \quad (\text{III.2})$$

Celle-ci exprime que les ondes de flexion et de rotation sont une somme de quatre composantes de la forme $U_{fp}(t \pm \frac{x}{C_f})$ et $U_{fe}(t \pm \frac{x}{C_f})$ [79], C_f est la célérité des ondes de flexion, B étant égal à DI/h où I est l'inertie par mètre et h l'épaisseur.

Dans les solutions de ces deux équations les seules inconnues sont des constantes qui se déduisent des conditions aux limites. En adoptant la convention de signe en $e^{-j\omega t}$, les composantes de déplacement sont données par :

$$\begin{aligned} v_m &= \Re [(A_m e^{jk_l y} + B_m e^{-jk_l y}) e^{-j\omega t}] && \text{Ondes longitudinales} \\ u_m &= \Re [(C_m e^{jk_f y} + D_m e^{-jk_f y} + E_m e^{k_f y} + F_m e^{-k_f y}) e^{-j\omega t}] && \text{Ondes de flexion} \\ w_m &= \Re [k_f (jC_m e^{jk_f y} - jD_m e^{-jk_f y} + E_m e^{k_f y} - F_m e^{-k_f y}) e^{-j\omega t}] && \text{Rotation} \end{aligned}$$

où v_m est le déplacement longitudinal, u_m est le déplacement transversal et w_m la rotation de section. Les grandeurs k_l et k_f représentent les nombres d'onde relatifs aux ondes longitudinales et de flexions, x et y sont les variables de la base associée à la poutre. Les longueurs caractéristiques d'un étage sont L_y pour les murs et L_x pour la dalle. Bien que L_x ne porte pas d'indice et est constante dans l'exemple qui suit, cette longueur peut varier d'un étage à l'autre sans modifier l'approche exposée ici.

Dans les formes de solution énoncées, quatre paramètres physiques sont nécessaires : la masse volumique ρ , le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν et le coefficient de pertes internes η .

Chaque élément de la structure est repéré par un indice, les indices $m \in [m_0, M]$, $n \in [n_0, N]$ et $d \in [d_0, D]$ sont respectivement réservés aux murs de gauche, aux murs de droite et aux dalles (Figure III.4).

La forme prise pour résoudre le problème posé demande que chaque poutre ait sa propre base.

Équations de continuité

Les poutres sont reliées entre elles par des jonctions droites, en T ou en L. Les conditions de raccordement sont données dans le cas le plus général par Bosmans [5] et permettent d'obtenir un système d'équations solvable. Le nombre d'inconnues est de six par poutre, quatre communes aux ondes de flexion et deux pour les mouvements longitudinaux.

Les repères locaux pour chaque poutre ainsi que les notations et la géométrie d'une situation type sont représentés dans le schéma de la Figure III.4. Sur ce schéma les grandeurs x et y (en rouge) indiquent des variables locales qui sont différentes des variables globales. Chaque repère local a pour origine le centre de la première section rencontrée par l'onde (repéré par des flèches sur la figure), et est dirigé en fonction de la dimension principale de la poutre étudiée. Cela permet d'écrire plus lisiblement les conditions de continuité.

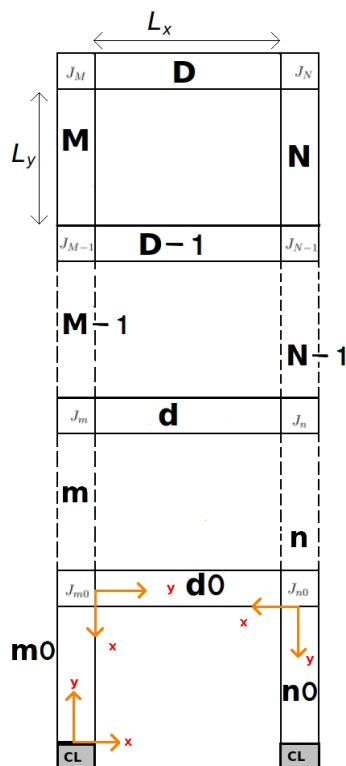


FIGURE III.4 – Schéma du modèle ondulatoire.

Les équations de continuité sont distinctes selon que l'on considère la jonction avec le sol (jonction droite), la dernière jonction (jonction en L) ou les jonctions intermédiaires (jonction en T). Pour chacune de ces trois situations, il convient d'écrire les équations de raccordement, se traduisant sous la forme de six ou neuf équations selon les cas.

Gauche	Droite	
Continuité du mouvement		
$u_m _{y=L_y} = -v_d _{x=0}$	$u_n _{y=0} = v_d _{x=L_x}$	(III.3a)
$v_m _{y=L_y} = u_d _{x=0}$	$v_n _{y=0} = -u_d _{x=L_x}$	(III.3b)
$w_m _{y=L_y} = w_d _{x=0}$	$w_n _{y=0} = w_d _{x=L_x}$	(III.3c)
$u_m _{y=L_y} = u_{m+1} _{y=0}$	$u_n _{y=0} = u_{n+1} _{y=L_y}$	(III.3d)
$v_m _{y=L_y} = v_{m+1} _{y=0}$	$v_n _{y=0} = v_{n+1} _{y=L_y}$	(III.3e)
$w_m _{y=L_y} = w_{m+1} _{y=0}$	$w_n _{y=0} = w_{n+1} _{y=L_y}$	(III.3f)
Équilibre des forces		
$F_m _{y=L_y} = -L_d _{x=0} + F_{m+1} _{y=0}$	$F_n _{y=0} = L_d _{x=L_x} + F_{n+1} _{y=L_y}$	(III.3g)
$L_m _{y=L_y} = F_d _{x=0} + L_{m+1} _{y=0}$	$L_n _{y=0} = -F_d _{x=L_x} + L_{n+1} _{y=L_y}$	(III.3h)
$M_m _{y=L_y} = M_d _{x=0} + M_{m+1} _{y=0}$	$M_n _{y=0} = M_d _{x=L_x} + M_{n+1} _{y=L_y}$	(III.3i)

Ces équations peuvent être écrites pour toutes les jonctions mises à part pour les premières (droites) et dernières (en L). Pour celles-ci, les équations (III.3a-III.3c) pour le raccord du bâtiment avec le sol et (III.3d-III.3f) pour le toit n'ont pas lieu d'être. De même les équations (III.3g-III.3i) doivent être allégées des termes inutiles en fonction de la jonction ; pour le toit il s'agit des termes indicés +1 et pour le sol ceux indicés d .

Le nombre de conditions aux limites en 2D correspond à trois équations par zone de contact, ce qui conduit à six conditions aux limites. Celles-ci peuvent être des forces, des vitesses ou des déplacements imposés. Dans nos calculs les vitesses ont systématiquement été préférées. Pour relier les mouvements de la structure à une excitation de type ferroviaire nous utilisons les vitesses de contacts définies dans le premier chapitre.

$$\begin{pmatrix} u_{m0} \\ v_{m0} \\ w_{m0} \end{pmatrix}_{(y=0)} = \begin{pmatrix} v_{cx}^1 \\ v_{cy}^1 \\ v_{c\alpha}^1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_{n0} \\ v_{n0} \\ w_{n0} \end{pmatrix}_{(y=L_y)} = \begin{pmatrix} v_{cx}^2 \\ v_{cy}^2 \\ v_{c\alpha}^2 \end{pmatrix} \quad (III.4)$$

Au final ces six conditions aux limites conduisent à un système linéaire d'équations fermé.

Implémentation et exploitation des résultats

L'implémentation de cette approche a été réalisée en utilisant le langage informatique *python*. La mise en œuvre permet de choisir les paramètres de chaque étage (hauteur, épaisseur, densité volumique ...) indépendamment.

Connaissant la forme des solutions recherchées, ce système d'équations peut se résoudre simplement en se mettant sous la forme d'un système linéaire caractérisé par une matrice carrée dont les dimensions sont égales au nombre d'inconnues. Celles-ci sont dénombrées par le produit du nombre d'étages par dix-huit (six par poutre) auxquelles il faut ajouter

les 6 inconnues correspondant au mouvement du sol (sol+fondation) sur chacun des deux pieds. Au final le nombre d'inconnues, et donc le nombre d'équations obtenues, dans la configuration de la Figure III.4 est de :

$$N_{inconnues} = 18N_{etages} + 12$$

La matrice précitée $[M]$ comporte tous les termes connus, les termes de propagation (exponentielles spatiales) dans lesquels interviennent les nombres d'ondes, les caractéristiques géométriques et celles des matériaux. Les caractéristiques géométriques et matérielles peuvent être différentes pour chaque étage à l'exception de la longueur des dalles. Les inconnues sont placées dans un vecteur (V) de sorte que l'on peut écrire :

$$[M](V) = (R) \quad (III.5)$$

où $[M]$ est la matrice définie précédemment, (V) le vecteur inconnu et (R) un vecteur construit à partir des conditions aux limites. (V) est alors obtenu par l'inversion numérique de la matrice $[M]$, soit :

$$(V) = [M]^{-1}(R) \quad (III.6)$$

Le calcul des termes de la matrice $[M]$ est réalisé à partir d'un script *python* qui la construit automatiquement à partir des données d'entrée (nombre d'étages, fréquences étudiées, dimensions et caractéristiques des matériaux pour chaque étage).

Exploitation des résultats :

La solution recherchée doit permettre de décrire la gêne causée aux habitants d'une telle structure, qui est principalement attribuée aux déplacements induits par la flexion des dalles de la structure [104, 103]. Celle-ci, en chaque point, s'écrit classiquement comme la somme des valeurs de deux ondes propagatives, de la forme U_{fp} , et de deux ondes évanescentes de type U_{fe} . Ce mouvement est caractérisé de façon synthétique par la moyenne des amplitudes des ondes de flexion sur la longueur de la dalle de l'étage observé.

Le calcul de la vitesse moyenne de flexion des dalles se fait par une considération géométrique. L'onde est reconstituée à partir des constantes adéquates tirées du vecteur (V) auxquelles sont associés les termes de propagation correspondants. La valeur que prend cette onde en chaque point de la dalle est ensuite calculée pour effectuer la moyenne géométrique des amplitudes selon la relation (III.7).

La moyenne $\langle v_d \rangle$ de l'amplitude sur une dalle est calculée selon la formule suivante :

$$\langle v_d(f) \rangle = \frac{1}{L} \int_L |v_d(f, x)| dx$$

où L est la longueur de la poutre, soit sous forme discrétisée :

$$\langle v_d(f) \rangle = \frac{1}{N_{points}} \sum_{i=1}^{N_{points}} |v_d(f, x_i)| \quad (III.7)$$

où N_{points} est un nombre de points, suffisamment grand pour que les résultats soient stables et la poutre correctement décrite.

Conditions aux limites :

Comme indiqué précédemment, le système de poutres est excité par introduction des conditions aux limites correspondant aux vitesses de contact définies au premier chapitre. L'obtention de celles-ci nécessite le calcul de la mobilité du récepteur, abordé ci-après.

Discussion sur les approximations induites par la méthode :

Les principales approximations résident dans les équations des poutres choisies. L'équation de la poutre de flexion de type Euler-Bernoulli implique que les corrections apportées par les déformations de cisaillement sont négligeables. Cette approximation est tout à fait valide à basses fréquences mais pourrait limiter les fréquences maximales autorisées par la méthode. Toutefois, les longueurs d'onde des ondes de flexion dans les poutres sont de l'ordre de grandeur de la longueur de ces poutres, et l'utilisation de l'approximation des poutres de type Bernoulli reste valide dans ce contexte.

Les avantages de l'approche ondulatoire sont sa précision et sa rapidité. L'un de ses inconvénients, néanmoins commun à d'autres modèles, est sa sensibilité aux paramètres d'entrée tels que les dimensions des dalles et les conditions aux limites imposées. Par ailleurs, dès que le système sort du cadre classique (poutre/membrane/plaque...) les solutions deviennent complexes ou n'existent plus. Quoi qu'il en soit tant que chaque sous-élément peut se décrire par l'intermédiaire d'une équation de propagation, la solution obtenue est proche de celle donnée par la méthode des éléments-finis. A noter que ce type de modèle n'est limité ni verticalement ni horizontalement ; il est tout à fait envisageable de modéliser un bâtiment à trois murs et des étages non réguliers par exemple.

Validation de la méthode

Pour valider les résultats, nous avons choisi d'étudier le cas d'un portique de trois mètres de haut et de six mètres de long. La structure est composée de trois poutres de vingt centimètres d'épaisseur et possédant les caractéristiques du béton. Les vitesses moyennes de flexion de la dalle du deuxième modèle sont comparées aux mêmes grandeurs obtenues par une simulation Nastran. Cette dernière est réalisée par une analyse en deux dimensions utilisant le maillage représenté sur le Figure III.5.

L'excitation est une distribution de forces verticales sur tous les nœuds de la base inférieure de la première poutre. Tous les autres degrés de liberté de l'extrémité de cette poutre ainsi que tous ceux de l'extrémité du deuxième pied sont bloqués. Le modèle ondulatoire est sollicité par des efforts et dans des conditions cinématiques identiques.

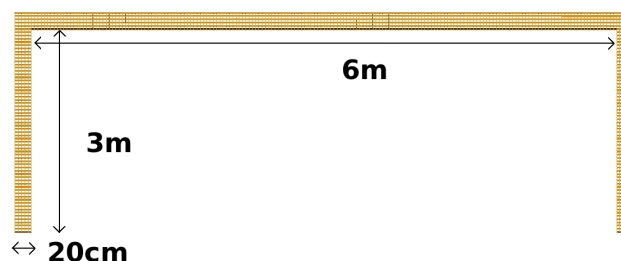


FIGURE III.5 – Maillage de la simulation Nastran.

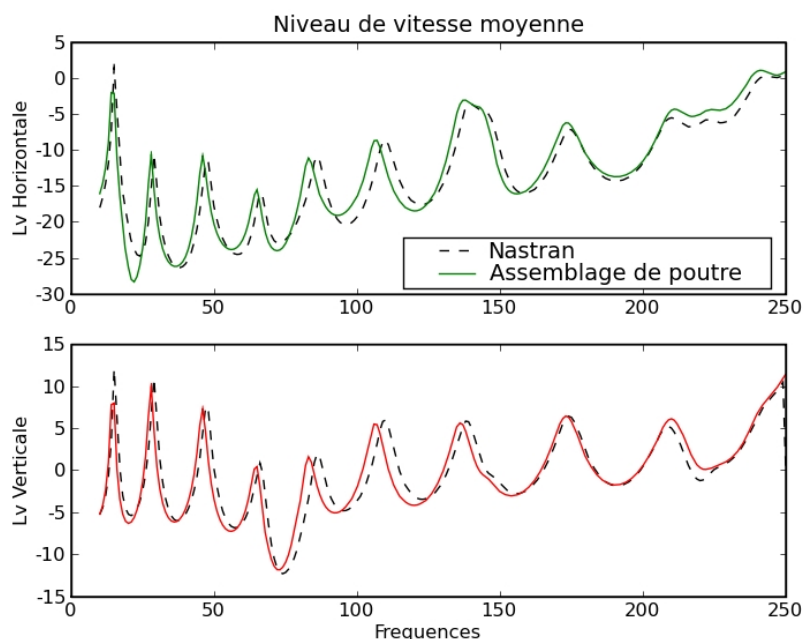


FIGURE III.6 – Confrontation des niveaux de vitesses moyennes [dB réf $1m/s$] de la poutre centrale d'un portique à trois poutres obtenues par les deux modèles : FE et ondulatoire.

Comme le montre la Figure III.6 la concordance est relativement satisfaisante entre les résultats obtenus par les deux types de méthodes. Les différences observées peuvent correspondre aux zones de raccordement qui sont différentes dans les deux modèles.

On note que le nombre de degrés de liberté à traiter dans le modèle ondulatoire est considérablement réduit par rapport au modèle utilisant les éléments finis.

Mobilité

Le modèle ondulatoire se prête très bien au calcul des mobilités. En effet pour obtenir les composantes de cette dernière il suffit d'appliquer à l'un des pieds de la structure une force unitaire et d'observer la réponse du modèle aux extrémités des pieds. Cela se fait naturellement car, en tous points de la structure les valeurs de toutes les composantes de la vitesse sont accessibles.

Concrètement les mobilités sont obtenues par six calculs différents où la force imposée est unitaire sur le degré de liberté étudié et nulle sur les deux autres. Pour chacune de ces situations les trois composantes des vitesses aux deux pieds de la structure nous permettent d'obtenir une mobilité d'entrée, deux mobilités de couplage, une mobilité de transfert et deux mobilités de transfert couplé.

Les expressions qui suivent expriment, en omettant la dépendance temporelle en $e^{-j\omega t}$,

les mobilités d'entrée et de transfert.

$$Y_{Ly}^{11} = \frac{A_{m0} + B_{m0}}{L_0} \quad (\text{III.8a})$$

$$Y_{Fx}^{11} = \frac{C_{m0} + D_{m0} + E_{m0} + F_{m0}}{F_0} \quad (\text{III.8b})$$

$$Y_{M\alpha}^{11} = k_f \frac{jC_{m0} - jD_{m0} + E_{m0} - F_{m0}}{M_0} \quad (\text{III.8c})$$

$$Y_{Ly}^{12} = \frac{A_{n0}e^{jk_l L_y} + B_{n0}e^{-jk_l L_y}}{L_0} \quad (\text{III.8d})$$

$$Y_{Fx}^{12} = \frac{C_{n0}e^{jk_f L_y} + D_{n0}e^{-jk_f L_y} + E_{n0}e^{k_f L_y} + F_{n0}e^{-k_f L_y}}{F_0} \quad (\text{III.8e})$$

$$Y_{M\alpha}^{12} = k_f \frac{jC_{n0}e^{jk_f L_y} - jD_{n0}e^{-jk_f L_y} + E_{n0}e^{k_f L_y} - F_{n0}e^{-k_f L_y}}{M_0} \quad (\text{III.8f})$$

où F_0 , L_0 et M_0 sont des excitations unitaires respectivement sur les degrés de liberté horizontaux, verticaux et sur la rotation. Pour compléter la matrice des mobilités il suffit de remarquer que, compte tenu des symétries : $Y^{11} = Y^{22}$ et $Y^{12} = Y^{21}$.

Comme vérifié sur les autres modèles, la mobilité doit être symétrique. Ceci est montré sur la Figure III.7 où les deux composantes opposées de la mobilité du bâtiment de six étages, schématisé sur la Figure III.1, sont tracées. Les courbes vertes, également visibles sur la Figure III.3, donnent les même composantes déduites d'un calcul Mefissto.

Les composantes symétriques du modèle se superposent correctement ce qui traduit les bonnes propriétés de réciprocités du modèle.

La comparaison avec les résultats donnés par le code Mefissto laisse apparaître quelques différences, notamment sur l'amplitude des pics. Comme pour la comparaison avec Nastran, les différences sont probablement imputables à des jonctions de souplesses différentes dans les deux types d'approche.

III.2.2 Calculs avec ou sans corrélation

Le calcul des vibrations induites dans la structure repose sur la réponse aux forces de contact ou aux vitesses de contact appliquées dans les zones de contact. L'étude de la réponse sans Récepteur et des mobilités de la Source et du Récepteur permet de déterminer les vitesses de contact à appliquer au récepteur pour déterminer la réponse de celui-ci. Ces vitesses sont corrélées puisque déterminées à partir de la propagation d'ondes issues d'une même source dans le calcul sans Récepteur. Toutefois, il est connu que les propriétés du sol varient de façon aléatoire, ce qui induit une diffraction des ondes sur les hétérogénéités de sol. Cette diffraction induit une décorrélation entre les signaux mesurés en différents points du sol qui est d'autant plus importante que la fréquence est élevée, cette décorrélation s'observant particulièrement au niveau de la phase des signaux.

Une façon simple de prendre en compte cette décorrélation est donc de considérer que l'énergie apportée au niveau des points de contact est correctement estimée, mais que la phase est fortement perturbée [24]. Un calcul "décorrélé" peut alors être réalisé comme

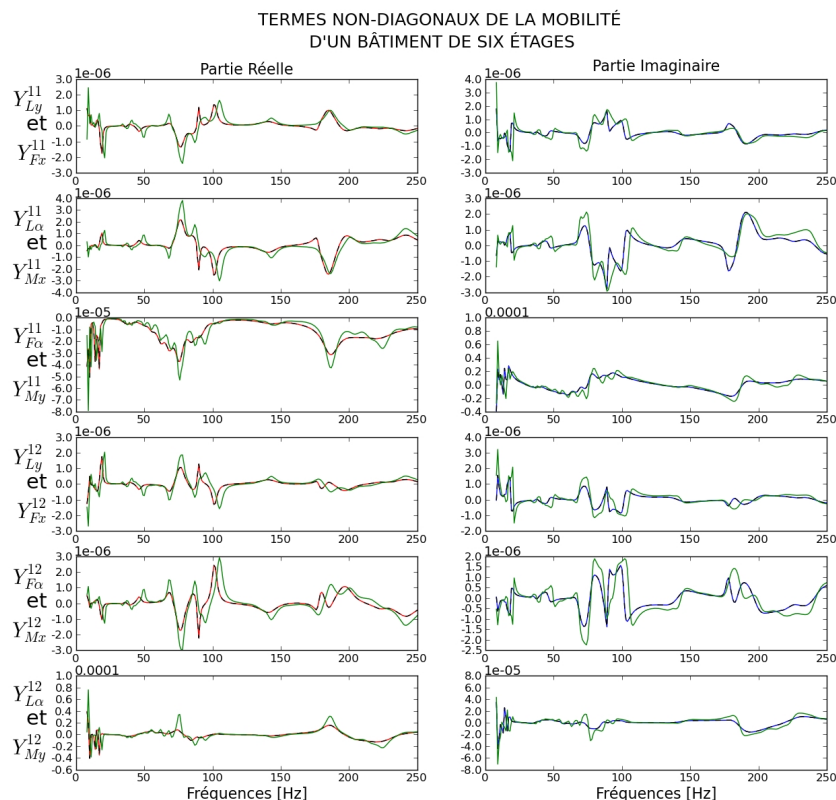


FIGURE III.7 – Symétrie de la matrice des mobilités d'un bâtiment de six étages, Composante du modèle ondulatoire : Rouge/Bleu en traits pleins et Noirs en traits pointillés, Composantes Mefissto : vert en traits pleins.

suit. Considérons une structure excitée par deux zones de contact. La réponse à la vitesse de contact au niveau d'une seule zone de contact permet alors de déterminer la vitesse en un point quelconque de la structure, et de même pour le deuxième point de contact. Si les signaux d'entrée sont décorrélés, il en est de même des réponses. Il est alors possible de calculer la vitesse moyenne résultante considérée comme la moyenne quadratique des amplitudes des deux vitesses précédemment calculées, ce qui revient à ajouter les énergies cinétiques calculées à partir des deux signaux.

Pour illustrer ce type de calcul, un exemple a été traité en déterminant les vitesses quadratiques ainsi calculées correspondant à la flexion (vitesses verticales) en différents points d'une dalle du bâtiment précédemment étudié, puis en effectuant la moyenne quadratique sur l'ensemble de la dalle correspondante, pour différentes situations décrivant les différents types de corrélations entre signaux.

- Le cas 1 correspond aux signaux corrélés au pied 1 du bâtiment ainsi qu'au pied 2, les signaux entre pieds étant décorrélés.
- Le cas 2 correspond aux signaux des mêmes composantes corrélés entre les deux pieds, mais les signaux de composantes différentes décorrélés.
- Enfin, le cas 3 correspond au cas où toutes les composantes sont décorrélées.

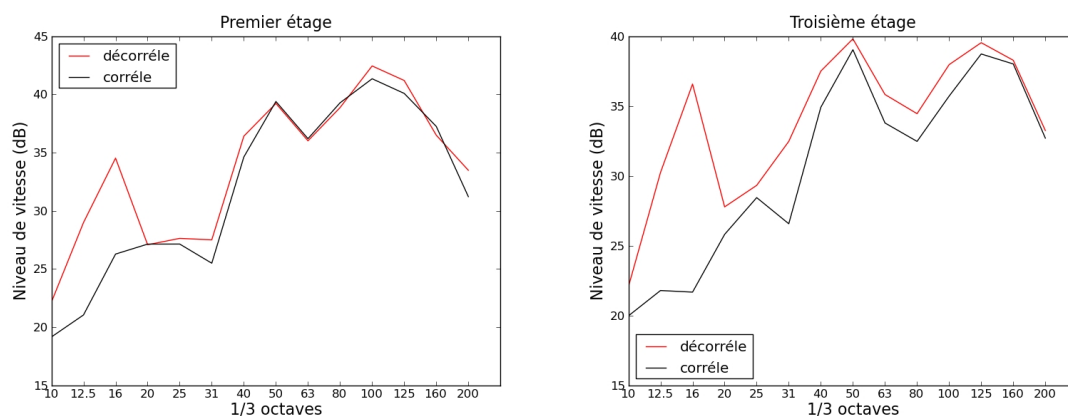


FIGURE III.8 – Cas 1, test de la corrélation entre les pieds de la structure à deux niveaux différents du bâtiment de six étages.

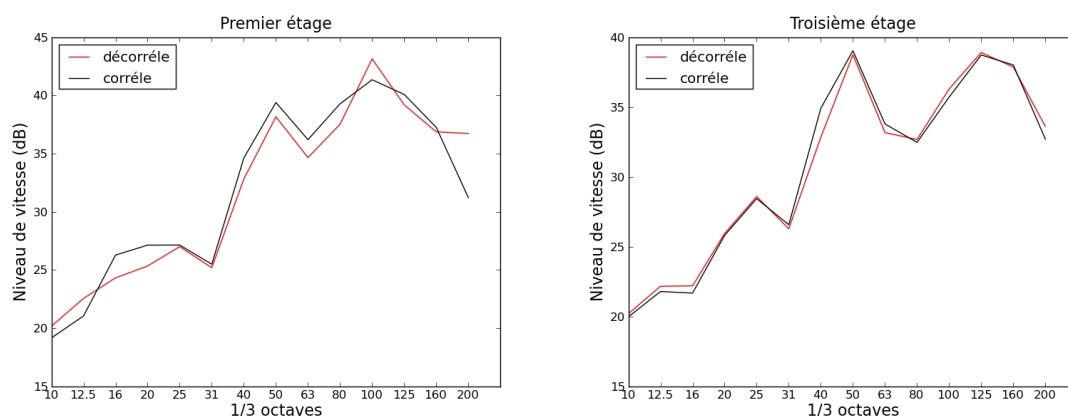


FIGURE III.9 – Cas 2, test de la corrélation entre les degrés de liberté de l'excitation à deux niveaux différents du bâtiment de six étages.

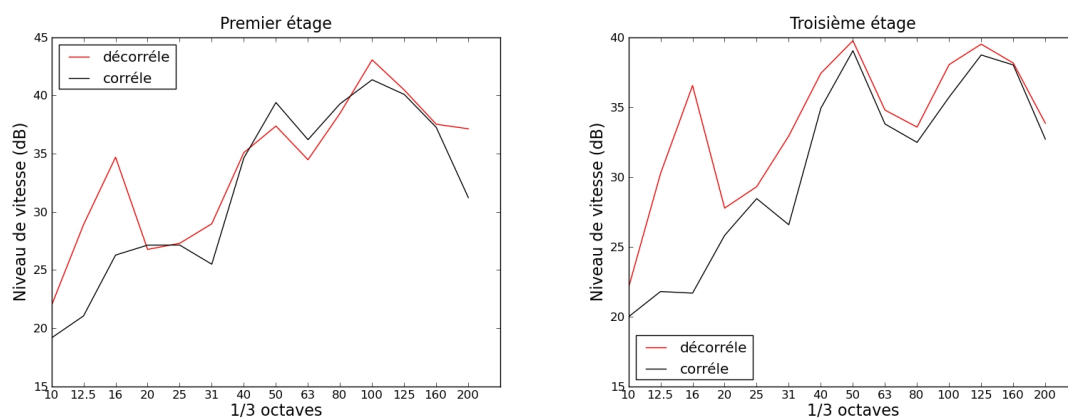


FIGURE III.10 – Cas 3, test de la corrélation entre les pieds et les degrés de liberté à deux niveaux différents du bâtiment de six étages.

La Figure III.8 présente les résultats correspondant au cas 1, sur lequel on peut observer un effet de la décorrélation plutôt à basses fréquences. Les résultats correspondant au cas 2 en figure III.9 montrent au contraire un effet très faible de la décorrélation entre différentes composantes du mouvement imposé. Enfin, la figure III.10 montre un effet de la décorrélation sensiblement identique au cas 1. D'une façon générale, on voit que l'effet de la décorrélation est surtout sensible aux basses fréquences.

Le spectre des signaux afférents aux sollicitations d'origine ferroviaire se situe à des fréquences situées entre 60 et 80Hz, et les figures précédentes montrent que cette plage de fréquences correspond à un effet relativement faible de la décorrélation.

III.3 Modèle Mixte S.E.A.-Ondulatoire

La technique dite Statistical Energy Analysis (S.E.A.) est mise en œuvre pour les hautes fréquences lorsque les modes de la structure sont nombreux et correspondent à un spectre quasiment continu. Cette situation ne correspond à la situation étudiée que pour les hautes fréquences de la gamme de fréquences utilisée et plus spécialement dans le cas de propagation des ondes de flexion. Pour tenir compte de situations différentes entre les ondes de compression, principalement transmises par les voiles, et les ondes de flexion, principalement transmises par les dalles, il est proposé de coupler deux approches pour les deux types d'ondes présents dans l'excitation : transverses (flexion et rotation) et axiales (compression). La première approche, pour les ondes de flexion, repose sur la S.E.A., alors que la deuxième approche, pour les ondes de compression, repose sur un modèle hybride ondulatoire dont la solution est donnée par des considérations énergétiques.

III.3.1 La S.E.A.

La S.E.A. (Statistical Energy Analysis) est une méthode basée sur les échanges d'énergie entre plusieurs systèmes vibrants. Elle fournit une description énergétique du système étudié. L'approche est statistique dans le sens où la description qu'elle propose n'est pas caractéristique du seul problème étudié mais d'un ensemble de systèmes dont les propriétés dynamiques sont similaires [86]. Physiquement, cette approche a été mise en œuvre car à hautes fréquences, il n'est plus possible de caractériser les modes individuellement et il devient nécessaire de les traiter de façon statistique.

Bien qu'elle repose sur des hypothèses fortes, cette méthode est largement utilisée à hautes fréquences en calcul de structures dans l'industrie automobile, aéronautique ou le bâtiment [66]. Son principe repose sur la décomposition d'une structure en plusieurs sous-systèmes simples dont on peut caractériser les composantes énergétiques. La méthodologie repose alors sur l'évaluation de l'échange d'énergie entre tous les sous-systèmes à l'aide d'équations de transferts énergétiques.

Lorsque tous les paramètres nécessaires sont connus, cette méthode est très peu coûteuse en temps de calcul et fournit, pour un bâtiment, de bon résultats à partir d'environ $50Hz$.

Comme indiqué précédemment, la S.E.A. est habituellement utilisée en hautes fréquences mais plusieurs variantes de la méthodologie initiale ont permis d'étendre cette analyse vers les basses et moyennes fréquences [85, 57, 34]. Elle donne accès aux coefficients de couplages entre les sous-systèmes et est une méthode prédictive de la circulation d'énergie dans les structures.

La sous-section suivante présente une description de la méthode. Contrairement aux autres modèles, la géométrie utilisée ici est toujours tridimensionnelle, ce qui augmente la densité modale et permet de se rapprocher de l'hypothèse de la S.E.A.. Dans les résultats présentés en fin de paragraphe la dimension supplémentaire, la largeur du bâtiment, est choisie constante et voisine de la longueur des dalles.

Description de la méthode

Principe et Hypothèses

La méthode S.E.A. se base sur la décomposition d'un système complexe en plusieurs sous-systèmes simples ou élémentaires, leur nombre est donné par N_{sss} . Ceux-ci doivent être considérés comme des ensembles qui échangent de l'énergie avec les autres sous-systèmes auxquels ils sont liés. La première étape correspond à la description de chaque sous-système qui doit également prendre en compte les pertes d'énergie dues aux phénomènes apportant de la dissipation interne (hystérésis, viscosité, ...) et son excitation par le milieu extérieur. Chaque sous-système est donc caractérisé par le flux d'énergie provenant de l'extérieur, l'énergie dissipée et l'énergie échangée avec les autres sous-systèmes.

Une deuxième étape consiste à écrire, avec la décomposition adoptée du problème, les échanges énergétiques entre tous les sous-systèmes qui constituent un système de N_{sss} équations linéaires couplées. Chacune d'entre elles traduit l'équilibre entre d'une part l'énergie entrante dans le sous-système via une excitation extérieure et l'apport des autres sous-systèmes, et d'autre part l'énergie sortante correspondant à l'énergie dissipée et aux transferts aux autres sous-systèmes. Ces équations ont la forme générique suivante [86, 78] :

$$\Pi_j = \Pi_{jd} + \sum_{i=1, i \neq j}^{N_{sss}} (\Pi_{ij} - \Pi_{ji}) \quad (\text{III.9})$$

où Π_j est la puissance extérieure entrante dans le sous-système j , Π_{id} l'énergie perdue par dissipation et les d'éventuels couplages non pris en compte dans le modèle ; Π_{ij} mesure la puissance transmise du sous-système i au sous-système j .

Pour pouvoir décrire simplement les échanges énergétiques dans les sous-systèmes, plusieurs hypothèses fortes sont faites. En effet on souhaite limiter les paramètres à connaître pour pouvoir établir les équations d'équilibres énergétiques décrites plus haut. L'énergie dans un sous-système donné est décrite à partir des modes propres du sous-système et de l'énergie moyenne portée par ces modes. De même les échanges entre les sous-systèmes sont évalués à partir de la décomposition modale des vibrations.

Pour que cela soit possible, l'approche demande des conditions particulières [85] :

- a) L'étude se place en régime permanent.
- b) Les vitesses des sous-systèmes subissent une atténuation fonction de la fréquence.
- c) Les forces excitatrices de chaque sous-système sont indépendantes et décorrélées dans l'espace. Cela permet d'écrire les vitesses moyennes des sous-systèmes (grandeurs présentes dans l'énergie cinétique) simplement en fonction des forces excitatrices.
- d) Les flux de puissance et d'énergie sont limités sur une petite bande fréquentielle dans laquelle le spectre des forces d'interaction est constant. Cela permet en pratique de ne considérer que les modes propres des sous-systèmes pour les échanges d'énergie.
- e) La bande de fréquences étudiée comporte de nombreux modes. Cette hypothèse permet de ne pas trop négliger "d'espace" fréquentiel lorsque l'on fait l'hypothèse précédente.
- f) Les liaisons entre les sous-systèmes sont conservatrices et faibles. Le couplage entre deux sous-systèmes n'influence pas le couplage entre l'un des deux sous-systèmes et un autre sous-système ; il n'y a pas de pertes dans les couplages.

- g) Le nombre de modes dans la bande de fréquence étudiée est, pour un sous-système particulier, fini et ces modes sont décorrélés. Néanmoins chacun des modes d'un autre sous-système couplé au précédent interagit avec tous les modes du premier sous-système.

Grandeurs et équations propres à la S.E.A.

Puissance :

Dans tout ce qui précède, les termes de puissance correspondent aux flux d'énergie transmis en un cycle d'oscillation. Ceux-ci peuvent dès lors s'écrire comme le produit de la pulsation par l'énergie interne du sous-système et par un coefficient donnant la proportion de la puissance échangée par rapport à la puissance totale :

$$\Pi_{ij} = E_i \omega \eta_{ij} \quad (\text{III.10})$$

où η_{ij} est un terme de flux entre les deux sous-systèmes i et j , ω la pulsation et E_i l'énergie interne du sous-système i qui peut être représentée par une énergie cinétique.

Coefficients de pertes :

* Les coefficients de pertes internes η_{id} représentent la conversion de l'énergie interne du sous-système en une autre forme d'énergie s'échappant du sous-système. Ces coefficients, qui peuvent être obtenus en pratique à l'aide d'une mesure par la méthode du temps de réverbération [85], sont ici extraites des données de la littérature.

* Les coefficients de pertes par couplage η_{ij} ou CLF peuvent également être mesurés [78, 20]. En l'absence de mesures, ils peuvent être obtenus à partir des données de la littérature [78] ou déterminés par calcul : soit par un calcul analytique du coefficient de transmission diffus entre deux plaques semi-infinies [86, 85], soit par un calcul numérique [9]. En basses fréquences une erreur sur ces coefficients peut induire des erreurs significatives sur le résultat [85].

* Le coefficient de pertes totales est la somme des coefficients des pertes internes et de tous les coefficients de pertes par couplages.

$$\eta_{iT} = \eta_{id} + \sum_{j \neq i}^{N_{sss}} \eta_{ij}$$

Ce dernier coefficient peut être, dans les bâtiments, approximé par la relation donnée par Craik [78] :

$$\eta_T = \frac{1}{\sqrt{f}} + 0.015$$

où le premier terme du membre de droite est une bonne approximation de l'ensemble des couplages, qui dépend de la fréquence f , et le deuxième représente les pertes dues à la conversion de l'énergie en chaleur.

Principe de réciprocité :

L'un des résultats connus sur les oscillateurs harmoniques est que le flux de puissance entre deux sous-systèmes est proportionnel à la différence de leurs énergies modales. Ce flux peut se traduire ainsi par :

$$\Pi_{ij} = \left[\frac{E_i}{n_i} - \frac{E_j}{n_j} \right] \omega \beta \quad (\text{III.11})$$

où n_i est la densité modale du sous-système i . On peut voir qu'il existe une relation entre les flux inverses au cours d'un échange donné. Par analogie avec (III.10) il vient en effet :

$$\beta = n_i \eta_{ij} = n_j \eta_{ji} \quad (\text{III.12})$$

Cette égalité est connue sous le nom de principe de réciprocité.

Modèle utilisé

Pour illustrer la méthode, le cas concret d'un bâtiment de six étages excité à ses pieds est présenté ici. Les dimensions du bâtiment sont celles communément rencontrées dans le bâti existant, c'est à dire des dalles de $6 \times 5m^2$ et des murs de $2.8m$ de haut. Une représentation géométrique du problème, ainsi que le schéma S.E.A. associé [86] sont donnés sur la Figure III.11.

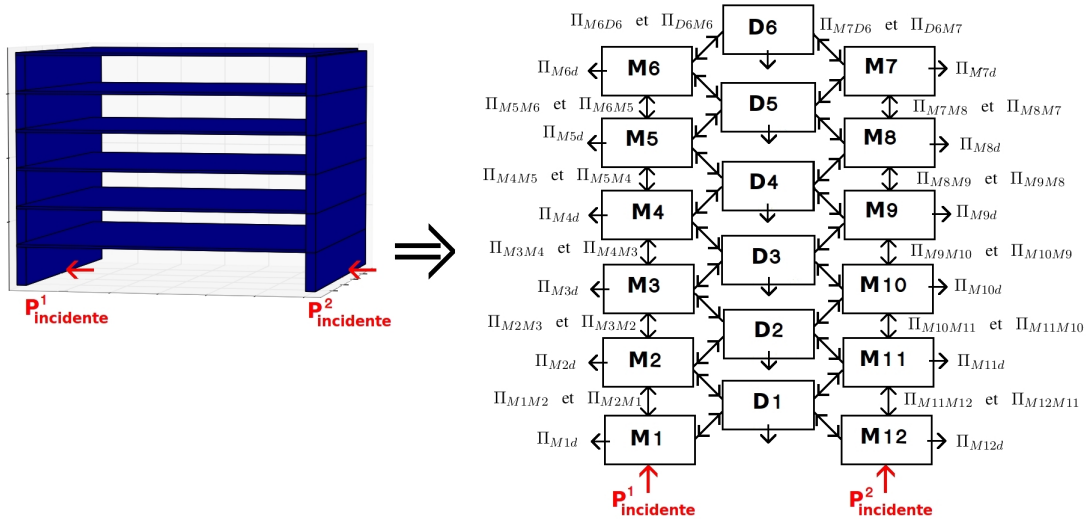


FIGURE III.11 – Exemple de la description graphique d'une analyse statistique d'énergie d'un bâtiment de six étages.

