



# Algèbre de Yang-Baxter dynamique et fonctions de corrélation du modèle SOS intégrable

Damien Levy-Bencheton

## ► To cite this version:

Damien Levy-Bencheton. Algèbre de Yang-Baxter dynamique et fonctions de corrélation du modèle SOS intégrable. Autre [cond-mat.other]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2013. Français. NNT : 2013ENSL0844 . tel-00956582

**HAL Id: tel-00956582**

**<https://theses.hal.science/tel-00956582>**

Submitted on 6 Mar 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur de L'Université de Lyon, délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon**

**Discipline : Physique**

**Laboratoire de Physique de L'ENS de Lyon**

**École Doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon**

présentée et soutenue publiquement le 22 Octobre 2013

par Monsieur Damien LEVY-BENCHETON

---

## **Algèbre de Yang-Baxter dynamique et fonctions de corrélation du modèle SOS intégrable**

---

*Directeur de thèse : Mme Véronique TERRAS*

*Après l'avis de :*

*M. Nikolai KITANINE*

*M. Eric RAGOUCY*

*Devant la commission d'examen formée de :*

|                                |                     |                |
|--------------------------------|---------------------|----------------|
| <i>M. Nikolai KITANINE,</i>    | <i>IMB,</i>         | Rapporteur     |
| <i>M. Jean-Michel MAILLET,</i> | <i>ENS de Lyon,</i> | Président      |
| <i>M. Vincent PASQUIER,</i>    | <i>IPhT,</i>        | Membre du jury |
| <i>M. Eric RAGOUCY,</i>        | <i>LAPTh,</i>       | Rapporteur     |
| <i>M. Vladimir ROUBTSOV,</i>   | <i>LAREMA,</i>      | Membre du jury |
| <i>Mme Véronique TERRAS,</i>   | <i>ENS de Lyon,</i> | Directeur      |

## Algèbre de Yang-Baxter dynamique et fonctions de corrélation du modèle SOS intégrable

**Résumé :** Un défi toujours actuel dans le domaine des systèmes intégrables quantiques est le calcul exact et explicite des fonctions de corrélation. Dans le cas de modèles simples tels que la chaîne de Heisenberg XXZ de spins  $1/2$ , des progrès significatifs ont été réalisés ces dernières années. Les méthodes développées utilisent les symétries des modèles en volume infini (algèbre quantique affine) ou fini (algèbre de Yang-Baxter). L'objet de cette thèse est d'étendre le champ d'application de ce dernier type d'approche dans le cas où l'algèbre de Yang-Baxter sous-jacente est de type dynamique. C'est typiquement le cas du modèle de physique statistique *solid-on-solid* (SOS) qui décrit les interactions d'un paramètre de hauteur autour des faces d'un réseau bidimensionnel, avec des poids statistiques donnés par une matrice  $R$  elliptique solution de l'équation de Yang-Baxter dynamique.

L'étude des fonctions de corrélation du modèle SOS est abordée dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique et de la méthode de séparation des variables. Des représentations en termes de déterminants de fonctions usuelles sont obtenues par les deux méthodes pour les produits scalaires entre états et pour les facteurs de forme des opérateurs locaux en volume fini. Les formules obtenues dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique sont ensuite utilisées pour représenter la fonction de corrélation à deux points sous la forme d'intégrales multiples, ainsi que pour le calcul de diverses quantités physiques à la limite thermodynamique, telles que les polarisations spontanées ou les probabilités de hauteurs locales. Ces dernières s'expriment sous forme d'intégrales multiples très similaires à celles du modèle XXZ.

**Mots clés :** systèmes intégrables quantiques, algèbre de Yang-Baxter dynamique, ansatz de Bethe algébrique, séparation des variables, fonctions de corrélation, modèle solid-on-solid

**Abstract :** A current challenge in the field of quantum integrable systems is the exact and explicit computation of correlation functions. In simple models such as the XXZ spin  $1/2$  Heisenberg chain, some significant results have been obtained during the last years. The developed methods essentially use the symmetries of the models in infinite volume (quantum affine algebra) or finite volume (Yang-Baxter algebra). The aim of this thesis is to generalize the scope of the latter approaches to the case where the underlying Yang-Baxter algebra is of dynamical type. This is typically the case of the statistical mechanics *solid-on-solid* (SOS) model which describes the interactions of a height parameter around faces of a bidimensional lattice, and whose statistical weights are given by an elliptic  $R$ -matrix which is solution of the dynamical Yang-Baxter equation.

The study of correlation functions of the SOS model is discussed in the framework of the algebraic Bethe ansatz and the separation of variables. Representations in terms of determinants of usual functions are obtained by these two methods for the scalar products of states and for form factors of local operators in finite volume. The obtained formula in the framework of the algebraic Bethe ansatz are then used to represent the two-point function as multiple integrals, and also to compute various physical quantities at the thermodynamic limit, such as the spontaneous polarizations or the local height probabilities. The latter can be expressed in terms of multiple integrals of contour, which are really similar to the ones obtained in the XXZ model.

**Keywords :** quantum integrable systems, dynamical Yang-Baxter algebra, algebraic Bethe ansatz, separation of variables, correlation functions, solid-on-solid model



## Remerciements

Je tiens bien évidemment à exprimer toute ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, Véronique Terras, pour la disponibilité dont elle a su faire preuve durant ces trois ans de thèse, ses conseils toujours clairs et pertinents tant sur la forme que sur le fond, mais aussi pour sa gentillesse et ses multiples allers-retours Paris-Lyon qui ne lui ont certainement pas été de tout repos.

Je remercie également Giuliano Niccoli, avec qui j'ai eu l'opportunité de collaborer, pour son enthousiasme communicatif.

Je remercie Jean-Michel Maillet pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse, et pour m'avoir fait découvrir le domaine des systèmes intégrables lors d'un cours de deuxième année de master ayant suscité tout mon intérêt.

J'aimerais également remercier Messieurs Nikolaï Kitanine et Eric Ragoucy pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur et pour leur lecture minutieuse de ce manuscrit, mais aussi Messieurs Vincent Pasquier et Vladimir Roubtsov pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie bien sûr l'Ecole Normale Supérieure de Lyon dans son ensemble et plus particulièrement le Laboratoire de Physique, pour m'avoir donné l'opportunité de préparer cette thèse dans les meilleures conditions possibles, pour l'ambiance cordiale qui y règne, et pour les différentes discussions parfois légèrement animées lors du déjeuner.

Je suis également reconnaissant du financement dont j'ai pu bénéficier dans le cadre du programme DIADEMS 10 BLAN 012004 de l'Agence Nationale de la Recherche.

Je n'oublie évidemment pas de remercier ma famille et ceux qui se reconnaîtront pour leur soutien constant.



# Table des matières

|                                                                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                                           | <b>13</b> |
| <b>1 Fonctions de corrélation de la chaîne XXZ</b>                                                            | <b>15</b> |
| 1.1 Cadre algébrique des modèles intégrables quantiques . . . . .                                             | 17        |
| 1.1.1 Matrice de Lax et Algèbre de Yang-Baxter . . . . .                                                      | 17        |
| 1.1.2 Structure algébrique de la chaîne de spins 1/2 XXZ . . . . .                                            | 19        |
| 1.2 Construction des états propres . . . . .                                                                  | 22        |
| 1.2.1 Ansatz de Bethe algébrique . . . . .                                                                    | 22        |
| 1.2.2 Séparation des variables . . . . .                                                                      | 25        |
| 1.3 Calcul des facteurs de forme : points essentiels . . . . .                                                | 29        |
| 1.3.1 Problème de diffusion inverse quantique et action des opérateurs locaux<br>sur un état propre . . . . . | 30        |
| 1.3.2 Produits scalaires et représentation simple pour les facteurs de forme .                                | 31        |
| 1.4 Quelques applications à l'étude des fonctions de corrélation . . . . .                                    | 36        |
| 1.4.1 Problématique du calcul des fonctions à deux points . . . . .                                           | 36        |
| 1.4.2 Étude de la limite thermodynamique . . . . .                                                            | 39        |
| 1.4.3 Comportement asymptotique à longue distance des fonctions à deux<br>points en volume infini . . . . .   | 41        |
| <b>2 Modèle à huit-vertex et modèle SOS</b>                                                                   | <b>43</b> |
| 2.1 Présentation des modèles . . . . .                                                                        | 44        |
| 2.1.1 Chaîne de spins XYZ et modèle à huit-vertex . . . . .                                                   | 44        |
| 2.1.2 Transformation Vertex-IRF . . . . .                                                                     | 46        |
| 2.1.3 Modèle solid-on-solid (SOS) . . . . .                                                                   | 47        |
| 2.2 Algèbre de Yang-Baxter dynamique du modèle SOS . . . . .                                                  | 51        |
| 2.3 Diagonalisation des matrices de transfert périodiques . . . . .                                           | 55        |
| 2.3.1 Ansatz de Bethe algébrique pour le modèle SOS périodique . . . . .                                      | 55        |
| 2.3.2 Complétude des états propres de Bethe . . . . .                                                         | 58        |
| 2.4 Diagonalisation des matrices de transfert anti-périodiques . . . . .                                      | 60        |
| <b>3 Facteurs de forme du modèle SOS en volume fini</b>                                                       | <b>67</b> |
| 3.1 Résolution du problème inverse quantique . . . . .                                                        | 68        |
| 3.2 Produit scalaire du modèle périodique . . . . .                                                           | 70        |
| 3.2.1 Base $F$ de l'algèbre de Yang-Baxter du modèle SOS . . . . .                                            | 72        |
| 3.2.2 Calcul des produits scalaires partiels en base $F$ . . . . .                                            | 73        |

|          |                                                                         |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2.3    | Produit scalaire du modèle SOS périodique cyclique . . . . .            | 76         |
| 3.3      | Application au calcul des facteurs de forme . . . . .                   | 79         |
| 3.3.1    | Facteurs de forme du modèle SOS périodique cyclique . . . . .           | 79         |
| 3.3.2    | Fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points . . . . .        | 82         |
| 3.3.3    | Vers le calcul des probabilités de hauteurs locales . . . . .           | 83         |
| 3.4      | Produit scalaire du modèle anti-périodique et application . . . . .     | 85         |
| 3.4.1    | Produit scalaire du modèle SOS anti-périodique . . . . .                | 85         |
| 3.4.2    | Facteurs de forme du modèle SOS anti-périodique . . . . .               | 88         |
| <b>4</b> | <b>Fonctions de corrélation du modèle SOS cyclique</b>                  | <b>93</b>  |
| 4.1      | Limite thermodynamique et états fondamentaux . . . . .                  | 94         |
| 4.2      | Polarisations spontanées et probabilité de hauteur locale . . . . .     | 98         |
| 4.2.1    | Polarisations spontanées . . . . .                                      | 99         |
| 4.2.2    | Calcul des probabilités de hauteurs locales . . . . .                   | 104        |
| 4.3      | Calcul des probabilités de hauteurs locales multi-points . . . . .      | 109        |
| 4.3.1    | Calcul des éléments de matrice multi-points en volume fini . . . . .    | 109        |
| 4.3.2    | Vers la limite thermodynamique . . . . .                                | 113        |
| 4.3.3    | Probabilités de hauteurs locales multi-points . . . . .                 | 115        |
|          | <b>Conclusion</b>                                                       | <b>119</b> |
|          | <b>Appendices</b>                                                       | <b>125</b> |
| <b>A</b> | <b>Définition et propriétés des fonctions elliptiques</b>               | <b>125</b> |
| A.1      | Définition des fonctions $\theta$ et propriétés fondamentales . . . . . | 125        |
| A.2      | Quelques propriétés utiles de la fonction $u \rightarrow [u]$ . . . . . | 126        |
| A.3      | Transformation de Jacobi . . . . .                                      | 127        |

# Introduction

Depuis Galilée, la physique a l'ambition d'expliquer le monde qui nous entoure en élaborant des cadres théoriques reposant sur des principes simples, réductionnistes, et certainement non absent de motivations philosophiques. D'un ensemble de principes cohérents émerge ce qu'on appelle généralement une théorie, c'est-à-dire un cadre d'interprétation implicite donnant du sens aux phénomènes naturels, dont le principal objectif est non pas de prédire le comportement de ces derniers mais avant tout de les expliquer. Citons en exemple les trois grandes théories de la physique moderne que sont la mécanique statistique, la relativité générale, et la mécanique quantique pour laquelle l'interprétation, et donc la compréhension, est encore aujourd'hui sujette à de nombreux débats.

On ne saurait toutefois se convaincre de la pertinence de ces théories sans leur nécessaire confrontation avec les objets qu'elles prétendent décrire. Cette confrontation passe avant tout par l'élaboration de modèles décrivant des phénomènes explicites et mesurables expérimentalement, et pour lesquels découlent des prédictions quantifiables, rendant ainsi vérifiable (pour ne pas dire falsifiable) le cadre théorique dans lequel ils s'insèrent. Insistons toutefois sur le fait que ce n'est pas tant la présence de modèles "faux", au sens de ne décrivant effectivement aucun phénomène physique, qui récusent les théories ainsi construites, mais bien l'absence de modèles naturellement "vrais" et pertinents<sup>1</sup>.

C'est par ce dialogue entre théories, élaboration de modèles, et vérifications expérimentales que toute la physique moderne s'est construite au cours de ces quatre derniers siècles. L'étude des modèles ainsi définis, qui mènent à des prédictions susceptibles d'être vérifiées expérimentalement, est par conséquent une étape cruciale et décisive dans ce processus de construction. Or, il apparaît qu'il existe toute une classe de modèles pour lesquels un certain nombre de quantités physiques importantes est calculable explicitement et exactement. Ces modèles sont dit intégrables ou exactement solubles. On sait pourtant depuis Poincaré, que de tels modèles sont en réalité une exception : le problème de Kepler à trois corps, aussi simple soit-il, n'est déjà pas génériquement intégrable. Cette particularité d'être intégrable est d'ailleurs une des motivations qui pousse à les étudier plus en profondeur. Ce sont en effet des modèles certes simples et idéalisés, bien souvent de basse dimension, mais dont la compréhension mathématique est telle que la physique dont ils rendent compte en est considérablement éclaircie. De plus, la connaissance d'une solution exacte et explicite, en plus de constituer un moyen d'accès privilégié à certains phénomènes non-perturbatifs, peut toujours servir de point de départ à la description de modèles plus réalistes directement construits à partir de ces modèles intégrables.

---

1. C'est là toute la différence entre théorie et modèle : l'existence d'une propriété universelle, dès lors vraie dans tout modèle s'insérant dans le cadre théorique qui la produit, et qui serait amenée à être violée par une unique expérience suffit à falsifier toute la théorie, tandis qu'une vérification particulière d'une même propriété universelle ne saurait nous convaincre de sa véracité.

Comme nous venons de le mentionner, un même cadre théorique contient naturellement différents types de modèles non équivalents. Il est remarquable que la réciproque à la phrase précédente soit justement donnée par l'existence de modèles intégrables : différentes théories contiennent des modèles intégrables équivalents comme nous le verrons dans la suite de cette introduction. Bien sûr, il nous faudrait définir un peu plus en détail ce qu'on entend par modèle intégrable pour donner du sens à cette réciproque.

Dans le cadre de la mécanique classique, suite aux travaux de Lagrange, Jacobi et Hamilton [94, 103, 137], une telle définition a été proposée par Liouville [146, 147]. Un modèle est dit intégrable au sens de Liouville lorsqu'il existe autant de quantités conservées, indépendantes et commutant deux à deux sous le crochet de Poisson, que le nombre de degrés de liberté du système (la moitié de la dimension de l'espace des phases). Cette définition, encore équivalente à l'existence de couples de variables action-angle pour lesquelles les équations du mouvement sont triviales, relie invariablement l'intégrabilité aux symétries sous-jacentes du modèle [10]. Ce n'est pourtant qu'à partir des années 60 du siècle dernier, à la suite des travaux de Gel'fand, Levitan et Marchenko dans l'élaboration de la méthode de diffusion inverse classique pour des modèles continus [85, 156], puis à son application par Gardner, Greene, Kruskal et Miura pour des systèmes décrits par des équations d'évolution non-linéaires (comme l'équation de Korteweg - De Vries) et l'obtention de leurs solutions solitoniques [81], que le lien systématique entre symétrie et intégrabilité a commencé à s'éclaircir. En effet, la reformulation algébrique de la méthode précédente par Lax [140], qui en introduisant le concept clé de paire de Lax  $(L, M)$  satisfaisant une équation matricielle linéaire encore équivalente aux équations du mouvement, et finalement adaptée au cas continu par Zakharov et Shabat [221, 222], rend explicite l'existence de quantités conservées contenues, par construction, dans les traces des puissances de la matrice de Lax  $L$ . C'est ce qui a permis à Faddeev et Zakharov [219], en interprétant la méthode de diffusion inverse classique comme une transformation canonique vers les variables action-angle, de confirmer le lien étroit entre les symétries d'un modèle et sa faculté d'être intégrable au sens de Liouville. Notons par ailleurs que la méthode de diffusion inverse a été appliquée à toute une classe d'équations non-linéaires comme l'équation de Schrödinger non-linéaire, l'équation de Sine-Gordon [1, 71, 183, 220], ou encore la chaîne de Heisenberg classique [205].

Dans la continuité des méthodes algébriques introduites par Lax, signalons l'équivalence entre l'existence d'une paire de Lax décrivant un modèle intégrable, avec l'existence d'une matrice  $r$  admettant la "propriété d'involution" (ce qui assure l'involution des quantités conservées décrites par la matrice  $L$ ) et satisfaisant à l'équation de Yang-Baxter classique, ramenant ainsi la classification des modèles intégrables au sens de Liouville à la recherche des solutions à cette équation [14, 184]. Ces dernières sont, comme l'ont montré Belavin et Drinfel'd [27, 28, 29], reliées à la théorie des représentations de certaines algèbres de Lie, dont l'interprétation géométrique se fait en termes des groupes de Lie-Poisson [62, 185, 186], faisant le lien avec la théorie des variétés de Poisson [37, 102, 129, 211]. Cette reformulation, très frustrante, conduisit à de nombreux travaux dont en particulier ceux de Adler [2, 3], Kostant [130], Symes [201], Reyman et Semenov-Tian-Shansky [175, 176, 177, 178].

Parallèlement à cette lignée de travaux, l'étude de modèles exactement solubles de mécanique statistique sur réseau se développe à partir des années 20, dans une volonté de comprendre l'apparition d'une aimantation spontanée à basse température pour les matériaux ferromagnétiques. Lenz propose pour ce faire un modèle sur réseau relativement simple [141], le modèle d'Ising, pour lequel l'interaction entre atomes met en jeu leur moment magnétique discret et

est telle qu'elle porte uniquement sur leurs plus proches voisins. Son étudiant, Ising, montre qu'en une dimension d'espace, il n'existe pas de transition de phase pour le modèle qui porte son nom, et conjecture qu'il en est de même en dimension deux et trois d'espace [48]. C'est cette conjecture, qui s'avera fausse vingt ans plus tard, qui amena Heisenberg à définir en 1928 la chaîne quantique de spins XXX [95].

La solution du modèle XXX, due à Bethe [39], marque le début d'une longue lignée de travaux sur les modèles intégrables quantiques unidimensionnels. Sa méthode, encore appelée *ansatz* de Bethe, consiste à développer les vecteurs propres du Hamiltonien  $\mathbf{H}$  en ondes planes délocalisées, dont les vecteurs d'ondes satisfont à un système d'équations algébriques couplées : les équations de Bethe. De plus, il est apparu que l'*ansatz* proposé par Bethe s'appliquait à une large classe de modèles différents, y compris ceux de théories des champs unidimensionnels. Citons pour commencer les travaux de Orbach et Walker [168, 210] sur la chaîne de spins XXZ, analogue de la chaîne de spins XXX comportant une anisotropie selon l'axe  $z$ , sans oublier les différents travaux concernant le gaz de Bose ou le modèle de Schrödinger non-linéaire [82, 83, 90, 144, 145, 218]. Signalons également les travaux de Yang et Yang sur l'état fondamental de la chaîne de spins XXX à la limite thermodynamique [215, 216, 217]. Il faut ensuite attendre les années 60 et les travaux de Lieb et Sutherland sur le modèle à six-vertex qui, en remarquant que les équations intervenant dans sa résolution coïncident avec les équations de Bethe de la chaîne XXZ, établissent pour la première fois une connexion entre modèles exactement solubles de mécanique statistique bidimensionnels et modèles intégrables quantiques unidimensionnels [142, 199]. Cette connexion marque un tournant dans le domaine des systèmes intégrables, et présage d'une unité profonde entre les deux types de modèles précédents, appartenant pourtant à deux cadres théoriques bien distincts.

Ce lien trouve son origine dans le concept de *matrice de transfert*, concept déjà présent dans l'article d'Onsager sur la résolution du modèle d'Ising bidimensionnel [167] faisant suite aux travaux de Kramers, Wannier et Montroll [134, 161]. Pour un modèle de mécanique statistique, la matrice de transfert  $\mathcal{T}_j$  s'identifie simplement à la somme sur toutes les configurations admissibles du produit des poids de Boltzmann le long d'une même ligne  $j$  (ou d'une même colonne). La fonction de partition d'un tel modèle à  $N$  lignes (pour des conditions aux limites périodiques) s'exprimant par suite comme la trace d'un produit de ces matrices de transfert,

$$Z_N = \text{tr} \prod_{j=1}^N \mathcal{T}_j, \quad (1)$$

il est clair qu'une manière commode de la calculer est d'en diagonaliser les matrices de transfert simultanément. Or, pour des poids statistiques quelconques, une telle diagonalisation simultanée n'est généralement pas possible. Toutefois, une condition suffisante à cette dernière est de contraindre les poids statistiques à des solutions d'une relation algébrique appelée "relation étoile-triangle", déjà présente dans l'article d'Onsager. L'exacte solvabilité des modèles de physique statistique est par conséquent comprise comme une conséquence de cette relation. Citons en particulier les contributions majeures de Baxter dans ces lignées de travaux [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

Le lien entre modèles exactement solubles bidimensionnels et modèles quantiques unidimensionnels est une nouvelle fois confirmé au début des années 70 par Sutherland et Baxter [18, 200], qui exhibent une *identité de trace* pour le Hamiltonien de la chaîne quantique XYZ, ce dernier s'exprimant comme une dérivée logarithmique des matrices de transfert du modèle

à huit-vertex. Ce n'est toutefois qu'à la fin de cette décennie qu'est formulé un cadre algébrique commun permettant de diagonaliser les matrices de transfert, ce dernier s'avérant être une version algébrique de la méthode de Bethe ainsi qu'une version quantique de la méthode de diffusion inverse classique [69, 70, 96, 188, 209]. En effet, dans deux articles fondateurs de 79 [70, 206], Faddeev, Sklyanin et Takhtajan introduisent l'analogue quantique de la matrice de Lax pour deux modèles quantiques unidimensionnels, à partir de laquelle ils construisent la version quantique de la matrice de diffusion (la matrice de monodromie), les traces de cette dernière, s'identifiant aux matrices de transfert, générant l'ensemble des quantités conservées du modèle : c'est la méthode de diffusion inverse quantique. Toutefois, ce procédé requiert l'existence d'une matrice  $R$  (analogue quantique de la matrice  $r$ ) solution d'une équation cubique, l'équation de Yang-Baxter, condition suffisante à l'intégrabilité du modèle. Cette équation, une première fois introduite par Yang dans l'étude du gaz de Bose unidimensionnel [214], n'est autre qu'une reformulation de la relation étoile-triangle : la matrice  $R$  s'interprète dès lors comme la matrice des poids statistiques d'un modèle de mécanique statistique, qui par construction est exactement soluble. C'est ainsi que l'équivalence entre ces deux types de modèles intégrables est finalement perçue comme la conséquence d'une même structure algébrique sous-jacente : des algèbres quadratiques encore appelées algèbres de Yang-Baxter, qui s'identifient aux symétries des modèles considérés en volume fini.

De plus, de manière tout à fait similaire à l'intégrabilité classique, la classification des systèmes intégrables quantiques, encore équivalents aux modèles exactement solubles de mécanique statistiques en vertu de la remarque précédente, se ramène à l'étude des solutions de l'équation de Yang-Baxter portant sur la matrice  $R$ . Signalons en particulier les travaux précurseurs de Sklyanin, Kulish et Reshetikhin à cet égard [135, 190]. Il faudra finalement attendre le milieu des années 80 et les travaux de Drinfel'd [64] et Jimbo [104] pour voir émerger une théorie mathématique capable à la fois de produire de manière systématique des solutions à cette équation, et d'expliquer les structures algébriques sous-jacentes aux modèles intégrables : c'est la théorie des groupes quantiques. Cette dernière interprète les solutions  $R$  de l'équation de Yang-Baxter, comme des représentations d'une matrice  $\mathcal{R}$  dite universelle, vivant dans une algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie simple, mais déformée par un paramètre complexe  $q$ . A l'instar du cas classique, l'intégrabilité peut alors s'interpréter en termes de ces nouvelles structures algébriques, qui peuvent elles même être perçues comme des quantifications des structures algébriques classiques. Nous renvoyons aux références suivantes pour plus de précisions [55, 155].

Malgré ces différents succès, la méthode de diffusion inverse quantique (encore appelée *ansatz* de Bethe algébrique) n'avait jusqu'alors été exploitée qu'en l'absence de bords non triviaux. En s'inspirant des travaux de Cherednik [56], Sklyanin introduisit les structures algébriques associées aux cas des bords non triviaux dans le cadre de la méthode de diffusion inverse quantique [191], et permit ainsi d'en élargir considérablement son domaine d'application. Citons en particulier les travaux sur les chaînes de spins plus générales (symétrie de plus haut rang, de type superalgèbres, ou chaîne de spins plus élevés) avec des conditions non-périodiques traitées par l'*ansatz* de Bethe algébrique [36, 78]. En ce qui concerne la construction des vecteurs propres des matrices de transfert des chaînes de spins de plus haut rang, signalons les travaux de Mukhin, Tarasov et Varchenko [162]. Cependant, une des principales limitations de l'*ansatz* de Bethe algébrique, est que la diagonalisation explicite des matrices de transfert nécessite l'existence d'un état de référence. En effet, dans le cadre de cette méthode, cette diagonalisation

repose essentiellement sur les symétries des modèles en volume fini que sont les algèbres de Yang-Baxter. Or, bien que ces algèbres contiennent une sous-algèbre abélienne dont la matrice de transfert fait partie (ce qui assure leur diagonalisation simultanée), c'est seulement l'action du reste de l'algèbre (dont les générateurs s'identifient à des opérateurs de création et d'annihilation) sur un état de référence qui en permet la construction des états propres, et par suite leur diagonalisation explicite. Il existe toutefois des modèles n'admettant pas d'états de référence. C'est par exemple le cas de la chaîne quantique de Toda, étudiée en premier lieu par Gutzwiller, et dont les travaux ont finalement mené Sklyanin à l'élaboration de la méthode de séparation des variables quantique (encore appelée *ansatz* de Bethe fonctionnel) [192, 193], qui est une méthode de diagonalisation des matrices de transfert ne nécessitant plus la présence d'un état de référence. Dans ce cadre, la détermination du spectre des matrices de transfert se ramène à un système de  $N$  équations discrètes et séparées. Plus exactement, ces équations sont l'analogue discret de l'équation  $TQ$  de Baxter, issue de la méthode de l'opérateur  $Q$  introduite par Baxter dans le calcul du spectre de la matrice de transfert du modèle à huit-vertex, et dont dérivent là encore les équations de Bethe [20].

Plus récemment, des méthodes alternatives de construction des états intervenant dans la diagonalisation des matrices de transfert ont été développées. Citons par exemple l'approche utilisant les courants de Drinfel'd et les fonctions de poids universelles d'Enriquez, Khoroshkin et Pakuliak [66, 113], ayant finalement mené à la diagonalisation des matrices de transfert des modèles à symétrie  $\bar{U}_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$  [77]. Signalons également les travaux concernant l'*ansatz* de Bethe analytique sur les chaînes de spins plus générales, pour des conditions aux bords non-périodiques, du groupe d'Annecy et d'Art, Mezincescu et Nepomechie [9, 11, 160, 173]. Notons par ailleurs que toutes ces méthodes mènent d'une manière ou d'une autre au même type d'équations que celles issues de l'*ansatz* de Bethe originel.

Les résultats précédents concernant les méthodes de diagonalisation exactes des matrices de transfert, bien que remarquables, sont pourtant loin de mettre un terme à l'étude de ces modèles intégrables. En effet, le calcul de la fonction de partition d'un modèle soluble sur réseau, encore équivalent à la diagonalisation d'un Hamiltonien quantique  $\mathbf{H}$ , ne constitue qu'une étape vers le calcul plus général des *fonctions de corrélation*. Ce sont ces dernières quantités qui contiennent toute l'information physique des modèles que l'on considère, et à partir desquelles la confrontation entre théorie et expérience est rendue possible. Il est par conséquent d'une importance cruciale pour l'application de ces modèles intégrables aux différents domaines de la physique, d'obtenir des expressions à la fois exactes et explicites de ces fonctions de corrélation.

Illustrons ce qu'on entend par fonction de corrélation à l'aide d'un exemple simple de mécanique statistique. Considérons pour ce faire un réseau carré à  $N$  lignes et  $N$  colonnes, avec des conditions aux limites périodiques<sup>2</sup>. Un modèle de physique statistique est défini par la donnée de poids statistiques, les poids de Boltzmann, associés à des configurations locales admissibles du réseau. C'est à partir de ces configurations locales que sont définies par suite les configurations globales admissibles  $\mathcal{C}$ . Considérons le cas simple d'un modèle à vertex, pour lequel est associé en chaque lien du réseau une variable de spin classique  $s$  pouvant prendre

---

2. Il n'est pas nécessaire de considérer un réseau carré. On pourrait tout aussi bien considérer un réseau rectangulaire

un nombre fini de valeurs entières. Les configurations locales admissibles sont définies par la donnée des quatre variables de spins autour d'un même vertex dont le poids de Boltzmann associé est non nul. La fonction de corrélation d'un produit de spins classiques se trouvant sur  $m$  liens arbitraires du réseau,  $s_{i_1} \dots s_{i_m}(\mathcal{C})$ , est alors définie comme la limite de volume infini de sa moyenne statistique,

$$\langle s_{i_1} \dots s_{i_m} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_N} \sum_{\mathcal{C}} s_{i_1} \dots s_{i_m}(\mathcal{C}) e^{-\frac{E(\mathcal{C})}{k_b T}}, \quad (2)$$

où  $E(\mathcal{C})$  est l'énergie associée à la configuration  $\mathcal{C}$  qui dépend explicitement des poids de Boltzmann du modèle,  $k_b$  la constante de Boltzmann, et  $T$  la température. Il est toujours possible de réécrire (2) à l'aide du formalisme des matrices de transfert de lignes  $\mathcal{T}$ , en introduisant un opérateur de spin  $\mathcal{S}_k$  agissant sur la  $k$ -ième colonne du réseau. Cet opérateur encode les différentes valeurs prises par les variables de spins classiques en chaque lien vertical de cette même colonne, pour une configuration donnée  $\mathcal{C}$ . Par exemple, si les  $s_{i_p}$  (pour  $1 \leq p \leq m$ ) correspondent à des variables classiques disposées sur des liens verticaux alignés horizontalement et ayant pour abscisse  $i_1, \dots, i_m$ , la fonction de corrélation associée à ce produit de spins classiques est égale à [112]

$$\langle s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_N} \text{tr} [\mathcal{S}_{i_1} \dots \mathcal{S}_{i_p} \mathcal{T}^N]. \quad (3)$$

Notons que l'expression sous forme de trace résulte des conditions aux limites périodiques<sup>3</sup>. Qui plus est, dans la limite de volume infini, la contribution dominante de (3) est donnée par la valeur propre la plus grande de la matrice de transfert, correspondant aux états fondamentaux de ce modèle à vertex, de telle sorte que (3) se ramène à l'expression suivante dans cette limite,

$$\sum_{\text{états fondamentaux } \Psi_g^i} \frac{1}{\langle \Psi_g^i | \mathcal{T}^N | \Psi_g^i \rangle} \langle \Psi_g^i | \mathcal{S}_{i_1} \dots \mathcal{S}_{i_m} \mathcal{T}^N | \Psi_g^i \rangle. \quad (4)$$

Par ailleurs, rappelons qu'à chaque matrice de transfert d'une même ligne du réseau est associé un modèle quantique unidimensionnel dont découle un certain Hamiltonien  $\mathbf{H}$ . L'opérateur de spin précédent  $\mathcal{S}_{i_p}$  s'interprète alors comme un opérateur de spin quantique n'agissant qu'au site  $i_p$  de ce modèle quantique. Les fonctions de corrélation à température<sup>4</sup>  $T$  d'un tel modèle ont la forme suivante,

$$\frac{\text{tr}_{\mathcal{H}} \left[ \mathcal{O} e^{-\frac{\mathbf{H}}{k_b T}} \right]}{\text{tr}_{\mathcal{H}} \left[ e^{-\frac{\mathbf{H}}{k_b T}} \right]}, \quad (5)$$

où  $\mathcal{O}$  un opérateur local qui s'écrit généralement comme un produit d'opérateurs de spins quantiques, pouvant en particulier coïncider avec  $\mathcal{S}_{i_1} \dots \mathcal{S}_{i_m}$ . Dans la limite où la température est nulle, les seuls états dont la contribution est non nulle sont les états fondamentaux  $|\Psi_g^i\rangle$ , de telle sorte que (5) se réduit simplement à des valeurs moyennes de l'opérateur local  $\mathcal{O} = \mathcal{S}_{i_1} \dots \mathcal{S}_{i_m}$

$$\sum_i \frac{\langle \Psi_g^i | \mathcal{S}_{i_1} \dots \mathcal{S}_{i_m} | \Psi_g^i \rangle}{\langle \Psi_g^i | \Psi_g^i \rangle}. \quad (6)$$

3. Il est a priori possible de considérer d'autres types de conditions aux limites

4. Cette température n'est pas la même que celle du modèle de physique statistique

Ainsi, dans la limite de volume infini, le calcul de (6) se ramène en fait à celui de (4). Les fonctions de corrélation d'une même ligne (ou d'une même colonne) d'un modèle de mécanique statistique avec des conditions aux limites périodiques coïncident ainsi, dans la limite de volume infini, avec les fonctions de corrélation à température nulle de son modèle quantique associé<sup>5</sup>. C'est en ce sens que l'équivalence entre modèles exactement solubles bidimensionnels de mécanique statistique et modèles intégrables quantiques unidimensionnels doit être comprise.

Les premiers résultats pour le calcul exact et explicite des fonctions de corrélation ont été obtenus pour des modèles équivalents à des modèles de fermions libres, à commencer par l'obtention de la polarisation spontanée du modèle d'Ising bidimensionnel par Onsager et Kaufman<sup>6</sup>, finalement démontrée par Yang [213] au début des années 50. Il faut ensuite attendre le début des années 60 avec les travaux de Lieb, Schultz et Matis [143], qui, à l'aide d'une transformation de Jordan-Wigner, obtiennent une représentation en termes de déterminants de Töplitz pour les fonctions à deux points de deux modèles équivalents à des fermions libres : le modèle XY et la chaîne de Heisenberg-Ising. A partir de ces représentations, Lieb et ses collaborateurs obtiennent finalement les asymptotiques à temps égaux de ces fonctions à deux points. Dans la continuité de ces résultats, citons les travaux de McCoy et Wu sur le modèle d'Ising bidimensionnel, qui ont pour leur part montré que les fonctions à deux points s'identifiaient à des solutions de l'équation de Painlevé du troisième type, à la limite de scaling et dans un voisinage du point critique [157, 158, 159]. Le lien ainsi découvert avec les équations de Painlevé marque le point de départ des travaux de Jimbo, Miwa, Mori et Sato qui, à l'aide de l'algèbre de Clifford et de la théorie des déformations isomonodromiques, ont montré que toutes les fonctions de corrélation de certains modèles, toujours équivalents à des fermions libres, satisfont à une équation différentielle de Painlevé. Citons en particulier l'article sur le gaz de Bose impénétrable avec interaction de type  $\delta$  [109, 181, 182].

Toutefois, le réel défi concerne le calcul exact et explicite des fonctions de corrélation en dehors du point de fermions libres, qui est un problème beaucoup plus compliqué que la diagonalisation des matrices de transfert. Des premiers résultats reposant essentiellement sur deux types d'approches (ou un mélange des deux) ont été initiés à cet égard au début des années 80. Le premier type d'approche consiste à déterminer certaines propriétés satisfaites par les fonctions de corrélation, puis à construire toutes les solutions répondant à ces conditions. Bien sûr, la difficulté de cette approche réside dans l'obtention d'une caractérisation suffisante des fonctions de corrélation, ces dernières n'étant en général qu'un sous ensemble des solutions possibles, il faut par la suite réussir à différencier les solutions physiques de celles qui ne le sont pas. C'est dans ce type d'approche que s'insère la théorie conforme des champs, proposée par Belavin, Polyakov et Zamolodchikov dans [30], et pour laquelle Knizhnik et Zamolodchikov ont montré que les fonctions de corrélation satisfaisaient à un ensemble d'équations différentielles linéaires, les équations KZ [127]. Signalons en particulier la méthode "bootstrap" dont l'objectif est de calculer les facteurs de forme de ces modèles de théorie des champs intégrables, c'est-à-dire les éléments de matrice d'un unique opérateur local, de telle sorte que les fonctions de corrélation puissent se calculer par resommation de ces derniers [13, 15]. De nombreux travaux se sont naturellement attaqués à la détermination de ces facteurs de forme [38, 111, 223], mais c'est finalement suite aux travaux de Karowski, ses collaborateurs, et de Smirnov, toujours dans le

---

5. au moins lorsque le nombre de lignes du réseau tend vers l'infini, mais pas nécessairement la taille des matrices de transfert

6. Ces travaux originaux n'ont jamais été publiés. Un historique détaillé se trouve dans l'article de Baxter [26]

cadre des modèles de théorie des champs intégrables, qu'a été proposé un ensemble d'axiomes les caractérisant [197]. Il s'est par ailleurs avéré que les facteurs de forme ainsi construits vérifiaient une version  $q$ -déformée des équations KZ : les équations  $q$ KZ.

Le deuxième type d'approche dans laquelle se situe les travaux présentés dans cette thèse est plus direct, et répond au problème du calcul explicite des valeurs moyennes (6). Les méthodes s'y insérant se sont jusqu'à présent essentiellement développées sur l'archetype d'un modèle en interaction relativement simple (algèbre de bas rang, bas spins, ...), et sont nécessairement confrontées aux problèmes suivants :

1. caractériser les états propres de la matrice de transfert (ou du Hamiltonien  $\mathbf{H}$  associé) et ses états fondamentaux. Dans le cas d'un modèle en interaction, la combinatoire des états propres en fonction des opérateurs locaux est généralement extrêmement compliquée et rend leur manipulation difficile. Des méthodes se basant sur les symétries des modèles et codant cette combinatoire dans des opérateurs de création et d'annihilation appartenant à une certaine algèbre (algèbre de Yang-Baxter dans le cadre de la méthode de diffusion inverse quantique, algèbre des opérateurs de vertex, ...), ont néanmoins permis de ramener la détermination des états propres à un problème purement algébrique, et d'exprimer ces derniers de manière compacte et manipulable.
2. déterminer l'action de l'opérateur local  $\mathcal{O}$  sur les états  $|\Psi_g^i\rangle$ . Ces derniers étant construits à l'aide des générateurs des algèbres symétries du modèle, l'action d'un opérateur local sur un tel état admet a priori elle aussi une combinatoire compliquée. L'idée pour résoudre ce problème n'est non pas d'exprimer les états propres en fonction des opérateurs locaux, mais de plonger  $\mathcal{O}$  dans l'algèbre engendrée par les opérateurs générant les états propres. Les relations de commutation entre ces opérateurs étant connues, l'action de  $\mathcal{O}$  sur  $|\Psi_g^i\rangle$  est ainsi entièrement déterminée par la structure algébrique sous-jacente au modèle que l'on considère.
3. calculer les produits scalaires entre un état propre du Hamiltonien et l'état résultant de l'action d'un opérateur local  $\mathcal{O}$  sur un des états fondamentaux. Autrement-dit, pour  $|\Psi_j\rangle$  un état propre de la matrice de transfert (ou de  $\mathbf{H}$ ) et  $|\Psi'\rangle = \mathcal{O}|\Psi\rangle$ , calculer  $\langle\Psi_j|\Psi'\rangle$ .
4. éventuellement prendre la limite de volume infini pour les méthodes s'appliquant en volume fini. Cette étape nécessite bien sûr d'avoir des expressions compactes et manipulables des produits scalaires précédents en volume fini, sans quoi il serait difficile d'obtenir une expression explicite de cette limite.
5. étudier les fonctions de corrélation dans cette limite (comportement asymptotique, ...).

Notons que le point 1. est bien évidemment résolu par les méthodes de diagonalisation exactes que nous avons d'ores et déjà présentées.

Une première méthode pour le calcul des fonctions de corrélation, basée sur l'ansatz de Bethe algébrique, et qui exploite par conséquent les symétries des modèles en volume fini (l'algèbre de Yang-Baxter), a été initiée par Izergin et Korepin au milieu des années 80 [41]. Cependant, la résolution du points 2. n'ayant pas été obtenue à cette époque, Izergin et Korepin calculent, dans le cas de la chaîne de spins XXZ, l'action d'un opérateur local sur un état propre de la matrice de transfert en coupant la chaîne de spins en plusieurs sous-chaînes ayant pour bords les sites en lesquels sont situés les opérateurs locaux. Ce découpage de la chaîne fait intervenir des sommes combinatoirement très compliquées (des sommes sur toutes les partitions des sous-chaînes) qu'il est nécessaire de resommer par la suite. Notons que des sommes

similaires interviennent dans la résolution du point 3., les produits scalaires s'expriment finalement comme de gigantesques sommes de déterminants. Néanmoins, une resommation est possible via l'introduction de champs non physiques, les champs quantiques auxiliaires [128], qui doivent bien sûr être éliminés des résultats finaux. Cette méthode obtient finalement des expressions pour les fonctions de corrélation de la chaîne de spins XXZ en volume fini sous la forme de déterminants, mais ces derniers dépendent toujours des champs auxiliaires. Dans la limite de volume infini (point 4.), ces déterminants tendent vers des déterminants de Fredholm d'opérateurs intégraux, à partir desquels des équations différentielles ou aux différences finies sont obtenues pour les fonctions de corrélation. L'analyse asymptotique à longue distance de ces dernières (point 5.) est ensuite étudiée par des méthodes de type Riemann-Hilbert. Toutefois, pour la chaîne de spins XXZ, ce programme n'a donné lieu à des expressions explicites qu'au point de fermions libres [58, 59]. Mentionnons notamment les résultats de Its et Slavnov concernant le modèle de Schrödinger non-linéaire [83] pour lequel une expression explicite pour le comportement asymptotique de la fonction à deux points a finalement été obtenue [98].

Il faut attendre les années 90 pour voir apparaître les premiers résultats réellement explicites, en dehors du point de fermions libres, pour le calcul des fonctions de corrélation. En effet, la méthode directe en volume infini développée par Jimbo et ses collaborateurs, qui s'inspire des deux types d'approches précédemment mentionnés, a été couronnée de succès dans l'obtention de formules exactes pour les blocs élémentaires de la chaîne de spins XXZ massive. Ces travaux, qui trouvent leur origine dans l'étude de la matrice de coin de Baxter [22, 23], se basent sur l'hypothèse qu'en volume infini, le Hamiltonien de la chaîne XXZ commute avec l'algèbre quantique affine  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ , de telle sorte que l'espace des états se décompose en somme directe de représentations irréductibles de cette algèbre. De plus, les opérateurs d'entrelacement entre les différents secteurs de la chaîne semi-infinie sont identifiés aux opérateurs de vertex  $q$ -déformés de Frenkel et Reshetikin [79]. Ces opérateurs de vertex forment une algèbre d'opérateurs dont les "constantes de structures" sont données par la matrice  $R$ , et dans laquelle sont plongés à la fois les opérateurs de créations des états propres du Hamiltonien et les opérateurs locaux (point 1. et point 2.). Les fonctions de corrélation de la chaîne XXZ se ramènent par suite au calcul des traces d'un produit d'opérateurs de vertex  $q$ -déformés sur ces représentations irréductibles, dont l'évaluation explicite est effectuée par des méthodes de bosonisation des opérateurs de vertex impliqués dans ces traces. C'est ainsi que les blocs élémentaires de la chaîne XXZ infinie massive ont pu être représentés en termes d'intégrales multiples [106]. Il a par ailleurs été montré a posteriori que ces derniers étaient des solutions des équations  $q$ -KZ.

En supposant que les blocs élémentaires du régime critique de la chaîne XXZ infinie sont eux aussi donnés par des solutions des équations  $q$ -KZ, Jimbo et ses collaborateurs ont conjecturé des représentations données là aussi en termes d'intégrales multiples pour ces quantités [108]. Or, dans ce régime, la méthode de la matrice de coin de Baxter permettant l'identification des symétries de la chaîne infinie n'est plus applicable. La justification de ces conjectures est ainsi moins solide que dans le cas massif. C'est d'ailleurs une des faiblesses de l'approche directe en volume infini. Cette méthode n'est en effet applicable qu'aux cas où les symétries du modèle sont très clairement identifiées, et ne se transpose ainsi a priori pas au régime critique, à température non nulle, en champ magnétique extérieur, ou même aux fonctions de corrélation dépendantes du temps pour la chaîne XXZ.

L'ansatz de Bethe algébrique est à cet égard beaucoup plus général, et est a priori capable de traiter tous ces cas de figures dans un même cadre algébrique. L'obtention d'une formule com-

pacte sous la forme d'un unique déterminant par Slavnov [194, 195] (point 3.), étape essentielle au passage à la limite thermodynamique (point 4.), n'a pourtant pas été suffisante à la dérivation des formules précédemment conjecturées. La résolution du *problème inverse quantique* (point 2.) par le groupe de Lyon à la fin des années 90 [125, 154] marque cependant un tournant dans l'approche par l'ansatz de Bethe algébrique pour le calcul des fonctions de corrélation. En effet, en plongeant les opérateurs locaux dans la même algèbre que les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter, Kitanine, Maillet et Terras obtiennent des expressions pour les fonctions de corrélation en volume fini dont la combinatoire est drastiquement simplifiée et ne résulte plus que de l'algèbre de Yang-Baxter. Les facteurs de forme en volume fini de la chaîne de spins XXZ sont exprimés en terme d'un unique déterminant, tandis que les formules d'intégrales multiples pour les blocs élémentaires en volume infini ont finalement été prouvées à la fois dans le régime massif et critique, et généralisées en champ non nul [126].

Dans la continuité de ces travaux, signalons l'obtention d'une fonctionnelle génératrice pour la fonction à deux points dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique [124]. Le comportement asymptotique à longue distance de la fonction à deux points ayant finalement été déterminé à l'aide de cette formule [116], mais également directement à partir de la série sur les facteurs de forme [119] dans le régime critique. Nous résumons ces résultats importants plus en détail à la fin du chapitre 1 de cette thèse.

Dans la continuité des travaux sur l'approche en volume infini, citons les développements récents de Boos, Jimbo, Miwa, Smirnov et Takeyama qui, en exhibant une structure fermionique cachée dans la chaîne de spins XXZ en volume infini, ont réussi à exprimer les fonctions de corrélation à l'aide de deux fonctions transcendentes. Nous renvoyons aux références [44, 46, 47, 110] pour plus de précisions. Cependant, les deux lignées de travaux précédentes ne s'intéressent au calcul des fonctions de corrélation qu'en température nulle. Des généralisations en température non nulle [202, 204] ont néanmoins été initiées ces dernières années. Signalons à cet égard les travaux du groupe de Wuppertal [42, 43, 87].

Parallèlement à ces deux méthodes, qui répondent aux points 1.-5. présentés ci-dessus, une troisième approche pour le calcul des fonctions de corrélation s'est développée à partir de la méthode de séparation des variables de Sklyanin. En particulier, les travaux de Smirnov sur la chaîne de Toda, et de Niccoli et de ses collaborateurs sur les produits scalaires entre états séparés (point 3.) indiquent que ces derniers se représentent sous une forme qui ne semble que peu dépendre du modèle que l'on considère [72, 89, 163, 164, 165, 166, 198]. Cependant, ces méthodes n'ont jusqu'à présent été développées que pour la chaîne de spins XXZ<sup>7</sup>, pour laquelle la structure algébrique sous-jacente est relativement simple. Des généralisations ont néanmoins été entreprises pour des chaînes de spins plus élevés [51, 61, 114, 203], ou pour des modèles dont les algèbres de symétrie sont plus générales (de plus haut rang, de type superalgèbres, ...), comme c'est le cas des modèles à symétrie superalgèbre [36] ou des modèles à symétrie  $\mathfrak{su}_3$  étudiés plus récemment [31, 32, 33, 34, 35, 212]. Pour ces derniers, citons les travaux de Reshetikhin sur la norme des états propres de la matrice de transfert s'exprimant là aussi sous la forme d'un unique déterminant [174].

---

7. la méthode de séparation des variables s'applique également aux modèles de Sine-Gordon et Chiral-Potts

Le but de la thèse est de généraliser les approches de l'ansatz de Bethe algébrique et de la séparation des variables pour le calcul des fonctions de corrélation à des modèles dont la structure algébrique sous-jacente est plus compliquée. C'est en particulier le cas du modèle de mécanique statistique sur réseau carré solid-on-solid (SOS), dont la matrice  $R$  décrit les poids statistiques associés aux configurations d'une variable de hauteur (associée à chaque vertex) autour d'une face du réseau. La matrice  $R$  de type elliptique correspondante, dépend d'une variable supplémentaire (la variable de hauteur) encore appelée *paramètre dynamique*, et est solution d'une généralisation de l'équation de Yang-Baxter dans laquelle la hauteur subit des décalages dans la direction du Cartan de  $\mathfrak{sl}_2$ . L'algèbre de Yang-Baxter associée dépend par conséquent elle aussi du paramètre dynamique, ce qui complique l'obtention des cinq points précédents pour le calcul des fonctions de corrélation. Le modèle SOS étant l'archetype d'un modèle de type face de mécanique statistique admettant une algèbre de Yang-Baxter dynamique relativement simple (algèbre de bas rang, bas spins, pas de défauts, ...), les difficultés rencontrées dans l'obtention de ces cinq points résultent essentiellement de la présence du paramètre dynamique (en plus des poids de Boltzmann elliptiques). Enfin, outre l'intérêt intrinsèque de développer des méthodes de calcul pour les fonctions de corrélation d'un modèle dont la structure algébrique sous-jacente est dynamique, le modèle SOS est relié au modèle à huit-vertex par une transformation de jauge comme l'a montré Baxter [20]. Notons que le modèle à huit-vertex qui est encore équivalent à la chaîne de spins quantiques XYZ, cette dernière étant une généralisation naturelle de la chaîne XXZ pour laquelle les trois constantes de couplage dans les directions de spins sont a priori différentes, n'admet pas d'états de référence et n'est ainsi pas directement soluble par l'ansatz de Bethe algébrique. La structure algébrique du modèle à huit-vertex étant beaucoup plus compliquée que celle de la chaîne de spins XXZ, c'est en fait toutes les méthodes usuelles de diagonalisation des matrices de transfert, comme la séparation des variables, qui ne s'y appliquent pas directement. Malgré tout, la transformation de jauge précédente permet d'exprimer les états propres de la matrice de transfert du modèle à huit-vertex, relativement simplement en fonction de ceux de la matrice de transfert du modèle SOS. Le calcul des fonctions de corrélation du modèle SOS ouvre ainsi la voie à celui beaucoup plus compliqué du modèle à huit-vertex.

Les difficultés inhérentes aux modèles dynamiques font que le calcul des fonctions de corrélation du modèle SOS par l'ansatz de Bethe algébrique ou par la séparation des variables (points 1.-5.) est néanmoins resté jusqu'à présent un problème totalement ouvert. Dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique, l'obtention d'une formule compacte et manipulable pour les produits scalaires entre états (point 2.), qui sont reliés à la fonction de partition du modèle avec des conditions aux limites particulières, est une étape fondamentale au calcul des fonctions de corrélation. Or, à cause du paramètre dynamique, la fonction de partition du modèle SOS sur laquelle se base le calcul des produits scalaires ne s'exprime pas simplement mais comprend un nombre de termes dépendant explicitement de la taille du réseau [169, 179], le passage en volume infini (point 4.) apparaissant a priori compromis. C'est d'ailleurs une de nos motivations qui nous a amené à étudier le modèle SOS par la méthode de séparation des variables. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, cette méthode fournit un cadre dans lequel les produits scalaires s'expriment de manière quasi-automatique sous la forme d'un unique déterminant. Néanmoins, cette dernière méthode n'a jusqu'à présent été développée qu'en volume fini : les points 4. et 5. n'ayant pour l'heure été résolus dans aucun des modèles où elle s'applique. C'est dans ce contexte que se placent les travaux présentés dans cette thèse.

Des résultats significatifs ont néanmoins été obtenus par la méthode des opérateurs de vertex pour un type de modèle SOS particulier, le modèle SOS restreint, pour lequel la variable de hauteur ne peut prendre qu'un nombre fini de valeur. Les probabilités de hauteurs locales à plusieurs points ont en effet été représentées sous la forme d'intégrales multiples de contour par Lukyanov et Pugai [150]. Signalons également les premiers résultats se basant sur ces travaux obtenus pour le problème des fonctions de corrélation du modèle à huit-vertex [138, 139]. Malgré la complexité de la structure algébrique sous-jacente du modèle à huit-vertex, une approche directe a été proposée par Shiraishi [187] pour des valeurs particulières du paramètre elliptique, ainsi que des représentations conjecturales pour les fonctions de corrélation obtenues dans [45].