Le bâtiment est décomposé en dix-huit groupes de sous-systèmes où chaque groupe est constitué de plusieurs sous-systèmes associant une plaque à un type d'onde. Dans cette représentation, tous les sous-systèmes n'échangent pas d'énergie entre eux. Seuls les sous-systèmes directement couplés le font. Les couplages sont représentés par des doubles flèches. Les flèches sortantes des sous-systèmes représentent les pertes internes et les flèches rouges

les puissances injectées dans les sous-systèmes. Certaines de ces quantités sont indiquées sur le schéma.

Pour connaître la vitesse moyenne de flexion de chacune des dalles, il faut résoudre le système d'équations des bilans d'énergies de chaque sous-système. Ceci se traduit par une matrice à faible densité de termes non-nuls dont l'inversion peut se faire par une approche itérative. Les énergies considérées pour chacune des dalles correspondent au double de l'énergie cinétique moyenne et sont donc directement reliées à la vitesse moyenne présente dans la dalle.

L'ensemble des calculs est réalisé à l'aide d'un logiciel, dénommé Catras, développé au CSTB. Les solutions obtenues sont directement données sous la forme d'une vitesse moyenne de flexion. Aucun post-traitement supplémentaire n'est nécessaire pour traiter les résultats. Le logiciel utilise le fait que la matrice des équations de conservation de l'énergie est faiblement peuplée pour l'inverser rapidement à l'aide d'un solveur itératif. Grâce à la méthodologie adoptée, des problèmes comportant un grand nombre de degrés de liberté, comme un immeuble ou un îlot d'immeubles, sont résolus en quelques minutes.

La S.E.A. ne permet pas de calculer les mobilités, mais peut par contre être interfacée par la méthode des mobilités comme on le verra ci-après.

Interfaçage par la méthode des mobilités

Dans cette approche les données d'entrée du modèle sont les énergies transmises aux pieds du bâtiment. Elles se traduisent par les puissances injectées aux pieds de la super-structures. Ces puissances découlent de la méthode des mobilités et sont données par la somme des composantes de flexion et de rotation déduites d'un calcul en 2.5D.

Pour se placer dans le domaine de validité des hypothèses de la S.E.A., certaines composantes doivent être occultées. Les ondes longitudinales sont trop longues pour que, sur la plage de fréquences étudiée, la densité modale soit suffisamment grande. Seules les composantes provenant d'une excitation en flexion et en rotation sont injectées dans le modèle. De plus nous ne retenons de la réponse obtenue que la composante de flexion de chaque dalle du bâtiment. Seule une petite partie de l'énergie correspondant à des ondes longitudinales circulant dans la structure intervient dans les calculs. Celle-ci provient des vibrations transmises sous forme de rotation dont une partie se transforme en ondes longitudinales dans les objets horizontaux lors de leurs passages aux jonctions entre les plaques.

De plus, toujours pour se placer dans une situation où la densité modale est suffisante, le calcul est ici effectué en trois dimensions. Pour cela il faut tenir compte de la largeur du bâtiment. La puissance calculée par la méthode des mobilités est réalisée elle même en 2.5D. La puissance injectée doit alors tenir compte de la largeur du bâtiment.

Dans ce modèle, la corrélation entre les différentes zones de contact n'est pas conservée. La relation de phase entre les différentes composantes est conservée dans le calcul de la puissance injectée, mais le modèle de propagation ne l'utilise pas puisque seule la partie réelle de la puissance est considérée.

III.3.2 Modèle de Hassan

Ce dernier modèle a été développé par Hassan (2001) [20] dans un contexte particulier. L'approche proposée considère que la grande majorité de l'énergie transmise à un bâtiment se situe dans l'axe du mur/poutre de la structure ce qui correspond à un sol très dur. Le raccordement avec le sol est contrôlé par une impédance de sol qui, du fait de l'hypothèse monodirectionnelle du transfert d'énergie, est une grandeur scalaire. Les résultats présentés dans l'article initial se rapprochent d'une étude des vibrations des planchers d'un bâtiment publiée par Ljunggren [39].

Description du Modèle

Ce modèle propose une approche couplée ondulatoire-énergétique dans laquelle le comportement des éléments verticaux est déduit d'une approche ondulatoire et celui des éléments horizontaux par les hypothèses de la S.E.A..

Comme dans le modèle ondulatoire précédent, l'équation utilisée pour décrire le comportement des poutres verticales est celle des ondes longitudinales pures. Les solutions recherchées sont toujours de la forme $U_l(t \pm \frac{x}{C_l})$ où deux inconnues sont à déterminer.

Les dalles, considérées comme semi-infinies, ne sont reliées qu'à une seule jonction et ne propagent d'énergie que dans une seule direction. Ces dispositions induisent un bilan d'énergie très simple dans lequel la puissance injectée dans la dalle est égale à la puissance dissipée par cette dernière.

Notre étude étant réalisée pour un sol moyen et avec la connaissance des excitations "réelles" présentes aux pieds du bâtiment, nous avons adapté ce modèle notamment en changeant les conditions aux limites à imposer qui ne contiennent plus l'impédance du sol mais les vitesses de contact longitudinales entre les fondations et la structure.

Ce modèle donne de bons résultats, notamment pour le calcul de la décroissance du niveau moyen des vibrations entre les différents étages, mais comporte quelques approximations. Premièrement ce modèle ne décrit que la partie des mouvements créés par une excitation longitudinale, le reste, provenant d'une excitation transversale, est déduit d'une étude supplémentaire par la S.E.A. classique. Deuxièmement on peut noter l'absence d'onde retour dans les dalles, i.e. D_d , F_d sont nuls quel que soit l'indice d . Notons également que les grandeurs u_n , v_n et w_n du modèle ondulatoire ne sont pas considérées ici. Enfin, ce modèle étant excité par la seule composante verticale de la vitesse de contact, on peut noter l'hypothèse de rotation nulle aux jonctions.

Comme pour le modèle ondulatoire le comportement de chaque poutre est modélisé par les équations d'Euler-Bernoulli. Néanmoins ici les murs ne sont soumis qu'à un mouvement de traction-compression et les dalles qu'à un mouvement de flexion. Les formes de solutions sont les mêmes que précédemment avec, pour les dalles l'absence d'onde retour ($D_d = 0$ et $F_d = 0$).

$$\begin{aligned}
 v_m &= \Re \left[(A_m e^{jk_l y} + B_m e^{-jk_l y}) e^{-j\omega t} \right] && \text{Ondes longitudinales dans les murs} \\
 u_d &= \Re \left[(C_d e^{jk_f y} + E_d e^{k_f y}) e^{-j\omega t} \right] && \text{Ondes de flexion dans les dalles} \\
 w_d &= \Re \left[k_f (j C_d e^{jk_f y} + E_d e^{k_f y}) e^{-j\omega t} \right] && \text{Rotation dans les dalles}
 \end{aligned}$$

Le schéma III.12 récapitule les notations des grandeurs utilisées.

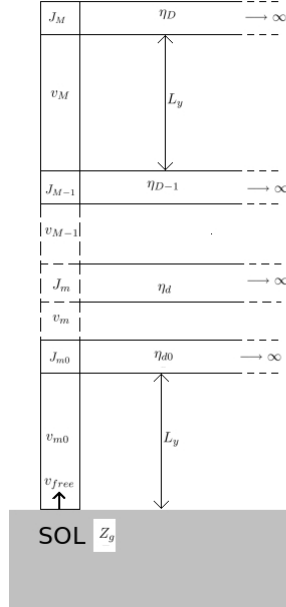


FIGURE III.12 – Schéma du modèle hybride.

Équations de continuité

Le problème est décrit par une suite d'équations qui donnent les relations de continuité des vitesses entre les différents éléments et la conservation des forces à leurs jonctions. L'ensemble de ces conditions peut être, comme pour le modèle ondulatoire, séparé en trois parties : le plafond d'indice M pour le mur et D pour la dalle (jonction J_M), la jonction entre la fondation (sol) et le premier mur J_{m0} (indice $m0$ et $d0$ pour le premier mur et la première dalle) et les jonctions intermédiaires J_m (d'indices m et d pour les murs et les dalles).

Pour le plafond il faut écrire trois relations :

$$\text{Vitesse angulaire nulle :} \quad k_f(jC_d + E_d) = 0 \quad (\text{III.13a})$$

$$\text{Continuité des vitesses :} \quad C_D - \frac{2\beta}{\beta(1-j) + 4} A_M = 0 \quad (\text{III.13b})$$

$$\text{Équilibre des forces :} \quad \frac{A_M}{B_M} - \frac{\beta(1-j) - 4}{\beta(1-j) + 4} e^{-2jk_l L_y} = 0 \quad (\text{III.13c})$$

Pour toutes les jonctions intermédiaires, les relations à considérer sont au nombre de quatre et reprennent les mêmes conditions que celles du plafond :

$$\text{Vitesse angulaire nulle : } k_f(jC_d + E_d) = 0 \quad (\text{III.13d})$$

$$\text{Continuité des vitesses : } C_d - \frac{A_m + B_m}{1 - j} = 0 \quad (\text{III.13e})$$

$$\text{Équilibre des forces : } A_m - A_{m-1}e^{-jk_l L_y} - \frac{2(A_{m-1}e^{-jk_l L_y} + B_{m-1}e^{jk_l L_y})}{\beta(1 - j)} = 0 \quad (\text{III.13f})$$

$$B_m - B_{m-1}e^{jk_l L_y} + \frac{2(A_{m-1}e^{-jk_l L_y} + B_{m-1}e^{jk_l L_y})}{\beta(1 - j)} = 0 \quad (\text{III.13g})$$

Enfin la jonction entre la structure et le sol ne se fait qu'avec deux relations car la jonction ne permet pas d'écrire une condition de rotation nulle :

$$\text{Continuité des vitesses : } (A_{m0} + B_{m0}) - (v_g^+ + v_g^-) = 0 \quad (\text{III.13h})$$

$$\text{Équilibre des forces : } Z_0(A_{m0} - B_{m0}) - Z_g(v_g^+ - v_g^-) = 0 \quad (\text{III.13i})$$

Pour que ce système d'équations soit bien posé, c'est à dire avec autant d'équations que d'inconnues, il suffit d'ajouter une seule condition aux limites, et ce quel que soit le nombre d'étages du bâtiment envisagé.

$$\text{Condition aux limites : } v_g = v_g^+ + v_g^- = v_c \quad (\text{III.14})$$

où v_c est la vitesse de contact verticale calculée avec la méthode des mobilités, et v_g la vitesse représentative des fondations, Z_0 et Z_g sont les impédances de la superstructure et de la fondation. La grandeur β est définie par : $\beta = \frac{Eh}{C_l C_f m(1 - \nu^2)}$, où C_l et C_f sont les célérités des ondes longitudinales et des ondes de flexion dans les poutres, h l'épaisseur de la poutre, E son module d'Young, ν le coefficient de Poisson et $m = \rho h$ la masse surfacique.

Dans le modèle initial, la condition aux limites fait intervenir une vitesse v_{free} correspondant au mouvement du sol sans la superstructure et Z_0 et Z_g sont les impédances caractéristiques de la structure et du sol. Ces dernières sont définies à partir de systèmes infinis (poutre semi-infinie pour la structure et demi-espace homogène pour le sol), Z_g ne considère pas la présence de fondations car celles-ci ont peu d'importance lorsque le sol est très dur.

Implémentation et résolution

La démarche est similaire à celle adoptée pour le modèle ondulatoire 2D. Comme décrit au paragraphe précédent, un script *python* construit automatiquement une matrice $[M]$ dans laquelle toutes les constantes du problème sont placées. Cela permet d'écrire le problème d'équations couplées sous sa forme matricielle :

$$[M](V) = (R) \quad (\text{III.15})$$

où les vecteurs (V) et (R) contiennent respectivement les inconnues et les membres de droite des équations. Le problème se résout toujours par l'inversion de la matrice $[M]$ mais la vitesse de flexion moyenne des dalles s'obtient par des considérations S.E.A..

La vitesse longitudinale à chaque jonction est reconstituée à partir des composantes de (V) auxquelles sont associés les termes de propagation présents dans la matrice $[M]$ qui y sont liés.

Ce processus est bouclé sur les fréquences et les résultats enregistrés dans des vecteurs de la taille de la gamme fréquentielle.

Comme dans le modèle initial, les vitesses moyennes de flexion des dalles sont données par les vitesses longitudinales aux jonctions entre les dalles et les murs porteurs. En effet dans la dalle (poutre semi-infinie), puisque celle-ci n'est connectée qu'avec un seul élément et que l'énergie ne s'écoule que dans le sens opposé, la puissance dissipée est égale à la puissance injectée. En réécrivant cette égalité avec les vitesses moyennes de la dalle et de la jonction et en considérant que les coefficients des couplages entre la dalle et la jonction sont constants et égaux à $\alpha = 0.25$ [78], la vitesse moyenne de flexion de la dalle s'écrit en fonction de la vitesse à la jonction :

$$\langle v_d(f) \rangle = \pi |v_n(f)|_{y=L_y} \quad (\text{III.16})$$

Validation

Afin de valider l'implémentation, les résultats donnés dans l'article de référence ont été recalculés. La Figure III.13 retrace, par exemple, la Figure 8 de [20] qui donne la différence de niveaux des vitesses de flexions moyennes entre chaque étage et le pied du bâtiment pour une structure de trois étages.

La présente implémentation reconstitue exactement les mêmes résultats que l'article de référence.

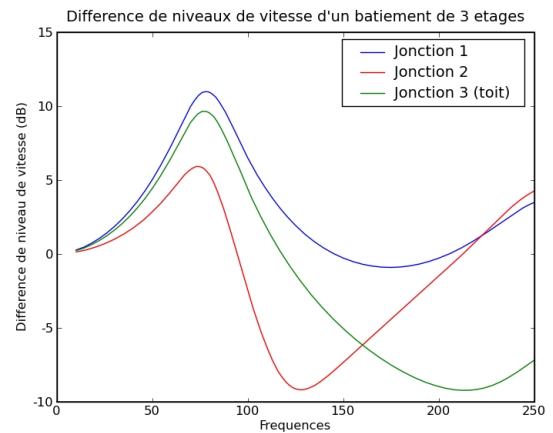


FIGURE III.13 – Reproduction de la Figure 8 de l'article de référence.

Mobilité

Pour ce modèle, l'obtention de la mobilité est effectuée de la même manière que pour le modèle ondulatoire. A savoir, il suffit de recueillir la vitesse au pied du bâtiment lorsque l'on excite ce dernier par une force unitaire sur l'ensemble de la gamme fréquentielle étudiée.

Cependant la seule mobilité qui intervienne est la mobilité d'entrée longitudinale. En conséquence la mobilité déduite de ce modèle pourra être utilisée pour celui-ci mais non pour les autres approches présentées dans ce chapitre.

Interfaçage par la méthode des mobilités

Dans ce modèle, seule la composante longitudinale de la vitesse de contact peut être imposée au pied du bâtiment. Celle-ci peut être déduite d'un calcul utilisant les mobilités d'un récepteur plus complet et la vitesse retenue correspond aux composantes verticales de la vitesse en chaque zone de contact.

Dans tous les cas l'excitation ne comporte qu'une seule composante et les différentes zones de contact peuvent être, soit traitées séparément, soit prises en compte par une somme des vitesses.

Dans le premier cas le résultat est une moyenne quadratique des différentes vitesses de la dalle obtenues pour l'excitation appliquée séparément sur chaque zone de contact. On impose tour à tour les vitesses de contact calculées pour chaque zone de contact au pied du bâtiment et les réponses de chacune des dalles sont obtenues par la moyenne quadratique :

$$v_d = \sqrt{|v_d^1|^2 + |v_d^2|^2}.$$

Dans le deuxième cas l'excitation correspond à la moyenne quadratique des excitations et le résultat est donné par un unique calcul. On impose au pied du bâtiment la vitesse :

$$v_g = \sqrt{|(v_c^1)|^2 + |(v_c^2)|^2}.$$

Ces deux approches sont comparées sur la Figure III.14 et les résultats sont identiques.

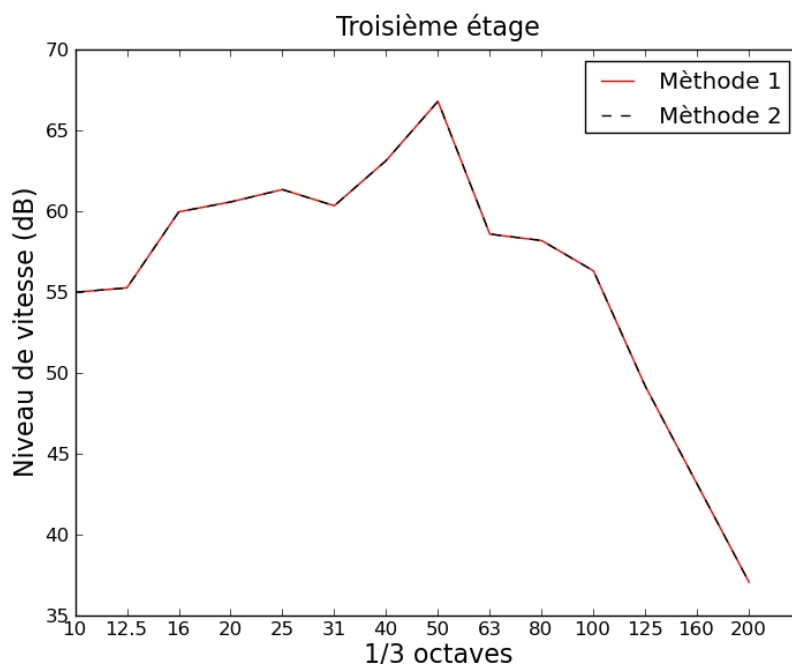


FIGURE III.14 – Comparaison des deux formes d'excitation du modèle hybride.

Pour les résultats présentés dans la suite du document, l'excitation imposée correspond à la somme décorrélée des amplitudes des composantes verticales des vitesses de contact :

$$v_g = \sqrt{|(v_c^1)|^2 + |(v_c^2)|^2}.$$

III.4 Comparaison des modèles : un bâtiment de six étages

Afin d'illustrer différents points abordés dans ce chapitre nous proposons l'étude d'un bâtiment de six étages pour lequel les modèles présentés dans les paragraphes précédents ont été utilisés. La configuration se compose d'un bâtiment à six mètres des voies sur lesquelles passe un lourd train de fret. Les mobilités des systèmes Source (sol+fondation) et Récepteur (bâtiment) sont déterminées à l'aide du code FEM-BEM Mefissto. La vitesse libre est quand à elle déduite de la calibration d'une simulation Mefissto 2.5D telle que décrite dans le deuxième chapitre. La vitesse de contact et la puissance injectée sont ainsi calibrées et tiennent compte de l'excitation "réelle" la mieux adaptée aux mesures.

Dans un premier temps nous observons la différence des amplitudes moyennes des mouvements transverses de chaque dalle avec celles des mouvements de la première. Sur le Figure III.15 les courbes donnent la "différence de niveaux" définie par la relation :

$$D_L = 20 \log \left(\frac{\langle v_i(f) \rangle}{\langle v_1(f) \rangle} \right) \quad (\text{III.17})$$

où $\langle v_i(f) \rangle$ est l'amplitude de la vitesse moyenne transverse de la dalle i . Pour rappel, la vitesse transverse n'est constituée que des mouvements de flexion pour le modèle ondulatoire. C'est également vrai pour le modèle hybride.

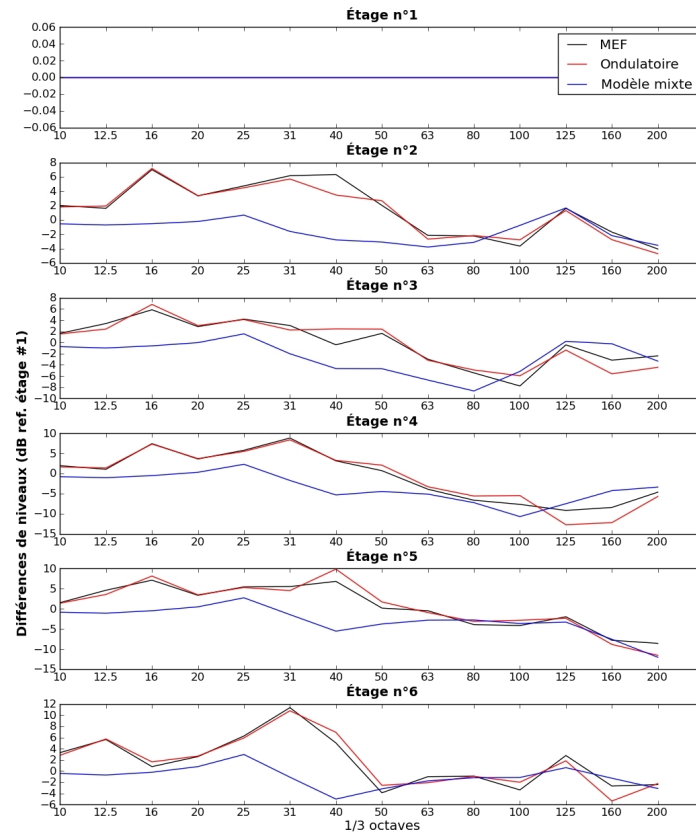


FIGURE III.15 – Différences de Niveaux entre le premier et les différents étages d'un bâtiment qui en comporte six.

III.4. COMPARAISON DES MODÈLES : UN BÂTIMENT DE SIX ÉTAGES

Le modèle de référence correspond au modèle MEF prenant en compte simultanément la Source et le Récepteur. Les résultats obtenus par le modèle ondulateur sont proches de ceux obtenus par le modèle de référence, i.e. FEM via Mefisto. Pour le modèle mixte on peut observer qu'il sous-évalue la décroissance du niveau vibratoire en début de spectre. Ceci s'explique avec l'observation des niveaux au premier étage (Figure III.16) pour lesquels le modèle mixte surévalue la réponse de la dalle. Néanmoins les résultats du modèle mixte sont en accord avec les autres modèles dès le tiers d'octave centré sur 63Hz.

Les figures qui suivent montrent les niveaux vibratoires des première troisième et cinquième dalles. Dans ces calculs les modèles sont toujours calibrés sur un sol moyen supportant le passage d'un lourd train de fret. La première courbe (noire) présente les résultats correspondant à une simulation du système entier réalisée avec Mefisto et nous sert de référence. Sa calibration se traduit par l'application des forces "réelles" calculées comme indiqué dans le paragraphe relatif à la calibration de la vitesse libre. Le modèle ondulateur est proposé tel qu'il a été décrit et est interfacé à l'aide des vitesses de contact calibrées.

Les modèles S.E.A. et hybride sont assemblés afin que la réponse obtenue tienne compte de toutes les composantes de l'excitation. Dans la pratique cela revient à sommer les résultats obtenus par ces deux modèles. Pour la S.E.A. l'interfaçage est réalisé à partir de la puissance injectée horizontale calibrée et pour le modèle hybride avec la vitesse de contact verticale calibrée déduite de la méthode des mobilités.

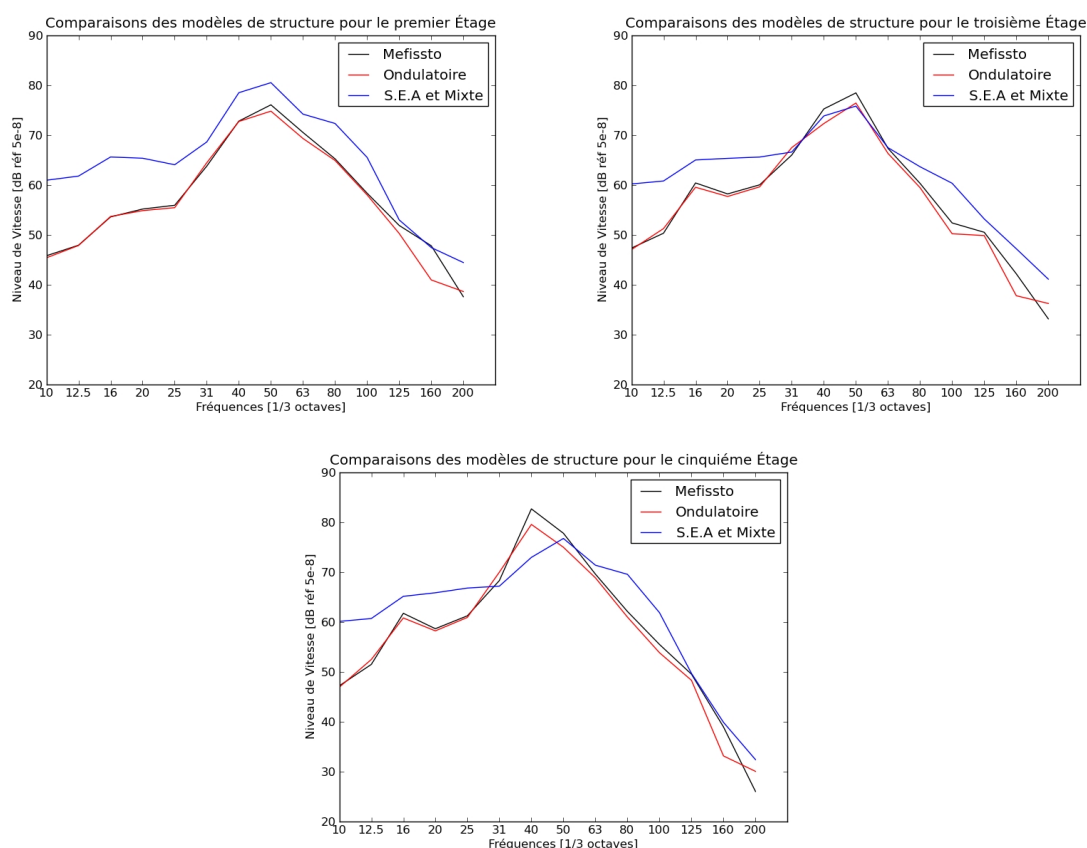


FIGURE III.16 – Comparaison des résultats afférents aux différents modèles présentés pour les premier, troisième et cinquième étages d'un bâtiment qui en comporte six.

Les résultats sont donnés sous la forme d'un niveau de vitesse, i.e. $L_v = 20 \log(V/V_{\text{réf}})$ où V est la valeur absolue de la vitesse étudiée. D'autre part, pour des raisons de clarté, les résultats sont affichés en tiers d'octaves.

On remarque que le modèle ondulatoire, interfacé et calibré donne des résultats proches de la simulation calibrée du problème entier. Pour le modèle mixte les résultats sont cohérents avec la référence dès le tiers d'octave centré sur 50 Hz mais surestiment la réponse de la dalle en bas de spectre.

Pour affiner nos observations, les décompositions des réponses des modèles sur les deux types d'excitations sont données (Figure III.17). Les courbes représentent les niveaux de vitesse engendrés par une excitation longitudinale ou transversale dans le modèle considéré.

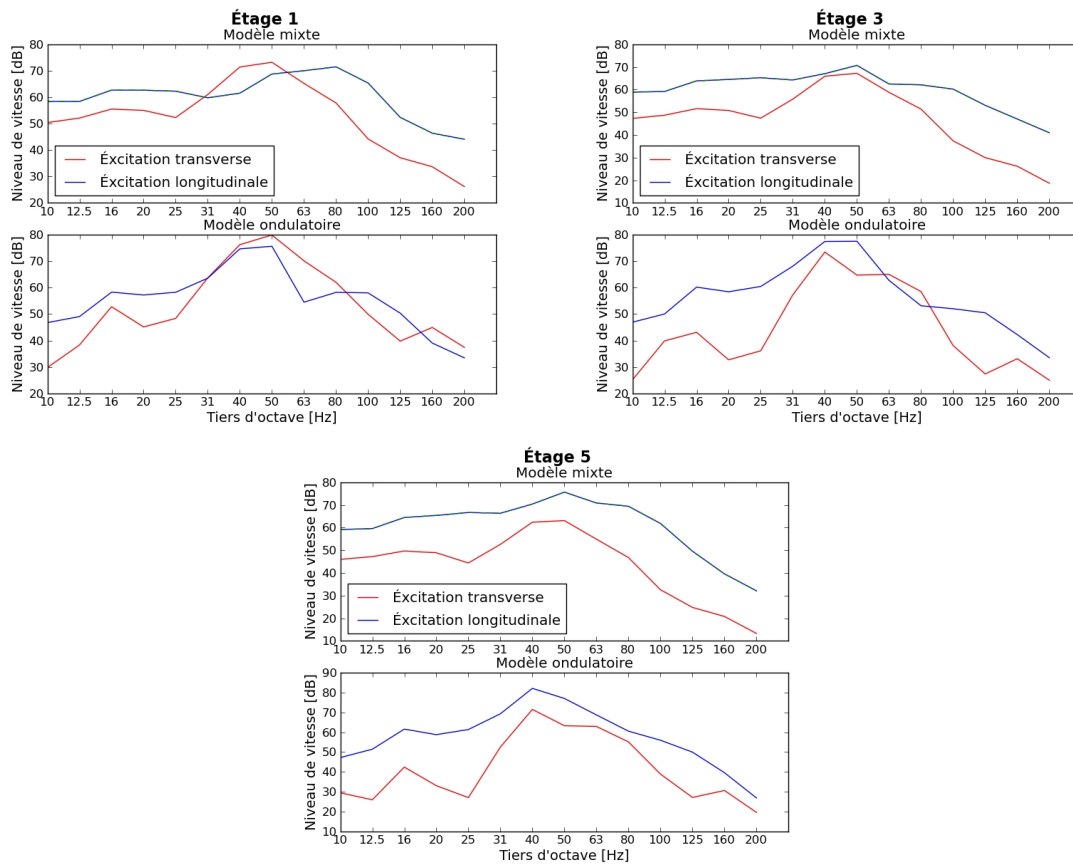


FIGURE III.17 – Comparaison des résultats issus des décompositions des modèles de bâtiments présentés dans ce chapitre pour les premier, troisième et cinquième étages d'un bâtiment qui en comporte six.

Sur ces figures il est observable que, malgré les différences des niveaux totaux, les décompositions en fonction de la forme d'excitation ne sont pas très éloignées pour les modèles mixte et ondulatoire. On peut notamment remarquer que l'excitation longitudinale est largement prépondérante pour les troisième et cinquième étages. Pour le premier étage, l'excitation transversale prend le dessus pour les tiers d'octaves centrés sur 40 et 50Hz. Cela étant le modèle mixte surestime la réponse à une excitation transversale, notamment en bas du spectre. Cela s'explique par le fait que cette composante correspond à la méthode S.E.A. qui n'est pas adaptée aux basses fréquences.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, la modélisation du bâtiment a été présentée à l'aide de plusieurs approches : deux méthodes numériques FEM et BEM, une méthode ondulatoire 2D et une méthode mixte S.E.A.-ondulatoire. Toutes ont des avantages et des inconvénients qui orientent le choix pour la simulation de la situation envisagée. Elles nous servent à la fois pour calculer la mobilité du Récepteur et pour déduire la réponse de la superstructure en un point précis, généralement les dalles de chaque étage, à une excitation particulière.

L'approche numérique est généralement réalisée à l'aide du code Mefisto en utilisant la méthode des éléments finis pour la structure. Seules les géométries en 2.5D ont recours aux éléments de frontières. Que ce soit en 2D, 2.5D ou 3D, les simulations effectuées ainsi donnent généralement les références sur lesquelles nous nous basons pour comparer les autres modèles. Cette approche possède l'avantage de pouvoir modéliser un grand nombre de géométries différentes sans aucune hypothèse supplémentaire. En contre-partie, les temps de calculs peuvent s'avérer longs.

La méthode ondulatoire n'est disponible que pour une géométrie en deux dimensions. Dans cette situation, les temps de calculs sont notablement réduits par rapport à une simulation par éléments finis pour des résultats similaires.

Enfin, la méthode mixte couple une approche S.E.A. pour les excitations transversales aux pieds du bâtiment et une approche hybride S.E.A.-ondulatoire pour les excitations longitudinales. Cette approche a l'avantage d'être très rapide. Néanmoins l'utilisation de la S.E.A. nécessite la prise en compte de la géométrie en trois dimensions alors que l'approche hybride est en deux dimensions.

Pour chacun de ces modèles, la corrélation entre les zones de contact et entre les degrés de libertés est discutée car les mesures en différents points ne sont pas nécessairement corrélées et par conséquent il en est de même des excitations en différents points de contact. Néanmoins les tests effectués avec la méthode ondulatoire montrent que l'effet d'une décorrélation de ces différents modes d'excitations impacte la réponse moyenne d'une dalle principalement en basses fréquences. En calibrant la Source on peut estimer que la majeure partie de l'énergie se trouve sur des fréquences au delà de la zone fréquentielle pour laquelle l'effet de la décorrélation est notable. Celle-ci n'a donc pas beaucoup d'influence sur nos calculs.

Le calcul de la mobilité du bâtiment peut se réaliser de façon quasiment équivalente par les méthodes numériques ou par la méthode ondulatoire. Par contre il n'est pas souhaitable de procéder à ce calcul à l'aide de la S.E.A. ou du modèle hybride.

Lorsque les grandeurs à l'interface Source-Récepteur sont connues, la réponse du bâtiment s'obtient en excitant simultanément toutes les zones de contact. Pour cela il est équivalent d'utiliser les forces ou les vitesses de contact. Pour le modèle purement S.E.A. ce sont les puissances injectées qui doivent être utilisées.

La comparaison entre les résultats obtenus par ces diverses méthodes, nous permettant ainsi d'observer leurs différences, montre qu'en deux dimensions les méthodes numériques et ondulatoire sont naturellement proches. Cela se justifie car les hypothèses de départ de ces deux modèles sont voisines. Il n'en est pas de même pour la S.E.A. classique qui est utilisée ici à la limite de ses hypothèses.

Chapitre IV

Mobilités Stochastiques des fondations

Sommaire

Avant-propos	94
IV.1 Principe du calcul de la mobilité stochastique	95
IV.2 Principales définitions	96
IV.3 Première étape et problème de minimisation	98
IV.4 Deuxième étape : identification des sous-matrices	103
IV.5 Construction des impédances et mobilités stochastiques	105
IV.6 Résolution des instabilités	107
IV.7 Application	117
Conclusion du chapitre	121

Avant-propos

La détermination de la réponse d'un bâtiment à des vibrations d'origine ferroviaire comporte de nombreuses incertitudes. Les principales sources d'inconnue résident dans le signal d'excitation et les propriétés des sols dans lesquels se propagent les vibrations, ces sources étant entachées d'incertitudes largement plus importantes que celles afférentes au bâtiment lui-même. La décorrélation des signaux entre différentes zones de contact, étudiée dans le chapitre précédent, prend en compte partiellement l'effet d'une répartition aléatoire des propriétés élastiques des sols. Pour progresser dans la prise en compte de l'aléa des caractéristiques du sol sur l'excitation des bâtiments, il serait nécessaire d'aborder la propagation d'ondes dans un milieu aux propriétés aléatoires, ce qui sort du cadre de cette thèse.

Toutefois, les propriétés des sols interviennent également dans le calcul de la mobilité de la Source et ce chapitre a justement pour but de prendre en compte la dispersion des propriétés des sols sur cette mobilité. De récents développements sur l'étude de l'interaction sol-structure en génie parasismique permettent en effet de traiter l'incertitude sur l'impédance de la fondation par utilisation de modèles stochastiques non-paramétriques qui présentent globalement l'aléa sur l'ensemble de l'impédance (et par conséquent de la mobilité) et reposent sur l'existence d'un modèle moyen qui correspond au type de modèle développé dans le Chapitre II.

La méthode proposée permet alors d'aboutir à la dispersion de la vitesse moyenne de dalle dans le bâtiment en fonction des incertitudes liées aux mobilités des fondations. Pour ce faire nous avons utilisé une méthode, développée par Soize, basée sur la maximisation de l'entropie et décrite dans [55]. Cette méthode repose sur la représentation classique de la dynamique des structures par des matrices de masse, raideur et amortissement. Elle nécessite donc d'identifier de telles matrices qui permettent de représenter au mieux la mobilité de la fondation, déterminée par propagation d'ondes, et comportent, outre les degrés de liberté de la fondation, des degrés de liberté supplémentaires dénommés "variables cachées" [95, 6, 7].

Cette méthodologie, initialement développée dans le domaine du génie parasismique, a été étendue au domaine des vibrations qui sont l'objet de ce mémoire, en s'appuyant sur la détermination de la mobilité des fondations développée au Chapitre II. La principale difficulté dans cette extension est que la gamme de fréquences est maintenant beaucoup plus large, ce qui rend d'autant plus difficile l'identification du système à variables cachées permettant de reproduire l'impédance de fondations.

Toutefois, la détermination du système à variables cachées réalisée, il est alors possible d'étudier les incertitudes sur les vibrations à l'intérieur du bâtiment qui sont une conséquence des incertitudes sur la mobilité de la Source, en utilisant les développements du Chapitre III.

Les paragraphes IV.2, IV.3, IV.4 et IV.5 sont une présentation de la méthode initialement développée par Cotteneau et Soize [95, 55]. Les aspects nouveaux introduits dans la méthodologie pour l'adaptation au domaine des vibrations se situent dans les sous-sections IV.6 pour la méthodologie et IV.7 pour la présentation d'une application dans ce domaine.

Pour simplifier la compréhension de ce chapitre, les notations utilisées sont données ici.

- $[A]$ est la matrice dont les termes sont notés A_{ij} .
- (A) est le vecteur de coordonnées A_i .
- $\{A\}$ est la base de vecteurs (A_i) .
- A^T est la grandeur transposée de A , $\bar{A}$ sa conjuguée (exception faite des constantes de Kharitonov) et A^* sa transposée conjuguée.
- $\mathbb{M}_{(n,m)}$ est l'espace des matrices d'ordre (n, m) et $\mathbb{M}_n^+$ est l'espace des matrices définies positives, c'est à dire symétriques, d'ordre (n, n) et dont la plus petite valeur propre est positive.

IV.1 Principe du calcul de la mobilité stochastique

Les vibrations induites dans un bâtiment par une source située à distance du bâtiment sont transmises par le sol. Or il est connu que les propriétés élastiques des sols sont fortement dispersées. À titre d'exemple, dans le domaine du génie parasismique, les calculs dynamiques sont réalisés avec des propriétés de sols moyennes (disons un module d'Young $Emoy$) et avec des valeurs extrêmes correspondant à $Emoy/1.5$ et $Emoy \times 1.5$. Dans le contexte de cette thèse, l'incertitude intervient sur deux points distincts : au niveau de la réponse de la vitesse libre et au niveau de la caractérisation de la mobilité. L'incertitude sur la réponse de la vitesse libre nécessite de résoudre une équation de propagation dans un milieu élastique de propriété variant de façon stochastique, ce qui n'a pas été abordé ici. Par contre, l'incertitude sur la mobilité a pu être réalisée grâce à la mise en œuvre d'une méthode de calcul de l'impédance stochastique, développée initialement dans le domaine du génie parasismique. L'impédance $[Z(\omega)]$ étant obtenue à partir de la mobilité $[Y(\omega)]$ par $[Z] = j\omega[Y]^{-1}$, il est donc possible de déterminer l'incertitude sur la mobilité.

L'objectif de cette étude est de caractériser l'incertitude sur l'impédance, par conséquent sur la mobilité, de la fondation dans la gamme des fréquences caractéristiques des vibrations, qui est largement plus étendue que celle correspondant aux vibrations sismiques. Dans ce but, on note que l'impédance représente la fonction de transfert entre les composantes cinématiques de la fondation et les efforts appliqués. En conséquence, l'impédance doit représenter une matrice de transfert vérifiant la propriété de causalité, caractérisée dans le domaine fréquentiel pour une impédance scalaire par les relations de Kramers-Kronig qui relient la partie réelle et la partie imaginaire.

L'impédance calculée à partir du code Mefissto est obtenue à partir des équations de l'élastodynamique et vérifie donc le principe de causalité, aux erreurs numériques près. Cette impédance peut être caractérisée par sa partie réelle $\Re\{[Z(\omega)]\}$ et sa partie imaginaire $\Im\{[Z(\omega)]\}$ en fonction de la fréquence. Si l'on veut étudier la dispersion (au sens stochastique) de cette impédance, on est amené à faire varier les fonctions $\Re\{[Z(\omega)]\}$ et $\Im\{[Z(\omega)]\}$ autour de leur valeur moyenne. Toutefois, une variation quelconque de ces quantités produit une impédance qui n'est pas causale. Il est donc nécessaire de construire une variable

aléatoire caractérisant l'impédance aléatoire qui produise systématiquement des valeurs causales. Un moyen d'atteindre cet objectif repose sur le fait qu'un système dynamique discret caractérisé par des matrices de masse, d'amortissement et de raideur ($[M]$, $[D]$, $[K]$) constantes est causal. Cela est vrai que ce soit pour l'ensemble des ddl du système, ou lorsque l'on ne considère que l'interaction entre certains ddl choisis du système. De plus, les travaux de Soize ont permis de construire des modèles stochastiques non-paramétriques des matrices $[M]$, $[D]$, $[K]$. La méthode permettant de construire l'impédance aléatoire repose sur la construction d'un système dynamique discret "moyen" à N variables contenant les N_{ddl} degrés de liberté de la fondation et les $N_{vc} = N - N_{ddl}$ variables cachées, tel que la restriction aux N_{ddl} degrés de liberté de la fondation reproduise l'impédance "moyenne" de la fondation. La construction des matrices $[M]$, $[D]$ et $[K]$ stochastiques sur les N variables induit ensuite une impédance stochastique sur les N_{ddl} degrés de liberté de la fondation.

Le calcul se décompose naturellement de la façon suivante :

- a/ Identification des matrices $[M]$, $[D]$, $[K]$ "moyennes" du système "à variables cachées" qui permettent de reproduire l'impédance/mobilité moyenne calculée par Mefissto en se restreignant aux ddl de la fondation. C'est la partie la plus délicate de l'ensemble du calcul. A ce stade, il convient de noter que cette impédance "moyenne" s'exprime sous la forme d'une fraction rationnelle en $j\omega$ de la forme $[N(\omega)]/q(\omega)$ où $[N(\omega)]$ représente une matrice dont les coefficients, comme le scalaire q , sont des polynômes en $j\omega$.
- b/ Construction, grâce au principe de maximum d'entropie, des matrices stochastiques à partir de leurs valeurs moyennes.
- c/ Détermination de l'impédance stochastique en restreignant le système aux ddl de la fondation.

L'ensemble de ce processus est appelé "méthode à variables cachées".

IV.2 Principales définitions

IV.2.1 Forme des matrices du modèle à variables cachées

Dans la méthode des variables cachées (MVC) les grandeurs recherchées sont fonctions de toutes les "dimensions" du problème. Dans notre cas, qui est celui décrit par [95], le système global est constitué d'un domaine fini correspondant à la fondation, noté Γ , et d'un domaine infini représentant le sol Ω .

Le domaine infini est caractérisé par un nombre infini de degrés de liberté. Toutefois, le principe de la méthode à variables cachées est justement d'approcher la réponse du domaine infini par un nombre fini de degrés de liberté. L'ensemble des variables du problème comprend donc : les variables dites visibles relatives à Γ dont le nombre est déterminé (3 en 2D et 6 en 3D), noté n_Γ ; et les variables cachées représentant les degrés de liberté finis qui permettent d'approcher la réponse de Ω sur une plage de fréquences donnée. Leur nombre, noté n_Ω , peut être plus élevé que le nombre de degrés de liberté conventionnel car ces variables ont la capacité de représenter des degrés de liberté "non-physiques". Dans ces conditions, la matrice $[S]$ reliant les efforts appliqués aux déplacements s'écrit donc, pour une matrice

d'amortissement constante, sous la forme $[S] = (j\omega)^2[M] + j\omega[D] + [K]$. Cette matrice peut s'écrire comme un polynôme du deuxième degré en $j\omega$ dont les coefficients sont des matrices carrées de dimensions $n_\Gamma + n_\Omega$. Son expression générale est donnée par la forme :

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_\Gamma] & [S_c] \\ [S_c]^T & [S_\Omega] \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

où les $[S_c]$ sont des matrices rectangulaires d'ordre $n_\Gamma \times n_\Omega$, les matrices $[S_\Gamma]$ et $[S_\Omega]$ sont carrées et respectivement d'ordre $n_\Gamma \times n_\Gamma$ et $n_\Omega \times n_\Omega$. Les coefficients de toutes ces sous-matrices sont également des polynômes du second degré en $j\omega$ et sont donc complexes.

Du point de vue du Récepteur, cette expression peut être réduite sur les degrés de liberté visibles en considérant que tous les degrés de libertés "cachés" ne sont pas chargés. Elle prend alors la forme moyenne $[Z_m]$, avec :

$$[Z_m] = [S_\Gamma] - [S_c][S_\Omega]^{-1}[S_c]^T \quad (\text{IV.2})$$

Cette matrice est, par construction, symétrique et causale et doit être déterminée pour représenter au mieux l'impédance déterminée à partir du calcul de la mobilité de la Source réalisé au Chapitre II.

L'objectif est donc d'identifier les matrices de masse, raideur et dissipation, qui ont des formes similaires à $[S]$.

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_\Gamma] & [0_c] \\ [0_c]^T & [I_\Omega] \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} [D_\Gamma] & [D_c] \\ [D_c]^T & [d_\Omega] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_\Gamma] & [K_c] \\ [K_c]^T & [k_\Omega] \end{bmatrix}$$

Les matrices $[A_\Gamma]$ appartiennent à $\mathbb{M}_{n_\Gamma}^+(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices définies positives à coefficients réels d'ordre n_Γ), les matrices $[A_c]$ sont de dimension $n_\Gamma \times n_\Omega$ et les matrices $[A_\Omega]$ sont choisies comme étant diagonales et positives d'ordre $n_\Omega \times n_\Omega$. Cette représentation n'est pas unique et il est possible de définir d'autres formes de $[M]$, $[D]$ et $[K]$ fournissant un niveau d'approximation comparable de $[Z]$ sur la plage de fréquences choisies. Le choix des matrices définies ci-dessus conduit à une dissipation diagonalisable sur la même base que la masse et la raideur. Le détail sur ce choix est donné dans le Chapitre 4 du mémoire de thèse de Cottureau [95] et dans [21, 47].

IV.2.2 Décomposition du problème d'identification

Compte tenu de la forme des matrices d'impédances choisies, les coefficients de sa forme identifiée, notée $[\tilde{Z}]$, sont des fractions rationnelles en $j\omega$. D'après Butheel [6, 7] $[Z_m]$ est de la forme $[Z_m] = [\tilde{Z}] = [N]/q$ où q est un polynôme en $j\omega$ d'ordre $2n_\Omega$, noté également nq , et $[N]$ est une matrice dont tous les coefficients sont des polynômes d'ordre $nq + 2$ en $j\omega$. De cette manière, le rapport $[N]/q$ donne automatiquement une fraction rationnelle sous la forme recherchée. Le processus d'identification repose alors sur une première étape consistant à identifier $[\tilde{Z}] = [N]/q$, puis dans une deuxième étape à déterminer $[Z_m]$, c'est-à-dire les sous matrices constituant $[S]$.

IV.3 Première étape et problème de minimisation

IV.3.1 Écriture du problème

La fonction coût

La matrice $[N]/q$ doit permettre d'approcher l'impédance $[Z]$ sur la gamme de fréquences du problème. Celle-ci est habituellement de l'ordre de $[0.1 - 10]Hz$ en sismique ; nous verrons plus tard que l'extension à la problématique ferroviaire qui se situe plutôt sur $[10 - 250]Hz$ ajoute un certain nombre de complications.

L'idée est donc de déterminer $[\tilde{Z}] = [N]/q$ tel que cette grandeur soit la plus proche possible de $[Z]$. Cette approche peut se retranscrire par une fonction coût, notée ϵ , qu'il faut minimiser. Celle-ci est donnée par l'écriture suivante,

$$\epsilon = \sum_{l=1}^L w(\omega_l)^2 \|[N(\omega_l)] - q(\omega_l)[Z(\omega_l)]\|_F^2 \quad (\text{IV.3})$$

où :

- * les ω_l sont les valeurs discrètes de la pulsation pour lesquelles l'impédance $[Z]$ est connue.
- * $w(\omega)$ est une fonction poids permettant d'éviter les singularités numériques lorsque la somme des termes tend vers 0. w peut avoir un impact non négligeable sur la qualité de l'identification. Le choix de ses valeurs est donné plus en détails dans le paragraphe IV.6.
- * $\|A\|_F$ est la norme de Frobenius définie, pour une matrice carrée symétrique à valeurs dans $\mathbb{C}$, par la relation $\|[A]\|_F = \text{tr}([A][A]^*)^{1/2}$.

Nous cherchons donc à minimiser une fonction comportant la valeur $[Z(\omega)]$ déterminée à partir de la mobilité calculée au Chapitre II et des polynômes en $j\omega$. La résolution directe de ce problème est loin d'être simple et la présente méthode propose de réécrire ϵ sous une forme plus aisément solvable.

Il apparait en effet plus commode de se placer dans un espace approprié, celui engendré par les polynômes constitutifs de $[N]$ et q . De plus, si une base orthonormée relative à la fonction coût de cet espace est connue, alors le problème de minimisation se résume à trouver les coefficients minimisant la somme des composantes d'un vecteur représentant l'écart entre l'impédance et sa valeur approchée dans cette base. La première phase de la méthode consiste à construire de façon systématique cette base, que l'on notera $\{\Phi\}$.

Détermination de la base $\{\Phi\}$

Pour trouver la base recherchée plusieurs techniques sont utilisables. L'une des plus simples est le processus de Gram-Schmidt, dont le principe est rappelé plus bas, utilisée avec une norme $\|\cdot\|_W$ et une base de départ $\{f\}$ bien choisies.

Détermination de la base de départ $\{f\}$

Le binôme $([N], q)$ est défini par un nombre fini de polynômes en $j\omega$ comprenant les coefficients de $[N]$ et les coefficients de q .

Par ailleurs, chaque polynôme peut se développer sur la base naturelle constituée par les monômes qui les constituent. Le binôme $([N], q)$ est donc dans un espace vectoriel de dimensions finies et dans un premier temps, une base $\{f\}$ de cet espace est constituée.

L'ensemble des coefficients de la matrice $[N]$ peuvent être regroupé avec q dans un vecteur noté (P) à l'aide d'un opérateur vectorisant, noté $vect()$, transformant une matrice en un vecteur en empilant les colonnes de cette matrice.

$$vect : \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{M}_{1 \times n^2}(\mathbb{k})$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow vect([A]) = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix},$$

Cela permet d'écrire :

$$(P) = \begin{pmatrix} vect([N]) \\ q \end{pmatrix}$$

Chacune des composantes de (P) est un polynôme et par conséquent une base $\{f\} = \{(f_0) \dots (f_i) \dots (f_N)\}$ de l'ensemble des vecteurs (P) est fournie par l'ensemble des vecteurs comprenant un monôme en $j\omega$ sur une de ses composantes, les autres composantes étant nulles. Les (f_i) sont, de ce fait, des vecteurs de $n_F^2 + 1$ composantes dont les valeurs sont des puissances de $j\omega$. Le nombre total de vecteurs est égal à $mh = n_F^2(nq + 3) + (nq + 1)$.

La base de départ choisie dans cette étude s'écrit :

$$\{f\} = \left\{ \begin{pmatrix} (j\omega)^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} (j\omega)^{nq+2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (j\omega)^0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ (j\omega)^{nq+2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (j\omega)^0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (j\omega)^{nq} \end{pmatrix} \right\}$$

Définition de la norme dans l'espace des vecteurs (P)

C'est l'un des points centraux de cette méthode. L'idée est d'utiliser les matrices $[Z_l] = [Z(\omega_l)]$ pour construire une norme $\|\cdot\|_W$ qui traduit la fonction coût ϵ . La normalisation de la base de départ s'effectue grâce à des matrices définies de la façon suivante :

$$[W_l] = [W(\omega_l)] = w_l^2 \begin{bmatrix} [I_{n_F^2}] & -vect([Z_l]) \\ -vect([Z_l])^* & \|[Z_l]\|_F^2 \end{bmatrix}$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius.

Soit $V(\omega)$ une fonction vectorielle de la pulsation. Les matrices $[W_l]$ permettent de construire la norme $\|\cdot\|_W$ comme la somme sur les ω_l des formes hermitiennes appliquées aux vecteurs $V(\omega_l)$, soit :

$$\|V\|_W = \sqrt{\Re \left\{ \sum_{l=1}^L w(\omega_l)^2 (V(\omega_l))^* [W(\omega_l)] (V(\omega_l)) \right\}}$$

Par exemple, pour $V = P$ et $n_\Gamma = 2$, la composante de $\|P\|_W^2$ à la fréquence ω_0 s'écrit :

$$(P(\omega_0))^* [W(\omega_0)] (P(\omega_0)) = w(\omega_0)^2 \begin{pmatrix} vect([N(\omega_0)]) \\ q(\omega_0) \end{pmatrix}^* \begin{bmatrix} [I_{n_\Gamma}^2] & -vect([Z(\omega_0)]) \\ -vect([Z(\omega_0)])^* & \|[Z(\omega_0)]\|_F^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} vect([N(\omega_0)]) \\ q(\omega_0) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne en omettant la dépendance en ω_0 ,

$$\begin{aligned} (P)^* [W] (P) &= w^2 [N_{11}(N_{11} - Z_{11}q)^* - Z_{11}q(N_{11} - Z_{11}q) \\ &\quad + N_{12}(N_{12} - Z_{12}q)^* - Z_{12}q(N_{12} - Z_{12}q) \\ &\quad + N_{21}(N_{21} - Z_{21}q)^* - Z_{21}q(N_{21} - Z_{21}q) \\ &\quad + N_{22}(N_{22} - Z_{22}q)^* - Z_{22}q(N_{22} - Z_{22}q)] \end{aligned}$$

où la partie réelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \Re\{(P)^* [W] (P)\} &= \Re\{w^2\} [\Re\{N_{11} - Z_{11}q\}^2 + \Re\{N_{21} - Z_{21}q\}^2 \\ &\quad + \Re\{N_{12} - Z_{12}q\}^2 + \Re\{N_{22} - Z_{22}q\}^2] \\ &\quad - \Im\{w^2\} [\Re\{N_{11} - Z_{11}q\} \Im\{N_{11} - Z_{11}q\} + \Re\{N_{21} - Z_{21}q\} \Im\{N_{21} - Z_{21}q\} \\ &\quad + \Re\{N_{12} - Z_{12}q\} \Im\{N_{12} - Z_{12}q\} + \Re\{N_{22} - Z_{22}q\} \Im\{N_{22} - Z_{22}q\}] \end{aligned}$$

ce que l'on peut voir comme la somme des carrés de la fonction coût sur l'ensemble des degrés de liberté pour la fréquence choisie. On assure ainsi la bonne correspondance entre le rapport $[N]/q$ et $[Z]$ pour toutes leurs composantes.

Construction d'une base orthogonale sur l'ensemble des vecteurs P par le processus de Gram-Schmidt

Puisque la norme $\|(P)\|_W$ est construite à partir d'une matrice hermitienne, il est possible de construire un produit sesquelinéaire donné par :

$$\langle (P) | (Q) \rangle \equiv \sum_l (P_l) [W_l] (Q_l) \quad \text{et} \quad \langle (P) | (P) \rangle \equiv \|(P)\|_W \quad (\text{IV.4})$$

Cette forme permet de définir un produit scalaire et de construire la base $\{\Phi\}$ orthonormée, décrivant le même espace que $\{f\}$ qui n'est ni orthogonale ni normalisée.

De cette façon les vecteurs (Φ_n) se calculent comme suit :

$$(\Phi_n) = \frac{(\chi_n)}{\langle (\chi_n) | (\chi_n) \rangle^{1/2}}$$

où les (χ_n) sont données par :

$$(\chi_n) = (f_n) - \sum_{i=0}^{n-1} a_{ni}(\Phi_i)$$

Les a_{ni} peuvent être retrouvés grâce à l'orthogonalité des vecteurs (Φ_i) en remarquant que,

$$\forall j < n \quad \langle (\chi_n) | (\Phi_j) \rangle = \langle (f_n) | (\Phi_j) \rangle - \sum_{i=0}^{n-1} \langle a_{ni}(\Phi_i) | (\Phi_j) \rangle$$

$$0 = \langle (f_n) | (\Phi_j) \rangle - a_{nj}$$

d'où

$$a_{nj} = \langle (f_n) | (\Phi_j) \rangle$$

Toute la démarche décrite ici s'implémente bien, notamment en utilisant un script *python* dans lequel il est possible de définir des fonctions locales pour, par exemple, déterminer les coefficients a_{nj} . La base $\{\Phi\}$ est obtenue directement et concentre presque tout le poids numérique du calcul de la méthode initiale.

Réécriture de la fonction coût

En utilisant la base $\{\Phi\}$ le vecteur (P) associé aux grandeurs $[N]$ et q peut s'écrire

$$(P) = \sum_i \alpha_i(\Phi_i) \tag{IV.5}$$

Dans ces conditions, la valeur de la fonction coût ϵ pour un couple caractérisé par le vecteur (P) est obtenue à partir du carré de la norme de (P) . Compte tenu de l'orthogonalité des vecteurs de base, il vient :

$$\epsilon = ||(P)||_W^2 = \sum_{i=1}^{mh} \alpha_i^2 \tag{IV.6}$$

IV.3.2 Résolution du problème de minimisation

Pour la suite du problème, plus précisément pour la solution du système d'équations (IV.13), le polynôme q doit faire partie de la classe des polynômes dits "d'Hurwitz", c'est à dire que ses zéros doivent être complexes à parties réelles négatives [64]. Or la recherche du minimum de la fonction coût ne permet pas toujours de produire un vecteur (P) dont la composante q est "Hurwitz". La résolution du problème se décompose donc en deux cas distincts : un cas où les vecteurs (Φ_i) sont stables (q est Hurwitz), et un autre où ils ne le sont pas. Dans cette partie, seul le cas stable est traité, nous verrons plus tard les démarches

IV.3. PREMIÈRE ÉTAPE ET PROBLÈME DE MINIMISATION

proposées pour les cas instables. Dans les deux cas la solution doit s'écrire comme la somme des vecteurs pondérés :

$$\begin{pmatrix} vect([N]) \\ q \end{pmatrix} \equiv (P) = \sum_{i=1}^{mh} \alpha_i (\Phi_i) \quad (IV.7)$$

Le problème de minimisation revient à déterminer les coefficients (α) les plus petits pour lesquels (P) est bien conditionné. La solution dans laquelle tous les coefficients α_i sont nuls doit évidemment être évitée. Une façon pratique d'exclure cette solution triviale est d'imposer que le dernier de ces coefficients, α_{mh} , soit égal à un. Cela peut s'écrire :

$$(\alpha) = arg \left(min \left(\sum_{i=1}^{mh} \alpha_i^2 \right) \right) \quad (IV.8)$$

$$\alpha_{mh} = P_{mh}^{n_{\Gamma}^2+1, nq} = q_{mh}^{nq} = 1$$

où $P_o^{n,m}$ représente le coefficient d'ordre m du polynôme donné par la n^{ieme} composante du o^{ieme} vecteur de la base $\{\Phi\}$; le terme q_o^m représente ce même coefficient lorsque $n = n_{\Gamma}^2 + 1$.

Lorsque le problème est stable, la solution est presque triviale puisque le terme de plus haut degré de q est fixé et, par construction, présent seulement dans le dernier vecteur de $\{\Phi\}$. La fonction coût est minimale lorsque tous les α_i sont nuls sauf le dernier, soit :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 0 & \forall \ 0 \leq i < mh \\ \alpha_{mh} &= 1 & i = mh \end{aligned} \quad (IV.9)$$

La figure IV.1 montre un exemple de comparaison entre l'impédance initiale obtenue par le code Mefissto et l'impédance obtenue à partir du problème de minimisation, dans le cas stable. La figure montre une concordance relativement bonne, dans les cas où q est stable, entre $[N]/q$ et $[Z]$.

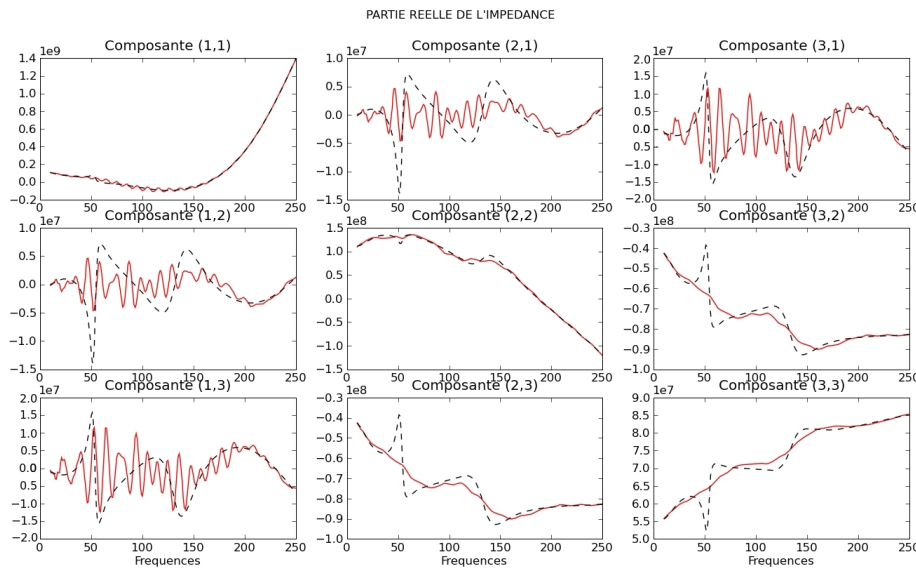


FIGURE IV.1 – Résultat obtenu pour une solution du problème de minimisation stable, en rouge $[Z]$ calculée par le code Mefissto et en noir la fonction $[\tilde{Z}] = [N]/q$

IV.4 Deuxième étape : identification des sous-matrices

Le processus défini précédemment permet de construire $n_\Gamma^2 + 1$ polynômes dont le dernier est le dénominateur q et dont les autres définissent la matrice $[N]$. Il faut ensuite construire les matrices $[M]$, $[D]$, $[K]$ correspondantes. Pour rappel, ces matrices (non-réduites) s'écrivent (Chapitre 3 de [95]) :

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_\Gamma] & [S_c] \\ [S_c]^T & [S_\Omega] \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} [M_\Gamma] & [0_c] \\ [0_c]^T & [I_\Omega] \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} [D_\Gamma] & [D_c] \\ [D_c]^T & [d_\Omega] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_\Gamma] & [K_c] \\ [K_c]^T & [k_\Omega] \end{bmatrix}$$

$$[S] = (j\omega)^2[M] + j\omega[D] + [K]$$

où les $[A_\Gamma]$ appartiennent à $\mathbb{M}_{n_\Gamma^2}^+(\mathbb{C})$, les $[A_c]$ sont des matrices de dimensions $n_\Gamma \times n_\Omega$ et les $[A_\Omega]$ des matrices diagonales d'ordre n_Ω^2 .

Pour obtenir l'impédance, il faut réduire la dernière expression sur ses degrés de libertés "visibles".

$$[Z] = [S_\Gamma] - [S_c][S_\Omega]^{-1}[S_c]^T$$

Pour identifier les matrices $[M_\Gamma]$, $[D_\Gamma]$, $[K_\Gamma]$, $[M_c]$, $[D_c]$, $[K_c]$, $[M_\Omega]$, $[D_\Omega]$ et $[K_\Omega]$, nous devons comparer les expressions obtenues par la réduction de la matrice $[S]$ sur les variables visibles et celles données par $[N]/q$. La première expression donne :

$$[Z] = (j\omega)^2[M_\Gamma] + j\omega[D_\Gamma] + [K_\Gamma] - \sum_{l=1}^{nq} [D_c]^l [D_c]^{lT} \quad (\text{IV.10})$$

$$- \sum_{l=1}^{nq} j\omega \frac{[D_c]^l [K_c]^{lT} + [K_c]^l [D_c]^{lT} - d_l [D_c]^l [D_c]^{lT}}{-\omega^2 + j\omega d_l + k_l} - \sum_{l=1}^{nq} \frac{[K_c]^l [K_c]^{lT} - k_l [D_c]^l [D_c]^{lT}}{-\omega^2 + j\omega d_l + k_l}$$

La seconde peut s'écrire de façon unique en la somme d'une partie entière et d'une décomposition pôles-résidus du reste de la division euclidienne des polynômes identifiés.

$$[N]/q = (j\omega)^2[R_{-2}] + j\omega[R_{-1}] + [R_0] + \sum_{l=1}^{2nq} \frac{[R]^l}{j\omega - p_l} \quad (\text{IV.11})$$

$$= (j\omega)^2[R_{-2}] + j\omega[R_{-1}] + [R_0] + \sum_{l=1}^{nq} \frac{2j\omega \Re([R]^l) - 2\Re([R]^l \overline{p_l})}{-\omega^2 - 2j\omega \Re(p_l) + \|p_l\|^2}$$

où l'indice l indique une dépendance fréquentielle de la grandeur via la valeur des pôles, notés p_l , les résidus sont indiqués par la grandeur $[R]^l$.

La comparaison débouche sur trois systèmes de $4nq + 3$ équations au total :

$$\begin{cases} [M_\Gamma] = [R_{-2}] \\ [D_\Gamma] = [R_{-1}] \\ d_l = -2\Re(p_l) \\ k_l = \|p_l\|^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \leq l \leq nq \\ 1 \leq l \leq nq \end{matrix} \quad (\text{IV.12})$$

$$\begin{cases} [K_c]^l [K_c]^{lT} - k_l [D_c]^l [D_c]^{lT} = 2\Re\{[R]^l \bar{p}_l\} \\ [D_c]^l [K_c]^{lT} + [K_c]^l [D_c]^{lT} - d_l [D_c]^l [D_c]^{lT} = -2\Re\{[R]^l\} \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \leq l \leq nq \\ 1 \leq l \leq nq \end{matrix} \quad (\text{IV.13})$$

$$[K_\Gamma] = [R_0] + \sum_{l=1}^{nh} [D_c]^l [D_c]^{lT} \quad (\text{IV.14})$$

Le système (IV.12) nous permet d'obtenir directement $[M_\Gamma]$, $[D_\Gamma]$, d_l et k_l . Les deux ensembles d'équations du système (IV.13) forment un problème d'équations couplées. La solution de ce système est proposée sous la forme d'une décomposition dite "factorisation de Takagi" [59].

Factorisation de Takagi (1925)

La factorisation de Takagi est un cas particulier de la Décomposition en Valeurs Singulière. Son principe est de trouver une matrice unitaire $[L]$ et une matrice diagonale $[\Sigma] = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ telles que :

$$[A] = [L][\Sigma][L]^T$$

où $[A]$ est la matrice de départ, complexe et symétrique.

Plusieurs techniques sont proposées dans la littérature, dont celle proposée par Xiaohong dans [74]. Par ailleurs, la décomposition comporte une étape supplémentaire permettant d'utiliser une seule matrice $[L]_2$, en intégrant les racines des valeurs de $[\Sigma]$ dans les matrices $[L]$ et $[L]^T$, ce qui donne par exemple pour un problème à deux degrés de libertés :

$$[A] = [L]_2 [L]_2^T$$

$$[L]_2 = \begin{bmatrix} L(1,1)\sqrt{\sigma_1} & L(1,2)\sqrt{\sigma_2} \\ L(2,1)\sqrt{\sigma_1} & L(2,2)\sqrt{\sigma_2} \end{bmatrix}$$

L'obtention de $[L]_2$ permet alors de résoudre le système (IV.13) dont la solution peut s'écrire ainsi :

$$\begin{cases} [K_c]^l = \Im(p_l)\Re([L]_2^l) - \Re(p_l)\Im([L]_2^l) \\ [D_c]^l = \Im([L]_2^l) \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \leq l \leq nq \\ 1 \leq l \leq nq \end{matrix} \quad (\text{IV.15})$$

avec

$$[L]_2^l [L]_2^{lT} = -2j \frac{[R]^l}{\Im(p_l)} \quad 1 \leq l \leq nq \quad (\text{IV.16})$$

Le dernier système devient alors facilement soluble.

Il faut toute fois noter que la forme obtenue ne correspond pas exactement à la solution recherchée. En effet les grandeurs $[D_c]^l$ et $[K_c]^l$ sont initialement recherchées sous la forme d'un vecteur. Or la factorisation de Takagi aboutit à une forme matricielle de $[D_c]^l$ et $[K_c]^l$. Cela a pour conséquence de multiplier les dimensions des matrices $[D_\Omega]$ et $[K_\Omega]$ par n_Γ . En effet avec cette solution chaque pôle p^l est automatiquement associé, non pas à un mais à n_Γ vecteurs propres. Lorsque le problème est instable ces solutions sont d'autant plus difficiles à optimiser (voir paragraphe IV.6).

Nous pouvons maintenant reconstituer l'impédance et la mobilité qui est simplement son inverse multipliée par la pulsation. En fin de compte, la première étape a permis de trouver les éléments $[N]$ et q permettant d'approcher au mieux l'impédance calculée à l'aide du code Mefissto au Chapitre II et la deuxième étape permet d'identifier les matrices du système complet $[M]$, $[D]$ et $[K]$ associé. Ces matrices représentent l'impédance d'un "modèle déterministe" (au sens stochastique) qui va maintenant permettre de calculer les matrices stochastiques associées, $[M_s]$, $[K_s]$ et $[D_s]$, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

IV.5 Construction des impédances et mobilités stochastiques

La problématique de ce paragraphe est la détermination de la matrice $[A_s]$ stochastique correspondante à la matrice déterministe $[A]$. Des résultats adaptés à l'interaction sol-structure sont utilisés ici [55]. Plusieurs exemples de l'utilisation de cette méthode sont donnés dans la littérature récente [10, 67]. L'exposé qui suit ne prétend pas être exhaustif, mais tente simplement de décrire au mieux la démarche suivie pour les résultats présentés dans la suite. Notons que ce mémoire n'apporte aucune nouveauté dans cette partie de la méthodologie.

IV.5.1 Ensemble des matrices aléatoires

L'ensemble des matrices normalisées définies positives, dénoté SG^+ , est défini comme une famille de matrices aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [G_s] \in \mathbb{M}^+(\mathbb{R}) & \text{par construction} \\ E\{\|[G_s]\|_F^2\} < +\infty & \text{(variable aléatoire du deuxième ordre)} \\ E\{[G_s]\} = [I] & \text{(la matrice déterministe correspondante est la matrice unité)} \\ E\{\ln(\det([G_s]))\} = \nu_G & \text{où } |\nu_G| < +\infty \end{array} \right.$$

La dernière contrainte impose que l'inverse de la matrice aléatoire $[G_s]$ est une matrice aléatoire de second ordre, c'est à dire : $E\{\|[G_s]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$.

La valeur ν_G , qui n'a pas vraiment de signification physique, peut être remplacée par un paramètre δ dont la valeur est significative de la dispersion de la matrice aléatoire $[G_s]$ autour de sa consœur déterministe. Ce dernier doit néanmoins respecter certaines conditions.

Comme l'indique la définition des matrices aléatoires de SG^+ , les valeurs que peut prendre δ sont bornées :

$$0 < \delta < \left\{ \frac{E\{\|[G_s] - [G]\|_F^2\}}{\|[G]\|_F^2} \right\}^{1/2} \\ = \frac{1}{n} E\{\|[G_s] - [I]\|_F^2\}^{1/2}$$

Pour respecter les quatre conditions d'appartenance à l'espace des matrices aléatoires SG^+ , δ doit donc être choisi indépendamment de n et tel que :

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{n+1}{n+5}} \quad (\text{IV.17})$$

Plusieurs procédures peuvent amener à déterminer δ . Ce paramètre peut être défini par le degré d'incertitude voulu, par une étude statistique des valeurs de $[G]$, par une valeur déjà calculée pour des systèmes équivalents...

Lorsque la grandeur δ est connue $[G_s]$ se construit de la façon suivante :

$[G_s]$ est défini sur $\mathbb{M}^+(\mathbb{R})$ et peut donc être décomposé en deux matrices triangulaires grâce à la factorisation de Cholesky, $[G_s] = [L_s][L_s]^T$. Pour cela il faut définir une nouvelle grandeur σ_n que l'on détermine à partir de δ ainsi : $\sigma_n = \delta/\sqrt{n+1}$.

La matrice $[L_s]$ est alors telle que :

- Les valeurs aléatoires L_{ij} $i \leq j$ sont toutes indépendantes,
- Pour $i < j$, $[L_s]_{ij} = \sigma_n U_{ij}$ où U_{ij} est une variable Gaussienne centrée sur 0 et de variance unitaire,
- Pour $i = j$, $[L_s]_{ij} = \sigma_n \sqrt{2V_i}$ où V_i est une variable aléatoire Gamma.

IV.5.2 Modèle des matrices d'impédances non-paramétriques

Dans notre cas il est utile d'introduire l'espace SE^+ des matrices aléatoires $[A_s]$ dont l'espérance mathématique est une matrice donnée au départ qui est définie positive. SE^+ est construit de façon tout à fait similaire au précédent, c'est à dire qu'il respecte les quatre conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [A_s] \in \mathbb{M}^+(\mathbb{R}) & \text{par construction} \\ E\{\|[A_s]\|_F^2\} < +\infty & \text{(variable aléatoire du deuxième ordre)} \\ E\{[A_s]\} = [A] & \text{(la matrice déterministe correspondante est connue)} \\ E\{\ln(\det([A_s]))\} = \nu_A & \text{où } |\nu_A| < +\infty \end{array} \right.$$

Puisque $[A]$ est définie positive, il existe une matrice triangulaire respectant la décomposition de Cholesky : $[A] = [L_n]^T [L_n]$. L'ensemble SE^+ est alors défini comme l'ensemble des matrices aléatoires déterminées par :

$$[A_s] = [L_n]^T [G_s] [L_n]$$

où $[G_s]$ appartient à SG^+ .

Cette définition permet de construire les matrices stochastiques $[M_s]$, $[K_s]$ et $[D_s]$ puis avec la relation (IV.2) d'obtenir la forme non-réduite stochastique $[S_s]$. A partir de cette grandeur, l'impédance stochastique est simplement la forme réduite de $[S_s]$ sur les degrés de liberté visibles.

IV.6 Résolution des instabilités

La méthode décrite précédemment ne peut s'appliquer que si le polynôme q est stable (au sens d'Hurwitz précédemment défini) et si $[M]$, $[K]$ et $[D]$ sont des matrices définies positives. Toutefois, compte tenu de la gamme de fréquences étudiées, les choses ne se passent pas si simplement que dans le cas de l'impédance étudiée dans le cadre du génie parasismique et dans la majeure partie des cas rencontrés, le polynôme q est instable et les matrices $[M]$, $[K]$ et $[D]$ non-définies positives. Pour résoudre ce problème deux stratégies ont été étudiées :

- 1) Une solution directe mais peu précise basée sur le théorème de Karitonov.
- 2) Une solution systématique qui s'appuie sur des algorithmes d'optimisation.

La première solution a le mérite d'offrir une réponse rapide à la première partie du problème, la stabilité du polynôme q , mais traite mal le problème de la défini-positivité des matrices $[M]$, $[D]$ et $[K]$. En revanche la deuxième solution permet de tout traiter, au prix toutefois d'un temps de calcul significativement plus important.

IV.6.1 Résolution à partir du théorème de Karitonov

Dans le cas instable il faut ajouter une contrainte supplémentaire au problème de minimisation pour imposer la stabilité du polynôme q . Une solution proposée dans [64] repose sur le théorème de Karitonov [29] tel qu'il est énoncé dans [23].

Nota : dans la suite de ce paragraphe les notations $\underline{a}$ et $\bar{a}$ ne représentent en aucun cas les valeurs conjuguées mais différencient les bornes maximales et minimales relatives au théorème de Karitonov.

Théorème de Kharitonov (1978) :

Soit : $f(z, a) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \quad a \in \mathbb{R}^n$

une famille de polynômes, alors :

$$F = \{f(z, a) \mid \underline{a}_k < a_k < \overline{a}_k, 0 \leq k < n\}$$

est Hurwitz si et seulement si les quatre polynômes

$$k_{11} = g_1 + h_1 \quad k_{12} = g_1 + h_2$$

$$k_{21} = g_2 + h_1 \quad k_{22} = g_2 + h_2$$

sont Hurwitz, avec :

$$g_1 = \underline{a}_0 + \overline{a}_2 z^2 + \underline{a}_4 z^4 + \overline{a}_6 z^6 + \dots$$

$$g_2 = \overline{a}_0 + \underline{a}_2 z^2 + \overline{a}_4 z^4 + \underline{a}_6 z^6 + \dots$$

$$h_1 = \underline{a}_1 z + \overline{a}_3 z^3 + \underline{a}_5 z^5 + \overline{a}_7 z^7 + \dots$$

$$h_2 = \overline{a}_1 z + \underline{a}_3 z^3 + \overline{a}_5 z^5 + \underline{a}_7 z^7 + \dots$$

Ce théorème permet, connaissant les deux séries de constantes ($\underline{a}$) et ($\overline{a}$), de trouver un ensemble de polynômes q qui soient "Hurwitz". Il est alors possible d'imposer cette condition au cours du processus de minimisation, ce qui conduit à des solutions qui sont évidemment différentes de celles obtenues précédemment. Plus précisément, après avoir déterminé ces deux séries de constantes nous forçons q à être "Hurwitz" par l'intermédiaire de coefficients multiplicateurs qui sont également appliqués à $[N]$ afin de garder la même valeur du rapport $[N]/q$. La condition de stabilité peut se traduire par :

$$\begin{aligned} \underline{a}_0 &\leq q_0^0 \alpha_0 + q_0^1 \alpha_1 + \dots + q_0^{nq} \alpha_{nq} \leq \overline{a}_0 \\ &\dots \\ \underline{a}_{nq} &\leq q_{nq}^0 \alpha_0 + q_{nq}^1 \alpha_1 + \dots + q_{nq}^{nq} \alpha_{nq} \leq \overline{a}_{nq} \end{aligned}$$

où q_n^m est le coefficient du terme en $(j\omega)^m$ du polynôme contenu dans la dernière composante de (Φ_n) , n^{ieme} vecteur de la base $\{\Phi\}$. Cela se met sous une forme matricielle comme indiqué ci-dessous.

$$(\underline{a}) \leq \left[P_{[mh-nq-1, mh]}^{n_\Gamma^2+1, [0, nq]} \right] (\alpha) \leq (\overline{a}) \quad (\text{IV.18})$$

Ce système de $nq + 1$ équations à $nq + 1$ inconnus se résout assez simplement, car bien qu'il s'agisse d'un ensemble d'inégalités, les inconnues sont bornées par deux séries de constantes connues. Il est donc possible de résoudre le problème pour chacune de ces bornes, les résultats obtenus correspondent alors aux valeurs maximales et minimales acceptables.

$$\begin{aligned} \left[P_{[mh-nq-1, mh]}^{n_\Gamma^2+1, [0, nq]} \right] (\alpha_{max}) &= (\overline{a}) \\ \left[P_{[mh-nq-1, mh]}^{n_\Gamma^2+1, [0, nq]} \right] (\alpha_{min}) &= (\underline{a}) \end{aligned}$$

Une amélioration introduite dans le calcul vient des coefficients du polynôme q^i contenus dans le i^{ieme} vecteur de la base $\{\Phi\}$:

- 1/ Soit l'on considère que tous les vecteurs contiennent les coefficients de tous les degrés. Auquel cas nous sommes ramené à un système linéaire de $nq + 1$ équations avec $nq + 1$ inconnues.
- 2/ Soit l'on remarque que le premier vecteur intéressant de $\{\Phi\}$ (le $(mh - (nq + 1))^{ieme}$) ne contient, par construction de la base de départ $\{f\}$, que le coefficient d'ordre 0. Le deuxième contient les coefficients d'ordre 0 et 1 par construction de $\{\Phi\}$, et ainsi de suite jusqu'au dernier qui est le seul à contenir le coefficient d'ordre nq . La matrice $[P]$ du problème de minimisation est donc triangulaire et la détermination des bornes (α_{max}) et (α_{min}) rend aisée l'inversion de la matrice $[P]$.

Les deux solutions sont équivalentes, comme le montrent les courbes de la figure ci-dessous.