Le corps de la thèse est composé de quatre chapitres. Nous résumons dans le chapitre 1 les principaux résultats obtenus par la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique et par la séparation des variables pour le calcul des fonctions de corrélation, sur l'exemple relativement simple de la chaîne XXZ de spins 1/2. Nous y présentons les méthodes de diagonalisation exactes du même nom, la résolution du problème inverse quantique, et les expressions obtenues en termes d'un unique déterminant pour les produits scalaires entre états. Après avoir rappelé en quoi ces trois points sont une étape essentielle dans l'obtention de formules à la fois compactes et manipulables pour les facteurs de forme et les fonctions de corrélation en volume fini, nous rappelons les principales applications de ces résultats pour la chaîne périodique à la limite thermodynamique.

Le chapitre 2 se consacre quant à lui à la présentation des modèles à huit-vertex et solid-on-solid et à leur structure algébrique sous-jacente. Cette dernière s'identifie au groupe quantique elliptique  $E_{\tau,\eta}(\mathfrak{sl}_2)$  introduit par Felder [73], qui dépend explicitement du paramètre dynamique. Malgré la présence de ce paramètre supplémentaire, la diagonalisation des matrices de transfert par l'ansatz de Bethe algébrique [75] ou par la séparation des variables [164] peut être achevée dans le cas des modèles SOS périodiques et anti-périodiques comme nous le montrons (point 1.).

Les nouveaux résultats obtenus dans cette thèse sont quant à eux présentés au chapitre 3 et 4. Le chapitre 3 adapte les points 2. et 3. présentés ci-dessus au modèle SOS périodique et anti-périodique. Nous commençons naturellement par résoudre le problème inverse quantique, avant de s'attaquer au calcul des produits scalaires entre états. Nous verrons que pour le modèle périodique, la présence du paramètre dynamique complique considérablement l'obtention d'une formule compacte et manipulable pour ces derniers en vertu de ce que nous venons d'expliquer. Une représentation sous la forme d'un unique déterminant est finalement obtenue dans le cas du modèle SOS périodique cyclique, pour lequel le paramètre de croisement est rationnel. Ces résultats sont ensuite appliqués au calcul des facteurs de forme du modèle périodique cyclique en volume fini, et à l'obtention d'une représentation sous forme d'intégrales multiples pour une fonctionnelle génératrice de la fonction à deux-points. Le calcul des facteurs de forme du modèle anti-périodique, qui se base quant à lui sur l'expression obtenue par Niccoli pour les produits scalaires entre états séparés [164], y est également présenté en fin de chapitre.

L'objet du chapitre 4 est d'exploiter les résultats précédents jusqu'à l'obtention de formules explicites en volume infini pour les fonctions de corrélation du modèle SOS périodique cyclique (point 4.). Cette étude se base sur les formules obtenues au chapitre 3 dans le cadre de l'ansatz

de Bethe algébrique. C'est dans ce cadre que les états fondamentaux et le passage à la limite thermodynamique sont traités dans une première partie. Dans une deuxième partie, nous démontrons et généralisons une conjecture de Date, Jimbo, Kuniba et Miwa pour les polarisations spontanées [60], analogue de la formule de Baxter [21] pour le modèle SOS. Nous étudions ensuite les probabilités de hauteurs locales à un point, qui sont les fonctions de corrélation les plus élémentaires du modèle SOS cyclique, et en obtenons une expression coïncidant avec celles de la littérature [171]. Enfin, nous nous attaquons au calcul des probabilités de hauteurs locales multi-points dans une troisième et dernière partie, pour lesquelles une représentation sous la forme d'un unique terme d'intégrales multiples, dont la forme est très proche de celle des blocs élémentaires de la chaîne de spins XXZ [126], a été obtenue. En particulier, les probabilités de hauteurs locales dépendent d'une partie algébrique entièrement déterminée par l'algèbre de Yang-Baxter, et d'une partie analytique qui contient à elle seule la dépendance en les états fondamentaux.

Nous concluons finalement cette thèse en énonçant quelques perspectives intéressantes que nous aimerions explorer plus en détails.

Les résultats présentés dans cette thèse ont donné ou donneront lieu à différentes publications, les articles correspondants sont notés en gras tout au long de la thèse (**Article 1**, ...).

- **Article 1 : An algebraic Bethe ansatz approach to form factors and correlation functions**  
D. Levy-Bencheton, V. Terras, arXiv :1212.0246 (2012), *J. Stat. Mech.* (2013) P04015
- **Article 2 : Spontaneous staggered polarizations of the cyclic solid-on-solid model from algebraic Bethe Ansatz.**  
D. Levy-Bencheton, V. Terras, arXiv :1304.7814 (2013), *accepté dans J. Stat. Mech.*
- **Article 3 : Multi-point local height probabilities of the cyclic solid on solid model within the algebraic Bethe Ansatz framework.**  
D. Levy-Bencheton, V. Terras, *en préparation.*
- **Article 4 : Antiperiodic dynamical 6-vertex model II : Form factors by separation of variables.**  
D. Levy-Bencheton, G. Niccoli, V. Terras, *en préparation.*



# Chapitre 1

## Calcul des fonctions de corrélation : exemple de la chaîne XXZ de spins 1/2

Comme nous venons de le voir, le domaine des systèmes intégrables quantiques s'intéresse à la résolution exacte de modèles de physique statistique bidimensionnels ou de modèles quantiques unidimensionnels. Cependant, la notion d'intégrabilité quantique n'a jusqu'à présent pas reçue de définitions communément admises [54, 57]. Le point de vue pragmatique généralement adopté consiste à considérer qu'un modèle quantique est intégrable lorsque le spectre et les états propres de la matrice de transfert le définissant sont calculables de façon exacte. Or, la physique de ces modèles est déterminée non seulement par ces deux quantités, mais aussi et surtout par l'ensemble de ses fonctions de corrélation (2), (5). Rappelons par ailleurs que dans la limite de volume infini, les fonctions de corrélation sur une même ligne d'un modèle de physique statistique coïncident avec les valeurs moyennes (6) d'un produit d'opérateurs locaux du modèle quantique associé à cette même ligne, dans l'état fondamental  $|\Psi_g^i\rangle$ . Les fonctions de corrélation d'un modèle sur réseau exactement soluble peuvent alors être directement construites à partir de celles du modèle quantique associé. C'est pourquoi, dans tout ce chapitre, nous utiliserons le formalisme quantique.

En particulier, un exemple important de fonctions de corrélation est donné par la fonction à deux points d'un modèle quantique sur réseau, pour lequel l'espace des états  $\mathcal{H} = \bigotimes_{n=1}^N \mathcal{H}_n$ , où  $\mathcal{H}_n$  est l'espace des états au site  $n$ . Dans ce cas, l'opérateur  $\mathcal{O}$  s'écrit comme le produit de deux opérateurs locaux  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_m$  n'agissant non trivialement respectivement qu'au site 1 et  $m$ , de telle sorte que la fonction de corrélation à deux points se ramène au calcul des valeurs moyennes

$$\langle \Psi_g^i | \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_m | \Psi_g^i \rangle. \quad (1.1)$$

La détermination de l'action du produit d'opérateurs locaux  $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_m$  sur  $|\Psi_g^i\rangle$  est possible, mais le résultat obtenu est généralement compliqué, et il peut être plus pratique de se ramener au calcul des éléments de matrice les plus simples. On introduit pour ce faire la relation de fermeture exprimée dans la base des états propres du Hamiltonien entre les opérateurs  $\mathcal{S}$ ,

$$\sum_{\text{états propres } \Psi_j} \frac{\langle \Psi_g^i | \mathcal{S}_1 | \Psi_j \rangle \langle \Psi_j | \mathcal{S}_m | \Psi_g^i \rangle}{\langle \Psi_j | \Psi_j \rangle}, \quad (1.2)$$

ce qui ramène le calcul de (1.13) au calcul des éléments de matrice des opérateurs locaux entre un fondamental  $|\Psi_g^i\rangle$  et un état propre  $|\Psi_j\rangle$ . Ces éléments de matrice ne sont qu'un cas

particulier des *facteurs de forme* suivants,

$$\langle \Psi_k | \mathcal{S}_m | \Psi_j \rangle, \quad (1.3)$$

auxquels se ramènent de manière similaire le calcul des fonctions de corrélation à plusieurs points, avec bien sûr  $\langle \Psi_k |$  et  $|\Psi_j \rangle$  deux états propres de  $\mathbf{H}$ . Bien que cette méthode ait toutefois le désavantage de produire un nombre de termes au moins aussi grand que la dimension de l'espace des états, les représentations obtenues pour la fonction à deux points sont particulièrement adaptées à son étude asymptotique dans la limite de grande distance, pour laquelle  $m$  tend vers l'infini, à la fois dans les modèles massifs et critiques. Le calcul exact et explicite des facteurs de forme est par conséquent une étape importante dans la détermination des fonctions de corrélation.

Ces dernières années, différentes méthodes ont été proposées à cet égard pour le cas relativement simple de la chaîne de spins 1/2 XXZ, encore équivalente au modèle de physique statistique à six-vertex comme nous le verrons. Ce modèle joue un rôle particulièrement important dans l'étude des fonctions de corrélation, de part sa relative simplicité (modèle de bas rang, bas spins, ...) mais aussi car il est l'archetype d'un modèle en interaction. Citons à nouveau l'approche en volume infini à température nulle [107] et les travaux récents sur la factorisation des fonctions de corrélation [44, 46, 47, 110]. En particulier, l'approche par ansatz de Bethe algébrique pour le calcul des fonctions de corrélation à température nulle a finalement mené à bien le programme présenté dans l'introduction, en réussissant à déterminer le comportement à longue distance de la fonction à deux points en volume infini, directement à partir de son expression obtenue sur la chaîne finie [120]. Des approches à température non nulle se basant sur les résultats précédents ont par ailleurs été initiées dans [42, 43, 87, 202, 204]. La méthode de séparation des variables introduite par Sklyanin [189, 192], qui semble prometteuse dans l'optique de généraliser les résultats précédents à d'autres classes de modèles, a elle aussi été couronnée de succès mais s'est jusqu'à présent limitée à l'étude de la chaîne finie [165].

Les méthodes de l'ansatz de Bethe algébrique et de la séparation des variables se basent toutes deux sur l'utilisation des symétries du modèle en volume fini, dont l'intégrabilité découle, et fournissent un cadre algébrique naturel pour en diagonaliser le Hamiltonien [206]. Plus précisément, les structures impliquées sont des algèbres quadratiques, des algèbres de Yang-Baxter, admettant une sous algèbre abélienne contenant le Hamiltonien du modèle. Les générateurs restants, qui n'appartiennent pas à cette sous algèbre, permettent d'en générer ses états propres sous une forme explicite et manipulable, la combinatoire se simplifiant considérablement. Avant de s'attaquer dans les chapitres suivant aux nouveaux résultats concernant le calcul des fonctions de corrélation, ce chapitre présente les méthodes utilisées dans cette thèse dans le cas d'un des modèles les plus simple qu'est la chaîne de spins 1/2 XXZ. Nous présentons ce cadre algébrique dans la partie 1.1 et expliquons de manière plus détaillée en quoi les algèbres ainsi construites permettent d'unifier les méthodes de physique statistique bidimensionnelles à celles des chaînes quantiques unidimensionnelles.

La partie 1.2 présente quant à elle les deux méthodes de diagonalisation exacte s'appuyant sur les générateurs de ces algèbres, la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique d'une part et la méthode de séparation des variables quantique introduite par Sklyanin d'autre part.

La résolution du problème inverse quantique, étape essentielle à la caractérisation de l'action d'un opérateur local sur un état propre du Hamiltonien, et l'obtention des produits scalaires sous

la forme d'un unique déterminant nous permettent d'obtenir une représentation également sous la forme d'un unique déterminant pour les facteurs de forme comme le montre la partie 1.3.

Enfin, nous résumons dans la partie 1.4 les principaux succès obtenus dans l'approche par ansatz de Bethe algébrique pour le calcul des fonctions de corrélation, qui répondent au programme présenté ci-dessus dans le cadre de la chaîne de spins 1/2 XXZ.

## 1.1 Cadre algébrique des modèles intégrables quantiques

Nous présentons dans cette partie le cadre algébrique commun aux deux méthodes de diagonalisation exactes présentées dans cette thèse, que sont l'ansatz de Bethe algébrique et la séparation des variables. Ce cadre s'inspire fortement de la méthode de diffusion inverse classique [81] et plus précisément du problème direct de diffusion, l'objet central étant une matrice de Lax  $L$  [140].

### 1.1.1 Matrice de Lax et Algèbre de Yang-Baxter

Soit  $\mathbf{H}$  le Hamiltonien d'un modèle quantique unidimensionnel sur réseau comportant  $N$  sites. L'espace des états du système se décompose comme le produit tensoriel des  $N$  espaces des états locaux  $\mathcal{H}_n$ , et est ainsi de la forme  $\mathcal{H} = \otimes_{n=1}^N \mathcal{H}_n$ . En chaque site  $n$  de la chaîne est définie une matrice de Lax  $L_n(u)$  de taille  $d \times d$  dépendant d'un paramètre spectral  $u$ , dont les éléments de matrice sont des opérateurs agissant sur l'espace quantique local  $\mathcal{H}_n$ . L'opérateur de Lax en un site  $n$  est par conséquent un élément de l'espace  $\text{End}(V_a \otimes \mathcal{H}_n)$ , où  $V_a$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $d$  appelé espace auxiliaire. Nous indiquons les espaces sur lesquels les opérateurs agissent en indice, de telle sorte que la matrice de Lax précédente est encore notée  $L_{an}(u)$ . On construit à partir de ces opérateurs, la matrice de monodromie du modèle, élément de l'espace  $\text{End}(V_a \otimes \mathcal{H})$ ,

$$T_{a,1,\dots,N}(u) = L_{aN}(u)L_{a,N-1}(u) \dots L_{a1}(u), \quad (1.4)$$

comme le produit ordonné des opérateurs de Lax le long de la chaîne, et dont les éléments de matrice agissent sur l'espace quantique tout entier. En prenant la trace sur l'espace auxiliaire  $V_a$  de (1.4), on définit enfin la matrice de transfert

$$\mathcal{T}(u) = \text{tr}_a [T_{a,1,\dots,N}(u)], \quad (1.5)$$

agissant sur l'espace des états  $\mathcal{H}$ , et on s'assure que la matrice de Lax choisie précédemment décrit effectivement le Hamiltonien  $\mathbf{H}$  en exhibant une identité de trace exprimant ce dernier comme une fonction des dérivées de la matrice de transfert (1.5) [200] :

$$\mathbf{H} = \sum_k \sum_a c_{ka} \frac{d^k}{du^k} \log \mathcal{T}|_{u=v_a}. \quad (1.6)$$

Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'intégrabilité du modèle est assurée si la matrice de Lax permet de générer l'ensemble des quantités conservées en involution du modèle. La matrice de transfert associée à la matrice  $L$  doit pour ce faire être la fonction génératrice des quantités conservées, c'est-à-dire qu'il faut que pour tout  $u, v$ ,

$$[\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)] = 0. \quad (1.7)$$

Cette condition est assurée par l'existence d'une matrice  $R$  inversible, fonction des deux paramètres spectraux  $u, v$  et à valeur dans  $V_{a_1} \otimes V_{a_2}$ , satisfaisant l'équation suivante sur  $V_{a_1} \otimes V_{a_2} \otimes \mathcal{H}_n$

$$R_{a_1 a_2}(u, v) L_{a_1 n}(u) L_{a_2 n}(v) = L_{a_2 n}(v) L_{a_1 n}(u) R_{a_1 a_2}(u, v). \quad (1.8)$$

A partir de l'équation (1.8) et de la définition de la matrice de monodromie (1.4), on montre par récurrence sur le nombre de sites l'équation suivante sur les opérateurs éléments de la matrice de monodromie

$$R_{a_1 a_2}(u, v) T_{a_1}(u) T_{a_2}(v) = T_{a_2}(v) T_{a_1}(u) R_{a_1 a_2}(u, v). \quad (1.9)$$

La relation (1.9) contient toutes les relations de commutation des opérateurs agissant sur  $\mathcal{H}$  construit à partir de la matrice de Lax  $L$ . La matrice  $R$  joue ici un rôle similaire aux constantes de structure pour une algèbre de Lie. Dans le cas présent, l'algèbre dite de Yang-Baxter et notée  $\mathcal{A}_R$  associée à la matrice  $R$  solution de l'équation (1.8) est une algèbre associative, a priori non commutative, engendrée par les éléments de la matrice de monodromie satisfaisant aux relations de commutation quadratiques contenues dans (1.9). D'autre part, la matrice  $R$  étant inversible (sauf éventuellement en des valeurs particulières du paramètre spectral), on vérifie facilement en prenant la trace sur les espaces auxiliaires  $V_{a_1}$  et  $V_{a_2}$ , que (1.9) génère effectivement une sous algèbre abélienne générant des quantités conservées, dont les générateurs vérifient l'équation (1.7). Le Hamiltonien  $\mathbf{H}$  s'écrivant en fonction des matrices de transfert, il est clair que pour tout  $u$ ,

$$[\mathbf{H}, \mathcal{T}(u)] = 0. \quad (1.10)$$

La recherche des états propres et du spectre du Hamiltonien se ramène ainsi à la diagonalisation des matrices de transfert pour toutes les valeurs du paramètre spectral  $u$ . C'est l'objet des parties suivantes que de présenter les deux méthodes de diagonalisation des matrices de transfert que sont l'ansatz de Bethe algébrique et la séparation des variables.

Avant cela, expliquons de manière détaillée en quoi ce cadre algébrique permet de traiter à la fois les modèles quantiques unidimensionnels comme on vient de le voir, mais également celui des modèles solubles sur réseau bidimensionnel. En mécanique statistique, une quantité fondamentale que l'on désire calculer explicitement en premier lieu est la fonction de partition  $Z_N$ .

Soit dès lors un réseau carré bidimensionnel  $N \times N$  avec des conditions aux limites périodiques<sup>1</sup>, auquel est associé à la  $k$ -ième colonne un paramètre  $\xi_k$  et à la  $j$ -ième ligne un paramètre  $u_j$ . Dans le cadre des modèles à vertex, on associe de plus à chaque lien vertical du réseau une variable classique  $\epsilon$  pouvant prendre  $\dim \mathcal{H}_n$  valeurs, et à chaque lien horizontal une variable  $\epsilon'$  prenant quant à elle  $d$  valeurs. Ceci permet de définir les configurations locales du modèle par la donnée des quatre variables classiques autour d'un même vertex. Puis, un poids statistique  $\omega(u_j - \xi_k)$  est associé à la configuration locale autour du vertex engendré par l'intersection de la  $j$ -ième ligne et de la  $k$ -ième colonne, de telle sorte que la fonction de partition à  $N^2$  sites s'écrive

$$Z_N(\{u_j\}, \{\xi_k\}) = \sum_{\text{configurations } \mathcal{C}} \prod_{\text{lignes } j} \prod_{\text{colonnes } k} \omega(u_j - \xi_k)(\mathcal{C}). \quad (1.11)$$

1. On pourrait ici aussi considérer un réseau rectangulaire

Une manière commode de réécrire cette fonction de partition est de regrouper les poids statistiques dans une matrice  $R$  de taille  $(d \times \dim \mathcal{H}_n)^2$ . En effet, en associant un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V_{a_j}$  de dimension  $d$  à la  $j$ -ième ligne du réseau, et un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V_k$  de dimension  $\dim \mathcal{H}_n$  à la  $k$ -ième colonne, on définit une matrice sur  $V_{a_j} \otimes V_k$  dont les  $(d \times \mathcal{H}_n)^2$  éléments de matrice correspondent aux poids statistiques autour du vertex engendré par l'intersection de la  $j$ -ième ligne et  $k$ -ième colonne. Dans le cadre algébrique défini ci-dessus, l'espace  $V_{a_j}$  joue un rôle analogue à celui de l'espace auxiliaire, tandis que  $V_k$  s'identifie à l'espace quantique  $\mathcal{H}_k$ . Avec ces notations, la fonction de partition (1.11) d'un tel modèle à vertex avec des conditions aux limites périodiques se réécrit comme

$$Z_N(\{u_j\}, \{\xi_k\}) = \text{tr}_{\mathcal{H}} \left[ \prod_{j=1}^N \tilde{T}(u_j) \right], \quad (1.12)$$

où  $\tilde{T}(u_j)$ , agissant sur  $\mathcal{H}$  et de paramètre spectral  $u_j$ , est ici définie comme la trace sur l'espace auxiliaire des produits des matrices  $R$  d'une même ligne du réseau

$$\tilde{T}(u_j) = \text{tr}_{a_j} \left[ R_{a_j N}(u_j - \xi_N) R_{a_j N-1}(u_j - \xi_{N-1}) \dots R_{a_j 1}(u_j - \xi_1) \right]. \quad (1.13)$$

Pour des poids statistiques quelconques, il n'existe pas de méthodes générales permettant le calcul explicite de (1.12). Le calcul de ces traces est cependant plus simple dans le cas où les matrices  $\tilde{T}(u_j)$  sont diagonalisables simultanément pour des valeurs quelconques du paramètre spectral. Or, une condition suffisante à leur commutativité est précisément la relation (1.9) définissant l'algèbre de Yang-Baxter  $\mathcal{A}_R$  associée à la matrice  $R$ , elle-même conséquence de l'équation de Yang-Baxter associée à la matrice  $R$  sur  $V_{a_1} \otimes V_{a_2} \otimes \mathcal{H}_n$

$$R_{a_1 a_2}(u_1, u_2) R_{a_1 n}(u_1, \xi_n) R_{a_2 n}(u_2, \xi_n) = R_{a_2 n}(u_2, \xi_n) R_{a_1 n}(u_1, \xi_n) R_{a_1 a_2}(u_1, u_2). \quad (1.14)$$

Du point de vue des modèles de physique statistique, la relation (1.14) contraint les poids  $\omega(u_j - \xi_k)$  mais assure dans le même temps l'intégrabilité du modèle. Il suffit dès lors de trouver une matrice  $R$  solution de l'équation de Yang-Baxter (1.14) pour définir un modèle soluble de physique statistique bidimensionnel, et définir dans le même temps une algèbre de Yang-Baxter  $\mathcal{A}_R$  via la relation (1.9). Le lien avec les modèles quantiques se fait en remarquant qu'il est toujours possible de choisir la matrice de Lax  $L_n(u)$  agissant sur  $V_a \otimes \mathcal{H}_n$  comme étant égale à la matrice  $R_{an}(u, \xi_n)$  solution de l'équation de Yang-Baxter (1.14), cette dernière relation coïncidant ainsi avec la relation (1.8). Dans ce cas, la matrice (1.13) coïncide alors avec la matrice de transfert (1.5).

La diagonalisation des matrices de transfert est par conséquent un point essentiel du calcul des fonctions de corrélation, à la fois des modèles quantiques et des modèles de physique statistique à vertex.

### 1.1.2 Structure algébrique de la chaîne de spins 1/2 XXZ

Le Hamiltonien de cette chaîne de spins est donné par

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^N \left\{ \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta(\sigma_n^z \sigma_{n+1}^z - 1) \right\}, \quad (1.15)$$

où les opérateurs  $\sigma_n^\alpha$  désignent les matrices de Pauli agissant en un site  $n$ , et où l'on identifie le premier site avec le  $N + 1$ -ième. Le paramètre  $\Delta$  correspond ici à l'anisotropie selon l'axe  $z$ , et peut être paramétré par  $\Delta = \cosh(\eta)$  où  $\eta$  est un nombre complexe a priori quelconque. Pour ce modèle, l'espace auxiliaire est de dimension  $d = 2$  et il en va de même des espaces locaux  $\mathcal{H}_n$  qui sont simplement des représentations de dimension 2 de  $\mathfrak{sl}_2$ . La matrice de Lax du modèle XXZ est ainsi une matrice  $4 \times 4$ , que l'on représente dans l'espace auxiliaire par

$$L_{an}(u) = \begin{pmatrix} \sinh(u + \frac{\eta}{2}\sigma_n^z) & \sinh(\eta)\sigma_n^- \\ \sinh(\eta)\sigma_n^+ & \sinh(u - \frac{\eta}{2}\sigma_n^z) \end{pmatrix}_{[a]}, \quad (1.16)$$

avec  $\sigma_n^+$ , et  $\sigma_n^-$  les opérateurs de retournement d'un spin au site  $n$ . Une première chose à vérifier est que l'identité de trace suivante

$$\mathbf{H} = 2 \sinh(\eta) \frac{d}{du} \ln \mathcal{T}_{|_{u=\frac{\eta}{2}}} - 2 \cosh(\eta) N, \quad (1.17)$$

permet en effet de retrouver le Hamiltonien (1.15) à partir de la matrice de Lax (1.16). De plus, on montre de manière explicite que la matrice  $R$  agissant dans le produit tensoriel de deux espaces auxiliaires  $V_{a_1} \otimes V_{a_2}$  et définie par

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} \sinh(u - v + \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(u - v) & \sinh(\eta) & 0 \\ 0 & \sinh(\eta) & \sinh(u - v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(u - v + \eta) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

est solution de l'équation (1.8) et assure ainsi que les matrices de transfert construites à partir de (1.16) commutent deux à deux pour des valeurs quelconques du paramètre spectral. Remarquons en particulier que cette matrice  $R$  est invariante par translation et ne dépend que de la différence des deux paramètres spectraux  $u - v$ . De plus, on voit facilement que

$$L_n(u) = R(u - \frac{\eta}{2}). \quad (1.19)$$

La matrice  $R$  ci-dessus respecte également les trois propriétés importantes suivante :

$$R_{12}(u, v) R_{21}(v, u) = \sinh(u - v + \eta) \sinh(v - u + \eta), \quad \text{unitarité} \quad (1.20)$$

$$\sigma_1^x R_{12}(u - \eta + i\pi, v) \sigma_1^x = R_{21}^{t_1}(v, u), \quad \text{symétrie de croisement}, \quad (1.21)$$

$$[R_{12}(u, v), \sigma_1^z + \sigma_2^z] = 0, \quad \text{poids zéro}. \quad (1.22)$$

Notons que cette matrice  $R$  n'est autre que la matrice des poids statistique du modèle à six-vertex. Ce dernier est un modèle à vertex du même type que ceux présentés dans la section précédente. Plus précisément, le modèle à six-vertex est un modèle de glace pour lequel d'une part, les variables classiques ne peuvent prendre que deux valeurs  $\pm 1$ , et d'autre part les seules configurations locales associées à un poids statistique non nul sont celles respectant la règle de glace  $\epsilon'_j + \epsilon_k = \epsilon'_{j+1} + \epsilon_{k+1}$ . En interprétant les variables locales  $\epsilon_j = \pm 1$  comme des spins classiques, la règle de glace est encore équivalente à la conservation du spin à travers chaque vertex. Ceci se répercute directement sur la forme de la matrice  $R$ , cette dernière étant nécessairement de la forme (1.18).

On introduit également la matrice de transfert inhomogène qui est un outil commode pour lever certaines dégénérescences. A chaque site local est associé une variable complexe  $\xi_n$  de telle sorte que la matrice de Lax inhomogène en un site  $n$  est égale à

$$L_{an}(u, \xi_n) = R_{an}(u - \xi_n). \quad (1.23)$$

La matrice de monodromie inhomogène, toujours définie comme le produit ordonné des opérateurs de Lax est ainsi de la forme,

$$\begin{aligned} T_{a,1\dots N}(u, \{\xi\}) &= L_{aN}(u, \xi_N) L_{a,N-1}(u, \xi_{N-1}) \dots L_{a1}(u, \xi_1) \\ &= \begin{pmatrix} A(u, \{\xi\}) & B(u, \{\xi\}) \\ C(u, \{\xi\}) & D(u, \{\xi\}) \end{pmatrix}_{[a]}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

ses éléments de matrice sont des opérateurs agissant sur l'espace quantique tout entier. La matrice de transfert du modèle XXZ inhomogène avec conditions aux limites périodiques vaut alors

$$\mathcal{T}(u, \{\xi\}) = A(u, \{\xi\}) + D(u, \{\xi\}), \quad (1.25)$$

et c'est cette dernière que l'on va diagonaliser pour tout paramètre spectral  $u$  et un ensemble d'inhomogénéités  $\{\xi\}$  quelconque, le modèle XXZ correspondant au cas où l'on évalue les  $\xi_k$  en  $\frac{\eta}{2}$ . En fait, la matrice de transfert que l'on cherche à diagonaliser est toujours la trace d'une certaine matrice de monodromie, mais l'expression de cette dernière dépend fortement des conditions aux limites, de telle sorte qu'on ne cherche pas nécessairement à diagonaliser  $A(u, \{\xi\}) + D(u, \{\xi\})$  selon le modèle considéré. C'est par exemple le cas du modèle anti-périodique pour lequel la matrice de transfert à diagonaliser est  $B(u, \{\xi\}) + C(u, \{\xi\})$  comme nous le verrons. Nous ne précisons dorénavant plus la dépendance en les paramètres d'inhomogénéités.

Les relations de commutation entre les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter  $\mathcal{A}_R$  sont entièrement déterminées par la relation (1.9). La conservation du spin à travers chaque vertex implique en particulier que

$$[A(u), A(v)] = 0, \quad [B(u), B(v)] = 0, \quad (1.26)$$

$$[C(u), C(v)] = 0, \quad [D(u), D(v)] = 0. \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

Donnons enfin deux autres relations de commutation dont nous nous servons par la suite :

$$A(v)B(u) = \frac{1}{b(u, v)} B(u)A(v) - \frac{c(u, v)}{b(u, v)} B(v)A(u), \quad (1.29)$$

$$D(v)B(u) = \frac{1}{b(v, u)} B(u)D(v) - \frac{c(v, u)}{b(v, u)} B(v)D(u). \quad (1.30)$$

avec

$$b(u, v) = \frac{\sinh(u - v)}{\sinh(u - v + \eta)}, \quad c(u, v) = \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u - v + \eta)}. \quad (1.31)$$

On définit enfin le déterminant quantique associé à la matrice de monodromie de la chaîne de spins XXZ comme

$$\Delta(u) = \text{tr}_{a_1, a_2} \left[ \frac{1 - P_{a_1 a_2}}{2} T_{a_1}(u - \eta) T_{a_2}(u + \eta) \right], \quad (1.32)$$

$$= D(u - \eta)A(u + \eta) - B(u - \eta)C(u + \eta), \quad (1.33)$$

$$= A(u - \eta)D(u + \eta) - C(u - \eta)B(u + \eta), \quad (1.34)$$

$$= D(u + \eta)A(u - \eta) - C(u + \eta)B(u - \eta), \quad (1.35)$$

$$= A(u + \eta)D(u - \eta) - B(u + \eta)C(u - \eta), \quad (1.36)$$

qui est un invariant quadratique de l'algèbre de Yang-Baxter, et joue ainsi un rôle analogue à l'opérateur de Casimir pour les algèbres de Lie semi-simples. On montre en effet que dans le cas de cette chaîne de spins, le déterminant quantique (1.32) s'écrit encore comme

$$\Delta(u) = a(u)d(u - \eta), \quad (1.37)$$

qui agit bien trivialement sur l'espace quantique, et commute dès lors avec les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter.

## 1.2 Construction des états propres

Cette partie se consacre à la diagonalisation de la matrice de transfert de la chaîne de spins 1/2 XXZ, et plus particulièrement à la construction de ses états propres à l'aide des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter présentée précédemment.

### 1.2.1 Ansatz de Bethe algébrique

L'ansatz de Bethe algébrique [206] est une méthode permettant de déterminer le spectre et les états propres d'une matrice de transfert associée à une matrice  $R$  solution de l'équation de Yang-Baxter (1.14), ce qui d'après l'identité de trace (1.6) équivaut à la diagonalisation d'un Hamiltonien  $H$ . C'est toute la structure algébrique définie par l'équation de Yang-Baxter dont la matrice  $R$  est solution et générée par la relation (1.9) qui est utilisée à cet égard. L'espace des états  $\mathcal{H}$  est engendré par l'action sur un état de référence  $|0\rangle$  des opérateurs  $B$  et  $C$  (n'appartenant pas à la sous algèbre abélienne de  $\mathcal{A}_R$ ), ces derniers jouant le rôle d'opérateurs de création et d'annihilation. Les états ainsi engendrés sont états propres de la matrice de transfert sous réserve que les paramètres des opérateurs agissant sur l'état de référence satisfassent à un système d'équations algébriques appelé équations de Bethe. Explicitons la méthode sur l'exemple de la chaîne de spins 1/2 XXZ avec des conditions aux limites périodiques. Pour cet exemple, la dimension de l'espace auxiliaire  $d = 2$ , de telle sorte que la matrice de transfert  $\mathcal{T}(u) = A(u) + D(u)$  comme nous l'avons vu précédemment. La sous algèbre abélienne générant les quantités conservées du modèle est ainsi engendrée par les opérateurs  $A$  et  $D$ . Ce sont par conséquent les opérateurs  $B$  et  $C$  n'y appartenant pas qui servent à engendrer tout l'espace des états en vertu de ce que nous venons d'expliquer.

Plus précisément, la diagonalisation par ansatz de Bethe algébrique de la matrice de transfert se fait en trois étapes. La première consiste à trouver un état de référence  $|0\rangle$  de  $\mathcal{H}$  qui en est un

état propre et est d'une part annihilé par l'action de l'opérateur  $C(u)$  (ou  $B(u)$ ) pour toute valeur du paramètre spectral, et d'autre part différent de 0 sous l'action de l'opérateur  $B(u)$  (ou  $C(u)$ ). La deuxième étape consiste à construire l'ensemble des états de  $\mathcal{H}$  générés par l'application successive d'un produit d'opérateurs  $B$  sur l'état de référence  $|0\rangle$ . Les vecteurs ainsi formés sont de la forme

$$B(v_1)B(v_2)\dots B(v_n)|0\rangle, \quad (1.38)$$

et sont appelés vecteurs de Bethe. Ces vecteurs étant invariants sous l'action canonique du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sur les paramètres spectraux en vertu des relations de commutation (1.26), l'ordre des paramètres spectraux n'importe pas. On calcule enfin l'action de la matrice de transfert  $A(u) + B(u)$  sur les vecteurs de Bethe à l'aide des relations de commutation (1.29), et on montre qu'une condition suffisante pour que ces vecteurs en soient des états propres est que l'ensemble des paramètres  $\{v\}$  les paramétrant satisfassent à un système d'équations algébriques : les équations de Bethe. Notons qu'il n'est a priori pas évident que l'ensemble des vecteurs de Bethe constitue effectivement une famille génératrice de  $\mathcal{H}$ . La complétude des états propres de Bethe doit donc être montrée à posteriori.

Dans le cas de la chaîne de spins XXZ, on remarque à partir de l'expression de la matrice de Lax que l'état avec tous les spins vers le haut  $|0\rangle = \otimes_{j=1}^N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{[j]}$  est un état de référence. En effet, pour cet état,

$$A(u)|0\rangle = a(u)|0\rangle, \quad B(u)|0\rangle \neq 0, \quad (1.39)$$

$$D(u)|0\rangle = d(u)|0\rangle, \quad C(u)|0\rangle = 0, \quad (1.40)$$

avec

$$a(u) = \prod_{k=1}^N \sinh(u - \xi_k + \eta), \quad d(u) = \prod_{k=1}^N \sinh(u - \xi_k). \quad (1.41)$$

On montre qu'une condition pour que les vecteurs de Bethe (1.38) soient états propres de la matrice de transfert  $\mathcal{T}(u) = A(u) + D(u)$  est que l'ensemble de paramètres spectraux  $\{v\}$  satisfait aux *équations de Bethe* :

$$a(v_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k + \eta) = d(v_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k - \eta) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n. \quad (1.42)$$

Un état de la forme (1.38) pour lequel les paramètres  $\{v\}$  sont solutions du système d'équations (1.42) est appelé état propre de Bethe. La valeur propre de la matrice de transfert associée à un tel état est égale à

$$\tau(u, \{v\}) = a(u) \prod_{j=1}^n \frac{\sinh(v_j - u + \eta)}{\sinh(v_j - u)} + d(u) \prod_{j=1}^n \frac{\sinh(u - v_j + \eta)}{\sinh(u - v_j)}. \quad (1.43)$$

Le même raisonnement peut être effectué sur l'état de référence dual  $\langle 0| = \otimes_{j=1}^N \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}_{[j]}$ , et pour lequel

$$\langle 0|A(u) = a(u)\langle 0|, \quad \langle 0|B(u) = 0, \quad (1.44)$$

$$\langle 0|D(u) = d(u)\langle 0|, \quad \langle 0|C(u) \neq 0. \quad (1.45)$$

Les états de Bethe sont cette fois-ci de la forme

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^n C(v_j), \quad (1.46)$$

et on montre de manière similaire qu'un tel état est état propre de la matrice de transfert de valeur propre (1.43) si l'ensemble des paramètres  $\{v\}$  satisfait aux mêmes équations de Bethe (1.42). Dans le cas de la chaîne de spins 1/2 XXZ, on peut interpréter l'opérateur  $B(u_j)$  comme un opérateur de création d'une quasi-particule de rapidité  $u_j$ . Un état de Bethe engendré par  $n$  opérateurs  $B$  correspond ainsi à un état à  $n$  excitations au dessus du "vide"  $|0\rangle$ .

Insistons une nouvelle fois sur le problème de la complétude des états de Bethe : l'ansatz de Bethe algébrique présenté ci-dessus ne donne que des conditions suffisantes pour qu'un état de la forme (1.38) soit état propre de la matrice de transfert. Différents travaux se sont intéressés à la complétude, à commencer par Bethe lui même [39], qui en se basant sur l'hypothèse des cordes (cette dernière est toutefois erronée) réussit à compter les états propres de Bethe et à montrer qu'il en existe effectivement  $2^N$ . Il est toutefois plus facile de raisonner sur une matrice de transfert déformée par un paramètre complexe  $\kappa$  de module strictement inférieur à 1

$$\mathcal{T}(u) = A(u) + \kappa D(u), \quad (1.47)$$

pour laquelle Tarasov et Varchenko [207] ont montré la complétude des états propres de Bethe  $\kappa$ -déformés, lorsque les paramètres  $\{v\}$  définissant ces derniers sont solutions des équations de Bethe  $\kappa$ -déformées,

$$a(v_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k + \eta) = \kappa d(v_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k - \eta) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n. \quad (1.48)$$

Ce sont plus exactement les états de Bethe paramétrés par des solutions admissibles et hors-diagonales qui forment une base orthogonale de  $\mathcal{H}$ . Une solution  $\{v\}$  des équations de Bethe  $\kappa$ -déformées est dite admissible si le produit

$$a(v_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k + \eta) \times \kappa d(v_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k - \eta) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \quad (1.49)$$

ne s'annule pas (ou autrement dit si aucun des membres de droite ou de gauche des équations de Bethe ne vaut zéro), et hors-diagonale si pour tout  $j$  et tout  $k$ ,

$$j \neq k \Rightarrow v_j \neq v_k. \quad (1.50)$$

Enfin, une manière commode de réécrire les équations de Bethe est d'introduire la fonction suivante

$$\mathcal{Y}_\kappa(u; \{v\}) = a(u) \prod_{j=1}^n \sinh(v_j - u + \eta) + \kappa d(u) \prod_{j=1}^n \sinh(v_j - u - \eta). \quad (1.51)$$

Les équations de Bethe  $\kappa$ -déformées s'écrivent ainsi,

$$\mathcal{Y}_\kappa(v_k; \{v\}) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n. \quad (1.52)$$

### 1.2.2 Séparation des variables

L'idée de la séparation des variables quantique introduite par Sklyanin, est de ramener le problème spectral originel à un ensemble de problèmes spectraux indépendants et unidimensionnels [189, 192, 193]. On cherche pour ce faire une famille auxiliaire d'opérateurs simultanément diagonalisables dans une base propre que l'on sait expliciter, et dans laquelle le problème spectral se résume à la résolution d'un système d'équations aux différences finies après séparation des variables. Or, on peut toujours choisir la famille auxiliaire permettant cette séparation de variables comme la famille des opérateurs  $B$  (ou  $C$ ) lorsque ces derniers commutent et sont diagonalisables. Plus précisément, on s'intéresse à des modèles dont la matrice de monodromie est un polynôme en le paramètre spectral<sup>2</sup>  $u$ ,

$$T_{a_1}(u) = \sum_{n=0}^N u^n \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}_{[a_1]}, \quad (1.53)$$

et dont la famille d'opérateurs  $B$  commute, c'est-à-dire pour tout  $u, v$ ,

$$[B(u), B(v)] = 0. \quad (1.54)$$

Les opérateurs  $B$  commutant deux à deux, il en va de même des  $B_n$  pour  $1 \leq n \leq N$  qui sont dès lors diagonalisables simultanément. Sous certaines conditions [189, 192] et en particulier lorsque le spectre des opérateurs  $B$  est simple et que le déterminant quantique (1.32) associé à la matrice de monodromie  $T(u)$  du modèle est un scalaire, il fait sens de parler des zéros de  $B$  comme le spectre commun de ses opérateurs racines  $\{x_n\}$ , ces derniers agissant sur un espace de fonctions à  $N$  variables et isomorphe à  $\mathcal{H}$ . L'opérateur  $B$  défini sur ce nouvel espace s'écrit ainsi

$$B(u) = B_N \prod_{j=1}^N (u - x_n), \quad (1.55)$$

et c'est justement la famille d'opérateurs  $\{x_n\}$  qui joue par la suite le rôle des variables séparées. Les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter étant des polynômes en  $u$ , on peut toujours les exprimer en fonction de ces opérateurs racines par interpolation. En évaluant finalement l'équation aux valeurs propres de la matrice de transfert dans ces variables séparées, les fonctions propres se séparent de telle sorte que la diagonalisation de la matrice de transfert se réduise effectivement à  $N$  équations aux différences finies, analogues discrètes de l'équation  $TQ$  de Baxter [19, 20]. Remarquons que comme les  $x_n$  agissent sur un espace isomorphe à  $\mathcal{H}$ , on dispose de fait d'autant d'équations que la dimension de l'espace quantique : la complétude des états propres de la matrice de transfert est automatiquement satisfaite. De plus, la séparation des variables s'applique même en l'absence d'états de référence  $|0\rangle$ . Dans le cas de la chaîne de spins XXZ périodique, l'opérateur  $B$  est nilpotent et n'est pas diagonalisable. La méthode de séparation des variables s'applique toutefois aux modèles dont la matrice de monodromie est légèrement modifiée par une matrice inversible de "twist"  $K$ , agissant dans l'espace auxiliaire, et dont l'opérateur  $\bar{B}(u)$ , élément de matrice de cette matrice de monodromie "twistée"  $\bar{T}_{a_1}(u)$

$$\bar{T}_{a_1}(u) = K_{a_1} T_{a_1}(u) = \begin{pmatrix} \bar{A}(u) & \bar{B}(u) \\ \bar{C}(u) & \bar{D}(u) \end{pmatrix}_{[a_1]} \quad (1.56)$$

---

2. On peut également s'intéresser à des modèles pour lesquels la matrice de transfert est un polynôme trigonométrique ou elliptique.

est diagonalisable. C'est par exemple le cas de la chaîne anti-périodique pour laquelle la matrice  $K$  est égale à  $\sigma^x$ , comme nous le montrons dans la suite de cette partie [165].

La matrice de monodromie de cette chaîne de spins est un polynôme trigonométrique en le paramètre spectral et est donnée par

$$\bar{T}_{a_1}(u) = \sigma_{a_1}^x T_{a_1}(u) = \begin{pmatrix} C(u) & D(u) \\ A(u) & B(u) \end{pmatrix}_{[a_1]}, \quad (1.57)$$

où  $\sigma_{a_1}^x$  est l'opérateur de retournement de spin. La matrice de transfert que l'on souhaite diagonaliser est ici égale à

$$\bar{T}(u) = C(u) + B(u). \quad (1.58)$$

Les opérateurs  $D$  commutant deux à deux en vertu des relations de commutation (1.26), nous en cherchons leurs zéros communs. Une manière de trouver leur base propre est de remarquer que, pour tout  $n$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , la valeur propre de l'opérateur  $D(\xi_n)$  sur l'état de référence  $|0\rangle$  est nulle. Notons qu'il en va de même pour la valeur propre de l'opérateur  $A(\xi_n - \eta)$ . Ainsi, comme

$$a(\xi_n - \eta) = 0 \quad d(\xi_n) = 0, \quad (1.59)$$

et comme l'algèbre de Yang-Baxter  $\mathcal{A}_R$  impose la relation de commutation suivante entre opérateurs  $D$  et  $C$ ,

$$C(v)D(u) = \frac{\sinh(u + \eta - v)}{\sinh(u - v)} D(u)C(v) + \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u - v)} D(v)C(u), \quad (1.60)$$

il est clair que l'action d'un tel produit d'opérateur sur l'état de référence dual  $\langle 0|$  évaluée en  $v = \xi_n$  montre que  $\langle 0|C(\xi_n)$  est un état propre de  $D(u)$  pour tout  $u$ , le terme indirect s'annulant. Ceci nous amène à chercher les états propres de  $D(u)$  duaux de la forme suivante :

$$\langle h_1, \dots, h_N | = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle 0 | \prod_{n=1}^N \left( \frac{C(\xi_n)}{d(\xi_n - \eta)} \right)^{h_n}, \quad (1.61)$$

où les  $h_n$  sont dans  $\{0, 1\}$  et indiquent la position des spins retournés vers le bas le long de la chaîne. Le facteur de normalisation  $\mathcal{N}$  vaut quant à lui

$$\mathcal{N} = \prod_{1 \leq b < a \leq N} \sinh(\xi_a - \xi_b)^{1/2}. \quad (1.62)$$

On vérifie facilement que l'ensemble des états (1.61) forme effectivement une base propre de l'opérateur  $D(u)$  pour toute valeur du paramètre spectral  $u$  et tout ensemble d'inhomogénéités  $\{\xi_n\}$  telles que  $\xi_m \neq \xi_n + j\eta$  pour tout  $n, m$  dans  $\{1, \dots, N\}$  et tout  $j$  dans  $\{-1, 0, 1\}$ . En introduisant le vecteur  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)$  paramétrant les configurations de spins, nous venons de montrer

$$\langle h_1, \dots, h_N | D(u) = d_{\mathbf{h}}(u) \langle h_1, \dots, h_N |, \quad (1.63)$$

où  $d_{\mathbf{h}}(u)$  est la valeur propre de l'opérateur  $D(u)$  sur un état paramétré par  $\mathbf{h}$  et vaut

$$d_{\mathbf{h}}(u) = \prod_{n=1}^N \sinh(u - \xi_n + h_n \eta). \quad (1.64)$$

Les variables séparées sont ainsi données par l'ensemble  $\{\xi_n - h_n \eta, 1 \leq n \leq N, h_n = 0 \text{ ou } 1\}$ , et il y en a effectivement  $2N$ . Les opérateurs  $B(u)$  et  $C(u)$  étant des polynômes trigonométriques de Laurent de degré  $N - 1$ , leur action sur les états de la forme (1.61) se calcule par interpolation. On calcule pour cela leur action en les variables séparées  $u = \xi_n - \eta h_n$  à l'aide de l'expression explicite du déterminant quantique de la chaîne de spins XXZ (1.37) et des relations de commutation de l'algèbre de Yang-Baxter (1.9), ce qui suffit à les reconstruire en tout point  $u$ . Les formules d'interpolation sont les suivantes :

$$\langle h_1, \dots, h_N | C(u) = \sum_{a=1}^N \prod_{b \neq a} \frac{\sinh(u + h_b \eta - \xi_b)}{\sinh(\xi_a - \xi_b + (h_b - h_a) \eta)} d(\xi_a - (h_a - 1) \eta) \langle h_1, \dots, h_N | T_a^+, \quad (1.65)$$

$$\langle h_1, \dots, h_N | B(u) = \sum_{a=1}^N \prod_{b \neq a} \frac{\sinh(u + h_b \eta - \xi_b)}{\sinh(\xi_a - \xi_b + (h_b - h_a) \eta)} d(\xi_a - (h_a - 1) \eta) \langle h_1, \dots, h_N | T_a^-, \quad (1.66)$$

où l'on a introduit les opérateurs de shift  $T_a^\pm$  au site  $n$  et dont l'action sur les états (1.61) est simplement donnée par

$$\langle h_1, \dots, h_a, \dots, h_N | T_a^\pm = \langle h_1, \dots, h_a \pm 1, \dots, h_N |. \quad (1.67)$$

L'action de l'opérateur  $A(u)$  sur la base propre ci-dessus est quant à elle définie implicitement à l'aide du déterminant quantique.

*Remarque 1.* La forme des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter dans la base des états propres de  $D$  est directement reliée à leur expression dans une base dans laquelle ils sont invariants par permutation des espaces quantiques. C'est cette base, appelée base  $F$  [153], qui permet de calculer de manière explicite et constructive le produit scalaire de la chaîne périodique dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique.

De manière analogue, on définit les états propres (non duaux) de  $D(u)$  comme

$$| h_1, \dots, h_N \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \prod_{n=1}^N \left( \frac{B(\xi_n)}{a(\xi_n)} \right)^{h_n} | 0 \rangle, \quad (1.68)$$

et on montre grace à l'algèbre de Yang-Baxter (1.9) que la valeur propre est donnée par la même fonction (1.63), de telle sorte que

$$D(u) | h_1, \dots, h_N \rangle = d_{\mathbf{h}}(u) | h_1, \dots, h_N \rangle. \quad (1.69)$$

L'action des opérateurs  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sur cette base peut également être construite par interpolation, voir [165]. Maintenant que les variables séparées ont été déterminées, nous cherchons à caractériser le spectre de la matrice de transfert anti-périodique  $\bar{T}(u)$ . Soit dès lors  $\langle t |$  un

état propre de la matrice de transfert anti-périodique  $\bar{T}(u)$  de valeur propre  $t(u)$ . L'équation aux valeurs propres que l'on cherche à résoudre est alors

$$\langle t | \bar{T}(u) = t(u) \langle t |. \quad (1.70)$$

En suivant Sklyanin [189, 192], l'évaluation de (1.70) en les variables séparées  $u = \xi_n - h_n \eta$  devrait la séparer en  $N$  équations aux différences finies, analogues discrètes de l'équation  $TQ$  de Baxter. L'ensemble des états propres de  $D(u)$  formant une base de  $\mathcal{H}$ ,  $\langle t |$  s'y décompose de la manière suivante,

$$\langle t | = \sum_{h_1, \dots, h_N} \langle t | h_1, \dots, h_N \rangle \langle h_1, \dots, h_N |, \quad (1.71)$$

les coefficients étant entièrement déterminés par la projection de  $\langle t |$  sur les états de la forme  $|h_1, \dots, h_N\rangle$  paramétrés par un certain vecteur  $\mathbf{h}$  de  $\mathbb{Z}_2^N$ . Ceci nous amène à introduire les fonctions coefficients

$$\Psi_t(\mathbf{h}) = \langle t | h_1, \dots, h_N \rangle, \quad (1.72)$$

et à réécrire l'équation aux valeurs propres (1.70) dans la base des états séparés, et à finalement obtenir les conditions suivantes pour les coefficients  $\Psi_t(\mathbf{h})$ ,

$$t(\xi_n - h_n \eta) \Psi_t(\mathbf{h}) = a(\xi_n - h_n \eta) \Psi_t(T_n^+ \mathbf{h}) + d(\xi_n - h_n \eta) \Psi_t(T_n^- \mathbf{h}), \quad (1.73)$$

où les opérateurs de shift  $T_n^\pm$  sont définis sur le vecteur  $\mathbf{h}$  comme

$$T_n^\pm \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n \pm 1, \dots, h_N). \quad (1.74)$$

Le problème spectral se ramène ainsi en la résolution des  $N$  conditions indépendantes (1.73). En se rappelant que l'on a toujours  $a(\xi_n - \eta) = 0$  et  $d(\xi_n) = 0$ , le système d'équations (1.73) dépendant de  $h_n$  est encore équivalent à,

$$\begin{pmatrix} t(\xi_n) & -a(\xi_n) \\ -d(\xi_n - \eta) & t(\xi_n - \eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_t(h_1, \dots, h_n = 0, \dots, h_N) \\ \Psi_t(h_1, \dots, h_n = 1, \dots, h_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

Il existe ainsi une solution non triviale, condition nécessaire à ce que  $t(u)$  appartienne effectivement au spectre de  $\bar{T}(u)$ , si et seulement si le déterminant de la matrice  $2 \times 2$  ci-dessus s'annule, c'est-à-dire si et seulement si

$$t(\xi_n) t(\xi_n - \eta) = a(\xi_n) d(\xi_n - \eta) \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N. \quad (1.76)$$

Le spectre est par conséquent entièrement caractérisé par le système d'équations (1.76). Dans le cas où  $a(\xi_n) \neq 0$  et  $d(\xi_n - \eta) \neq 0$ , ceci nous permet d'exprimer les coefficients en  $h_n = 0$  en fonction de ceux en  $h_n = 1$ , toujours pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\frac{\Psi_t(h_1, \dots, h_n = 1, \dots, h_N)}{\Psi_t(h_1, \dots, h_n = 0, \dots, h_N)} = \frac{t(\xi_n)}{a(\xi_n)}, \quad (1.77)$$

et de vérifier en utilisant la “polynômialité” de la valeur propre que les états propres  $\langle t |$  sont entièrement caractérisés par

$$\langle t | = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^1 \prod_{a=1}^N \frac{\bar{Q}_t(\xi_a - h_a \eta)}{\omega(\xi_a - \eta h_a)} \prod_{1 \leq b < a \leq N} \left( e^{2(\xi_a - h_a \eta)} - e^{2(\xi_b - h_b \eta)} \right) \langle h_1, \dots, h_N |, \quad (1.78)$$

où les fonctions  $\bar{Q}_t$  sont solutions du système

$$\frac{\bar{Q}_t(\xi_n - \eta)}{\bar{Q}_t(\xi_n)} = \frac{t(\xi_n)}{a(\xi_n)} \text{ for } 1 \leq n \leq N. \quad (1.79)$$

La fonction  $\omega$  est reliée à la normalisation des états propres de  $D$ , et est simplement définie comme  $\omega(x) = e^{x(N-1)}$  [165]. On définit de manière similaire les états propres  $| t \rangle$  de la matrice transfert anti-périodique comme

$$| t \rangle = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^1 \prod_{a=1}^N \frac{Q_t(\xi_a - h_a \eta)}{\omega(\xi_a - \eta h_a)} \prod_{1 \leq b < a \leq N} \left( e^{2(\xi_a - h_a \eta)} - e^{2(\xi_b - h_b \eta)} \right) | h_1, \dots, h_N \rangle, \quad (1.80)$$

où cette fois-ci, les fonctions  $Q_t$  sont solutions du système

$$\frac{Q_t(\xi_n - \eta)}{Q_t(\xi_n)} = \frac{t(\xi_n)}{d(\xi_n - \eta)} \text{ for } 1 \leq n \leq N. \quad (1.81)$$

Finalement, toujours en utilisant le fait que la matrice de transfert (et donc ses valeurs propres) est un polynôme en le paramètre spectral, on montre que son spectre est simple. Son spectre étant simple, il est alors évident que le produit scalaire entre deux de ses états propres différents est nul. On dispose ainsi d’une base orthogonal de l’espace des états : le problème de la complétude des états propres n’existe tout simplement pas dans le cadre de la séparation des variables.

## 1.3 Calcul des facteurs de forme : points essentiels

Rappelons que l’obtention de formules explicites pour les facteurs de forme est un point particulièrement important dans le calcul des fonctions de corrélation. Pour la chaîne de spins 1/2 XXZ, l’espace quantique étant de dimension 2, il existe trois types de facteurs de forme qui correspondent respectivement aux éléments de matrice des matrices de Pauli  $\sigma^\alpha$ , où  $\alpha$  est bien évidemment dans  $\{+, -, z\}$ . Ainsi, si  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont deux états propres de la matrice de transfert, les facteurs de forme au site  $m$  sont donnés par

$$\langle \Psi_2 | \sigma_m^\alpha | \Psi_1 \rangle. \quad (1.82)$$

Nous présentons dans une première partie la résolution du problème inverse quantique ramenant la détermination de l’action d’un opérateur local à un problème purement algébrique, et traitons les produits scalaires résultants dans une deuxième partie.

### 1.3.1 Problème de diffusion inverse quantique et action des opérateurs locaux sur un état propre

Que ce soit par l'ansatz de Bethe algébrique ou la séparation des variables, les états propres de la matrice de transfert sont construits à l'aide des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter  $\mathcal{A}_R$ . Or, la matrice de monodromie étant obtenue comme le produit de  $N$  matrices  $L$ , ces générateurs agissent de manière hautement non locale sur l'état de référence. Déterminer l'action d'un opérateur local  $\sigma^\alpha$  sur un état propre de la matrice de transfert est ainsi extrêmement compliquée. Toutefois, la résolution du problème inverse quantique qui consiste à exprimer l'opérateur local en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter, ramène la détermination de l'action à un simple problème algébrique. Ce problème a été résolu pour la première fois dans [125] pour la chaîne de spins XXZ périodique, et se base principalement sur l'invariance par translation du modèle et la propriété de régularité suivante de la matrice  $R$  :

$$R_{a_1 a_2}(0) = \sinh(\eta) P_{a_1 a_2} \quad \text{régularité,} \quad (1.83)$$

où  $P_{a_1 a_2}$  est la matrice de permutation des deux espaces quantiques<sup>3</sup>. Le résultat suivant a été obtenu pour la chaîne de spins 1/2 XXZ avec conditions aux limites périodiques [154] :

**Proposition 1.3.1.** *Soit  $E_m^{\epsilon', \epsilon}$  la matrice élémentaire agissant sur  $\mathcal{H}_m$  et d'éléments de matrice  $[E^{\epsilon', \epsilon}]_{jk} = \delta_j^{\epsilon'} \delta_k^\epsilon$ . L'expression de cette matrice dans la base des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter est la suivante,*

$$E_m^{\epsilon', \epsilon} = \left\{ \prod_{j=1}^{m-1} \mathcal{T}(\xi_j) \right\} T_{\epsilon, \epsilon'}(\xi_m) \left\{ \prod_{j=1}^m \mathcal{T}(\xi_j) \right\}^{-1}. \quad (1.84)$$

Dans le cas de la chaîne de spins XXZ périodique, les états  $\langle \Psi_2 |$  et  $|\Psi_1\rangle$  de (1.82) sont construits via l'ansatz de Bethe algébrique, et sont par conséquent des vecteurs de Bethe paramétrés par deux ensembles  $\{u\}$  et  $\{v\}$  solution des équations de Bethe,

$$\langle \Psi_2 | = \langle 0 | \prod_{j=1}^{n_2} C(u_j) = \langle \{u\} |, \quad |\Psi_1\rangle = \prod_{k=1}^{n_1} B(v_k) |0\rangle = |\{v\}\rangle. \quad (1.85)$$

Ces états étant tout deux états propres de la matrice de transfert  $\mathcal{T}(u)$ , les facteurs de forme (1.82) se ramènent à l'évaluation des quantités de la forme

$$\langle \{u\} | T_{\epsilon, \epsilon'}(\xi_m) | \{v\} \rangle, \quad (1.86)$$

et sont ainsi entièrement exprimables en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter. L'action de l'opérateur local sur un état propre de la matrice de transfert est alors entièrement déterminée par les relations de commutation quadratiques (1.9). L'état résultant s'exprime comme une combinaison linéaire d'états de Bethe paramétré par un sous ensemble  $\mathcal{P}$  de  $\{v\} \cup \{\xi_m\} = \{\nu_1, \dots, \nu_{n_1+1}\}$  de cardinal au moins  $\text{Card}\{v\} = n_1$  [126],

$$T_{\epsilon, \epsilon'}(\xi_m) | \{v\} \rangle = \sum_{\mathcal{P}} \mathcal{F}_{\mathcal{P}}(\{v\}, \xi_m; \epsilon, \epsilon') \prod_{k \in \mathcal{P}} B(\nu_k) |0\rangle. \quad (1.87)$$

3. Soit  $a \otimes b$  un élément de  $V_{a_1} \otimes V_{a_2}$ . On définit la matrice de permutation des deux espaces qu'on note  $P_{a_1 a_2}$  comme l'opérateur dont l'action sur les éléments de  $V_{a_1} \otimes V_{a_2}$  vaut  $P_{a_1 a_2}(a \otimes b) = b \otimes a$

Dès lors, la détermination des facteurs de forme se ramène au calcul des produits scalaires entre un état propre de la matrice de transfert et un état de Bethe quelconque,

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^{n_2} C(u_j) \prod_{k=1}^{n'} B(\nu_k) | 0 \rangle. \quad (1.88)$$

Pour la chaîne de spins 1/2 XXZ anti-périodique, les états propres de la matrice de transfert anti-périodiques (1.78), (1.80) sont construits par la méthode de séparation des variables comme une combinaison linéaire des états propres de l'opérateur  $D$ . Or, la reconstruction (1.84) exprime les opérateurs locaux en fonction des matrices de transfert de la chaîne périodique, dont l'action sur un état (1.80) n'est pas diagonale. La résolution du problème inverse quantique pour la chaîne anti-périodique doit ainsi faire intervenir les matrices de transferts anti-périodiques  $\bar{T}(u)$ . C'est ce qui a été fait dans [165], où les formules de reconstruction pour les matrices élémentaires sont données par la proposition suivante :

**Proposition 1.3.2.** *Pour la chaîne de spins 1/2 XXZ anti-périodique, la reconstruction d'une matrice élémentaire  $E_m^{\epsilon, \epsilon'}$  à l'aide des matrices de transfert anti-périodiques  $\bar{T}(u)$  vaut,*

$$E_m^{\epsilon, \epsilon'} = \left\{ \prod_{j=1}^{m-1} \bar{T}(\xi_b) \right\} \text{tr}_a \left[ T_a(\xi_m) E_m^{\epsilon', \epsilon} \sigma_m^x \right] \left\{ \prod_{j=1}^m \bar{T}(\xi_b) \right\}^{-1}. \quad (1.89)$$

De manière similaire à ce qui se passe pour la chaîne périodique, la résolution de (1.89) permet de calculer l'action d'un opérateur local sur un état propre de la matrice de transfert anti-périodique grâce aux relations de commutation (1.9), ce qui produit un état quelconque automatiquement décomposé sur la base  $\{|h_1, \dots, h_N\rangle\}$ . Les facteurs de forme se résument ici aussi au calcul des produits scalaires entre un état propre de la forme (1.78) et un état quelconque.

### 1.3.2 Produits scalaires et représentation simple pour les facteurs de forme

Rappelons que pour la chaîne périodique, les états que l'on considère sont des états de Bethe, c'est-à-dire qu'ils sont générés par l'action successive d'opérateurs  $B$  sur  $|0\rangle$  ou  $C$  sur  $\langle 0|$ , tandis que pour la chaîne anti-périodique, ils s'expriment comme une combinaison linéaire d'états de Bethe. De plus, la résolution du problème inverse quantique pour les deux chaînes exprime les opérateurs locaux en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter, de telle sorte que l'action d'un tel opérateur local est entièrement déterminée par les relations de commutation (1.9) entre un de ces générateurs et un produit successif d'opérateurs  $B$  ou  $C$ . Or, cette action stabilise l'espace des vecteurs de Bethe, les fonctions de corrélation s'expriment ainsi comme une combinaison linéaire de produits scalaires entre un état propre de la matrice de transfert et un état de Bethe quelconque. Pour la chaîne périodique, ces produits scalaires sont bien sûr de la forme suivante,

$$S_{n_2, n_1}(\{u\}, \{v\}) = \langle 0 | \prod_{j=1}^{n_2} C(u_j) \prod_{k=1}^{n_1} B(v_k) | 0 \rangle, \quad (1.90)$$

où l'un des deux ensembles  $\{u\}$  et  $\{v\}$  est solution des équations de Bethe. Comme l'opérateur  $B$  "retourne un spin" vers le bas de manière délocalisée et que l'opérateur  $C$  retourne quant à

lui un spin vers le haut, les produits scalaires (1.90) sont non nuls si et seulement si  $n_1 = n_2$ . On s'intéresse dès lors aux quantités de la forme

$$S_n(\{u\}, \{v\}) = \langle 0 | \prod_{j=1}^n C(u_j) \prod_{k=1}^n B(v_k) | 0 \rangle, \quad (1.91)$$

où par exemple l'ensemble  $\{v\}$  est solution des équations de Bethe et  $\{u\}$  est a priori arbitraire. Lorsque  $\{u\} \subset \{\xi\}$ , ces produits scalaires coïncident avec la fonction de partition à  $n$  sites  $Z_n(\{v\}, \{\xi_{i_k}\})$  du modèle à six-vertex pour des conditions aux limites de type paroi de domaine, et pour laquelle une expression compacte et explicite sous la forme d'un unique déterminant a été obtenue par Izergin [99, 101] :

$$Z_n(\{v\}, \{\xi_{i_k}\}) = \prod_{j=1}^n d(v_j) \frac{\prod_{j,k} \sinh(v_j - \xi_{i_k} + \eta)}{\prod_{j>k} \sinh(\xi_{i_k} - \xi_{i_j}) \prod_{j<k} \sinh(v_k - v_j)} \det_n [\mathcal{N}(\{v\}, \{\xi_{i_k}\})], \quad (1.92)$$

avec

$$[\mathcal{N}(\{v\}, \{\xi_{i_k}\})]_{jk} = \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(v_j - \xi_{i_k} + \eta) \sinh(v_j - \xi_{i_k})}, \quad 1 \leq j, k \leq n. \quad (1.93)$$

Finalement, Slavnov réussi à obtenir une expression des produits scalaires (1.91) également sous la forme d'un unique déterminant comme le montre la proposition suivante [195]. Cette représentation pour les produits scalaires se confond comme attendu avec l'expression obtenue par Izergin pour fonction de partition du modèle à six-vertex lorsqu'un des deux ensembles de paramètres coïncide avec un ensemble d'inhomogénéités.

**Proposition 1.3.3.** *Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est solution des équations de Bethe (1.42), et  $\{u_1, \dots, u_n\}$  est un ensemble quelconque de paramètres spectraux, le produit scalaire entre les deux états de Bethe respectivement paramétrés par ces deux ensembles est égal à*

$$S_n(\{u\}, \{v\}) = S_n(\{v\}, \{u\}) = \frac{\prod_{j=1}^n d(v_j)}{\prod_{j<k}^n \sinh(u_j - u_k) \sinh(v_k - v_j)} \det_n [\Omega_{\kappa=1}(\{v\}, \{u\} | \{v\})], \quad (1.94)$$

où la matrice  $\Omega_{\kappa}(\{v\}, \{u\} | \{v\})$  est définie par la formule qui suit pour trois ensembles de paramètres  $\{v\}$ ,  $\{u\}$ ,  $\{w\}$  tels que  $\{v\} \subset \{w\}$ ,  $\text{Card}\{v\} = n = \text{Card}\{u\}$ ,  $\text{Card}\{w\} = n'$  avec  $n \leq n'$ ,

$$\begin{aligned} [\Omega_{\kappa}(\{v\}, \{u\} | \{w\})]_{jk} &= a(u_k) \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(v_j - u_k) \sinh(v_j - u_k + \eta)} \prod_{l=1}^{n'} \sinh(w_l - u_k + \eta) \\ &\quad - \kappa d(u_k) \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u_k - v_j) \sinh(u_k - v_j + \eta)} \prod_{l=1}^{n'} \sinh(w_l - u_k - \eta). \end{aligned} \quad (1.95)$$

C'est sur cette représentation relativement simple, appelée formule de Slavnov, qu'est construite toute l'étude des fonctions de corrélation dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique. Il est ainsi essentiel d'obtenir une expression explicite et manipulable de la fonction de partition du modèle de physique statistique associée à la chaîne quantique, sans quoi les produits scalaires ne sauraient eux aussi admettre une telle représentation. Notons qu'une démonstration plus constructive a été proposée dans [125] en se basant sur la notion de twist factorisant [62, 64, 65].

Dans (1.94) la limite de la norme pour laquelle les ensembles de paramètres  $\{u\}$  coïncident avec  $\{v\}$  et sont par conséquent solutions des équations de Bethe, est a priori singulière. Or, dans cette limite, ces singularités sont en fait artificielles car les termes du numérateur tendent vers le système d'équation de Bethe (et admettent donc un zéro d'ordre un). Nous obtenons ainsi la formule de Gaudin pour le carré de la norme d'un état propre de Bethe  $|\{v\}\rangle$  [83, 84],

$$\langle \{v\} | \{v\} \rangle = \frac{\prod_{j=1}^n d(v_j)}{\prod_{j,k=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k)} \det_n [\Omega_{\kappa=1}(\{v\}, \{v\} | \{v\})], \quad (1.96)$$

que l'on peut encore écrire comme un Jacobien en termes de la fonction (1.51) avec

$$\det_n [\Omega_{\kappa=1}(\{v\}, \{v\} | \{v\})] = \det_n \left[ -\frac{\partial}{\partial v_k} \mathcal{Y}_{\kappa=1}(v_j, \{v\}) \right]. \quad (1.97)$$

De plus, l'expression des produits scalaires dans le cas  $\kappa$ -déformé est tout à fait similaire au cas non déformé. Les résultats (1.94), (1.96) pour lesquels  $\kappa = 1$  se transposent directement au cas déformé en considérant un  $\kappa$  quelconque. On peut également montrer à l'aide de la formule (1.94) que deux états propres de Bethe  $|\{u\}\rangle$  et  $|\{v\}\rangle$  ne coïncidant pas sont orthogonaux [123]. On exhibe pour ce faire un vecteur propre de  $\Omega_{\kappa}(\{v\}, \{u\} | \{v\})$  de valeur propre nulle, ce qui assure l'annulation du déterminant et par suite l'orthogonalité des deux états de Bethe. Finalement, les facteurs de forme entre deux états propres paramétrés par  $\{u\}$  et  $\{v\}$ , et de cardinal respectif  $n+1$  et  $n$ , se représentent eux aussi à l'aide d'un unique déterminant comme le montre (1.84) et (1.94),

$$\begin{aligned} \langle \{u\} | \sigma_m^- | \{v\} \rangle &= \frac{\prod_{a=1}^{m-1} \tau(\xi_a | \{u\})}{\prod_{a=1}^m \tau(\xi_a | \{v\})} \frac{\prod_{j=1}^{n+1} d(u_j)}{\prod_{j,k=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k) \prod_{j,k=1, j < k}^{n+1} \sinh(u_k - u_j)} \\ &\times \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sinh(v_j - \xi_k)} \det_{n+1} [\Omega_{\kappa=1}(\{u\}, \{v\} \cup \{\xi_m\} | \{u\})], \end{aligned} \quad (1.98)$$

le facteur de forme de  $\sigma_m^+$  étant quant à lui proportionnel à (1.98). Le facteur de forme de  $\sigma_m^z$  est non nul si et seulement si le cardinal des deux ensembles  $\{u\}$  et  $\{v\}$  est identique en vertu de (1.84). Son expression est légèrement plus compliquée que (1.98), mais il est là aussi possible d'en obtenir une représentation sous la forme d'un unique déterminant comme le montre la formule suivante,

$$\begin{aligned} \langle \{u\} | \sigma_m^z | \{v\} \rangle &= \frac{\prod_{a=1}^m \tau(\xi_a | \{u\})}{\prod_{a=1}^m \tau(\xi_a | \{v\})} \frac{\prod_{j=1}^n d(u_j)}{\prod_{j,k=1, j \neq k}^n \sinh(v_j - v_k) \sinh(u_k - u_j)} \\ &\times \prod_{j,k=1}^n \sinh(v_a - v_k + \eta) \det_n [\Omega_{\kappa=1}(\{u\}, \{v\} | \{u\}) - 2P(\{u\}, \{v\})], \end{aligned} \quad (1.99)$$

où  $P(\{u\}, \{v\})$  est une matrice de rang 1 qui vaut,

$$\left[ P(\{u\}, \{v\}) \right]_{jk} = a(v_k) \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u_j - \xi_m) \sinh(u_j - \xi_m + \eta)} \prod_{a=1}^n \frac{\sinh(u_a - \xi_m + \eta)}{\sinh(v_a - \xi_m + \eta)}. \quad (1.100)$$

Notons que la taille de ces déterminants, lorsqu'ils ne s'annulent pas, est égale au cardinal du plus grand des deux ensembles paramétrant les états de Bethe que l'on considère. Remarquons finalement que ces résultats essentiellement algébriques se généralisent immédiatement en présence d'un champ magnétique extérieur  $h$  constant et parallèle à l'axe d'anisotropie. En effet, le Hamiltonien en champ non nul est simplement

$$\mathbf{H}_h = \sum_{n=1}^N \left\{ \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta(\sigma_n^z \sigma_{n+1}^z - 1) \right\} - h S_z, \quad (1.101)$$

où  $S_z$  est l'opérateur de spin total

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^z. \quad (1.102)$$

Ce dernier commutant avec le Hamiltonien et les matrices de transfert, les états propres et la structure algébrique symétrie du problème n'en sont pas modifiés. L'ansatz de Bethe algébrique se révèle ici plus puissant que les approches en volume infini, qui n'ont jusqu'à présent été développées que dans le cas où le champ magnétique extérieur est nul.

Dans le cadre de la séparation des variables, l'obtention des produits scalaires de la chaîne anti-périodique entre deux états quelconques dépend uniquement de la structure algébrique des *états séparés*, que l'on définit de la manière suivante,

$$\langle \alpha | = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^1 \prod_{a=1}^N \frac{\alpha_a(\xi_a - h_a \eta)}{\omega(\xi_a - h_a \eta)} \prod_{1 \leq b < a \leq N} \left( e^{2(\xi_a - h_a \eta)} - e^{2(\xi_b - h_b \eta)} \right) \langle h_1, \dots, h_N |, \quad (1.103)$$

$$| \beta \rangle = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^1 \prod_{a=1}^N \frac{\beta_a(\xi_a - h_a \eta)}{\omega(\xi_a - h_a \eta)} \prod_{1 \leq b < a \leq N} \left( e^{2(\xi_a - h_a \eta)} - e^{2(\xi_b - h_b \eta)} \right) | h_1, \dots, h_N \rangle, \quad (1.104)$$

où les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  sont a priori quelconques. Ces états se confondent bien sûr avec les états propres de la matrice de transfert lorsque les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  respectent les conditions (1.79) et (1.81). On cherche ainsi à déterminer les produits scalaires suivants,

$$\langle \alpha | \beta \rangle, \quad (1.105)$$

entre deux états séparés. Or, comme l'ensemble  $\{ | h_1, \dots, h_N \rangle \}$  des états propres de  $D$  forme une base orthogonal de l'espace des états, (1.105) est ainsi proportionnel à

$$\sum_{h_1, \dots, h_N=0}^1 \prod_{a=1}^N \frac{\alpha_a(\xi_a - h_a \eta) \beta_a(\xi_a - h_a \eta)}{\omega(\xi_a - h_a \eta)} \langle h_1, \dots, h_N | h_1, \dots, h_N \rangle. \quad (1.106)$$

Les normes précédentes sont facilement calculables [89, 165] et s'expriment en termes d'un déterminant de Vandermonde. En utilisant la linéarité du déterminant, la  $n$ -ième somme entre dans la  $n$ -ième colonne de ce déterminant, et on obtient finalement l'expression suivante pour les produits scalaires entre états séparés.

**Proposition 1.3.4.** Soit  $\langle \alpha |$  et  $|\beta \rangle$  deux états séparés quelconques. Le produit scalaire entre ces deux états vaut,

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \det_N [\Phi_{jk}^{(\alpha, \beta)}], \quad (1.107)$$

avec

$$[\Phi_{jk}^{(\alpha, \beta)}] = e^{2(k-1)\xi_j} \sum_{h=0}^1 \frac{\alpha_j(\xi_j - \eta h) \beta_j(\xi_j - \eta h)}{\omega(\xi_j - \eta h)} e^{-2(k-1)h\eta}. \quad (1.108)$$

La séparation des variables permet d'exprimer les produits scalaires entre deux états séparés quelconques sous la forme d'un unique déterminant, là où l'ansatz de Bethe algébrique nécessite qu'au moins un des deux états soit état propre de la matrice de transfert. Un état quelconque n'est cependant pas forcément factorisable sous la forme d'un état séparé (1.103) ou (1.104), bien qu'il soit toujours possible de l'exprimer comme une combinaison linéaire de tels états. De plus, les états propres de la matrice de transfert anti-périodique sont justement des états séparés dont les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  respectent (1.79) et (1.81), de telle sorte que leur produit scalaire s'exprime également comme (1.107). Enfin, comme pour la chaîne périodique, on montre que deux états propres différents de la matrice de transfert anti-périodique sont orthogonaux en exhibant un vecteur propre non nul de  $\Phi_{jk}^{(t, t')}$  dont la valeur propre est nulle.

L'obtention d'une formule compacte et manipulable pour les produits scalaires (ici un unique déterminant) et la résolution du problème inverse quantique constituant les deux points essentiels du calcul des fonctions de corrélation, il est maintenant possible de calculer explicitement les facteurs de forme de la chaîne anti-périodique. Les résultats obtenus pour cette chaîne de spins s'expriment eux aussi en termes d'un unique déterminant, qui cette fois ci est de taille  $N + 1$  comme le montre la proposition suivante [89, 165].

**Proposition 1.3.5.** Soit  $\langle t |$  et  $|t' \rangle$  deux états propres de la matrice de transfert anti-périodique  $\bar{T}(v)$ , le facteur de forme de  $\sigma_m^-$  au site  $m$  s'exprime sous la forme d'un unique déterminant de taille  $N + 1$ ,

$$\langle t | \sigma_m^- | t' \rangle = \frac{\prod_{a=1}^{m-1} t(\xi_a) \prod_{l=1}^m t'(\xi_a - \eta)}{\prod_{l=1}^m a(\xi_l) d(\xi_l - \eta)} \det_{N+1} [S^{(-, t, t')}] \quad (1.109)$$

avec

$$[S^{(-, t, t')}]_{jk} = \begin{cases} \Phi_{j, k+1/2}^{(t, t')} \text{ pour } a \in \{1, \dots, N\}, \\ e^{2(k-1)\xi_m - N\xi_m} \text{ pour } a = N + 1. \end{cases} \quad (1.110)$$

De manière similaire, le facteur de forme de  $\sigma_m^z$  au site  $m$  s'exprime sous la forme d'un unique déterminant de taille  $N + 1$ ,

$$\langle t | \sigma_m^z | t' \rangle = \frac{\prod_{a=1}^{m-1} t(\xi_a) \prod_{l=1}^m t'(\xi_a - \eta)}{\prod_{l=1}^m a(\xi_l) d(\xi_l - \eta)} \det_{N+1} [S^{(z, t, t')}] \quad (1.111)$$

où

$$[S^{(z, t, t')}]_{jk} = \begin{cases} \Phi_{j, k}^{(t, t')} \text{ pour } a, b \in \{1, \dots, N\}, \\ e^{2(k-1/2)\xi_m - N\xi_m} \text{ pour } a = N + 1, b \in \{1, \dots, N\}, \\ \frac{Q_{t'}(\xi_j - \eta) \bar{Q}_t(\xi_j)}{\omega(\xi_j - \eta)} (\xi_j - \eta)^{N-1} d(\xi_j - \eta) \text{ pour } a \in \{1, \dots, N\}, \\ 1/2 \text{ pour } a = N + 1 = b. \end{cases} \quad (1.112)$$

Remarquons finalement que dans le cadre de la séparation des variables, la taille des déterminants impliqués dans les produits scalaires est égale à la longueur de la chaîne, et ce quelque soit les états séparés considérés. Les facteurs de forme s'expriment par suite à l'aide d'un déterminant de taille  $N + 1$ , alors que dans l'ansatz de Bethe algébrique, cette taille coïncide avec le cardinal du plus grand des deux ensembles paramétrant les états de Bethe (lorsque les produits scalaires sont non nuls). Enfin, signalons que les représentations obtenues pour les produits scalaires et les facteurs de forme de la chaîne anti-périodique ont jusqu'à présent été difficilement exploitables pour prendre la limite thermodynamique. Dans le cadre de la séparation des variables, le passage en volume infini est en effet un problème encore totalement ouvert.

## 1.4 Quelques applications à l'étude des fonctions de corrélation

Les parties précédentes posent les fondements du calcul des fonctions de corrélation par l'ansatz de Bethe algébrique et la séparation des variables. Le développement de la méthode de séparation des variables dans la direction du calcul des fonctions de corrélation étant très récent, cette méthode n'a pour l'instant pas encore été utilisée pour le calcul effectif de quantités physique telles que, par exemple, les fonctions à deux points. En particulier, un problème crucial et encore ouvert à ce jour par cette méthode, est celui de l'étude de la limite thermodynamique des expressions obtenues pour les facteurs de forme. Néanmoins, depuis les résultats fondateurs obtenus dans [125, 195] et que nous avons rappelés au paragraphe précédent, l'approche par l'ansatz de Bethe algébrique pour le calcul des fonctions de corrélation a connu un certain nombre de développements remarquables. L'objet de cette partie est de présenter succinctement les résultats les plus marquants obtenus par cette méthode.

### 1.4.1 Problématique du calcul des fonctions à deux points

La solution du problème inverse quantique et l'expression explicite et compacte pour les produits scalaires entre un état quelconque et un état propre de la matrice de transfert nous permettent, comme nous l'avons vu, d'attaquer le problème du calcul des fonctions de corrélation de la forme (6). Supposons que l'on veuille maintenant calculer les fonctions à deux points de la chaîne périodique à température nulle, c'est-à-dire les valeurs moyennes dans l'état fondamental (ou les états fondamentaux si ceux-ci sont dégénérés) d'un produit de deux opérateurs de spin. L'invariance par translation nous assure qu'une telle valeur moyenne ne dépende que de la distance relative entre ces opérateurs, c'est-à-dire qu'il suffit de calculer les quantités de la forme

$$\frac{\langle \{u\} | \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_m^{\alpha_m} | \{u\} \rangle}{\langle \{u\} | \{u\} \rangle}, \quad (1.113)$$

où l'ensemble des paramètres  $\{u\}$  est solution des équations de Bethe pour l'(un des) état(s) fondamental(aux), et où  $\alpha_1$  et  $\alpha_m$  sont dans  $\{+, -, z\}$ . Il existe deux façons naturelles de calculer cette quantité. Sous l'hypothèse de complétude, une première manière est d'introduire entre

les opérateurs  $\sigma$  la relation de fermeture exprimée dans la base des états propres de Bethe,

$$\frac{\langle \{u\} | \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_m^{\alpha_m} | \{u\} \rangle}{\langle \{u\} | \{u\} \rangle} = \sum_{\{v\}, \text{états propres}} \frac{\langle \{u\} | \sigma_1^{\alpha_1} | \{v\} \rangle \langle \{v\} | \sigma_m^{\alpha_m} | \{u\} \rangle}{\langle \{u\} | \{u\} \rangle \langle \{v\} | \{v\} \rangle}, \quad (1.114)$$

et d'ainsi ramener le calcul de (1.113) au calcul des facteurs de forme comme nous l'avons déjà expliqué. Toutefois, cette méthode a le désavantage de produire  $2^N$  termes qu'il faut resommer par la suite. La deuxième manière de calculer (1.113) est d'exprimer le produit des deux opérateurs locaux  $\sigma_1^{\alpha_1} \sigma_m^{\alpha_m}$  comme une somme de chaînes de matrices élémentaires du type  $E_1^{\epsilon'_1, \epsilon_1} \dots E_m^{\epsilon'_m, \epsilon_m}$ . La fonction à deux points est alors reconstruite comme une combinaison linéaire de blocs élémentaires de la forme suivante,

$$\frac{\langle \{u\} | E_1^{\epsilon'_1, \epsilon_1} \dots E_m^{\epsilon'_m, \epsilon_m} | \{u\} \rangle}{\langle \{u\} | \{u\} \rangle}, \quad (1.115)$$

le nombre de termes de la somme étant de l'ordre de  $2^{m-1}$ . De même que les facteurs de forme, les blocs élémentaires (1.115) peuvent être calculés explicitement grâce à la résolution du problème inverse quantique,

$$E_1^{\epsilon'_1, \epsilon_1} \dots E_m^{\epsilon'_m, \epsilon_m} = T_{\epsilon_1, \epsilon'_1}(\xi_1) \dots T_{\epsilon_m, \epsilon'_m}(\xi_m) \prod_{j=1}^m \mathcal{T}(\xi_j)^{-1}, \quad (1.116)$$

qui permet de calculer de manière générique l'action de la chaîne d'opérateurs (1.116) sur l'état  $|\{u\}\rangle$ , et d'exprimer (1.115) comme une somme multiple dont chaque terme est donné par un quotient de deux déterminants : l'un (au dénominateur) correspond au déterminant de la matrice  $\Omega_{\kappa=1}(\{v\}, \{v\}|\{v\})$  intervenant dans l'expression (1.96), l'autre (au numérateur) étant donné par le déterminant de cette même matrice où certaines colonnes (au plus  $m$ ) ont été remplacées par des colonnes de la matrice intervenant dans l'expression de la fonction de partition (1.92) (ce qui correspond au fait que certains des paramètres  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ont été échangés avec certains des paramètres  $\xi_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ ). L'avantage de cette méthode par rapport à la précédente est que le nombre de blocs élémentaires nécessaire à la reconstruction de la fonction à deux points (1.113) reste fini à la limite thermodynamique. Néanmoins, du fait de la relative complexité de l'expression des blocs élémentaires (1.115), la représentation résultante pour la fonction à deux points devient rapidement intraitable dès que la distance entre les deux opérateurs dépasse un tout petit nombre de sites.

Pour l'étude des quantités (1.113), il apparaît donc nécessaire d'être capable de resommer de manière effective soit la somme sur les facteurs de forme, soit la somme sur les blocs élémentaires. En fait, au niveau de la chaîne finie, il a été montré dans [124] que ces deux types de resommations étaient formellement équivalents à une même représentation "maîtresse" pour la fonction à deux points sous forme d'une intégrale multiple de contour. Nous rappelons ici la formule obtenue dans [124] pour une fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points  $\langle \sigma_1^z \sigma_m^z \rangle$ , définie de la manière suivante. Considérons l'opérateur

$$Q_{1,m}^{\kappa} = \prod_{n=1}^m \left( \frac{1+\kappa}{2} + \frac{1-\kappa}{2} \sigma_n^z \right) = \prod_{b=1}^m \mathcal{T}_{\kappa}(\xi_b) \cdot \prod_{b=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_b), \quad (1.117)$$

qui est un polynôme de degré  $m$  en un certain paramètre complexe  $\kappa$ . Il est clair que l'évaluation de (1.117) en  $\kappa = 1$  fait coïncider  $Q_{1,m}^{\kappa}$  avec l'identité, tandis que son évaluation en  $\kappa = 0$  entre

deux états fondamentaux  $|\Psi_g\rangle$  est reliée à une quantité physique importante, la probabilité de formation du vide

$$\langle \Psi_g | E_1^{++} \dots E_m^{++} | \Psi_g \rangle, \quad (1.118)$$

correspondant à la probabilité de trouver, dans l'état fondamental  $|\Psi_g\rangle$ , une sous-chaîne de longueur  $m$  avec tous les spins vers le haut selon l'axe  $z$ . On considère plus généralement la valeur moyenne de (1.117) dans un état propre  $|\{v\}\rangle$  de la matrice de transfert,

$$\langle Q_{1,m}^\kappa \rangle = \frac{\langle \{v\} | Q_{1,m}^\kappa | \{v\} \rangle}{\langle \{v\} | \{v\} \rangle}. \quad (1.119)$$

C'est une fonction génératrice de la valeur moyenne de  $\sigma_1^z \sigma_m^z$  dans ce même état propre selon l'identité suivante,

$$\frac{1}{2} \langle (1 - \sigma_1^z)(1 - \sigma_{m+1}^z) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} \langle Q_{1,m+1}^\kappa - Q_{1,m}^\kappa - Q_{2,m+1}^\kappa + Q_{2,m}^\kappa \rangle. \quad (1.120)$$

La proposition qui suit a été obtenue dans [124].

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $\{\xi\}$  un ensemble d'inhomogénéités génériques et  $\{v\}$  une solution admissible et hors diagonale des équations de Bethe non déformées. Il existe alors  $\kappa_0 > 0$  tel que, pour  $|\kappa| < \kappa_0$ , la valeur moyenne de  $Q_{1,m}^\kappa$  dans l'état propre  $|\{v\}\rangle$  en volume fini admet la représentation intégrale suivante,*

$$\begin{aligned} \langle Q_{1,m}^\kappa \rangle = & \frac{1}{n!} \oint_{\Gamma_{\{\xi\} \cup \Gamma\{\lambda\}}} \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2i\pi} \prod_{a=1}^n \prod_{b=1}^m \left( \frac{\sinh(v_a - \xi_b)}{\sinh(z_a - \xi_b)} \cdot \frac{\sinh(z_a - \xi_b + \eta)}{\sinh(v_a - \xi_b + \eta)} \right) \\ & \times \frac{\det_n [\Omega_\kappa(\{z\}, \{v\} | \{z\})] \cdot \det_n [\Omega_{\kappa=1}(\{v\}, \{z\} | \{v\})]}{\prod_{a=1}^n \mathcal{Y}_\kappa(z_a | \{z\}) \cdot \det_n [\Omega_{\kappa=1}(\{v\}, \{v\} | \{v\})]}, \end{aligned} \quad (1.121)$$

où le contour d'intégration est tel que les seules singularités de l'intégrand contribuant à cette valeur moyenne sont les points  $\{\xi\}$  et  $\{v\}$ .

La formule maîtresse (1.121) est le résultat de la resommation formelle de la somme sur les facteurs de forme d'une part, et de la somme sur les blocs élémentaires d'autre part. Ces deux types de somme correspondent aux deux façons d'évaluer l'intégrale multiple (1.121) comme une somme sur les résidus. En appliquant le théorème des résidus à l'intérieur du contour d'intégration  $\Gamma_{\{\xi\}} \cup \Gamma\{\lambda\}$ , la fonction génératrice s'exprime à l'aide des blocs élémentaires (1.115). Au contraire, l'évaluation de (1.121) à l'aide du théorème des résidus appliqué en dehors du contour d'intégration permet de l'exprimer à l'aide du développement sur les facteurs de forme. En effet, dans ce cas, les seuls pôles contribuant à (1.121) correspondent aux solutions  $\{u\}$  admissibles et hors diagonales des équations de Bethe déformées  $\mathcal{Y}_\kappa(u_a | \{u\}) = 0$ , correspondant à la décomposition

$$\langle Q_{1,m}^\kappa \rangle = \sum_{\{u\}} \frac{\langle \{v\} | \prod_{b=1}^n \mathcal{T}_\kappa(\xi_b) | \{u\}, \kappa \rangle}{\langle \{u\}, \kappa | \{u\}, \kappa \rangle} \cdot \frac{\langle \{u\}, \kappa | \prod_{b=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_b) | \{v\} \rangle}{\langle \{v\} | \{v\} \rangle}. \quad (1.122)$$

Notons que, si l'on démontre la formule maîtresse (1.121) via la sommation sur les facteurs de forme (1.122), il est nécessaire d'utiliser le résultat sur la complétude des états propres de Bethe  $\kappa$ -déformé [207]. Ce n'est bien sûr pas nécessaire si l'on démontre cette formule via la sommation sur les blocs élémentaires (sommation néanmoins combinatoirement plus compliquée à mettre en œuvre) et, dans ce cas, la somme (1.122) apparaît comme une conséquence de cette formule.

Notons enfin que l'étude des fonctions à deux points peut également être effectuée dans le cas de fonctions de corrélation dépendant du temps [123], de la température [87, 88], ou des deux à la fois [180].

### 1.4.2 Étude de la limite thermodynamique

Les quantités calculées en volume fini (facteurs de forme, blocs élémentaires...) s'expriment en terme des solutions des équations de Bethe. Pour pouvoir calculer de manière effective ces quantités, il faut donc être capable de caractériser plus précisément les solutions dont nous avons besoin, notamment l'état fondamental (ou les états fondamentaux), mais aussi, pour l'étude des facteurs de forme, les états excités.

Il est bien sûr possible de résoudre numériquement les équations de Bethe, de calculer les déterminants correspondants pour les facteurs de forme, et d'effectuer, toujours numériquement, la sommation sur les facteurs de forme (1.114). Cette démarche a été menée à bien notamment dans [52, 53], conduisant à des résultats quantitatifs d'excellente précision pour les facteurs de structure de la chaîne XXZ, c'est-à-dire pour les transformées de Fourier des fonctions à deux points, qui sont directement mesurables expérimentalement.

Il est également possible de mener à bien une étude complètement analytique de ces mêmes quantités. Comme les systèmes physiques qui nous intéressent sont en général des systèmes de grande taille, il faut pour cela être capable de déterminer le comportement des quantités précédemment calculées dans la limite de volume infini, ou limite thermodynamique.

Dans cette limite, on peut distinguer trois régimes selon la valeur de  $\Delta$  pour le spectre de la chaîne de spins XXZ qui, en l'absence de champ magnétique extérieur, sont donnés comme suit :

- régime ferromagnétique pour  $\Delta < -1$  : il existe à la limite thermodynamique deux états fondamentaux dégénérés  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  qui correspondent aux deux états ferromagnétiques avec respectivement tous les spins vers le haut et vers le bas.
- régime critique pour  $-1 < \Delta \leq 1$  : il existe à la limite thermodynamique un unique état fondamental  $|\Psi_g\rangle$  de magnétisation nulle. C'est un régime non massif pour lequel le spectre devient continu à la limite thermodynamique.
- régime massif antiferromagnétique pour  $1 < \Delta$  : l'état fondamental (également de magnétisation nulle) devient doublement dégénéré à la limite thermodynamique, la différence d'énergie entre l'état fondamental  $|\Psi\rangle$  et le quasi-fondamental  $|\Psi'\rangle$  étant exponentiellement décroissante en la longueur de la chaîne. Ces deux états sont séparés des autres états excités par un gap d'énergie qui persiste à la limite thermodynamique.

Les états fondamentaux, dans les régimes où ils sont non triviaux (régime critique et régime massif antiferromagnétique), ont été étudiés dans [215, 216]. Ils sont caractérisés par des ensembles bien identifiés de solutions réelles  $v_1, \dots, v_n$  des équations de Bethe [215]. Dans la limite thermodynamique, ces racines se condensent dans un intervalle symétrique  $[-\Lambda, \Lambda]$  de

l'axe réel (la zone de Fermi) avec une certaine fonction densité  $\rho(v)$  solution d'une unique équation intégrale linéaire de la forme [97, 216]

$$\rho(v) + \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} K(v-z) \rho(z) dz = \frac{p'_0(v)}{2\pi}. \quad (1.123)$$

Les fonctions  $p'_0$  et  $K$ , qui dépendent du régime considéré, sont reliées aux fonctions qui définissent les équations de Bethe (1.42). La borne d'intégration  $\Lambda$  dépend du régime considéré et de la présence éventuelle d'un champ magnétique extérieur. Par exemple, dans le régime critique et en l'absence de champ magnétique,  $\Lambda = +\infty$ , et l'équation intégrale (1.123) est explicitement soluble par transformée de Fourier, la solution  $\rho(v)$  étant égale à

$$\rho(v) = \frac{1}{2\zeta \cosh(\frac{\pi v}{\zeta})}, \quad \text{avec } \zeta = i\eta > 0. \quad (1.124)$$

De manière plus générale, à la limite thermodynamique, les sommes discrètes sur les solutions  $v_1, \dots, v_n$  des équations de Bethe décrivant l'état fondamental du régime critique ou l'un des deux états fondamentaux du régime massif deviennent des intégrales de mesure  $\rho(v)$  :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n f(v_j) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(v) \rho(v) dv, \quad (1.125)$$

pour n'importe quelle fonction régulière  $f(v)$ . Ceci a permis aux auteurs de [126] d'obtenir des représentations sous forme d'intégrales multiples pour les blocs élémentaires (1.115) à la limite thermodynamique, de la forme

$$\frac{\langle \{v\} | E_1^{\epsilon'_1, \epsilon_1} \dots E_m^{\epsilon'_m, \epsilon_m} | \{v\} \rangle}{\langle \{v\} | \{v\} \rangle} = \left( \prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}_j} dz_j \right) \mathcal{F}(\{z\}, \{\epsilon_k, \epsilon'_k\}) \mathcal{S}(\{z\}). \quad (1.126)$$

Dans cette expression, les contours d'intégration  $\{\mathcal{C}_j, j = 1, \dots, m\}$  dépendent du régime, de la valeur du champ magnétique et de la configuration  $\{\epsilon_k, \epsilon'_k\}$  du bloc considéré. Deux parties peuvent être distinguées dans l'intégrande : une partie purement algébrique  $\mathcal{F}(\{z\}, \{\epsilon_k, \epsilon'_k\})$  qui ne dépend que de la chaîne de matrice élémentaires considérée (et pas de la nature de l'état fondamental), et une partie  $\mathcal{S}(\{z\})$ , commune à chaque bloc, qui contient toute l'information sur l'état fondamental (c'est une fonctionnelle de la densité  $\rho(v)$ , sous forme d'un déterminant de taille  $m$ , obtenu comme la limite thermodynamique du rapport des deux déterminants précédemment mentionnés qui, rappelons-le, ne différaient que par au plus  $m$  colonnes). Nous renvoyons à l'article [126] pour une expression plus explicite de ces blocs élémentaires. Signalons simplement ici que les formules obtenues dans [126] coïncident, dans le cas d'un champ magnétique nul, avec celles qui avaient été obtenues dans [106, 107] par bosonisation des opérateurs de vertex  $q$ -déformés, ou conjecturées dans [108] en tant que solution des équations  $q$ -KZ. Rappelons à ce propos que la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique a permis de plus de traiter le cas en champ magnétique extérieur non nul.

L'étude thermodynamique des facteurs de forme est plus difficile à mettre en œuvre, en particulier dans le régime critique. En effet, dans ce régime, tous les facteurs de forme ont un comportement non-trivial dans la taille du système [8, 196], ce qui rend leur analyse asymptotique assez délicate. Cette analyse nécessite de plus de caractériser précisément les différents

types d'excitations. Dans le cas de la chaîne XXZ dans le régime critique en présence d'un champ magnétique extérieur, ces excitations sont essentiellement de deux sortes : des excitations de type "particule-trou" d'une part, correspondant à un ensemble de racines réelles des solutions de Bethe dont certaines sont situées en dehors de la zone de Fermi, et des excitations de type "corde", correspondant à l'existence de racines non réelles des équations de Bethe, qui s'organisent dans le plan complexe selon des "cordes" de plus ou moins grande longueur, les racines appartenant à une même corde ayant la même partie réelle. Une analyse du comportement asymptotique à la limite thermodynamique des facteurs de forme entre l'état fondamental et les états excités de type "particule-trou" pour la chaîne XXZ critique en présence d'un champ magnétique extérieur a été effectuée dans [117, 121]. Il a été montré notamment que le comportement de ces facteurs de forme en fonction de la taille du système dépendait de manière non régulière de la position des particules et des trous vis-à-vis de la surface de Fermi : ce comportement est notablement différent selon que les particules et les trous restent ou non à distance finie de la surface de Fermi à la limite thermodynamique. Nous renvoyons à [117, 121] pour plus de précisions.

### 1.4.3 Comportement asymptotique à longue distance des fonctions à deux points en volume infini

Revenons maintenant au cas des fonctions à deux points du type  $\langle \sigma_1^\alpha \sigma_{m+1}^\beta \rangle$ . Un problème particulièrement intéressant, pour ces fonctions de corrélation en volume infini, est celui de leur comportement asymptotique lorsque la distance  $m$  entre les deux opérateurs de spins devient grande. Ce comportement est directement relié à la nature du spectre du modèle considéré : en général, les fonctions à deux points à température nulle décroissent exponentiellement avec la distance ; cependant, pour les modèles critiques, la longueur de corrélation gouvernant cette décroissance exponentielle s'annule, si bien que l'on s'attend seulement à une décroissance en lois de puissance en fonction de la distance. Dans ce dernier cas, les exposants correspondants sont supposés être universels, c'est-à-dire qu'ils ne doivent pas dépendre des détails microscopiques du modèle, mais seulement de ses principales symétries. Il existe, depuis déjà plusieurs décennies, un certain nombre de prédictions concernant ces exposants, basées sur des techniques de bosonisation et la correspondance avec un modèle continu, le modèle du liquide de Luttinger [91, 92, 93, 152], ou encore sur l'hypothèse que les systèmes critiques avec des interactions à courte portée pouvaient être décrits par la théorie conforme des champs [4, 30, 40, 49, 50, 172]. Notons que les amplitudes de décroissance, elles, ne sont pas universelles, et qu'elles ne peuvent par conséquent pas être prédites par ce type de correspondance (signalons néanmoins quelques conjectures à ce propos [5, 149, 151]). Un des enjeux des systèmes intégrables est donc de pouvoir effectivement confirmer ces prédictions par une étude directe du modèle microscopique, sans référence à l'hypothèse d'universalité.

Ce problème a été étudié dans [116, 119] dans le cas des fonctions de corrélation spin-spin de la chaîne XXZ critique à température nulle et en présence d'un champ magnétique extérieur. L'approche de [116] est basée sur l'étude de la formule maîtresse (1.121) pour la fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points  $\langle \sigma_1^z \sigma_m^z \rangle$ , ou plus exactement d'un développement en série de cette formule à la limite thermodynamique. L'idée de [116] est de relier chacun des termes de cette série au déterminant de Fredholm d'un certain opérateur intégral avec un noyau de type sinus généralisé dépendant directement du paramètre de distance  $m$ . L'analyse

asymptotique, lorsque  $m$  tend vers l'infini, de ce déterminant de Fredholm, a été effectuée dans [118] à l'aide de techniques de Riemann-Hilbert matriciel, ce qui a finalement permis aux auteurs de [116] d'effectuer la sommation asymptotique de la série reconstruisant la fonction de corrélation, et d'obtenir le comportement asymptotique dominant de la fonction à deux points  $\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$ . Cette approche a donc permis, pour la première fois par un calcul direct à partir des propriétés microscopiques du modèle, de confirmer les prédictions issues de la théorie conforme et de la correspondance avec le liquide de Luttinger.

Notons que l'analyse effectuée dans [116] est assez délicate : d'une part, elle repose sur des techniques assez lourdes (problème de Riemann-Hilbert matriciel) ; d'autre part, la resommation asymptotique finale de la série est hautement non triviale car elle nécessite de prendre en compte toute une série de termes qui, à tous les ordres dans la série, contribuent collectivement au comportement asymptotique dominant de la fonction à deux points. C'est pourquoi une approche alternative a été proposée dans [119], consistant en une sommation directe de la série sur les facteurs de forme (en se restreignant aux facteurs de forme de type particule-trou) pour une taille du système grande mais finie. Cette approche utilise directement le comportement des facteurs de forme en fonction de la taille du système. Il apparaît en fait que les facteurs de forme contribuant au comportement dominant de la fonction à deux points sont ceux correspondant à des excitations au voisinage de la surface de Fermi. La somme sur les facteurs de forme se réduit donc à certaines sommes restreintes qui ont pu être calculées exactement [119], conduisant au comportement asymptotique dominant des fonctions à deux points.

Ainsi, la méthode de calcul des fonctions de corrélation dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique a permis d'aboutir à des résultats remarquables, au moins dans le cas relativement simple de la chaîne de spins 1/2 XXZ. Mentionnons d'ailleurs des résultats encore plus aboutis pour un modèle dont les excitations sont uniquement de type "particule-trou", le modèle de Schrödinger Non Linéaire (ou modèle de Lieb-Lininger [145]). Dans ce cas, il a été possible de calculer également le comportement asymptotique, à long temps et à longue distance, des fonctions de corrélation à température finie [132] et également dynamiques [115, 131, 133], et les singularités des facteurs de structure au voisinage des seuils d'excitations à un trou ou à une particule [122]. Ces résultats sont d'autant plus intéressants qu'ils ne peuvent pas être prédits par la correspondance avec le modèle de Luttinger ou la théorie conforme.

## Chapitre 2

# Modèle à huit-vertex et modèle SOS

Le chapitre précédent résume les principaux résultats obtenus pour le calcul des fonctions de corrélation par les approches de l'ansatz de Bethe algébrique et de la séparation des variables. Les résultats les plus marquants et les plus aboutis ont été obtenus pour des modèles dont la structure algébrique sous-jacente est relativement simple, comme le gaz de Bose ou la chaîne de spins XXZ. Le problème de la généralisation de ces méthodes à des modèles plus compliqués restent encore largement ouvert.

Des généralisations de l'approche par l'ansatz de Bethe algébrique pour le calcul des fonctions de corrélation ont néanmoins été entreprises ces dernières années. Citons en particulier les travaux concernant le cas des chaînes de spins plus élevés [51, 61, 114]. Un axe de généralisation naturel consiste à étudier des modèles intégrables dont les algèbres de symétrie sont plus générales (de plus haut rang, de type superalgèbres, ...), comme c'est le cas des modèles à symétrie superalgèbre [36] ou des modèles à symétrie  $\mathfrak{su}_3$  étudiés plus récemment. Pour ces derniers, des difficultés conséquentes ont été rencontrées dans l'obtention d'une formule sous la forme d'un unique déterminant pour les produits scalaires entre états de Bethe, et il semble qu'en général une telle formule n'existe pas [31, 32, 33, 34, 35, 212]. Néanmoins, il a été montré dans [31] qu'une telle formule existe au moins entre deux états propres de la matrice de transfert et de son analogue  $\kappa$ -déformée. En se basant sur ces travaux, des expressions explicites pour les facteurs de forme de ces modèles ont finalement été obtenues dans [35].

Un autre axe de généralisation possible est non pas de s'intéresser à des algèbres de plus haut rang, mais à une généralisation de l'équation de Yang-Baxter, ce qui se répercute évidemment sur l'algèbre de Yang-Baxter  $\mathcal{A}_R$  engendrée par la matrice  $R$  solution de cette nouvelle équation de Yang-Baxter. C'est l'objet de ce chapitre que d'en présenter une généralisation dite dynamique. De telles structures ont été exhibées pour la première fois en théorie de Liouville [86], et dépendent d'un paramètre supplémentaire : le paramètre dynamique.

La séparation des variables n'a quant à elle pas encore abouti à des expressions explicites pour les fonctions de corrélation en volume infini, y compris pour des modèles relativement simples comme la chaîne de spins XXZ  $1/2$ . Cependant, l'étude en volume fini de plusieurs modèles de nature différente présage d'une sorte d'universalité dans les représentations obtenus pour les produits scalaires et les facteurs de forme [89, 163, 164, 165, 166]. Ce caractère universel de la séparation des variables suggère que le passage en volume infini, problème encore totalement ouvert par cette méthode, s'adapterait naturellement à des modèles plus compliqués que celui pour lequel il aurait été résolu. C'est pourquoi, il est malgré tout intéressant d'initier

l'étude, par la séparation des variables, de modèles dont la structure algébrique est plus compliquée que celle de la chaîne de spins XXZ, avant de s'intéresser au problème de la limite thermodynamique que nous ne traiterons pas dans cette thèse.