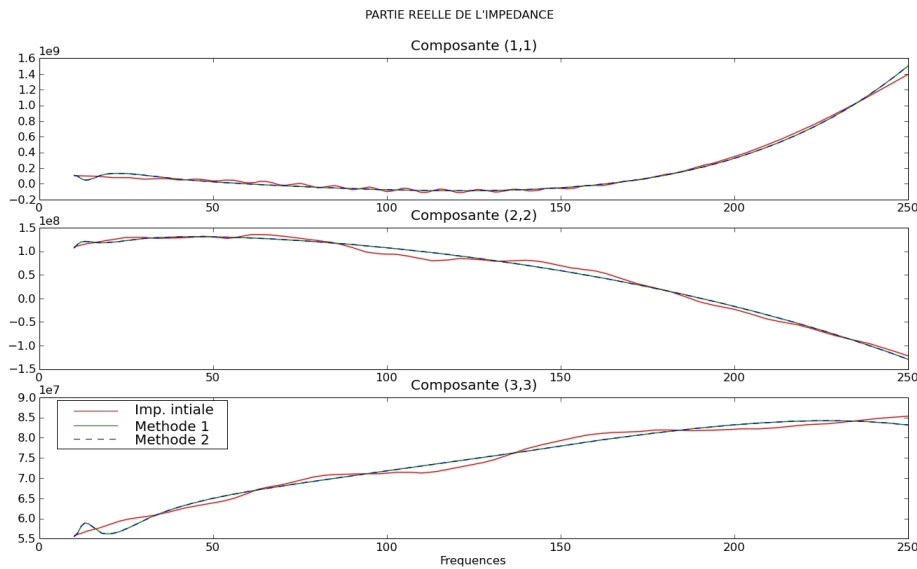


FIGURE IV.2 – Comparaisons des résultats du problème de stabilité.

En effet, les courbes, à l'exception de la courbe initiale que l'on tente d'identifier, sont confondues.

Le test à posteriori de la stabilité du polynôme q peut se faire de nombreuses manières et la littérature comporte plusieurs références sur cette question [53, 8].

La principale difficulté dans l'utilisation du théorème de Karitonov est de construire les quatre polynômes g_1, g_2, h_1, h_2 caractérisés par les "constantes de Karitonov" $\bar{a}_i, \underline{a}_i$.

La question de la stabilité ne se pose que si la solution du problème conduit à un polynôme q qui soit instable. Or à partir des racines de ce polynôme, il est possible de construire des polynômes qui soient stables en conservant toutes les racines dont la partie réelle est négative et en modifiant les parties réelles des autres racines et ainsi déterminer les constantes de Karitonov.

Pour que la solution au problème de stabilité soit respectée il est obligatoire de consid-

IV.6. RÉSOLUTION DES INSTABILITÉS

érer la somme des $nq + 1$ derniers vecteurs de la base $\{\Phi\}$. La solution s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \min(\alpha_{i \min}, \alpha_{i \max}) + \xi & m_h - nq - 1 \leq i \leq m_h \\ \alpha_i &= 0 & 0 \leq i < m_h - nq - 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

où ξ est un nombre petit devant α_i qui permet d'être certain que la valeur choisie se trouve bien dans l'intervalle correspondant. De plus, comme les coefficients $\alpha_{\max}$ et $\alpha_{\min}$ sont proches le choix de ces coefficients influe peu sur les résultats. La courbe ci-dessous illustre ceci en montrant en rouge l'impédance initiale, en vert l'identification pondérée par les α_i et en pointillés noirs la courbe identifiée pour laquelle les $nq + 1$ derniers vecteurs de $\{\Phi\}$ sont simplement sommés.

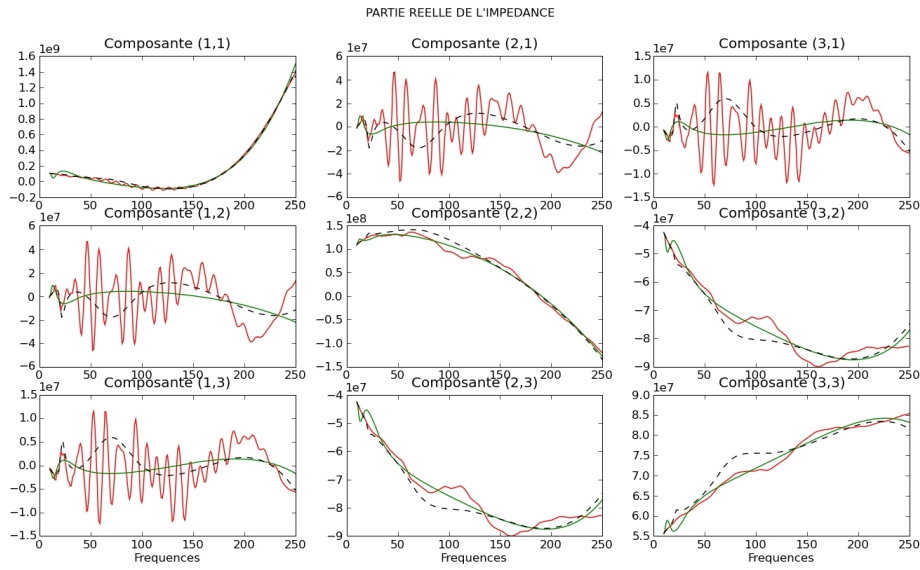


FIGURE IV.3 – Résultat du problème d'identification, rouge $[Z]$, vert $\sum \alpha_i \Phi_i$ (pondérée), noir $\sum \Phi_i$ (non-pondérée).

On peut remarquer que les deux courbes identifiées ici sont proches mais différentes, en effet les facteurs correcteurs α_i changent l'importance de chaque (Φ_i) dans la somme (IV.7).

L'optimisation conduit alors à une solution qui est stable. Toutefois, il reste encore une difficulté à ce niveau car les tests qui ont été réalisés montrent que les polynômes contenus dans (P) , obtenu après minimisation, ne permettent pas nécessairement de construire des matrices $[M]$, $[D]$, $[K]$ qui soient définies positives. Or il est physiquement indispensable que ces matrices le soient. Une procédure a été mise en place pour conduire à de telles matrices à partir de solutions stables, mais ce sans vrai succès car il est apparu que les deux conditions doivent être imposées en même temps. Les corrections testées aboutissent en général à des impédances identifiées très éloignées de l'impédance de départ. Dans la deuxième stratégie dite de résolution systématique, la mise en place dans la méthode d'optimisation d'une condition de positivité de ces matrices a donc été introduite.

IV.6.2 Résolution systématique

La mise en place de la résolution par utilisation du théorème de Karitonov a permis de produire des approximations vérifiant les conditions de stabilité et de définie-positivité, mais la procédure utilisée nécessite la construction de polynômes d'Hurwitz. Or il existe une part d'arbitraire dans cette construction et en tout cas il n'existe aucune optimisation dans la constitution de ce polynôme. De plus, les processus de construction de matrices $[M]$, $[D]$, $[K]$ définies positives et de polynômes q stables ne sont pas nécessairement compatibles, au sens où ils correspondent à des valeurs de α_i différentes.

La résolution systématique décrite ci-après est destinée à optimiser le processus de minimisation. En effet, la solution cherchée doit :

- C1 : minimiser la fonction coût
- C2 : vérifier la condition de stabilité
- C3 : vérifier la condition de définie-positivité.

La résolution systématique procède donc en deux temps :

- 1/ Construction d'une estimation de départ vérifiant les conditions C2 et C3.
- 2/ Minimisation de la fonction coût en imposant les conditions C2 et C3 par l'utilisation d'une fonction d'optimisation sous contrainte (fonction `scipy.optimize.cobyla` [109] sous *python* ou `fmincon` sous *matlab* [105]).

Étape 1 : construction d'une estimation de départ vérifiant les contraintes

La construction d'une estimation de départ est effectuée de la façon suivante : on considère des vecteurs (P) admissibles vérifiant :

$$\begin{aligned}
 (P) &= \sum_{i=mh-nq-1}^{mh} \alpha_i(\Phi_i) & tq \\
 \Re\{z_i\} &< 0 & 1 \leq i \leq nq \\
 \Im\{z_i\} &\neq 0 & 1 \leq i \leq nq \\
 \min(\lambda([R_j])) &> 0 & -2 \leq j \leq 0
 \end{aligned}$$

où z_i représente le $i^{\text{ème}}$ zéro du polynôme q et $\lambda([A])$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice $[A]$.

Ces conditions ne sont pas satisfaisantes d'un point de vue numérique car elles autorisent des valeurs des parties réelles ou des valeurs propres proches de zéro.

En pratique, on définit donc l'ensemble $\{Q_I\}$ inclus dans l'ensemble précédant comprenant l'ensemble des vecteurs (P) vérifiant :

$$\begin{aligned}
 (P) &= \sum_{i=mh-nq-1}^{mh} \alpha_i(\Phi_i) & tq \\
 \Re\{z_i\} &< -\varepsilon_1 & 1 \leq i \leq nq \\
 |\Im\{z_i\}| &> \varepsilon_2 & 1 \leq i \leq nq \\
 \min(\lambda([R_j])) &> \varepsilon_3 & -2 \leq j \leq 0
 \end{aligned}$$

IV.6. RÉOLUTION DES INSTABILITÉS

où les ε_i sont de petites constantes positives.

L'ensemble $\{Q_I\}$ est donc défini par des conditions sur z_i et λ_l qui peuvent s'écrire sous la forme générique $x_k < 0$ où chaque variable x_k est une fonction linéaire de l'une des variables z_i ou λ_l .

On définit alors la fonction d donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2(nq+1)+3} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ (x) &\longrightarrow d(x) \\ d(x) &= ((x_1 - \varepsilon_1)^2 H(x_1 - \varepsilon_1) + \dots + (x_{nq} - \varepsilon_1)^2 H(x_{nq} - \varepsilon_1) + \dots \\ &\quad + (x_{2nq} - \varepsilon_2)^2 H(x_{2nq} - \varepsilon_2) + \dots + (x_{2nq+3} - \varepsilon_3)^2 H(x_{2nq+3} - \varepsilon_3))^{1/2} \end{aligned}$$

où les x_i sont soit les zéros de q soit l'opposé des plus petites valeurs propres des matrices identifiées ($[M]$, $[D]$ et $[K]$), et $H()$ la fonction d'Heaviside.

Cette fonction, appelée "distance au domaine Q_I " s'annule lorsque toutes les conditions sont réalisées et croît lorsque les x_i s'éloignent des conditions admissibles.

A titre d'exemple, pour une distance fonction de deux variables x_1 et x_2 décrivant l'espace des solutions admissibles lorsque celles-ci sont toutes deux négatives, la fonction $d(x_1, x_2)$ s'écrit de façon explicite comme :

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} & x_2 > 0 \text{ et } x_1 > 0 \\ d &= x_1 & x_2 < 0 \text{ et } x_1 > 0 \\ d &= x_2 & x_2 > 0 \text{ et } x_1 < 0 \\ d &= 0 & x_2 < 0 \text{ et } x_1 < 0 \end{aligned}$$

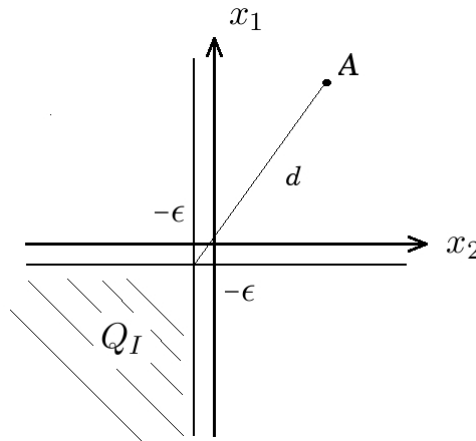


FIGURE IV.4 – Représentation graphique de la distance au domaine Q_I

Trouver un jeu de coefficients (α) respectant les conditions évoquées plus haut revient à minimiser la fonction $d(\alpha)$ ou une fonction monotone associée, choisie ici comme $F = -e^{-d(\alpha)}$. Il s'agit donc d'un problème de minimisation simple qui peut se résoudre

à l'aide de fonction de minimisation, comme *scipy.optimize.fmin* [52] sous *python*. Néanmoins cette étape peut être très lourde en temps de calcul, particulièrement lorsque l'impédance de départ est mal conditionnée.

La solution de ce premier problème de minimisation nous permet de connaître un jeu de (α) tel que (P) vérifie toutes les conditions du problème.

Étape 2 : Optimisation de (P)

Ayant obtenu une valeur admissible pour (P) , la solution optimale est approchée à l'aide d'un processus d'optimisation, initialisé sur la valeur de (P) résultant de l'étape 1, défini par :

$$\begin{aligned}
 (P) &= \sum_{i=mh-nq-1}^{mh} \alpha_i(\Phi_i) \quad tq \\
 \alpha_{opt} &= arg \left(min \left(\frac{\sum_{l=fmin}^{fmax} ||[N(\omega_l)]/q(\omega_l) - [Z(\omega_l)]||_F^2}{\sum_{l=fmin}^{fmax} ||Z(\omega_l)||_F^2} \right) \right) \\
 \Re\{z_i\} &< -\varepsilon_1 & 1 \leq i \leq nq \\
 |\Im\{z_i\}| &> \varepsilon_2 & 1 \leq i \leq nq \\
 min(\lambda([R_j])) &> \varepsilon_3 & -2 \leq i \leq 0
 \end{aligned}$$

A la différence de l'étape 1, ici toutes les contraintes sont imposées séparément à un algorithme de minimisation sous contraintes. Celui-ci cherche la solution avec une méthode qui dépend de la fonction choisie. Quelle que soit la méthode, cette étape a un coût numérique non-négligeable. Il faut également remarquer que la fonction à optimiser n'est plus la somme des carrés des coefficients (α) mais fait intervenir directement les différences relatives entre $[\tilde{Z}]$ et $[Z]$ selon la norme de Frobenius.

La figure présentée ci-dessous donne les résultats obtenus grâce à une méthode d'approximation linéaire (*COBYLA* : Constrained Optimization BY Linear Approximation). Les résultats déduits grâce aux polynômes de Karitonov sont également dessinés afin de pouvoir aisément observer le gain que la méthode apporte aux résultats.

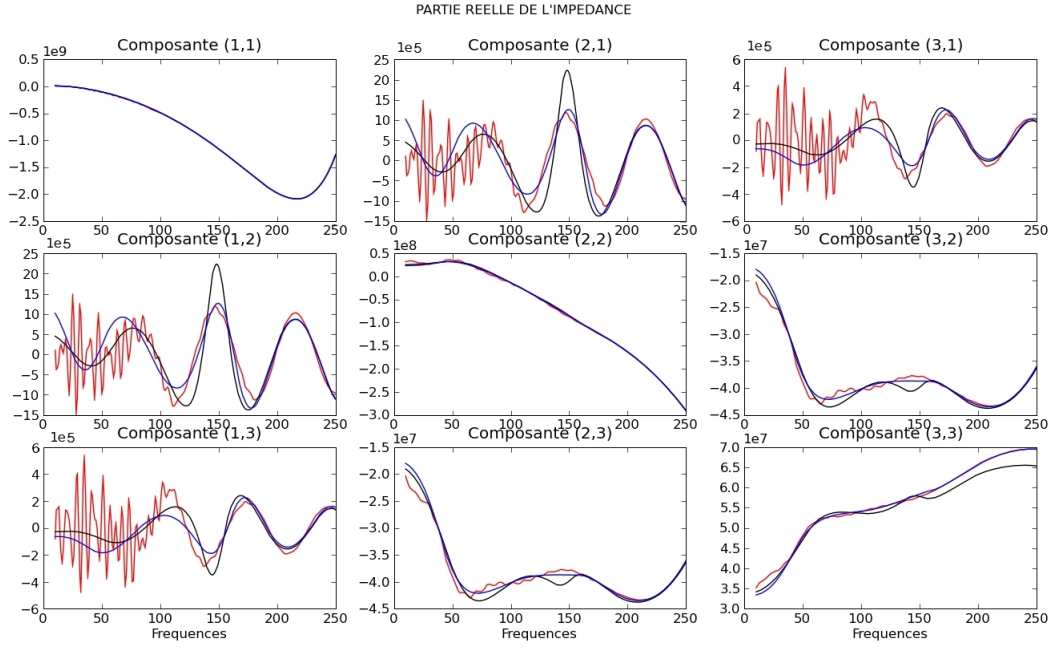


FIGURE IV.5 – Impédances d’un cas instable, rouge $[Z]$ initiale, noir méthode de Karitonov, bleu méthode systématique.

IV.6.3 Optimisation sur la fonction poids w

Les fonctions poids w_i du processus d’optimisation peuvent conduire à des résultats de qualités variables. Certaines fonctions permettent une identification optimale alors que d’autres font échouer la méthode. Plusieurs auteurs ont publié des recommandations sur la forme à donner à cette fonction [54].

Dans ce travail, une optimisation sur la fonction poids a été mise en place. La forme de cette dernière est :

$$w(\omega) = \frac{1}{|q(\omega)|^{qw}} \quad (\text{IV.20})$$

où qw est un paramètre à optimiser.

Nous cherchons à trouver un couple (nq, qw) qui donne le plus petit écart entre l’impédance identifiée acceptable et l’impédance de départ. Pour ce faire toute la démarche, de la construction de la base $\{\Phi\}$ à l’identification finale, est répétée pour chaque couple (nq, qw) étudié. À chaque fin de processus l’erreur relative déduite de la relation (IV.21) est calculée.

$$\Delta([Z]) = \frac{\sum_l \sum_i \sum_j |\tilde{Z}_{ij}(\omega_l) - Z_{ij}(\omega_l)|}{\sum_l \sum_i \sum_j |Z_{ij}(\omega_l)|} \quad (\text{IV.21})$$

Pour illustrer l'impact de la fonction poids sur l'identification de l'impédance nous utilisons une fondation simple sur semelle enterrée dans un sol mou. Ses dimensions sont deux mètres de profondeur et vingt centimètres d'épaisseur. La fondation est maillée avec des éléments finis à neufs nœuds et le sol avec des éléments de frontières à deux nœuds.

L'erreur relative est donnée pour les configurations $nq \in [2, 12]$, $qw \in [0.0, 0.5]$ avec deux de degrés de liberté et $nq \in [4, 8]$, $qw \in [-0.5, 0.0]$ pour trois degrés de liberté.

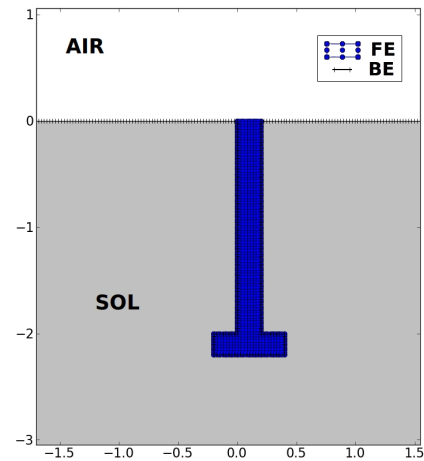


FIGURE IV.6 – Fondation utilisée.

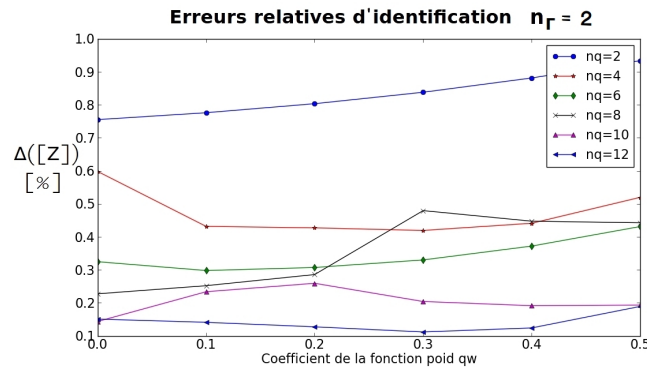


FIGURE IV.7 – Erreurs relatives des solutions acceptable pour les impédances identifiées, deux degrés de liberté.

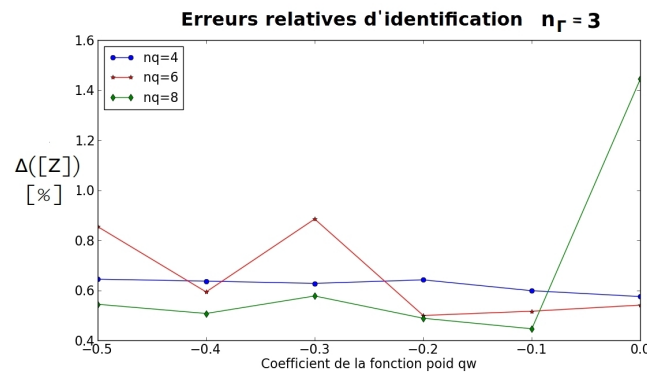


FIGURE IV.8 – Erreurs relatives des solutions acceptable pour les impédances identifiées, trois degrés de liberté.

On observe que dans le cas le plus simple ($n_\Gamma = 2$) l'erreur relative diminue avec le nombre de variables cachées. Pour $nq = 2$ et $nq = 6$ (une et trois variables cachées)

l'erreur croit avec le coefficient qw ; lorsque $nq = 4$ ou $nq = 12$ (deux et six variables cachées) l'évolution semble montrer un minimum pour $qw = 0.3$. Quoi qu'il en soit, la différence d'identification avec un même nombre de variables cachées n'est pas réellement significative sur cette Figure.

Pour trois degrés de liberté l'impact du coefficient qw est plus significatif. Entre les points $(nq, qw) = (8, -0.1)$ et $(nq, qw) = (8, 0.0)$, $\Delta([Z])$ est multiplié par un facteur proche de trois. Au delà de l'optimisation, un mauvais choix du coefficient de la fonction poids peut faire échouer la méthode en accentuant les singularités numériques lors du calcul de la base $\{\Phi\}$.

Ces résultats offrent la possibilité d'établir un critère sur l'acceptabilité de ces impédances identifiées. L'erreur commise peut remonter jusqu'aux vibrations des dalles d'un bâtiment. Si l'erreur relative d'identification est supérieure à l'incertitude introduite par le modèle stochastique les courbes observées ont peu de chance d'être fiables et interprétables. A l'inverse, si l'erreur relative est faible, l'étape d'identification des matrices $[M]$, $[D]$ et $[K]$ n'ajoute pas de biais significatif dans le processus.

Pour visualiser l'impact de l'erreur commise sur l'identification nous proposons d'observer les impédances et les vitesses de contact associées pour différents $\Delta[Z]$. Ces dernières sont déterminées pour un Récepteur simple, un poutre en béton de dix mètres de haut et vingt centimètres d'épaisseur, modélisée par des éléments finis à neufs nœuds. Les différents cas sont comparés sur les Figures IV.9 et IV.10. On peut y voir l'impédance de départ, l'impédance identifiée avec une erreur de 0.45% ($(nq, qw) = (8, -0.1)$) et l'impédance identifiée avec une erreur de 1.44% ($(nq, qw) = (8, 0.0)$).

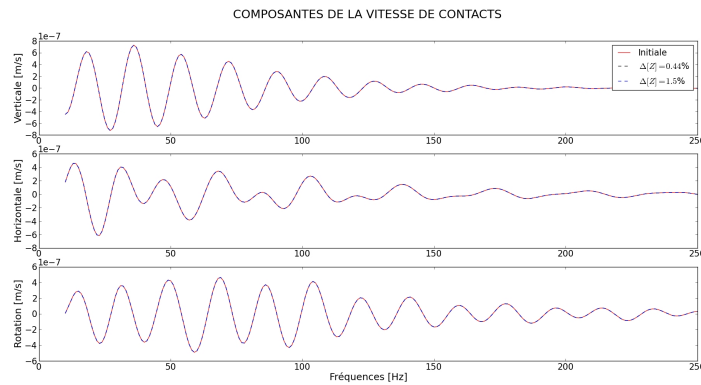


FIGURE IV.10 – Impact de l'erreur d'identification sur la vitesse de contact.

Malgré le pic visible sur toute les composantes de la deuxième mobilité identifiée, on peut observer que l'impact sur la vitesse de contact est négligeable. Par ailleurs, les composantes de la mobilité identifiée avec une erreur de 0.45% ne comportent pas de pic. Ceci montre qu'un choix judicieux de nq et qw permet de réduire les singularités numériques. En-dehors de cela, l'optimisation de la fonction poids n'apporte pas d'amélioration significative. On peut dès lors espérer que le cas le plus simple soit suffisant ($nq = 4$ et $qw = -0.1$ pour trois degrés de liberté), auquel cas la méthode systématique permet une identification rapide d'une matrice d'impédance acceptable.

COMPARAISONS DES IMPÉDANCES IDENTIFIÉES

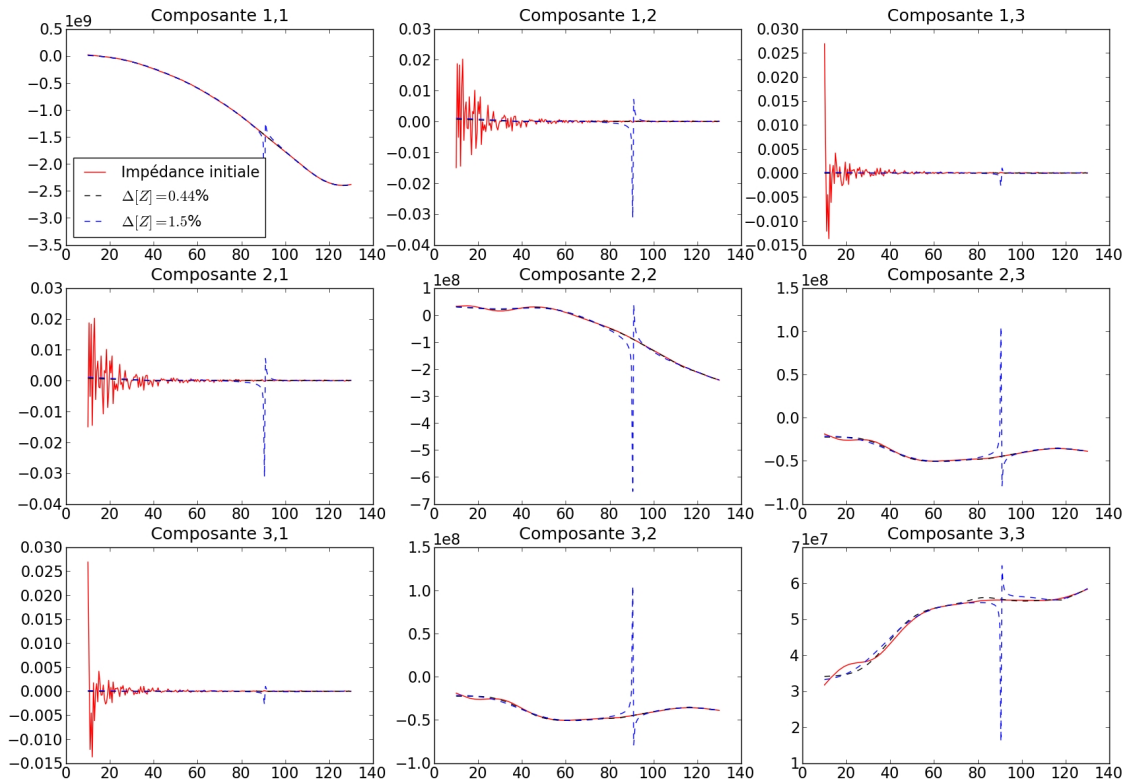


FIGURE IV.9 – Impact de l’erreur d’identification sur l’impédance.

IV.7 Application

Toute l’approche décrite jusqu’ici a été appliquée dans deux cas concrets : celui d’un portique en béton et celui d’un bâtiment de six étages, tout deux modélisés en deux dimensions. Le premier cas est présenté dans la suite de ce chapitre. Le cas d’une structure de bâtiment de six étages a été présenté lors de la conférence *Eurodyn* de 2011 [71]. Pour ne pas alourdir ce document, ces derniers résultats ne seront pas exposés ici car leur nature est tout à fait similaire au cas qui suit.

IV.7.1 Présentation du cas traité : étude d’une fondation 2D

La méthode décrite jusqu’ici a été implémentée et a permis d’observer les incertitudes sur la mobilité d’une fondation constituée d’un mur de trois mètres de profondeur et vingt centimètres de large enterré dans un demi-espace homogène isotrope moyen [102]. Le maillage complet contenant le sol, les fondations et la superstructure utilisée dans le paragraphe qui suit est donné sur la Figure IV.11. Les mobilités des fondations sont déterminées sur les zones situées aux mêmes niveaux que la surface du sol. Les données de départ sont fournies par un calcul effectué avec le code Mefissto en 2D.

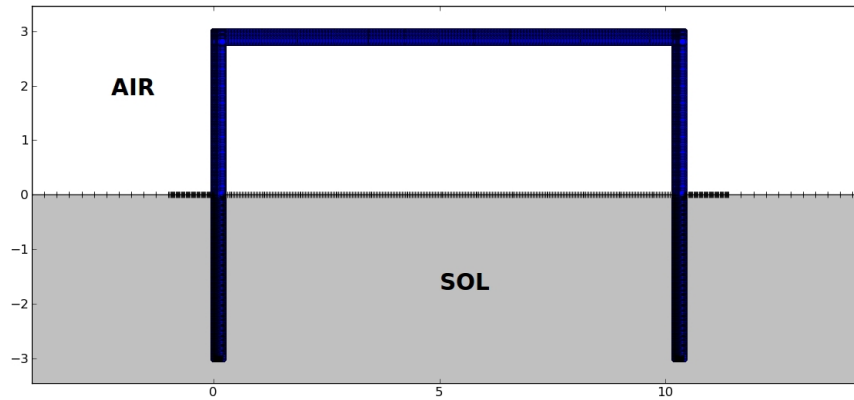


FIGURE IV.11 – Schéma de la structure utilisée pour l'application de la méthode des variables cachées.

La Figure IV.13 montre les mobilités obtenues à la fin de l'ensemble du processus. On peut voir en rouge l'impédance déterminée par Mefissto, l'impédance identifiée est en pointillés noirs et les milles impédances aléatoires qui en découlent sont dessinées en jaune. Le paramètre δ , donnant l'ordre d'incertitude, est choisi arbitrairement et est le même pour la masse la raideur et la dissipation. Il est égal à $\delta = 0.1$, le nombre de variables cachées étant égal à $nq/2 = 4$, la fonction poids a une puissance de $qw = 0.25$.

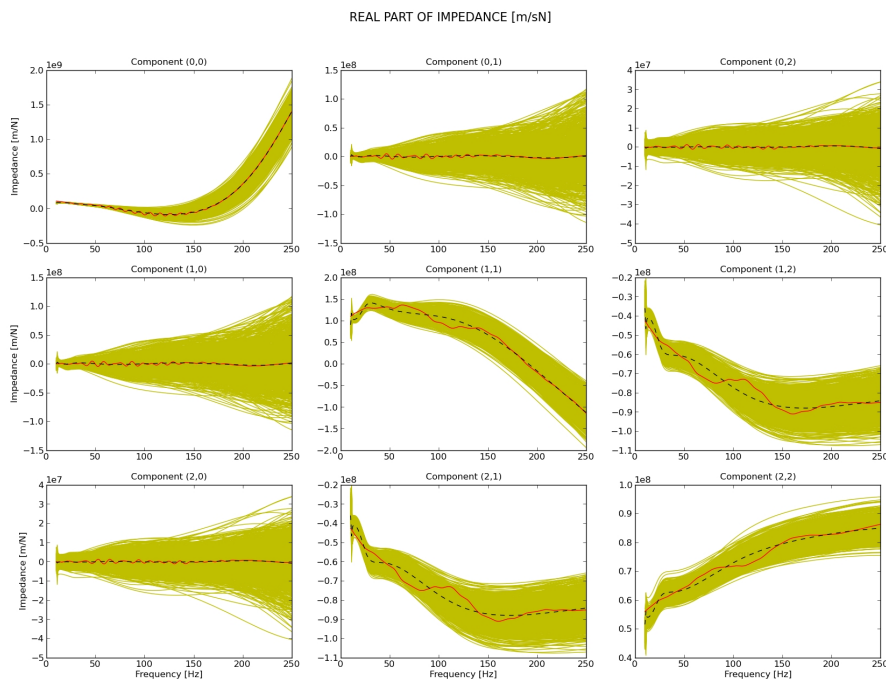


FIGURE IV.12 – Impédance de fondation, rouge : courbe initiale, noir : courbe identifiée, jaune : courbes stochastiques.

La figure suivante est l'équivalente de la précédente pour les mobilités de la fondation.

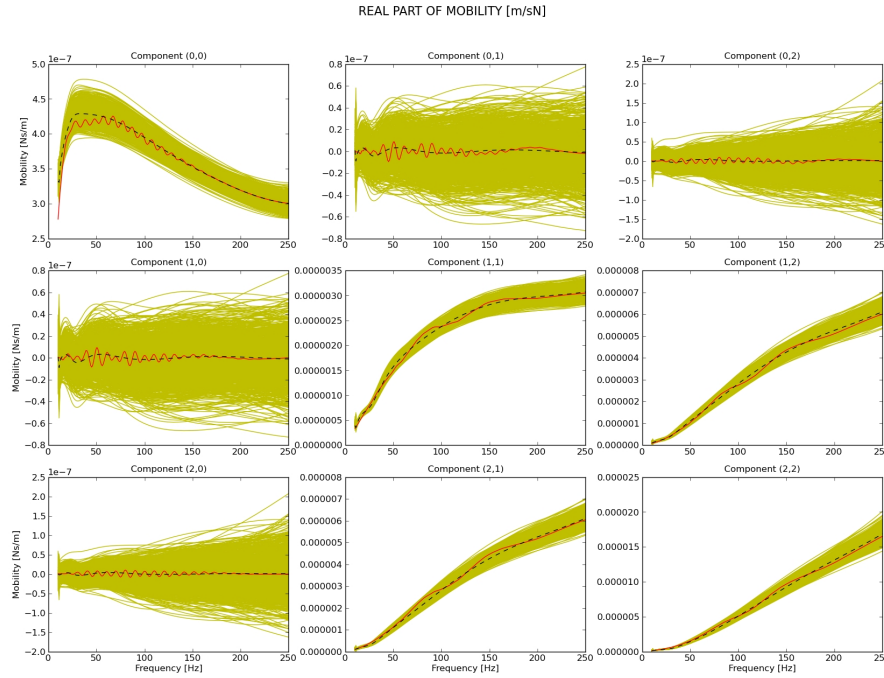


FIGURE IV.13 – Mobilités de fondation, rouge : courbe initiale, noir : courbe identifiée, jaune : courbes stochastiques.

Les résultats précédents prouvent que la méthode est opérationnelle et qu'elle peut s'appliquer à toutes les mobilités obtenues par le code Mefissto, (ou par d'autres méthodes similaires).

IV.7.2 Vitesses stochastiques moyennes de dalles

Pour pouvoir tenir compte de l'incertitude des fondations dans le calcul de la vitesse de flexion moyenne des dalles d'un bâtiment il faut utiliser les impédances stochastiques des fondations dans le calcul des vitesses de contacts. Cela se traduit par la relation suivante :

$$(\bar{v}_c) = (v_L)[Y_R][\bar{Y}_S + Y_R]^{-1} \quad (\text{IV.22})$$

Les vitesses de contacts stochastiques ainsi définies s'appliquent alors à un modèle de propagation ; ici nous avons choisi d'utiliser le modèle ondulatoire 2D présenté dans le Chapitre III pour des raisons de rapidité d'exécution.

Pour la distance choisie (10m) entre les fondations, les mobilités de transfert ne sont pas significatives et il est possible de considérer que les zones de contact sont décorréliées.

Pour visualiser l'effet de la décorrélation des deux zones de contact nous représentons sur la Figure IV.14 la vitesse moyenne de la dalle du portique dans les deux cas où les zones de contact sont soit corrélées soit décorréliées.

La figure montre que la prise en compte de la corrélation ne modifie pratiquement pas les résultats. Cela s'explique notamment par la distance entre les deux fondations qui est importante.

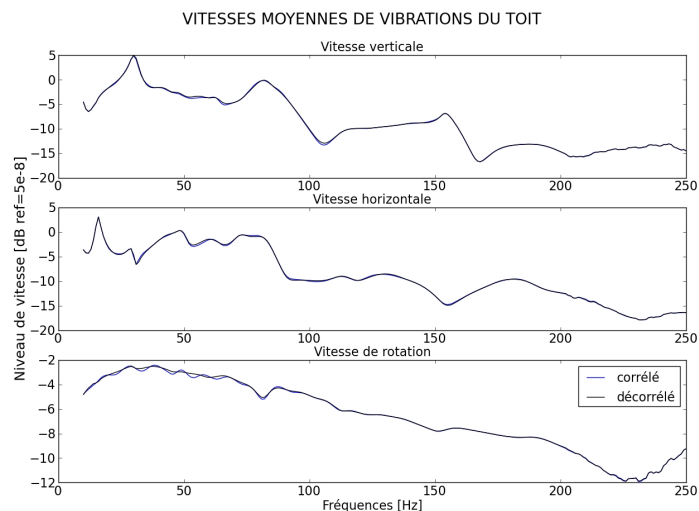


FIGURE IV.14 – Impact de la décorrélation des zones de contact sur la vitesse moyenne de la dalle d'un portique dans un sol moyen.

Compte tenu de cette remarque, il est possible d'appliquer la sollicitation séparément à chaque zone de contact, ce qui correspond à une mobilité comportant 3 *ddl* pour chaque cas, puis d'effectuer la moyenne harmonique des vitesses obtenues séparément. Pour chaque zone de contact, il est alors possible de déterminer l'impédance stochastique correspondante, ce qui correspond à une série de 1000 réalisations pour chaque point de contact.

La figure suivante donne les vitesses stochastiques moyennes de la dalle de la Figure IV.11 pour les mêmes paramètres que pour les impédances montrées dans le paragraphe précédent ($nq = 8$, $qw = 0.25$ et $\delta = 0.1$). On peut y voir la courbe correspondante au cas déterministe en noir et les mille courbes du calcul stochastique en jaune. Les mobilités stochastiques à l'entrée du modèle de propagation sont visibles au paragraphe précédent.

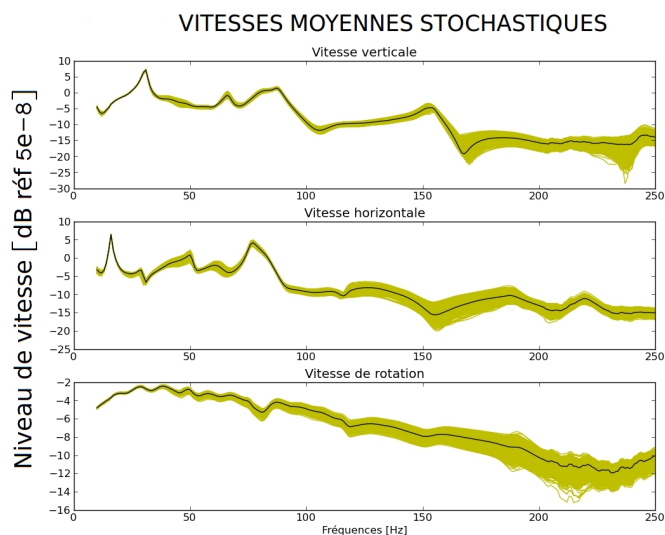


FIGURE IV.15 – Vitesses moyennes de dalle, noir : courbe déterministe, jaune : courbes stochastiques

Conclusion du chapitre

L'approche stochastique des mobilités de fondation a permis de quantifier l'incertitude sur la mobilité des fondations par un modèle non-paramétrique. A l'aide de cette méthode nous prenons en compte les incertitudes en utilisant une méthode à variables cachées. Il est alors possible d'explicitier l'impact de l'aléa lié à l'incertitude sur les propriétés du sol pour la réponse d'une fondation. Dans cette partie de l'étude, la mobilité stochastique est déterminée à partir de l'impédance stochastique.

Pour pouvoir déterminer sa forme stochastique, la matrice d'impédance "moyenne" doit être définie positive. Cette dernière peut être obtenue de différentes façons. Dans ce document la mobilité déterministe est quasiment toujours calculée à l'aide du code Mefissto. Après identification de l'impédance, le modèle stochastique correspondant est déterminé grâce à l'approche développée par C. Soize et présentée dans le paragraphe IV.5.

La méthode est efficace sur des bandes fréquentielles réduites, telles que celles observées en génie parasismique. Elle s'adapte à la thématique ferroviaire grâce à des algorithmes d'optimisations permettant d'étendre la bande de fréquences à celle correspondant aux vibrations acoustiques. Néanmoins certains points demandent encore à être approfondis, en particulier la résolution du problème (IV.13).

Les temps de calculs sont relativement courts lorsque la mobilité de la fondation contient peu de termes, mais augmentent rapidement avec le nombre de degrés de liberté. Ce temps de calcul est presque exclusivement dû à la détermination de la base orthogonale et au processus de minimisation sous contraintes (après obtention d'une solution acceptable). Dans certains cas, la détermination d'une solution acceptable est également longue, mais cela traduit en général une mobilité de départ mal conditionnée. A titre d'exemple la détermination de la base orthogonale $\{\Phi\}$ ne prend que quelques minutes lorsque le nombre de degrés de liberté et le degré du polynôme q sont égales à deux. Lorsque ceux-ci sont respectivement six et huit, la détermination de la base $\{\Phi\}$ demande près de six heures de calculs sur un ordinateur monoprocesseur.

L'avant dernier paragraphe de ce chapitre introduit une tentative d'optimisation des variables, relatives à la puissance de la fonction coût et au nombre de variables cachées, à adopter dans un processus d'identification donné. D'après les premiers résultats du paragraphe IV.6, le coefficient de puissance modifie peu les résultats. Néanmoins un mauvais choix de ce dernier peut entraîner une accentuation des singularités numériques et faire échouer la méthode.

Pour conclure on peut souligner que l'approche présentée n'est théoriquement pas limitée. Dans le formalisme utilisé il est possible de considérer un nombre de degrés de liberté quelconque. Cela permet de prendre en compte simultanément toutes les zones de contact. Les difficultés rencontrées sont d'ordre numérique et rien n'interdit à priori l'étude d'une bande fréquentielle large.

Chapitre V

Applications

Sommaire

Avant-propos	124
V.1 Comparaison des couplages 2D-2D, 2.5D-2.5D et 2.5-3D	124
V.2 Application dans le cadre d'une étude expérimentale	129
V.3 Études paramétriques réalisées par des calculs 2D	134
Conclusion du chapitre	141

Avant-propos

Ce dernier chapitre porte sur différentes applications des méthodologies présentées dans les chapitres précédents. Dans la première section, la comparaison entre les différents types de géométries est abordée en vue d'évaluer l'impact des simplifications adoptées. La deuxième section est afférente à l'utilisation des différents outils présentés dans le cadre de l'exploitation de résultats expérimentaux et enfin la dernière section a trait à des études paramétriques, uniquement dans le cas bidimensionnel.

V.1 Comparaison des couplages 2D-2D, 2.5D-2.5D et 2.5-3D

La question de la pertinence d'utiliser une géométrie d'un type donnée (2D, 2.5D ou 2.5D combinée à 3D) n'a pas encore été abordée. Dans le but de comparer les différentes approches entre elles, nous proposons de visualiser sur un même graphique les vitesses de contact à l'interface entre une fondation simple sans semelle et un voile de 10m de haut. Les différentes combinaisons étudiées sont un cas en deux dimensions calibré sur une simulation en champ libre 2.5D, un cas où les systèmes Source et Récepteur sont en 2.5D et trois cas où le Récepteur est modélisé en trois dimensions.

V.1.1 Maillage et simulation en deux dimensions

Le problème est constitué par un sol moyen, une fondation simple sans semelle et un voile de dix mètres de haut. Une force ponctuelle est appliquée en surface à six mètres de la fondation. Cette dernière, constituée de béton, a vingt centimètres d'épaisseur et un mètre de profondeur. Le voile, de vingt centimètres d'épaisseur également, est aussi constitué de béton. Pour les raisons évoquées dans les Chapitres II et III, il est recommandé que le sol soit modélisé par des éléments de frontières et la structure (fondation et voile) par des éléments finis.

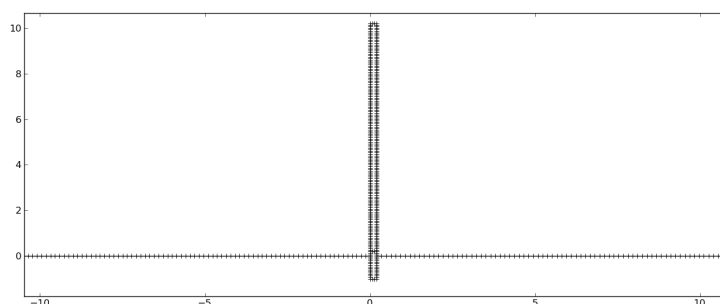


FIGURE V.1 – Schéma du maillage de la simulation en deux dimensions

La caractérisation de la vitesse de contact peut ici s'effectuer par une méthode directe où l'ensemble du problème est représenté comme sur la Figure V.1 ou, à l'aide de la méthode des mobilités, en caractérisant les systèmes Source et Récepteur séparément. Les deux approches donnent des résultats identiques (Chapitre I).

Ici nous avons préféré une approche directe légèrement différente du cas habituel. Pour simplifier, le problème est ici entièrement maillé par des éléments finis de frontière. Ces éléments nous permettent également les simulations en 2.5D et il n'a pas été jugé utile d'utiliser une représentation de type BEM/FEM dans ce cas.

V.1.2 Simulations en 2.5 dimensions

Le maillage dans le plan (x, y) est ici le même que précédemment. La différence se situe dans la prise en compte de la troisième dimension z le long de laquelle la géométrie est conservée. La méthode des mobilités peut également s'appliquer ici. Pour cela, l'ensemble de la procédure décrite dans le premier chapitre doit se dérouler dans l'espace des nombres d'onde. Le calcul est décomposé sur les nombres d'ondes k_z . Après une transformée de Fourier spatiale inverse, les composantes de la vitesse de contact en fonction des six variables de l'espace sont obtenues (voir Annexe C).

On peut dès lors distinguer deux cas dans la méthode des mobilités car l'interface Source-Récepteur est infinie et ne peut plus être assimilée à une zone de contact. Il faut, dans la pratique, définir une surface élémentaire pouvant être assimilée à une zone de contact puis décomposer l'interface Source-Récepteur en utilisant cette surface. En toute rigueur les mobilités de la Source et du Récepteur doivent être définies sur une infinité de zones de contact. Cela est techniquement impossible et nous proposons ici la comparaison entre deux calculs (Figure V.2). Dans le premier, seule la zone observée est considérée (zone de contact en $z = 0$) ; dans le deuxième calcul nous considérons onze zones (de S_{-5} à S_5). Parallèlement nous évaluons sur la même figure l'impact des termes de rotation.

Dans les cas évoqués la zone d'observation, correspondant à la zone de contact en $z = 0$, est une surface carré de vingt centimètres de côté. Il a été montré dans le Chapitre II qu'une surface de contact de cette dimension présentait, dans la gamme de fréquences étudiée, un mouvement de corps rigide.

Lorsque seule la zone de contact située en $z = 0$ est considérée, la mobilité comporte un nombre de termes égal au carré du nombre de degrés de liberté, soit trente six composantes lorsque les rotations sont prises en compte.

$$[Y^{S_0 S_0}] = \begin{bmatrix} v_x/F_x & v_x/F_y & v_x/F_z & v_x/M_z & v_x/M_y & v_x/M_x \\ v_y/F_x & v_y/F_y & v_y/F_z & v_y/M_z & v_y/M_y & v_y/M_x \\ v_z/F_x & v_z/F_y & v_z/F_z & v_z/M_z & v_z/M_y & v_z/M_x \\ v_{\alpha_z}/F_x & v_{\alpha_z}/F_y & v_{\alpha_z}/F_z & v_{\alpha_z}/M_z & v_{\alpha_z}/M_y & v_{\alpha_z}/M_x \\ v_{\alpha_y}/F_x & v_{\alpha_y}/F_y & v_{\alpha_y}/F_z & v_{\alpha_y}/M_z & v_{\alpha_y}/M_y & v_{\alpha_y}/M_x \\ v_{\alpha_x}/F_x & v_{\alpha_x}/F_y & v_{\alpha_x}/F_z & v_{\alpha_x}/M_z & v_{\alpha_x}/M_y & v_{\alpha_x}/M_x \end{bmatrix} \quad (V.1)$$

Cette matrice doit être symétrique et causale.

Dans le cas où plusieurs zones de contact sont considérées cette matrice prend la forme suivante :

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y^{S_0 S_0} & \dots & Y^{S_0 S_N} \\ \dots & \ddots & \dots \\ Y^{S_N S_0} & \dots & Y^{S_N S_N} \end{bmatrix} \quad (V.2)$$

dans laquelle toutes les sous-matrices $Y^{S_i S_j}$ ont la forme de la matrice (V.1). Le nombre total d'éléments et donc de $(6 \times 6) \times (N \times N)$. Néanmoins un certain nombre de similitudes entre

toutes les sous-matrices $Y^{S_i S_j}$ nous permet de construire la mobilité complète directement à partir de (V.1) (voir Annexe C).

La différence entre ces deux calculs provient de la vitesse libre qui comporte 6 ou $6N$ composantes. Dans la comparaison présentée ci-dessous, notre observation ne porte que sur une seule zone de contact et les vitesses de contact calculées de ces deux manières se superposent.

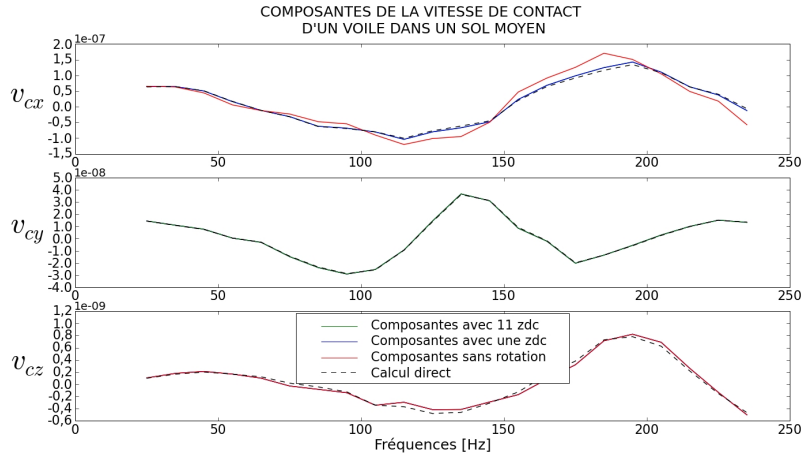


FIGURE V.2 – Impact des termes de transfert et de rotations sur les termes de translations de la vitesse de contact en $z = 0$ d'un voile.

Les résultats reportés en Figure V.2 montrent que les résultats sont identiques, que l'on prenne en compte une ou plusieurs zones de contact. Cela indique que, lorsque l'observation se place dans le plan (x, y) contenant la force d'excitation, les mobilités des systèmes Source et Récepteur sont principalement gouvernées par leurs composantes d'entrée. Les termes de transfert ne jouent ici quasiment aucun rôle.

Enfin la courbe rouge montre l'évaluation de la vitesse de contact lorsque les termes de rotation sont négligés. On peut remarquer une différence sur la composante horizontale. Celle-ci est, dans cette configuration, plus sensible que les autres aux termes de rotation. Les deux autres vitesses de translations sont équivalentes, que l'on prenne en compte ou non les termes de rotation.

V.1.3 Maillage et simulations en 2.5/3 dimensions

Dans ce cas nous remplaçons la modélisation précédente en 2.5D du Récepteur par une simulation en trois dimensions réalisée avec le logiciel d'éléments finis Nastran [107]. Trois longueurs du voile sont étudiées : $10m$, $20m$ et $80m$.

Suite aux remarques sur l'importance des zones de contact dans cette situation, nous ne considérons ici qu'une seule zone de contact. De même les termes de rotations ne sont pas considérés non-plus.

Dans ce cas une opération supplémentaire est nécessaire. Le calcul de la vitesse de contact est réalisé dans l'espace des nombres d'ondes k_z , or la mobilité du Récepteur est

ici obtenue dans l'espace réel. Pour que le calcul soit possible il faut donc retranscrire cette mobilité dans l'espace des k_z à l'aide d'une transformée de Fourier inverse. Celle-ci donne la correspondance entre une composante de la mobilité $Y_{F_i x_j}^{S_m S_n}$ et sa transformée $\hat{Y}_{F_i x_j}^{S_m S_n}$ grâce à la relation (V.3).

$$\hat{Y}_{F_i x_j}^{S_m S_n}(x, y, k_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{F_i x_j}^{S_m S_n}(x, y, z) e^{-j2\pi k_z z} dz \quad (V.3)$$

Or la mobilité n'est fonction de la variable z que sur l'intervalle des valeurs où celle-ci est définie, c'est-à-dire seulement sur la longueur du voile L_z . Numériquement le calcul est réalisé en évaluant le produit de la valeur de la mobilité par la distance entre deux points consécutifs de l'intégrale, notée δ_z , cet espacement étant constant dans notre cas.

$$\hat{Y}_{F_i x_j}^{S_m S_n}(x, y, k_z) = \frac{\delta_z}{2} \sum_{l=0}^{N-1} (Y_{F_i x_j}^{S_m S_n}(x, y, z_l) e^{-j2\pi k_z z_l} + Y_{F_i x_j}^{S_m S_n}(x, y, z_{l+1}) e^{-j2\pi k_z z_{l+1}}) \quad (V.4)$$

où $N = L_z/\delta_z$ est le nombre de points sur lequel la mobilité est définie. Les nombres d'ondes k_z considérés doivent théoriquement s'étendre de $-\infty$ à $+\infty$ pour que la transformée inverse, effectuée après le calcul de la vitesse de contact, soit complète. Dans la pratique nous utilisons l'intervalle $[k_{zmin}, k_{zmax}]$ défini pour le calcul des mobilités 2.5D du voile. Lors de cette étape, les bornes de cet intervalle ont été obtenues après avoir procédé à une étude de convergence.

Nous avons considéré opportun d'observer ici l'effet de la longueur du voile fini. La question qui se pose est de savoir à partir de quelle longueur le cas en 2.5D/3D est suffisamment proche du cas en 2.5D/2.5D pour que l'on puisse les considérer comme équivalents.

La mobilité du voile en trois dimensions doit, comme pour toutes les autres mobilités, être symétrique. Comme pour les mobilités des Chapitres II et III, cela est vérifiable sur la Figure V.3.

Le maillage du voile est constitué d'éléments hexagonaux à 8 noeuds situés uniformément dans le volume tout les 10 centimètres.

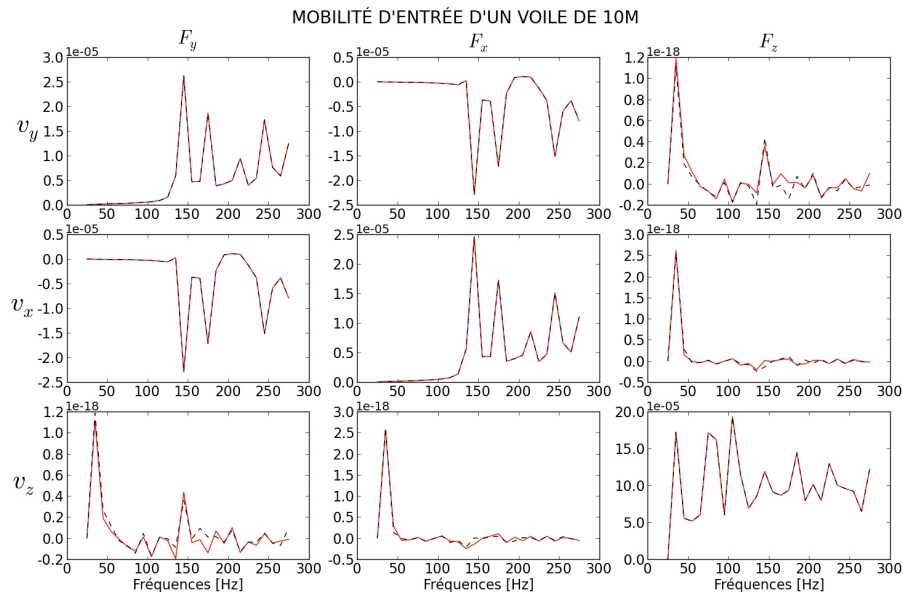


FIGURE V.3 – Symétrie de la mobilité du Récepteur en trois dimensions ; traits pleins : composantes indiquées, traits pointillés : composantes diagonalement opposées.

V.1.4 Comparaison entre différentes approches

L'ensemble des courbes de la Figure V.4 permettent de comparer les résultats afférents aux différentes simulations présentées précédemment.

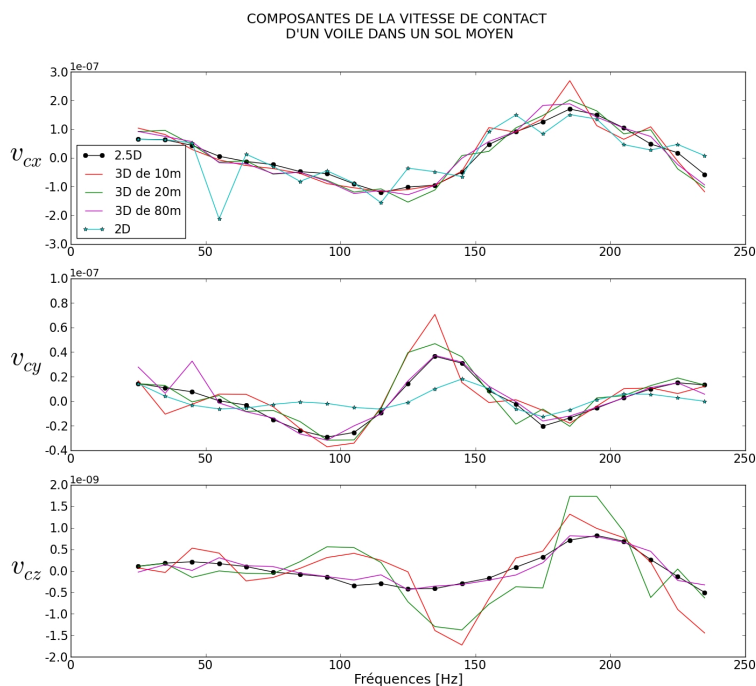


FIGURE V.4 – Comparaisons des résultats correspondant aux différentes simulations réalisées.

Le cas en deux dimensions montre, dans la direction verticale, des pics correspondant à une résonance pour une poutre de hauteur 10m.

Lorsque le système récepteur est modélisé en trois dimensions le comportement est similaire à celui en 2.5D. Néanmoins les amplitudes des composantes observées sont supérieures dans le cas 3D. Ces amplitudes tendent vers celles obtenues par des simulations en 2.5D lorsque la longueur du voile en 3D augmente, ce qui est physiquement compréhensible. Dans le cas présenté ici, les résultats montrent qu'à partir de 80m, il n'y a plus d'effet de la longueur du voile.

V.2 Application dans le cadre d'une étude expérimentale

Pour valider les calculs exposés jusqu'ici nous proposons d'étudier un cas concret pour lequel des mesures sont disponibles. Celles-ci ont été obtenues lors d'une campagne de mesures, nommée Vibsofret, réalisée conjointement par la SNCF et le CSTB dans une annexe de la gare de Macon. Le bâtiment, plutôt ancien, a la particularité d'avoir des murs très épais. Il est situé le long des voies selon sa dimension principale.

Une évaluation des vibrations ressenties en fonction du type de train et de sa vitesse est proposée. Celle-ci s'accompagne d'une étude paramétrique en deux dimensions. L'ensemble est décrit en référence [60].

Une modélisation où la fondation, modélisée en 2.5D est couplée à un bâtiment en 3 dimensions a été engagée, mais n'est pas terminée.

En tout il y a trois types de mesures dans cette campagne :

- * Mesure de décroissance en champ libre
- * Mesure des vibrations à différents endroits des parois du bâtiment
- * Mesure du bruit émis dans la pièce avec une mesure de l'isolation de la façade.

Une description des mesures en champ libre est disponible dans l'article de congrès [63].

Les mesures effectuées dans le bâtiment sont décrites dans la suite. Le schéma qui suit (Figure V.5) donne quelques une des proportions du bâtiment ainsi que les emplacements des appareils de mesures. Ceux-ci sont principalement des accéléromètres dont trois sont situés au rez-de-chaussée et cinq au premier étage.

V.2.1 Calibration sur les mesures

Le principe de la calibration de la source a été présenté dans le Chapitre II. Les résultats exposés à cette occasion sont ceux que nous utilisons ici. Cette calibration permet de retrouver le type de sol et l'excitation faisant correspondre à la situation réelle nos simulations.

Pour rappel, nous calculons une fonction de transfert Mesure-Simulation qui nous permet de retrouver la force correspondante au couple "excitation réelle-type de sol" pour la distance observée. Cette fonction de transfert est calculée pour les trois types de sols et les caractéristiques retenues sont déduites de la simulation pour laquelle la réponse sur l'ensemble des points de calculs correspond le mieux aux points de mesures à notre disposition.

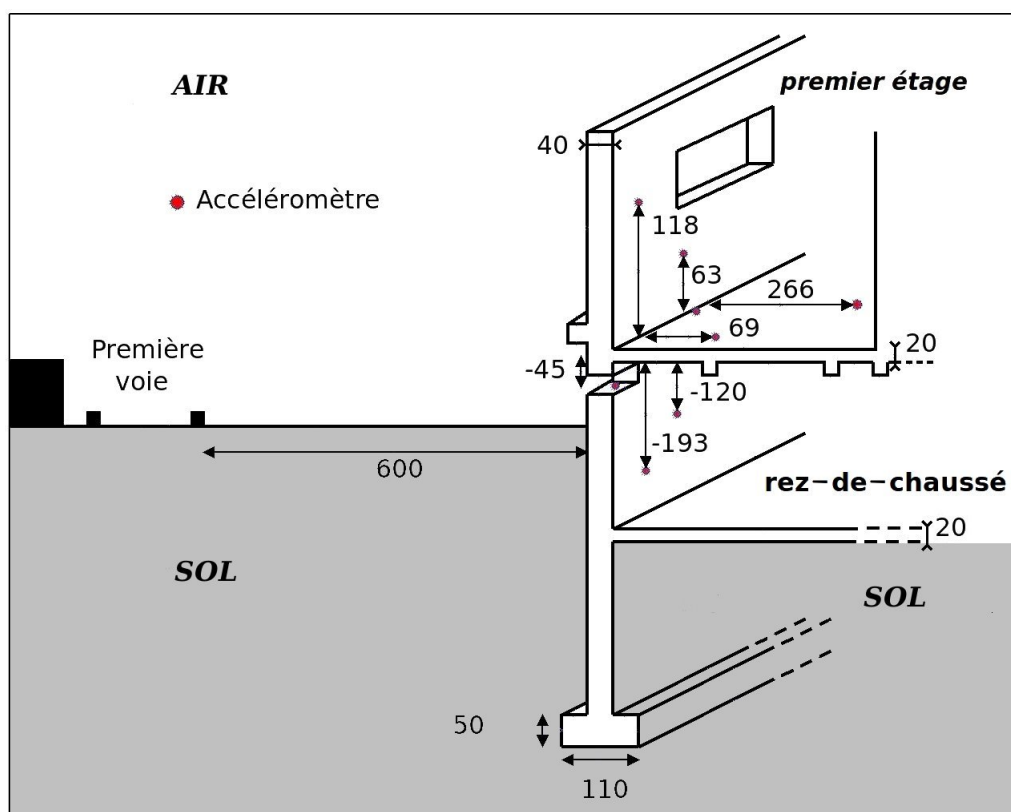


FIGURE V.5 – Schéma de la position des capteurs dans le bâtiment étudié. Les dimensions sont données en centimètres.

Les résultats obtenus dans la configuration de la campagne de mesure Vibsolfret nous amène à choisir l'ensemble des caractéristiques d'un sol moyen simulé en 2.5D et excité par une ligne de forces décorrélées.

V.2.2 Études 2D

Une campagne de mesure nous a permis de calibrer une simulation 2D du bâtiment et de comparer les résultats obtenus lors des mesures. Ces travaux ont fait l'objet d'un article [60] dont les principaux résultats sont retranscrits ici.

Description des simulations

Nous cherchons ici à modéliser l'ensemble sol-fondation-bâtiment. Comme dans la majorité des calculs présentés dans ce document nous avons utilisé le logiciel Mefisto. Le sol a été modélisé par des éléments de frontières à deux noeuds et les fondations ainsi que la superstructure avec des éléments finis à neuf noeuds. L'ensemble est visible sur la Figure V.6.

Comme indiqué précédemment, l'excitation est une force calibrée sur la mesure en champ libre du niveau vibratoire vertical enregistré au passage du train.

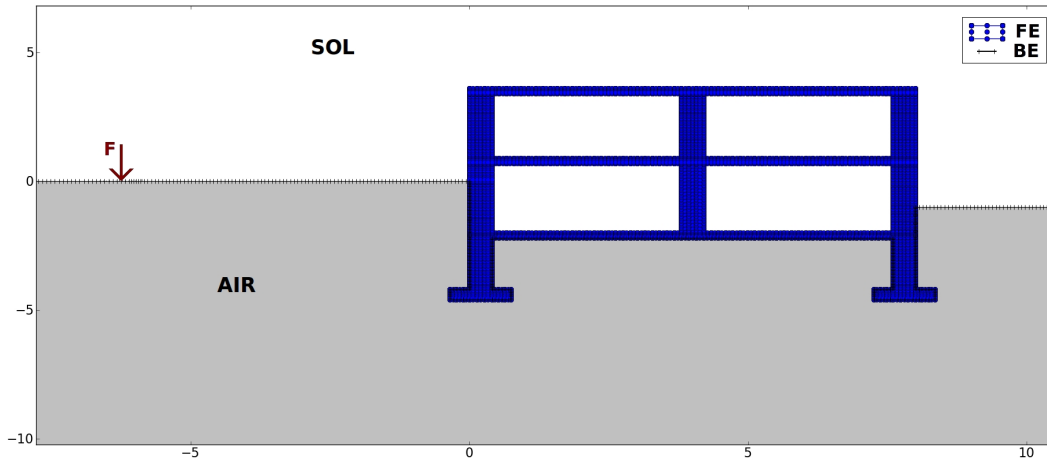


FIGURE V.6 – Représentation du maillage utilisé pour modéliser la géométrie étudiée.

Description des résultats

Un objectif important est de quantifier le niveau de gêne ressentie dans les pièces du bâtiment. Pour ce faire nous nous basons sur les Normes ISO 14837-1 [104] et DIN NS 8176.E [103] qui donnent une procédure de calcul pour évaluer les niveaux de gênes dans le bâtiment. En particulier, nous utilisons la norme norvégienne qui évalue la gêne ressentie à partir d'un indice noté $v_{w,95}$. Celui ci correspond à un niveau fenêtré de vitesse maximum atteinte lors du passage du train. Son niveau de confiance est de 95% et il se déduit de la relation suivante :

$$v_{w,95} = v_{w,max} + 1.8\sigma$$

où σ est l'écart type des $v_{w,rms}$ qui dépendent du temps et $v_{w,max}$ la valeur maximum atteinte par les $v_{w,rms}$. Ces niveaux de vitesse correspondent à une somme pondéré par tiers d'octave d'une intégrale glissante du signal temporel fenêtré sur les bandes de tiers d'octaves étudiées $s_i(t)$:

$$v_{w,rms} = \sqrt{\sum_i v_{i,rms}^2 w_i}$$

où w_i est une pondération par bande de tiers d'octave donnée dans la norme et les $v_{i,rms}$ sont déduits de la relation :

$$v_{i,rms} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t s_i(t) dt}$$

Cet indice conduit à une classification dans laquelle le bâtiment se situe dans l'une des quatre classes suivantes :

Classe A : Niveaux vibratoire non perçus

Classe B : Faible proportion d'habitants gênés par les vibrations (< 10%)

Classe C : Proportion d'habitants gênés évaluée à environ 15%

Classe D : Proportion d'habitants gênés évaluée à environ 25%

Par ailleurs, nous simulons au plus près les vibrations dans le bâtiment, puis nous en modifions certaines caractéristiques géométriques et observons les différences avec les vibrations mesurées. En moyenne la simulation donne un niveau global (somme sur tous les

tiers d'octaves en *dBlin*) inférieur de trois dB à celui mesuré (Figure V.7). Nous pouvons donc considérer que les résultats des simulations représentent bien les niveaux enregistrés lors de la campagne de mesure.

Les différents modifications de la géométrie sont :

- * un déplacement de tout le bâtiment à vingt mètres des voies (6m à l'origine),
- * une modification de l'épaisseur de la dalle du premier étage à 15 et 25cm (20cm à l'origine),
- * une modification de l'épaisseur du mur de façade à 20cm (40cm à l'origine),
- * un allongement de la dalle du premier étage à 6.8m (3.4m à l'origine).

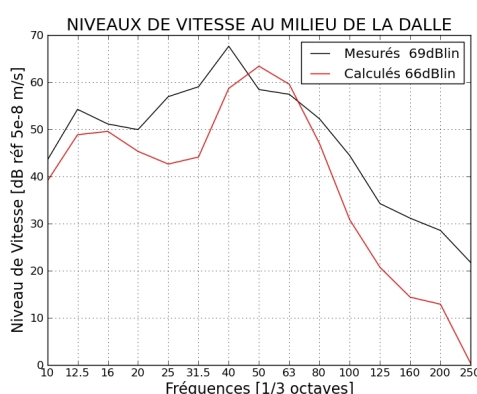


FIGURE V.7 – Comparaison de la mesure et de la simulation avec les résultats globaux donnés en légende (somme sur tout les tiers d'octaves en *dBlin*).

Résultats

Les résultats portant sur les différents paramètres modifiés lors de la simulation (V.8,V.9,V.10) montrent que l'éloignement du bâtiment diminue le niveau maximum observé de 20dB. Le changement d'épaisseur de la dalle influe peu sur les niveaux alors que la longueur de la dalle et l'épaisseur du mur de façade modifient significativement les résultats.

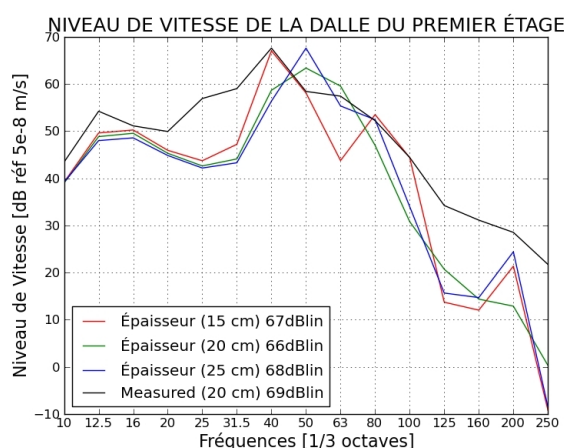


FIGURE V.9 – Effet de l'épaisseur de la dalle (premier étage) sur ses niveaux de vitesses vibratoires.

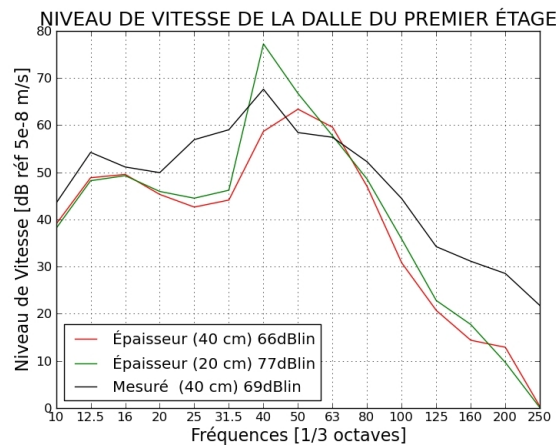


FIGURE V.8 – Effet de l'épaisseur du mur de façade sur les niveaux de vitesses vibratoires de la dalle.

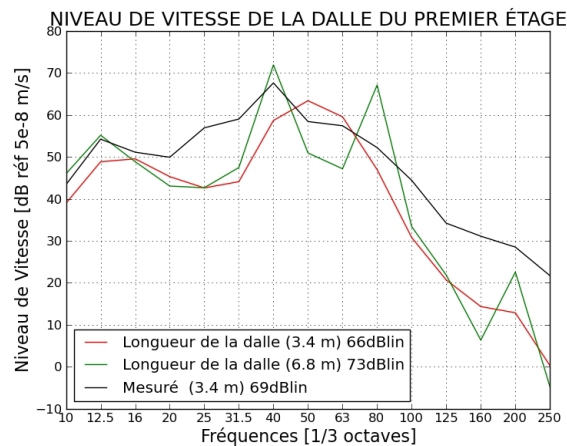


FIGURE V.10 – Effet de la longueur de la dalle (premier étage) sur ses niveaux de vitesses vibratoires.

En ce qui concerne l'indice $v_{w,95}$ permettant d'évaluer la gêne pour l'utilisateur, on observe que le changement de la longueur de la dalle modifie de façon significative cet indice en le dégradant de deux crans dans la classification de la norme norvégienne. L'indice $v_{w,95}$ passe de 0.11 (catégorie B) à 0.56 (catégorie D). L'impact de la réduction d'épaisseur du mur de façade est encore plus important car l'indice $v_{w,95}$ prend la valeur 0.89 (hors catégorie). Par contre un changement d'épaisseur de la dalle ne fait pas beaucoup varier cet indice, le bâtiment restant dans la même catégorie. Enfin, lorsqu'il est placé quatorze mètres plus loin des voies, il obtient un indice nettement inférieur ($v_{w,95} = 0.04$ catégorie A).

V.3 Études paramétriques réalisées par des calculs 2D

Après la présentation de plusieurs séries de calculs numériques effectuées au cours de ce travail de thèse, nous avons jugé qu'il était intéressant de présenter les tendances observées sur le système Source lorsque le sol change de caractéristiques. Le présent paragraphe expose la démarche et les résultats que nous avons pu observer.

Configurations adoptées pour la fondation et le sol de fondation

En ce qui concerne la forme de la fondation, deux formes ont été retenues : la fondation correspondant à deux semelles et celle correspondant à un radier en surface. Nous avons observé le comportement de ces fondations pour neuf types de sols différents. Les caractéristiques sont celles d'un sol mou, d'un sol moyen et d'un sol dur, pour lesquels nous avons ajouté ou non la présence d'une couche rigide en deux profondeurs différentes.

Ces simulations ont été réalisées dans le cadre habituellement utilisé dans ce document, à savoir le sol modélisé par les éléments de frontières et la fondation par les éléments finis du logiciel Mefisto. L'excitation est toujours une force ponctuelle située à six mètres de la fondation la plus proche. Toutes les fondations ont les caractéristiques du béton et font vingt centimètres d'épaisseur. Les schémas des géométries des fondations sont visibles sur la Figure 1.A et 1.B du paragraphe II.2.1.

Ces configurations ne varieront pas dans les différents résultats présentés plus loin où seul le sol sera modifié.

Les caractéristiques des différents matériaux utilisés sont données dans le tableau ci-dessous. Les différents type de sol sont déduits de [102] comme indiqué dans le Chapitre II.

Dénominations	Module d'Young	Coef. de Poisson	Coef. de dissipation	Masse volumique
Sol mou	50e6	0.25	0.1	1400
Sol moyen	200e6	0.25	0.1	1600
Sol dur	800e6	0.25	0.1	1800
Sol rigide	30e9	0.25	0.05	2800
Béton	26e9	0.3	0.05	2400

TABLE V.1 – Valeurs des différents matériaux

Excitation utilisée

Puisque nous souhaitons n'observer que l'effet du sol nous devons considérer que l'excitation transmise au sol dépend également de celui-ci. Dans nos calculs nous simulons la source par une force. Celle-ci doit être adaptée en fonction du sol étudié. Pour ce faire nous utilisons un modèle de source ferroviaire [17] qui inclut le sol, l'assise des voies, deux rails et le train. L'ensemble est modélisé en deux dimensions, les rails et la base des voies étant représentés par des poutres infinies. Le sol est un demi espace élastique homogène analysé par une approche ondulatoire [27]. Le sol est représenté par sa mobilité d'entrée, appliquée sur la surface inférieure de la base de la voie. Le train est représenté par une masse vibrante

appliquée au sommet du rail. Le problème est abordé par la résolution simultanée des équations de mouvements des rails et de l'assise des voies. Le système d'équations couplées qui en découle permet d'obtenir le déplacement des différentes composantes.

Ce modèle nous donne les déplacements sous la source au niveau de la surface du sol. Nous utilisons ces déplacements pour déduire des fonctions de transferts entre les différents sols. Cela nous permet d'obtenir une force "calibrée" sur l'excitation du système voies/train placée au-dessus d'un sol moyen. En d'autres termes ces fonctions de transfert nous permettent de calculer la force qu'exercerait le même système voies/train sur ces différents sols.

Le système voies/train utilisé est composé de rails ($60\text{kg}/\text{m}$), de traverses monobloques de (300kg), d'un ballaste de 20cm d'épaisseur et d'une semelle d'une rigidité de 220MN . La masse est représentative d'un train TER.

V.3.1 Vérification des mobilités

Comme dans les Chapitres II et III, nous apportons ici des éléments justifiant de la bonne modélisation des grandeurs utilisées ici, à savoir la mobilité et la vitesse libre d'une fondation. Pour ce faire nous montrons au travers des quelques courbes qui suivent, la symétrie des mobilités.

Pour ne pas trop alourdir la représentation nous montrons simplement la symétrie des configurations suivantes : le cas d'un sol mou de dix mètres de profondeur sur une couche rigide (Figure V.11 gauche) et le cas d'un sol dur avec une couche rigide à trois mètres de la surface libre du sol (Figure V.11 droite).

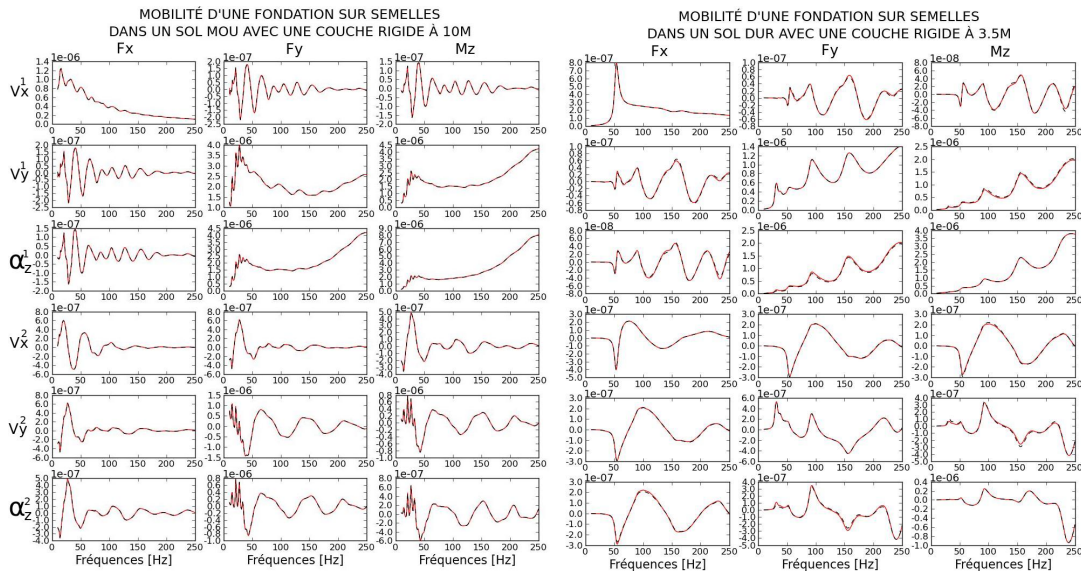


FIGURE V.11 – Composantes de la mobilité d'une fondation sur semelles : à gauche dans un sol mou avec une couche rigide à 10m , à droite dans un sol dur avec une couche rigide à 3.5 mètres, les termes symétriquement opposés sont tracés en pointillés noirs.

V.3.2 Comparaisons

Pour comparer directement tout les cas nous nous concentrons sur trois indicateurs : la vitesse libre, la puissance caractéristique et les rapports entre les puissances caractéristiques directes.

La vitesse libre donne une idée du comportement global de la sollicitation appliquée à la fondation. C'est la grandeur qui influe le plus sur la vitesse et la force de contact entre le système source et le bâtiment potentiellement situé au dessus.

La puissance caractéristique est significative de la capacité du système à délivrer de l'énergie au système Récepteur, c'est-à-dire à la superstructure.

Enfin les rapports des puissances caractéristiques directes, i.e. calculés sur un seul degré de liberté, nous informent sur l'importance de chacun des degrés de liberté dans la capacité du système à délivrer de la puissance.

Observations directes

Les premières comparaisons peuvent s'effectuer directement en traçant sur une même figure chacune des grandeurs mentionnées pour les différents configurations. Dans cette optique les courbes de la Figure V.12 rassemblent pour chaque type de sol les trois positions de la sous-couche rigide.