Nous présentons dans une première partie une généralisation naturelle de la chaîne de spins XXZ, la chaîne de spins XYZ encore équivalente au modèle à huit-vertex, dont la structure algébrique sous-jacente est telle que les méthodes usuelles de diagonalisation ne s'appliquent plus directement. Toutefois, l'existence d'une transformation de jauge dynamique qui l'envoie vers un autre modèle, le modèle solid-on-solid (SOS) pour lequel les méthodes mentionnées ci-dessus s'appliquent, permet de rendre ce modèle soluble par l'ansatz de Bethe algébrique et par la séparation des variables comme nous le verrons, le prix à payer étant la présence d'un nouveau paramètre qui généralise l'équation de Yang-Baxter en une équation aux différences.

La seconde partie détaille la résolution de ces modèles, c'est-à-dire qu'elle se consacre à la diagonalisation explicite des matrices de transfert correspondantes, que ce soit par l'ansatz de Bethe algébrique ou la séparation des variables.

## 2.1 Présentation des modèles

### 2.1.1 Chaîne de spins XYZ et modèle à huit-vertex

Une généralisation naturelle de la chaîne de spins XXZ est donnée par le Hamiltonien de la chaîne de spins XYZ

$$\mathbf{H}_{XYZ} = \sum_{n=1}^N \left\{ J_x \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + J_y \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + J_z \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \right\}, \quad (2.1)$$

pour laquelle les trois constantes de couplage  $J_x$ ,  $J_y$  et  $J_z$  sont différentes. A l'instar de la chaîne de spins XXZ, reliée au modèle de physique statistique bidimensionnel à six-vertex, la chaîne de spins XYZ est reliée au modèle de physique statistique à huit-vertex [25, 200]. Ce modèle est quant à lui une généralisation du modèle à six-vertex : considérons en effet un réseau  $N \times N$  carré bidimensionnel avec des conditions aux limites périodiques, tel que sur chacun de ses liens est associé un spin classique pouvant prendre la valeur  $\pm 1$ . Pour le modèle à six-vertex, les poids statistiques associés aux configurations locales autour d'un vertex sont non nuls si et seulement si les spins classiques respectent la règle de glace, ou autrement dit, s'il y a autant de spins pointant vers l'intérieur d'un vertex que vers l'extérieur. Dans le cas du modèle à huit-vertex, la contrainte sur les spins classiques est moins forte, de telle sorte qu'un poids statistique est non nul si et seulement si un nombre pair de spins pointent vers l'intérieur ou vers l'extérieur de chaque vertex. Il existe par conséquent deux poids statistiques supplémentaires (ce qui justifie le nom du modèle) qui correspondent aux configurations locales pour lesquels tous les spins entrent ou sortent d'un même vertex.

La matrice  $R$  de ce modèle est donnée par

$$R^{8V}(z) = \begin{pmatrix} a^{8V}(z) & 0 & 0 & d^{8V}(z) \\ 0 & b^{8V}(z) & c^{8V}(z) & 0 \\ 0 & c^{8V}(z) & b^{8V}(z) & 0 \\ d^{8V}(z) & 0 & 0 & a^{8V}(z) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

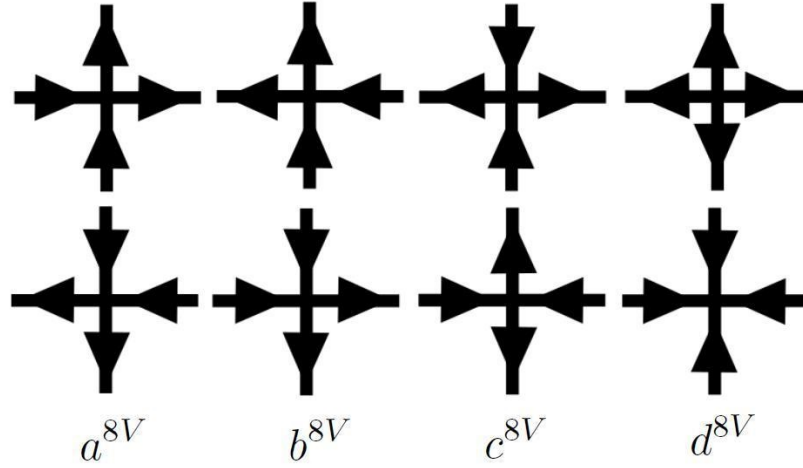


FIGURE 2.1 – Configurations locales du modèle à huit-vertex

la présence du poids  $d^{8V}$  étant reliée aux deux nouvelles configurations non nulles, et implique qu'il n'y a pas conservation de la charge à travers un vertex. Comme l'a montré Baxter [16, 17, 19, 18], cette matrice  $R^{8V}(z)$  est solution de l'équation de Yang-Baxter (1.14) lorsque les poids statistiques sont paramétrés par les fonctions thêta de Jacobi suivantes,

$$a^{8V}(z) = \frac{\theta_4(z; 2\tau) \theta_4(\eta; 2\tau)}{\theta_4(z + \eta; 2\tau) \theta_4(0; 2\tau)}, \quad b^{8V}(z) = \frac{\theta_1(z; 2\tau) \theta_4(\eta; 2\tau)}{\theta_1(z + \eta; 2\tau) \theta_4(0; 2\tau)}, \quad (2.3)$$

$$c^{8V}(z) = \frac{\theta_4(z; 2\tau) \theta_1(\eta; 2\tau)}{\theta_1(z + \eta; 2\tau) \theta_4(0; 2\tau)}, \quad d^{8V}(z) = \frac{\theta_1(z; 2\tau) \theta_1(\eta; 2\tau)}{\theta_4(z + \eta; 2\tau) \theta_4(0; 2\tau)}. \quad (2.4)$$

Le paramètre  $z$  joue le rôle du paramètre spectral,  $\eta$  est toujours le paramètre de croisement, tandis que la quasi-période  $\tau$  telle que  $0 < \Im \tau$  est reliée à la limite basse température (lorsque  $\tau$  tend vers zéro), ou à la limite critique (lorsque  $|\tau|$  tend vers l'infini). Avec cette paramétrisation, les constantes de couplage du modèle XYZ prennent la forme suivante,

$$J_x = 1 + \frac{\theta_1^2(\eta; 2\tau)}{\theta_4^2(\eta; 2\tau)}, \quad J_y = 1 - \frac{\theta_1^2(\eta; 2\tau)}{\theta_4^2(\eta; 2\tau)}, \quad J_z = \frac{\theta_4^2(0; 2\tau) \theta_2(\eta; 2\tau) \theta_3(\eta; 2\tau)}{\theta_4^2(\eta; 2\tau) \theta_2(0; 2\tau) \theta_3(0; 2\tau)}. \quad (2.5)$$

Notons qu'il existe cinq régimes différents dans le modèle à huit-vertex : deux de type ferro-électriques, deux anti-ferroélectriques, et un régime désordonné dans lequel la valeur moyenne des opérateurs  $\sigma^\alpha$  est nulle. Néanmoins, il est remarquable que les symétries de la matrice  $R^{8V}$ , ou plus particulièrement de sa fonction de partition associée, soient suffisantes pour relier tous ses régimes au régime dit principal, qui correspondant à un des deux régime anti-ferroélectrique [25, 206].

La matrice  $R^{8V}$  étant solution de l'équation de Yang-Baxter, l'algèbre de Yang-Baxter associée  $\mathcal{A}_{R^{8V}}$  est toujours générée par l'équation  $RTT = TTR$  (1.9). On peut donc toujours définir un ensemble de matrices de transfert commutantes : le modèle à huit-vertex est bien un modèle intégrable. Le spectre de ces matrices de transfert peut être obtenu à l'aide de l'opérateur  $Q$  de Baxter [19, 20], mais le calcul explicite des fonctions de corrélation nécessite de connaître leurs états propres associés, ces derniers étant construits à partir de l'algèbre de Yang-Baxter

symétrie du modèle. Toutefois, la présence du poids  $d^{8V}$  dans la matrice  $R^{8V}$ , qui joue ici un rôle analogue aux constantes de structures pour  $\mathcal{A}_{R^{8V}}$ , induit des relations de commutation plus compliquées entre deux générateurs du même type :

$$[A^{8V}(u), A^{8V}(v)] \neq 0, \quad [B^{8V}(u), B^{8V}(v)] \neq 0, \quad (2.6)$$

$$[C^{8V}(u), C^{8V}(v)] \neq 0, \quad [D^{8V}(u), D^{8V}(u)] \neq 0, \quad (2.7)$$

pour toute valeur du paramètre spectral  $u$  et  $v$ . Deux générateurs diagonalisables du même type ne sont donc pas diagonalisables simultanément, la méthode de séparation des variables ne s'applique par conséquent pas directement à ce modèle. De plus, l'absence de conservation de la charge à travers un vertex implique que l'état  $|0\rangle$  n'est pas un état de référence : il n'est pas annihilé par l'opérateur  $B^{8V}(u)$  ou  $C^{8V}(u)$  pour toute valeur de  $u$ . L'ansatz de Bethe algébrique n'est lui non plus pas directement applicable au modèle à huit-vertex.

Notons qu'en étudiant la limite de basse température des poids statistiques (2.3), (2.4), pour laquelle la période  $\tau$  tend vers zéro, il est possible de montrer que l'état fondamental du modèle à huit-vertex est doublement dégénéré dans la limite de volume infini.

### 2.1.2 Transformation Vertex-IRF

Comme nous venons de le voir, la structure algébrique sous-jacente au modèle à huit-vertex fait qu'il n'est pas directement soluble par l'ansatz de Bethe algébrique ou par la méthode de séparation des variables. Malgré la complexité de cette structure algébrique, Baxter réussit néanmoins à en diagonaliser la matrice de transfert de manière indirecte, en utilisant pour ce faire une transformation de jauge dynamique, appelée transformation vertex-IRF, le terme IRF étant un acronyme pour *interaction round a face* [20]. Cette transformation envoie la matrice  $R^{8V}$  du modèle à huit-vertex vers une matrice  $R$  dont les éléments de matrice non nuls (et donc les poids statistiques du modèle) sont au même endroit que ceux de la matrice  $R$  du modèle à six-vertex, et pour laquelle l'ansatz de Bethe algébrique ou la séparation des variables s'appliquent. Cette nouvelle matrice  $R$  dépend cependant d'un paramètre supplémentaire, le paramètre dynamique, et est solution d'une généralisation de l'équation de Yang-Baxter comme nous le verrons. Il est possible d'exprimer la transformation précédente sous une forme matricielle à l'aide de la matrice  $S$  suivante [75],

$$S(z; s) = \begin{pmatrix} \theta_2(-z + \eta s; 2\tau) & \theta_2(z + \eta s; 2\tau) \\ \theta_3(-z + \eta s; 2\tau) & \theta_3(z + \eta s; 2\tau) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

où la présence du paramètre supplémentaire  $s$  est explicite. La transformation *vertex-IRF*, qui envoie  $R^{8V}$  vers une nouvelle matrice  $R$ , elle-même fonction du paramètre supplémentaire  $s$ , s'exprime comme

$$R_{12}^{8V}(z_1 - z_2) S_1(z_1; s) S_2(z_2; s + \sigma_1^z) = S_2(z_2; s) S_1(z_1; s + \sigma_2^z) R_{12}(u_1 - u_2; s), \quad (2.9)$$

avec  $z_i = \eta u_i$ , pour  $i = 1$  ou  $2$ . Le terme en  $\sigma_i^z$  présent dans le second argument de (2.8) doit être interprété comme une représentation du générateur de la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{sl}_2$  générée par  $h$ ,

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

L'action de  $S_1(z_1; s + \sigma_2^z)$  sur un vecteur  $|e_{\epsilon_1}\rangle \otimes |e_{\epsilon_2}\rangle$  de  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , et tel que  $\sigma_2^z |e_{\epsilon_1}\rangle \otimes |e_{\epsilon_2}\rangle = \epsilon_2 (|e_{\epsilon_1}\rangle \otimes |e_{\epsilon_2}\rangle)$  pour  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  dans  $\{-1, +1\}$ , est définie comme

$$S_1(z_1; s + \sigma_2^z) |e_{\epsilon_1}\rangle \otimes |e_{\epsilon_2}\rangle = S_1(z_1; s + \epsilon_2) |e_{\epsilon_1}\rangle \otimes |e_{\epsilon_2}\rangle. \quad (2.11)$$

Cette dernière est reliée à la structure de  $\hbar$ -module diagonalisable de l'espace quantique  $\mathcal{H}$ .

Il est par conséquent clair que l'expression de (2.9) dépend explicitement des sous-espaces sur lesquels les matrices  $S$  agissent, l'argument en  $s$  subissant des décalages par  $\pm 1$  : on dit qu'il "dynamise" la matrice  $R^{8V}$ , d'où sa terminologie de *paramètre dynamique*<sup>1</sup>.

### 2.1.3 Modèle solid-on-solid (SOS)

La matrice  $R(u; s)$  présentée ci-dessus peut être interprétée comme le matrice d'un modèle de physique statistique bidimensionnel sur réseau carré dont les poids statistiques sont dorénavant associés, non pas aux configurations de spins classiques autour d'un vertex, mais aux configurations d'une certaine hauteur  $s$  autour d'une face. C'est ce qui explique à nouveau la terminologie employée pour la transformation (2.9). Présentons maintenant ce modèle, encore appelé modèle solid-on-solid (ou SOS) et sa matrice  $R$  associée correspondant à la matrice  $R$  dynamique ci-dessus.

Considérons pour ce faire un réseau carré  $N \times N$  avec des conditions aux limites a priori quelconques. On attache à chaque vertex de ce réseau, une *hauteur*  $s$  dont la différence entre deux vertex adjacents ne peut varier que de  $\pm 1$ . De manière similaire aux modèles à vertex, on associe un paramètre spectral  $u_i$  à la colonne  $i$  du réseau (jouant le rôle d'espace auxiliaire  $a_i$ ), et un paramètre d'inhomogénéité  $\xi_j$  à la ligne  $j$  (espace quantique). Une configuration locale est définie comme la donnée de quatre hauteurs  $(s_1, s_2, s_3, s_4)$  autour d'une même face du réseau, à laquelle est associée un poids statistique  $W \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_4 & s_3 \end{pmatrix}$  non nul si et seulement si  $|s_1 - s_2| = |s_2 - s_3| = |s_3 - s_4| = |s_4 - s_1| = 1$ . La différence de hauteur entre deux vertex adjacents peut être interprétée comme un spin classique  $\epsilon$  placé sur le lien qui les relie et pouvant prendre la valeur  $\pm 1$ , de telle sorte que les poids statistiques peuvent être arrangés dans une matrice  $R$  dépendant explicitement de la hauteur  $s$  de référence (par exemple en haut à gauche de la face) :

$$R(u_i - \xi_j; s)_{\epsilon'_i, \epsilon'_j}^{\epsilon_i, \epsilon_j} = \begin{array}{c} s \quad \quad \quad s + \epsilon'_i \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \xi_j \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ s + \epsilon_j \quad \quad \quad s + \epsilon_i + \epsilon_j \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad u_i \quad \quad \quad = s + \epsilon'_i + \epsilon'_j \end{array} \equiv W \begin{pmatrix} s & s + \epsilon'_i \\ s + \epsilon_j & s + \epsilon_i + \epsilon_j \end{pmatrix}.$$

La matrice  $R(u; s)$  appartient à  $\text{End}(V \otimes V)$ , où  $V \sim \mathbb{C}^2$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension deux de base  $(e_+, e_-)$ , et est telle que

$$R(u; s) (e_{\epsilon'_1} \otimes e_{\epsilon'_2}) = \sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon'_1 + \epsilon'_2}} R(u; s)_{\epsilon'_1, \epsilon'_2}^{\epsilon_1, \epsilon_2} (e_{\epsilon_1} \otimes e_{\epsilon_2}). \quad (2.12)$$

La condition sur les hauteurs autour d'une face implique que la matrice  $R$  du modèle SOS ne

1. Cette terminologie a été une première fois utilisée dans [12], la matrice  $r$  classique étudiée dépendant des variables dynamiques  $x_i$

contient que six éléments de matrice non nuls, qui peuvent être paramétrés comme suit :

$$R(u; s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u; s) & c(u; s) & 0 \\ 0 & \bar{c}(u; s) & \bar{b}(u; s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b(u; s) = \frac{[s+1][u]}{[s][u+1]}, \\ c(u; s) = \frac{[s+u][1]}{[s][u+1]}, \\ \bar{b}(u; s) = \frac{[s-1][u]}{[s][u+1]} = b(u; -s), \\ \bar{c}(u; s) = \frac{[s-u][1]}{[s][u+1]} = c(u; -s), \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour  $\Im\tau > 0$ , la fonction  $u \mapsto [u]$  est définie comme  $[u] = \theta_1(\eta u; \tau)$ , avec  $\eta$  le paramètre de croisement du modèle qui est a priori un réel quelconque. C'est donc une fonction impaire satisfaisant aux propriétés de quasi-périodicité suivantes (voir l'appendice A) :

$$\left[u + \frac{1}{\eta}\right] = -[u], \quad \left[u + \frac{\tau}{\eta}\right] = -e^{-i\pi\tau} e^{-2i\pi\eta u} [u]. \quad (2.14)$$

De plus, la matrice  $R$  (2.13) coïncide exactement avec la matrice  $R$  précédente, image par la transformation vertex-IRF (2.9) de la matrice  $R^{8V}$ . Le paramètre  $u$  joue par conséquent le rôle du paramètre spectral, tandis que la hauteur  $s$  s'identifie au paramètre dynamique de (2.8). Graphiquement, les seuls éléments de matrice non nuls correspondent aux six poids statistiques suivants :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} s \quad + \quad s+1 \\ + \quad \square \quad + \\ s+1 \quad + \quad s+2 \end{array} & \begin{array}{c} s \quad + \quad s+1 \\ - \quad \square \quad - \\ s-1 \quad + \quad s \end{array} & \begin{array}{c} s \quad - \quad s-1 \\ - \quad \square \quad + \\ s-1 \quad + \quad s \end{array} \\ a(u; s) = 1 & b(u; s) & c(u; s) \\ \\ \begin{array}{c} s \quad - \quad s-1 \\ - \quad \square \quad - \\ s-1 \quad - \quad s-2 \end{array} & \begin{array}{c} s \quad - \quad s-1 \\ + \quad \square \quad + \\ s+1 \quad - \quad s \end{array} & \begin{array}{c} s \quad + \quad s+1 \\ + \quad \square \quad - \\ s+1 \quad - \quad s \end{array} \\ \bar{a}(u; s) = 1 & \bar{b}(u; s) & \bar{c}(u; s) \end{array}$$

Notons qu'indépendamment des conditions aux limites, il existe différents types de modèle SOS. Toutefois, ces différents modèles ne sont physiquement pertinents que lorsque les poids statistiques de la matrice  $R$  (2.13) correspondent effectivement à des poids de Boltzmann, et sont dès lors réels et positifs.

**Modèle SOS non restreint :** Pour ce modèle, le paramètre de croisement  $\eta$  est quelconque, et le paramètre dynamique peut a priori prendre une infinité de valeurs appartenant à l'ensemble  $\mathbf{C}_{s_0} = s_0 + \mathbb{Z}$ , où  $s_0$  est un paramètre complexe, a priori quelconque (mais différent de 0 modulo les quasi-périodes), et qui permet d'éviter les singularités dans (2.13). Il existe ainsi une infinité de configurations locales admissibles autour de chaque face dans le modèle non restreint.

**Modèle SOS cyclique** : Dans ce modèle, le paramètre de croisement  $\eta$  est restreint à des valeurs rationnelles  $\eta = \frac{r}{L}$  avec  $r$  et  $L$  deux entiers premiers entre eux. De plus, les conditions de périodicités des fonctions  $\theta$  impliquent que le paramètre dynamique  $s$  appartienne à l'ensemble  $\mathbf{C}_{s_0}^L = s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ . Le paramètre dynamique a ainsi le droit de “boucler” sur lui même, et c'est pourquoi le modèle SOS est dit cyclique. L'entier  $L$  est appelé la période du modèle, et correspond au nombre de configurations locales admissibles autour de chaque face [105, 170, 171].

Notons que l'on appelle également modèle SOS cyclique, tout modèle pour lequel il existe un couple d'entier  $(r, m)$  tel que  $\eta = r + m\tau$ . Toutefois, en vertu de l'action du groupe modulaire sur l'ensemble des fonctions  $\theta$  (voir l'appendice A), l'étude de ces modèles se ramène au cas  $\eta$  rationnel. Remarquons enfin, que la matrice  $R$  (2.13) admet des poids statistiques réels positifs lorsque le paramètre  $s_0$  est tel que  $\Im s_0 = -\frac{\tau}{2\eta}$ . En fait, dans le cas cyclique,  $s_0$  est relié au facteur de phase  $\mu = \frac{\omega_0}{\pi}$  du modèle physique introduit dans [171], et dont la matrice  $R$  est relié à la notre (2.13) par une transformation de jauge dynamique diagonale.

**Modèle SOS restreint RSOS ou modèle ABF [7]** : Ce modèle admet quant à lui un paramètre de croisement  $\eta = \frac{1}{L}$ , où  $L$  est ici aussi relié aux nombres de configurations locales admissibles autour de chaque face. Plus précisément, le paramètre dynamique appartient, dans le modèle restreint, à l'ensemble d'entiers  $\{1, \dots, L-1\}$ , ce qui correspond à imposer  $s_0 = 0$ , et dès lors à  $L-1$  configurations de hauteurs admissibles autour d'une face.

En plus de ces différents types de modèles SOS, il est également possible d'imposer différentes conditions aux limites. Ces dernières sont par ailleurs susceptibles de restreindre l'ensemble du paramètre dynamique du type de modèle considéré. En effet, une configuration de hauteurs le long d'une même ligne correspond, sur le réseau, à un  $N$ -uplet de hauteurs  $(s_1, s_2, \dots, s_N)$  tel que  $s_{i+1} - s_i = \pm 1$ , pour tout  $i = 1, \dots, N-1$ , et pour lesquels  $s_1$  et  $s_N$  sont contraints par les conditions aux limites. Cette configuration de hauteurs peut encore être réécrite en fonction des configurations de spins sur les liens joignant deux hauteurs adjacentes  $(s, \mathbf{e}_{\epsilon_1}, \dots, \mathbf{e}_{\epsilon_N})$ , avec  $\epsilon_i = s_{i+1} - s_i$  et  $s = s_1$ .

**Modèle SOS avec conditions aux limites périodiques** : La condition de périodicité est imposée sur la hauteur  $s$ , on identifie ainsi  $s_{N+1} = s_1$  sur chaque ligne ou chaque colonne du réseau.

Pour  $\eta$  générique (c'est-à-dire pour le modèle SOS non restreint), le paramètre dynamique appartient à  $\mathbf{C}_{s_0}$ , mais les seules configurations permises sont ici celles pour lesquelles  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_N = 0$ , ce qui correspond sur la chaîne quantique associée d'espace des états  $\mathcal{H} = \otimes_{j=1}^N V$ , aux états de poids zéros annihilés par le spin total  $S_z = \sum_{j=1}^N \sigma_j^z$ . Il en est de même pour le modèle SOS restreint, le paramètre dynamique n'ayant pas le droit de “boucler” sur lui même.

Pour  $\eta$  rationnel (c'est-à-dire pour le modèle SOS cyclique), encore écrit sous la forme irréductible  $\eta = \frac{r}{L}$ , si  $n$  indique le nombre de spins  $\epsilon_i$  qui sur une même ligne ou sur une même colonne valent  $-1$ , les conditions aux limites périodiques sont satisfaites si et seulement si  $N = 2n + \aleph L$ . Dès lors :

- Pour  $L$  pair et  $N$  pair :  $\aleph \in \mathbb{Z}$ .
- Pour  $L$  impair et  $N$  pair :  $\aleph \in 2\mathbb{Z}$ .
- pour  $L$  impair et  $N$  impair :  $\aleph \in 2\mathbb{Z} + 1$ .
- pour  $L$  pair et  $N$  impair : pas de solution.

Toutefois, on s'intéresse dans la suite de cette thèse uniquement aux cas pour lesquels  $N$  est pair.

**Modèle SOS avec conditions aux limites anti-périodiques** : Dans le cas du modèle SOS anti-

périodique, on identifie la hauteur du site  $N+1$  avec l'opposé de la hauteur au site 1, c'est-à-dire  $s_{N+1} = -s_1$ . Pour  $\eta$  générique (modèle SOS non restreint), cette condition est encore équivalente à  $\sum_{j=1}^N \sigma_j^z + 2s = 0$ , ce qui donne une condition reliant l'espace dynamique à l'espace quantique. Cette condition joue un rôle particulièrement important dans la diagonalisation de la matrice de transfert du modèle anti-périodique comme nous le verrons.

De plus, la transformation Vertex-IRF reste valide dans le cas cyclique, et permet d'exprimer les états propres de la matrice de transfert du modèle à huit-vertex comme une combinaison linéaire d'états propres de la matrice de transfert du modèle SOS cyclique, alors même que le modèle à huit-vertex n'est pas soluble directement par les méthodes de diagonalisation usuelles. Par ailleurs, le nombre de terme de cette combinaison linéaire coïncide avec la période  $L$  du modèle cyclique, et reste donc fini y compris à la limite thermodynamique. Il est alors envisageable, malgré la complexité combinatoire issue des transformations Vertex-IRF, de calculer les fonctions de corrélation du modèle à huit-vertex directement à partir de celles du modèle SOS cyclique. C'est pourquoi, c'est dans ce modèle (avec des conditions aux limites périodiques) que nous calculerons les fonctions de corrélation par l'ansatz de Bethe algébrique dans la suite de cette thèse, en gardant à l'esprit la possibilité de revenir à celles du modèle à huit-vertex. Fonctions de corrélation qui, à la limite thermodynamique, s'identifient aux éléments de matrice d'un produit d'opérateurs locaux dans la base des états fondamentaux du modèle.

Dans le cas du modèle cyclique, ces derniers ont été étudiés par Pearce et Seaton dans [171], en étudiant les poids statistiques de (2.13) dans la limite de basse température pour laquelle  $\tau \rightarrow 0$ . A la limite thermodynamique, ces états fondamentaux sont dégénérés  $2(L-r)$  fois, et s'identifient, toujours dans la limite de basse température, aux configurations plates pour lesquelles les configurations locales sont soit toutes de type  $\bar{c}(u; s)$ , ou soit de type  $c(u; s)$ . Ainsi, un état fondamental  $|\phi_g^i\rangle$  (pour  $i = 1, \dots, 2(L-r)$ ) du modèle SOS cyclique fixe un secteur compatible avec l'une de ces configurations plates.

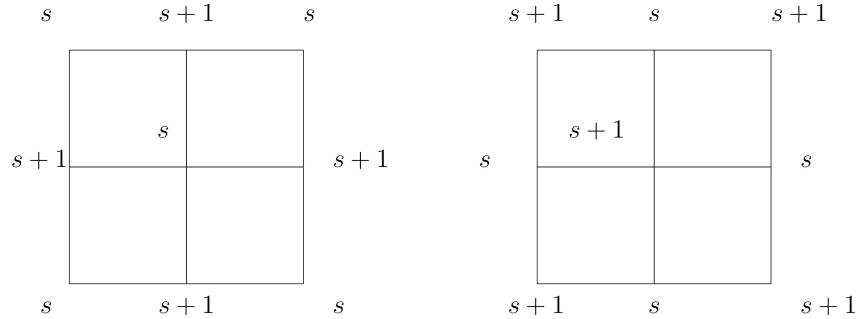


FIGURE 2.2 – Deux types de configurations plates sur une même portion du réseau : la hauteur à deux manières différentes de prendre des valeurs successives alternantes pour une même valeur  $s$  du paramètre dynamique correspondant à un secteur d'états fondamentaux.

En particulier, les fonctions de corrélation que l'on désire calculer sont les probabilités de hauteurs locales,  $\bar{P}(s)$ , indiquant la probabilité que la hauteur prenne la valeur  $s$  en un site du réseau, dans un des secteurs d'états fondamentaux. On s'intéresse plus généralement aux probabilités de hauteurs locales multi-points,

$$\bar{P}_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-1}}(s_1) = \bar{P}(s_1, s_2, \dots, s_m), \quad (2.15)$$

qui indiquent quant à elles la probabilité que, sur une même ligne (ou une même colonne) du réseau d'un des secteurs d'états fondamentaux, une suite de  $m$  hauteurs adjacentes  $(s_1, \dots, s_m)$  vaille respectivement  $s_1, s_2 = s_1 + \epsilon_1, \dots, s_m = s_1 + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{m-1}$ , avec  $\epsilon_i = s_{i+1} - s_i$ . Toutefois, les conditions aux limites fixées par l'état  $|\phi_g^i\rangle$  décrivant un secteur d'états fondamentaux, ne sont pas nécessairement compatibles avec celles associées aux états propres de la matrice de transfert construits à partir de l'ansatz de Bethe algébrique ou de la séparation des variables. Il est par conséquent crucial de trouver le changement de base  $\mathcal{B}$  qui permet d'exprimer les états construits par les méthodes de diagonalisation exactes des matrices de transfert, en fonction des états fondamentaux du modèle SOS  $\{|\phi_g^i\rangle\}$ . Ce n'est que dans cette base que les quantités calculées ont le sens physique d'une probabilité.

Nous serons ainsi amené à calculer les éléments de matrice d'un produit d'opérateurs locaux du modèle SOS cyclique dans la base des états propres de Bethe, puis, à partir des expressions ainsi obtenues en volume fini, à

- prendre la limite thermodynamique, pour laquelle le nombre de sites  $N$  tend vers l'infini,
- trouver le changement de base  $\mathcal{B}$  de l'ensemble des états fondamentaux de Bethe vers les états fondamentaux du modèle SOS cyclique  $\{|\phi_g^i\rangle\}$ ,
- calculer les éléments de matrice d'un produit d'opérateurs locaux entre deux états de  $\{|\phi_g^i\rangle\}$  pour finalement obtenir les fonctions de corrélation du modèle SOS cyclique.

Par ailleurs, à l'instar de ce qui se passe pour la chaîne de spins XXZ, il peut être plus pratique de décomposer ce produit d'opérateurs sur les éléments de matrice les plus simples que sont les facteurs de forme. La détermination de ces derniers constitue par conséquent une étape importante pour le calcul des fonctions de corrélation, dont la première étape consiste en la diagonalisation de la matrice de transfert. C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre, et ce par les deux méthodes que sont l'ansatz de Bethe algébrique et la séparation des variables. Signalons dès à présent que ces résultats seront par la suite exploités pour le calcul des facteurs de forme à la fois en volume fini et infini (pour le modèle périodique cyclique).

## 2.2 Algèbre de Yang-Baxter dynamique du modèle SOS

A l'instar de ce qui se passe en mécanique classique où à toute matrice  $r$  solution de l'équation de Yang-Baxter classique est associée un système intégrable classique [14, 27, 28, 29], une matrice  $R$  solution de l'équation de Yang-Baxter engendre elle aussi un système intégrable quantique via la relation (1.9), cette dernière assurant l'existence d'un ensemble de charges conservées en involution dont fait partie le Hamiltonien du modèle. Il est par conséquent naturel, dans une volonté de classification des systèmes intégrables quantiques, de chercher toutes les solutions à l'équation de Yang-Baxter. Les groupes quantiques ont été introduits pour répondre à ce problème.

Il existe deux points de vue pour présenter ces groupes quantiques. Le premier, issu des travaux de Drinfel'd et Jimbo [63, 64, 104], voit les groupes quantiques comme des algèbres de Hopf  $A$  dépendant d'un paramètre complexe  $q$ , ces dernières étant généralement non commutatives et non co-commutatives, et pour lesquelles la non co-commutativité est "contrôlée" par un élément  $\mathcal{R}$  vivant dans le produit tensoriel de l'algèbre par elle-même  $A \otimes A$ . Le coproduit

opposé y prenant la forme,

$$\Delta^{op}(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}, \quad \forall a \in A. \quad (2.16)$$

Sous certaines conditions, cet élément  $\mathcal{R}$ , encore appelé matrice  $\mathcal{R}$  universelle, est solution de l'équation de Yang-Baxter. C'est l'étude des représentations de ces algèbres de Hopf dites quasi-triangulaires et de leur matrice  $\mathcal{R}$  universelle, qui permet d'une part de classifier les systèmes intégrables en trouvant toutes les solutions de l'équation de Yang-Baxter (entre autres, avec paramètre spectral) et d'autre part d'en expliciter les symétries sous-jacentes. De plus, ces algèbres de Hopf tendent vers des algèbres enveloppantes d'algèbre de Lie simples connues lorsqu'on fait tendre le paramètre de déformation  $q$  vers 1 [55].

Le second point de vue est dual au premier, et s'insère parfaitement dans le cadre de la méthode de diffusion inverse quantique [68]. Les algèbres de Yang-Baxter  $\mathcal{A}_R$  associées à une matrice  $R$  solution de l'équation de Yang-Baxter, dont les générateurs sont donnés par les éléments de la matrice de monodromie et satisfont un ensemble de relations de commutation quadratiques données par (1.9) peuvent aussi être perçus comme des groupes quantiques. C'est ce point de vue qui amena Felder à formaliser la notion de groupe quantique elliptique  $E_{\tau,\eta}(\mathfrak{sl}_2)$ , qui n'est autre que la structure algébrique sous-jacente au modèle SOS [73]. L'algèbre de Yang-Baxter du modèle SOS n'est autre qu'une représentation de ce groupe quantique elliptique. Nous référons à l'article de Felder pour sa définition en terme des matrices  $R$  généralisées [73].

La matrice  $R$  (2.13) du modèle SOS est une représentation d'une matrice  $R$  généralisée définissant le groupe quantique elliptique  $E_{\tau,\eta}(\mathfrak{sl}_2)$ , c'est à dire qu'elle est solution de l'équation de Yang-Baxter dynamique<sup>2</sup> sur  $\text{End}(V_{a_1} \times V_{a_2} \times \mathcal{H}_j)$  pour  $V_{a_1} \cong \mathbb{C}^2 \cong V_{a_2}$  deux espaces auxiliaires et  $\mathcal{H}_j$  un espace quantique pour  $j = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned} R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; s + \sigma_j^z) R_{a_1 j}(u_1 - \xi_j; s) R_{a_2 j}(u_2 - \xi_j; s + \sigma_{a_1}^z) \\ = R_{a_2 j}(u_2 - \xi_j; s) R_{a_1 j}(u_1 - \xi_j; s + \sigma_{a_2}^z) R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; s), \end{aligned} \quad (2.17)$$

et qu'elle satisfait aux deux conditions suivantes d'unitarité et de poids zéro pour toute valeur du paramètre spectral et dynamique :

$$R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; s) R_{a_2 a_1}(u_2 - u_1; s) = \text{id} \quad \text{unitarité}, \quad (2.18)$$

$$[R_{a_1 a_2}(u; s), \sigma_{a_1}^z + \sigma_{a_2}^z] = 0 \quad \text{poids zéro}. \quad (2.19)$$

Dans ce qui précède, l'opérateur  $\sigma^z$  doit être interprété comme une représentation du générateur de la sous-algèbre de Lie unidimensionnelle et abélienne  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{sl}_2$ . C'est cet opérateur  $\sigma^z$  qui rend compte de la différence de hauteur de  $\pm 1$  entre deux vertex adjacents. A l'instar de ce qui se passe pour le modèle XXZ, l'équation (2.17) contraint les poids statistiques du modèle SOS, assurant dès lors l'intégrabilité de ce dernier. Toutefois, l'existence de charges conservées en involution requiert une condition supplémentaire sur le sous-espace sur lequel les matrices de transfert agissent comme nous le verrons dans la section suivante.

La matrice de transfert se construit ici aussi à partir de la matrice monodromie engendrant l'algèbre de Yang-Baxter du modèle SOS, qu'on définit à l'aide de la matrice de Lax inhomogène  $L(u - \xi, s)$  du modèle SOS

$$L(u - \xi, s) = [u - \xi + 1]R(u - \xi, s), \quad (2.20)$$

---

2. l'action de  $R_{ij}(u_i - u_j, s + \sigma_k^z)$  pour  $i \neq j \neq k$  sur un vecteur de  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$  est définie comme dans la section précédente

qui n'est autre que la matrice  $R$  (2.13) en normalisation polynômiale. Notons que cette matrice  $L$  est une représentation d'une matrice  $L$  au sens de Felder [73]. La matrice de monodromie du modèle SOS est par suite construite comme un produit successif, le long des espaces quantiques, des matrices  $L$  shiftées par les éléments du Cartan,

$$T_{a,1\dots N}(u; \xi_1, \dots, \xi_n; s) = L_{aN}(u - \xi_N; s + \sigma_1^z + \dots + \sigma_{N-1}^z) \dots L_{a1}(u - \xi_1; s), \quad (2.21)$$

$$= \begin{pmatrix} A(u; s) & B(u; s) \\ C(u; s) & D(u; s) \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

les relations de commutation entre les générateurs étant comprises dans l'équation

$$R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; s + \sigma_{1\dots N}^z) T_{a_1,1\dots N}(u_1; s) T_{a_2,1\dots N}(u_2; s + \sigma_{a_1}^z) \\ = T_{a_2,1\dots N}(u_2; s) T_{a_1,1\dots N}(u_1; s + \sigma_{a_2}^z) R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; s), \quad (2.23)$$

sur  $V_{a_1} \otimes V_{a_2} \otimes \mathcal{H}$  (avec  $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$ ), qui est une conséquence de l'équation de Yang-Baxter dynamique (2.17), et où l'on a posé  $\sigma_{1\dots N}^z = \sigma_1^z + \dots + \sigma_N^z$ . Toutefois, comme les éléments de matrice de (2.21) dépendent explicitement du générateur du Cartan de  $\mathfrak{sl}_2$ , ils subissent des décalages a priori différents en le paramètre dynamique selon le sous-espace sur lequel ils agissent. Une manière commode de prendre en compte ces décalages est de faire agir les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter précédente non plus sur l'espace quantique  $\mathcal{H}$ , mais sur l'espace des fonctions méromorphes en le paramètre dynamique  $s$  et à valeur dans  $\mathcal{H}$ , encore noté  $\text{Fun}(\mathcal{H})$ .

On introduit pour ce faire les opérateurs de translation  $T_{\hat{s}}^{\pm}$  et l'opérateur de multiplication par le paramètre dynamique  $\hat{s}$  satisfaisant aux relations de commutation  $T_{\hat{s}}^{\pm} \hat{s} = (\hat{s} \pm 1) T_{\hat{s}}^{\pm}$  et agissant sur les fonctions  $f \in \text{Fun}(\mathcal{H})$  comme :

$$[\hat{s}f](s) = sf(s), \quad [T_{\hat{s}}^{\pm} f](s) = f(s \pm 1). \quad (2.24)$$

Dans ce point de vue, la matrice de monodromie est de la forme

$$\hat{T}_a(u) = \begin{pmatrix} \hat{A}(u) & \hat{B}(u) \\ \hat{C}(u) & \hat{D}(u) \end{pmatrix}_{[a]} = T_a(u; \hat{s}) \begin{pmatrix} T_{\hat{s}}^+ & 0 \\ 0 & T_{\hat{s}}^- \end{pmatrix}_{[a]} \in \text{End}(V_a \otimes \text{Fun}(\mathcal{H})), \quad (2.25) \\ = \begin{pmatrix} A(u; \hat{s}) & B(u; \hat{s}) \\ C(u; \hat{s}) & D(u; \hat{s}) \end{pmatrix}_{[a]} \cdot \begin{pmatrix} T_s^+ & 0 \\ 0 & T_s^- \end{pmatrix}_{[a]},$$

les relations de commutation de ses éléments de matrice découlant de l'analogie de (2.23), qui est ici de la forme suivante :

$$R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; \hat{s} + \sigma_{1\dots N}^z) \hat{T}_{a_1}(u_1) \hat{T}_{a_2}(u_2) = \hat{T}_{a_2}(u_2) \hat{T}_{a_1}(u_1) R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; \hat{s}). \quad (2.26)$$

La matrice de transfert du modèle SOS périodique est définie comme

$$\hat{t}(u) = \text{tr}_a \hat{T}_a(u) = \hat{A}(u) + \hat{D}(u), \quad (2.27)$$

tandis que la matrice de transfert du modèle anti-périodique est bien sûr

$$\hat{\bar{t}}(u) = \text{tr}_a \sigma_a^x \hat{T}_a(u) = \hat{B}(u) + \hat{C}(u). \quad (2.28)$$

Ce sont ces matrices de transfert que nous diagonalisons dans les sections suivantes.

*Remarque 2.* On peut également s'intéresser aux matrices de transfert quasi-périodiques  $\kappa$ -déformées de la forme

$$\hat{t}_\kappa(u) = \hat{A}(u) + \kappa \hat{D}(u), \quad (2.29)$$

pour tout nombre complexe  $\kappa$ . Nous allons chercher à diagonaliser ces matrices déformées dans la suite de ce chapitre, dans l'optique de transposer au modèle SOS cyclique, les résultats obtenus dans le chapitre 1 sur la fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points.

En fait, les relations de commutation engendrées par (2.26) sont très proches de celles de la chaîne de spins XXZ, la forme de la matrice  $R$  (2.13), qui joue par ailleurs un rôle analogue aux constantes de structures pour l'algèbre de Yang-Baxter ainsi définie, ayant la même forme que celle du modèle à six-vertex. Toutefois, pour le modèle SOS, les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter étant des fonctions du paramètre dynamique, l'évaluation des relations de commutation en une hauteur  $s$  montre que sur l'espace quantique, les générateurs (une fois commutés) subissent des décalages en le paramètre dynamique :

$$A(u_1; s)A(u_2; s+1) = A(u_2; s)A(u_1; s+1), \quad B(u_1; s)B(u_2; s-1) = B(u_2; s)B(u_1; s-1), \quad (2.30)$$

$$C(u_1; s)C(u_2; s+1) = C(u_2; s)C(u_1; s+1), \quad D(u_1; s)D(u_2; s-1) = D(u_2; s)D(u_1; s-1), \quad (2.31)$$

$$A(u_1; s)B(u_2; s+1) = B(u_2; s)A(u_1; s-1)b(u_1 - u_2; s) + A(u_2; s)B(u_1; s+1)\bar{c}(u_1 - u_2; s), \quad (2.32)$$

$$C(u_1; s)D(u_2; s+1) = D(u_2; s)C(u_1; s-1)b(u_1 - u_2; s) + C(u_2; s)D(u_1; s+1)\bar{c}(u_1 - u_2; s), \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} b(u_1 - u_2; s + \sigma_{1\dots N}^z)B(u_1; s)C(u_2; s-1) + c(u_1 - u_2; s + \sigma_{1\dots N}^z)D(u_1; s)A(u_2; s-1) \\ = D(u_2; s)A(u_1; s-1)c(u_1 - u_2; s) + C(u_2; s)B(u_1; s+1)\bar{b}(u_1 - u_2; s), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}(u_1 - u_2; s + \sigma_{1\dots N}^z)B(u_1; s)D(u_2; s-1) + \bar{b}(u_1 - u_2; s + \sigma_{1\dots N}^z)D(u_1; s)B(u_2; s-1) \\ = B(u_2; s)D(u_1; s-1), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}(u_1 - u_2; s + \sigma_{1\dots N}^z)A(u_1; s)C(u_2; s+1) + \bar{b}(u_1 - u_2; s + \sigma_{1\dots N}^z)C(u_1; s)A(u_2; s+1) \\ = A(u_2; s)C(u_1; s+1), \end{aligned} \quad (2.36)$$

avec  $\sigma_{1\dots N}^z = \sigma_1^z + \sigma_2^z + \dots + \sigma_N^z$ .

Le déterminant quantique, élément central de  $E_{\tau, \eta}(\mathfrak{sl}_2)$ , est défini comme

$$\det_q T(u; s) = \frac{[s]}{[s + \sigma_{1\dots N}^z]} \left\{ D(u-1; s)A(u, s-1) - B(u-1; s)C(u; s-1) \right\}, \quad (2.37)$$

$$= \frac{[s]}{[s + \sigma_{1\dots N}^z]} \left\{ A(u-1; s)D(u, s+1) - C(u-1; s)B(u; s+1) \right\}, \quad (2.38)$$

et s'écrit encore en termes des éléments de l'algèbre d'opérateurs comme

$$\det_q T(u; \hat{s}) = \frac{[\hat{s}]}{[\hat{s} + \sigma_{1\dots N}^z]} \left\{ \widehat{D}(u-1) \widehat{A}(u) - \widehat{B}(u-1) \widehat{C}(u) \right\}, \quad (2.39)$$

$$= \frac{[\hat{s}]}{[\hat{s} + \sigma_{1\dots N}^z]} \left\{ \widehat{A}(u-1) \widehat{D}(u) - \widehat{C}(u-1) \widehat{B}(u) \right\}, \quad (2.40)$$

$$= a(u) d(u-1), \quad (2.41)$$

avec bien sûr  $\widehat{T}_{\alpha\beta}(u) = T_{\alpha\beta}(u; \hat{s}) T_s^\beta$  en vertu de (2.25), et avec les fonctions  $a$  et  $d$  définies en (2.45). Cet élément est à nouveau un élément central de l'algèbre de Yang-Baxter générée par la relation (2.23).

Notons enfin que la théorie des représentation du groupe quantique elliptique devient spéciale lorsque  $\eta L = r + m\tau$ , avec  $L$ ,  $r$ , et  $m$  trois entiers [76]. En effet, dans ce cas, les représentations irréductibles du groupe quantique elliptique sont de dimensions finies, et l'action du groupe modulaire sur l'ensemble des fonctions  $\theta$  permet de les ramener aux représentations pour lesquelles  $\eta = \frac{r}{L}$  (voir l'appendice A). En particulier, le groupe quantique elliptique est invariant sous la transformation modulaire  $\tau \mapsto \tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau}$ ,  $\eta \mapsto \tilde{\eta} = -\frac{\eta}{\tau}$ , de telle sorte que  $E_{\tau, \eta}(\mathfrak{sl}_2) \cong E_{\tilde{\tau}, \tilde{\eta}}(\mathfrak{sl}_2)$ . Remarquons finalement que cette transformation correspond tout simplement à une transformation de Jacobi (A.23) des fonctions  $\theta$ .

## 2.3 Diagonalisation des matrices de transfert du modèle SOS périodique par ABA

### 2.3.1 Ansatz de Bethe algébrique pour le modèle SOS périodique

L'ansatz de Bethe algébrique pour le groupe quantique  $E_{\tau, \eta}(\mathfrak{sl}_2)$  a été développé par Felder et Varchenko dans [75]. La diagonalisation de la matrice de transfert (2.27) par cette méthode requiert toujours l'existence d'un état de référence  $|\widehat{0}\rangle \in \text{Fun}(\mathcal{H})$  qui est d'une part état propre de  $\widehat{A}(u) + \widehat{D}(u)$ , et d'autre part annihilé par les opérateurs  $\widehat{C}(u)$  avec  $\widehat{B}(u)|\widehat{0}\rangle \neq 0$  pour toute valeur du paramètre spectral  $u$ . La forme de la matrice  $R$  étant similaire à celle de XXZ, l'état

$$|\widehat{0}\rangle : s \mapsto |0\rangle = \otimes_{j=1}^N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

est effectivement un état de référence pour lequel

$$\widehat{A}(u)|\widehat{0}\rangle(s) = A(u; s)|0\rangle = a(u)|0\rangle, \quad \widehat{B}(u)|\widehat{0}\rangle \neq 0, \quad (2.43)$$

$$\widehat{D}(u)|\widehat{0}\rangle(s) = D(u; s)|0\rangle = \frac{[s-1]}{[s+N-1]} d(u)|0\rangle, \quad \widehat{C}(u)|\widehat{0}\rangle = 0, \quad (2.44)$$

avec

$$a(u) = \prod_{j=1}^N [u - \xi_j + 1], \quad d(u) = \prod_{j=1}^N [u - \xi_j]. \quad (2.45)$$

Cependant, nous avons vu que les conditions aux limites périodiques sont équivalente à une condition de poids nul sur les états de  $\mathcal{H}$ , de telle sorte que l'espace des états du modèle SOS

avec conditions aux limites périodiques est en réalité l'espace  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0]) = \{\psi : \mathbf{C}_{\text{so}} \mapsto \mathcal{H}[0]\}$ , où l'espace de poids nul  $\mathcal{H}[0] = \{|a\rangle \in \mathcal{H}, \sum_{i=1}^N \sigma_i^z |a\rangle = 0\}$  est non vide dans le secteur  $N$  pair. Cet espace est de dimension infinie pour  $\eta$  générique. Dans le cas où  $\eta = \frac{r}{L}$ , l'espace  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0]) = \{\psi : \mathbf{C}_{\text{so}}^L \mapsto \mathcal{H}[0], \psi(s+L) = \psi(s)\}$  est de dimension finie  $L \dim \mathcal{H}[0]$ .

De plus, la présence du paramètre dynamique et des opérateurs  $\sigma^z$  dans l'équation de Yang-Baxter dynamique (2.17) se répercute dans l'équation (2.23), de telle sorte que les matrices de transfert ne commutent pas simultanément sur tout l'espace  $\text{Fun}(\mathcal{H})$ . Ces dernières satisfont aux deux propriétés importantes suivantes :

- leur action stabilise l'espace de poids zéro  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$ ,
- elles commutent deux à deux sur  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0]) : [\hat{t}(u), \hat{t}(v)] = 0, \quad \forall u, v.$

Un état de Bethe est par conséquent un état appartenant à  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$ . L'état de référence  $|\hat{0}\rangle$  n'y appartenant pas, il n'en est ainsi pas un. Cependant, il est toujours possible de construire les états de  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  comme l'action successive d'un produit d'opérateurs  $\hat{B}(u)$  sur l'état de référence  $|\hat{0}\rangle$ . On commence pour ce faire par définir un état quelconque de  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  comme une fonction du paramètre dynamique à valeur dans  $\mathcal{H}[0]$  de la forme

$$s \mapsto \varphi(s) B(v_1; s) B(v_2; s-1) \dots B(v_n; s-n+1) |\hat{0}\rangle, \quad (2.46)$$

où  $v_1, \dots, v_n$  sont des paramètres spectraux arbitraires,  $\varphi$  est une fonction arbitraire du paramètre dynamique  $s$  et à valeur complexe, tandis que  $n$  est tel que  $N = 2n + \aleph L$  pour un entier  $\aleph$  comptant le nombre de “boucles” effectuées par le paramètre dynamique ( $N = 2n$  pour  $\eta$  générique). On cherche maintenant à diagonaliser la matrice de transfert (2.29) sur  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$ , pour toute valeur du paramètre spectral  $u$ , c'est-à-dire que l'on cherche les états  $\Psi$  du type (2.46) solutions du problème spectral suivant :

$$[\hat{t}_\kappa(u)\Psi](s) = A(u; s)\Psi(s+1) + \kappa D(u; s)\Psi(s-1). \quad (2.47)$$

Nous avons besoin pour cela des relations de commutation multiples suivantes,

$$\hat{A}(v_{n+1}) \prod_{j=1}^n \hat{B}(v_j) |\hat{0}\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} a(v_j) \frac{[\hat{s} + v_j - v_{n+1}]}{[\hat{s} - n]} \frac{\prod_{l=1}^n [v_l - v_j + 1]}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} [v_l - v_j]} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} \hat{B}(v_l) |\hat{0}\rangle, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}(v_{n+1}) \prod_{j=1}^n \hat{B}(v_j) |\hat{0}\rangle &= \frac{[\hat{s} - n - 1]}{[\hat{s} - 1]} \sum_{j=1}^{n+1} d(v_j) \frac{[\hat{s} + v_j - v_{n+1}]}{[\hat{s}]} \\ &\quad \times \frac{\prod_{l=1}^n [v_l - v_j - 1]}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} [v_l - v_j]} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} \hat{B}(v_l) |\hat{0}\rangle, \end{aligned} \quad (2.49)$$

où par commodité, nous avons posé  $u = v_{n+1}$ . Le  $n+1$ -ième terme de la somme est un terme dit direct, dans lequel le paramètre  $u$  est absent de l'état résultant, tandis que les  $n$  termes restants sont dits d'échanges car le paramètre  $u$  a été échangé avec l'un des  $v_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ , et est présent dans l'état résultant tandis que  $v_j$  y est absent. De plus, en vertu des relations de commutation entre les opérateurs  $\hat{A}(v_{n+1})$ ,  $\hat{D}(v_{n+1})$  et la fonction  $\varphi$ , cette dernière est évaluée en deux

points différents dans (2.47). Or, un état propre de  $\hat{t}_\kappa(u)$  doit bien sûr redonner une fonction de la forme (2.46). Le problème spectral peut néanmoins être résolu en imposant une condition suffisante satisfaite par les termes d'échanges. Or, il est nécessaire que cette condition ne dépende pas du paramètre dynamique, c'est pourquoi nous choisissons une forme particulière de la fonction  $\varphi$ , par exemple

$$\varphi_\omega(s) = \omega^s \prod_{j=1}^n \frac{[1]}{[s-j]}, \quad (2.50)$$

et qui dépend de plus d'un paramètre complexe  $\omega$  a priori arbitraire. Un état du type (2.46) pour lequel la fonction  $\varphi_\omega$  est donnée par (2.50) est appelé un *état de Bethe*. De tels états seront notés  $|\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega\rangle$ . On montre que la condition suffisante pour qu'un état de Bethe soit un état propre de la matrice de transfert (2.29), est que les termes d'échanges multipliés par la fonction  $\varphi_\omega$  translatée associée (résultant de (2.47)) se compensent exactement :

$$a(v_j) \prod_{l \neq j} \frac{[v_l - v_j + 1]}{[v_l - v_j]} = (-1)^{r\aleph} \kappa \omega^{-2} d(v_j) \prod_{l \neq j} \frac{[v_j - v_l + 1]}{[v_j - v_l]}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.51)$$

Le système d'équation (2.51) (et donc ses solutions  $(\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega)$ ) ne dépend pas du paramètre dynamique en raison de notre choix de  $\varphi$  (2.50), les fonctions  $|\{v\}_\kappa, \omega\rangle$  sont par conséquent bien définies. Par ailleurs, bien que le paramètre  $\omega$  puisse a priori prendre n'importe quelle valeur dans le cas où  $\eta$  est générique, il n'en est pas de même dans le cas cyclique : pour que l'état  $|\{v\}_\kappa, \omega\rangle$  appartienne effectivement à  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$ , il faut qu'il soit  $L$ -périodique comme une fonction de  $s$ , c'est-à-dire que  $\omega$  doit être choisi de telle sorte que  $(-1)^{rn} \omega^L = 1$ . Ainsi, si  $|\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega\rangle$  est un état de Bethe de type (2.46)-(2.50), alors lorsque  $(\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega)$  est une solution hors-diagonale des équations de Bethe (2.51)<sup>3</sup> (c'est-à-dire telle que pour tout  $i \neq j$ ,  $\eta v_i \neq \eta v_j \pmod{\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}}$ ),

$$\hat{t}_\kappa(u) |\{v\}_\kappa, \omega\rangle = \tau_\kappa(u; \{v\}_\kappa, \omega) |\{v\}_\kappa, \omega\rangle, \quad (2.52)$$

de valeur propre

$$\tau_\kappa(u; \{v\}_\kappa, \omega) = \omega a(u) \prod_{l=1}^n \frac{[v_l - u + 1]}{[v_l - u]} + (-1)^{r\aleph} \kappa \omega^{-1} d(u) \prod_{l=1}^n \frac{[u - v_l + 1]}{[u - v_l]}. \quad (2.53)$$

L'expression de la fonction  $\varphi_\omega$  est telle que la valeur propre (2.53) ne dépende pas non plus du paramètre dynamique.