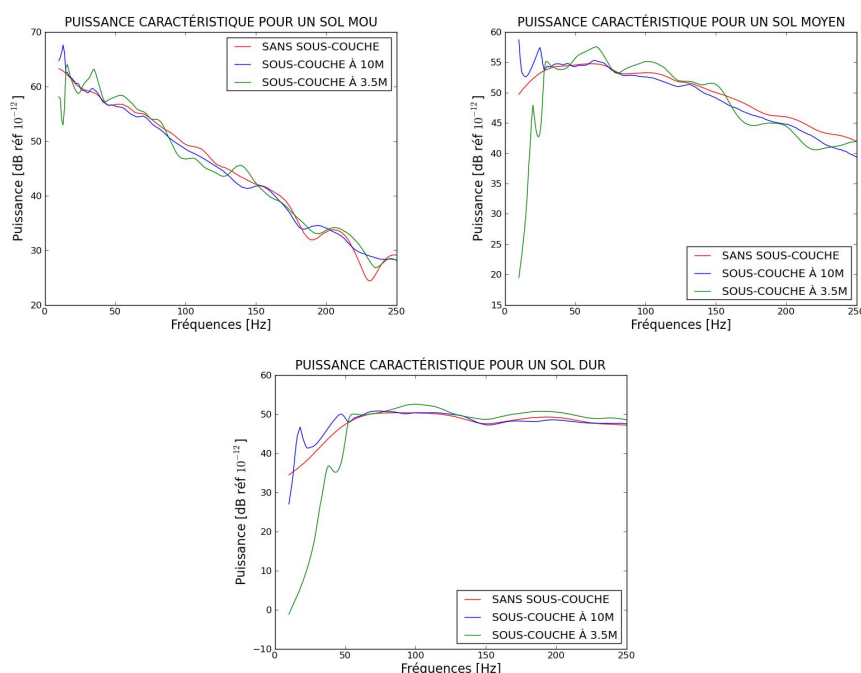


FIGURE V.12 – Puissances caractéristiques des trois types de sols classés par configuration.

La première remarque est que la présence d'une sous-couche rigide à 10 et 3.5 mètres ne change pas fondamentalement la capacité des fondations à délivrer de la puissance. Cela peut également s'observer sur les vitesses libres pour lesquelles la composante la plus forte n'est que peu impactée par la position de la sous-couche rigide (Figure V.13). Néanmoins on observe une différence au tout début du spectre pour lequel la sous-couche la plus proche

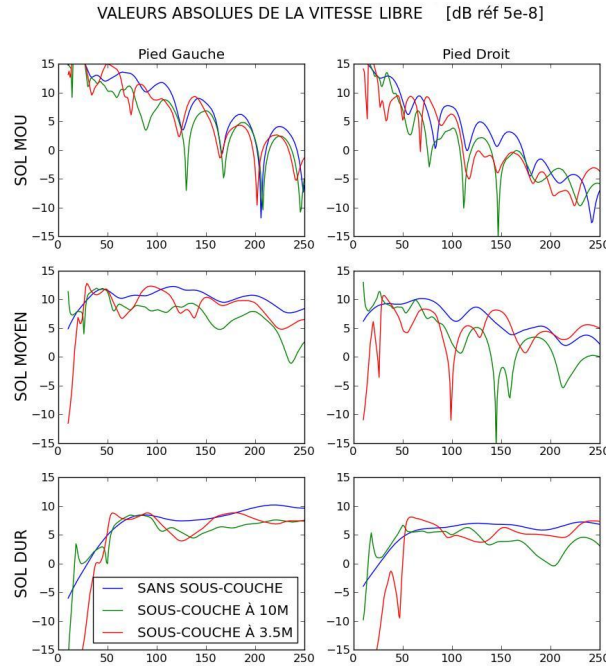


FIGURE V.13 – Niveaux des Vitesses libres des différentes configurations.

diminue fortement les niveaux de la puissance caractéristique et de la vitesse libre verticale. Comme indiqué dans le Chapitre I, l'effet de la sous-couche rigide ne peut apparaître qu'à basse fréquences car la profondeur de pénétration des ondes de Rayleigh diminue avec la fréquence et l'énergie se concentre dans la zone proche de la surface à hautes fréquences. On note que l'effet de la couche rigide est de diminuer la vitesse libre, comme on peut s'y attendre car le sol et sa sous-couche sont globalement plus rigides que le sol en absence de la sous-couche.

L'observation des décompositions des vitesses libres sur les degrés de liberté semble indiquer que les termes de rotation sont plus sensibles à la présence d'une sous-couche que les composantes de translation.

La Figure V.14 montre les rapports entre les puissances caractéristiques calculées pour un degré de liberté.

En l'occurrence il s'agit du rapport des composantes directes, i.e. $|v_{Lx_i}|^2/Y_{F_ix_i}$, sur la composante directe verticale de la première zone de contact. On remarque que la présence d'une sous-couche rigide modifie ce rapport en augmentant l'importance des degrés de liberté horizontaux et de rotation. Ce phénomène semble encore plus marqué sur la deuxième zone de contact (trait pointillé). Cela s'explique par le fait que l'énergie réfléchiée par la couche rigide est plus significative sur la deuxième zone de contact au regard des niveaux déjà présents aux deux points de contact sans la couche rigide.

D'autre part on peut remarquer que la composante importante est, dans tout les cas, portée par le degré de liberté vertical.

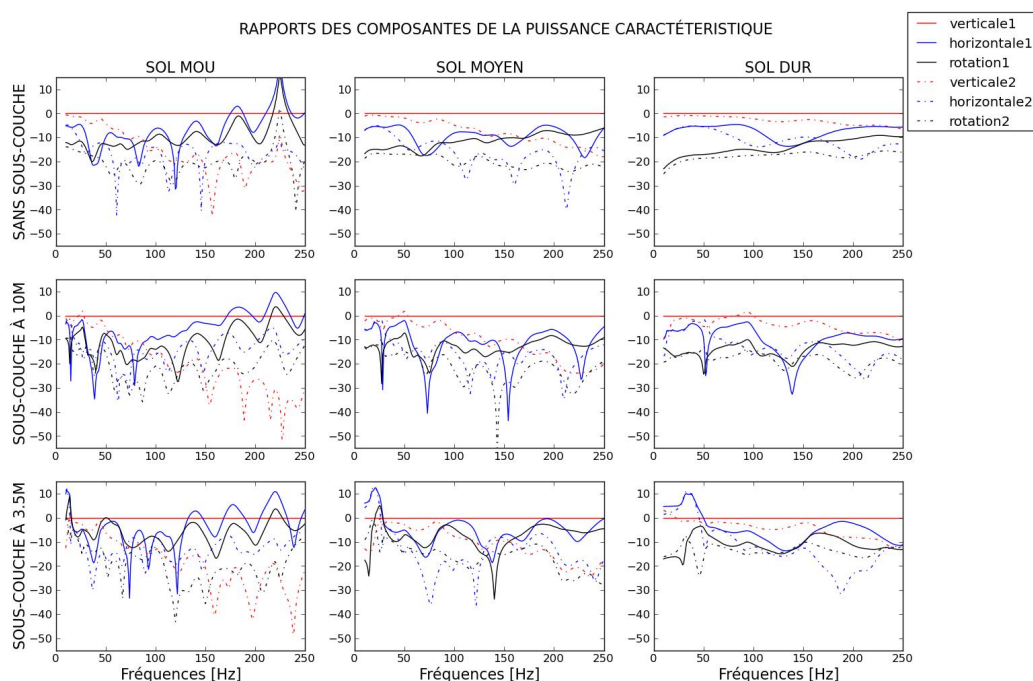


FIGURE V.14 – Rapports des composantes directes de la puissance caractéristique en dB référencée au mouvement vertical de la première zone de contact.

Enfin pour bien visualiser l'importance du type de sol, les courbes de la Figure V.15 montrent, pour chacune des positions de la sous-couche rigide, la puissance caractéristique.

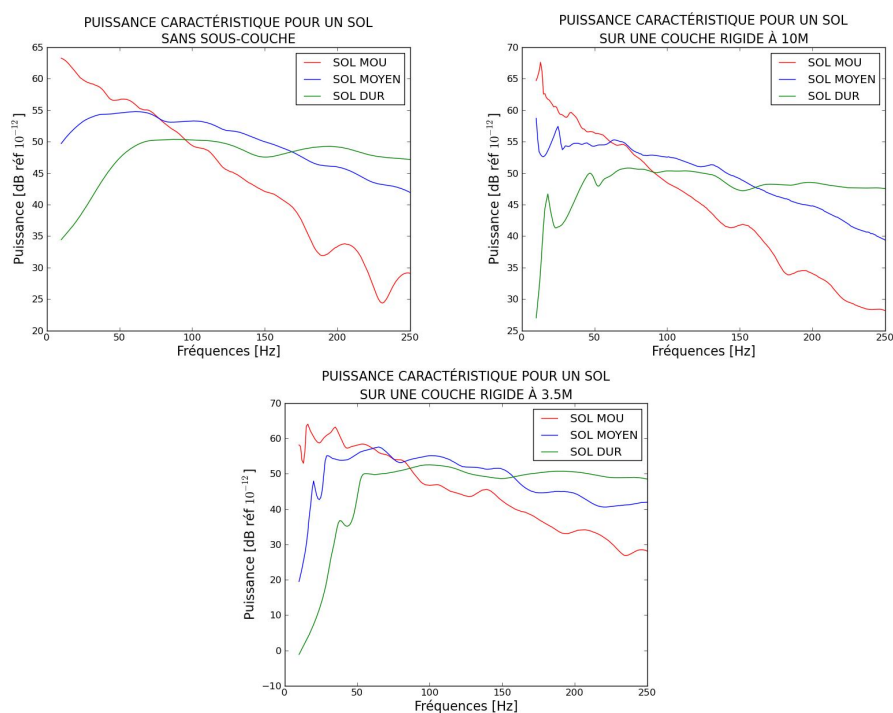


FIGURE V.15 – Puissances caractéristiques des situations classées par types de sols.

On observe ainsi que le type de sol a un impact bien plus important sur la puissance caractéristique. Des résultats non reportés ici montrent qu'il en est de même pour les vitesses libres. L'effet principal est une diminution de la puissance caractéristique pour le bas du spectre et une augmentation de cette puissance pour les moyennes fréquences (haut du spectre) lorsque le sol devient plus raide. Ces différences s'atténuent lorsque la sous-couche rigide se rapproche de la surface libre du sol.

Le comportement en haut de spectre est probablement dû à la dissipation qui dépend de la longueur d'onde, elle même étant inversement proportionnelle à la rigidité du sol. Il est donc prévisible que les moyennes fréquences soient plus amorties pour un sol mou que pour un sol moyen. A titre indicatif, les longueurs d'ondes de Rayleigh à 100 Hz sont respectivement proches de 1 m , 2 m et 3.8 m pour les sols mou, moyen et dur.

D'autre part on observe que la chute d'amplitude au tout début du spectre est présente pour les trois types de sol. Néanmoins le phénomène est accentué lorsque le sol se rigidifie.

Observations sur le rapport des puissances caractéristiques

Afin de mieux visualiser la différence entre les cas étudiés, nous proposons d'observer la tendance observée sur les rapports des puissances caractéristiques. Pour ce faire nous divisons la puissance caractéristique du système envisagé par celle du système témoin qui est la fondation observée dans un sol moyen sans sous-couche rigide.

Pour compléter notre étude nous proposons d'observer ces courbes pour deux types de fondations : les fondations sur semelles précédentes et un radier en surface.

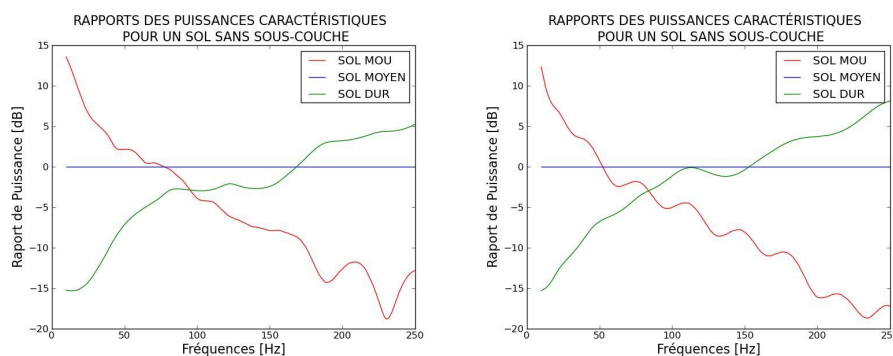


FIGURE V.16 – Rapports des puissances caractéristiques pour des fondations sur semelles (gauche) et un radier en surface (droite) pour un sol homogène.

Ces courbes nous permettent d'observer que l'effet du type de sol impacte les réponses des deux fondations de façon similaire. Dans les deux configurations, sans sous couche (Figure V.16) et avec une couche rigide à 3.5 mètres de la surface libre (Figure V.17), on observe clairement la tendance décrite plus haut sur les extrémités du spectre.

D'autre part ces courbes nous permettent de quantifier la différence entre les différents sols. Ainsi un sol mou conduit à une puissance environ dix fois plus importante qu'un sol moyen, et celui-ci est dix fois plus "puissant" qu'un sol dur pour les fréquences avoisinant les 10 Hz . Les sols mou et dur ont une puissance équivalente autour de 100 Hz qui est environ la moitié de celle d'un sol moyen pour les mêmes fréquences. En fin de spectre, les rapports de puissance sont quasiment inversés.

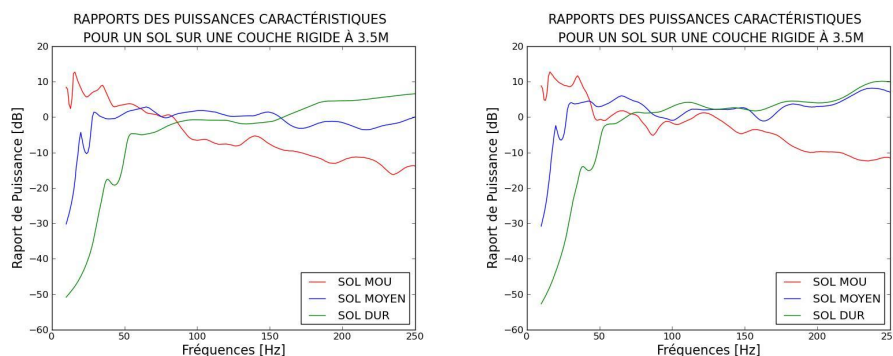


FIGURE V.17 – Rapports des puissances caractéristiques pour des fondations sur semelles (gauche) et un radier en surface (droite) pour un sol sur une couche rigide à 3.5m.

Dans la deuxième configuration de sol les différences sont moins marquées même si les tendances observées sont également visibles. La courbe correspondant au sol moyen montre que la présence de la sous-couche affecte essentiellement les basses fréquences en diminuant les puissances caractéristiques correspondantes. Pour des fondations sur semelles, les moyennes fréquences ne sont quasiment pas influencées alors que l'on observe une augmentation de la puissance caractéristique pour le radier en surface. Cela s'explique par la géométrie qui, dans le deuxième cas, permet d'absorber une part plus importante de l'énergie réfléchiée par la couche rigide. Cela s'observe pour tous les types de sols dont les rapports de puissances caractéristiques montrent tous un niveau plus élevé pour le radier que pour les fondations sur semelles.

V.3.3 Conclusions

On observe que la rigidité du sol a un fort impact sur les résultats. Par contre, une couche rigide éloignée des fondations n'influence que peu la puissance transmise à la superstructure. Néanmoins, lorsque cette couche rigide est proche, elle augmente de façon significative la quantité d'énergie transmise dès 150 Hz , ce qui correspond bien à l'idée que ce gain est dû à l'énergie réfléchiée sur la couche rigide. Cet effet est amplifié lorsque les fondations possèdent une assise horizontale étendue.

On observe également une chute de la capacité à délivrer de la puissance pour les basses fréquences ($10 - 20\text{ Hz}$) avec la présence de la sous-couche rigide à 3.5 mètres.

Lorsque la couche rigide est éloignée, on peut supposer que l'énergie réfléchiée se dissipe avant de revenir sur les fondations. L'influence de ce phénomène est très liée à la capacité du sol à absorber l'énergie. Le sol mou est donc particulièrement concerné par cette remarque.

L'augmentation de la rigidité du sol a, pour principale influence la diminution des niveaux vibratoires en basses fréquences et son augmentation pour les moyennes fréquences ($150 - 200\text{ Hz}$). Cela s'explique en partie par la dissipation dans le sol qui diminue lorsque la rigidité augmente.

Conclusion du chapitre

Ces trois exemples d'application montrent les possibilités offertes par les outils construits au cours de cette thèse.

Le premier exemple montre que la méthode des mobilités permet de coupler différentes géométries. La comparaison des différents couplages met en évidence que, dans les cas les plus simples, les composantes de transfert et de rotation influent peu sur les résultats. Néanmoins cela n'est a priori valable que dans le cas où l'excitation et le point d'observation sont sur le même plan, ici $z = 0$. Par ailleurs, la courbe de la Figure V.4 permet de se faire une idée des différences observées entre les géométries en deux dimensions et celles prenant en compte la troisième dimension. Il faut toutefois signaler que les temps de calculs d'un sol modélisé en FEM 2.5D sont conséquents et que le fait de coupler différents modèles entraîne une manipulation des résultats intermédiaires qui peut s'avérer délicate.

Le deuxième exemple permet d'observer tout l'intérêt apporté par la méthode de calibration. En effet, cette calibration permet de corriger un calcul en deux dimensions pour lui donner des niveaux comparables à ceux correspondant à des résultats expérimentaux. Comme pour toute modélisation, dès lors que les résultats de la simulation ne sont pas trop éloignés de la mesure, celle-ci permet une étude paramétrique. Les comparaisons faites à cette occasion montrent que l'épaisseur de la dalle a peu d'importance lorsque le changement est modéré. Parallèlement l'épaisseur du mur de façade ou la longueur de la dalle influent sur le niveau vibratoire de cette même dalle.

La troisième partie étudie l'effet du sol sur la réponse d'une fondation. Globalement on peut retenir que la rigidité du sol est le facteur qui influe le plus sur les résultats. En comparaison la présence d'une couche rigide affecte relativement peu le comportement de la fondation, contrairement à ce qui est observé en basses fréquences dans le domaine du génie parasismique.

Conclusion générale et Perspectives

Problème étudié

Ce document rapporte les travaux effectués pendant trois années de doctorat. Ils sont le fruit d'une collaboration entre le pôle Bruits et Vibrations du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (centre de Grenoble), d'une part, et le laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelle de l'Université Paris-Est Marne la Vallée, d'autre part, dans le cadre de l'école doctorale SIE de l'Université Paris-Est. L'objectif de ces années de thèse portait sur la mise au point d'une méthode permettant la prédiction des niveaux vibratoires dans un bâtiment, générés par le passage d'un train à proximité de celui-ci et transmis via le sol et les fondations. La transmission des bruits aériens était hors du cadre de la thèse.

Les vibrations d'origine ferroviaire se situent dans une gamme de fréquences qui ne correspond bien ni aux hautes fréquences, ni aux basses fréquences, domaine généralement dénommé "moyennes fréquences". L'approche proposée devait donc permettre l'utilisation de plusieurs modèles comme la SEA, les éléments finis ou une formulation ondulatoire, qui correspondent à des plages de fréquences à priori différents. Ce rapport a présenté la méthodologie utilisée qui est synthétisée ci-après, conjointement avec les principaux résultats. Enfin, on aborde les points qui restent ouverts à l'issue de cette thèse et qui pourraient faire l'objet d'études complémentaires.

Rappel des principaux résultats

L'approche proposée ici peut se décomposer en trois parties : la décomposition du problème en deux sous-problèmes se rapportant à deux sous-structures de l'ensemble à étudier, la caractérisation de chacun de ces sous-problèmes et le calcul de la réponse initialement recherchée pour l'ensemble à étudier.

Le problème de la transmission des vibrations ferroviaires à un bâtiment nécessite de prendre en compte plusieurs objets qu'il est possible de traiter soit simultanément, soit en utilisant une approche par sous-structures. L'avantage d'aborder le problème par sous-structures est de pouvoir faire appel à des codes de calcul qui sont le mieux à même de traiter les phénomènes physiques se produisant dans chaque sous-structure. Dans ce but, une modélisation par sous-structures a été utilisée, qui ne comporte qu'une approximation au niveau de l'interface entre les deux sous-structures. Cette technique de sous-structuration, dite méthode des mobilités, est proche des techniques de représentation de l'interaction sol-structure utilisées dans le domaine du génie parasismique.

Dans le formalisme de la méthode des mobilités le système physique global est découpé en deux parties, la Source qui contient l'excitation et le Récepteur. Dans notre approche, le premier sous-système contient le sol, les fondations du bâtiment et l'excitation, le deuxième sous-système correspond à la superstructure étudiée. Les comportements de la Source et du Récepteur sont caractérisés par leurs mobilités calculées sur leurs interfaces communes. L'étude du système "Source" sollicité par la source des vibrations permet d'obtenir la vitesse dite "libre", correspondant à la vitesse induite dans le sol et la fondations non couplés à la superstructure (à noter que cette vitesse "libre" ne correspond pas à la vitesse libre au sens du génie parasismique, qui représente la réponse au droit de l'ouvrage sans les fondations). Lorsque ces grandeurs sont déterminées, les vitesses, forces et puissances injectées sont

obtenues dans le cas où les deux systèmes sont couplés. Le résultat final est déterminé par l'application de ces grandeurs à l'interface du Récepteur découplé de la Source. A ce niveau, il convient de noter que la sous-structuration mise en oeuvre dans ce mémoire n'est pas équivalente à celle mise en oeuvre dans le cadre du génie parasismique car dans ce dernier cas, l'interface entre les deux sous-structures correspond généralement à la surface de contact entre le sol et les fondations, ce qui n'est pas le cas dans notre travail.

La grande difficulté de la méthode se situe dans l'obtention des mobilités. Ces dernières sont des grandeurs qui doivent respecter en particulier les principes de réciprocité et de causalité. D'autre part aucun degré de liberté ne peut, à priori, être négligé. Les fondations d'un bâtiment sont difficilement modélisables autrement que par des méthodes numériques. Dans notre cas nous disposons d'un code de calcul dénommé Mefissto qui permet de coupler les éléments finis et les éléments de frontières. Dans cette représentation l'interface Source-Récepteur comprend plusieurs points de discrétisation. La prise en compte des degrés de liberté de tous ces points conduirait au stockage des termes de mobilité caractérisant l'interaction entre tous ces points. De tels calculs sont réalisés dans le domaine du génie parasismique dans le cas d'ouvrages comportant des risques très particuliers, mais ils conduisent à stocker des quantités considérables d'information. La pratique courante dans ce domaine est donc de considérer que l'interface sol-structure se comporte rigidement. Dans le domaine des vibrations, il n'est plus possible de considérer que l'interface sol-structure se comporte rigidement, mais le choix d'une interface entre les deux sous-structures au niveau des voiles verticaux de la structure permet de se rapprocher de cette situation car ces voiles se comportent comme des plaques dont la section se comporte localement de façon rigide. C'est le choix essentiel qui est à la base de la méthode développée dans ce mémoire. Dans le cas d'études en deux dimensions, chaque partie de l'interface est alors caractérisée complètement par un déplacement de corps rigide, ce qui réduit considérablement les différents termes de mobilité à prendre en compte. Cette vision "ponctuelle" de l'interface permet de modéliser la Source et le Récepteur à l'aide de différents modèles. Car pour pouvoir mettre en oeuvre la méthode, les matrices de mobilité doivent évidemment être de mêmes dimensions.

Numériquement une des difficultés est d'estimer convenablement les rotations à partir du calcul effectué par le code "Mefissto". En effet, ceux-ci doivent notamment être pris en compte dans le calcul de la puissance injectée dans la structure. Ces rotations doivent être calculées à partir des déplacements des différentes points de l'interface et nécessite un post-traitement spécifique à l'aval du code de calcul. En contrepartie, l'approche permet d'obtenir une décomposition des vibrations sur tout les degrés de liberté accessibles.

Au delà des difficultés évoquées, la méthode n'est pas limitée à une géométrie particulière. Dans ce document la plupart des résultats sont obtenus en deux dimensions, mais plusieurs cas en 2.5 D (correspondant à une source limitée dans la troisième direction sollicitant une fondation de taille infinie dans cette direction) ont été reportés. Dans ce dernier cas, les calculs sont plus volumineux car ils nécessitent un stockage et un post-traitement portant sur les résultats afférents à tous les nombres d'onde correspondant à la propagation dans la troisième direction.

La caractérisation du système Source nécessite d'obtenir la mobilité des fondations. Celle-ci est sensible à tous les paramètres du système, que ce soit ceux de la fondation ou ceux du sol. Or une modélisation extensive du sol est très difficile à réaliser compte tenu

de son caractère fortement hétérogène en raison de stratifications verticales et de propriétés variant aléatoirement à l'intérieur de chaque couche de sol. Pour modéliser correctement le comportement de la fondation, les caractéristiques du sol doivent donc faire l'objet d'une grande attention. De même l'excitation, qui se traduit in-fine par la vitesse libre, est également influencée par la représentation du sol.

La modélisation complète de l'excitation, qui prendrait en compte de façon extensive toute la complexité des efforts dynamiques appliqués par un convoi ferroviaire, ne fait pas partie des travaux entrepris ici. Les sollicitations prises en compte correspondent de façon simplifiée à une force ponctuelle à la surface du sol. Toutefois, le spectre de la force appliquée est ajusté pour représenter au mieux les vibrations obtenues dans des situations réelles, grâce à une technique de calibration qui repose sur la détermination de la fonction de transfert entre force appliquée et accélération induite aux points de mesure. Cette fonction de transfert est relative à une modélisation du sol donnée et à un point d'observation particulier. L'utilisation de cette technique pour plusieurs jeux de paramètres du sol permet in-fine d'obtenir un couple "Force calibrée-Paramètres du sol" pour lequel la simulation reproduit au mieux les résultats de mesure. Cette approche donne de bons résultats mais nécessite évidemment de disposer de mesures de vibrations sur le site de l'ouvrage étudié.

Une fois la force et les paramètres du sol calibrés, la vitesse libre est directement obtenue par une unique simulation. Dans celle-ci la force calibrée est imposée à l'emplacement de la voie ferrée et le point d'observation se situe sur l'interface entre sous-structures. Avec cette procédure, la vitesse libre est évidemment affectée par la calibration. Celle-ci traduit les spécificités de l'excitation ferroviaire et impose la forme du spectre de l'énergie transmise au bâtiment. Globalement la majeure partie de celle-ci est contenue dans les tiers d'octaves $60 - 80Hz$.

Lorsque les paramètres du sol sont déterminés, la mobilité des fondations peut être obtenue. La plupart des modèles d'impédance de fondation ont été développés en sismique pour des applications basses fréquences et correspondant à une interface placée entre le sol et la fondation. Dans la thématique ferroviaire ces mobilités sont généralement obtenues dans les travaux reportés dans la littérature à l'aide de méthodes numériques et ce travail ne fait pas exception.

Dans l'approche proposée, les mobilités ne peuvent a priori pas être simplifiées. L'importance des différentes composantes dépend des caractéristiques des matériaux et de la géométrie. Globalement les termes de couplage entre les différentes fondations d'un bâtiment ne sont négligeables que lorsque la distance entre les fondations est grande. Les termes de couplage entre les degrés de liberté sont essentiellement fonctions de la géométrie et ne sont négligeables que dans des cas particuliers.

S'il existe peu de modèles pour caractériser une fondation, les techniques accessibles pour modéliser le comportement dynamique d'une superstructure sont beaucoup plus nombreuses. Dans ce document les trois techniques citées dans le paragraphe précédent sont présentées. Toutes possèdent leurs avantages et le choix de l'une ou l'autre dépend essentiellement de la géométrie. Une approche ondulatoire permet un calcul rapide mais reste limitée aux géométries simples en deux dimensions. La méthode des éléments finis, pour laquelle les résultats sont similaires à l'approche ondulatoire, permet d'étudier n'importe quelle géométrie mais demande parfois des temps de calculs importants. La SEA, pour des raisons de densité modale, doit modéliser exclusivement des problèmes en trois dimensions

dans la gamme de fréquences étudiée.

Ces modèles sont utilisés pour obtenir les mobilités du bâtiment ainsi que pour déterminer le résultat final du problème. Le calcul des mobilités à partir de l'approche énergétique n'est cependant pas recommandé.

Lorsque l'on confronte les niveaux vibratoires moyens obtenus pour les dalles d'un bâtiment de six étages en deux dimensions, les trois méthodes donnent des résultats comparables. L'analogie entre la méthode des éléments finis et l'approche ondulatoire montre que ces deux techniques sont quasiment équivalentes. L'approche énergétique est utilisée à la limite de ses conditions d'utilisation. Néanmoins la calibration de la vitesse libre induit un transfert d'énergie qui se situe principalement à des fréquences pour lesquelles la SEA fournit des résultats acceptables.

Enfin, le type de problème étudié comporte des incertitudes à plusieurs niveaux et ces incertitudes sont partiellement prises en compte dans ce travail. Les principales portent sur les propriétés du sol et par conséquent sur la mobilité du système Source. L'incertitude sur cette mobilité est évaluée à partir d'une approche stochastique qui permet d'obtenir la dispersion des résultats à partir d'un seul calcul déterministe. En contrepartie la mobilité doit être retranscrite sous une forme autorisant à toutes les réalisations stochastiques de la mobilité d'avoir un sens physique, ce qui est réalisé par une méthode à variables cachées. Bien que des difficultés numériques apparaissent dans l'application de la méthode, spécialement lorsque la matrice de mobilité est mal conditionnée, la méthode a pu être mise en oeuvre dans le cadre de ce travail, permettant d'évaluer la dispersion statistique des vibrations dans le bâtiment.

Perspectives

L'ensemble des résultats obtenus lors de ces trois années permet une modélisation partielle du phénomène étudié. Une approche complète devrait intégrer, à l'amont du travail, une modélisation plus approfondie de l'excitation ferroviaire, pour caractériser au mieux la source, et, à l'aval du travail, un outil permettant de déterminer le bruit aérien induit dans les volumes internes de la structure, à partir des vibrations de la structure elle-même.

La première extension nécessiterait d'ajouter à la simulation du système Source un modèle d'excitation ferroviaire plus complet. Il existe déjà un certain nombre de tels systèmes, qui sont de constitution plus ou moins complexe. Pour pouvoir utiliser les outils présentés dans ce document, le modèle d'excitation doit pouvoir se traduire soit par une force équivalente en force appliquée en surface, soit par une densité surfacique de forces appliquée à la surface. L'utilisation de la méthodologie elle-même pourrait néanmoins s'appliquer en utilisant d'autres outils, plus sophistiqués, permettant de prendre en compte des sources plus réalistes.

La gêne due au passage d'un train est le fait des vibrations des dalles des habitations et de la retransmission de ces vibrations en ondes aériennes. Comme indiqué précédemment, ce dernier point est l'un des chaînons manquants dans la prévision des effets induits par les vibrations d'origine ferroviaire. Pour évaluer ce phénomène il est nécessaire d'étudier le rayonnement des parois du bâtiment qui vibrent sous l'action des vibrations transmises par les fondations. Ce phénomène a déjà fait l'objet de recherches et certains résultats sont

applicables à notre problématique. Cette étape pourra ainsi compléter les travaux présentés dans ce mémoire.

Parallèlement certains points abordés dans le mémoire devraient faire l'objet d'études plus approfondies. C'est notamment le cas du comportement du sol qui est ici l'élément le plus schématiquement représenté. Une hypothèse simplificatrice est de supposer l'homogénéité au moins dans la couche supérieure, bien qu'il soit connu que la vitesse de propagation des ondes varie significativement avec la contrainte en place et donc avec la profondeur.

D'autre part la calibration des paramètres du sol sur la campagne de mesure Vibsol-fret a clairement montré que les géométries en 2 dimensions sous-estiment la dissipation géométrique. Le meilleur moyen d'y remédier est d'utiliser des géométries en 2.5 ou 3 dimensions. Quelques exemples d'applications avec ces géométries sont donnés dans ce document, notamment dans le dernier chapitre. Dans celui-ci on introduit un couplage entre une Source modélisée en 2.5 dimensions et un Récepteur en 3 dimensions. Néanmoins le peu d'études faites dans cette configuration rend fragile les conclusions que nous pouvons en tirer. Pour consolider cette dernière approche il serait opportun d'effectuer un plus grand nombre de simulations couplant des géométries en 2.5 et 3 dimensions.

L'autre point sur lequel la procédure devrait être approfondie est dans le domaine de la prise en compte des incertitudes. Pour l'instant cette prise en compte n'est que partielle et il serait utile de considérer les propriétés stochastiques des sols de fondation non seulement au niveau de la mobilité de la source, mais aussi au niveau de la propagation entre la source et les fondations. Ce point nécessite toutefois des travaux considérables qui seraient d'ailleurs utiles pour d'autres types d'applications.

Bien évidemment les nuisances apportées par les bruits d'origine ferroviaire proviennent également des ondes transmises par voie aérienne, dont les effets peuvent se superposer au type d'ondes prises en compte dans ce mémoire. Il faudrait donc également prendre en compte l'effet couplé de ces deux types de vibrations.

Enfin il est connu, spécialement dans le domaine du génie parasismique, que la présence de bâtiments à proximité de la structure étudiée peut modifier le comportement de cette dernière. Les conséquences de ce type sont mal connues, mais devraient conduire à reconsidérer la modélisation du système source.

Annexe A

ÉCRITURE GÉNÉRALE DE LA PUISSANCE

Sommaire

A.1	ÉQUIVALENCE DES RELATIONS (I.8) ET (I.12)	150
A.2	UTILISATION DE L'EXPRESSION (I.12)	151

A.1 ÉQUIVALENCE DES RELATIONS (I.8) ET (I.12)

L'objectif de cette annexe est de démontrer l'équivalence des deux relations ci-dessous.

$$Q = (v_L)^T ([Y_S]^T + [Y_R]^T)^{-1} [Y_R]^* ([Y_S]^* + [Y_R]^*)^{-1} (v_L)^* \quad Y \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \quad (\text{A.1})$$

$$Q = v_L^{i*} Z_{RS}^{ip*} Y_R^{pm*} Z_{RS}^{mj} v_L^j \quad 1 < i, p, m, j < N \quad (\text{A.2})$$

Où N est le nombre de degré de liberté et $\mathbb{M}_N(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées symétriques de dimensions N à coefficients complexes. Avant de développer ces expressions mettons les sous une forme plus agréable, on peut écrire :

$$[Y_S]^T = [Y_S], \quad [Y_R]^T = [Y_R], \quad [Y_S]^* + [Y_R]^* = ([Y_S] + [Y_R])^* \quad \text{et} \quad [Y]^{-1*} = [Y^*]^{-1}$$

$$\text{d'où} \quad ([Y_S]^T + [Y_R]^T)^{-1} = ([Y_S] + [Y_R])^{-T} = Z_{RS} \quad \text{et} \quad ([Y_S]^* + [Y_R]^*)^{-1} = Z_{RS}^*$$

Avec les mobilités et la vitesse libre à deux ddl ou deux pdc ($N = 2$), définies comme dans le paragraphe 1.3.3,

$$v_L = \begin{pmatrix} v_L^1 \\ v_L^2 \end{pmatrix}, \quad Y_R = \begin{bmatrix} Y_R^{11} & Y_R^{12} \\ Y_R^{21} & Y_R^{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z_{SR} = \begin{bmatrix} Z_{SR}^{11} & Z_{SR}^{12} \\ Z_{SR}^{21} & Z_{SR}^{22} \end{bmatrix}$$

la première expression peut se dérouler de la façon suivante,

$$\begin{aligned} Q &= (v_L)^T ([Y_S]^T + [Y_R]^T)^{-1} [Y_R]^* ([Y_S]^* + [Y_R]^*)^{-1} (v_L)^* & Y \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C}), \\ Q &= \begin{pmatrix} v_L^1 & v_L^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Z_{SR}^{11} & Z_{SR}^{12} \\ Z_{SR}^{21} & Z_{SR}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_R^{11*} & Y_R^{12*} \\ Y_R^{21*} & Y_R^{22*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{SR}^{11*} & Z_{SR}^{12*} \\ Z_{SR}^{21*} & Z_{SR}^{22*} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_L^{1*} \\ v_L^{2*} \end{pmatrix}, \\ Q &= (v_L^1 Z_{SR}^{11} + v_L^2 Z_{SR}^{21} \quad v_L^1 Z_{SR}^{12} + v_L^2 Z_{SR}^{22}) [Y_R]^* [Z_{SR}]^* (v_L)^*, \\ Q &= \left(\sum_i v_L^i Z_{SR}^{i1} \quad \sum_i v_L^i Z_{SR}^{i2} \right) [Y_R]^* [Z_{SR}]^* (v_L)^*, \\ Q &= \left(Y_R^{11*} \sum_i v_L^i Z_{SR}^{i1} + Y_R^{21*} \sum_i v_L^i Z_{SR}^{i2} \right)^T [Z_{SR}]^* (v_L)^*, \\ Q &= \left(\sum_j Y_R^{j1*} \sum_i v_L^i Z_{SR}^{ij} \quad \sum_j Y_R^{j2*} \sum_i v_L^i Z_{SR}^{ij} \right) [Z_{SR}]^* (v_L)^*, \\ Q &= \left(\sum_m Z_{SR}^{m1*} \sum_j Y_R^{jm*} \sum_i v_L^i Z_{SR}^{ij} \right)^T \begin{pmatrix} v_L^{1*} \\ v_L^{2*} \end{pmatrix}, \\ Q &= \sum_{n=1}^N v_L^{n*} \sum_{m=1}^N Z_{SR}^{mn*} \sum_{j=1}^N Y_R^{jm*} \sum_{i=1}^N Z_{SR}^{ij} v_L^i, \\ Q &= v_L^{n*} Z_{SR}^{mn*} Y_R^{jm*} Z_{SR}^{ij} v_L^i & 1 < i, n, m, j < N, \end{aligned}$$

où il est facile de voir que les deux relations sont équivalentes.

A.2 UTILISATION DE L'EXPRESSION (I.12)

$$Q = v_L^{i*} Z_{RS}^{ip*} Y_R^{pm*} Z_{RS}^{mj} v_L^j \quad 1 < i, p, m, j < N_{ddl} \times N_{pdc} \quad (\text{A.3})$$

Avec la relation précédente il est possible de retrouver différentes contributions comme celles d'un point de contact spécifique ou encore celle d'un degré de liberté pour tout les points de contact. Lorsque les mobilités et la vitesse libre sont construites en rassemblant les composantes d'un point de contact en sous-matrices, les différentes contributions recherchées peuvent s'écrire ainsi :

L'apport d'un point à l'ensemble de la puissance :

$$Q^{nn} = v^{i*} Z^{ij*} Y^{jp*} Z^{pq} v^q$$

où (i, j, p, q) appartiennent à l'intervalle $I_{ddl} = [nN_{ddl}, (n+1)N_{ddl} - 1]$.

L'effet du couplage du point n sur les autres :

$$Q^{n\Sigma_j} = v^{i*} Z^{ij*} Y^{jp*} Z^{pq} v^q$$

où (i, p, q) appartiennent à l'intervalle $I_{tt} = [1, N_{pdc} \times N_{ddl}]$ et j à I_{ddl} .

L'effet du couplage de tout les autres autres points sur le point n :

$$Q^{\Sigma_i n} = v^{i*} Z^{ij*} Y^{jp*} Z^{pq} v^q$$

où (j, p, q) appartiennent à l'intervalle $I_{tt} = [1, N_{pdc} \times N_{ddl}]$ et i à I_{ddl} .

De même, si l'effet d'un degré de liberté porté par tous les points de contact veut être connu il faut considérer :

$$Q^{nb_{pdc}nb_{pdc}} = v^{i*} Z^{ij*} Y^{jp*} Z^{pq} v^q$$

où (i, j, p, q) appartiennent à l'ensemble $I_{pdc} = \{nb_{pdc}, N_{ddl} + nb_{pdc}, \dots, N_{pdc}(N_{ddl} - 1) + nb_{pdc}\}$.