On définit les états de Bethe dans l'espace dual de manière similaire à partir de l'état de référence dual  $\langle \hat{0} | (s) = |0\rangle^\dagger$  pour tout  $s$ ,

$$\langle \{v\}_\kappa, \omega | : s \mapsto \langle 0 | C(v_n; s - n) \dots C(v_2; s - 2) C(v_1; s - 1) \tilde{\varphi}_\omega(s), \quad (2.54)$$

la fonction  $\tilde{\varphi}$  étant dorénavant de la forme

$$\tilde{\varphi}_\omega(s) = \omega^{-s} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{[s+j]}{[1]}. \quad (2.55)$$

---

3. ces équations sont toujours valide dans le cas  $\eta$  générique avec  $r\aleph = 0$ .

Ainsi, si  $(\{v\}_\kappa \equiv \{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega)$  est une solution hors-diagonale du système d'équations de Bethe (2.51),

$$\langle \{v\}_\kappa, \omega | \hat{t}_\kappa(u) = \tau_\kappa(u; \{v\}_\kappa, \omega) \langle \{v\}_\kappa, \omega |, \quad (2.56)$$

où la valeur propre  $\tau_\kappa(u; \{v\}, \omega)$  est donnée par (2.53). Remarquons que comme la matrice  $R$  du modèle SOS n'est pas symétrique, les états  $\langle \{v\}_\kappa, \omega |$  de la forme (2.54) ne sont a priori pas les états duaux de  $| \{v\}_\kappa, \omega \rangle$ . De plus, la construction algébrique précédente marche pour toutes valeurs du facteur de phase  $s_0$ .

Enfin, la connaissance des états propres de la matrice de transfert du modèle SOS permet de diagonaliser la matrice de transfert du modèle à huit-vertex. On montre en effet par récurrence que la transformation de jauge (2.9) se transpose aux matrices de monodromie des deux modèles comme

$$\prod_{j=1}^N [u - \xi_j + 1] T_{a,1\dots N}^{8V}(u) S_a(u; s) S_{1\dots N}(s + \sigma_a^z) = S_{1\dots N}(s) S_a(u; s + \sigma_{1\dots N}^z) T_{a,1\dots N}(u; s), \quad (2.57)$$

où la matrice  $S_{1\dots N}(s)$  est définie comme un produit ordonné de matrices  $S$  (2.8),

$$\begin{aligned} S_{1\dots N}(s) &\equiv S_{1\dots N}(\xi_1, \dots, \xi_N; s) \\ &= S_1(\xi_1; s) S_2(\xi_2; s + \sigma_1^z) \dots S_N(\xi_N; s + \sigma_1^z + \dots + \sigma_{N-1}^z). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Or, les matrices de transfert du modèle SOS stabilisent l'espace de poids zéro, et d'autre part leurs valeurs propres ne dépendent pas de  $s$ , de telle sorte que l'action de la trace prise sur l'espace auxiliaire de (2.57) sur un état propre du modèle SOS  $| \{v\}, \omega \rangle$  est égale à

$$t^{8V}(u) S_{1\dots N}(s) | \{v\}, \omega \rangle(s) = [S_{1\dots N}(s-1) A(u; s-1) + S_{1\dots N}(s+1) D(u; s+1)] | \{v\}, \omega \rangle(s), \quad (2.59)$$

où  $t^{8V}(u) = \text{tr}_a [\prod_{j=1}^N [u - \xi_j + 1] T^{8V}(u)]$  est la matrice de transfert (renormalisée) du modèle à huit-vertex. Dès lors, si  $\psi \mapsto \int \psi$  est une fonctionnelle linéaire invariante par translation, c'est-à-dire telle que  $\int \psi(s+1) = \int \psi(s)$  pour toutes fonctions  $\psi$ , il est alors clair que  $\int S_{1\dots N}(s) | \{v\}, \omega \rangle(s)$  est un état propre de  $t^{8V}(u)$  de valeur propre  $\tau_{\kappa=1}(u; v_1, \dots, v_n) \int \text{id}$ . En particulier, dans le cas  $\eta = \frac{r}{L}$  pour lequel  $\omega$  est une racine de l'unité  $e^{i\pi k \eta}$ , une fonctionnelle de la forme  $\int \psi(s) = \sum_{j=0}^{L-1} f(s_0 + j)$  convient et ce quelque soit  $s_0$  générique.

C'est pourquoi, le modèle SOS cyclique pour lequel le paramètre de couplage  $\eta$  est rationnel est particulièrement important dans l'optique d'étudier le modèle à huit-vertex, qui comme nous le rappelons est beaucoup plus difficile car les méthodes usuelles de diagonalisation ne s'y appliquent pas directement. Enfin, remarquons une nouvelle fois que l'action du groupe modulaire sur l'ensemble des fonctions  $\theta$  permet de ramener le cas où  $\eta L = r + m\tau$  au cas rationnel traité ci-dessus.

### 2.3.2 Complétude des états propres de Bethe

Nous venons de construire les états propres de la matrice de transfert du modèle SOS périodique comme des états  $| \{v_1, \dots, v_n\}_\kappa; \omega \rangle$  pour lesquels  $N = 2n + \aleph L$  et  $(\{v\}_\kappa, \omega)$  est solution

des équations de Bethe (2.51). Avant de s'intéresser à la complétude, étudions un peu plus en détail le comportement des équations de Bethe lorsqu'une des racines  $v_j$  est translatée par l'une des quasi-périodes des fonctions  $\theta$ , c'est-à-dire par 1 ou  $\tau$ .

Fixons dès lors une solution  $(\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega)$  des équations de Bethe (2.51) pour  $\eta = \frac{r}{L}$ , et définissons les deux transformations

$$v_k \rightarrow \widehat{v}_k^x = v_k + \delta_{jk}x, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.60)$$

pour  $x = 1$  ou  $\tau$ . En utilisant les propriétés de quasi-périodicité des fonctions  $\theta$  (voir appendice A), on montre facilement que si  $(\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega)$  est solution des équations de Bethe, alors  $(\{\widehat{v}_1^x, \dots, \widehat{v}_n^x\}_\kappa, e^{-i\pi \frac{r}{L}\omega})$  est également une solution de (2.51). La valeur propre correspondante satisfait à

$$\tau_\kappa(u; \{v\}_\kappa, \omega) = \tau_\kappa(u; \{\widehat{v}^x\}_\kappa, e^{i\pi \frac{r}{L}\omega}). \quad (2.61)$$

Dès lors, lorsque  $L$  est impair, comme  $r$  et  $L$  sont premiers entre eux,  $\omega$  est une racine de l'unité et il existe  $2L$  solutions (a priori différentes) des équations de Bethe construites à partir d'un même ensemble de racines  $\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa$  sous les transformations (2.60).

Si  $L$  est pair,  $r$  est forcément impair, de telle sorte que  $\omega^L = (-1)^{rn}$ . Toutefois, c'est le carré du paramètre  $\omega$  qui intervient dans (2.51), de telle sorte que si  $(\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega)$  est solution des équations de Bethe, il existe une autre solution  $(\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, -\omega)$  de (2.51) correspondant à un état de Bethe  $|\{v\}_\kappa, -\omega\rangle$  distinct de  $|\{v\}_\kappa, \omega\rangle$  et de valeur propre opposée en vertu de (2.61). On retrouve par conséquent également  $2L$  états de Bethe a priori différents construits à partir de l'ensemble de racines  $\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa$ .

Dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique, la complétude des états propres de la matrice de transfert doit être montrée à postériori comme nous l'avons vu. De plus, rappelons que pour la chaîne de spins XXZ, la complétude des états déformés joue un rôle particulièrement important dans l'obtention de la fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points, cette dernière étant le point de départ de l'étude de la fonction à deux points.

Pour le modèle SOS, la complétude des états non déformés pour lesquels  $\kappa = 1$  a été montrée dans le cas cyclique pour  $\eta = \frac{1}{L}$  par Felder, Tarasov et Varchenko dans [74] (pour un multiplicateur arbitraire sous la transformation  $s \mapsto s + L$ , voir la proposition 2.3.1). Plus précisément, le résultat suivant a été obtenu :

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $N = 2n$  et  $\eta = \frac{1}{L}$ , avec  $L$  un entier impair tel que  $L > n$ . Pour  $\alpha, \{\xi\}$  génériques, il y a  $d = L \dim \mathcal{H}[0]$  solutions admissibles et hors-diagonales des équations de Bethe*

$$\prod_{k=1}^N \frac{[v_j - \xi_k + 1]}{[v_j - \xi_k]} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{[v_j - v_l - 1]}{[v_j - v_l + 1]} = \omega^{-2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.62)$$

avec  $\omega^L = (-1)^n \alpha$ , de telle sorte que les états propres de Bethe (2.46)-(2.50) forment une base de l'espace vectoriel de dimension  $d$  des fonctions quasi  $L$ -périodiques  $f \in \text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  de multiplicateur  $\alpha$ , i.e. telles que  $f(s + L) = \alpha f(s)$ .

La condition  $L > n$  revient à empêcher au paramètre dynamique de boucler sur le réseau, c'est-à-dire que l'on se restreint ici au cas où  $N$  n'est jamais différent de 0. Dans l'optique de

généraliser l'équation maîtresse au modèle SOS, on souhaite obtenir la complétude pour des états de Bethe  $\kappa$ -déformés dans le cas où  $\eta = \frac{r}{L}$  est un rationnel quelconque.

La proposition suivante, qui se base fortement sur la preuve obtenue par Felder, Tarasov, et Varchenko dans [74], a été obtenue dans l'Article 1.

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $N = 2n$  et  $\eta = \frac{r}{L}$  pour deux entiers  $r$  et  $L$  premiers entre eux, avec  $L$  impair et tel que  $L > n$ . Il existe  $\kappa_0 > 0$  tel que pour  $0 < |\kappa| < \kappa_0$  et pour un ensemble d'inhomogénéités  $\{\xi\}$  arbitraire, il y ait  $d = L \dim \mathcal{H}[0]$  solutions admissibles et hors-diagonales des équations de Bethe  $\kappa$ -déformées*

$$\prod_{k=1}^N \frac{[v_j - \xi_k + 1]}{[v_j - \xi_k]} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{[v_j - v_l - 1]}{[v_j - v_l + 1]} = \kappa \omega^{-2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.63)$$

avec  $\omega^L = (-1)^{rn}$ , les états propres de Bethe  $\kappa$ -déformés correspondants (2.46)-(2.50) forment une base de l'espace vectoriel de dimension  $d$  des fonctions  $L$ -périodiques  $f \in \text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  telles que  $f(s + L) = f(s)$ .

En introduisant la fonction  $\mathcal{Y}_{\kappa;\omega}(u; \{v\}_\kappa)$  définie comme

$$\mathcal{Y}_{\kappa;\omega}(u; \{v\}_\kappa) = a(u) \prod_l [v_l - u + 1] + \kappa \omega^{-2} d(u) \prod_l [v_l - u - 1], \quad (2.64)$$

les états de la forme (2.46)-(2.50) sont états propres de la matrice de transfert  $\kappa$ -déformée

$$\hat{t}_\kappa(u) = \hat{A}(u) + \kappa \hat{D}(u), \quad (2.65)$$

et forment une base de l'espace des états  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  sous les hypothèses de la proposition (2.3.2), si  $(\{v_1, \dots, v_n\}_\kappa, \omega)$  est une solution admissible et hors-diagonale des équations de Bethe  $\kappa$ -déformées

$$\mathcal{Y}_{\kappa;\omega}(v_j; \{v\}_\kappa) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.66)$$

Enfin, la complétude nous permet de décomposer l'identité dans la base des états propres  $\kappa$ -déformés comme

$$\text{id} = \sum_{(\{v\}_\kappa, \omega_v)} \frac{|\{v\}_\kappa, \omega_v\rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v|}{\langle \{v\}_\kappa, \omega_v | \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle}. \quad (2.67)$$

## 2.4 Diagonalisation des matrices de transfert du modèle SOS anti-périodique par SOV

On s'intéresse dorénavant au modèle SOS anti-périodique pour  $\eta$  quelconque. La diagonalisation de la matrice de transfert de ce modèle (2.28), qui est égale à  $\hat{B}(u) + \hat{C}(u)$ , est possible à l'aide de la séparation des variables. Toutefois, la présence du paramètre dynamique apporte quelques subtilités à la méthode. En particulier, les variables séparées qui s'obtiennent dans le cas de la chaîne XXZ anti-périodique après diagonalisation de l'opérateur  $D$ , ne s'obtiennent ici

qu'en "pseudo-diagonalisant" l'opérateur  $\widehat{D}(u)$ , où nous préciserons plus loin ce qu'on entend par pseudo-diagonaliser [164].

Dans le cas de la séparation des variables, la condition d'anti-périodicité relie l'espace du paramètre dynamique à l'espace quantique. Ceci nous amène à définir l'espace de représentation du modèle comme

$$\mathbb{D}_{(6\text{VD}),N} \equiv \mathbb{D}_N \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N, \quad (2.68)$$

où  $\mathbb{D}_N$  est l'espace de dimension infinie de représentation du paramètre dynamique, sur lequel sont représentés les opérateurs de translation  $T_{\hat{s}}^{\pm}$  et de multiplication par la hauteur  $\hat{s}$ . Leur action sur les états propres de  $\hat{s}$  de  $\mathbb{D}_N$  est définie de la manière suivante,

$$\langle s(a) | \equiv \langle s(0) | T_s^{-a}, \quad | s(a) \rangle \equiv T_s^a | s(0) \rangle, \quad \forall a \in \mathbb{Z}, \quad (2.69)$$

avec

$$\langle s(a) | \hat{s} = s(a) \langle s(a) |, \quad \hat{s} | s(a) \rangle = s(a) | s(a) \rangle, \quad (2.70)$$

$$s(a) = -\frac{1}{2}(2a + p_N) + \frac{x}{2\eta} + y \frac{\tau}{2\eta} \quad \forall a \in \mathbb{Z}, x, y \in \{0; 1\}, \quad (2.71)$$

$$p_N = \{0 \text{ si } N \text{ pair}, 1 \text{ si } N \text{ impair}\}. \quad (2.72)$$

*Remarque 3.* Les variables  $x$  et  $y$  correspondent à fixer un facteur de phase  $s_0$  particulier. Pour  $x = 0 = y$  qui a été traité dans [164], la matrice  $R$  du modèle SOS est bien définie uniquement lorsque  $N$  est impair. Nous présentons dans ce qui suit le cas  $x = 1$  et  $y = 0$  pour lequel la longueur du réseau peut être à la fois paire ou impaire. Le cas  $x = 0$  ou 1 et  $y = 1$  peut également être décrit en effectuant une transformation de jauge au sein du modèle SOS, qui laisse invariant l'équation de Yang-Baxter (2.17).

La normalisation des états précédents est fixée comme  $\langle s(a) | s(b) \rangle = \delta_{a,b}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ . Par ailleurs, un état de l'espace de spin  $\mathcal{H} = \otimes_{n=1}^N \mathcal{H}_n$  est défini par la donnée d'un vecteur  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)$  de  $\mathbb{Z}_2^N$  tel que  $\sigma_n^z | \mathbf{h} \rangle = (1 - 2h_n) | \mathbf{h} \rangle$ . Dès lors, un état quelconque de  $\mathbb{D}_{(6\text{VD}),N}$  s'écrit comme  $| s(a) \rangle \otimes | \mathbf{h} \rangle$ . Toutefois, le modèle étant anti-périodique, il existe une relation de liaison entre la valeur du paramètre dynamique et les configurations de spins  $\mathbf{h}$  permises. Pour expliciter cette relation de liaison, on définit l'opérateur  $S_{\hat{s}} \in \text{End}(\mathbb{D}_{(6\text{VD}),N})$  comme

$$S_{\hat{s}} = S_z + 2\hat{s}, \quad (2.73)$$

dont l'ensemble des sous-espaces propres  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)}$  correspondant aux valeurs propres  $2\ell + \frac{x}{\eta}$  permet de décomposer l'espace des états du modèle SOS anti-périodique  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}$  comme

$$\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N} = \oplus_{\ell=-\infty}^{\infty} \bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)}. \quad (2.74)$$

Les états appartenant à  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)}$  sont ceux pour lesquels l'action de  $S_{\hat{s}}$  est diagonale, et se mettent sous la forme  $|\ell\rangle \otimes_{n=1}^N |h_n\rangle$ , avec  $|\ell\rangle = T_{\hat{s}}^{-\ell} |t_{0,\mathbf{h}}\rangle$  ( $|t_{0,\mathbf{h}}\rangle$  étant un état propre de  $\hat{s}$  de la forme (2.70), tandis que  $|\ell\rangle$  est choisi de telle sorte que l'état  $T_{\hat{s}}^{-\ell} |t_{0,\mathbf{h}}\rangle \otimes_{n=1}^N |h_n\rangle$  appartienne effectivement à  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)}$ , où bien sûr,

$$S_{\hat{s}} |\ell\rangle \otimes_{n=1}^N |h_n\rangle = (2\ell + \frac{x}{\eta}) |\ell\rangle \otimes_{n=1}^N |h_n\rangle, \quad \hat{s} |\ell\rangle = t_{\ell,\mathbf{h}} |\ell\rangle, \quad S_z |\mathbf{h}\rangle = s_{\mathbf{h}} |\mathbf{h}\rangle, \quad (2.75)$$

avec

$$t_{\ell, \mathbf{h}} = -\frac{1}{2}s_{\mathbf{h}} + \frac{x}{2\eta} + \ell = (t_{0, \mathbf{h}} + \ell), \quad s_{\mathbf{h}} = \sum_{k=1}^N (1 - 2h_k), \text{ pour } \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N). \quad (2.76)$$

Avec ces notations, la matrice de monodromie anti-périodique qui agit trivialement sur l'espace du paramètre dynamique n'est autre que

$$\bar{T}_a(u; \hat{s}) = \begin{pmatrix} C(u; \hat{s}) & D(u; \hat{s}) \\ A(u; \hat{s}) & B(u; \hat{s}) \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

mais comme ses éléments de matrice satisfont aux relations de commutation suivantes,

$$[A(u; \hat{s}), \hat{s}] = [B(u; \hat{s}), \hat{s}] = [C(u; \hat{s}), \hat{s}] = [D(u; \hat{s}), \hat{s}] = 0, \quad (2.78)$$

$$[A(u; \hat{s}), S_z] = [D(u; \hat{s}), S_z] = 0, [C(u; \hat{s}), S_z] = -2C(u; \hat{s}), [B(u; \hat{s}), S_z] = 2B(u; \hat{s}), \quad (2.79)$$

l'action de sa trace prise sur l'espace auxiliaire  $\bar{t}(u; \hat{s}) = \text{tr}_a \bar{T}_a(u; \hat{s})$  ne stabilise pas l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}), N}$ . La bonne matrice de transfert qui stabilise l'espace des états est comme précédemment définie à partir de l'opérateur de translation du paramètre dynamique

$$\mathsf{T}_{\hat{s}}^{\pm \sigma_a^z} = \begin{pmatrix} \mathsf{T}_{\hat{s}}^{\pm} & 0 \\ 0 & \mathsf{T}_{\hat{s}}^{\mp} \end{pmatrix}_{[a]}, \quad (2.80)$$

comme la trace sur l'espace auxiliaire de la matrice de monodromie anti-périodique opératoire suivante,

$$\begin{aligned} \widehat{T}_a(u) &= \sigma_a^x T(u; \hat{s}) \mathsf{T}_{\hat{s}}^{\sigma_a^z} \\ &= \sigma_a^x \widehat{T}(u) = \begin{pmatrix} \widehat{C}(u) & \widehat{D}(u) \\ \widehat{A}(u) & \widehat{B}(u) \end{pmatrix}_{[a]}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

et on montre facilement à partir de (2.23) que cette dernière est solution de l'équation

$$R_{a_1, a_2}(u_1 - u_2; -\hat{s} - S_z) \widehat{T}_{a_1}(u_1) \widehat{T}_{a_2}(u_2) = \widehat{T}_{a_2}(u_2) \widehat{T}_{a_1}(u_1) R_{a_1, a_2}(u_1 - u_2; \hat{s}), \quad (2.82)$$

où l'on a utilisé les deux propriétés satisfaites par la matrice  $R$  (2.13),

$$\mathsf{T}_{\hat{s}}^{-\sigma_{a_1}^z} \mathsf{T}_{\hat{s}}^{-\sigma_{a_2}^z} R_{a_1, a_2}(u_1 - u_2; \hat{s}) \mathsf{T}_{\hat{s}}^{\sigma_{a_1}^z} \mathsf{T}_{\hat{s}}^{\sigma_{a_2}^z} = R_{a_1, a_2}(u_1 - u_2; \hat{s}), \quad (2.83)$$

$$\sigma_{a_1}^x \otimes \sigma_{a_2}^x R_{a_1, a_2}(u_1 - u_2; \hat{s}) \sigma_{a_1}^x \otimes \sigma_{a_2}^x = R_{a_1, a_2}(u_1 - u_2; -\hat{s}). \quad (2.84)$$

On montre directement à partir de (2.82) que les matrices de transfert anti-périodiques

$$\widehat{t}(u) = \text{tr}_a \widehat{T}_a(u) = \widehat{B}(u) + \widehat{C}(u) \quad (2.85)$$

stabilisent les sous-espaces propres  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}), N}^{(\ell)}$  de  $S_{\hat{s}}$ . C'est cette matrice de transfert que l'on cherche à diagonaliser comme nous l'avons déjà annoncé. Toutefois, notons que les opérateurs  $\widehat{A}(u)$  et  $\widehat{D}(u)$  ne stabilisent pas  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}), N}^{(\ell)}$  car ils ne retournent aucun spin sur l'espace quantique

et translatent de plus le paramètre dynamique en vertu de (2.81). Les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter que l'on considère pour la diagonalisation de la matrice de transfert (2.85) sont ainsi les opérateurs  $A(u; \hat{s})$ ,  $D(u; \hat{s})$ ,  $\hat{B}(u)$  et  $\hat{C}(u)$  car les relations de commutation suivantes

$$[\hat{B}(u), S_z] = 2\hat{B}(u), \quad [\hat{B}(u), \hat{s}] = -\hat{B}(u), \quad (2.86)$$

$$[\hat{C}(u), S_z] = -2\hat{C}(u), \quad [\hat{C}(u), \hat{s}] = +\hat{C}(u), \quad (2.87)$$

impliquent que les opérateurs  $\hat{B}(u)$  et  $\hat{C}(u)$  satisfont à

$$[\hat{B}(u), S_{\hat{s}}] = 0 = [\hat{C}(u), S_{\hat{s}}], \quad (2.88)$$

et stabilisent ainsi l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)}$ .

Comme dans le cas de la chaîne de spins XXZ, les variables séparées sont données par les opérateurs zéros de  $D(u; \hat{s})$ , la diagonalisation (ici pseudo-diagonalisation) de ce dernier permettant de les caractériser.

Définissons pour ce faire les deux états de références suivant, avec respectivement tous les spins vers le haut et tous les spins vers le bas :

$$\langle \ell, \mathbf{0} | = \langle t_{0,0} | \otimes_{n=1}^N \langle h_n = 0 | T_{\hat{s}}^{\ell}, \quad | \ell, \mathbf{1} \rangle = T_{\hat{s}}^{-\ell} | t_{0,1} \rangle \otimes_{n=1}^N | h_n = 1 \rangle, \quad (2.89)$$

où l'on a utilisé la notation  $\mathbf{0} = (h_1 = 0, \dots, h_N = 0)$  et  $\mathbf{1} = (h_1 = 1, \dots, h_N = 1)$ , de telle sorte que  $\eta t_{0,0} = -(\eta N)/2 + x/2$  et  $\eta t_{0,1} = (\eta N)/2 + x/2$  par définition de  $t_{\ell,h}$ . Ces états sont bien des états de références au sens où ils sont des états propres des opérateurs  $A(u; \hat{s})$  et  $D(u; \hat{s})$ , et sont annihilés par les opérateurs  $\hat{B}(u)$ . Ceci nous amène à définir les états suivants :

$$\langle \ell, h_1, \dots, h_N | = \frac{1}{N} \langle \ell, \mathbf{0} | \prod_{n=1}^N \left( \frac{\hat{C}(\xi_n)}{d(\xi_n - 1)} \right)^{h_n}, \quad (2.90)$$

et

$$| \ell, h_1, \dots, h_N \rangle = \frac{1}{N} \prod_{n=1}^N \left( \frac{\hat{C}(\xi_n - 1)}{d(\xi_n - 1)} \right)^{(1-h_n)} | \ell, \mathbf{1} \rangle, \quad (2.91)$$

pour tout  $n$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , avec  $N$  une constante de normalisation qui permet de simplifier les produits scalaires entre états à droite et à gauche. De plus, en utilisant les relations de commutation entre  $T_{\hat{s}}^{\pm}$  et  $\hat{s}$ , ou directement à partir de (2.75), il est simple de montrer que

$$\langle \ell, h_1, \dots, h_N | \hat{s} = (t_{0,h} + \ell) \langle \ell, h_1, \dots, h_N |, \quad \langle \ell, h_1, \dots, h_N | S_z = s_h \langle \ell, h_1, \dots, h_N |, \quad (2.92)$$

et

$$\hat{s} | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle = | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle (t_{0,h} + \ell), \quad S_z | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle = | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle s_h. \quad (2.93)$$

L'action de l'opérateur  $D(u; \hat{s})$  sur un état de la forme (2.91) est finalement donnée par

$$D(u; \hat{s} + 1) | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle = d_{\ell,h}^R \left( \frac{1}{N} \prod_{n=1}^N \left( \frac{C(\xi_n - 1; \hat{s} + 1)^{(1-h_n)} T_{\hat{s}}^{(1-h_n)}}{d(\xi_n - 1)} \right) | \ell, \mathbf{1} \rangle \right) \quad (2.94)$$

avec

$$d_{\ell, \mathbf{h}}^R = \frac{[t_{\ell+1, \mathbf{h}}]}{[t_{\ell+1, \mathbf{1}}]} d_{\mathbf{h}}(u), \quad d_{\mathbf{h}}(u) = \prod_{j=1}^N [u - \xi_j^{(h_j)}], \quad (2.95)$$

et où l'on a posé  $\xi_j^{(h_j)} = \xi_j - h_j$  pour une configuration de spins  $\mathbf{h}$ . Toutefois, bien que cette action ne redonne pas un état de la forme (2.91) à cause du décalage dans le paramètre dynamique (on dit que ces états pseudo-diagonalisent l'opérateur  $D(u; \hat{s})$ ), on montre que l'ensemble des variables  $\xi_j^{(h_j)}$  joue effectivement le rôle des variables séparées pour le modèle SOS anti-périodique. A partir de ces variables, on peut calculer l'action des opérateurs  $\hat{C}(u)$  et  $\hat{B}(u)$  sur ce type d'états, et obtenir des formules d'interpolation similaires<sup>4</sup> au cas de la chaîne de spins XXZ :

$$\hat{C}(u) | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle = \sum_{a=1}^N T_a^- \frac{[t_{\ell \mathbf{h}} - u + \xi_a^{(h_a)}]}{[t_{\ell, \mathbf{h}}]} \prod_{b \neq a} \frac{[u - \xi_b^{(h_b)}]}{[\xi_a^{(h_a)} - \xi_b^{(h_b)}]} d(\xi_a^{(h_a)}) | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle, \quad (2.96)$$

$$\hat{B}(u) | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle = \sum_{a=1}^N T_a^+ \frac{[t_{\ell \mathbf{h}} - u + \xi_a^{(h_a)}]}{[t_{\ell, \mathbf{h}}]} \prod_{b \neq a} \frac{[u - \xi_b^{(h_b)}]}{[\xi_a^{(h_a)} - \xi_b^{(h_b)}]} a_{x, \ell+1, \mathbf{h}}(\xi_a^{(h_a)}) | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle, \quad (2.97)$$

où l'on a comme toujours l'opérateur de translation sur l'espace quantique  $T_a^\pm | \ell, h_1, \dots, h_a, \dots, h_N \rangle = | \ell, h_1, \dots, h_a \pm 1, \dots, h_N \rangle$ , avec de plus

$$a_{x, \ell, \mathbf{h}}(u) = (-1)^x \frac{[t_{\ell, \mathbf{h}}]}{[t_{\ell, \mathbf{h}} - 2\ell]} a(u). \quad (2.98)$$

L'action de l'opérateur  $A(u; \hat{s})$  est quant à elle définie à partir de l'expression du déterminant quantique (2.39).

De manière similaire au cas de la chaîne de spins XXZ, l'ensemble des états qui pseudo-diagonalisent l'opérateur  $D$  forme une base de l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}), N}^{(\ell)}$ , ce dernier étant de dimension  $2^N$ . Or, les matrices de transfert commutent deux à deux sur l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}), N}^{(0)}$ , et c'est justement ces matrices de transfert que l'on cherche à diagonaliser. On peut ainsi écrire le problème spectral sur ce sous-espace, et montrer qu'il se sépare effectivement comme attendu.

Soit  $\langle t |$  un état propre dans l'espace dual de la matrice de transfert anti-périodique  $\hat{t}(u)$ . On cherche à résoudre le problème spectral suivant,

$$\langle t | \hat{t}(u) = \langle t | t(u). \quad (2.99)$$

On décompose pour ce faire l'état propre  $\langle t |$  sur la base des pseudo-états propres de l'opérateur  $D$ ,

$$| t \rangle = \sum_{h_1, \dots, h_n=0}^1 \langle t | 0, h_1, \dots, h_N \rangle \langle 0, h_1, \dots, h_N |, \quad (2.100)$$

4. pour tout ensemble  $\{\xi\}$  d'inhomogénéités telles que  $|\xi_a - \xi_b| \neq 0, 1 \bmod 2\tau$  pour  $a < b$  dans  $\{1, \dots, N\}$ .

dont les coefficients sont définis comme la projection de  $\langle t |$  sur un état paramétré par une configuration de spins  $\mathbf{h}$ . A l'instar de la chaîne de spins XXZ anti-périodique, ces fonctions coefficients sont notées

$$\Psi_t(\mathbf{h}) = \langle t | 0, h_1, \dots, h_N \rangle, \quad (2.101)$$

ce qui permet de réécrire l'équation aux valeurs propres (2.99) dans la base des états séparés, et d'obtenir les conditions suivantes pour les coefficients  $\Psi_t(\mathbf{h})$  :

$$t(\xi_n - h_n)\Psi_t(\mathbf{h}) = a(\xi_n - h_n)\Psi_t(\mathbf{T}_n^+\mathbf{h}) + d(\xi_n - h_n)\Psi_t(\mathbf{T}_n^-\mathbf{h}), \quad (2.102)$$

où bien sûr les opérateurs  $\mathbf{T}_n^\pm$  sont des opérateurs de translation définis comme  $\mathbf{T}_n^\pm(\mathbf{h}) = (h_1, \dots, h_n \pm 1, \dots, h_N)$ . Le problème spectral (2.99) se ramène ainsi en la résolution des  $2^N$  conditions indépendantes (2.102), qui sont à nouveau des équations TQ discrètes, encore équivalente pour  $h_n$  à,

$$\begin{pmatrix} t(\xi_n) & -a(\xi_n) \\ -d(\xi_n - 1) & t(\xi_n - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_t(h_1, \dots, h_n = 0, \dots, h_N) \\ \Psi_t(h_1, \dots, h_n = 1, \dots, h_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.103)$$

Il existe ainsi une solution non triviale, condition nécessaire à ce que  $t(u)$  appartiennent effectivement au spectre de  $\hat{t}(u)$ , si et seulement si le déterminant de la matrice  $2 \times 2$  ci-dessus s'annule, c'est-à-dire si et seulement si

$$t(\xi_n)t(\xi_n - 1) = a(\xi_n)d(\xi_n - 1) \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N. \quad (2.104)$$

Le spectre est par conséquent entièrement caractérisé par le système d'équation (2.104). Dans le cas où  $a(\xi_n) \neq 0$  et  $d(\xi_n - 1) \neq 0$ , ceci nous permet d'exprimer les coefficients en  $h_n = 0$  en fonction de ceux en  $h_n = 1$ , toujours pour tout  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\frac{\Psi_t(h_1, \dots, h_n = 1, \dots, h_N)}{\Psi_t(h_1, \dots, h_n = 0, \dots, h_N)} = \frac{t(\xi_n)}{a(\xi_n)}, \quad (2.105)$$

et de montrer par interpolation (la valeur propre étant un pôle elliptique) que les états propres de la matrice de transfert anti-périodique sont des états séparés de la forme

$$\langle t | = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^1 \prod_{a=1}^N \bar{Q}_t(\xi_a^{(h_a)}) \det_N \theta_{ij}^{(\mathbf{h})} \langle 0, h_1, \dots, h_N |, \quad (2.106)$$

de valeur propre associée

$$t(u) = \sum_{j=1}^N \frac{[t_{0,0} - u + \xi_j]}{[t_{0,0}]} \prod_{k \neq j} \frac{[u - \xi_k]}{[\xi_j - \xi_k]} t(\xi_a), \quad (2.107)$$

et dont les coefficients satisfont à

$$\frac{\bar{Q}_t(\xi_a - 1)}{\bar{Q}_t(\xi_a)} = \frac{t(\xi_a)}{a(\xi_a)}. \quad (2.108)$$

Notons de plus que le déterminant qui intervient dans l'expression explicite des états propres de la matrice de transfert anti-périodique est un terme de structure “séparé”, au sens où chaque ligne ne dépend que d'une seule variable séparée  $\xi_n^{(h_n)}$ . C'est ce terme de structure, relié au produit scalaire entre deux pseudo-états propres de l'opérateur  $D$ , qui dans la séparation des variables permet d'exprimer de manière presque automatique les produits scalaires entre deux états séparés quelconques comme des déterminants de taille  $N$ . La forme de ce terme de structure (typiquement un déterminant de Vandermonde) est semble-t-il universelle et découle de la forme de la matrice  $R$  : pour des modèles ayant une matrice  $R$  essentiellement similaire, elle ne dépend que très peu des modèles que l'on considère comme l'ont montré Niccoli et ses collaborateurs [89] en développant l'approche par la séparation des variables pour le calcul des fonctions de corrélation pour des modèles allant de la chaîne de spins XXZ anti-périodique, au modèle de Sine-Gordon [89, 163, 164, 165, 166]. Notons cependant que la forme des produits scalaires entre états séparés n'est pas connue pour des modèles de plus haut rang.

Les états propres  $|t\rangle$  sont définis de manière similaire comme des états séparés de la forme

$$|t\rangle = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^1 \prod_{a=1}^N Q_t(\xi_a^{(h_a)}) \det_N \theta_{ij}^{(\mathbf{h})} |0, h_1, \dots, h_N\rangle, \quad (2.109)$$

de valeur propre associée (2.107) solution de (2.104) et dont les coefficients satisfont à

$$\frac{Q_t(\xi_a - 1)}{Q_t(\xi)} = \frac{t(\xi_a)}{d(\xi_a - \eta)}. \quad (2.110)$$

Enfin, similairement à ce qui se passe pour la chaîne de spins XXZ anti-périodique, on peut montrer que le spectre de la matrice de transfert anti-périodique est simple, et que ses états propres forment une base de l'espace  $\tilde{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)}$  : la complétude est à nouveau automatiquement satisfaite.

## Chapitre 3

# Vers le calcul des fonctions de corrélation du modèle SOS : étude des facteurs de forme en volume fini

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé le spectre des matrices de transfert des modèles SOS périodique et anti-périodique ainsi qu'une expression compacte et explicite de leurs vecteurs propres, caractérisés soit par le système d'équations de Bethe (2.51) ou par le système d'équations séparées de type TQ discrètes (2.102). Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème du calcul des éléments de matrices des opérateurs locaux, dans la base des états propres ainsi caractérisés. En particulier, une représentation sous la forme d'un unique déterminant est obtenue pour les plus simples d'entre eux, les facteurs de forme. Ce calcul est basé comme nous le rappelons sur les deux points-clés suivants :

- la résolution du problème inverse quantique, c'est-à-dire exprimer les opérateurs locaux du modèle en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter du modèle SOS, de façon à pouvoir déterminer l'action des opérateurs locaux sur les états propres de la matrice de transfert.
- l'obtention d'une formule compacte et manipulable pour les produits scalaires résultants, entre un état propre de la matrice de transfert et un état quelconque.

La première partie de ce chapitre est ainsi consacrée à la résolution du problème inverse quantique, pour le modèle SOS périodique et anti-périodique.

Une deuxième partie s'intéresse au calcul des produits scalaires résultants, pour le modèle SOS périodique dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique. Ces résultats sont naturellement appliqués dans une deuxième partie au calcul des facteurs de forme du modèle SOS périodique cyclique, pour lequel les produits scalaires entre états de Bethe se simplifient considérablement. En se basant sur la représentation ainsi obtenue, nous dérivons une formule compacte, sous forme d'intégrales multiples, pour une fonction génératrice de la fonction à deux points analogue à celle de la chaîne de spins XXZ.

Enfin, l'obtention d'une formule sous la forme d'un unique déterminant pour les produits scalaires entre états séparés du modèle SOS anti-périodique et leur application au calcul des facteurs de forme est présentée dans une troisième et dernière partie.

### 3.1 Résolution du problème inverse quantique (pour des conditions aux limites périodiques et anti-périodiques)

La résolution du problème inverse quantique constitue l'un des deux points-clés des approches en volume fini pour le calcul des fonctions de corrélation, que ce soit par l'ansatz de Bethe algébrique ou la méthode de séparation des variables. Rappelons que l'idée est de plonger les opérateurs locaux du modèle dans la même structure algébrique que les opérateurs engendrant les états propres de la matrice de transfert, et d'ainsi ramener l'action de ces opérateurs locaux sur les états ainsi construits aux relations de commutation de cette algèbre. Le deuxième point clé est bien sûr le calcul des produits scalaires résultants.

Pour la chaîne de spins XXZ périodique ou anti-périodique, nous avons vu que la résolution du problème inverse quantique repose essentiellement sur la forme algébrique de la matrice  $R$  (1.18) et la propriété de régularité (1.83). La matrice  $L$  du modèle SOS, en plus d'être de poids zéro (2.19), satisfait également aux propriétés de régularité et de symétrie de croisement suivantes :

$$L_{a_1 a_2}(0; s) = [1] P_{a_1 a_2} \quad \text{régularité,} \quad (3.1)$$

$$\sigma_{a_1}^y L_{a_1 a_2}(-u-1; s - \sigma_{a_1}^z) \sigma_{a_1}^y \frac{[s + \sigma_{a_2}^z][u]}{[s][u+1]} = L_{a_2 a_1}(u; s)^{t_{a_1}} \quad \text{symétrie de croisement,} \quad (3.2)$$

pour toute valeur  $s$  du paramètre dynamique <sup>1</sup>. Toutefois, la présence du paramètre dynamique rend la résolution du problème inverse quantique plus subtile comme nous le montrons dans le cas du modèle SOS périodique. En utilisant l'unitarité (2.18) et la symétrie de croisement (3.2), on calcule facilement l'inverse de la matrice de monodromie (2.21) en fonction du déterminant quantique (2.39)

$$T_{a_1, 1 \dots N}(u; s)^{-1} = \sigma_{a_1}^y T_{a_1, 1 \dots N}(u-1; s - \sigma_{a_1}^z)^{t_{a_1}} \sigma_{a_1}^y \frac{[s + \sigma_{1 \dots N}^z]}{[s]} \times \frac{1}{\det_q T(u; s)}, \quad (3.3)$$

ou encore,

$$\hat{T}_{a_1, 1 \dots N}(u)^{-1} = \sigma_{a_1}^y \hat{T}_{a_1, 1 \dots N}(u-1)^{t_{a_1}} \sigma_{a_1}^y \frac{[\hat{s} + \sigma_{1 \dots N}^z]}{[\hat{s}]} \times \frac{1}{\det_q T(u; \hat{s})}. \quad (3.4)$$

Soit dès lors la matrice élémentaire  $E_i^{\alpha\beta}$ , agissant sur le  $i$ -ième espace quantique  $\mathcal{H}_i$ , et d'éléments de matrice  $(E_i^{\alpha\beta})_{jk} = \delta_j^\alpha \delta_k^\beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  valent  $\pm 1$ . Rappelons que l'action adjointe du générateur  $h$  de la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{sl}_2$  sur les matrices élémentaires est de la forme

$$[h_i, E_i^{\alpha\beta}] = (\alpha - \beta) E_i^{\alpha\beta}. \quad (3.5)$$

Or, comme la matrice de monodromie du modèle SOS est construite comme un produit ordonné de matrices  $L$  décalées par les éléments du Cartan des sites inférieurs (selon l'ordre et représentés par  $\sigma^z$ ), la commutation des matrices élémentaires avec les matrices de monodromie (2.21)

---

1. Dans (3.2), l'opérateur  $h_{a_1}$  agit à droite de tous les opérateurs impliqués dans la définition de la matrice  $L$ , et  $t_{a_1}$  indique la transposition vis à vis de l'espace  $a_1$

leur fait subir des décalages en le paramètre dynamique, et empêche par conséquent de transposer directement la preuve pour la reconstruction des opérateurs locaux de la chaîne de spins XXZ. La résolution du problème inverse quantique pour le modèle SOS y est néanmoins très similaire, mais nécessite les deux lemmes suivants se basant essentiellement sur la propriété de poids zéro et de régularité de la matrice  $L$ .

**Lemme 3.1.1.** *Pour toute valeur du paramètre dynamique  $s$ ,*

$$T_{a_1,1\dots N}(\xi_1; s) T_{a,1\dots N}(u; s + \sigma_{a_1}^z) = T_{a,2\dots Na_1}(u; s + \sigma_1^z) T_{a_1,1\dots N}(\xi_1; s + \sigma_a^z), \quad (3.6)$$

où  $T_{a,1\dots N}$  (respectivement  $T_{a,2\dots Na_1}$ ) est la matrice de monodromie d'une chaîne de  $N$  sites indicée (dans cet ordre) par  $1, 2, \dots, N$  (respectivement par  $2, 3, \dots, N, a_1$ ) de paramètre d'inhomogénéités  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  (respectivement  $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N, \xi_1$ ).

Nous renvoyons à l'**Article 1** pour la démonstration de ce lemme basé sur la relation (1.9). De plus, comme le montre une récurrence, la propriété précédente se répercute directement sur un produit de matrices de monodromie (2.21) évaluées en des inhomogénéités successives.

**Lemme 3.1.2.** *Pour toute valeur du paramètre dynamique  $s$ , les produits de matrices de monodromie satisfont aux identités suivantes :*

$$\begin{aligned} & T_{a_1,1\dots N}(\xi_1; s) T_{a_2,1\dots N}(\xi_2; s + \sigma_{a_1}^z) \dots T_{a_i,1\dots N}(\xi_i; s + \sigma_{a_1}^z + \sigma_{a_2}^z + \dots + \sigma_{a_{i-1}}^z) \\ &= T_{a_i,i\dots Na_1a_2\dots a_{i-1}}(\xi_i; s + \sigma_1^z + \sigma_2^z + \dots + \sigma_{i-1}^z) \\ &\times T_{a_{i-1},i-1\dots Na_1a_2\dots a_{i-2}}(\xi_{i-1}; s + \sigma_1^z + \sigma_2^z + \dots + \sigma_{i-2}^z + \sigma_{a_i}^z) \dots \\ &\dots T_{a_2,2\dots Na_1}(\xi_2; s + \sigma_1^z + \sigma_{a_3}^z + \dots + \sigma_{a_i}^z) T_{a_1,1\dots N}(\xi_1; s + \sigma_{a_2}^z + \dots + \sigma_{a_i}^z), \end{aligned} \quad (3.7)$$

où les notations sont similaires au Lemme 3.1.1 (i.e.  $T_{a_i,i\dots Na_1a_2\dots a_{i-1}}$  dénote la matrice de monodromie d'une chaîne de  $N$  sites indicée par  $i, \dots, N, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$  et de paramètres d'inhomogénéités  $\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_N, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}$ ).

La solution du problème inverse quantique, c'est-à-dire la reconstruction des opérateurs locaux  $E_i^{\alpha\beta}$  en fonction des éléments de la matrice de monodromie (2.25) se formule comme suit :

**Proposition 3.1.1 (Article 1).** *Un opérateur local  $E_i^{\alpha\beta}$  agissant sur le  $i$ -ième espace quantique  $\mathcal{H}_i$  s'exprime en fonction des éléments de la matrice de monodromie (2.25) de la manière suivante :*

$$E_i^{\alpha\beta} = \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_i) \cdot \prod_{k=i}^1 [\hat{t}(\xi_k)]^{-1} \cdot \mathbb{T}_{\hat{s}}^{\beta-\alpha}. \quad (3.8)$$

Ainsi, un produit d'opérateurs locaux successifs s'exprime comme

$$E_i^{\alpha_i\beta_i} E_{i+1}^{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} \dots E_{i+j}^{\alpha_{i+j}\beta_{i+j}} = \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \prod_{k=i}^{i+j} \hat{T}_{\beta_k\alpha_k}(\xi_k) \cdot \prod_{k=i+j}^1 [\hat{t}(\xi_k)]^{-1} \cdot \mathbb{T}_{\hat{s}}^{\sum_{k=i}^{i+j} [\beta_k - \alpha_k]}. \quad (3.9)$$

Notons que l'on peut également exprimer la formule de reconstruction sur l'espace de poids zéro à partir des matrices de monodromie inverses (3.4).

Nous venons d'exprimer les opérateurs locaux en fonction des matrices de transfert périodiques  $\hat{t}(\xi_k)$  d'une part, et des éléments de la matrice de monodromie d'autre part. Pour le modèle SOS anti-périodique, nous avons besoin d'exprimer ces formules de reconstruction en fonction des matrices de transfert anti-périodiques  $\hat{\bar{t}}(\xi_k)$ . Les résultats sont résumés dans la proposition suivante.

**Proposition 3.1.2.** *Sur l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)}$ , Un opérateur local  $E_i^{\alpha\beta}$  agissant sur le  $i$ -ième espace quantique  $\mathcal{H}_i$  s'exprime en fonction des éléments de la matrice de monodromie (2.81) de la manière suivante :*

$$E_i^{\alpha\beta} = \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \hat{T}_{\beta-\alpha}(\xi_i) \cdot \prod_{k=1}^i [\hat{\bar{t}}(\xi_k)]^{-1}. \quad (3.10)$$

$$(3.11)$$

Ainsi, un produit d'opérateurs locaux successifs s'exprime comme

$$E_i^{\alpha_i\beta_i} E_{i+1}^{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} \dots E_{i+j}^{\alpha_{i+j}\beta_{i+j}} = \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \prod_{k=i}^{i+j} \hat{T}_{\beta_k-\alpha_k}(\xi_k) \cdot \prod_{k=1}^{i+j} [\hat{\bar{t}}(\xi_k)]^{-1}. \quad (3.12)$$

Il est ici aussi, possible d'exprimer la formule de reconstruction en fonction des matrices de monodromie inverses (3.4).

## 3.2 Produit scalaire d'états de Bethe pour le modèle SOS périodique

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un état de Bethe du modèle SOS périodique était une fonction définie de l'ensemble du paramètre dynamique à valeur dans l'espace de poids zéro,

$$|\{u\}, \omega_u\rangle : \mathbf{C}_{\text{so}}^L \rightarrow \mathcal{H}[0] \\ s \mapsto \varphi_\omega(s) B(u_1; s) B(u_2; s-1) \dots B(u_n; s-n+1) |0\rangle. \quad (3.13)$$

Les états de la forme précédente, avec  $\varphi_\omega$  donnée par (2.50), sont des états propres de la matrice de transfert (2.27) lorsque  $(\{u\}, \omega_u)$  est une solution de (2.51). Le produit scalaire du modèle SOS est par conséquent un produit scalaire de fonctions, et on cherche plus précisément à en déterminer une expression compacte et explicite lorsqu'un des deux états est un état propre de Bethe. En anticipant la partie (3.3.2) dans laquelle nous dérivons une fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points, nous traitons dans cette partie des produits scalaires entre un état propre de Bethe  $\kappa$ -déformé et un état de Bethe quelconque<sup>2</sup>.

Soit dès lors un état propre de Bethe  $\kappa$ -déformé de l'espace dual  $\langle \{u\}_\kappa, \omega_u |$  et  $|\{v\}, \omega_v\rangle$  un état de Bethe quelconque, c'est-à-dire que  $(\{u\}_\kappa, \omega_u)$  est solution des équations de Bethe (2.51)

2. Par convention, dans tout ce qui suit l'absence d'indice  $\kappa$  dans les états, leur valeur propre, ou leur produit scalaire signifie que l'on considère des objets non déformés pour lesquels  $\kappa = 1$ .

tandis que  $\{v\}$  est arbitraire. Dans le cas cyclique pour lequel  $\eta$  est rationnel, l'espace des états est de dimension finie, on définit le produit scalaire entre les deux états précédents comme :

$$\begin{aligned} S_n(\{u\}_\kappa, \omega_u; \{v\}, \omega_v) &= \langle \{u\}_\kappa, \omega_u \mid \{v\}, \omega_v \rangle \\ &= \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \tilde{\varphi}_{\omega_u}(s) \varphi_{\omega_v}(s) S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^s \prod_{j=1}^n \frac{[s+j-1]}{[s-j]} S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s), \end{aligned} \quad (3.14)$$

où  $S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s)$  est ce que nous appelons un *produit scalaire partiel* sur  $\mathcal{H}[0]$  dépendant explicitement de la hauteur  $s$  et défini comme

$$S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s) = \langle 0 \mid C(u_n; s-n) \dots C(u_1; s-1) B(v_1; s) \dots B(v_n; s-n+1) \mid 0 \rangle. \quad (3.15)$$

De tels produits scalaires partiels se confondent avec la fonction de partition du modèle SOS pour des conditions aux limites de type paroi de domaine, dans le cas où l'un des deux ensembles de racines est un ensemble d'inhomogénéités  $\{\xi_{i_k}\}$ . Pour la chaîne de spins XXZ, les produits scalaires sont reliés comme nous l'avons vu à la fonction de partition du modèle à six-vertex, pour laquelle une représentation sous la forme d'un unique déterminant a été proposée par Izergin et Korepin [99, 101]. C'est d'ailleurs ce fait qui permet à Kitanine, Maillet et Terras de proposer dans [125] une méthode constructive pour le calcul des produits scalaires, directement à partir de l'expression de cette fonction de partition et d'un changement de base pour les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter (la base  $F$ ).

Pour le modèle SOS, la présence du paramètre dynamique rend difficile l'obtention d'une représentation simple pour la fonction de partition avec des conditions aux limites de type paroi de domaine. Des expressions sous la forme d'une somme de déterminants dont le nombre de termes est une fonction de la longueur  $N$  du réseau ont tout de même été obtenues indépendamment par Rosengren et Pakuliak, Roubtsov et Silantyev [169, 179].

En fait, l'état

$$B(v_1; s) B(v_2; s-1) \dots B(v_n; s-n+1) \mid 0 \rangle \in \mathcal{H}[0] \quad (3.16)$$

n'est pas un état propre de Bethe même lorsque l'ensemble  $\{v\}$  est solution des équations de Bethe. L'action de la matrice de transfert sur ce dernier, qui se calcule en utilisant les relations de commutation entre les opérateurs  $A(u; s)$  ou  $D(u; s)$  et l'opérateur  $B(v_j; s \pm 1)$  fait que l'état résultant subit des décalages en le paramètre dynamique. C'est pourquoi les produits scalaires partiels (3.15) ne sont pas des produits scalaires d'états de Bethe. Or, pour la chaîne de spins XXZ, c'est justement le produit scalaire entre états de Bethe, et dont la fonction de partition en est un cas particulier, qui s'exprime sous la forme d'un unique déterminant [195]. Il n'est par conséquent pas surprenant d'obtenir une représentation compliquée pour la fonction de partition.