Annexe B

CALCUL DES MOBILITÉS D'UNE POUTRE FINIE OU SEMIE-INFINIE

Sommaire

B.1	MOBILITÉ LONGITUDINALE	154
B.2	MOBILITÉ DE FLEXION	155

B.1 MOBILITÉ LONGITUDINALE

L'équation d'ondes longitudinales dans une poutre d'Euler-Bernoulli de section constante s'écrit [79],

$$D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F,$$

où D est la raideur longitudinale qui prend la valeur du module d'Young dans une poutre, F la force extérieure exercée sur la poutre et v la vitesse recherchée. La solution homogène de cette équation est classiquement prise sous la forme :

$$v(x, t) = [Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_x x}]e^{-j\omega t},$$

où k_x est le nombre d'onde, défini par $k_x = \omega \sqrt{\rho/E}$. Pour déterminer la mobilité nous avons besoin des relations reliant la vitesse à la force résultante :

$$\frac{\partial F_{res}}{\partial t} = -SE \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow F_{res} = -\frac{SE}{C_L} [Ae^{jk_x x} - Be^{-jk_x x}]e^{j\omega t}.$$

où F_{res} est la force résultante et S la section de la poutre.

B.1.1 CAS D'UNE POUTRE SEMIE-INFINIE

Lorsque la poutre est portée par une demie-droite, que son extrémité finie est libre et que la force extérieure est appliquée en $x = 0$, les conditions aux limites adéquates sont $F_{res}|_{x=0} = F$ et la condition de Sommerfeld (pas d'onde retour). Cela se traduit par,

$$B = 0 \quad \text{et} \quad A = \frac{-FC_L}{SE},$$

et permet d'obtenir la mobilité, donnée par le rapport de la vitesse au point considéré sur la force exercée $Y(x_0) \equiv v(x_0)/F$, soit dans notre cas :

$$Y_L|_{x=0} = \frac{-C_L}{SE}. \quad (\text{B.1})$$

B.1.2 CAS D'UNE POUTRE FINIE

Lorsque la poutre possède des dimensions finies, des extrémités libres et que la force extérieure est appliquée en $x = 0$, les conditions aux limites s'écrivent :

$$F_{res}|_{x=L_x} = 0 \quad \text{et} \quad F_{res}|_{x=0} = F.$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$B = Ae^{2jk_x L_x} \quad \text{et} \quad A = \frac{FC_L}{2jSE \sin(k_x L_x)} e^{-jk_x L_x}.$$

La mobilité, définie comme précédemment, s'écrit :

$$Y_L|_{x=0} = \frac{-jC_L}{SE \tan(k_x L_x)}. \quad (\text{B.2})$$

B.2 MOBILITÉ DE FLEXION

Pour déterminer les mobilités de flexion la démarche est identique au cas des mobilités longitudinales. Nous nous plaçons volontairement dans l'hypothèse simplificatrice d'une poutre en flexion pure car la bande de fréquences étudiée ($[10 - 250] Hz$) est conforme avec la limite $\lambda_F \gg h$, ou plus précisément l'erreur commise par l'utilisation de cette hypothèse est inférieure à 10% si $\lambda_F > 6h$ [79]. L'équation associée à ce type d'onde est :

$$G\nabla^4 v(x, t) + \rho \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = F \quad (B.3)$$

où G est la constante de raideur de flexion donnée le produit du module d'élasticité E et du moment d'inertie I , ρ est la densité volumique. Classiquement, quatre grandeurs sont associées qui, en omettant la dépendance temporelle prise en $e^{(-j\omega t)}$, s'écrivent sous la forme de solutions homogènes de l'équation (B.3) de la façon suivante.

$$\text{La vitesse de translation : } v(x) = (Ae^{jkx} + Be^{-jkx} + Ce^{kx} + De^{-kx}) \quad (B.4)$$

$$\text{La vitesse de rotation : } \alpha(x) = \partial_x v(x) = k(-jAe^{jkx} - jBe^{-jkx} + Ce^{kx} - De^{-kx}) \quad (B.5)$$

$$\text{Le moment fléchissant : } M(x) = -G\partial_x \alpha(x) = -Gk^2(-Ae^{jkx} - Be^{-jkx} + Ce^{kx} + De^{-kx}) \quad (B.6)$$

$$\text{La force résultante : } F(x) = -\partial_x M(x) = Gk^3(-jAe^{jkx} - jBe^{-jkx} + Ce^{kx} - De^{-kx}) \quad (B.7)$$

B.2.1 CAS D'UNE POUTRE SEMIE-INFINIE

Lorsque la poutre est semi-infinie il est utile de considérer les conditions de Sommerfeld ; les constantes B et D , portant l'onde retour, peuvent directement être annulées. Deux conditions aux limites sont alors suffisantes pour déterminer complètement les grandeurs recherchées.

Mobilités venant d'une force transverse hors plan

Dans ce cas l'extrémité inférieure de la poutre est soumise à une force F et son moment fléchissant est nul :

$$M|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = A \quad \text{et} \quad F|_{x=0} = F \Rightarrow A = \frac{(j+1)F}{2Gk^3} .$$

Les mobilités s'écrivent suivant leurs définitions, $Y_{Fv}(x_0) = v(x_0)/F$ et $Y_{F\alpha}(x_0) = \alpha(x_0)/F$, de la façon suivante :

$$Y_{Fv}(x=0) = \frac{j+1}{2Gk^3} , \quad (B.8)$$

$$Y_{F\alpha}(x=0) = \frac{(1+j)^2}{2Gk^2} . \quad (B.9)$$

Mobilités venant du moment

Avec une démarche identique nous pouvons écrire les mobilités venant d'un moment et A s'exprime cette fois en fonction du moment fléchissant.

$$F|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = jA \quad \text{et} \quad M|_{x=0} = M \Rightarrow A = \frac{(j+1)M}{2Gk^2} .$$

Finalement nous obtenons, en prenant les grandeurs $Y_{Mv}(x_0) = v(x_0)/M$ et $Y_{M\alpha}(x_0) = \alpha(x_0)/M$, les expressions analytiques des mobilités venant d'un moment pour une poutre semi-infinie :

$$Y_{Mv}(x=0) = \frac{(1+j)^2}{2Gk^2} , \quad (\text{B.10})$$

$$Y_{M\alpha}(x=0) = \frac{j-1}{2Gk} . \quad (\text{B.11})$$

B.2.2 CAS D'UNE POUTRE FINIE

Dans tous les cas de figures rencontrés dans ces calculs, l'extrémité supérieure de la poutre est libre. Cela nous permet d'avoir deux conditions aux limites simples qui sont le moment résultant et la force résultante nuls en cet endroit.

$$M|_{L_x} = 0 \Rightarrow Ae^{-jkL_x} + Be^{jkL_x} = Ce^{-kL_x} + De^{kL_x} \quad (\text{a})$$

$$F|_{L_x} = 0 \Rightarrow jAe^{-jkL_x} - jBe^{jkL_x} = Ce^{-kL_x} - De^{kL_x} \quad (\text{b})$$

Il est dès lors possible d'écrire les relations suivantes pour les inconnues C et D :

$$C = Ae^{-kL_x(j-1)} \frac{1+j}{2} + Be^{kL_x(j+1)} \frac{1-j}{2} \quad (\text{a+b}) ,$$

$$D = Ae^{-kL_x(j+1)} \frac{1-j}{2} + Be^{kL_x(j-1)} \frac{1+j}{2} \quad (\text{a-b}) .$$

Mobilités venant de la force

Dans le cas où l'extrémité inférieure de la poutre est soumise à une force F , son moment fléchissant est nul et la relation entre les constantes B et A se met sous la forme :

$$B = -A \frac{-1 + e^{-jkL_x} (\cosh(kL_x) + j \sinh(kL_x))}{-1 + e^{kL_x} (\cosh(kL_x) - j \sinh(kL_x))} .$$

Pour simplifier, les notations suivantes sont utilisées :

$$B = FH.A \quad C = FH2.A \quad \text{et} \quad D = FH3.A$$

L'inconnue A s'exprime en fonction de $F : F|_{x=0} = F \Rightarrow A = -\frac{j\omega F}{Gk^3(j-jFH-jFH2+FH3)}$,
et les deux mobilités Y_{Fv} et $Y_{F\alpha}$ s'écrivent :

$$Y_{Fv} = \frac{j\omega(1 + FH + FH2 + FH3)}{Gk^3(j - jFH - jFH2 + FH3)} , \quad (B.12)$$

$$Y_{F\alpha} = \frac{j\omega(-j + jFH - FH2 + FH3)}{Gk^2(j - jFH - jFH2 + FH3)} . \quad (B.13)$$

Mobilités venant du moment

Ces grandeurs se calculent de la même façon que pour les mobilités venant de la force. La démarche est identique avec la condition $F|_{x=0} = 0$ et nous pouvons écrire :

$$B = -A \frac{j - e^{-jkLx}(j \cosh(kLx) + \sinh(kLx))}{-j + e^{kLx}(j \cosh(kLx) - \sinh(kLx))} .$$

Comme précédemment les notations suivantes sont utilisées :

$B = MH.A$ $C = MH2.A$ et $D = MH3.A$,

et A s'exprime en fonction du moment fléchissant :

$$M|_{x=0} = M \Rightarrow A = -\frac{j\omega M}{Gk^2(-1 - MH - MH2 + MH3)} .$$

Finalement nous obtenons :

$$Y_{Mv} = \frac{j\omega(1 + MH + MH2 + MH3)}{Gk^2(-1 - MH - MH2 + MH3)} , \quad (B.14)$$

$$Y_{M\alpha} = \frac{j\omega(-j + jMH - MH2 + MH3)}{Gk(-1 - MH - MH2 + MH3)} . \quad (B.15)$$

Annexe C

INTRODUCTION À MEFISSTO

Sommaire

C.1 MEFISSTO 2D	160
C.2 MEFISSTO 2.5D	168

Dans ce mémoire, le principal outil employé pour le calcul de la réponse des systèmes Source et Récepteur à une sollicitation de type force est une méthode mixte éléments finis-éléments de frontière. Celle-ci est implémentée dans le code de calcul Mefissto développé par P. Jean [25, 26]. Cette approche repose sur une description numérique et locale des équations de propagation qui régissent les milieux étudiés.

Ce paragraphe donne une description succincte des équations de propagation locales utilisées, de la méthode des éléments finis, de la méthode des éléments finis de frontière et de leurs couplages. La dernière partie de cette annexe donne un aperçu de la version en 2.5 dimensions de la méthode intégrale et les détails de la procédure utilisée lors des calculs 2.5D de la mobilité.

C.1 MEFISSTO 2D

C.1.1 ÉQUATIONS DE PROPAGATION

En élastodynamique l'équation de propagation est celle de Navier. Pour l'établir, il est nécessaire d'observer la loi de comportement déformation/contrainte propre au milieu. C'est à partir de cette loi que certains principes peuvent être appliqués, en particulier le principe fondamental de la dynamique. En mécanique du solide ces relations sont bien connues, elles sont rappelées dans ce qui suit.

Les déformations pures et les rotations sont reliées aux déplacements locaux par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \varpi_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (\text{C.1})$$

ε est le tenseur des déformations, ϖ celui des rotations, u le déplacement et la notation indicelle est à interpréter comme suit : $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ où la convention d'Einstein est employée.

Le tenseur des déformations et celui des contraintes σ sont reliés entre eux par le tenseur d'élasticité C :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{C.2})$$

Le vecteur contrainte T , appliqué sur une face d'un volume, est défini par :

$$T = \sigma \cdot n \quad (\text{C.3})$$

où n est le vecteur normal à la surface.

Pour un solide élastique linéaire (ni plastique ni visqueux), homogène isotrope, en petites déformations, le tenseur d'élasticité est de la forme :

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (\text{C.4})$$

ce qui permet d'écrire la loi de comportement, ou loi de Hooke généralisée, suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (\text{C.5})$$

Dans un volume Ω , dont la frontière est $\partial\Omega$, on peut écrire localement la relation entre l'accélération de l'objet, les contraintes internes et les forces appliquées :

$$\sigma_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i + \rho f_i = 0 \quad (\text{C.6})$$

Le déplacement u est l'inconnu du problème, ρ la densité volumique et f une distribution volumique de forces. En utilisant les relations entre le tenseur des déformations et celui des contraintes, le tenseur des déformations et les déplacements ainsi que la forme du tenseur d'élasticité isotrope homogène, on obtient l'équation vectorielle suivante :

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \rho \ddot{u}_i + \rho f_i = 0 \quad (\text{C.7})$$

où (λ, μ) sont les coefficients de Lamé.

La forme indiquée ici est générale, elle exprime un champ bidimensionnel lorsque les indices i et j ne peuvent prendre que les valeurs $\{1, 2\}$.

Pour que le problème soit complet il faut introduire les conditions aux limites du domaine élastique étudié. Ces conditions peuvent prendre trois formes distinctes. Les conditions de Neumann permettent d'imposer des contraintes sur une surface, elles sont souvent utilisées lorsque la surface est libre et la contrainte nulle. Les conditions de Dirichlet imposent un déplacement sur une surface ce qui est très utile pour transmettre un mouvement au travers d'une frontière. Enfin les conditions de radiation à l'infini supposent que l'énergie sortant du domaine dans une direction particulière est complètement dissipée et ne revient jamais. Cette condition est nécessaire à la modélisation d'un sol qui est souvent considéré comme étant un milieu semi-infini ou formé de couches dont la dernière est infinie.

De plus, il est également nécessaire de connaître les déplacements et les vitesses dans le domaine considéré à l'état initial, ou état naturel : $u(x, t = 0)$ et $\dot{u}(x, t = 0)$.

La solution du problème, formé par l'équation (C.7) et des conditions aux limites associées peut être obtenue écrivant celle-ci sous la forme de deux équations différentielles découplées, d'ordre deux. Pour ce faire il faut décomposer le vecteur déplacement en utilisant un potentiel vectoriel indivergeant ($\nabla \cdot \psi = 0$) et un potentiel scalaire irrotationnel ($\nabla \wedge \varphi = 0$). De nombreux auteurs détaillent cette démarche qui aboutit aux deux équations [75] :

$$\Delta \psi - k_T^2 \psi = F_T \quad (\text{C.8})$$

$$\Delta \varphi - k_P^2 \varphi = F_P \quad (\text{C.9})$$

où k_P et k_T sont les nombres d'ondes des mouvements dans le sens de la propagation et dans le sens transverse, F_T ainsi que F_P sont les potentiels de la force d'excitation. Ceux-ci sont définis de la même façon que les potentiels de déplacement. Les déplacements sont, après résolution du problème, obtenus à l'aide de la définition des potentiels : $u = \nabla \wedge \psi + \nabla \varphi$.

Pour prendre en compte la viscosité il faut prendre en compte un comportement de type viscoélastique. Cela se traduit par des coefficients de Lamé complexes et dépendant de la fréquence. Ici c'est à travers un coefficient de pertes internes dans le module d'Young que cela est pris en compte. Ce terme est implicite dans le reste de l'exposé.

C.1.2 MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

En mécanique du solide, dès que la géométrie du système étudié devient complexe, peu de problèmes sont analytiquement solvables. Dans ce cas la méthode des éléments finis est très utilisée car elle permet d'approcher la solution en chaque point en discrétisant le problème en suffisamment de points pour que le comportement de l'ensemble de ces derniers donne une réponse proche de la solution exacte.

Pour ce faire il faut décrire le domaine étudié par un ensemble de sous-domaines. La réponse du domaine est alors déterminée grâce à un ensemble de champs qui correspondent chacun à un sous-domaine et sont choisis parmi une famille arbitraire de champs. Dans le vocabulaire dédié, un sous-domaine est appelé maille lorsque seule la géométrie est mentionnée ; lorsque le sous-domaine est muni de sa fonction d'interpolation il est appelé élément. Un élément est constitué par un ensemble de noeuds sur lesquels la valeur du champ, ici le déplacement, est recherchée ; l'ensemble des mailles forme le maillage. À chaque nœud est associé un ensemble de degrés de liberté.

Cette méthode nécessite trois étapes consistant à 1) formuler le problème 2) le discrétiser 3) le résoudre :

- 1) Poser le problème physique sous une forme différentielle (comportement du domaine et conditions aux limites voir paragraphe précédent) et en trouver une formulation variationnelle.
- 2) Mailler la géométrie, le système étant représenté par un ensemble de mailles. Modéliser chaque maille par un élément formé de noeuds sur lesquels les déplacements sont recherchés. Puis, pour chaque élément construire les fonctions d'interpolations, ou fonction de forme, reliant les noeuds entre eux.
- 3) Résoudre le problème variationnel en chacun des noeuds à l'aide des fonctions d'interpolations.

La première étape nous donne le comportement physique du système. En Mécanique il s'agit d'un problème posé sous la forme d'une équation de propagation accompagnée de conditions aux limites d'un système fini. Dans notre cas nous abordons l'élastodynamique par la représentation introduite au paragraphe précédent. Certains éléments proposés dans Mefissto sont dédiés aux structures minces.

À partir de l'équation physique il convient ensuite de définir une formulation

variationnelle. Pour se faire, le résultat important est donné par :

$$\int_{\Omega} \phi(x) h(x) dx = 0 \quad \forall \phi(x) \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{C.10})$$

où $\phi(x)$ est une fonction test, appelée également fonction de pondération, et $h(x)$ représente l'équation prenant en compte le comportement du problème physique à résoudre. Dans le cas général, on ne vérifie pas cette égalité pour tous les ϕ possibles mais pour un ensemble de fonctions ϕ qui sont exprimées à partir des valeurs du champ, recherchées en chaque nœud. Il suffit de prendre un nombre de fonctions tests égal au nombre de nœuds de la modélisation.

Ces fonctions doivent toutefois être admissibles, c'est à dire qu'elles respectent les conditions aux limites du problème et doivent être judicieusement choisies pour que la forme variationnelle soit scalaire sur chacun des nœuds.

La forme variationnelle, appelée aussi formulation faible, peut se déduire de principes physiques comme le théorème des puissances virtuelles pour lequel les fonctions ϕ sont les champs des vitesses virtuelles. Dans Mefissto c'est la principe d'Hamilton qui est utilisé.

Ce dernier utilise le Lagrangien L qui donne une relation entre l'énergie cinétique E_c , l'énergie potentielle E_p et le travail des forces extérieures W_p exercées sur le domaine.

$$L = E_c - E_p + W_p$$

Ces grandeurs sont relativement faciles à décrire sur un volume élémentaire V_e , dont la surface est notée ∂V_e , avec les grandeurs disponibles :

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho \dot{u}^T \dot{u} dV_e \quad dE_p = \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma dV_e \quad dW_p = u^T F_e d\partial V_e \quad (\text{C.11})$$

Elles s'écrivent, dans un sous domaine, de la façon suivante :

$$E_c = \int_{V_e} \frac{1}{2} \rho \dot{u}^T \dot{u} dV_e = \frac{1}{2} \dot{u}^T [M] \dot{u} \quad (\text{C.12})$$

$$E_p = \int_{V_e} \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon dV_e = u^T [K] u \quad (\text{C.13})$$

$$W_p = \int_{\partial V_e} u^T F_e dV_e = (F) \quad (\text{C.14})$$

Le principe d'Hamilton ou principe de moindre action traduit que le Lagrangien d'un système entre deux instants est extrême : "L'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'Être suprême : lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible." (Maupertuis, 1744).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (\text{C.15})$$

En intégrant par partie l'énergie cinétique on obtient :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \left[u^T [M] \dot{u} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} -u^T [M] \ddot{u} - u^T [K] u + u^T [F] dt \right] \quad (C.16)$$

où $[M]$ est la matrice d'inertie du domaine étudié, $[K]$ celle de sa rigidité et (F) le vecteur des contraintes extérieures appliquées à la surface du domaine.

Or le problème ne présente aucun déplacement dans son état au repos ($t \leq 0$), ce qui implique que $u(t_1) = \dot{u}(t_1) = 0$ et donc que le premier terme du second membre est nul. Le problème revient alors à annuler l'expression dans l'intégrale du second membre ce qui s'écrit pour un problème harmonique :

$$(-\omega^2 [M] + [K])(u) = [M_{FEM}](u) = (F) \quad (C.17)$$

La formulation variationnelle est dans la pratique, établie pour chaque éléments. Les vecteurs inconnus u_e ont autant de composantes que ce que l'élément considéré possède de noeuds. Les matrices $[M]$ et $[K]$ sont établies à l'aide des fonctions d'interpolations, propres à l'élément, dont nous proposons maintenant une rapide présentation.

Dans Mefissto, le maillage est généré avec les coordonnées des sommets de la surface choisie et du nombre d'éléments de référence voulu. Ces éléments sont rectangulaires et disposent de quatre à neuf noeuds (Figure C.1).

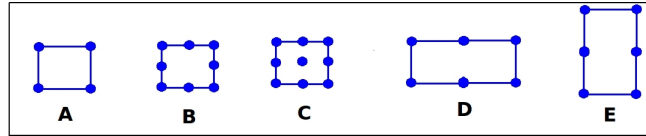


FIGURE C.1 – Représentation des éléments finis disponibles dans Mefissto : A élément carré à quatre noeuds, B élément carré à 8 noeuds, C élément carré à 9 noeuds, D élément horizontal de coque à 6 noeuds, E élément vertical de coque à 6 noeuds.

Chaque élément dispose de sa fonction d'interpolation $f_I(x)$ qui représente le champ local que doit résoudre l'équation locale. Ces fonctions sont des polynômes dont la variable est la coordonnée géométrique du nœud considéré ; ses coefficients sont les valeurs du champ local sur chaque nœud de l'élément. Chacune de ces fonctions donne la valeur du champ local en chaque nœud en fonction des valeurs aux autres noeuds de l'élément considéré.

$$f_I(x) = \sum_{i=1}^{N_e} P(x_i, f(x_i), x)$$

$$f_I(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in [1, N_e]$$

En pratique, pour gagner du temps ces fonctions sont pré-calculées et simplement adaptées à la taille demandée par l'utilisateur lors d'une simulation. A noter que ces fonctions sont soumises à des contraintes et notamment, au minimum, la

continuité $\mathcal{C}^0$ du champ local (continuité des déplacements) entre les noeuds d'un même élément ; elles doivent également respecter cette condition entre les noeuds communs des éléments proches.

La forme variationnelle présentée plus haut peut maintenant s'appliquer pour chaque nœud. Il en résulte un système d'équations algébriques linéaires dont les inconnues sont les valeurs des champs locaux en chaque nœud du maillage. Ces équations sont rassemblées sous la forme d'un problème matriciel. De bons conditionnements des fonctions d'interpolation permettent à ce système de pouvoir être représenté par une matrice à bande symétrique facile à inverser. L'inversion de cette matrice permet d'accéder simplement aux inconnues du problème entier.

Dans la grande majorité des simulations présentées dans ce document, ce sont les éléments carrés à neuf noeuds qui sont utilisés.

C.1.3 MÉTHODE DES ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE

La méthode des éléments de frontière est basée sur la représentation intégrale du champ des déplacements dans un volume. Comme la FEM, elle utilise une discrétisation de la géométrie étudiée mais ne modélise que la surface du domaine. Cette discrétisation se fait également avec des éléments de référence dans lesquels seuls quelques points sont modélisés et interconnectés à l'aide de fonctions d'interpolations.

La représentation intégrale d'un problème consiste à reformuler un problème donné par des équations différentielles dans un volume par des équations décrites uniquement sur la frontière du volume étudié. On peut écrire le problème de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) = F & \text{dans } \Omega \\ \mathcal{C}(u) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ sont des opérateurs représentant respectivement l'équation à résoudre dans le milieu et les conditions aux limites du problème à respecter. De plus, $\mathcal{L}$ est un opérateur qui contient une dérivée par rapport à l'espace ce qui, dans la suite le problème, permet de l'appliquer sur les frontières.

Une étape importante de la méthode consiste à utiliser le principe de réciprocité, à savoir : pour deux états du domaine représentés par $(\mathcal{L}(u_1), \mathcal{C}(u_1), F_1)$ et $(\mathcal{L}(u_2), \mathcal{C}(u_2), F_2)$, on peut obtenir l'égalité suivante :

$$u_2 F_1 - u_1 F_2 = u_2 \mathcal{L}(u_1) - u_1 \mathcal{L}(u_2) \quad (\text{C.19})$$

Cette représentation locale est toujours vraie si elle est intégrée sur le volume du domaine entier. Or l'opérateur $\mathcal{L}$ possède une dérivée par rapport à l'espace, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Gauss ou le théorème de Stokes pour

remplacer une partie de l'intégrale de volume par une intégrale de surface.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_2 F_1 - u_1 F_2) d\Omega &= \int_{\Omega} (u_2 \mathcal{L}(u_1) - u_1 \mathcal{L}(u_2)) d\Omega \\ \int_{\Omega} (u_2 F_1 - u_1 F_2) d\Omega &= \int_{\partial\Omega} (u_2 \mathcal{L}^I(u_1) n_{\partial\Omega} - u_1 \mathcal{L}^I(u_2) n_{\partial\Omega}) d\Omega \end{aligned} \quad (C.20)$$

où $\mathcal{L}^I$ et $n_{\partial\Omega}$ sont respectivement l'opérateur $\mathcal{L}$ intégré sur une variable d'espace et le vecteur directeur de la normale sortante sur la surface $\partial\Omega$.

La démarche consiste ensuite à considérer que l'un des deux états du système est connu, l'état $(\mathcal{L}(u_1), \mathcal{C}(u_1), F_1)$ par exemple, et l'autre à déterminer. Pour ce faire, nous avons besoin d'une solution de référence appelée également fonction de Green, solution fondamentale ou noyau. Notée $G(x, x_0, t)$, elle donne le comportement au point x du milieu pour une excitation ponctuelle appliquée en un point x_0 . La force associée s'écrit : $F_1 = \delta(x - x_0) e_{xi}$ ce qui permet de sortir l'inconnue de l'intégrale de volume :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u_2 \delta(x - x_0) - u_1 F_2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} [u_2 \mathcal{L}^I(u_1) n_{\partial\Omega} - u_1 \mathcal{L}^I(u_2) n_{\partial\Omega}] d\Omega \\ u_2 &= \int_{\partial\Omega} [u_2 T_1 - u_1 T_2] d\Omega + \int_{\Omega} u_1 F_2 d\Omega \end{aligned} \quad (C.21)$$

Or, pour un problème élastodynamique les forces F_2 sont une donnée du problème et le terme $T_2 = \mathcal{L}^I(u_2) n_{\partial\Omega}$ représente les contraintes qui peuvent s'écrire en fonction des déplacements inconnus $T_2 = [C][B]u_2 n_{\partial\Omega}$ avec $\varepsilon_2 = [B]u_2$. Tous les autres termes sont connus car ils découlent de l'état connu du système traduit par la fonction de Green $G(x, x_0, \omega)$. L'équation précédente peut alors être résolue. Néanmoins pour un demi-espace élastique isotrope homogène la fonction de Green présente des singularités en $1/|x - x_0|$ pour les déplacements et en $1/|x - x_0|^2$ pour les contraintes [94]. La première intégrale de l'équation précédente est délicate à effectuer, dans Mefissto cette difficulté est résolue par la méthode des valeurs principales de Cauchy.

Comme pour la méthode des éléments finis, la formulation intégrale débouche sur une représentation matricielle qui traduit un système d'équations algébriques :

$$[M_{BEM}](u, t) = (F) \quad (C.22)$$

dans lequel la matrice $[M_{BEM}]$ est évaluée à l'aide des fonctions d'interpolations des éléments de frontière.

Les éléments de frontières sont construits de façon similaire aux éléments finis. Dans Mefissto l'utilisateur a la choix entre deux sortes d'éléments linéiques à un ou deux noeuds. Ceux-ci sont représentés sur la figure ci-dessous.



FIGURE C.2 – Représentation des éléments de frontière linéique disponibles dans Mefissto : A élément à 1 noeud, B élément à deux noeuds

On notera que l'élément constant (A) est plus facile à implémenter ; certaines singularités, étant antisymétriques par rapport au point central, s'annulent sur l'élément.

C.1.4 COUPLAGE ÉLÉMENTS FINIS - ÉLÉMENTS DE FRONTIÈRE

Lorsque, dans le même maillage, l'utilisateur fait coexister des éléments finis et des éléments finis de frontière, les deux types de domaines sont rattachés par des conditions de continuité sur les déplacements/vitesses et sur les efforts/contraintes au niveau de leurs noeuds communs. Dans la pratique, la matrice du problème entier est construite avec celles des différents domaines déclarés par l'utilisateur. La procédure de couplage entre les deux approches numériques est commune à Jean [25] et à Dangla [11]. Ce paragraphe illustre le couplage entre les deux types d'éléments (FE et BE) pour une situation similaire à celle présentée sur la Figure C.3.

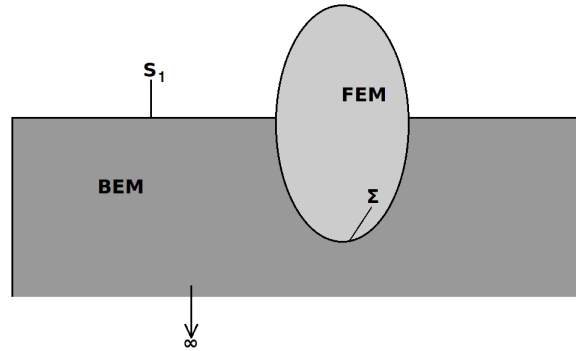


FIGURE C.3 – Situation où des domaines maillés en éléments finis ou en éléments de frontières coexistent.

La méthode des éléments finis conduit à un système d'équations algébriques représenté par un problème matriciel. Dans ce dernier l'ordre des équations n'a pas d'importance et les relations relatives au noeuds de la surface du domaine maillée peuvent être regroupées. Ce faisant, le système peut être schématisé par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{0\Sigma} \\ K_{\Sigma 0} & K_{\Sigma\Sigma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_\Sigma \end{pmatrix} \quad (C.23)$$

où les indices Σ et 0 indiquent respectivement si le noeud se situe sur sa surface couplée avec les éléments de frontière ou ailleurs. Les forces exercées sur les noeuds de la frontière Σ peuvent être exprimées en fonction des contraintes appliquées sur ces noeuds t_Σ par : $f_\Sigma = Pt_\Sigma$.

De façon similaire, la méthode des éléments de frontière aboutit à une formulation synthétique de la forme :

$$\begin{bmatrix} T_1 & -G_1 \\ T_\Sigma & G_\Sigma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_\Sigma \end{pmatrix} \quad (C.24)$$

dans laquelle les indices 1 et Σ expriment l'appartenance du nœud d'éléments de frontière à la surface libre du sol (S_1) ou à celle commune avec la structure maillée en éléments finis.

En éliminant les inconnues u_0 de l'équation (C.23) et en exprimant la continuité des vitesses et des contraintes sur la surface Σ il apparait le système global suivant :

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{\Sigma} & -G_{\Sigma} \\ T_{\Sigma} & T_{22} & G_{22} \\ 0 & K^* & -P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

où $K^* = K_{\Sigma\Sigma} - K_{\Sigma 0} K_{00}^{-1} K_{0\Sigma}$ et $F^* = -K_{\Sigma 0} K_{00}^{-1} F_0$.

Avec cette méthode les déplacements dans le domaine des éléments finis doivent être recalculés à l'aide de l'équation (C.23) car ceux-ci ne sont, après résolution du système (C.25), encore déterminés que sur la surface Σ .

C.2 MEFISSTO 2.5D

Dans certain cas, la troisième dimension est primordiale pour simuler correctement le phénomène étudié. Cependant, pour des systèmes de la taille d'un bâtiment, modélisés avec le sol environnant, le coût numérique d'une étude en trois dimensions est déraisonnable. Dans notre cas, il est possible d'aborder le problème en considérant que la géométrie selon l'une des trois directions de l'espace ne varie pas. Le caractère linéique des voies de chemins de fer et le fait que notre attention se porte sur des bâtiments longeant les voies nous permettent de faire cette approximation. Sous cette hypothèse, le problème peut être ramené à un problème à deux dimensions par l'intermédiaire d'une transformée de Fourier spatiale, c'est cette approche géométrique que l'on dénomme ici 2.5D. Les différentes étapes permettant d'écrire le problème sont données par Tadeu [58], par Yang et Hung [91] ou par Jean [26]. A ce jour, seule la méthode des éléments de frontière a été développée en 2.5D dans Mefisst. L'équivalent pour les éléments finis a été développé par plusieurs auteurs sous le nom d'éléments spectraux [12].

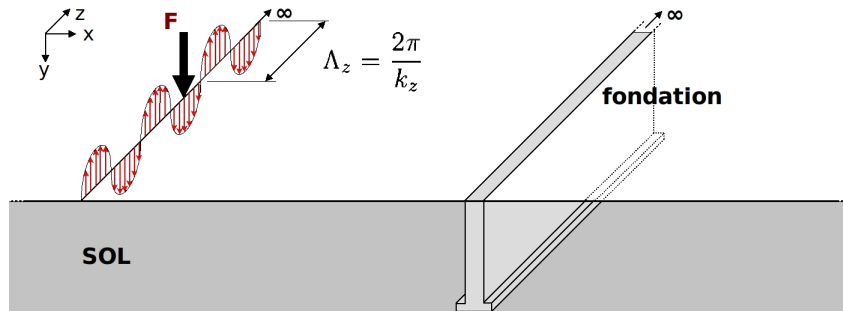


FIGURE C.4 – Schéma d'un problème posé en 2.5D.

A titre d'exemple, considérons un système, représenté sur la Figure C.4, excité par une force ponctuelle tel que $F = F_0\delta(x)\delta(y)\delta(z)$. La dimension dans laquelle la géométrie est invariante est portée par le vecteur e_z . Les équations (C.8) et (C.9) s'écrivent dans ce cas :

$$\Delta u_p + k_p^2 u_p = \frac{1}{4\pi r \rho c_p^2} \quad (\text{C.26})$$

$$\Delta u_s + k_s^2 u_s = \frac{1}{4\pi r \rho c_s^2} \quad (\text{C.27})$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En appliquant la transformée de Fourier spatiale sur la dimension z il vient :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_p}{\partial y^2} + k_\alpha^2 \hat{u}_p = \frac{-jH_0^{(2)}(-jkr)}{4\pi R \rho c_p^2} \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial y^2} + k_\beta^2 \hat{u}_s = \frac{-jH_0^{(2)}(-jkr)}{4\pi R \rho c_s^2} \quad (\text{C.29})$$

où $k_\alpha = \sqrt{k_p^2 - k^2}$, $k_\beta = \sqrt{k_s^2 - k^2}$ et $H_0^{(2)}$ est la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre zéro. $\hat{u}_p$ et $\hat{u}_s$ sont les transformées de Fourier des grandeurs u_p et u_s .

Les solutions de ces deux équations sont composées chacune de trois termes qui peuvent, en prenant comme nuls les termes de l'onde retour et en égalisant les contraintes à l'origine du repère global, se mettre sous la forme suivante :

$$\hat{u}_p = \frac{j}{4\rho\omega^2} [H_0^{(2)}(k_\alpha r) - H_0^{(2)}(-jkr)] \quad (\text{C.30})$$

$$\hat{u}_s = \frac{j}{4\rho\omega^2} [H_0^{(2)}(k_\beta r) - H_0^{(2)}(-jkr)] \quad (\text{C.31})$$

La fonction de Green du problème peut alors s'établir dans l'espace des nombres d'ondes à l'aide de la relation qui suit.

$$G_{ij}(x, y, kz, \omega) = \frac{\partial^2 (\hat{u}_p - \hat{u}_s)}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} \hat{\Delta} \hat{u}_s \quad (\text{C.32})$$

Le calcul se trouve ainsi décomposé en plusieurs calculs 2D donnant chacun la réponse voulue pour une composante de l'espace des nombres d'ondes k . La réponse finale s'obtient par la transformée inverse appliquée aux résultats des simulations 2D, fonctions de k .

C.2.1 DÉCOMPOSITION DE L'INTERFACE SOURCE-RÉCEPTEUR

Contrairement aux cas en deux dimensions, ici l'interface Source-Récepteur n'est plus une ligne ou un point mais une surface infinie (Figure C.5). Pour conserver la vision ponctuelle nécessaire à la méthode des mobilités, celle-ci doit être décomposée en surfaces élémentaires. Pour ce faire nous utilisons toujours les

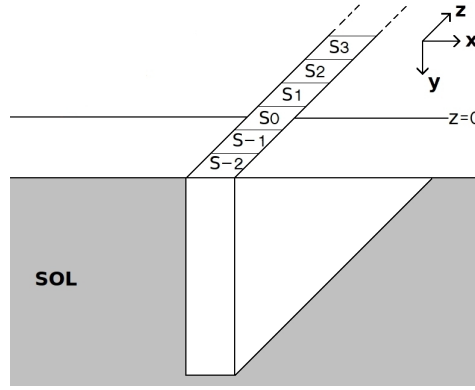


FIGURE C.5 – Représentation des zones de contact d’une fondation en 2.5D.

mêmes critères, à savoir que les dimensions de la surface doivent être inférieures à la plus petite longueur d’onde du problème et sa déformée doit correspondre à celle d’une surface rigide.

Chacune de ces surfaces élémentaires définit une zone de contact. Remarquons que la structure étant infinie dans la direction z elle possède un nombre infini de zones de contact.

Après cette brève description théorique, la suite de ce paragraphe explicite les détails de la procédure utilisée pour les calculs en 2.5 dimensions des mobilités.

C.2.2 NOTE SUR LA MOYENNE

Comme dans le cas en deux dimensions, nous ne retenons qu’une seule valeur par zone de contact. Celle-ci doit donc être une moyenne sur la surface élémentaire introduite ci-avant. Pour fixer les notations nous définirons la surface élémentaire par $x \in [x_0, x_1]$ et $z \in [z_0, z_1]$.

Dans l’absolu, cette moyenne peut être définie de deux façons différentes :

- Soit la moyenne est faite dans l’espace des nombres d’onde :

$$\langle v(x, y, z) \rangle = \int \langle \hat{v}(x, y, k) \rangle e^{jkz_0} dk$$

- Soit la moyenne est faite dans l’espace réel :

$$\langle v(x, y, z) \rangle = \langle \int \hat{v}(x, y, k) e^{jkz_0} dk \rangle$$

Or la transformée de Fourier Spatiale inverse se fait ici numériquement par la méthode des trapèzes :

$$v(x, y, z) = \int \hat{v}(x, y, k) e^{jkz} dk \approx \frac{\delta k}{2} \sum_{l=1}^{N_k-1} (\hat{v}(x, y, k_l) e^{jk_l z} + \hat{v}(x, y, k_{l+1}) e^{jk_{l+1} z}) \quad (C.33)$$

Comme l'opérateur somme peut s'intervertir :

$$\sum_{l=1}^{N_k-1} \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\hat{v}(x_i, y_i, k_l)}{N_e} e^{jk_l z_i} = \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{N_k-1} \frac{\hat{v}(x_i, y_i, k_l)}{N_e} e^{jk_l z_i}$$

où N_e est le nombre de points contenus par la surface élémentaire, les deux formes de moyennes sont équivalentes. Pour clarifier notre intention nous cherchons à établir la première forme de moyenne, celle faite dans l'espace des nombres d'ondes.

C.2.3 VITESSE LIBRE

Pour calculer la vitesse libre on effectue une simulation numérique dans laquelle l'excitation est appliquée à la surface du sol à une certaine distance de la fondation. On ne retient qu'une valeur moyenne par zone de contact. Pour obtenir cette moyenne il faut sommer les vitesses en chaque point de la zone de contact.