Néanmoins, malgré cette difficulté, la méthode constructive proposée dans [125] peut être appliquée au modèle SOS directement à partir des expressions sous forme de sommes de déterminants pour la fonction de partition obtenue par Rosengren. Cette dernière étant ici aussi un cas particulier des produits scalaires partiels (3.15), il est clair que le nombre de termes y

intervenant est a priori au moins aussi grand que ceux intervenant dans la fonction de partition (qui contient  $2^N$  termes).

Le calcul direct de ces produits scalaires partiels (3.15) est a priori compliqué à cause de l'expression hautement non locale des opérateurs  $B$ , ces derniers retournant un spin de manière délocalisée sur la chaîne<sup>3</sup>. L'idée proposée dans [125, 153] pour résoudre ce problème est d'effectuer un changement de base dans laquelle l'expression des opérateurs  $B$  et  $C$  devient quasi-locale. De plus, les états de références  $|0\rangle, |\bar{0}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et leur dual sont invariants sous l'action de cette matrice de changement de base, de telle sorte que les produits scalaires partiels (3.15) s'expriment dans cette base comme

$$S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s) = \langle 0 | \tilde{C}(u_n; s-n) \dots \tilde{C}(u_1; s-1) \tilde{B}(v_1; s) \dots \tilde{B}(v_n; s-n+1) | 0 \rangle, \quad (3.17)$$

où  $\tilde{C}$  et  $\tilde{B}$  sont les opérateurs  $C$  et  $B$  dans la nouvelle base.

### 3.2.1 Base $F$ de l'algèbre de Yang-Baxter du modèle SOS

Plus précisément, nous avons vu que l'algèbre de Yang-Baxter du modèle SOS est une algèbre quadratique non-commutative  $\mathcal{A}_R$  engendrée par les opérateurs  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  et  $\hat{D}$ , dont les relations de commutation sont comprises dans la relation (2.23). L'existence d'un co-produit co-associatif munie cette algèbre d'une structure d'algèbre de Hopf. Notons que ce point de vue basé sur l'équation de Yang-Baxter et la relation  $RTT$  est dual à celui de Drinfel'd pour les algèbres de Hopf quasi-triangulaires. Pour ces dernières, Drinfel'd a défini la notion de twist factorisant [62, 64, 65] qui permet, lorsqu'il existe, de transformer une algèbre de Hopf quasi-triangulaire non-cocommutative en une algèbre de Hopf co-commutative et de même produit. Le twist ainsi construit déforme le coproduit  $\Delta$  non-cocommutatif en un co-produit  $\Delta_F$  co-commutatif. Dans l'article [153], Maillet et Sanchez de Santos remarquent que par dualité, de telles matrices transforment l'algèbre  $\mathcal{A}_R$  non-commutative en une algèbre commutative munie d'un produit déformé  $*_F$  sans toucher au co-produit. En effet, s'il existe une matrice  $F$  inversible et factorisant la matrice  $R$  aux points où cette dernière est unitaire,

$$F_{21}(v, u) R_{12}(u, v) = F_{12}(u, v), \quad (3.18)$$

la relation  $RTT$  devient simplement

$$T_1 *_F T_2 = T_2 *_F T_1, \quad (3.19)$$

où le nouveau produit  $*_F$  est défini sur les différents espaces auxiliaires tensoriel l'algèbre  $\mathcal{A}_R$  comme

$$T_1 *_F T_2 = F_{12} T_1 T_2 F_{12}^{-1}. \quad (3.20)$$

Bien sûr, on souhaite que le produit  $*_F$  généralise la relation (3.19) à un produit quelconque de matrices de monodromie :

$$T_1 *_F T_2 *_F \dots *_F T_n = T_{\sigma(1)} *_F T_{\sigma(2)} *_F \dots *_F T_{\sigma(n)} \quad (3.21)$$

---

3. Pour XXZ, l'expression des opérateurs  $B$  dans la base des opérateurs locaux est  $B(u) = \sum_{i=1}^N \sigma_i \Omega_i(u) + \sum_{i \neq j \neq k} \sigma_i^- \sigma_j^- \sigma_k^+ \Omega_{ijk}(u) + \text{termes d'ordre supérieurs}$ , où les opérateurs  $\Omega_i(u)$  et  $\Omega_{ijk}(u)$  sont des habillages diagonaux agissant respectivement sur tous les sites sauf en  $i$  et sauf en  $i, j$ , et  $k$ .

pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ . Il faut par conséquent construire toute une famille de matrice  $F_{1\dots n}$  permutant des produits quelconques de matrices de monodromie, pour induire un changement de base dans laquelle leurs éléments de matrice se simplifient. En fait, de telles matrices  $F$  simplifient considérablement le problème combinatoire induit par l'action non triviale du groupe des permutations  $S_n$  donnée par la matrice  $R$ . Dans la base  $F$ , les générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter sont en effet invariants par permutation des espaces locaux, ce qui se répercute sur leur expression explicite par une symétrie sous l'échange des paramètres d'inhomogénéités.

La construction explicite de ces matrices  $F$  dans le cas du groupe quantique elliptique a été introduite dans l'article de Albert et ses collaborateurs [6]. En base  $F$ , les opérateurs  $B$ , et  $C$  prennent la forme quasi-locale suivante :

$$\tilde{B}(u; s) = \frac{[s-1]}{[s + \sigma_{1\dots N}^z]} \sum_{i=1}^N \sigma_i^- \frac{[1][s + \sum_{l \neq i} \sigma_l^z + u - \xi_i]}{[s + \sum_{l \neq i} \sigma_l^z]} \otimes_{j \neq i} \begin{pmatrix} [u - \xi_j] & 0 \\ 0 & [u - \xi_j + 1] \frac{[\xi_j - \xi_i + 1]}{[\xi_j - \xi_i]} \end{pmatrix}_{[j]}, \quad (3.22)$$

$$\tilde{C}(u; s) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^+ \frac{[1][s - u + \xi_i]}{[s]} \otimes_{j \neq i} \begin{pmatrix} [u - \xi_j] \frac{[\xi_i - \xi_j + 1]}{[\xi_i - \xi_j]} & 0 \\ 0 & [u - \xi_j + 1] \end{pmatrix}_{[j]}. \quad (3.23)$$

tandis que l'opérateur  $\tilde{D}(u)$  est diagonal en base  $F$

$$\tilde{D}(u; s) = \frac{[s-1]}{[s + \sum_{l=1}^N \frac{\sigma_l^z + 1}{2} - 1]} \otimes_{j=1}^N \begin{pmatrix} [u - \xi_j] & 0 \\ 0 & [u - \xi_j + 1] \end{pmatrix}_{[j]}. \quad (3.24)$$

L'expression de l'opérateur  $\tilde{A}(u, s)$ , qui s'obtient par exemple à l'aide du déterminant quantique, n'est bien sûr pas diagonale dans cette base, les matrices  $F$  factorisantes ne permettant pas de résoudre le problème spectral de la matrice de transfert.

*Remarque 4.* Remarquons que l'opérateur  $\tilde{D}(u, s)$  est diagonal en base  $F$ . Or, la diagonalisation de la matrice de transfert de la chaîne anti-périodique par la méthode de la séparation des variables (pseudo)-diagonalise elle aussi l'opérateur  $D(u, s)$  dans l'optique d'en trouver ses opérateurs racines. Le spectre de  $D(u, s)$  étant simple, la matrice  $F$  s'identifie en fait au changement de base des variables originelles vers la base dans laquelle l'opérateur  $D(u, \hat{s})$  est diagonal et donne les variables séparées  $\xi_n - h_n$ . C'est cette remarque qui a été utilisée pour calculer les matrices  $F$  des chaînes de spins plus élevés du modèle XXZ. En effet, une base dans laquelle

- les opérateurs  $\tilde{A}(u)$ ,  $\tilde{B}(u)$ ,  $\tilde{C}(u)$ ,  $\tilde{D}(u)$  sont entièrement symétriques par permutation des espaces quantiques,
  - l'opérateur  $\tilde{D}(u)$  est diagonal tandis que les opérateurs  $\tilde{B}(u)$  et  $\tilde{C}(u)$  sont quasi-locaux,
- est effectivement induite par une matrice  $F$  factorisant la matrice  $R$  comme le montre Terras dans l'article [208] pour la chaîne de spins XXZ.

### 3.2.2 Calcul des produits scalaires partiels en base $F$

Nous sommes à présent en mesure de calculer les produits scalaires (3.17). On définit pour ce faire l'ensemble des états  $|\ell_{k+1}, \dots, \ell_n\rangle$  qui possèdent en base  $F$   $n - k$  spins vers le bas

aux positions  $\ell_{k+1}, \dots, \ell_n$ , et  $n+k$  spins vers le haut aux sites restants. L'idée est d'obtenir une relation de récurrence sur les produits scalaires partiels, en introduisant entre deux opérateurs  $\tilde{C}$  l'identité décomposée sur la base des états de la forme  $|\ell_{k+1}, \dots, \ell_n\rangle$ . On est ainsi amené à calculer les quantités de la forme suivante pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} G_{\ell_{k+1}, \dots, \ell_n}^{(k)}(\{u\}_\kappa; \{v_1, \dots, v_k\}; s) \\ = \langle 0 | \tilde{C}(u_n; s-n) \dots \tilde{C}(u_1; s-1) \tilde{B}(v_1; s) \dots \tilde{B}(v_k; s-k+1) | \ell_{k+1}, \dots, \ell_n \rangle, \end{aligned} \quad (3.25)$$

qui satisfont à la relation de récurrence suivante,

$$\begin{aligned} G_{\ell_{k+1}, \dots, \ell_n}^{(k)}(\{u\}_\kappa; \{v_1, \dots, v_k\}; s) = \sum_{\ell_k \neq \ell_{k+1}, \dots, \ell_n} G_{\ell_k, \dots, \ell_n}^{(k-1)}(\{u\}_\kappa; \{v_1, \dots, v_{k-1}\}; s) \\ \times \langle \ell_k, \dots, \ell_n | \tilde{B}(v_k; s-k+1) | \ell_{k+1}, \dots, \ell_n \rangle, \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec comme condition initiale,

$$\begin{aligned} G_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(0)}(\{u\}_\kappa; \emptyset; s) &= \langle 0 | \tilde{C}_{1\dots N}(u_n; s-n) \dots \tilde{C}_{1\dots N}(u_1; s-1) | \ell_1, \dots, \ell_n \rangle \\ &= \prod_{j \neq \ell_1, \dots, \ell_n} \left\{ \prod_{\alpha=1}^n \frac{[u_\alpha - \xi_j]}{[u_\alpha - \xi_j + 1]} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{[\xi_{\ell_k} - \xi_j + 1]}{[\xi_{\ell_k} - \xi_j]} \right\} \\ &\quad \times Z_n(u_1, \dots, u_n; \xi_{\ell_1}, \dots, \xi_{\ell_n}; s-n). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le produit scalaire (3.17) coïncide avec la dernière de ces quantités,  $G^{(n)}(\{u\}_\kappa; \{v_1, \dots, v_n\}; s)$ .

Par ailleurs, l'opérateur  $\tilde{B}$  étant quasi-local en base  $F$ , l'élément de matrice  $\langle \ell_k, \dots, \ell_n | \tilde{B}(v_k; s-k+1) | \ell_{k+1}, \dots, \ell_n \rangle$  ne contient qu'un seul terme, de telle sorte que l'expression finale du produit scalaire partiel dépende uniquement de la forme de la condition initiale. Or, (3.27) coïncide en fait avec la fonction de partition à  $n$  sites  $Z_n(u_1, \dots, u_n; \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}; s)$  du modèle SOS pour des conditions aux limites de type paroi de domaine, et pour laquelle une expression sous la forme d'une somme de déterminant a été obtenue par Rosengren dans [179] :

$$Z_N(u_1, \dots, u_N; \xi_1, \dots, \xi_N; s) = \langle 0 | C(u_N; s) C(u_{N-1}; s+1) \dots C(u_1; s+(N-1)) | \bar{0} \rangle, \quad (3.28)$$

$$= \frac{[s+N]}{[\gamma]^N [ |u| - |\xi| + \gamma + s + N ]} \frac{\prod_{\alpha, \ell=1}^N [u_\alpha - \xi_\ell]}{\prod_{j < k} [u_j - u_k] [\xi_k - \xi_j]} \quad (3.29)$$

$$\times \sum_{S \subset \{1, \dots, N\}} (-1)^{|S|} \frac{[\gamma + s + N - |S|]}{[s + N - |S|]} \det_N [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{\xi - \delta^S\})], \quad (3.30)$$

où le déterminant est de la forme

$$[\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{v\})]_{jk} = \frac{[u_j - v_k + \gamma]}{[u_j - v_k]}. \quad (3.31)$$

Dans cette expression,  $\gamma$  est un paramètre libre,  $|u| = u_1 + \dots + u_N$ ,  $|\xi| = \xi_1 + \dots + \xi_N$ , la somme est prise sur l'ensemble des parties  $S$  de  $\{1, \dots, N\}$  de cardinal  $|S|$  et  $\{u + \delta^S\} = \{u_j - \delta_j^S\}_{1 \leq j \leq N}$  avec

$$\delta_j^S = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in S, \\ 0 & \text{si } j \notin S. \end{cases} \quad (3.32)$$

Cette expression, dont le nombre de termes est  $2^N$  où  $N$  est la taille du réseau, n'est a priori pas commode pour la suite de l'étude des fonctions de corrélation. En effet, ce n'est qu'en volume infini (lorsque  $N$  tend vers l'infini) que les fonctions de corrélation du modèle SOS coïncident avec les éléments de matrice d'un produit d'opérateurs locaux. C'est pourquoi il est crucial, dans l'approche par l'ansatz de Bethe algébrique, d'obtenir des formules compactes pour les produits scalaires, mais la présence du terme en  $\frac{[\gamma+s+N-|S|]}{[s+N-|S|]}$  dans la fonction de partition sur laquelle ces derniers sont construits et qui relate du fait que l'on considère un modèle dynamique empêche, à notre connaissance, toute forme de simplifications, au moins dans le cas où  $\eta$  est générique.

La relation de récurrence (3.26) peut néanmoins être résolue en se basant sur l'expression de la fonction de partition (3.28). Nous obtenons sans surprise une expression sous la forme d'une somme de déterminants pour les produits scalaires partiels comme le montre la proposition suivante, dont la preuve se trouve dans l'**Article 1** :

**Proposition 3.2.1.** *Pour  $N = 2n + \aleph L$ ,  $(\{u_1, \dots, u_n\}_\kappa, \omega_u)$  une solution des équations de Bethe (2.51) et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  un ensemble quelconque de paramètres, le produit scalaire partiel  $S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s)$  s'exprime comme une somme de déterminants :*

$$\begin{aligned} S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s) &= \frac{[s-n]}{[\gamma]^n [|u| - |v| + \gamma + s]} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{[s-j]}{[s+j]} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t) d(v_t)}{\prod_{j < k} [u_j - u_k][v_k - v_j]} \\ &\times \sum_{S, \tilde{S} \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \prod_{j \notin \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_\kappa} \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{t=1}^n [u_t - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ \kappa \omega_u^{-2} \prod_{t=1}^n [u_t - v_j - 1] \right\} \\ &\times \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{v - \delta^{S\tilde{S}}\})]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dans cette expression,  $\gamma$  est toujours un paramètre complexe arbitraire (le résultat ne dépend pas de  $\gamma$ ),  $|u| = u_1 + \dots + u_n$ ,  $|v| = v_1 + \dots + v_n$ , et les éléments de matrice de  $\mathcal{N}_\gamma$  sont donnés par (3.31). La somme dans (3.33) s'effectue sur toutes les parties  $S$  et  $\tilde{S}$  de  $\{1, \dots, n\}$ , de cardinal respectif  $|S|$  et  $|\tilde{S}|$ , avec  $\{v - \delta^{S\tilde{S}}\} = \{v_1 - \delta_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_n - \delta_n^{S\tilde{S}}\}$ , pour

$$\delta_k^{S\tilde{S}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in S \text{ et } k \notin \tilde{S}, \\ -1 & \text{si } k \notin S \text{ et } k \in \tilde{S}, \\ 0 & \text{si } k \notin S \cup \tilde{S} \text{ ou } k \in S \cap \tilde{S}. \end{cases} \quad (3.34)$$

*Remarque 5.* Les singularités en  $v_k = u_j$  sont artificielles, du fait que  $\{u\}_\kappa$  satisfait aux équations de Bethe (2.51). La singularité en  $|u| - |v| + \gamma + s = 0$ , déjà présente dans l'expression de la fonction de partition, est elle aussi artificielle.

La fonction de partition du modèle SOS, qui est un cas particulier des produits scalaires partiels, ne s'exprimant pas comme un unique déterminant, il n'est pas surprenant d'obtenir une somme de déterminants pour l'expression de (3.17) comme nous l'avons déjà remarqué.

### 3.2.3 Produit scalaire du modèle SOS périodique cyclique

Dans le cas du modèle cyclique pour lequel  $\eta$  est rationnel, l'espace des états est de dimension finie et on peut s'attendre à certaines simplifications : le produit scalaire partiel (3.17) peut être interprété comme un produit scalaire total dont la fonction  $\varphi_{\omega_v}$  a été remplacée par une fonction  $\delta_s$ . En effet, (3.17) est s'écrit encore en termes des générateurs de l'algèbre d'opérateurs comme

$$\langle 0 | \hat{C}(u_1) \dots \hat{C}(u_n) \delta_s \hat{B}(v_1) \dots \hat{B}(v_n) | 0 \rangle, \quad (3.35)$$

qui est proportionnel au produit scalaire total (3.14), avec bien sûr,

$$\begin{aligned} \delta_s : \mathbf{C}_{s_0}^L &\rightarrow \mathbb{C}, \\ s &\mapsto \delta_s(s) = \delta_{s,s}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nous obtenons le résultat suivant dans l'**Article 1** :

**Proposition 3.2.2.** *Supposons qu'il existe un entier  $L$  tel que  $L\eta$  soit un entier. Alors, sous les mêmes hypothèses et notations que la Proposition 3.2.1, le produit scalaire partiel  $S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s)$  s'écrit comme une somme de  $L$  termes :*

$$\begin{aligned} S_n(\{u\}_\kappa; \{v\}; s) &= \frac{[\gamma][s]}{[0]'[|u| - |v| + \gamma + s]} \prod_{j=1}^n \frac{[s-j]}{[s+j-1]} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{j < k} [u_j - u_k][v_k - v_j]} \\ &\quad \times \sum_{\nu=0}^{L-1} q^{\nu s} a_\gamma^{(\nu)}(s_0) \det_n \left[ \Omega_{\kappa; \gamma}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}) \right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec

$$\begin{aligned} \left[ \Omega_{\kappa; \gamma}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}) \right]_{ij} &= \frac{(-1)^{r_N}}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - q^{-\nu} \frac{[u_i - v_j + \gamma + 1]}{[u_i - v_j + 1]} \right\} a(v_j) \prod_{t=1}^n [u_t - v_j + 1] \\ &\quad + \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - q^\nu \frac{[u_i - v_j + \gamma - 1]}{[u_i - v_j - 1]} \right\} \kappa \omega_u^{-2} d(v_j) \prod_{t=1}^n [u_t - v_j - 1]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dans ce qui précède, le paramètre  $\gamma$  est toujours arbitraire. Nous avons également posé  $q = e^{2\pi i \eta}$ , tandis que le facteur algébrique  $a_\gamma^{(\nu)}(s_0)$  est donné par

$$a_\gamma^{(\nu)}(s_0) = \frac{[Ls_0 + \gamma + \nu \frac{\tau}{\eta}]_L [0]_L'}{[Ls_0]_L [\gamma + \nu \frac{\tau}{\eta}]_L} = \eta \frac{\theta_1(rs_0 + \eta\gamma + \nu\tau; L\tau) \theta_1'(0; L\tau)}{\theta_1(rs_0; L\tau) \theta_1(\eta\gamma + \nu\tau; L\tau)}, \quad (3.39)$$

avec  $[u]_L = \theta_1(\eta u; L\tau)$ .

Cette représentation sous la forme d'une somme de  $L$  déterminants découle directement du fait que le paramètre dynamique appartient à  $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$  dans le cas cyclique. En effet, dans le cas cyclique pour lequel  $\eta = \frac{r}{L}$ , il est clair que  $q^L = 1$ . Or, la cyclicité du modèle nous permet d'utiliser des identités sur les fonctions thêta pour simplifier le terme en  $\frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]}$  (voir l'identité (A.27)) relatant toujours du fait que l'on considère un modèle dynamique. Si

l'on considère maintenant le produit scalaire entre les états de Bethe (3.14), qui est un produit scalaire de fonctions, nous obtenons une représentation sous la forme d'un unique déterminant qui est très proche de celle obtenue dans le cas de la chaîne de spins XXZ. En effet, en évaluant le paramètre libre  $\gamma$  comme la différence des racines des deux états de Bethe, le terme en le paramètre dynamique se simplifie. Cette simplification, couplée à la cyclicité du modèle, nous permet par la suite d'extraire la dépendance en le paramètre dynamique des sommes de déterminants, et dès lors en utilisant la multilinéarité de ces derniers, d'obtenir une formule sous la forme d'un unique déterminant pour les produits scalaires.

**Proposition 3.2.3 (Article 1).** *Lorsque  $N = 2n + \aleph L$  avec  $\aleph$  un entier, si  $(\{u_1, \dots, u_n\}_\kappa, \omega_u)$  est une solution des équations de Bethe (2.51) et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  un ensemble de paramètres arbitraires, le produit scalaire  $\mathbf{S}_n(\{u\}_\kappa, \omega_u; \{v\}, \omega_v)$  (3.14) entre l'état propre de Bethe  $\langle \{u\}_\kappa, \omega_u |$  et l'état de Bethe quelconque  $| \{v\}, \omega_v \rangle \in \text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  de la forme (2.46), (2.50) et de paramètre complexe  $\omega_v$  peut être représenté comme :*

$$\mathbf{S}_n(\{u\}_\kappa, \omega_u; \{v\}, \omega_v) = \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^L} \frac{\omega_v^s [\gamma + s]}{\omega_u^s [s]} \right\} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{j < k} [u_j - u_k] [v_k - v_j]} \times \det_n [\Omega_{\kappa; \gamma}(\{u\}_\kappa, \omega_u; \{v\}, \omega_v)], \quad (3.40)$$

avec  $\gamma = \sum_{t=1}^n (v_t - u_t)$  et  $\Omega_{\kappa; \gamma}$  est donné par

$$\begin{aligned} [\Omega_{\kappa; \gamma}(\{u\}_\kappa, \omega_u; \{v\}, \omega_v)]_{ij} &= \frac{(-1)^{r\aleph}}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_i - v_j + \gamma + 1]}{[u_i - v_j + 1]} \right\} a(v_j) \prod_{t=1}^n [u_t - v_j + 1] \\ &+ \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_u}{\omega_v} \frac{[u_i - v_j + \gamma - 1]}{[u_i - v_j - 1]} \right\} \kappa \omega_u^{-2} d(v_j) \prod_{t=1}^n [u_t - v_j - 1]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

*Remarque 6.* Il n'est pas évident que l'action des opérateurs locaux sur un état de Bethe redonne un état de Bethe (ou du moins une combinaison linéaire finie d'états de Bethe). C'est bien sûr le cas dans le modèle cyclique, l'espace des états étant de dimension finie, mais il n'en est rien dans le modèle non restreint pour lequel l'espace des états est de dimension infinie. Ceci explique d'ailleurs pourquoi dans le cas cyclique, le produit scalaire partiel s'exprime comme une combinaison linéaire finie de déterminants (on aurait a priori une série infinie dans le cas non restreints où  $\eta$  est générique). C'est ce qui fait que l'étude des facteurs de forme et des fonctions de corrélation est a priori plus simple dans le cas cyclique

Notons que dans la proposition précédente, le choix de  $\gamma$  évalué comme la différence des racines des deux états est primordial dans l'obtention d'une représentation sous la forme d'un unique déterminant. C'est ce choix qui permet de simplifier la partie dynamique, de telle sorte que les décalages subit par le paramètre dynamique et qui empêchaient jusqu'à présent une réduction des produits scalaires sous la forme d'un unique déterminant n'ont plus lieu d'être. Anticipons dès à présent le fait que pour les fonctions de corrélation quelconques, comme l'action des opérateurs locaux sur un des états propres de Bethe génère a priori des facteurs contenant une partie dynamique, il ne devrait a priori pas exister de représentations sous la forme d'un unique déterminant.

On montre à partir de cette représentation dans l’**Article 1**, et de manière similaire à la chaîne de spins XXZ, que deux états propre de Bethe différents sont orthogonaux en exhibant un vecteur propre non nul de (la transposée de) (3.41) de valeur propre nul. On vérifie en effet à l’aide du théorème des résidus que le vecteur  $w$  de composantes

$$w_i = \frac{\prod_{l=1}^n [u_i - v_l]}{\prod_{l=1, l \neq i}^n [u_i - u_l]}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.42)$$

convient. Si l’on considère au contraire la limite de la “norme” pour laquelle  $\{v\} = \{u\}_\kappa$  avec  $\omega_v = \omega_u$  dans (3.40), nous montrons que les singularités en  $v_j = u_i$  intervenant dans (3.41) sont artificielles en vertu des équations de Bethe, et obtenons la formule pour le carré de la norme d’un état propre de Bethe<sup>4</sup> :

$$S_n(\{u\}_\kappa, \omega_u; \{u\}_\kappa, \omega_u) = \frac{(-1)^{nr\aleph}}{(-[0]')^n} \frac{\prod_{t=1}^n a(u_t) d(u_t) \prod_{j,k=1}^n [u_j - u_k + 1]}{\prod_{j \neq k} [u_j - u_k]} \det_n [\Phi(\{u\}_\kappa)], \quad (3.43)$$

avec

$$\begin{aligned} [\Phi(\{u\}_\kappa)]_{jk} = \delta_{jk} & \left\{ \log' \frac{a}{d}(u_j) + \sum_{t=1}^n \left( \frac{[u_j - u_t - 1]'}{[u_j - u_t - 1]} - \frac{[u_j - u_t + 1]'}{[u_j - u_t + 1]} \right) \right\} \\ & - \left( \frac{[u_j - u_k - 1]'}{[u_j - u_k - 1]} - \frac{[u_j - u_k + 1]'}{[u_j - u_k + 1]} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

où le prime indique la dérivée vis à vis de la variable  $u$ .

*Remarque 7.* Bien que (3.43) et (3.44) ne dépendent pas explicitement de  $\kappa$ , la dépendance en  $\kappa$  est implicite via l’ensemble  $\{u\}_\kappa$ , solution des équations de Bethe  $\kappa$ -déformées (2.51)

Une manière commode de réécrire (3.43) comme un Jacobien de la fonction  $\mathcal{Y}_{\kappa;\omega}$  (2.64). On trouve en effet,

$$\langle \{u\}_\kappa, \omega_u | \{u\}_\kappa, \omega_u \rangle = \frac{1}{(-[0]')^n} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{j \neq k} [u_j - u_k]} \cdot \det_n \left[ \frac{\partial}{\partial u_k} \mathcal{Y}_{\kappa;\omega_u}(u_j | \{u\}_\kappa) \right]. \quad (3.45)$$

*Remarque 8.* Dans [80], Fujii et Wadati s’intéressent au calcul du carré de la norme d’un état propre de Bethe du modèle CSOS dans le cadre de l’ansatz de Bethe généralisé [206]. Toutefois, la quantité qu’ils définissent et calculent ne correspond a priori pas à la norme d’un état propre de la matrice de transfert construit à partir de l’ansatz de Bethe généralisé, l’orthogonalité des états n’ayant pas été démontrée.

La formule pour le “carré de la norme”<sup>5</sup> se représente ainsi sous la forme d’un unique déterminant, et est à nouveau similaire à celle obtenue pour la chaîne de spins XXZ. Rappelons enfin qu’une telle représentation est très commode dans l’optique de passer à la limite thermodynamique.

4. dans ce cas  $\gamma = 0$ . On commence par prendre la limite où  $\gamma = \sum_t (v_t - u_t) \rightarrow 0$  avant de prendre la limite ponctuelle.

5. La matrice  $R$  n’étant pas symétrique, l’état de gauche n’est a priori pas le dual de celui de droite, la terminologie “norme” est ici un abus de langage.

### 3.3 Application au calcul des facteurs de forme et fonctions de corrélation du modèle SOS périodique cyclique

L'obtention d'une formule explicite pour les produits scalaires et la résolution du problème inverse quantique pour le modèle périodique font que nous disposons dorénavant de tous les éléments nécessaires au calcul des fonctions de corrélation. De plus, rappelons que l'espace des états du modèle SOS cyclique, qui se doit d'être invariant sous l'action d'un opérateur local, est l'espace  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  des fonctions de  $\mathbf{C}_{s_0}^{\mathbb{L}} = s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$  à valeur dans l'espace de poids zéro  $\mathcal{H}[0]$ . Or, l'action des opérateurs locaux  $E_i^{\mp\pm}$  ne stabilisent pas l'espace de poids zéro. En effet, ces derniers retournant un spin sur l'espace quantique, le nombre  $n$  d'opérateurs  $\hat{B}$  ou  $\hat{C}$  générant l'état de Bethe résultant ne satisfait plus à  $n = \frac{N}{2} + \aleph L$ .

Les opérateurs locaux du modèle SOS cyclique s'identifient par conséquent aux opérateurs  $E_m^{++}$  et  $E_m^{--}$ , en plus des opérateurs agissant sur les fonctions du paramètre dynamique ( $T_s^{\pm}$ ,  $\hat{s}$ ,  $\delta_s, \dots$ ), ces derniers stabilisant bien évidemment l'espace de poids zéro. En particulier, les deux fonctions à un point naturelles à regarder sont, pour  $\langle \{u\}, \omega_u \rangle$  et  $\langle \{v\}, \omega_v \rangle$  deux états propres de Bethe,

$$\langle \{u\}, \omega_u | E_m^{++} | \{v\}, \omega_v \rangle, \quad (3.46)$$

$$\langle \{u\}, \omega_u | E_m^{--} | \{v\}, \omega_v \rangle, \quad (3.47)$$

et sont reliées à la probabilité que la différence de hauteur entre le site  $m$  et le site  $m+1$  augmente (respectivement baisse) de  $+1$  (de  $-1$ ), alors que

$$\langle \{u\}, \omega_u | \delta_s | \{v\}, \omega_v \rangle, \quad (3.48)$$

où  $\delta_s : s \mapsto \delta_{s,s}$  est relié à la probabilité de hauteur locale en un site donné du modèle.

Néanmoins, rien n'interdit a priori de considérer des fonctions à plusieurs points dont la différence d'opérateurs  $E^{+-}$  et  $E^{-+}$  est un multiple de la période  $L$ . Nous ne traiterons cependant pas de ces fonctions de corrélation dans la suite de cette thèse, ces dernières étant propres aux modèles cycliques dont la signification physique n'est pas claire.

#### 3.3.1 Facteurs de forme du modèle SOS périodique cyclique

Calculons maintenant le facteur de forme de  $\sigma^z$  en un site  $m$ , entre deux états propres de Bethe de la matrice de transfert périodique cyclique :

$$\langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle \quad (3.49)$$

L'opérateur  $\sigma_m^z = E_m^{++} - E_m^{--}$  se reconstruisant en vertu de (3.8) comme

$$\sigma_m^z = \prod_{k=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \left( \hat{A}(\xi_m) - \widehat{D}(\xi_m) \right) \cdot \prod_{k=m}^1 [\hat{t}(\xi_k)]^{-1}, \quad (3.50)$$

il suffit de déterminer l'action de l'opérateur  $E_m^{--} = E_m^{++} - Id$  pour en déterminer son action sur l'état  $|\{v\}, \omega_v\rangle$ . En utilisant d'une part les relations de commutation entre l'opérateur  $\widehat{D}(\xi_m)$  et l'opérateur  $\hat{B}(v_j)$ , et d'autre part la formule pour le produit scalaire partiel entre un état propre

de Bethe et un état quelconque dans le cas cyclique, on trouve que le produit scalaire entre  $\langle \{u\}, \omega_u |$  et l'état résultant de l'action de  $E_m^{--}$  sur  $|\{v\}, \omega_v\rangle$  s'exprime sous la forme d'un unique déterminant (voir l'Article 1),

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | E_m^{--} | \{v\}, \omega_v \rangle &= \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \left\{ \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)] \right. \\ &\quad \left. - \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) - \mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_m)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

où la matrice  $\Omega_\gamma$  est donnée par (3.41), pour  $\mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_m)$  une matrice de rang 1 (ce qui se voit facilement en sortant du déterminant les termes en  $v_k$  par multi-linéarité),

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_m)]_{ab} &= \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_a - \xi_m + \gamma]}{[u_a - \xi_m]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_a - \xi_m + \gamma + 1]}{[u_a - \xi_m + 1]} \right\} \\ &\times (-1)^{r_{\mathbb{K}}} a(v_b) \prod_{t=1}^n \left\{ [v_t - v_b + 1] \frac{[u_t - \xi_m + 1]}{[v_t - \xi_m + 1]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

En particulier, le paramètre libre  $\gamma$  a été choisi comme la différence des deux ensembles de racines  $\gamma = \sum_{t=1}^n (v_t - u_t)$ .

*Remarque 9.* Quand  $\{u\} \neq \{v\}$ , (3.51) se simplifie en utilisant l'orthogonalité des états propres de Bethe impliquant que  $\det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)] = 0$ .

Le calcul de l'élément de matrice  $\langle \{u\}, \omega_u | E_m^{++} | \{v\}, \omega_v \rangle$  peut se faire de manière similaire à l'aide de la résolution du problème inverse quantique en termes de l'opérateur  $\hat{A}(\xi_m)$ , puis en calculant son action à droite, ou plus simplement en utilisant le fait que  $E_m^{++} = 1 - E_m^{--}$  puis en utilisant le résultat précédent pour l'élément de matrice de  $E_m^{--}$  :

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | E_m^{++} | \{v\}, \omega_v \rangle &= \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) - \mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_m)]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Nous obtenons la proposition suivante pour le facteur de forme après avoir resommé les deux termes.

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $\langle \{u\}, \omega_u |$  et  $|\{v\}, \omega_v\rangle$  deux états propres de la matrice de transfert périodique du modèle SOS cyclique. Le facteur de forme de  $\sigma_m^z$  s'exprime sous la forme d'un*

unique déterminant comme,

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle &= \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbb{C}_{s_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) - 2\mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_m)], \end{aligned} \quad (3.54)$$

où le paramètre  $\gamma = \sum_{t=1}^n (v_t - u_t)$ , la matrice  $\Omega_\gamma$  est donnée par (3.41) tandis que la matrice de rang 1  $\mathcal{P}_\gamma$  est donnée par (3.52).

**Remarque 10.** Le cas de la valeur moyenne de l'opérateur  $\sigma_m^z$  pour lequel  $(\{u\}, \omega_u) = (\{v\}, \omega_v)$  doit être traité séparément, en commençant par prendre la limite pour laquelle  $\gamma$  tend vers 0 avant de prendre la limite ponctuelle  $v_j \rightarrow u_j$ . De plus, lorsque la période  $L$  est paire, on rappelle qu'à une solution des équations de Bethe  $(\{u\}, \omega_u)$  correspond une deuxième solution  $(\{u\}, -\omega_u)$ , de telle sorte que le facteur de forme entre ces deux états respectifs doit lui aussi être calculé séparément. Nous renvoyons à l'**Article 2** pour les formules explicites.

La formule ainsi obtenue pour le facteur de forme est très proche de celle pour la chaîne de spins XXZ, le terme dépendant du paramètre dynamique se factorisant en dehors du déterminant.

Enfin, dans le cas où les deux états propres considérés sont des états fondamentaux du modèle SOS (secteur  $\aleph = 0$ ) le facteur de forme normalisé, qui dans la limite de volume infini est relié à la polarisation spontanée, s'exprime comme un quotient de déterminants de taille  $n = N/2$  en vertu de (3.44)

$$\mathbf{s}_m^z(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) = \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle}{\left( \langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle \right)^{1/2}} \quad (3.55)$$

$$= \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} \cdot \left( \frac{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle} \right)^{1/2}. \quad (3.56)$$

En effet, en utilisant la formule pour le “carré de la norme” (3.44), on trouve facilement que le premier quotient de (3.56) vaut

$$\begin{aligned} \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} &= \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times (-[0]')^n \prod_{k=1}^n \frac{d(u_k)}{d(v_k)} \prod_{k < l} \frac{[v_k - v_l]}{[u_k - u_l]} \frac{\det_n [H(\{u\}, \{v\}) - 2Q(\{u\}, \{v\})]}{\det_n [\Phi(\{v\})]}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

où  $\gamma = \sum_{t=1}^n (v_t - u_t)$ ,  $\Phi$  est donnée par (3.44), et

$$\begin{aligned} [H(\{u\}, \{v\})]_{ij} &= \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_i - v_j + \gamma + 1]}{[u_i - v_j + 1]} \right\} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_j + 1]}{[v_t - v_j + 1]} \\ &- \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_u}{\omega_v} \frac{[u_i - v_j + \gamma - 1]}{[u_i - v_j - 1]} \right\} \frac{\omega_v^2}{\omega_u^2} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_j - 1]}{[v_t - v_j - 1]}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$[Q(\{u\}, \{v\})]_{ij} = \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - \xi_m + \gamma]}{[u_i - \xi_m]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_i - \xi_m + \gamma + 1]}{[u_i - \xi_m + 1]} \right\} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - \xi_m + 1]}{[v_t - \xi_m + 1]}. \quad (3.59)$$

De manière similaire, on trouve que le second quotient de (3.56) est égal à

$$\frac{\langle \{v\}, \omega_v \mid \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u \mid \{u\}, \omega_u \rangle} = \prod_{k=1}^n \frac{a(v_k)d(v_k)}{a(u_k)d(u_k)} \prod_{j,k=1}^n \frac{[v_j - v_k + 1]}{[u_j - u_k + 1]} \prod_{j \neq k} \frac{[u_j - u_k]}{[v_j - v_k]} \frac{\det_n[\Phi(\{v\})]}{\det_n[\Phi(\{u\})]}. \quad (3.60)$$

Nous utiliserons ces résultats lors du calcul de la polarisation spontanée dans la partie 4.2.

### 3.3.2 Fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points

Nous avons obtenu dans la partie précédente une représentation sous la forme d'un unique déterminant des facteurs de forme du modèle SOS cyclique périodique. De plus, comme nous l'avons déjà vu dans la partie 1.4, la fonction à deux points en volume fini peut être décrite à l'aide d'une fonctionnelle génératrice obtenue par sommation sur la série des facteurs de forme  $\kappa$ -déformés. Définissons dès lors le pôleynome de degré  $m$  en  $\kappa$

$$\mathcal{Q}_{1,m}^\kappa = \prod_{j=1}^m \left( \frac{1+\kappa}{2} + \frac{1-\kappa}{2} \sigma_j^z \right) = \prod_{j=1}^m (E_j^{11} + \kappa E_j^{22}). \quad (3.61)$$

La fonction génératrice de la fonction à deux points du modèle quantique associé à la matrice de transfert du modèle SOS périodique cyclique en volume fini est définie comme la valeur moyenne de cet opérateur dans un état fondamental  $|\{u\}, \omega_u\rangle$  (pour lequel  $\aleph = 0$  et donc  $N = 2n$ ),

$$\langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle = \frac{\langle \{u\}, \omega_u \mid \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \mid \{u\}, \omega_u \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u \mid \{u\}, \omega_u \rangle}. \quad (3.62)$$

A la limite thermodynamique, le coefficient devant  $\kappa^{\frac{m-\ell}{2}}$  donne la probabilité que deux sites se trouvant sur une même ligne du réseau à une distance  $m$  aient une différence de hauteur  $\ell \leq m$  lorsque  $L > N$ . En utilisant la résolution du problème inverse quantique (3.9), la fonction génératrice (3.62) s'exprime en terme des matrices de transfert du modèle SOS,

$$\mathcal{Q}_{1,m}^\kappa = \prod_{i=1}^m \hat{t}_\kappa(\xi_i) \cdot \prod_{i=m}^1 [\hat{t}(\xi_i)]^{-1}, \quad (3.63)$$

où  $\hat{t}_\kappa$  n'est autre que la matrice de transfert  $\kappa$ -déformée (2.65). Or, nous avons vu dans la proposition (2.63) que l'ensemble des états propres de Bethe  $|\{v\}_\kappa, \omega_v\rangle$  de  $\hat{t}_\kappa(u)$  forment une base de l'espace des états du modèle SOS cyclique, de telle sorte que l'on puisse toujours introduire l'identité (2.67) sur la base des états  $\kappa$ -déformés et décomposer (3.62) comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle &= \sum_{\{v\}_\kappa, \omega_v} \frac{\langle \{u\}, \omega_u \mid \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v \mid \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \mid \{u\}, \omega_u \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u \mid \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v \mid \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle}, \\ &= \sum_{\{v\}_\kappa, \omega_v} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_i; \{v\}_\kappa, \omega_v)}{\tau(\xi_i; \{u\}, \omega_u)} \frac{\langle \{u\}, \omega_u \mid \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v \mid \{u\}, \omega_u \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u \mid \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v \mid \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

où l'on rappelle que l'absence d'indice  $\kappa$  dans les états, et les valeurs propres (ou les matrices dans ce qui suit) doit être interprété comme des états non déformés pour lesquels  $\kappa = 1$ .

Notons qu'en vertu de (2.63) la somme intervenant dans (3.64) opère sur toutes les solutions admissibles et hors-diagonales des équations de Bethe  $\kappa$ -déformées (2.66), pour lesquelles  $(-1)^{rn} \omega_v^L = 1$ .

En utilisant les représentations (3.40)-(3.45) pour les produits scalaires, puis en resommant formellement la somme sur tous les ensembles  $\{v\}_\kappa$  solutions des équations de Bethe à l'aide du théorème des résidus, (3.62) se réécrit comme (pour  $\gamma_z = |z| - |u|$ ),

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle &= \frac{1}{n!} \frac{([0]')^{2n}}{L^2} \sum_{\omega} \oint_{\Gamma(\{v\}_\kappa)} \frac{d^n z}{(2i\pi)^n} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_i; \{z\}, \omega)}{\tau(\xi_i; \{u\}, \omega_u)} \left\{ \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \frac{\omega^s}{\omega_u^s} \frac{[\gamma_z + s]}{[s]} \right\} \\ &\quad \left\{ \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \frac{\omega_u^s}{\omega^s} \frac{[-\gamma_z + s]}{[s]} \right\} \times \frac{\det_n [\Omega_{\gamma_z}(\{u\}, \omega_u; \{z\}, \omega)] \cdot \det_n [\Omega_{\kappa; -\gamma_z}(\{z\}, \omega; \{u\}, \omega_u)]}{\det_n \left[ \frac{\partial}{\partial u_k} \mathcal{Y}_{1; \omega_u}(u_j; \{u\}) \right] \cdot \prod_{j=1}^n \mathcal{Y}_{\kappa; \omega}(z_j; \{z\})}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

La somme dans (3.65) est prise sur toutes les solutions  $\omega \in \mathbb{C}$  telles que  $(-1)^{rn} \omega^L = 1$ , tandis que le contour d'intégration encercle (avec un indice 1) tous les pôles correspondant aux solutions  $\{v\}_\kappa$  des équations de Bethe  $\kappa$ -déformées associées à  $\omega$  pour  $n = N/2$ . Les autres pôles de l'intégrande qui résident en dehors du contour d'intégration, sont les pôles en  $z_\ell = \xi_i, i = 1, \dots, m$  (venant des facteurs  $\tau_\kappa(\xi_i; \{z\}, \omega)$ ), et les pôles en  $z_\ell = u_j, j = 1, \dots, n$  (contenus dans  $\det_n [\Omega_{\kappa; -\gamma_z}(\{z\}, \omega; \{u\}, \omega_u)]$ ). En considérant ces derniers pôles, l'équation intégrale ci-dessus se réécrit comme pour la chaîne de spins XXZ [124] sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle &= \frac{1}{n!} \frac{([0]')^n}{L^2} \sum_{\omega} \oint_{\Gamma(\{\xi\}) \cup \Gamma(\{u\})} \frac{d^n z}{(2i\pi)^n} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_i; \{z\}, \omega)}{\tau(\xi_i; \{u\}, \omega_u)} \left\{ \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \frac{\omega^s}{\omega_u^s} \frac{[\gamma_z + s]}{[s]} \right\} \\ &\quad \left\{ \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \frac{\omega_u^s}{\omega^s} \frac{[-\gamma_z + s]}{[s]} \right\} \times \frac{\det_n [\Omega_{\gamma_z}(\{u\}, \omega_u; \{z\}, \omega)] \cdot \det_n [\Omega_{\kappa; -\gamma_z}(\{z\}, \omega; \{u\}, \omega_u)]}{\det_n [\Omega_0(\{u\}, \omega_u; \{u\}, \omega_u)] \cdot \prod_{j=1}^n \mathcal{Y}_{\kappa; \omega}(z_j; \{z\})}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

### 3.3.3 Vers le calcul des probabilités de hauteurs locales

Dans les parties précédentes, nous avons obtenu une représentation sous la forme d'un unique déterminant pour les facteurs de forme, ce qui à l'aide de la complétude des états de Bethe  $\kappa$ -déformés nous a permis d'obtenir une expression analogue à la chaîne de spins XXZ pour la fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points du modèle SOS périodique cyclique. Toutefois, le modèle SOS étant un modèle dynamique, les facteurs de forme, qui rappellent le sont les éléments de matrice d'un opérateur local entre deux états propres de Bethe, ne constituent pas les fonctions de corrélation les plus élémentaires. En effet, de tels éléments de matrice ne dépendent pas explicitement du paramètre dynamique dans le modèle cyclique. Or, ce sont justement les éléments de matrice dépendant explicitement du paramètre dynamique

$$\mathbb{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) = \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \delta_s E_1^{\alpha_1 \alpha_1} \dots E_m^{\alpha_m \alpha_m} | \{v\}, \omega_v \rangle}{(\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle)^{1/2}}, \quad (3.67)$$

où  $|\{u\}, \omega_u\rangle$  et  $|\{v\}, \omega_v\rangle$  sont deux états propres de la matrice de transfert périodique, qui constituent les “blocs élémentaires” à partir desquels n’importe quelle quantité physique peut être reconstruite par sommation. De telles quantités sont reliées aux *probabilités de hauteurs locales multi-points* du modèle SOS en volume infini, c’est-à-dire à la probabilité que la hauteur entre des sites successifs d’une même ligne du réseau vaille respectivement  $s, s + \alpha_1, \dots, s + \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ . Dans tout ce qui suit, nous nous restreignons au secteur  $\aleph = 0$ , c’est-à-dire au secteur pour lequel  $N = 2n$ .

La quantité la plus élémentaire est ainsi la probabilité de hauteur locale, donnant la probabilité qu’en un site du réseau la hauteur soit égale à  $s$ . Cette dernière peut se construire à partir des éléments de matrice de l’opérateur  $\delta_s$  entre deux états fondamentaux de Bethe,

$$\mathbb{P}(s; \{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) = \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \delta_s | \{v\}, \omega_v \rangle}{\left( \langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle \right)^{1/2}}, \quad (3.68)$$

$$= \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \delta_s | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} \cdot \left( \frac{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle} \right)^{1/2}, \quad (3.69)$$

où  $\delta_s(s) = \delta_{s,s}$  pour tout  $s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ . Le second quotient de (3.69) est toujours donné par (3.60), tandis qu’en utilisant le fait que  $\delta_s(s) = \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} e^{\frac{2\pi i \nu (s-s)}{L}}$ , le produit scalaire précédent s’exprime en fonction d’états de Bethe, et donc sous la forme d’une somme de déterminants,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \delta_s | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} &= \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} e^{-2\pi i \frac{\nu s}{L}} \left\{ \frac{(-[0]')^n}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \left( e^{2\pi i \frac{\nu}{L} \frac{\omega_v}{\omega_u}} \right)^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \prod_{t=1}^n \frac{d(u_t)}{d(v_t)} \frac{\prod_{j < k} [v_j - v_k]}{\prod_{j < k} [u_j - u_k]} \frac{\det_n [H^{(\nu)}(\{u\}, \{v\})]}{\det_n [\Phi(\{v\})]}, \quad (3.70) \end{aligned}$$

où l’on a posé  $\gamma = \sum_{t=1}^n (v_t - u_t)$ , pour  $\Phi$  donnée par (3.44) et avec

$$\begin{aligned} [H^{(\nu)}(\{u\}, \{v\})]_{ij} &= \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - e^{2\pi i \frac{\nu}{L} \frac{\omega_v}{\omega_u}} \frac{[u_i - v_j + \gamma + 1]}{[u_i - v_j + 1]} \right\} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_j + 1]}{[v_t - v_j + 1]} \\ &- \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - e^{-2\pi i \frac{\nu}{L} \frac{\omega_u}{\omega_v}} \frac{[u_i - v_j + \gamma - 1]}{[u_i - v_j - 1]} \right\} \frac{\omega_v^2}{\omega_u^2} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_j - 1]}{[v_t - v_j - 1]}. \quad (3.71) \end{aligned}$$

Remarquons pour commencer que les éléments de matrice (3.68) se représentent non pas sous la forme d’un unique déterminant, mais comme une somme de  $L$  déterminants, qui dans la limite de volume infini reste finie. Le paramètre dynamique pouvant prendre  $L$  valeurs, la présence d’une telle somme n’est pas étonnante : l’action de l’opérateur  $\delta_s$  sur un état propre de Bethe peut toujours se décomposer comme une combinaison linéaire finie (de  $L$  termes) d’états de type Bethe, pour lesquels le produit scalaire est connu.

De plus, les déterminants impliqués dans l’expression (3.70) ont une expression similaire à la matrice  $H$  intervenant dans le facteur de forme de  $\sigma_m^z$  (3.58), mais sont déformés par le terme en  $e^{\pm 2i\pi \frac{\nu}{L}}$ . C’est cette déformation qui rend compte de la cyclicité du modèle SOS.

Notons qu’au lieu d’utiliser l’action explicite de la fonction  $\delta_s$  (3.36) sur un état propre dans la détermination de (3.70), nous aurions pu utiliser l’expression pour les produits scalaires

partiels (3.37). En effet, en utilisant l'identité (A.27) (issue de l'article de Rosengren [179]) pour simplifier le facteur en le paramètre dynamique intervenant dans l'expression des produits scalaires partiels (3.33), il est toujours possible d'obtenir une représentation également sous la forme d'une somme de  $L$  déterminants dans le cas cyclique. Bien sûr, les déterminants qui interviennent dans cette représentation sont eux aussi déformés, mais par  $e^{\pm 2i\pi \frac{r}{L}} = q^{\pm \nu}$ . De plus, cette façon de procéder est plus commode que la précédente, car elle ne nécessite pas de spécifier une valeur particulière de  $\gamma$ , ce dernier pouvant s'annuler dans le cas où les deux ensembles de racines  $\{u\}$  et  $\{v\}$  coïncident<sup>6</sup>, et nous permet dès lors de traiter tous les cas simultanément. C'est pourquoi, c'est ce genre de représentations propres au modèle cyclique que nous utiliserons pour le calcul des éléments de matrice multi-points (3.67) dans le chapitre suivant. En particulier, nous obtenons la formule suivante dans le cas de l'élément de matrice de  $\delta_s$ ,

$$\frac{\langle \{u\}, \omega_u | \delta_s | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} = \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^{s-2n} \frac{(-[0]')^n [\gamma] [\mathbf{s}]}{[|u| - |v| + \gamma + \mathbf{s}] [0]'} \prod_{j < k} \frac{[v_j - v_k]}{[u_j - u_k]} \times \prod_{t=1}^n \frac{a(u_t)}{a(v_t)} \\ \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} q^{\nu s} a_{\gamma}^{(\nu)}(s_0) \frac{\det_n [H_{\gamma}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)]}{\det_n [\Phi(\{v\})]}, \quad (3.72)$$

avec

$$[H_{\gamma}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)]_{jk} = \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_j - v_k + \gamma]}{[u_j - v_k]} - q^{-\nu} \frac{[u_j - v_k + \gamma + 1]}{[u_j - v_k + 1]} \right\} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_k + 1]}{[v_t - v_k + 1]} \\ - \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_j - v_k + \gamma]}{[u_j - v_k]} - q^{\nu} \frac{[u_j - v_k + \gamma - 1]}{[u_j - v_k - 1]} \right\} \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^2 \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_k - 1]}{[v_t - v_k - 1]}, \quad (3.73)$$

et où  $\gamma$  est maintenant quelconque.