La moyenne sur les points dans le plan (x, y) se fait comme dans le cas en deux dimensions :

$$\langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_{xy} = \frac{1}{N_{xy}} \sum_{i=1}^{N_{xy}} \hat{v}_i(x_i, y_i, k) \quad (\text{C.34})$$

Il faut ensuite faire la moyenne des $\langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_{xy}$ sur les positions $z \in [z_0, z_1]$ espacées régulièrement tout les δz . Pour cela on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} v_L(x, y, z_0) &= \int \hat{v}_L(x, y, k) e^{jkz_0} dk \\ v_L(x, y, z_0 + \delta z) &= \int \hat{v}_L(x, y, k) e^{jkz_0 + \delta z} dk = \int \hat{v}_{L\delta z}(x, y, k) e^{jkz_0} dk \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

où

$$\hat{v}_{L\delta z}(x, y, k) = \hat{v}_L(x, y, k) e^{jk\delta z}$$

La moyenne sur z s'écrit :

$$\langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_z = \frac{\hat{v}_L(x, y, k)}{N_z} \sum_{j=1}^{N_z} e^{jkz_j} = \frac{\hat{v}_L(x, y, k)}{N_z} \sum_{j=1}^{N_z} e^{jk(z_0 + j\delta z)} \quad (\text{C.36})$$

Finalement, pour la zone de contact, notée 0, située dans le plan de l'excitation nous avons :

$$\langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_0 = \frac{1}{N_{xy} N_z} \sum_{i=1}^{N_{xy}} \sum_{j=1}^{N_z} \hat{v}_L(x_i, y_i, k) e^{jk(z_0 + j\delta z)} \quad (\text{C.37})$$

COMPOSANTES DE ROTATION

Pour les rotations α_z et α_y qui peuvent être calculées avec les translations dans le plan (x, y) , la procédure précédente s'applique sans problème. La seule différence est que ces rotations sont relatives aux segments entre deux points ; initialement la moyenne spatiale se fait sur $N'_{xy} = N_{xy} - 1$ et $N'_z = N_z$ nombre de points. Nous verrons plus tard que nous nous ramenons au cas où le nombre de points considérés est identique à celui des translations.

D'autre part, comme pour le cas en deux dimensions, le calcul des rotations se base sur des considérations géométriques et sont exprimées par les relations suivantes :

$$\hat{\alpha}_{Ly}(x, y, k) = j\omega \arctan \left(\frac{\hat{v}_{Lz}(x, y, k) - \hat{v}_{Lz}(x + \delta x, y, k)}{j\omega \delta x + \hat{v}_{Lx}(x, y, k) - \hat{v}_{Lx}(x + \delta x, y, k)} \right) \quad (C.38)$$

$$\hat{\alpha}_{Lz}(x, y, k) = j\omega \arctan \left(\frac{\hat{v}_{Ly}(x, y, k) - \hat{v}_{Ly}(x + \delta x, y, k)}{j\omega \delta x + \hat{v}_{Lx}(x, y, k) - \hat{v}_{Lx}(x + \delta x, y, k)} \right) \quad (C.39)$$

Pour la composante α_x on a $N'_{xy} = N_{xy}$ et $N'_z = N_z - 1$ nombre de points dans la moyenne spatiale. Puisque ici la rotation est autour de l'axe x nous ne pouvons plus déduire cette grandeur à l'aide des translations dans le plan (x, y) . Pour la calculer nous avons alors recours à la forme que devraient avoir les exponentielles en ces points lors de la transformée inverse. Les vitesses aux deux points nécessaires pour calculer la rotation sont différentes d'un facteur $e^{jk\delta z}$, d'où :

$$\hat{\alpha}_{Lx}(x, y, k)|_{(z_0+i\delta z)} = \omega \arctan \left(\frac{\hat{v}_{Ly}(x, y, k)e^{jkz_0}(e^{jki\delta z} - e^{jk(i+1)\delta z})}{\omega \delta z + \hat{v}_{Lz}(x, y, k)e^{jkz_0}(e^{jki\delta z} - e^{jk(i+1)\delta z})} \right) \quad (C.40)$$

Dans ces conditions les moyennes sur les rotations sont différentes de celle de translation. Or cela n'est pas significatif de la situation que nous souhaitons déterminer, à savoir une rotation pour chaque point de la surface élémentaire. Pour cela, en remarquant que, d'après la définition de la zone de contact, les rotations doivent être constantes sur toute la surface, nous prenons la valeur manquante dans la moyenne égale à la dernière valeur obtenue. En d'autres termes nous attribuons à chaque point la rotation du segment dont il est le point de départ et au dernier point la valeur de la rotation du segment qui le précède. Cette procédure numérique n'induit pas d'erreur tant que les conditions de zone de contact sont respectées.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{Lx}(x, y, k)|_{(z_0+i\delta z)} &= \omega \arctan \left(\frac{\hat{v}_{Ly}(x, y, k)e^{jkz_0}(e^{jki\delta z} - e^{jk(i+1)\delta z})}{\omega \delta z + \hat{v}_{Lz}(x, y, k)e^{jkz_0}(e^{-jki\delta z} - e^{-jk(i+1)\delta z})} \right) \\ &\quad \text{si } z_0 + (i+1)\delta z \leq z_1 \\ \hat{\alpha}_{Lx}(x, y, k)|_{(z_1)} &= \omega \arctan \left(\frac{\hat{v}_{Ly}(x, y, k)e^{jkz_0}(e^{jk(i-1)\delta z} - e^{jki\delta z})}{\omega \delta z + \hat{v}_{Lz}(x, y, k)e^{jkz_0}(e^{jk(i-1)\delta z} - e^{jki\delta z})} \right) \\ &\quad \text{si } z_0 + i\delta z = z_1 \end{aligned} \quad (C.41)$$

La moyenne sur les termes de rotation est dans ce cas similaire à celle sur les termes de translation ($N'_{xy} = N_{xy}$ et $N'_z = N_z$ pour toutes les rotations).

VITESSE LIBRE COMPLÈTE

Pour un point de contact il est possible de résumer les considérations précédentes en exprimant la vitesse libre de la zone de contact 0 ainsi :

$$\langle \hat{v}_L(x_i, y_i, k) \rangle_0 = \frac{1}{N_{xy}N_z} \sum_{i=1}^{N_{xy}} \sum_{j=1}^{N_z} \begin{pmatrix} \hat{v}_{Lx}(x_i, y_i, k) \\ \hat{v}_{Ly}(x_i, y_i, k) \\ \hat{v}_{Lz}(x_i, y_i, k) \\ \hat{\alpha}_{Lz}(x_i, y_i, k) \\ \hat{\alpha}_{Ly}(x_i, y_i, k) \\ \hat{\alpha}_{Lx}(x_i, y_i, k) \end{pmatrix} e^{jk(z_0 + j\delta z)} \quad (C.42)$$

La vitesse libre complète s'écrit en fonction du nombre de zones de contact choisi. Soit $N + 1$ zones de contact prises entre la zone 0 et la zone N , la vitesse libre s'écrit sous la forme suivante :

$$\langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle = \begin{pmatrix} \langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_0 \\ \vdots \\ \langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_N \end{pmatrix} \quad (C.43)$$

dans laquelle la vitesse libre de chacune des zones de contact s'écrit :

$$\langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_n = \langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_0 e^{jkn(z_1 - z_0)}$$

Dans la pratique la vitesse de contact doit être définie sur un nombre de zones de contact similaire en amont et en aval de la zone de contact 0, soit $2N + 1$ zones au total.

$$\langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle = \begin{pmatrix} \langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_{-N} \\ \vdots \\ \langle \hat{v}_L(x, y, k) \rangle_N \end{pmatrix} \quad (C.44)$$

C.2.4 COMPOSANTES DE LA MOBILITÉ SUR UNE ZDC

Pour les composantes de la mobilité les excitations sont des distributions de forces dont la forme dépend de la composante étudiée. Dans le cas le plus simple elle est uniforme sur toute la zone de contact et l'amplitude de chaque force est égale à l'inverse du nombre de points de la surface élémentaire ($N_{tt} = N_{xy}N_z = N_{xy}^2$). Or nous ne pouvons imposer une force que sur le plan situé en $z = 0$. Il convient donc de prendre en compte une moyenne sensiblement différente à celle de la vitesse libre.

La moyenne sur le plan (x, y) est la même que précédemment. Par contre la moyenne sur l'axe z doit tenir compte de ce que les forces sont également distribuées selon l'axe z .

Le nombre de zones de contact séparant le point d'observation et le point d'excitation multiplié par la dimension selon z des zones de contact $D = N_{zdc}(z_1 - z_0)$ donne la distance entre le plan où la distribution de forces est exercée et le plan d'observation. Cette distance est considérée dans la différentiation des zones de contact et n'intervient pas dans le calcul de la moyenne. La Figure C.6 représente la situation que nous voulons modéliser.

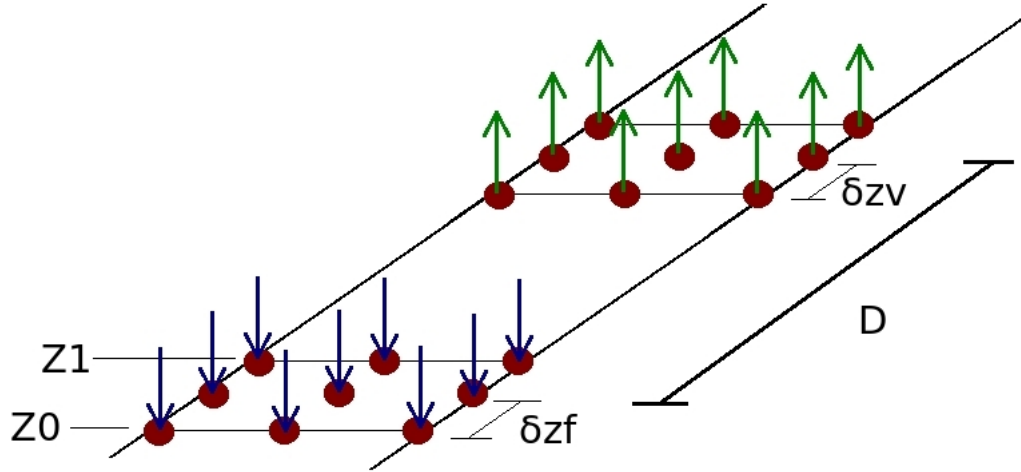


FIGURE C.6 – Schéma de la situation à modéliser

Il faut faire la moyenne des résultantes de la vitesse, pour chaque z appartenant à la zone de contact observée ($z_{vi} \in S_i$), et de même pour chaque position de la distribution de force ($z_{fj} \in S_j$). Si on note $z_i = z_{vi} - D$ et $z_j = z_{fj}$ on obtient :

$$\langle \hat{v}(x, y, k) \rangle_z = \frac{\hat{v}(x, y, k)}{N_z} \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{i=1}^{N_z} e^{jk(z_i - z_j)} \quad (C.45)$$

où $N_z = N_f = \frac{z_1 - z_0}{\delta z}$

Or, la distance $z_{xi} - z_{fi}$ est soit nulle, soit compensée par une situation symétrique. Pour l'observer il suffit de remarquer que :

$$\sum_i \sum_j (z_i - z_j) = \sum_i \sum_j (z_o + i\delta z) - (z_o + j\delta z) = \sum_i \sum_j (i - j)\delta z \quad (C.46)$$

Or les indices i et j sont tout deux compris dans l'intervalle $[0, \frac{z_1 - z_0}{\delta s}]$ et prennent les mêmes valeurs, ce qui permet d'affirmer que la somme précédente est nulle.

En d'autres termes la moyenne sur z est équivalente à la valeur centrale ($z = (z_1 - z_0)/2$) si, dès la simulation numérique, l'amplitude des forces exercées prend en compte le nombre total de points de la zone de contact.

COMPOSANTES DE ROTATION

La moyenne spatiale sur la surface élémentaire est, comme pour les composantes de translation, donnée par une double somme relative aux points d'observations et aux coordonnées z sur lesquelles est appliquée la distribution de forces.

$$\langle \hat{\alpha}(x, y, k) \rangle_z = \frac{1}{N_z} \sum_{j=1}^{N_f} \sum_{i=1}^{N_z} \hat{\alpha}(x, y, k) e^{jk(z_i - z_j)} \quad (\text{C.47})$$

COMPOSANTES VENANT D'UN MOMENT

Les moments M_y et M_z peuvent directement s'appliquer dans le plan (x, y) . Dans ce cas la procédure pour obtenir la moyenne ne change pas.

Le moment M_x est appliqué par une distribution de forces selon z ce qui se traduit par une pondération dans la somme de la moyenne $\langle \hat{v} \rangle_z$.

$$\langle \hat{v}(x, y, k) \rangle_z = \frac{\hat{v}(x, y, k)}{N_f N_z} \sum_{j=1}^{N_f} W_j \sum_{i=1}^{N_z} e^{jk(z_i - z_j)} \quad (\text{C.48})$$

où W est fonction du nombre de points et de la dimension selon z de la surface élémentaire. Dans ce cas nous ne tenons pas compte de la position de la distribution de forces sur l'axe z car celle-ci prend en compte toute la profondeur de la surface élémentaire, mais nous créons par cette somme pondérée le moment lui même.

On peut imaginer que la somme sur les N_f doit se faire dans ce cas sur les positions dans le plan (x, y) , mais cela est rendu inutile si la simulation de départ utilise une distribution uniforme similaire à celle utilisée pour le calcul des composantes créées par une force horizontale.

Toute la procédure décrite jusqu'à présent pourrait paraître superflue si les composantes provenant d'un moment M_x n'étaient pas requises. C'est en particulier pour ces composantes, ainsi que pour calculer les rotations autour de l'axe x que nous avons besoin de différencier, dans l'espace des nombres d'ondes, différentes positions sur l'axe z .

C.2.5 MOBILITÉ COMPLÈTE

Lorsque seule la zone de contact située en $z = 0$ est considérée, la mobilité comporte un nombre de termes égal au carré du nombre de degrés de liberté, soit trente six composantes lorsque les rotations sont prises en compte.

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{v}_x/\hat{F}_x & \hat{v}_x/\hat{F}_y & \hat{v}_x/\hat{F}_z & \hat{v}_x/\hat{M}_z & \hat{v}_x/\hat{M}_y & \hat{v}_x/\hat{M}_x \\ \hat{v}_y/\hat{F}_x & \hat{v}_y/\hat{F}_y & \hat{v}_y/\hat{F}_z & \hat{v}_y/\hat{M}_z & \hat{v}_y/\hat{M}_y & \hat{v}_y/\hat{M}_x \\ \hat{v}_z/\hat{F}_x & \hat{v}_z/\hat{F}_y & \hat{v}_z/\hat{F}_z & \hat{v}_z/\hat{M}_z & \hat{v}_z/\hat{M}_y & \hat{v}_z/\hat{M}_x \\ \hat{v}_{\alpha_z}/\hat{F}_x & \hat{v}_{\alpha_z}/\hat{F}_y & \hat{v}_{\alpha_z}/\hat{F}_z & \hat{v}_{\alpha_z}/\hat{M}_z & \hat{v}_{\alpha_z}/\hat{M}_y & \hat{v}_{\alpha_z}/\hat{M}_x \\ \hat{v}_{\alpha_y}/\hat{F}_x & \hat{v}_{\alpha_y}/\hat{F}_y & \hat{v}_{\alpha_y}/\hat{F}_z & \hat{v}_{\alpha_y}/\hat{M}_z & \hat{v}_{\alpha_y}/\hat{M}_y & \hat{v}_{\alpha_y}/\hat{M}_x \\ \hat{v}_{\alpha_x}/\hat{F}_x & \hat{v}_{\alpha_x}/\hat{F}_y & \hat{v}_{\alpha_x}/\hat{F}_z & \hat{v}_{\alpha_x}/\hat{M}_z & \hat{v}_{\alpha_x}/\hat{M}_y & \hat{v}_{\alpha_x}/\hat{M}_x \end{bmatrix} \quad (\text{C.49})$$

Comme précédemment cette matrice doit être symétrique et causale.

Dans le cas où plusieurs zones de contact sont considérées cette matrice devient :

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{Y}^{S_0 S_0} & \dots & \hat{Y}^{S_0 S_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Y}^{S_N S_0} & \dots & \hat{Y}^{S_N S_N} \end{bmatrix} \quad (C.50)$$

dans laquelle toutes les sous-matrices $\hat{Y}^{S_i S_j}$ ont la forme de la matrice (C.49). Le nombre total d'éléments est donc de $(6N \times 6N)$. Néanmoins on peut affirmer, grâce à la géométrie infinie dans la direction z que toutes les sous matrices $\hat{Y}^{S_i S_i}$ sont identiques. De plus les sous-matrices $\hat{Y}^{S_i S_j}$ peuvent être évaluée à partir de $\hat{Y}^{S_i S_i}$ en remarquant que seule la distance entre le zone d'excitation et la zone d'observation est modifiée. Toutes leurs composantes sont alors identiques à un facteur $e^{jk(j-i)(z_1-z_0)}$ près. En d'autre termes la matrice complète peut s'écrire :

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{Y}^{S_0 S_0} & \dots & \hat{Y}^{S_0 S_0} e^{jkN(z_1-z_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Y}^{S_0 S_0} e^{-jkN(z_1-z_0)} & \dots & \hat{Y}^{S_0 S_0} \end{bmatrix} \quad (C.51)$$

Il est alors très facile de définir la mobilité pour un nombre quelconque de zdc.

C.2.6 VITESSE ET FORCE DE CONTACT

Avec la vitesse libre et les mobilités Source et Récepteur définies plus haut, la vitesse de contact dans l'espace des nombres d'onde se calcule comme expliqué dans le Chapitre I. Pour obtenir cette vitesse dans l'espace réel il faut l'intégrer sur les nombres d'onde.

Les vitesses libres et mobilités présentées contiennent dans chacune de leurs composantes le terme exponentiel traduisant la distance du point considéré au point d'excitation. L'intégration se fait donc simplement grâce à la méthode des trapèzes donnée par la relation (C.33). Cela revient à sommer les différentes composantes relatives aux k sur la position $z_c - z_L$ qui donne la distance entre le plan (x, y) dans lequel l'excitation de la vitesse libre est appliquée (z_L) et le plan (x, y) du centre de la zone de contact considérée dans la géométrie de la structure (z_c).

Références Bibliographiques

Articles de Revues à comité de lecture

- [1] AMINI (F.), « Time effects on dynamic soil properties under random excitation conditions », *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 14, 1995, p. 439–443.
- [2] BARROS (F.) et LUCOS (J.), « Stresses and displacements in a layered half-space for a moving line load », *Applied Mathematics and Computation*, vol. 67, 1995, p. 103–134.
- [3] BENASSI (L.) et ELLIOTT (S.), « The equivalent impedance of power-minimizing vibration controllers on plates », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, n° 1-2, 2005, p. 47 – 67.
- [4] BOSMANS (I.), MEES (P.) et VERMEIR (G.), « Structure-Borne sound transmission between thin orthotropic plates : Analytical solutions », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, n° 1, 1996, p. 75–90.
- [5] BOSMANS (I.), VERMEIR (G.) et MEES (P.), « Coupling loss factors for coupled anisotropic plates », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 250, n° 2, 2002, p. 351–355.
- [6] BUTHEEL (A.), BAREL (M. V.) et GUCHT (P. V.), « Orthogonal basis functions in discrete least-squares rational approximation », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 164, 2004, p. 175–194.
- [7] BUTHEEL (A.), CUYT (A.), ASSCHE (W. V.) *et al.*, « Generalizations of orthogonal polynomials », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 179, 2005, p. 57–95.
- [8] CHAPELLAT (H.), MANSOUR (M.) et BHATTACHARYYA (S.), « Elementary proofs of some classical stability criteria », *IEEE Transactions on education*, vol. 33, n° 3, 1990, p. 232–239.

- [9] COTONI (V.), LANGLEY (R.) et SHORTER (P.), « A statistical energy analysis subsystem formulation using finite element and periodic structure theory », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 318, n° 4-5, 2008, p. 1077–1108.
 - [10] COTTEREAU (R.), CLOUTEAU (D.) et SOIZE (C.), « Probabilistic impedance of foundation : Impact of the seismic design on uncertain soils », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 37, 2008, p. 899–918.
 - [11] DANGLA (P.), SEMBLAT (J.), XIAO (H.) *et al.*, « A simple and efficient regularization method for 3D BEM : application to frequency-domain elastodynamics », *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 95, n° 5, 2005, p. 1916–1927.
 - [12] FINNVEDEN (S.), « Exact spectral finite element analysis of stationary vibrations in a railway car structure », *Acta Acustica*, vol. 2, 1994, p. 461–482.
 - [13] FISCHER (H.), « Noise generation by railroad coaches », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 66, n° 3, 1979, p. 333–349.
 - [14] FORREST (J.) et HUNT (H.), « A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 294, n° 4-5, 2006, p. 678–705.
 - [15] FUJII (K.), TAKEI (Y.) et TSUNO (K.), « Propagation properties of train-induced vibration from tunnels », *Railway Technical Research Institute Report*, vol. 46, n° 3, 2005, p. 194–199.
 - [16] FULFORD (R.) et PETERSSON (B.), « The role of moments on the vibration transmission in built-up structures », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 227, n° 3, 1999, p. 479–510.
 - [17] GUIGOU-CARTER (C.), VILLOT (M.), GUILLERME (B.) *et al.*, « Analytical and experimental study of sleeper SAT S 312 in slab track Sateba system », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 293, 2005, p. 878–887.
 - [18] HADHJAN (A.), LUCO (J.) et TSAI (N.), « Soil-structure interaction : continuum or finite element ? », *Nuclear engineering and design*, vol. 31, 1974, p. 151–167.
 - [19] HAMMER (P.) et PETERSSON (B.), « Strip excitation, Part I : Strip mobility », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 129, n° 1, 1989, p. 119–132.
 - [20] HASSAN (O.), « Transmission of structure-borne sound in buildings above railway tunnels », *Building Acoustics*, vol. 8, n° 4, 2001, p. 269–299.
-

- [21] HASSELMAN (T.), « Modal coupling in lightly damped structures », *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 14, n° 11, 1976, p. 1627–1628.
 - [22] HILDEBRAND (R.), « Vertical vibration attenuation in railway track : A wave approach », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 247, n° 5, 2001, p. 857–874.
 - [23] HITZ (M.) et KALTOFEN (E.), « An efficient algorithms for computing the nearest polynomial with constrained roots », *Journal Symbolic Computation*, 1997, p. 1–12.
 - [24] HUNT (H.), « Modelling of rail vehicles and track for calculation of ground-vibration transmission into buildings », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 193, n° 1, 1995, p. 185–194.
 - [25] JEAN (P.), « Boundary and finite elements for 2D soil-structure interaction problems », *Acta Acoustica*, vol. 87, 2001, p. 56–66.
 - [26] JEAN (P.), GUIGOU-CARTER (C.) et VILLOT (M.), « A 2.5D BEM model for ground-structure interaction », *Building Acoustics*, vol. 11, n° 3, 2004, p. 1–17.
 - [27] JONES (D.) et PETYT (M.), « Ground vibration in the vicinity of a strip load : a two-dimensional half-space model », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 147, 1991, p. 155–166.
 - [28] KAUSEL (E.) et ROËSSET (J.M.), « Stiffness matrices for layered soils », *Bulletin of the Seismological Society of America*, vol. 71, 1981, p. 1743–1761.
 - [29] KHARITONOV (V.), « On a generalization of a stability criterion », *Seria fiziko-matematicheskaja*, vol. 1, 1978, p. 53–57.
 - [30] KIRZHNER (F.), ROSENHOUSE (G.) et ZIMMELS (Y.), « Attenuation of noise and vibration caused by underground trains, using soil replacement », *Tunnelling and Underground Space Technology*, vol. 21, 2005, p. 561–567.
 - [31] KOH (Y.) et WHITE (R.), « Analysis and control of vibrational power transmission to machinery supporting structures subjected to a multi-excitation system, Part I : Driving point mobility matrix of beams and rectangular plates », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 196, n° 4, 1996, p. 469–493.
 - [32] KOH (Y.) et WHITE (R.), « Analysis and control of vibrational power transmission to machinery supporting structures subjected to a multi-excitation system, Part II : vibrational power analysis and control schemes », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 196, n° 4, 1996, p. 495–508.
-

- [33] KOH (Y.) et WHITE (R.), « Analysis and control of vibrational power transmission to machinery supporting structures subjected to a multi-excitation system, Part III : Vibrational power cancellation and control experiments », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 196, n° 4, 1996, p. 509–522.
 - [34] LASE (Y.), ICHCHOU (M. N.) et JÉZÉQUEL (L.), « Energy flow analysis of bars and beams : Theoretical formulations », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 192, n° 1, 1996, p. 281–305.
 - [35] LING (X.), ZHU (Z.), ZHANG (F.) *et al.*, « Dynamic elastic modulus for frozen soil from embankment on Beiluhe basin along the Qinghai-Tibet railway », *Cold regions Science and Technology*, vol. 57, 2009, p. 7–12.
 - [36] LJUNGGREN (S.), « Generation of waves in an elastic plate by a vertical force and by a moment in the vertical plane », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 90, n° 4, 1983, p. 559–584.
 - [37] LJUNGGREN (S.), « Torsional excitation of an infinite elastic plate with a soft, circular indenter », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 97, n° 2, 1984, p. 189–199.
 - [38] LJUNGGREN (S.), « Line mobilities of infinite plates », *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 86, n° 4, 1989, p. 1419–1431.
 - [39] LJUNGGREN (S.), « Transmission of structure-borne sound in buildings above railways », *Applied Acoustics*, vol. 34, 1991, p. 193–205.
 - [40] LO (W.), YEH (C.) et TSAI (C.), « Effect of soil texture on the propagation and attenuation of acoustic wave at unsaturated conditions », *Journal of Hydrology*, vol. 338, 2007, p. 273–284.
 - [41] LUCO (J.), « Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium », *Nuclear Engineering and Design*, vol. 31, n° 2, 1975, p. 204 – 217.
 - [42] MADSHUS (C.) et KAYNIA (A.), « High speed railway lines on soft ground : Dynamic behaviour of critical train speed », *Journal of sound and Vibration*, vol. 231, n° 3, 1999, p. 689–701.
 - [43] MEEK (J.) et WOLF (J.), « Cone models for homogeneous soil », *Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 118, 1992, p. 667–685.
 - [44] MELKE (J.), « Noise and vibration from underground railway lines : Proposals for a prediction procedure », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 120, n° 2, 1986, p. 391–406.
-

- [45] MONDOT (J.) et PETERSSON (B.), « Characterization of structure-borne sound sources : The source descriptor and the coupling function », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 114, n° 3, 1987, p. 507–518.
 - [46] MOORHOUSE (A.T.), « On the characteristic power of structure-borne sound sources », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 248, n° 3, 2001, p. 441 – 459.
 - [47] PARK (S.), PARK (I.) et MA (F.), « Decoupling approximation of nonclassically damped structures », *AIAA Journal*, vol. 30, n° 9, 1992, p. 2348–2351.
 - [48] PETERSSON (B.) et PLUNT (J.), « On effective mobilities in the prediction of structure-borne sound transmission between a source structure and a receiving structure, Part I : Theoretical background and basic experimental studies », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 82, n° 4, 1982, p. 517 – 529.
 - [49] PETERSSON (B.), « An approximation for the point mobility at the intersection of two perpendicular plates », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 91, 1983, p. 219–238.
 - [50] PETERSSON (B.) et GIBBS (B. M.), « Use of the source descriptor concept in studies of Multi-Point and Multi-Directional vibrational sources », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 168, n° 1, 1993, p. 157–176.
 - [51] PETERSSON (B.) et HECKL (M.), « Concentrated excitation of structures », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 196, n° 3, 1996, p. 295–321.
 - [52] POWELL (M.), « A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation », *Kluwer Academic, Dordrecht*, 1994, p. 51–67.
 - [53] RANTZER (A.), « Stability conditions for polytopes of polynomials », *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 37, n° 1., 1992, p. 79–89.
 - [54] SANATHANAN (C.) et KOERNER (J.), « Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials », *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1963, p. 56–58.
 - [55] SOIZE (C.), « Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics », *Journal of Acoustical Society of America*, vol. 109, n° 5, 2001, p. 1979–1996.
 - [56] SPÄH (M.) et GIBBS (B.), « Reception plate method for characterisation of structure-borne sound sources in buildings : Assumptions and application », *Applied Acoustics*, vol. 70, n° 2, 2009, p. 361–368.
-

- [57] SUI (F.), ICHCHOU (M.) et JÉZÉQUEL (L.), « Prediction of vibroacoustic energy using a discretized transient local energy approach and comparison with TSEA », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 251, n° 1, 2002, p. 163–180.
- [58] TADEU (A.), ANTÓNIO (J.) et SIMÕES (N.), « 2.5D Green's functions in the frequency domain for heat conduction problems in unbounded, half-space, slab and layered media », *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 6, n° 1, 2004, p. 43–58.
- [59] TAKAGI (T.), « On an algebraic problem related to an analytic theorem of Caratheodory and Fejer and on an allied theorem of Landau », *Japanese Journal of Mathematics*, vol. 1, 1925, p. 83–93.
- [60] VILLOT (M.), ROPARS (P.), BONGINI (E.) *et al.*, « Modelling the influence of structural modifications on the response of a building to railway vibration », *Noise Control Engineering Journal*, vol. 59, n° 6, 2011, pp. 641–651.
- [61] WOLDE (T.), VERHED (J.) et STEENHOEK (H.), « Reciprocity method for the measurement of mechano-acoustical transfer functions », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 42, n° 1, 1975, p. 49–55.

Articles de Conférences

- [62] ADAMY (J.), MOUTON (E.) et DURAND (G.), « La mesure du module de cisaillement in-situ réalisée à partir des propriétés de propagation du bruit », dans les Proceedings de *Géophysique des sols et des formations superficielles : Geofcan, actes du 4^{ème} colloque, Paris (France)*, 2003.
- [63] BONGINI (E.), GUIGOU (C.), PETIT (C.) *et al.*, « Specificities of ground vibrations induced by freight traffic, from the track to the building », dans les Proceedings de *10th International workshop on Railway Noise, Nagahama (Japon)*, p 291–298, 2010.
- [64] COTTEREAU (R.), CLOUTEAU (D.) et SOIZE (C.), « Modèle dynamique équivalent de matrices d'impédance de fondation », dans les Proceedings de *7^{ème} Colloque National de Association Française de Génie Parasismique, Châtenay Malabry (France)*, session ISS 1 (Interaction Sol-Structure), 2007.
- [65] DELAUAUD (V.), POISSON (F.) et GÉRAULT (C.), « Caractérisation expérimentale du bruit de roulement et du bruit d'impact », dans les Proceedings de *10^{ème} Congrès Français d'Acoustique, Lyon (France)*, session AIE6 (Bruit des moyens de transport), 2010.

- [66] JEAN (P.) et VILLOT (M.), « SEA : a predictive tool to improve sound insulation between dwellings », dans les Proceedings de *International Congress of Noise and Control Engineering, Louvain (Belgique)*, p 463–466, 1993.
- [67] LAUDARIN (F.), BONNET (G.) et ARGOUL (P.), « Effect of random soil properties on soil-structure interaction », dans les Proceedings de *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology, Genève (Suisse)*, session ES 1-III (Geotechnical Engineering), 2006.
- [68] OHLRICH (M.). « Structure-borne sound sources and their power transfer », dans les Proceedings de *International Congress of Noise Control Engineering, La Haye (Pays-Bas)*, p 2116–2127, 2001.
- [69] PICOUX (B.) et HOUEDDEC (D. L.), « Propagation d’ondes à la surface d’un massif soumis à un effort latéral et vertical dû à un trafic ferroviaire », dans *XV^{ème} Congrès Français de Mécanique, Nancy (France)*, Actes C.D.ROM (6 pages), 2001.
- [70] ROPARS (P.), VILLOT (M.) et JEAN (P.), « Calcul 2D de la puissance vibratoire d’origine ferroviaire injectée dans un bâtiment par la méthode des mobilités », dans les Proceedings de *10^{ème} Congrès Français d’Acoustique, Lyon (France)*, session AIE6 (Bruit des moyens de transport), 2010.
- [71] ROPARS (P.), BONNET (G.) et JEAN (P.), « Uncertainties on the foundation mobilities and their impact on the power injected into a building », dans les Proceedings de *International Conference on Structural Dynamics, Louvain (Belgique)*, p 2655–2661, 2011.
- [72] SPAH (M.), GIBBS (B.) et FISCHER (H.), « Characterisation of mechanical installations in buildings as structure-borne sound sources », dans les Proceedings de *10th International Congress on Sound and Vibration, Stockholm (Suède)*, 2003.
- [73] STOKOE (K.), WRIGHT (S.) et ROESSET (J. B. J.), « Characterization of geotechnical sites by SASW method », dans les Proceedings de *XIIIth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, New Delhi (Inde)*, p 15–25, 1994.
- [74] XIAOHONG (W.) et SANZHENG (Q.). « A parallel Jacobi method for the Takagi factorization », dans les Proceedings de *International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Application, Las Vegas (USA)*, p 206–221, 2002.

Ouvrages Scientifiques

- [75] ACHENBACH (J.), *Wave propagation in elastic solids*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1975.
- [76] BARKAN (D.), *Dynamics of bases and Foundations*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1959.
- [77] CLOUGH (R.W.) et PENZIEN (J.) *Dynamics of structures*, McGraw-Hill, New York, 1995 (Troisième Edition).
- [78] CRAIK (R.), *Sound Transmission through buildings using Statistical Energy Analysis*, Gower Press, Aldershot, 1996 (Second edition).
- [79] CREMER (L.), HECKL (M.) et HUNGAR (U.), *Structure-Borne Sound structural vibrations and sound radiation at audio frequencies*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [80] DOYLE (J.F.), *Wave propagation in structures : an FFT-based spectral analysis method*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [81] ESVELD (C.), *Moderne Railway Tack*, MRT-Productions, Zaltbommel, 1989.
- [82] GAZETAS (G.), “*Foundation Vibrations*,” dans *Foundation Engineering Handbook*, H.Y. Fang, Kluwer / Springer, New York, 1991 (Seconde Edition).
- [83] GUNARATNE (M.), *The Foundation Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton London New York, 2006.
- [84] KAUSEL (E.), *Fundamental solutions in elastodynamics : a compendium*. Cambridge University Press, New York, 2006.
- [85] LESUEUR (C.), *Rayonnement acoustique des structures, Vibroacoustique, Interactions fluide-structure*, Paris, 1988 (Seconde Edition).
- [86] LYON (R.) et DEJONG (R.), *Theory and Application of Statistical Energy Analysis* Butterworth-Heineman, London, 1995 (Second Edition).
- [87] PECKER (A.), *Dynamique des sols*, Presses de l'école nationale des Ponts et chaussées, Paris, 1984.
- [88] RAYLEIGH (J.W.S.), *The Theory of Sound Volume 1*, Dover Publications, New York, 1945.

- [89] TIMOSHENKO (S.) et WOINOVSKY-KRIEGER (S.), *Theory of plates and shells*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1940.
- [90] TURAUD (J.), *La Construction des Bâtiments*, Editions du Moniteur, Paris, 1991.
- [91] YANG (Y.B.) et HUNG (H.H.), *Wave Propagation for Train-Induced Vibrations, A finite/Infinite Element Approach*, World Scientific Publishing, Singapore, 2009.

Rapports de Thèses

- [92] ARNST (M.), *Three-dimensional modelling of free field and structural vibration due to harmonic and transient loading in a tunnel*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris & Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Paris, 2003.
- [93] BAREILLE (O.), *Approche ondulatoire sélective en vibro-acoustique large bande*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale de Mécanique de Lyon, 2005.
- [94] CHAILLAT (S.), *Méthode multipôle rapide pour les équations intégrales de frontière en élastodynamique 3-D. Application à la propagation d'ondes sismiques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008.
- [95] COTTEREAU (R.), *Probabilistic models of impedance matrices*. Thèse de doctorat, Ecole centrale Paris, 2006.
- [96] CRÉMER (C.), *Modélisation du comportement non linéaire des fondations superficielles sous séismes*. Thèse de doctorat, Laboratoire Mécanique et Technologie, Cachan, 2001.
- [97] GRANGE (S.), *Modélisation simplifiée 3D de l'interaction sol-structure : application au génie parasismique*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2008.
- [98] MALDONALDO (M.), *Vibrations dues au passage d'un tramway : Mesures expérimentales et Simulations Numériques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2008.
- [99] ROUSSILLON (P.), *Interaction Sol-Structure et Interaction Site-Ville : Aspects Fondamentaux et Modélisation*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, 2006.
- [100] YAP (S.), *The role of Moments and Forces in Structure-Borne Sound emission from Machines in Buildings*. PhD Thesis, University of Liverpool, 1998.

Rapport Technique

- [101] TORODOVSKA (M.) et TRIFUNAC (M.), « Analytical model for in plan building-foundation-soil interaction : Incident P-, SV- and Rayleigh waves ». Rapport technique, University of Southern California, Departement of Civil Engineering, 1990.

Documents Normatifs

- [102] NORME 1, *Normes NF-P 06-13, Règles de construction parasismique, Règles PS applicables aux batiments, - PS92, Eyrolles Deuxième édition*, 1998.
- [103] NORME 2, « Vibration and shock measurement of vibration in buildings from landbased transport and guidance to evaluation of its effects on human beings », *Norwegian Standard NS 8176.E Second edition*, 2005.
- [104] NORME 3, « Ground-borne noise and vibration arising from rail systems », *French standard NF ISO 14837-1*, 2008.

Sites Internet

- [105] THE MATHWORKS, INC.
« [http ://www.mathworks.fr/help/toolbox/optim/ug/fmincon.html](http://www.mathworks.fr/help/toolbox/optim/ug/fmincon.html) ».
- [106] LATEX COMMUNITY. « [http ://www.latex-project.org/](http://www.latex-project.org/) ».
- [107] MSC.SOFTWARE. « [http ://www.mscsoftware.com/](http://www.mscsoftware.com/) ».
- [108] NUMPY DEVELOPERS. « [http ://www.numpy.org/](http://www.numpy.org/) ».
- [109] PYTHON COMMUNITY. « [http ://www.python.org/](http://www.python.org/) ».

Modélisation des vibrations d'origine ferroviaire transmises aux bâtiments par le sol

Résumé : Ce document propose une modélisation indirecte par sous-structures des vibrations d'origine ferroviaire transmises aux bâtiments par le sol. La méthodologie globale est empruntée à la méthode des mobilités dans laquelle chaque sous-structure est caractérisée par sa mobilité. L'excitation est représentée par une force ponctuelle en surface du sol ou par une ligne de forces décorrélées. Elle peut néanmoins être calibrée sur des résultats expérimentaux. Une attention particulière a été portée à la caractérisation des comportements vibratoires des éléments du problème. La majeure partie des représentations de l'ensemble sol-fondations est effectuée à l'aide d'un code couplant les méthodes d'éléments de frontière et d'éléments finis en 2 et 2.5 dimensions. Le bâtiment est modélisé par différentes techniques : FEM, BEM, SEA et ondulatoire. Une approche probabiliste permet d'évaluer l'impact de la variabilité des sols environnants sur la mobilité des fondations. Les impédances stochastiques qui en découlent sont intégrées aux modèles de propagation et leur impact sur les vibrations du bâtiment sont également accessibles. La méthodologie permet in fine d'obtenir les niveaux vibratoires des composantes du bâtiment. Ceux-ci peuvent être vus comme des résultats intermédiaires permettant d'anticiper le niveau de gêne des habitants d'un immeuble soumis à ce type de sollicitation.

Mots-clés : Méthode des mobilités, Impédance de fondation, Interaction sol-structure, Impédance stochastique, Dynamique des structures, FEM-BEM, SEA, Source ferroviaire, Calibration, 2D et 2.5D.

Modelling of railroad's vibrations transmitted to a building through the soil

Abstract : This document proposes an approach by sub-structures to the modelling of the vibrations of railroad origin transmitted to buildings through the soil and the foundations. The global methodology is built on a decoupling of the whole problem by using substructures, the first substructure being made of the soil and foundation, and the second one containing the superstructure. The interaction between substructures uses the method of mobilities, every sub-structure being characterized by its own mobility. The excitation is generally represented by a dynamic point force applied to the ground surface or by a line of uncorrelated forces. The frequency spectrum of this dynamic force can be calibrated by using experimental results. A particular attention was put on the characterization of the vibratory behavior of the elements of the problem, it means each sub-structure. The simulation of the dynamic response of the soil+foundation sub-structure is performed by means of a code coupling Boundary Elements and Finite Elements. The building is modelled by various techniques, including FEM and SEA. A probability approach allows estimating the impact of the randomness of soil properties on the induced vibrations, by building convenient stochastic mobilities. The methodology allows to obtain the vibratory levels of the components of the building. These can be seen as intermediate results allowing to anticipate the annoyance induced to the occupants of a building, due to such vibrations.

Key words : Mobilities method, Impedance of foundation, Soil-Structure Interaction, Stochastic Impedances, Structural Dynamic, FEM-BEM, SEA, Railroad Source, Calibration, 2D and 2.5D