## 3.4 Produit scalaire et facteurs de forme du modèle SOS anti-périodique

### 3.4.1 Produit scalaire du modèle SOS anti-périodique

Nous avons vu dans la partie 2.4 que la diagonalisation de la matrice de transfert anti-périodique se fait dans la base des états  $|0, h_1, \dots, h_N\rangle$  qui pseudo-diagonalise l'opérateur  $D(u, \hat{s})$ . Toutefois, ses états propres font intervenir un terme de structure  $\det_N \theta_{ij}^{(h)}$  que nous n'avons pour le moment pas pris la peine d'explicitier, mais qui joue un rôle particulièrement important dans la détermination des produits scalaires entre états séparés. Avant de l'expliciter, nous avons besoin de définir la fonction thêta avec caractéristique suivante :

$$\theta_j(\eta u; \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left[ i\pi \tau N \left( n + \frac{1}{2} - \frac{j}{N} \right) + 2i\pi N \left( n + \frac{1}{2} - \frac{j}{N} \right) \left( \eta u + \frac{1}{2N} \right) \right], \quad (3.74)$$

6. C'est toujours le cas pour les valeurs moyennes des opérateurs locaux, mais également dans le cas  $L$  pair où à une solution  $(\{u\}, \omega_u)$  des équations de Bethe (2.51), il en existe une seconde  $(\{u\}, -\omega_u)$

pour  $j \in \{1, \dots, N\}$ , et qui satisfait aux propriétés de quasi-périodicités,

$$\theta_j(\eta u; \tau) = -e^{2i\pi \frac{j}{N}} \theta_j(\eta u; \tau), \quad \theta_j(\eta u + \tau; \tau) = -e^{-i\pi N \tau} e^{-2i\pi N \eta u} \theta_j(\eta u; \tau). \quad (3.75)$$

En fait, le terme de structure est relié à la normalisation des pseudo-états propres de l'opérateur  $D(u, \hat{s})$ . En effet, la structure de ces pseudo-états propres (2.91) et (2.90) nous permet de calculer le produit scalaire entre l'état de référence  $|0, \mathbf{1}\rangle$  et l'état de référence dans l'espace dual  $\langle 0, \mathbf{0}|$ , et d'obtenir une expression explicite pour le terme de structure relié à la configuration de spins  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  :

$$N^2 \det_N \theta_{ij}^{(\mathbf{h}=\mathbf{0})} = C_N \langle 0, \mathbf{0} | \prod_{n=0}^N \left( \frac{\hat{C}(u-1)}{d(\xi_n-1)} \right)^{(1-h_n)} | 0, \mathbf{1} \rangle, \quad (3.76)$$

où  $C_N$  est une constante. Puis, en utilisant l'expression explicite des pseudo-états propres de l'opérateur  $D(u, \hat{s})$ , on trouve finalement l'expression suivante pour la matrice de structure

$$\theta_{ij}^{(\mathbf{h})} = \theta_{i-1}(\eta \bar{\xi}_j^{(h_j)}), \quad (3.77)$$

avec

$$\bar{\xi}_j^{(h_j)} = \xi_j^{(h_j)} + \frac{1}{2N\eta} + \frac{N-1}{2\eta N} - \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N \xi_a. \quad (3.78)$$

Ainsi, nous venons d'obtenir que le produit scalaire entre deux pseudo-états propres de l'opérateur  $D$  s'exprime comme

$$\langle \ell, h_1 \dots h_N | \ell, h'_1, \dots h'_N \rangle = \frac{\prod_{j=1}^N \delta_{h_j, h'_j}}{\det_N \theta_{ij}^{(\mathbf{h})}}, \quad (3.79)$$

pour  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)$ , ce qui implique par conséquent que l'identité sur l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)}$  se décompose sur la base de ces pseudo-états propres comme

$$\text{id} = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^1 \det_N \theta_{ij}^{(\mathbf{h})} | \ell, h_1, \dots, h_N \rangle \langle \ell, h_1, \dots, h_N |. \quad (3.80)$$

Le déterminant de (3.4.1) est en fait un déterminant de Vandermonde elliptique et vaut

$$\det_N \theta_{ij}^{(\mathbf{h})} = C_N \left[ \sum_{a=1}^N \bar{\xi}_a^{(h_a)} - \frac{N-1}{2\eta} \right] \prod_{1 \leq a < b \leq N} [\xi_a^{(h_a)} - \xi_b^{(h_b)}], \quad (3.81)$$

la constante de normalisation  $C_N$  ne jouant aucun rôle dans le calcul des quantités physiques, ces dernières étant normalisées.

Comme nous l'avons déjà expliqué, la matrice de structure est sous une forme séparée : une même colonne ne contient qu'une seule variable séparée  $\xi_j^{(h_n)}$ . L'existence d'une représentation sous la forme d'un unique déterminant (typiquement de Vandermonde) pour ce terme de structure assure que l'on puisse exprimer les produits scalaires entre deux états séparés a

priori quelconque du modèle SOS également sous la forme d'un unique déterminant de taille  $N$ . Définissons en effet les états séparés comme des états de la forme

$$\langle \alpha | = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^N \prod_{a=1}^N \alpha_a(\xi_a^{(h_a)}) \det_n \theta_{ij}^{(\mathbf{h})} \langle 0, h_1, \dots, h_N |, \quad (3.82)$$

$$| \beta \rangle = \sum_{h_1, \dots, h_N=0}^N \prod_{a=1}^N \beta_a(\xi_a^{(h_a)}) \det_n \theta_{ij}^{(\mathbf{h})} | 0, h_1, \dots, h_N \rangle, \quad (3.83)$$

où les fonctions  $\alpha_a$  et  $\beta_a$  sont a priori quelconques. Evidemment, lorsque ces dernières se confondent avec des fonctions solutions de (2.108) et (2.110), les états séparés ainsi définis sont des états propres de la matrice de transfert anti-périodique. De manière similaire à ce qui se passe pour la chaîne de spins XXZ anti-périodique, la multilinéarité du déterminant permet d'exprimer les produits scalaires  $\langle \alpha | \beta \rangle$  sous la forme d'un déterminant de Vandermonde "habillé" comme le montre la proposition suivante obtenue dans [164].

**Proposition 3.4.1.** *Soit  $\langle \alpha |$  et  $| \beta \rangle$  deux états séparés de la forme (3.82) et (3.83). Le produit scalaire  $\langle \alpha | \beta \rangle$  s'exprime sous la forme d'un déterminant de taille  $N$  comme suit :*

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \det_N [\mathcal{F}_{a,b}^{(\alpha,\beta)}] \quad (3.84)$$

avec

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{h=0}^1 \alpha_a(\xi_a^{(h)}) \beta_a(\xi_a^{(h)}) \theta_{b-1}(\eta \bar{\xi}_b^{(h)}). \quad (3.85)$$

La proposition précédente nous permet de calculer le produit scalaire entre deux états propres de la matrice de transfert anti-périodique.

**Corollaire 3.4.1.** *Soit  $| t' \rangle$  et  $\langle t |$  deux états propres de la matrice de transfert anti-périodique  $\hat{t}(u)$ . Le produit scalaire entre ces deux états est non nul et s'exprime sous la forme d'un déterminant de taille  $N$  si et seulement si leur valeur propre  $t(u)$  et  $t'(u)$  coïncident, et vaut dès lors*

$$\langle t | t' \rangle = \delta_{t,t'} \det_N [\mathcal{F}_{a,b}^{(t,t')}], \quad (3.86)$$

avec

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(t,t')} = \sum_{h=0}^1 \bar{Q}_t(\xi_a^{(h)}) Q_{t'}(\xi_a^{(h)}) \theta_{b-1}(\eta \bar{\xi}_a^{(h)}). \quad (3.87)$$

Insistons une nouvelle fois sur la forme universelle de ces produits scalaires découlant directement du terme de structure. Ce dernier s'exprimant comme un déterminant de taille  $N$ , qui n'est autre que la longueur du réseau, il en va de même pour le produit scalaire entre deux états propres de la matrice de transfert. Cependant, prendre la limite de volume infini pour laquelle le nombre de sites  $N$  tend vers l'infini, et donc pour laquelle la taille des déterminants diverge, est un problème encore totalement ouvert dans le cadre de la séparation des variables.

Enfin, il faut également être capable de passer à la limite homogène, limite où les inhomogénéités tendent vers  $\frac{\eta}{2}$ , car c'est uniquement dans cette limite que les modèles sont effectivement

physiques. Or, les variables séparées  $\xi_j^{(h_j)}$  s'expriment justement en fonction des inhomogénéités<sup>7</sup>, de telle sorte que dans cette limite, l'approche par la séparation des variables s'applique difficilement. La résolution de ce point de nature technique, dont la solution est triviale dans l'approche par l'ansatz de Bethe algébrique, est a priori essentielle dans l'optique d'obtenir des expressions physiques des fonctions de corrélation des modèles que l'on considère.

### 3.4.2 Facteurs de forme du modèle SOS anti-périodique

L'espace des états du modèle anti-périodique sur lequel les matrices de transfert sont diagonalisables simultanément est l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)}$  engendré par les vecteurs propres de  $S_{\hat{s}} = S_z + 2\hat{s}$  de valeurs propres  $\frac{x}{\eta}$  ( $\ell = 0$ ). Une base des opérateurs agissant sur l'espace quantique  $\mathcal{H}_m$  est toujours donnée par l'ensemble des matrices élémentaires  $E_m^{\alpha\beta}$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\{+, -\}$ . Toutefois, à l'instar de ce qui se passe pour le modèle périodique, il est clair que les opérateurs  $E_m^{+-}$  et  $E_m^{-+}$  ne stabilisent pas  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)}$  car ils retournent un spin sans décaler le paramètre dynamique. En fait, il est facile de montrer que l'action à droite de ces opérateurs sur l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)}$  est telle que

$$E_m^{+-} : \bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell-1)}, \quad E_m^{-+} : \bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell+1)}, \quad (3.88)$$

de telle sorte que pour deux états propres  $\langle t |$  et  $| t' \rangle$  de la matrice de transfert anti-périodique, on ait toujours

$$\langle t | E_m^{+-} | t' \rangle = 0, \quad \langle t | E_m^{-+} | t' \rangle = 0. \quad (3.89)$$

De plus, la dimension de l'espace des états  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)}$  étant  $2^N$ , l'espace  $\text{End}(\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)})$  est bien sûr de dimension  $2^{2N}$ . Ceci nous amène à définir les quatre opérateurs locaux suivants,

$$E_m^{++}, \quad E_m^{--}, \quad E_m^{+-} \mathsf{T}_{\hat{s}}^+, \quad E_m^{-+} \mathsf{T}_{\hat{s}}^-, \quad (3.90)$$

qui stabilisent l'espace  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)}$ . Il est clair que la famille engendrée par le produit tensoriel des familles des opérateurs de type (3.90) pour  $m$  allant de 1 à  $N$  contient  $2^{2N}$  éléments, et qu'elle est de plus une famille génératrice de  $\text{End}(\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)})$ , et en constitue par conséquent une base<sup>8</sup>. En fait, la famille précédente constitue une base de  $\text{End}(\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)})$  pour tout entier  $\ell$ , les espaces  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)}$  et  $\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)}$  étant isomorphes via l'isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \text{id}_{\ell,0} : \quad \bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(\ell)} &\rightarrow \bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)}, \\ \langle \ell, h_1, \dots, h_N | &\mapsto \langle 0, h_1, \dots, h_N |. \end{aligned} \quad (3.91)$$

La résolution du problème inverse quantique pour le modèle anti-périodique (3.10) nous permet de reconstruire les opérateurs (3.90) en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-

<sup>7</sup>. ce point est à relier avec l'existence de la base  $F$ , base dans laquelle l'expression des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter est entièrement symétrique sous l'échange  $\xi_i \leftrightarrow \xi_j$

<sup>8</sup>. On peut également montrer que cette famille est libre

Baxter comme suit :

$$E_m^{++} = \begin{cases} \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b) \hat{B}(\xi_m) \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b)^{-1}, \\ \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b) \left( \hat{C}(\xi_m - 1) / \det_q T(\xi_m; \hat{s}) \right) \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b)^{-1}, \end{cases} \quad (3.92)$$

$$E_m^{+-} \mathsf{T}_{\hat{s}} = \begin{cases} \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b) D(\xi_m, \hat{s}) \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b)^{-1}, \\ \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b) (-D(\xi_m - 1, \hat{s} + 1) / \det_q T(\xi_m; \hat{s})) \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b)^{-1}, \end{cases} \quad (3.93)$$

$$E_m^{--} = \begin{cases} \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b) \hat{C}(\xi_m) \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b)^{-1}, \\ \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b) \left( \hat{B}(\xi_m - 1) / \det_q T(\xi_m; \hat{s}) \right) \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b)^{-1}, \end{cases} \quad (3.94)$$

$$E_m^{-+} \mathsf{T}_{\hat{s}}^- = \begin{cases} \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b) A(\xi_m, \hat{s}) \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b)^{-1}, \\ \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b) (-A(\xi_m - 1, \hat{s} - 1) / \det_q T(\xi_m; \hat{s})) \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b)^{-1}. \end{cases} \quad (3.95)$$

Le calcul des facteurs de forme s'effectue ensuite de manière similaire au cas périodique : la reconstruction précédente exprime les opérateurs locaux en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter, et comme les états propres de la matrice de transfert anti-périodique sont des états séparés de la forme (3.82) (3.83), l'action d'un opérateur local sur tel état est entièrement déterminée par les relations de commutation (2.23) et s'exprime comme une combinaison linéaire d'états séparés du même type. De plus, la représentation sous la forme d'un unique déterminant pour les produits scalaires entre états séparés repose d'une part sur la forme de la matrice de structure (3.4.1), c'est-à-dire sur la normalisation des produits scalaires entre pseudo-états propres de l'opérateur  $D$  (3.79), et d'autre part sur la possibilité de faire "entrer les sommes" dans le déterminant par multilinéarité. Or, l'utilisation des relations de commutation dans le calcul de l'action d'un opérateur local sur un état propre de  $\hat{t}(u)$  décale le paramètre dynamique et fait apparaître des coefficients dépendant explicitement de la configuration de spins  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N)$  du pseudo-état propre de  $D$  sur lequel l'opérateur agit. Les coefficients qui émanent de cette action n'étant pas séparés en les variables  $h_1, \dots, h_N$ , il n'est pas évident d'obtenir une représentation sous la forme d'un unique déterminant pour les facteurs de forme, ou plus généralement pour les fonctions de corrélation à plusieurs points.

En fait, ce problème n'est pas absent de l'approche par l'ansatz de Bethe algébrique. L'obtention d'une représentation sous la forme d'un unique déterminant pour les facteurs de forme repose essentiellement sur notre choix judicieux du paramètre libre  $\gamma$ , qui une fois spécifié comme la différence des racines des deux états propres de Bethe simplifie la partie dynamique. Sans ce choix, les termes en le paramètre dynamique ne se simplifient pas, et les produits scalaires partiels résultants de l'action d'un opérateur local sur un des états propres n'ont a priori aucune raison de se simplifier. Bien sûr, il est toujours possible d'obtenir une représentation sous la forme d'une somme de  $L$  termes dans le cas cyclique pour la partie dynamique, et c'est

d'ailleurs ce que nous avons obtenu pour l'élément de matrice de l'opérateur  $\delta_s$  (3.70). Pour des quantités plus compliquées (par exemple à au moins deux points), il n'existe a priori pas de représentations où la partie dynamique se simplifie comme nous le verrons, et nous aurons par conséquent à traiter une famille de  $L$  déterminants déformés comme c'est le cas de (3.71).

Malgré la remarque précédente, il existe tout de même une représentation sous la forme d'un unique déterminant, c'est-à-dire où la partie dynamique est simplifiée, pour les facteurs de forme  $E_m^{++}$  et  $E_m^{--}$  du modèle SOS anti-périodique. Nous présentons ces résultats dans la proposition suivante.

**Proposition 3.4.2.** *Soit  $\langle t |$  et  $| t' \rangle$  deux états propres de la matrice de transfert anti-périodique  $\hat{t}(u)$ . Les facteurs de forme des opérateurs locaux  $E_m^{++}$  et  $E_m^{--}$  s'expriment en fonction d'un déterminant de taille  $N + 1$  comme,*

$$\langle t | E_m^{++} | t' \rangle = \frac{\prod_{b=1}^{m-1} t(\xi_b)}{\prod_{b=1}^m t'(\xi_b)} \langle t | \hat{B}(\xi_m) | t' \rangle = \frac{\prod_{b=1}^m t(\xi_b) \langle t | \hat{C}(\xi_m - 1) | t' \rangle}{\prod_{b=1}^{m-1} t(\xi_b) \det_q T(\xi_b, \hat{s})}, \quad (3.96)$$

$$\langle t | E_m^{--} | t' \rangle = \frac{\prod_{b=1}^{m-1} t(\xi_b)}{\prod_{b=1}^m t'(\xi_b)} \langle t | \hat{C}(\xi_m) | t' \rangle = \frac{\prod_{b=1}^m t(\xi_b) \langle t | \hat{B}(\xi_m - 1) | t' \rangle}{\prod_{b=1}^{m-1} t(\xi_b) \det_q T(\xi_b, \hat{s})}, \quad (3.97)$$

où les éléments de matrice des générateurs  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$  sont donnés par,

$$\langle t | \hat{B}(\xi_m)^{(x)} | t' \rangle = \det_{N+1} [\mathcal{S}_{a,b}^{(B_x, t, t')}], \quad (3.98)$$

$$\langle t | \hat{C}(\xi_m)^{(x)} | t' \rangle = \det_{N+1} [\mathcal{S}_{a,b}^{(C_x, t, t')}], \quad (3.99)$$

et où les matrices  $\mathcal{S}_{a,b}^{(B_x, t, t')}$  et  $\mathcal{S}_{a,b}^{(C_x, t, t')}$  sont respectivement définies, pour  $x = 0$  ou  $1$ , par

$$\mathcal{S}_{a,b}^{(B_x, t, t')} = \mathcal{F}_{a,b}^{(t, t')} \text{ pour } a \in \{1, \dots, N\}, \quad b \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.100)$$

$$\mathcal{S}_{N+1,b}^{(B_x, t, t')} = -\theta_{b-1}(\eta \bar{\xi}_m^{(x)}) \text{ pour } b \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.101)$$

$$\mathcal{S}_{a,N+1}^{(B_x, t, t')} = \bar{Q}_t(\xi_a^{(1)}) Q_{t'}(\xi_a^{(0)}) a(\xi^{(0)}) \text{ pour } a \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.102)$$

$$\mathcal{S}_{N+1,N+1}^{(B_x, t, t')} = 0, \quad (3.103)$$

et

$$\mathcal{S}_{a,b}^{(C_x, t, t')} = \mathcal{F}_{a,b}^{(t, t')} \text{ pour } a \in \{1, \dots, N\}, \quad b \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.104)$$

$$\mathcal{S}_{N+1,b}^{(C_x, t, t')} = -\theta_{b-1}(\eta \bar{\xi}_m^{(x)}) \text{ pour } b \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.105)$$

$$\mathcal{S}_{a,N+1}^{(C_x, t, t')} = \bar{Q}_t(\xi_a^{(0)}) Q_{t'}(\xi_a^{(1)}) d(\xi^{(1)}) \text{ pour } a \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.106)$$

$$\mathcal{S}_{N+1,N+1}^{(C_x, t, t')} = 0. \quad (3.107)$$

La matrice  $\mathcal{F}_{a,b}^{(t, t')}$  intervenant dans la définition de (3.100) et (3.104) est la matrice (3.87) du produit scalaire entre les deux états propres  $\langle t |$  et  $| t' \rangle$ .

Les deux autres facteurs de forme associés aux opérateurs  $E_m^{+-} \mathsf{T}_s^+$  et  $E_m^{-+} \mathsf{T}_s^-$  ne s'expriment quant à eux pas sous la forme d'un unique déterminant justement à cause des coefficients dépendant des configurations  $\mathbf{h}$ , ces derniers empêchant de rentrer les sommes dans le déterminant

par multilinéarité. Toutefois, il est toujours possible d'obtenir une représentation sous la forme d'un unique déterminant en faisant un changement de base non local dans  $\text{End}(\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)})$ . On définit pour ce faire l'opérateur  $\hat{E}_m^{-+}$  comme

$$\hat{E}_m^{-+} = E_m^{-+} \mathsf{T}_{\hat{s}} \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b) \left( \frac{[\hat{s} - \bar{\xi}_m^{(0)} + \frac{1}{2\eta}][t_{0,1}]}{[\hat{s}]^2} \mathsf{T}_{\hat{s}}^{-} \text{id}_{-1,0} \right) \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b)^{-1}, \quad (3.108)$$

où  $\text{id}_{-1,0}$  est l'isomorphisme canonique (3.91). L'opérateur ainsi défini appartient toujours à  $\text{End}(\bar{\mathbb{D}}_{(6\text{VD}),N}^{(0)})$  mais comme son action sur l'espace quantique  $\mathcal{H}$  n'est plus restreinte à  $\mathcal{H}_m$ , il ne s'agit plus d'un opérateur local. En effet, les formules de reconstruction expriment (3.108) comme,

$$\hat{E}_m^{-+} = \prod_{b=1}^{m-1} \hat{t}(\xi_b) \frac{[\hat{s} - \bar{\xi}_m^{(0)} + \frac{1}{2\eta}][t_{0,1}]}{[\hat{s}]^2} \widehat{D}(\xi_m) \text{id}_{-1,0} \prod_{b=1}^m \hat{t}(\xi_b)^{-1}. \quad (3.109)$$

Nous présentons l'expression obtenue pour le facteur de forme d'un tel opérateur dans la proposition qui suit.

**Proposition 3.4.3.** *Soit  $\langle t |$  et  $| t' \rangle$  deux états propres de la matrice de transfert anti-périodique  $\hat{t}(u)$ . Le facteur de forme de l'opérateur non local  $\hat{E}_m^{-+}$  s'exprime en fonction d'un déterminant de taille  $N + 1$  comme,*

$$\langle t | \hat{E}_m^{-+} | t' \rangle = \frac{\prod_{b=1}^{m-1} t(\xi_b)}{\prod_{b=1}^m t'(\xi_b)} \langle t | \frac{[\hat{s} - \bar{\xi}_m^{(0)} + \frac{1}{2\eta}][t_{0,1}]}{[\hat{s}]^2} \widehat{D}(\xi_m) \text{id}_{-1,0} | t' \rangle, \quad (3.110)$$

où l'élément de matrice ci-dessus est donné par

$$\langle t | \frac{[\hat{s} - \bar{\xi}_m^{(0)} + \frac{1}{2\eta}][t_{0,1}]}{[\hat{s}]^2} \widehat{D}(\xi_m) \text{id}_{-1,0} | t' \rangle = u_N \det_{N+1} [\mathcal{S}_{a,b}^{D,t,t'}], \quad (3.111)$$

avec

$$\mathcal{S}_{a,b}^{D,t,t'} = \mathcal{F}_{a,b}^{(t,t')} \text{ pour } a \in \{1, \dots, N\}, \quad b \in \{1, \dots, N+1\}, \quad (3.112)$$

$$\mathcal{S}_{N+1,b}^{D,t,t'} = \theta_{b-1}(\eta \bar{\xi}_m^{(0)}) \text{ pour } b \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.113)$$

pour

$$u_N = \frac{[\sum_{a=1}^N \bar{\xi}_a^{(1)} - \frac{N-1}{2\eta}] \det_N [\theta_{ab}^{(1)}]}{[\sum_{a=1}^N \bar{\xi}_a^{(1)} + \bar{\xi}_m^{(0)} - \frac{N}{2\eta}] \prod_{c=1}^N [\xi_c^{(h_c)} - \xi_m^{(0)}] \det_{N+1} \theta_{ab}^{(n,1)}}. \quad (3.114)$$

La matrice  $\mathcal{F}_{a,b}^{(t,t')}$  intervenant dans la définition de (3.112) est toujours la matrice (3.87), tandis que  $\theta_{ab}^{(n,h)}$  est définie comme

$$\theta_{ab}^{(n,h)} = \theta_{b-1}(\bar{\xi}_a^{(h_a)}) \text{ pour } a \in \{1, \dots, N+1\}, \quad b \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.115)$$

pour une configuration de spins  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}_2^N$  telle que  $\bar{\xi}_{N+1}^{(h_{N+1})} = \xi_m^{(0)}$ .

Bien qu'il reste à éclaircir la signification physique de  $\hat{E}_m^{-+}$ , ce dernier n'étant plus un opérateur local, une représentation sous la forme d'un déterminant de taille  $N + 1$  a été obtenue pour les facteurs de forme du modèle SOS anti-périodique.



## Chapitre 4

# Fonctions de corrélation du modèle SOS cyclique en volume infini

Dans ce chapitre, nous considérons quelques applications au calcul de certaines quantités physiques du modèle SOS cyclique des expressions algébriques obtenues précédemment. La prochaine étape dans le calcul des fonctions de corrélation après la détermination du spectre de la matrice de transfert, des produits scalaires et de la résolution du problème inverse quantique, est de prendre la limite de volume infini, encore appelée limite thermodynamique, pour laquelle le nombre de sites  $N$  diverge. Ce n'est en effet que dans cette limite que les éléments de matrice d'un produit d'opérateurs locaux entre deux états propres de la matrice de transfert sont reliés aux fonctions de corrélation du modèle SOS. La résolution de ce problème, encore totalement ouvert dans le cadre de la séparation des variables, est par conséquent une étape cruciale dans l'étude des fonctions de corrélation. L'objectif de ce chapitre est de traiter, dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique, le passage à la limite thermodynamique pour le modèle SOS périodique cyclique.

De plus, le passage à la limite thermodynamique produit des simplifications techniques remarquables et permet d'obtenir des expressions entièrement explicites pour les plus simples des quantités physiques. En effet, l'ansatz de Bethe algébrique construit les états propres de la matrice de transfert comme des fonctions paramétrées par un ensemble solution d'un système d'équations algébriques couplées : les équations de Bethe. Or, ces équations sont particulièrement difficiles à résoudre en volume fini, mais ont la particularité de se simplifier considérablement pour les états fondamentaux dans la limite de volume infini, au point qu'il en existe une solution explicite. C'est cette solution explicite, sur la densité des racines des états fondamentaux, qui intervient dans l'expression des blocs élémentaires de la chaîne de spins XXZ [126].

Toutefois, les états fondamentaux étant paramétrés par un nombre de racines de l'ordre du nombre de sites  $N$ , les fonctions de corrélation (6) se représentent comme des sommes de déterminants, ces derniers ayant une taille elle aussi du même ordre que le nombre de sites. Qui plus est, les sommes impliquées dans ces expressions ne sont pas simples et opèrent, entre autres, sur l'ensemble des racines d'un des états fondamentaux en vertu des relations de commutation de l'algèbre de Yang-Baxter. Toutes ces difficultés peuvent néanmoins être résolues de manière similaire, bien que techniquement plus compliquées, à la chaîne de spins de XXZ comme nous le montrons dans la suite de ce chapitre.

L'étude des équations de Bethe à la limite thermodynamique est présentée dans une première partie, et permet d'une part de caractériser les états fondamentaux du modèle SOS cyclique, et d'autre part de caractériser le comportement des sommes ci-dessus dans cette limite.

L'application de ces résultats est présentée dans une deuxième partie à deux des fonctions de corrélation les plus simples que sont la polarisation spontanée, pour laquelle une conjecture due à Date, Jimbo, Kuniba et Miwa est démontrée [60], et la probabilité de hauteur locale dont les résultats coïncident avec ceux obtenus par Pearce et Seaton dans [171].

Enfin, une troisième partie conclut ce chapitre en étudiant les probabilités de hauteurs locales multi-points, pour lesquelles une expression sous la forme d'un unique terme d'intégrales multiples est obtenue à la limite thermodynamique, à l'instar des représentations pour les blocs élémentaires pour la chaîne de spins XXZ [126]. Notons que des représentations similaires ont été obtenues pour le modèle SOS restreint, pour lequel le paramètre dynamique  $s$  appartient à  $\{1, \dots, L-1\}$ , le facteur de phase étant par conséquent nul  $s_0 = 0$  [150].

## 4.1 Limite thermodynamique et états fondamentaux

L'étude des équations de Bethe dans la limite de "basse température" pour laquelle la période des fonctions thêta du modèle tend vers zéro, permet de caractériser les états fondamentaux du modèle SOS cyclique [171, 170]. Ces derniers sont dégénérés  $2(L-r)$  fois et appartiennent au secteur  $\aleph = 0$  : le nombre d'opérateurs  $\hat{B}$  les paramétrant est alors  $n = N/2$ . Dans cette partie, nous allons relier ces états fondamentaux aux états propres de Bethe construits à l'aide de l'ansatz de Bethe algébrique.

Dans le modèle SOS cyclique, il existe deux régimes différents [171], mais tous deux sont accessibles à partir du régime principal pour lequel

$$0 < \eta < \frac{1}{2}, \quad \tau \in i\mathbb{R}^+. \quad (4.1)$$

C'est ce régime que l'on considère dans toute la suite de ce chapitre.

De plus, pour caractériser ces états dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique, il est plus commode d'effectuer une transformation de Jacobi sur la fonction  $u \mapsto [u]$  (A.23) et de travailler avec les fonctions conjuguées  $\theta_1(z_j = \tilde{\eta}u_j, \tilde{\tau})$  pour  $j = 1, \dots, N$ , où les quasi-périodes conjuguées sont définies comme

$$\tilde{\eta} = -\frac{\eta}{\tau}, \quad \tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau}, \quad \text{Régime principal : } 0 < -i\tilde{\eta} < -\frac{i}{2}\tilde{\tau}. \quad (4.2)$$

Avec ces notations, les équations de Bethe (2.51) dans le secteur des états fondamentaux et à la limite homogène  $\xi_k = \frac{1}{2}$  pour  $k = 1, \dots, N$  deviennent,

$$\omega^2 e^{4i\pi\eta \sum_{l=1}^n z_l} \frac{\theta_1^N(z_j + \tilde{\eta}/2)}{\theta_1^N(z_j - \tilde{\eta}/2)} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(z_l - z_j + \tilde{\eta})}{\theta_1(z_l - z_j - \tilde{\eta})} = -1, \quad (4.3)$$

où dans (4.3) et tout ce qui suit, nous notons  $\theta_1(z)$  la fonction  $\theta_1(z, \tilde{\tau})$ .

Ces équations de Bethe peuvent être écrites sous la forme logarithmique suivante,

$$Np_0(z_j) - \sum_{l=1}^n \vartheta(z_j - z_l) = 2\pi \left( n_j - \frac{n+1}{2} + \frac{rn+2\ell}{L} + 2\eta \sum_{l=1}^n z_l \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

où les entiers  $n_j$  paramétrisent l'état propre considéré,  $p_0$  et  $\vartheta$  en caractérisent son impulsion et sa phase et sont définies par

$$p_0(z) = i \log \frac{\theta_1(\tilde{\eta}/2 + z)}{\theta_1(\tilde{\eta}/2 - z)}, \quad \vartheta(z) = i \log \frac{\theta_1(\tilde{\eta} + z)}{\theta_1(\tilde{\eta} - z)}, \quad (4.5)$$

avec la racine de l'unité  $\omega$ , qui dans le cas cyclique satisfait à  $(-1)^{rn}\omega^L = -1$ , de telle sorte qu'il existe un entier  $\ell$  tel que  $\omega = e^{i\pi \frac{rn+2\ell}{L}}$ . Les états fondamentaux identifiés dans [171], et qui dans la limite de basse température ( $\tau \rightarrow 0$ ) tendent vers les configurations plates pour lesquelles la hauteur alterne entre deux mêmes valeurs successives, correspondent aux solutions réelles de (4.4) pour lesquelles la distribution des entiers  $n_j$  satisfait à  $n_{j+1} - n_j = 1$  pour  $j = 1, \dots, n$ . De plus, à la limite thermodynamique, la distribution des racines de Bethe associée à un tel état tend vers une densité positive  $\rho(z)$  sur l'intervalle réel  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  solution de l'équation de Lieb,

$$\rho(z) + \int_{-1/2}^{1/2} K(z-w) \rho(w) dw = \frac{p'_0(z)}{2\pi}, \quad (4.6)$$

avec

$$p'_0(z) = i \left\{ \frac{\theta'_1(z + \tilde{\eta}/2)}{\theta_1(z + \tilde{\eta}/2)} - \frac{\theta'_1(z - \tilde{\eta}/2)}{\theta_1(z - \tilde{\eta}/2)} \right\}, \quad (4.7)$$

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \vartheta'(z) = \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{\theta'_1(z + \tilde{\eta})}{\theta_1(z + \tilde{\eta})} - \frac{\theta'_1(z - \tilde{\eta})}{\theta_1(z - \tilde{\eta})} \right\}. \quad (4.8)$$

En fait, la densité précédente est définie à partir des équations de Bethe logarithmiques (4.4) comme

$$\rho(z_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(z_{j+1} - z_j)}, \quad (4.9)$$

ce qui implique directement que l'on ait

$$\int_{-1/2}^{1/2} \rho(z) dz = \frac{n}{N} = \frac{1}{2}. \quad (4.10)$$

La solution de l'équation intégrale (4.6) peut facilement être calculée par développement en série de Fourier par linéarité de l'équation, car les bornes de l'intégrale coïncident avec la période du noyau  $K$  et de sa transformée  $p'_0$ . On trouve, dans le régime principal,

$$p'_m = \int_{-1/2}^{1/2} p'_0(z) e^{-2\pi i m z} dz = \begin{cases} 2\pi & \text{pour } m = 0, \\ 2\pi \tilde{q}^{\frac{|m|}{2}} \frac{1 - \tilde{p}^{|m|} \tilde{q}^{-|m|}}{1 - \tilde{p}^{|m|}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$k_m = \int_{-1/2}^{1/2} K(z) e^{-2\pi i m z} dz = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = 0, \\ \tilde{q}^{|m|} \frac{1 - \tilde{p}^{|m|} \tilde{q}^{-2|m|}}{1 - \tilde{p}^{|m|}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.12)$$

de telle sorte que

$$\rho(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m z}}{2 \cosh(i\pi m \tilde{\eta})} = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2} \frac{\theta_3(z; \tilde{\eta})}{\theta_4(z; \tilde{\eta})}, \quad (4.13)$$

où nous avons posé  $\tilde{q} = e^{2\pi i \tilde{\eta}}$ ,  $\tilde{p} = e^{2\pi i \tilde{\tau}}$ . La solution pour la densité de racines de Bethe (4.13) est une fonction elliptique de période 1 et  $2\tilde{\eta}$ , et se confond en fait avec la densité du régime massif de la chaîne de spins XXZ.

On souhaite maintenant étudier le comportement des racines de Bethe des états fondamentaux vis à vis des corrections de tailles finies, et plus particulièrement obtenir des règles de sommes nous permettant d'évaluer la différence des racines de deux états fondamentaux, pour  $N$  assez grand. Considérons pour ce faire deux états fondamentaux respectivement paramétrés par  $(\{x_j\}_{1 \leq j \leq n}, \omega_x = e^{i\pi \frac{rn+2\ell_x}{L}})$  et  $(\{y_j\}_{1 \leq j \leq n}, \omega_y = e^{i\pi \frac{rn+2\ell_y}{L}})$ , avec  $\{x_j\}$  et  $\{y_j\}$  solution de (4.4), et dont les entiers  $n_j$  sont respectivement donnés par  $k_x + j$  et  $k_y + j$ . Les entiers  $k_x$  et  $k_y$  quantifient ainsi le décalage des entiers  $n_j$ . Les propositions suivantes ont été obtenues dans l'**Article 2** :

**Proposition 4.1.1.** *Soit  $f$  une fonction 1-périodique et  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . La somme de toutes les images par  $f$  des paramètres spectraux  $\{x_j\}_{1 \leq j \leq n}$ , solutions de (4.4) et paramétrant un des  $2(L - r)$  états fondamentaux, peut être remplacée par une intégrale à la limite thermodynamique en vertu de la règle suivante :*

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \int_{-1/2}^{1/2} f(z) \rho(z) dz + O(N^{-\infty}). \quad (4.14)$$

De manière similaire, si  $g$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée  $g'$  est 1-périodique, alors

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n g(x_j) = \int_{-1/2}^{1/2} g(z) \rho(z) dz + \frac{c_g}{N} \sum_{j=1}^n x_j + O(N^{-\infty}), \quad (4.15)$$

où la constante  $c_g = \int_{-1/2}^{1/2} g'(z) dz = g(1/2) - g(-1/2)$ .

La proposition précédente nous permet en particulier d'évaluer la valeur de la différence des racines de deux états fondamentaux. On montre en effet que

$$\sum_{t=1}^n (x_t - y_t) = \frac{L(k_x - k_y) + 2(\ell_x - \ell_y)}{2(L - r)} + O(N^{-\infty}), \quad (4.16)$$

ce qui implique encore

$$e^{2\pi i(1-\eta) \sum_l (x_l - y_l)} = e^{i\pi(k_x - k_y) \frac{\omega_x}{\omega_y}} + O(N^{-\infty}). \quad (4.17)$$

Notons que (4.16) ne dépend que de la différence des entiers paramétrant les deux états fondamentaux,  $k_x - k_y$ , et  $\ell_x - \ell_y$ .

On montre de plus dans l'**Article 2**, que deux solutions des équations de Bethe  $(\{x\}, \omega_x)$  et  $(\{y\}, \omega_y)$  paramétrant des états fondamentaux sont différentes si et seulement si la différence des racines  $\sum_t (x_t - y_t)$  n'est pas un entier. C'est ce qui nous permet de compter les états fondamentaux, ces derniers étant entièrement déterminés par deux entiers  $k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\ell \in \mathbb{Z}/(L - r)\mathbb{Z}$ . Lorsque la période  $L$  est impaire, il est clair qu'une telle paramétrisation donne  $2(L - r)$  états fondamentaux différents, tandis que pour  $L$  pair, une telle paramétrisation ne décrit a priori que  $(L - r)$  valeurs différentes de (4.16). Cependant, on rappelle que pour  $L$  pair

il existe deux solutions des équations de Bethe (2.51) de paramètre  $\omega$  opposé associées à un même ensemble de racines, de telle sorte que l'on obtienne effectivement  $2(L - r)$  solutions différentes pour les états fondamentaux. Dans tout ce qui suit, nous noterons par conséquent  $|k, \ell\rangle$  un état fondamental de Bethe paramétré par deux entiers  $k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\ell \in \mathbb{Z}/(L - r)\mathbb{Z}$ . Bien sûr, l'ensemble de ces états propres forme une base de l'espace des états fondamentaux du modèle SOS<sup>1</sup>  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$ .

Remarquons cependant que les états fondamentaux de Bethe n'ont a priori aucune raison de coïncider avec les états fondamentaux du modèle SOS cyclique  $\{|\phi_g^i\rangle\}$  à la limite thermodynamique, ces derniers fixant un secteur d'état fondamental comme nous l'avons déjà expliqué en section 2.1. Les états de Bethe de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$  ne sont en effet pas nécessairement compatibles avec les conditions aux limites définissant un tel secteur. Par ailleurs, nous paramétrons les  $\{|\phi_g^i\rangle\}$  également par deux entiers  $\epsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $t \in \mathbb{Z}/(L - r)\mathbb{Z}$ , et les notons dorénavant  $|\phi_g^{(\epsilon, t)}\rangle$ . Or, ces états fondamentaux, qui dans la limite de basse température s'identifient aux configurations "plates" du type  $(a, a + 1, a, a + 1, \dots)$  ou  $(a + 1, a, a + 1, a, \dots)$ , peuvent toujours être exprimés dans la base des états fondamentaux de Bethe  $\{|k, \ell\rangle\}$ . On étudie pour ce faire la limite basse température des états fondamentaux de Bethe, directement à partir de leur expression combinatoire (théorème 5 de [75]), pour finalement trouver que le changement de base  $\mathcal{B}$  de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$  est donné par,

$$|\phi_g^{(\epsilon, t)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(L - r)}} \sum_{k_\alpha=0}^1 \sum_{\ell_\alpha=0}^{L-r-1} (-1)^{k_\alpha \epsilon} e^{-i\pi \frac{rk_\alpha + 2\ell_\alpha}{L-r} (t+s_0)} \frac{|k_\alpha, \ell_\alpha\rangle}{\langle k_\alpha, \ell_\alpha | k_\alpha, \ell_\alpha \rangle^{1/2}}, \quad (4.18)$$

avec  $\epsilon \in \{0, 1\}$  et  $t \in \{0, 1, \dots, L - r - 1\}$ . La transformation (4.18) est bien un changement de base orthogonal de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$ , et permet d'exprimer les différents secteurs d'états fondamentaux du modèle SOS en fonction des états fondamentaux de Bethe.

Le cas inhomogène levant certaines dégénérescences en volume fini, il est plus commode d'un point de vue technique de considérer la généralisation inhomogène des propositions précédentes, dans laquelle les inhomogénéités  $\xi_k$  pour  $k = 1, \dots, N$  n'ont pas été évaluées en  $\frac{1}{2}$ . En effet, dans le cas inhomogène, (4.4) devient

$$Np_{0\text{tot}}(z_j) - \sum_{l=1}^n \vartheta(z_j - z_l) = 2\pi \left( n_j - \frac{n+1}{2} + \frac{rn + 2\ell}{L} + 2\eta \sum_{l=1}^n z_l + \eta \bar{\zeta} \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

où nous avons posé  $\zeta_k = \tilde{\eta} \xi_k$  pour  $k = 1, \dots, N$ , et avec bien sûr,

$$p_{0\text{tot}}(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N p_0 \left( z - \zeta_k + \frac{\tilde{\eta}}{2} \right), \quad (4.20)$$

$$\bar{\zeta} = \sum_{l=1}^N \left( \frac{\tilde{\eta}}{2} - \zeta_l \right), \quad (4.21)$$

la phase  $\vartheta$  étant toujours définie par (4.5). Dans le secteur des états fondamentaux, (4.19) tend, à la limite thermodynamique, vers une équation de Lieb inhomogène sur la densité de racines

1. Il en existe autant que la dimension de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$ , et l'orthogonalité entre états de Bethe assure leur indépendance linéaire.

de Bethe du modèle inhomogène  $\rho_{tot}$ ,

$$\rho_{tot}(z) + \int_{-1/2}^{1/2} K(z-w) \rho_{tot}(w) dw = \frac{p'_{0tot}(z)}{2\pi}, \quad (4.22)$$

dont la solution est simplement la superposition linéaire des solutions homogènes (4.13),

$$\rho_{tot}(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho\left(z - \zeta_k + \frac{\tilde{\eta}}{2}\right). \quad (4.23)$$

Enfin, les propositions sur les corrections de tailles finies (4.14) et (4.15) se généralisent directement au cas inhomogène, en substituant la densité (4.13) par la densité inhomogène (4.23).

## 4.2 Polarisation spontanée et probabilité de hauteur locale

Nous avons vu dans la partie précédente, que dans le régime principal, les états fondamentaux de Bethe sont dégénérés  $2(L-r)$  fois à la limite thermodynamique, et sont entièrement caractérisés par la donnée de deux entiers  $k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\ell \in \mathbb{Z}/(L-r)\mathbb{Z}$ . De plus, le régime principal étant un régime massif, il existe un gap en énergie entre les états de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$  et les états excités. Il est ainsi naturel de chercher à déterminer les fonctions de corrélation correspondant à l'élément de matrice de l'opérateur  $\sigma_m^z$  entre deux états de base de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$ . Toutefois, comme les fonctions de corrélation du modèle SOS cyclique s'identifient à la limite thermodynamique à des éléments de matrice des opérateurs locaux dans la base  $\{|\phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})}\rangle\}$ , les quantités physiques que nous allons chercher à calculer sont les suivantes,

$$\langle \phi_g^{(\epsilon_1, \mathbf{t}_1)} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon_2, \mathbf{t}_2)} \rangle. \quad (4.24)$$

Ce sont les *polarisations spontanées* du modèle SOS cyclique périodique.

Par ailleurs, le changement de base  $\mathcal{B}$  entre la base des états propres de Bethe vers celle des états fondamentaux “physiques” étant connu et donné par (4.18), nous pouvons toujours commencer par prendre la limite thermodynamique des éléments de matrice des opérateurs locaux dans la base des états propres de Bethe, avant de reconstruire (4.24) en vertu de (4.18).

Les polarisations spontanées sont ainsi reliées, à la limite thermodynamique, aux facteurs de forme normalisés (3.56) pour lesquels nous avons obtenu, en volume fini, une représentation sous la forme d'un unique quotient de déterminants.

De manière similaire, les probabilités de hauteurs locales

$$\langle \phi_g^{(\epsilon_1, \mathbf{t}_1)} | \delta_s | \phi_g^{(\epsilon_2, \mathbf{t}_2)} \rangle, \quad (4.25)$$

peuvent être obtenues à partir des éléments de matrice de l'opérateur  $\delta_s$  dans la base états propres de Bethe de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$ , pour lesquels nous avons obtenu une représentation sous la forme d'une somme de déterminants.

Notons en particulier, que ces probabilités de hauteurs locales ne sont qu'un cas particulier des probabilités de hauteurs multi-points,

$$\langle \phi_g^{(\epsilon_1, \mathbf{t}_1)} | \delta_s E_1^{\alpha_1 \alpha_1} \dots E_m^{\alpha_m \alpha_m} | \phi_g^{(\epsilon_2, \mathbf{t}_2)} \rangle, \quad (4.26)$$

et que nous calculerons dans la partie suivante à partir de l'expression des éléments de matrice multi-points (3.67) en volume fini.

### 4.2.1 Polarisation spontanée

L'objet de cette partie est de prendre la limite thermodynamique des facteurs de forme normalisés (3.56), et d'obtenir, après avoir effectué le changement de base décrit ci-dessus, une expression entièrement explicite pour les polarisations spontanées, analogues pour le modèle SOS cyclique de la formule de Baxter dans le modèle à six-vertex [21, 22]. Les états propres de Bethe que l'on considère dans (3.56) étant dorénavant des états fondamentaux, nous posons dans tout ce qui suit  $|\mathbf{k}_x, \ell_x\rangle \equiv |\{u\}, \omega_u\rangle$ , et  $|\mathbf{k}_y, \ell_y\rangle \equiv |\{v\}, \omega_v\rangle$ . De plus, il est commode de travailler avec des racines de Bethe réelles à la limite thermodynamique, nous posons ainsi  $x_j \equiv \tilde{\eta}u_j$ ,  $y_j \equiv \tilde{\eta}v_j$  pour  $j = 1, \dots, N$ , et  $\omega_x \equiv \omega_u$ ,  $\omega_y \equiv \omega_v$ , et exprimons (3.56) en fonction de la période conjuguée  $\tilde{\tau}$  en vertu de (A.23).

#### Représentation du facteur de forme de $\sigma_m^z$ sous la forme d'un quotient de déterminant de Fredholm

Dans le cas où les deux états fondamentaux sont paramétrés par deux ensembles de racines différentes  $\{x\}$  et  $\{y\}$ , c'est-à-dire pour  $\gamma \neq 0$ , le facteur de forme de  $\sigma_m^z$  s'exprime sur la chaîne finie comme

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{k}_x, \ell_x | \sigma_m^z | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle}{\langle \mathbf{k}_y, \ell_y | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle} &= \left[ \frac{\omega_x}{\omega_y} e^{-2\pi i \tilde{\eta} \gamma} e^{-i \sum_{l=1}^n [p_0(x_l) - p_0(y_l)]} \right]^{m-1} e^{-2i\pi n \frac{\tilde{\eta}}{\gamma} (|y_t^2| - |x_t^2|_n)} e^{-2i\pi n \tilde{\eta} (|y_t| - |x_t|)} \\ &\times \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \tilde{\eta} \gamma} \right)^s \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \tilde{\gamma})}{\theta_1(\tilde{\eta}s)} \right\} \left( -\tilde{\eta} \theta_1'(0) e^{-2\pi i \tilde{\eta} \gamma} \frac{\omega_x^2}{\omega_y^2} \right)^n \times \left( \prod_{t=1}^n \frac{\theta_1(x_t + \frac{\tilde{\eta}}{2})}{\theta_1(y_t + \frac{\tilde{\eta}}{2})} \right)^{2n} \\ &\times \prod_{k < l} \frac{\theta_1(y_k - y_l)}{\theta_1(x_k - x_l)} \frac{\det_n [\tilde{H}(\{x\}, \{y\}) - 2\tilde{Q}(\{x\}, \{y\})]}{\det_n [\tilde{\Phi}(\{y\})]}, \quad (4.27) \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\gamma} = \sum_{j=1}^n (y_j - x_j)$  et

$$\begin{aligned} [\tilde{H}]_{jk} &= \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \frac{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_j - y_k)} - \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \tilde{\eta} \gamma} \frac{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\gamma} + \tilde{\eta})}{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\eta})} \right\} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k + \tilde{\eta})} \\ &- \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \frac{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_j - y_k)} - \frac{\omega_x}{\omega_y} e^{-2\pi i \tilde{\eta} \gamma} \frac{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\gamma} - \tilde{\eta})}{\theta_1(x_j - y_k - \tilde{\eta})} \right\} \\ &\times \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^2 e^{4\pi i \tilde{\eta} \gamma} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k - \tilde{\eta})}, \quad (4.28) \end{aligned}$$

$$[\tilde{Q}]_{jk} = \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \frac{\theta_1(x_j - \frac{\tilde{\eta}}{2} + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_j - \frac{\tilde{\eta}}{2})} - \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \tilde{\eta} \gamma} \frac{\theta_1(x_j + \frac{\tilde{\eta}}{2} + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_j + \frac{\tilde{\eta}}{2})} \right\} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l + \frac{\tilde{\eta}}{2})}{\theta_1(y_l + \frac{\tilde{\eta}}{2})}, \quad (4.29)$$

$$[\tilde{\Phi}]_{jk} = -2\pi i \tilde{\eta} N \delta_{jk} \left\{ \frac{p_0'(y_j)}{2\pi} - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n K(y_j - y_l) \right\} - 2\pi i \tilde{\eta} K(y_j - y_k) + 4\pi i \tilde{\eta} \gamma. \quad (4.30)$$

Remarquons que le déterminant de la matrice  $\tilde{\Phi}$  (4.30) est déjà sous une forme adaptée pour prendre sa limite thermodynamique. En effet, en utilisant la proposition sur les corrections de tailles finies (4.14) et l'équation de Lieb, (4.6), on obtient

$$[\tilde{\Phi}]_{jk} = -2\pi i \tilde{\eta} N \rho(y_k) \left\{ \delta_{jk} + \frac{1}{N} \frac{K(y_j - y_k)}{\rho(y_k)} - \frac{1}{N} \frac{2\eta}{\rho(y_k)} + O(N^{-\infty}) \right\}, \quad (4.31)$$

de telle sorte que le déterminant correspondant peut être écrit sous la forme d'un déterminant de Fredholm lorsque  $N$  tend vers l'infini :

$$\det_n [\tilde{\Phi}(\{y\})] = (-2\pi i \tilde{\eta} N)^n \prod_{l=1}^n \rho(y_l) \left\{ \det [1 + \widehat{K} - \widehat{V}_0] + O(N^{-\infty}) \right\}. \quad (4.32)$$

Dans (4.32),  $\widehat{K}$  et  $\widehat{V}_0$  sont des opérateurs intégraux agissant sur l'intervalle réel  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , de noyau respectif  $K(y - z)$  donné par (4.8), et  $V_0(y - z) = 2\eta$ .

Le passage à la limite thermodynamique du déterminant du numérateur de (4.27) ne se fait quand à lui pas de manière directe. Il est en effet plus commode de le transformer de manière similaire à ce qui a été fait dans [100], en y incorporant une partie du facteur numérique à l'aide d'une matrice  $\mathcal{X}_t(\{x\}, \{y\})$  dépendant d'un paramètre libre  $t$  et donnée par

$$[\mathcal{X}_t]_{jk} = \frac{1}{\theta_1(t)} \frac{\prod_{l=1}^n \theta_1(x_k - y_l)}{\prod_{l \neq k} \theta_1(x_k - x_l)} \frac{\theta_1(y_j - x_k + t)}{\theta_1(y_j - x_k)} \frac{\theta_1(x_k)}{\theta_1(x_k - t)}, \quad (4.33)$$

et dont le déterminant vaut

$$\det_n [\mathcal{X}_t(\{x\}, \{y\})] = (-1)^n \frac{\theta_1(\tilde{\gamma} + t)}{\theta_1(t)} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l)}{\theta_1(x_l - t)} \prod_{j < k} \frac{\theta_1(y_j - y_k)}{\theta_1(x_j - x_k)}. \quad (4.34)$$

Le théorème des résidus nous permet alors de calculer les produits de matrices  $\mathcal{X}_t \widetilde{H}$  et  $\mathcal{X}_t \widetilde{Q}$ , et d'obtenir une expression simplifiée du déterminant du numérateur de (4.27), dans la limite où  $t$  tend vers zéro. Nous référons à l'appendice B de l'Article 2 pour ce calcul, où l'on trouve finalement

$$\begin{aligned} (-1)^n \prod_{j < k} \frac{\theta_1(y_j - y_k)}{\theta_1(x_j - x_k)} \det_n [\widetilde{H}(\{x\}, \{y\}) - 2\widetilde{Q}(\{x\}, \{y\})] \\ = \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \det_n [(\mathcal{H} - \mathcal{Q})(\{x\}, \{y\})] - \det_n [(\mathcal{H} + \mathcal{Q})(\{x\}, \{y\})] \right\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}]_{jk} = \delta_{jk} \frac{\prod_{l \neq j} \theta_1(y_j - y_l)}{\prod_{l=1}^n \theta_1(y_j - x_l)} \left\{ \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k + \tilde{\eta})} - \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^2 e^{4\pi i \eta \tilde{\gamma}} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k - \tilde{\eta})} \right\} \\ + \frac{1}{\theta'_1(0)} \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \left\{ \frac{\theta'_1(y_j - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k + \tilde{\eta})} - \frac{\theta'_1(y_j - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k - \tilde{\eta})} \right\}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

et

$$[\mathcal{Q}]_{jk} = \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} - e^{-i \sum_{l=1}^n [p_0(x_l) - p_0(y_l)]}. \quad (4.37)$$

Notons que l'expression ainsi obtenue en fonction d'une différence de deux déterminants de type (4.36)  $\pm$  (4.37) est une conséquence de la limite  $t$  tend vers zéro. De plus, toujours à l'aide de la proposition (4.1.1), on calcule les deux quantités importantes suivantes, qui interviennent

dans le passage à la limite thermodynamique de (4.36) et (4.37), en termes de la différence des racines des deux états fondamentaux :

$$\prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y \pm \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y \pm \tilde{\eta})} = e^{\mp i\pi(|x| - |y|)} + O(N^{-\infty}), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\prod_{l=1}^n \theta_1(y_j - x_l)}{\prod_{l \neq j} \theta_1(y_j - y_l)} = -\frac{\theta'_1(0)}{N\pi\rho(y_j)} \sin \pi(|x| - |y|) + O(N^{-\infty}). \quad (4.39)$$

En rassemblant tous ces résultats, et en utilisant (4.17), on montre que les éléments de matrice de  $\mathcal{H}(\{x\}, \{y\})$  (4.36) s'expriment comme suit à la limite thermodynamique,

$$[\mathcal{H}]_{jk} = -2\pi i N \frac{\rho(y_k)}{\theta'_1(0)} e^{2\pi i \tilde{\gamma}} \left\{ \delta_{jk} + \frac{(-1)^k}{N} \frac{K(y_j - y_k)}{\rho(y_k)} + O(N^{-\infty}) \right\}. \quad (4.40)$$

Pour  $N$  grand, Le comportement de la matrice (4.37) s'obtient de manière similaire à celui de (4.36),

$$[\mathcal{Q}]_{jk} = [(-1)^k - 1] e^{2\pi i \tilde{\gamma}} + O(N^{-\infty}), \quad (4.41)$$

où nous avons posé  $k = k_y - k_x$ . Il s'en suit en particulier que le facteur de forme (3.55) s'annule à la limite thermodynamique lorsque  $k = 0$ . On dispose ainsi de deux blocs d'états fondamentaux correspondant aux états dont les nombres quantiques  $k_x$  et  $k_y$  sont pairs ou impairs, et pour lesquels il n'y a pas de transitions possibles entre deux états dont la parité est identique. De plus, bien que la valeur moyenne de l'opérateur  $\sigma_m^z$  ne soit a priori pas décrite par cette formule (cf remarque 10), elle correspond en effet au cas pour lequel  $k = 0$  et  $\ell_x = \ell_y$  (et donc  $\tilde{\gamma} = 0$ ), un calcul explicite montre que l'élément de matrice correspondant s'annule de manière similaire aux cas  $k = 0$  : la base des états propres de Bethe n'est par conséquent pas une base polarisée.

Le second quotient (3.60) peut quant à lui être calculé en utilisant les équations de Bethe pour  $\{x\}$  et  $\{y\}$ , en plus des estimations (4.38), (4.39) et de l'expression en termes de déterminant de Fredholm pour la norme (4.32), pour finalement obtenir

$$\frac{\langle k_y, \ell_y \mid k_y, \ell_y \rangle}{\langle k_x, \ell_x \mid k_x, \ell_x \rangle} = \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^{2n} \times \left( e^{i\pi N \frac{\eta}{\tilde{\eta}} (|y_t|^2 - |x_t|^2)} e^{i\pi N \eta (|y_t| - |x_t|)} \prod_{t=1}^n \frac{\theta_1(y_t + \frac{\tilde{\eta}}{2})^{2n}}{\theta_1(x_t + \frac{\tilde{\eta}}{2})^{2n}} \right)^2 + O(N^{-\infty}). \quad (4.42)$$

En passant à la limite thermodynamique, les déterminants des matrices (4.40), (4.41) intervenant au numérateur de (3.55) tendent eux aussi vers des déterminants de Fredholm. On obtient dès lors une représentation sous la forme d'un quotient de déterminant de Fredholm pour le facteur de forme de  $\sigma_m^z$  :

$$\begin{aligned} \frac{\langle k_x, \ell_x \mid \sigma_m^z \mid k_y, \ell_y \rangle}{(\langle k_x, \ell_x \mid k_x, \ell_x \rangle \langle k_y, \ell_y \mid k_y, \ell_y \rangle)^{1/2}} &= (-1)^{k(m-1)} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \right)^s \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \tilde{\gamma})}{\theta_1(\tilde{\eta}s) \theta_1(\tilde{\gamma})} \right\} \\ &\times \frac{\det \left[ 1 + (-1)^k \widehat{K} + \frac{1 - (-1)^k}{2} \widehat{V} \right] - \det \left[ 1 + (-1)^k \widehat{K} - \frac{1 - (-1)^k}{2} \widehat{V} \right]}{\det \left[ 1 + \widehat{K} - \widehat{V}_0 \right]} + O(N^{-\infty}), \quad (4.43) \end{aligned}$$

où l'on rappelle que le noyau de l'opérateur intégral  $\widehat{K}$  est la fonction  $K$  (4.8), tandis que les opérateurs  $\widehat{V}_0$  et  $\widehat{V}$  ont pour noyaux respectifs les constantes  $2\eta$  et  $\frac{i}{\pi}\theta'_1(0)$ .

Remarquons que l'expression obtenue pour le facteur de forme de  $\sigma_m^z$  (4.43) n'est a priori valide que lorsque  $\tilde{\gamma} = \sum_t (y_t - x_t) \neq 0$ . En particulier, lorsque la période  $L$  est paire, les éléments de matrice correspondant aux états fondamentaux dont les ensembles de racines de Bethe sont identiques mais admettant des paramètres  $\omega$  opposés ne sont pas décrits par cette formule. Ces différents cas se traitent néanmoins sans problème, nous renvoyons à l'**Article 2** pour leur expression explicite.

### Calcul des déterminants de Fredholm

Nous venons d'obtenir une représentation pour les facteurs de forme de  $\sigma_m^z$  en termes d'un quotient de déterminants de Fredholm, ce qui nous permet dans la suite de cette section de calculer les polarisations spontanées. Or, comme le noyau de l'opérateur intégral  $\widehat{K}$  ne dépend que de la différence de deux variables, ses valeurs propres peuvent être calculées explicitement par transformée de Fourier et s'identifient aux coefficients de Fourier  $k_m$  (4.12) de la fonction  $K$  (4.8). Les autres opérateurs étant constants, les déterminants de Fredholm ci-dessus peuvent tous trois être calculés par transformée de Fourier. Nous obtenons en effet,

$$\det [1 + \widehat{K} - \widehat{V}_0] = 2(1 - \eta) \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 - \tilde{p}^m)^2}, \quad (4.44)$$

tandis que

$$\begin{aligned} \det \left[ 1 + (-1)^k \widehat{K} \pm \frac{1 - (-1)^k}{2} \widehat{V} \right] &= \left( 1 + (-1)^k \pm i \frac{1 - (-1)^k}{2\pi} \theta'_1(0) \right) \\ &\times \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 + (-1)^k \tilde{q}^m)^2 (1 - (-1)^k \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 - \tilde{p}^m)^2}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Finalement, en rassemblant tous les résultats précédents, on obtient la formule suivante dans la base des états propres de Bethe pour les facteurs de forme de  $\sigma_m^z$  :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{k}_x, \ell_x | \sigma_m^z | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle}{(\langle \mathbf{k}_x, \ell_x | \mathbf{k}_x, \ell_x \rangle \langle \mathbf{k}_y, \ell_y | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle)^{1/2}} &= \frac{1 - (-1)^k}{2} (-1)^{m-1} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2} \\ &\times \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{i}{\pi(L - r)} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} e^{i\pi(2\tilde{\gamma} - 1 + 2\eta\alpha)s} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \tilde{\gamma} + \alpha) \theta'_1(0)}{\theta_1(\tilde{\eta}s) \theta_1(\tilde{\gamma} + \alpha)} \right\} + O(N^{-\infty}), \end{aligned} \quad (4.46)$$

où l'on a introduit un paramètre de régularisation  $\alpha$  permettant de traiter les cas pour lesquels  $\tilde{\gamma} = 0$ . Par ailleurs, nous avons obtenu une expression pour  $\tilde{\gamma}$  qui ne dépend que de la différence des nombres quantiques impliqués dans les deux états fondamentaux en vertu de (4.16), de telle sorte qu'en posant  $\ell = \ell_y - \ell_x$ , avec toujours  $k = k_y - k_x$ ,

$$\tilde{\gamma} = \frac{Lk + 2\ell}{2(L - r)} + O(N^{-\infty}). \quad (4.47)$$

Les facteurs de forme précédents (4.46) s'expriment ainsi en terme de ces nombres quantiques comme

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{k}_x, \ell_x | \sigma_m^z | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle}{(\langle \mathbf{k}_x, \ell_x | \mathbf{k}_x, \ell_x \rangle \langle \mathbf{k}_y, \ell_y | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle)^{1/2}} &= \frac{1 - (-1)^k}{2} (-1)^{m-1} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2} \\ &\times \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{i}{\pi(L-r)} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} e^{2\pi i \left( \frac{r+2\ell}{2(L-r)} + \eta\alpha \right) s} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \frac{L+2\ell}{2(L-r)} + \alpha) \theta_1'(0)}{\theta_1(\tilde{\eta}s) \theta_1\left(\frac{L+2\ell}{2(L-r)} + \alpha\right)} \right\} + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Il est alors clair que (4.48) ne dépend que de la différence des nombres quantiques  $k$  et  $\ell$ , ce qui est une conséquence du fait qu'il n'existe pas d'état fondamental privilégié. L'expression ainsi obtenue contient une somme sur toutes les valeurs du paramètre dynamique, c'est-à-dire  $L$  termes résultant une nouvelle fois du caractère cyclique du modèle. Les éléments de matrice (4.48) ne sont toutefois pas diagonaux dans la base des états propres de Bethe, cette dernière n'étant pas polarisée, les éléments diagonaux y sont en fait tous nuls. Nous allons maintenant effectuer le changement de base  $\mathcal{B}$ , car ce n'est que dans cette base que les éléments de matrice de l'opérateur  $\sigma_m^z$  s'identifient aux polarisations spontanées.

### Calcul des polarisations spontanées

On montre facilement que dans la base (4.18), les polarisations spontanées sont diagonales à des termes exponentiels près en la taille du réseau,

$$\langle \phi_g^{(\epsilon_1, t_1)} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon_2, t_2)} \rangle = \delta_{\epsilon_1, \epsilon_2} \delta_{t_1, t_2} \langle \phi_g^{(\epsilon_1, t_1)} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon_1, t_1)} \rangle + O(N^{-\infty}), \quad (4.49)$$

de telle sorte qu'il n'existe pas de transitions possibles entre les différents secteurs d'états fondamentaux.

*Remarque 11.* Rappelons à ce niveau que pour le modèle cyclique considéré dans cette partie, le paramètre dynamique  $s$  appartient à l'ensemble  $\mathbf{C}_{s_0}^L = \{s_0 + j, j \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}\}$ . En fait, bien que toute l'approche par l'ansatz de Bethe algébrique s'applique jusqu'en volume infini pour une valeur générique du facteur de phase  $s_0$ , les fonctions de corrélation ainsi calculées ne sont physiques que si les poids statistiques du modèle sont réels et positifs. Nous allons par conséquent particulariser le facteur de phase  $s_0 = \frac{\tau}{2\eta} = -\frac{1}{2\tilde{\eta}}$ , et dans ce cas, les états (4.18) avec  $t = a - \lfloor \eta a \rfloor$  tendent effectivement vers les états fondamentaux de configurations "plates"  $(a, a+1, a, a+1, \dots)$  lorsque  $\epsilon - \lfloor \eta a \rfloor$  est pair, et vers  $(a+1, a, a+1, a, \dots)$  lorsque  $\epsilon - \lfloor \eta a \rfloor$  est impair (avec  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière de  $x$ ).

Les valeurs moyennes correspondantes de l'opérateur  $\sigma_m^z$  sont finalement données par

$$\begin{aligned} \langle \phi_g^{(\epsilon, t)} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon, t)} \rangle &= \frac{i(-1)^{m-1+\epsilon}}{\pi(L-r)} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2} \\ &\times \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{\ell=0}^{L-r-1} \sum_{s=0}^{L-1} e^{2\pi i \left( \frac{r+2\ell}{2(L-r)} + \eta\alpha \right) (s-t)} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}(s_0 + s) + \frac{L+2\ell}{2(L-r)} + \alpha) \theta_1'(0)}{\theta_1(\tilde{\eta}(s_0 + s)) \theta_1\left(\frac{L+2\ell}{2(L-r)} + \alpha\right)} + O(N^{-\infty}), \end{aligned} \quad (4.50)$$

qui est différent de 0. Dès lors, la base des états fondamentaux du modèle SOS cyclique périodique est une base *polarisée*. Ce résultat, valide pour tout entier  $r$  et  $L$  premiers entre eux, prouve et généralise la conjecture obtenue par Date, Jimbo, Kuniba et Miwa dans [60] pour les polarisations spontanées dans le cas où  $r = 1$ ,  $L$  est impair, et le facteur de phase  $s_0 = \frac{\tau}{2\eta} = -\frac{1}{2\tilde{\eta}}$ . Cette expression, qui contient  $L \times (L - r)$  termes et qui dépend toujours de manière implicite du paramètre de régularisation  $\alpha$ , peut être entièrement simplifiée à l'aide des identités de fonctions thêta (A.26), (A.27), la limite  $\alpha \rightarrow 0$  pouvant ensuite être évaluée explicitement. On trouve en effet que

$$\langle \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} \rangle = (-1)^{m+\epsilon} \frac{i}{\pi} \frac{\theta_1'(0; \eta\tilde{\tau}) \theta_1(\tilde{\eta}\mathbf{t}; (1-\eta)\tilde{\tau})}{\theta_2(0; \eta\tilde{\tau}) \theta_2(\tilde{\eta}\mathbf{t}; (1-\eta)\tilde{\tau})} + O(N^{-\infty}) \quad (4.51)$$

$$= (-1)^{m-1+\epsilon} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m-\mathbf{t}})}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m-\mathbf{t}})} \prod_{m=0}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m+\mathbf{t}})}{(1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m+\mathbf{t}})} + O(N^{-\infty}), \quad (4.52)$$

où le facteur de phase  $s_0 = -\frac{1}{2\tilde{\eta}}$ . Insistons une nouvelle fois sur l'intérêt du passage à la limite thermodynamique, qui en simplifiant les équations de Bethe pour les états fondamentaux, nous permet d'exprimer les polarisations spontanées de manière entièrement explicite, les corrections de tailles finies étant de plus contrôlées en vertu des propositions (4.14), (4.15).

Enfin, il peut être plus pratique dans l'optique d'étudier la limite critique  $|\tau| \rightarrow \infty$ , d'exprimer (4.51) en termes des périodes conjuguées. On effectue pour ce faire une transformation de Jacobi pour obtenir,

$$\langle \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} \rangle = (-1)^{m+\epsilon} \frac{i\tau}{\pi\eta} \frac{\theta_1'(0; \frac{\tau}{\eta}) \theta_1(\frac{\eta\mathbf{t}}{1-\eta}; \frac{\tau}{1-\eta})}{\theta_4(0; \frac{\tau}{\eta}) \theta_4(\frac{\eta\mathbf{t}}{1-\eta}; \frac{\tau}{1-\eta})} + O(N^{-\infty}). \quad (4.53)$$

## 4.2.2 Calcul des probabilités de hauteurs locales

La partie précédente présente le premier exemple, directement à partir des formules obtenues en volume fini pour les facteurs de forme, de dérivation d'une quantité physique pour le modèle SOS périodique cyclique. L'objet de cette partie est de poursuivre l'exploitation des résultats de la partie 3.3.3 pour l'élément de matrice de  $\delta_s$ , l'une des quantités les plus simples, et d'en obtenir une formule entièrement explicite à la limite thermodynamique.

On cherche par conséquent à prendre la limite thermodynamique de (3.69) dans le cas où  $|\{u\}, \omega_u\rangle$  et  $|\{v\}, \omega_v\rangle$  tendent vers deux états fondamentaux du modèle homogène. Le second quotient de (3.69) a déjà été calculé dans la partie précédente et tend, à la limite thermodynamique, vers (4.42)<sup>2</sup>. Il nous reste alors à simplifier le premier facteur de (3.69), dont deux représentations sous la forme d'un quotient de déterminants ont été obtenues (3.70), (3.72), dans l'optique de prendre la limite thermodynamique. En anticipant le calcul des éléments de matrice multi-points présenté dans la partie suivante, nous exploitons la représentation (3.72) dans laquelle le facteur  $\gamma$  est quelconque, cette dernière étant plus générale que la représentation (3.70).

2. Nous avons effectivement choisi  $\gamma = \sum_t (v_t - u_t)$  dans la dérivation de (3.70).

Ici aussi, il est plus commode d'insérer à l'intérieur du déterminant (3.73) la partie du facteur numérique qui rend compte du fait que les deux états fondamentaux que l'on considère sont différents. Or, ce facteur est identique à celui qui intervient dans la dérivation des polarisations spontanées, de telle sorte qu'une identité de déterminants analogue à (4.35) s'appuyant ici sur une matrice  $\mathcal{X}'_t$  se dérive de manière tout à fait similaire. On définit pour ce faire la matrice  $\mathcal{X}'_t$  comme

$$[\mathcal{X}'_t(\{u\}, \{v\})]_{jk} = \frac{[0]'}{[t]} \frac{\prod_{l=1}^n [u_k - v_l]}{\prod_{l \neq k} [u_k - u_l]} \frac{[v_j - u_k + t]}{[v_j - u_k]}, \quad \text{avec } t = \sum_{l=1}^n (u_l - v_l) + \gamma, \quad (4.54)$$

dont le déterminant est égal à

$$\det_n [\mathcal{X}'_t(\{u\}, \{v\})] = (-[0]')^n \frac{[\gamma]}{[t]} \prod_{j < k} \frac{[v_j - v_k]}{[u_j - u_k]}, \quad (4.55)$$

de telle sorte que l'identité de déterminants résultante de cette transformation est de la forme

$$\det_n [H_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)] = \frac{[|u| - |v| + \gamma]}{(-[0]')^n [\gamma]} \prod_{j < k} \frac{[u_j - u_k]}{[v_j - v_k]} \times \det_n [\mathcal{H}_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)], \quad (4.56)$$

avec

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)]_{jk} &= \delta_{jk} [0]' \frac{\prod_{l \neq j} [v_j - v_l]}{\prod_{l=1}^n [v_j - u_l]} \left\{ \prod_{l=1}^n \frac{[u_l - v_k + 1]}{[v_l - v_k + 1]} - \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^2 \prod_{l=1}^n \frac{[u_l - v_k - 1]}{[v_l - v_k - 1]} \right\} \\ &+ \frac{[0]'}{[|u| - |v| + \gamma]} \left\{ q^{-\nu} \frac{[v_j - v_k + |u| - |v| + \gamma + 1]}{[v_j - v_k + 1]} - q^\nu \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^2 \frac{[v_j - v_k + |u| - |v| + \gamma - 1]}{[v_j - v_k - 1]} \right\}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

En combinant toutes ces expressions, on obtient que le premier facteur de (3.69) est égal à,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \delta_s | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} &= \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^{s-2n} \frac{[s][|u| - |v| + \gamma]}{[0]'[|u| - |v| + \gamma + s]} \times \prod_{t=1}^n \frac{a(u_t)}{a(v_t)} \\ &\times \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} q^{\nu s} a_\gamma^{(\nu)}(s_0) \frac{\det_n [\mathcal{H}_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)]}{\det_n [\Phi(\{v\})]}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

*Remarque 12.* Dans le cas où  $\{u\} = \{v\}$ , l'expression (4.58) reste valide à condition de remplacer la matrice  $\mathcal{H}_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)$  (4.57) par la matrice de la "norme" déformée  $\Phi_\gamma^{(\nu)}(\{v\})$ , dont les éléments de matrice valent

$$\begin{aligned} [\Phi_\gamma^{(\nu)}(\{v\})]_{jk} &= \delta_{jk} \left\{ \log' \frac{a}{d}(v_j) + \sum_{t=1}^n \left( \frac{[v_j - v_k - 1]'}{[v_j - v_k - 1]} - \frac{[v_j - v_k + 1]'}{[v_j - v_k + 1]} \right) \right\} \\ &- \frac{[0]'}{[\gamma]} \left\{ q^\nu \frac{[v_j - v_k + \gamma - 1]}{[v_j - v_k - 1]} - q^{-\nu} \frac{[v_j - v_k + \gamma - 1]}{[v_j - v_k - 1]} \right\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

De plus, de manière analogue au calcul des éléments de matrice de l'opérateur  $\sigma_m^z$ , on effectue une transformation de Jacobi (A.23) pour exprimer (4.58) en fonction des racines de Bethe réelles  $\{x\}$  et  $\{y\}$ . La matrice (4.57) s'exprime après cette transformation comme,

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{H}}_\gamma^{(\nu)}]_{jk} &= \delta_{jk} \tilde{\eta} \theta'_1(0) \frac{\prod_{l \neq j} \theta_1(y_j - y_l)}{\prod_{l=1}^n \theta_1(y_j - x_l)} \left\{ q^{|x|-|y|} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k + \tilde{\eta})} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^2 q^{-|x|+|y|} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k - \tilde{\eta})} \right\} \\ &\quad + \frac{\tilde{\eta} \theta'_1(0)}{\theta_1(|x| - |y| + \tilde{\gamma})} \left\{ q^{-\nu+|x|-|y|+\tilde{\gamma}} \frac{\theta_1(y_j - y_k + |x| - |y| + \tilde{\gamma} + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k + \tilde{\eta})} \right. \\ &\quad \left. - q^{\nu-|x|+|y|-\tilde{\gamma}} \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^2 \frac{\theta_1(y_j - y_k + |x| - |y| + \tilde{\gamma} - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k - \tilde{\eta})} \right\}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Cette dernière admet une forme relativement compliquée, mais son comportement asymptotique en la taille du réseau est facilement calculable à l'aide des expressions (4.17), (4.38) et (4.39). Nous obtenons en effet,

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{H}}_\gamma^{(\nu)}]_{jk} &= -2i\pi\tilde{\eta}N \rho(y_k) e^{2i\pi(\eta-1)(|x|-|y|)} \left\{ \delta_{jk} + \frac{1}{N\rho(y_k)} K_{\tilde{\gamma}+|x|-|y|}^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)}(y_j - y_k) \right\} \\ &\quad + O(N^{-\infty}), \end{aligned} \quad (4.61)$$

où la fonction  $K_X^{(Y)}(z)$  est définie comme

$$K_X^{(Y)}(z) = \frac{i}{2\pi} \frac{\theta'_1(0)}{\theta_1(X)} \left\{ e^{2i\pi Y} \frac{\theta_1(z + X + \tilde{\eta})}{\theta_1(z + \tilde{\eta})} - e^{-2i\pi Y} \frac{\theta_1(z + X - \tilde{\eta})}{\theta_1(z - \tilde{\eta})} \right\}. \quad (4.62)$$

Avant de prendre la limite thermodynamique, rappelons que les états propres de Bethe sont identifiés à des états fondamentaux  $|\{u\}, \omega_u\rangle \equiv |\mathbf{k}_x, \ell_x\rangle$  et  $|\{v\}, \omega_v\rangle \equiv |\mathbf{k}_y, \ell_y\rangle$ , et qu'on a toujours  $k = k_y - k_x$ . Dans tout ce qui suit, nous notons alors  $\mathbb{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \mathbf{k}_x, \ell_x; \mathbf{k}_y, \ell_y)$  les éléments de matrice multi-points (3.67) entre les deux états fondamentaux précédents.

De plus, à la limite thermodynamique, le déterminant de (4.61) tend vers un déterminant de Fredholm,

$$\begin{aligned} \det_n [\tilde{\mathcal{H}}_\gamma^{(\nu)}(\{x\}, \omega_x; \{y\}, \omega_y)] &= \left( -2\pi i \tilde{\eta} N e^{2i\pi(\eta-1)(|x|-|y|)} \right)^n \prod_{l=1}^n \rho(y_l) \\ &\quad \times \left\{ \det \left[ 1 + \widehat{K}_{\tilde{\gamma}+|x|-|y|}^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)} \right] + O(N^{-\infty}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

où  $\widehat{K}_X^{(Y)}$  est un opérateur intégral agissant sur l'intervalle réel  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , et dont le noyau est donné par la fonction  $K_X^{(Y)}$  (4.62). Or, nous avons vu dans la section précédente qu'il en était de même pour le déterminant de la norme (4.32), de telle sorte que l'élément de matrice normalisé de  $\delta_s$  se ramène au calcul du quotient de déterminants de Fredholm suivant,

$$\mathbb{P}(\mathbf{s}; \mathbf{k}_x, \ell_x; \mathbf{k}_y, \ell_y) = \left( q^{-|x|+|y|-\tilde{\gamma}} \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^{\mathbf{s}} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}\mathbf{s})\theta_1(|x|-|y|+\tilde{\gamma})}{\tilde{\eta}\theta'_1(0)\theta_1(|x|-|y|+\tilde{\gamma}+\tilde{\eta}\mathbf{s})} \\ \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} q^{\nu\mathbf{s}} a^{(\nu)}(s_0) \frac{\det \left[ 1 + \widehat{K}_{\tilde{\gamma}+|x|-|y|}^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)} \right]}{\det \left[ 1 + \widehat{K} - \widehat{V}_0 \right]} + O(N^{-\infty}), \quad (4.64)$$

le facteur algébrique  $a^{(\nu)}(s_0)$  étant donné par (3.39).

Nous avons déjà obtenu une expression explicite pour le déterminant de la norme dans la partie précédente (4.44). Le déterminant de Fredholm (4.63) peut lui aussi être calculé explicitement par transformation de Fourier, les coefficients de Fourier de la fonction  $\widehat{K}_X^{(Y)}$  étant donnés par (toujours dans le régime principal),

$$\left( K_X^{(Y)} \right)_m = e^{2\pi i Y} \frac{e^{2\pi i m \tilde{\eta}}}{1 - e^{2\pi i (X+m\tilde{\tau})}} + e^{-2\pi i Y} \frac{e^{-2\pi i m \tilde{\eta}}}{1 - e^{-2\pi i (X+m\tilde{\tau})}}, \quad (4.65)$$

on obtient facilement que

$$\frac{\det \left[ 1 + \widehat{K}_{\tilde{\gamma}+|x|-|y|}^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)} \right]}{\det \left[ 1 + \widehat{K} - \widehat{V}_0 \right]} = \frac{1}{1-\eta} \frac{\theta_1((1-\eta)\tilde{\gamma} + \eta\nu; \tilde{\tau} - \tilde{\eta})}{\theta'_1(0; \tilde{\tau} - \tilde{\eta})} \frac{\theta'_1(0; \tilde{\tau})}{\theta_1(|x|-|y|+\tilde{\gamma}; \tilde{\tau})} \\ \times \frac{\theta_2(|x|-|y|+\eta(\tilde{\gamma}-\nu); \tilde{\eta})}{\theta_2(0; \tilde{\eta})}. \quad (4.66)$$

L'élément de matrice de  $\delta_{\mathbf{s}}$  dans la base des états propres de Bethe de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$  est finalement égal à

$$\mathbb{P}(\mathbf{s}; \mathbf{k}_x, \ell_x; \mathbf{k}_y, \ell_y) = e^{-i\pi\mathbf{s} \left( -\frac{r\mathbf{k}+2\ell}{L-r} + 2\eta\tilde{\gamma} \right)} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}\mathbf{s}; \tilde{\tau})}{\tilde{\eta}\theta_1\left( -\frac{L\mathbf{k}+2\ell}{2(L-r)} + \tilde{\gamma} + \tilde{\eta}\mathbf{s}; \tilde{\tau} \right)} \\ \times \frac{1}{L-r} \sum_{\nu=0}^{L-1} q^{\nu\mathbf{s}} a_{\tilde{\gamma}}^{(\nu)}(s_0) \frac{\theta_1((1-\eta)\tilde{\gamma} + \eta\nu; \tilde{\tau} - \tilde{\eta})}{\theta'_1(0; \tilde{\tau} - \tilde{\eta})} \frac{\theta_2\left( -\frac{L\mathbf{k}+2\ell}{2(L-r)} + \eta(\tilde{\gamma}-\nu); \tilde{\eta} \right)}{\theta_2(0; \tilde{\eta})}, \quad (4.67)$$

où nous avons exprimé  $|x|-|y|$  en fonction des deux nombres quantiques  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_y - \mathbf{k}_x$ ,  $\ell = \ell_y - \ell_x$  en vertu de (4.16). Bien sûr, (4.67) est valide quelque soit la valeur de  $\tilde{\gamma}$ , et ne nécessite plus d'être régularisée dans le cas où les deux états sont identiques.

Par ailleurs, il est clair que pour deux états fondamentaux de Bethe différents, la somme sur toutes les valeurs du paramètre dynamique de (4.67) doit s'annuler par orthogonalité des états de Bethe

$$\sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^L} \mathbb{P}(\mathbf{s}; \mathbf{k}_x, \ell_x; \mathbf{k}_y, \ell_y) = 0, \quad (4.68)$$

tandis que pour deux états identiques, la somme doit valoir 1 par normalisation,

$$\sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^L} \mathbb{P}(\mathbf{s}; \mathbf{k}_x, \ell_x; \mathbf{k}_x, \ell_x) = 1. \quad (4.69)$$

Cependant, à l'instar de ce qui se passe pour les éléments de matrice de l'opérateur  $\sigma^z$ , la base des états propres de Bethe de  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$  n'est ni physique, ni celle dans laquelle les éléments de matrice de  $\delta_s$  sont diagonaux : ces derniers sont non nuls uniquement en dehors de la diagonale. En effectuant alors le même changement de base (4.18) que précédemment, il est relativement facile de montrer que (4.68) et (4.69) sont vérifiées au moins dans la limite de basse température pour laquelle la période conjuguée  $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$ . De plus, en utilisant les identités de fonctions thêta (A.26), (A.27), et (A.28), on montre que les éléments de matrice de  $\delta_s$  sont bien diagonaux dans la base des états fondamentaux  $\{|\phi_g^{(\epsilon, t)}\rangle\}$ , ils coïncident en effet avec les probabilités de hauteurs locales, et s'expriment comme un quotient de fonctions thêta comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $|\phi_g^{(\epsilon_1, t_1)}\rangle$  et  $|\phi_g^{(\epsilon_2, t_2)}\rangle$  deux états fondamentaux de la forme (4.18) paramétrés par des entiers  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}/(L-r)\mathbb{Z}$ . La probabilité de hauteur locale entre deux états fondamentaux du modèle SOS cyclique périodique est diagonale,*

$$\langle \phi_g^{(\epsilon_1, t_1)} | \delta_s | \phi_g^{(\epsilon_2, t_2)} \rangle = \delta_{\epsilon_1, \epsilon_2} \delta_{t_1, t_2} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}; \epsilon_1, t_1) + O(N^{-\infty}), \quad (4.70)$$

avec

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}; \epsilon, t) = \sum_{k=0}^1 \sum_{\ell=0}^{L-r-1} (-1)^{k\epsilon} e^{-i\pi \frac{rk+2\ell}{L-r} (t+s_0)} \mathbb{P}(\mathbf{s}; \mathbf{k}_x, \ell_x; \mathbf{k}_y, \ell_y), \quad (4.71)$$

et l'on montre à partir des identités sur les fonctions thêta de l'appendice A que, en termes de la période imaginaire  $\tau$ ,

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}; \epsilon, t) \Big|_{\substack{L \text{ pair} \\ \epsilon+t+s_0-s \text{ impair}}} = 0, \quad (4.72)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}; \epsilon, t) \Big|_{\substack{L \text{ pair} \\ \epsilon+t+s_0-s \text{ pair}}} = 2 \frac{\theta_4\left(\frac{r\tilde{s}}{L}; \tau\right) \theta_3\left(\frac{\tilde{s}_0+t}{L-r} - \frac{\tilde{s}}{2L}; \frac{\tau}{r(L-r)}\right)}{L \theta_4\left(0; \frac{L}{r}\tau\right) \theta_4\left(\frac{r(\tilde{s}_0+t)}{L-r}; \frac{L}{L-r}\tau\right)}, \quad (4.73)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}; \epsilon, t) \Big|_{L \text{ impair}} = \frac{\theta_4\left(\frac{r\tilde{s}}{L}; \tau\right) \theta_3\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2L}\right)\tilde{s} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(L-r)}\right)(\tilde{s}_0 + t) - \frac{\epsilon}{2}; \frac{\tau}{4r(L-r)}\right)}{L \theta_4\left(0; \frac{L}{r}\tau\right) \theta_4\left(\frac{r(\tilde{s}_0+t)}{L-r}; \frac{L}{L-r}\tau\right)}, \quad (4.74)$$

où nous avons posé  $\tilde{s} = s - \frac{\tau}{2\eta} = s + \frac{1}{2\tilde{\eta}}$ , i.e.  $\tilde{s}_0 = s_0 + \frac{1}{2\tilde{\eta}}$  avec  $\tilde{s}_0 \in \mathbb{R}$  pour être en accord avec le modèle physique considéré dans [170, 171].

L'expression ainsi obtenue pour la probabilité de hauteur locale est à la fois entièrement explicite, et relativement simple. En effet, la base (4.18) permet d'une part de diagonaliser l'opérateur  $\delta_s$ , et d'autre part d'exprimer les probabilités résultantes comme un unique quotient de fonctions thêta. Notons finalement que les expressions ci-dessus coïncident avec celles obtenues dans [136, 170, 171].

### 4.3 Calcul des probabilités de hauteurs locales multi-points

Dans les parties précédentes, nous nous sommes intéressés à deux familles de fonctions de corrélation les plus simples que sont les polarisations spontanées et les probabilités de hauteurs locales. Des expressions entièrement explicites ont été obtenues pour ces quantités en volume infini, le passage à la limite thermodynamique ayant permis de résoudre les équations de Bethe pour les états fondamentaux du modèle SOS cyclique périodique. L'objet de cette partie est d'obtenir une expression, à la limite thermodynamique, pour les probabilités de hauteurs locales multi-points, directement à partir des éléments de matrice multi-points  $\mathbb{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)$  (3.67) calculé dans la base des états propres de Bethe. La représentation que nous obtenons pour ces quantités est loin d'être entièrement explicite, ces dernières s'exprimant comme un unique terme d'intégrales multiples à l'instar des blocs élémentaires de la chaîne de spins XXZ, mais elle constitue néanmoins un premier pas dans l'étude des fonctions de corrélation générales à  $m$  points du modèle SOS cyclique. Nous référons à l's pour le détail des calculs.

#### 4.3.1 Calcul des éléments de matrice multi-points en volume fini

En volume fini, la résolution du problème inverse quantique (3.9) et l'expression des états propres de Bethe (2.46)-(2.50), (2.54)-(2.55), ramène la détermination de l'action du produit d'opérateurs locaux successifs intervenant dans les éléments de matrice multi-points (3.67), aux relations de commutation de l'algèbre de Yang-Baxter (2.26),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) &= \frac{\omega_v^{\mathbf{s} + \alpha_1, \dots, \alpha_m}}{\omega_u^{\mathbf{s}}} \prod_{j=1}^n \frac{[\mathbf{s} + j - 1]}{[\mathbf{s} + \alpha_1, \dots, \alpha_m - j]} \prod_{j=1}^m \tau^{-1}(\xi_j; \{v\}, \omega_v) \\ &\times \frac{\langle 0 | \hat{C}(u_1) \dots \hat{C}(u_n) \delta_{\mathbf{s}} \hat{T}_{\alpha_1 \alpha_1}(\xi_1) \dots \hat{T}_{\alpha_m \alpha_m}(\xi_m) \hat{B}(v_n) \dots \hat{B}(v_1) | 0 \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} \\ &\times \left( \frac{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle} \right)^{1/2}, \quad (4.75) \end{aligned}$$

le terme de droite ayant déjà été calculé (3.60).

Dans tout ce qui suit, nous utilisons la notation simplifiée  $\alpha_{i, \dots, j} = \sum_{l=i}^j \alpha_l$  pour  $i < j$ , avec bien sûr  $\alpha_i = \pm 1$  pour  $i = 1, \dots, m$ . De plus, l'action multiple des éléments de matrice  $\hat{T}_{\alpha_i \alpha_i}(\xi_i)$  sur l'état de droite  $\hat{B}(v_n) \dots \hat{B}(v_1) | 0 \rangle$  dans (4.75) se calcule à partir des relations de commutation quadratiques données par la matrice  $R$ , et ce de manière analogue à ce qui a été fait dans [126]. En particulier, en utilisant les relations de commutation multiples (2.48), (2.49), et en définissant les ensembles d'indices suivants,

$$\alpha_- = \{j : 1 \leq j \leq m, \alpha_j = -1\} = \{i_p\}_{p \in \{1, \dots, |\alpha_-|\}} \quad \text{avec } i_k < i_l \text{ si } k < l \leq |\alpha_-|, \quad (4.76)$$

$$\alpha_+ = \{j : 1 \leq j \leq m, \alpha_j = 1\} = \{i_p\}_{p \in \{|\alpha_-|+1, \dots, m\}} \quad \text{avec } i_k > i_l \text{ si } |\alpha_-| < k < l, \quad (4.77)$$

où  $|\alpha_-|$  dénote le cardinal de  $\alpha_-$ , nous obtenons que l'action d'un produit de générateur de l'algèbre de Yang-Baxter sur un état généré par un produit d'opérateurs  $\hat{B}$  est

$$\hat{T}_{\alpha_1 \alpha_1}(\xi_1) \dots \hat{T}_{\alpha_m \alpha_m}(\xi_m) \prod_{j=1}^n \hat{B}(v_j) |0\rangle = \sum_{\{b_p\}} F_{\{b_p\}}(\hat{s}; \{v\}, \{\xi\}) \prod_{k=1}^n \hat{B}(v_{b_{m+k}}) |0\rangle. \quad (4.78)$$

Dans (4.78), les sommes opèrent sur tous les ensembles de  $m$  indices  $b_1, \dots, b_m$  tels que

$$\begin{cases} b_p \in \{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, \dots, b_{p-1}\} & \text{pour } 1 \leq p \leq |\alpha_-|, \\ b_p \in \{1, \dots, n + m + 1 - i_p\} \setminus \{b_1, \dots, b_{p-1}\} & \text{pour } |\alpha_-| < p \leq m. \end{cases} \quad (4.79)$$

Par soucis de simplicité, nous avons également posé  $v_{n+j} = \xi_{m+1-j}$  et

$$\{1, \dots, n + m\} \setminus \{b_1, \dots, b_m\} = \{b_{m+1}, \dots, b_{m+n}\}. \quad (4.80)$$

L'expression explicite du facteur algébrique  $F_{\{b_p\}}(\hat{s}; \{v\}, \{\xi\}) \equiv F_{\{b_1, \dots, b_m\}}(\hat{s}; \{v_1, \dots, v_n\}, \{\xi_1, \dots, \xi_m\})$  est la suivante :

$$\begin{aligned} F_{\{b_p\}}(\hat{s}; \{v\}, \{\xi\}) &= (-\omega_v^2)^{|\alpha_-|} \prod_{j=1}^m \left\{ a(v_{b_j}) \frac{\prod_{k=1}^n [v_k - v_{b_j} + 1]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq b_j}}^n [v_k - v_{b_j}]} \frac{[\hat{s} + \alpha_{1, \dots, i_j-1} + v_{b_j} - \xi_{i_j}]}{[\hat{s} + \alpha_{1, \dots, i_j-1}]} \right\} \\ &\times \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{[v_{b_i} - v_{b_j}]}{[v_{b_i} - v_{b_j} + 1]} \prod_{p=1}^{|\alpha_-|} \frac{\prod_{k=i_p+1}^m [\xi_k - v_{b_p} - 1]}{\prod_{k=i_p}^m [\xi_k - v_{b_p}]} \prod_{p=|\alpha_-|+1}^m \frac{\prod_{k=i_p+1}^m [\xi_k - v_{b_p} + 1]}{\prod_{\substack{k=i_p \\ k \neq n+m+1-b_p}}^m [\xi_k - v_{b_p}]} \\ &\times \prod_{j \in \alpha_-} \frac{[\hat{s} + \alpha_{1, \dots, j-1} - n - 1]}{[\hat{s} + \alpha_{1, \dots, j-1} - 1]} \prod_{j \in \alpha_+} \frac{[\hat{s} + \alpha_{1, \dots, j-1}]}{[\hat{s} + \alpha_{1, \dots, j-1} - n]}. \quad (4.81) \end{aligned}$$

Ainsi, (4.75) se réécrit comme

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) &= \frac{1}{L} \frac{\omega_v^{\mathbf{s} + \alpha_1, \dots, m}}{\omega_u^{\mathbf{s}}} \prod_{j=1}^n \frac{[\mathbf{s} + j - 1]}{[\mathbf{s} + \alpha_1, \dots, m - j]} \prod_{j=1}^m \tau^{-1}(\xi_j; \{v\}, \omega_v) \\ &\times \sum_{\{b_p\}} F_{\{b_p\}}(\mathbf{s}; \{v\}, \{\xi\}) \frac{S_n(\{u\}, \{v_{b_{m+k}}\}; \mathbf{s})}{(\langle \{u\}, \omega_u \mid \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}, \omega_v \mid \{v\}, \omega_v \rangle)^{1/2}}, \quad (4.82) \end{aligned}$$

en fonction des produits scalaires partiels  $S_n(\{u\}, \{v_{b_{m+k}}\}; \mathbf{s})$  (3.15) associés aux ensembles de variables  $\{u\} \equiv \{u_j\}_{1 \leq j \leq n}$  et  $\{v_{b_{m+k}}\} \equiv \{v_{b_{m+k}}\}_{1 \leq k \leq n}$ . Or, nous avons vu que pour le modèle cyclique, ces produits scalaires partiels peuvent toujours être exprimés comme une somme de  $L$  déterminants  $\Omega_{\gamma}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v_{b_{m+k}}\})$  (3.37), (3.38) du même type que (3.41), mais déformés par  $q^{\pm \nu}$ . L'ensemble de paramètres  $\{v_{b_{m+k}}\}$  contenant au plus  $m$  paramètres d'inhomogénéités, il y a au moins  $n - m$  colonnes de  $\Omega_{\gamma}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v_{b_{m+k}}\})$  qui sont proportionnelles à (3.73),

tandis que les colonnes restantes sont du même type que la matrice  $Q$  (3.59), mais également déformées par  $q^{-\nu}$ . De manière plus explicite,

$$\det_n [\Omega_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v_{b_{m+k}}\})] = \prod_{k=1}^n \left\{ a(v_{b_{m+k}}) \prod_{l=1}^n [v_l - v_{b_{m+k}} + 1] \right\} \\ \times \det_n [H_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \{v_{b_{m+k}}\})], \quad (4.83)$$

avec bien sûr

$$\left[ H_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \{v_{b_{m+k}}\}) \right]_{jk} \\ = \begin{cases} \left[ H_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) \right]_{jb_{m+k}} & \text{cf (3.73)} & \text{si } b_{m+k} \leq n, \\ \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_j - v_{b_{m+k}} + \gamma]}{[u_j - v_{b_{m+k}}]} - q^{-\nu} \frac{[u_j - v_{b_{m+k}} + \gamma + 1]}{[u_j - v_{b_{m+k}} + 1]} \right\} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_{b_{m+k}} + 1]}{[v_t - v_{b_{m+k}} + 1]} & \text{si } b_{m+k} > n, \end{cases} \quad (4.84)$$

Les facteurs de normalisation  $\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle$  et  $\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle$  s'expriment quant à eux toujours en fonction d'un unique déterminant (3.43)-(3.44).

Les deux états fondamentaux que l'on considère étant différents, il est à nouveau commode d'introduire une partie du facteur algébrique dans le déterminant (4.84), en utilisant une fois encore la transformation induite par la même matrice  $\mathcal{X}'_t$  (4.54) intervenant dans la simplification du déterminant de l'élément de matrice de  $\delta_s$  (4.56). Or, la matrice (4.84) qui intervient dans l'expression des éléments de matrice à  $m$  points contient (au plus)  $n - m$  colonnes identiques à celles de la matrice intervenant dans le calcul de l'élément de matrice de  $\delta_s$ , ses colonnes se transforment par conséquent comme (4.56). Le produit de (4.54) avec les (au plus)  $m$  colonnes restantes se différenciant de (3.73), est simplifiable à l'aide du théorème de résidus, de telle sorte que l'on obtient l'identité de déterminant suivante :

$$\det_n [H_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \{v_{b_{m+k}}\})] = \frac{[|u| - |v| + \gamma]}{(-[0]')^n [\gamma]} \prod_{j < k} \frac{[u_j - u_k]}{[v_j - v_k]} \\ \times \det_n [\mathcal{H}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \{v_{b_{m+k}}\})], \quad (4.85)$$

où la matrice résultante est égale à

$$\left[ \mathcal{H}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \{v_{b_{m+k}}\}) \right]_{jk} \\ = \begin{cases} \left[ \mathcal{H}_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) \right]_{jb_{m+k}} & \text{si } b_{m+k} \leq n, \\ \left[ \mathcal{Q}_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \{v\} | \{\xi\}) \right]_{j, n+m+1-b_{m+k}} & \text{si } b_{m+k} > n, \end{cases} \quad (4.86)$$

avec  $\mathcal{H}_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)$  toujours donné par (4.57) et

$$\left[ \mathcal{Q}_\gamma^{(\nu)}(\{u\}, \{v\} | \{\xi\}) \right]_{jk} = \frac{[0]'}{[|u| - |v| + \gamma]} \left\{ q^{-\nu} \frac{[v_j - \xi_k + |u| - |v| + \gamma + 1]}{[v_j - \xi_k + 1]} \right. \\ \left. - \frac{[v_j - \xi_k + |u| - |v| + \gamma]}{[v_j - \xi_k]} \prod_{l=1}^n \frac{[v_l - \xi_k][u_l - \xi_k + 1]}{[u_l - \xi_k][v_l - \xi_k + 1]} \right\}. \quad (4.87)$$

Le déterminant du numérateur de (4.82) est par conséquent un déterminant du même type que celui intervenant dans l'élément de matrice de  $\delta_s$  (4.57) dans lequel  $m$  colonnes ont été échangées.

Ainsi, en combinant toutes les expressions précédentes en plus de la représentation pour la "norme" (3.43), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{\langle \{u\}, \omega_u \mid \delta_s E_1^{\alpha_1 \alpha_1} \dots E_m^{\alpha_m \alpha_m} \mid \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v \mid \{v\}, \omega_v \rangle} &= \sum_{\{b_p\}} (-1)^{|\alpha_-| + mn + \epsilon(b)} G_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(s; \{v_{b_p}\}, \{\xi\}) \\ &\times \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^{s-2n} \frac{[s][|u| - |v| + \gamma]}{[0]'[|u| - |v_{b_{m+k}}| + \gamma + s]} \times \prod_{t=1}^n \frac{a(u_t)}{a(v_t)} \\ &\times \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} q^{\nu s} a_{\gamma}^{(\nu)}(s_0) \frac{\det_n [\mathcal{H}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v \mid \{v_{b_{m+k}}\})]}{\det_n [\Phi(\{v\})]}, \quad (4.88) \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{H}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}$  donné par (4.86),  $\Phi$  par (3.44), et  $a_{\gamma}^{(\nu)}(s_0)$  par (3.39). La somme opère sur tous les ensembles de  $m$  indices  $b_1, \dots, b_m$  satisfaisant à la condition (4.79). Les différents ensembles de paramètres impliqués dans l'expression (4.88) doivent être compris comme :  $\{u\} \equiv \{u_j\}_{1 \leq j \leq n}$ ,  $\{v\} \equiv \{v_j\}_{1 \leq j \leq n}$ ,  $\{v_{b_p}\} \equiv \{v_{b_p}\}_{1 \leq p \leq m}$ ,  $\{\xi\} = \{\xi_p\}_{1 \leq p \leq m}$  et  $\{v_{b_{m+k}}\} \equiv \{v_{b_{m+k}}\}_{1 \leq k \leq n} = \{v\} \cup \{\xi\} \setminus \{v_{b_p}\}$ . De plus, nous avons posé  $|u| = u_1 + \dots + u_n$ ,  $|v| = v_1 + \dots + v_n$ ,  $|v_{b_{m+k}}| = v_{b_{m+1}} + \dots + v_{b_{m+n}}$ , de telle sorte que  $|v_{b_{m+k}}| = |v| + |\xi| - |v_{b_p}|$ , avec  $|\xi| = \xi_1 + \dots + \xi_m$  et  $|v_{b_p}| = v_{b_1} + \dots + v_{b_n}$ , tandis que  $\epsilon(b)$  indique le nombre d'inversions de la permutation  $j \mapsto b_j$ ,  $1 \leq j \leq n + m$ . Le facteur algébrique  $G_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(s; \{v_{b_p}\}, \{\xi\})$  admet en fait une partie identique au facteur algébrique intervenant des blocs élémentaires à  $m$  points de la chaîne de spins XXZ [126], mais il contient également une partie dynamique propre au modèle SOS.

En particulier, dans le cas où  $m = 0$ , on retrouve bien l'expression (4.58) pour l'élément de matrice de  $\delta_s$ , et pour lequel la matrice intervenant au numérateur coïncide avec (4.57). Avant de traiter la limite thermodynamique de (4.88), faisons quelques remarques.

Une première remarque est de constater que les sommes sur les indices  $\{b_p\}$  sont similaires aux sommes intervenant dans le calcul des blocs élémentaires à  $m$  points de la chaîne XXZ, et doivent par conséquent se traiter de manière analogue en vertu des propositions (4.14), (4.15) sur les corrections de tailles finies. La somme sur le paramètre  $\nu$ , ce dernier déformant le déterminant du numérateur de (4.88) par  $q^{\pm \nu}$  (ce qui rend compte de la cyclicité du modèle), ne pose elle aussi aucune difficulté pour le passage à la limite thermodynamique, son nombre de termes restant fini.

Rappelons de plus que le déterminant de (4.86) est un déterminant du même type que (4.57) mais dont  $m$  de ses colonnes ont été échangées. Or, à la limite thermodynamique, nous avons vu que (4.57) tend vers un déterminant de Fredholm explicitement calculable. C'est d'ailleurs ce qui nous a permis d'obtenir une expression entièrement explicite pour la probabilité de hauteur locale. Toutefois, le déterminant (4.86) ne tend pas vers un déterminant de Fredholm justement à cause des  $m$  colonnes échangées. En remarquant que la matrice (4.57) est une matrice inversible, il est néanmoins toujours possible d'écrire

$$\begin{aligned} \det_n [\mathcal{H}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}] &= \det_n [\mathcal{H}_{\gamma}^{(\nu)}] \cdot \det_n \left[ \left( \mathcal{H}_{\gamma}^{(\nu)} \right)^{-1} \cdot \mathcal{H}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)} \right] \\ &= (-1)^{m(n+1) + \frac{m(m-1)}{2} + \epsilon(b)} \det_n [\mathcal{H}_{\gamma}^{(\nu)}] \cdot \det_m [\mathcal{S}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}], \quad (4.89) \end{aligned}$$

de telle sorte que, à la limite thermodynamique, le premier terme tend vers le déterminant de Fredholm de l'élément de matrice de  $\delta_s$  dont on connaît d'ores et déjà une expression explicite, tandis que le second terme se ramène au calcul du déterminant d'une matrice  $\mathcal{S}_{\gamma;\{b_p\}}^{(\nu)}$  de taille (au plus)  $m \times m$  :

$$[\mathcal{S}_{\gamma;\{b_p\}}^{(\nu)}]_{jk} = \begin{cases} [(\mathcal{H}_\gamma^{(\nu)})^{-1} \cdot \mathcal{Q}_\gamma^{(\nu)}]_{b_j k} & \text{si } b_j \leq n, \\ -\delta_{n+m+1-b_j, k} & \text{si } b_j > n. \end{cases} \quad (4.90)$$

Le passage à la limite thermodynamique de (4.88), que l'on traite dans la partie suivante, se ramène ainsi en la détermination de la matrice  $\mathcal{S}_{\gamma;\{b_p\}}^{(\nu)}$ .

### 4.3.2 Vers la limite thermodynamique

Nous allons maintenant étudier le passage à la limite thermodynamique des expressions précédentes, lorsque les deux états propres de Bethe  $|\{u\}, \omega_u\rangle$  et  $|\{v\}, \omega_v\rangle$  coïncident avec deux des  $2(L-r)$  états fondamentaux du modèle SOS, respectivement paramétrés par les nombres quantiques  $k_x, \ell_x$ , et  $k_y, \ell_y$ . Par soucis de commodité et comme nous l'avons déjà fait pour les polarisations spontanées et la probabilité de hauteur locale, nous effectuons une transformation de Jacobi (A.23) dans l'optique d'exprimer les expressions précédentes en termes de racines de Bethe réelles  $x_j \equiv \tilde{\eta}u_j$ ,  $y_j \equiv \tilde{\eta}v_j$ , pour  $j = 1, \dots, n$ , et des paramètres d'inhomogénéités  $\zeta_j = \tilde{\eta}\xi_j$  pour  $j = 1, \dots, m$ .

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\langle k_x, \ell_x | \delta_s E_1^{\alpha_1 \alpha_1} \dots E_m^{\alpha_m \alpha_m} | k_y, \ell_y \rangle}{\langle k_y, \ell_y | k_y, \ell_y \rangle} &= (-1)^{|\alpha_+|} \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^{s-2n} \sum_{\{b_p\}} \tilde{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \{y_{b_p}\}, \{\zeta\}) \\ &\times q^{-\mathbf{s}(|x|-|y|+\tilde{\gamma})} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}\mathbf{s}) \theta_1(|x|-|y|+\tilde{\gamma})}{\tilde{\eta} \theta'_1(0) \theta_1(|x|-|y_{b_{m+k}}|+\tilde{\gamma}+\tilde{\eta}\mathbf{s})} \times e^{-2i\pi n \frac{\eta}{\tilde{\eta}}(|y_t^2|-|x_t^2|_n)} e^{-2i\pi n \eta(|y_t|-|x_t|)} \\ &\times \prod_{t=1}^n \frac{\theta_1(x_t + \frac{\tilde{\eta}}{2})^{2n}}{\theta_1(y_t + \frac{\tilde{\eta}}{2})^{2n}} \times \frac{1}{L} \sum_{\nu=0}^{L-1} q^{\nu \mathbf{s}} a_\gamma^{(\nu)}(s_0) \frac{\det_n [\tilde{\mathcal{H}}_\gamma^{(\nu)}(\{x\}, \omega_x; \{y\}, \omega_y)]}{\det_n [\tilde{\Phi}(\{y\})]} \det_m [\tilde{\mathcal{S}}_{\gamma;\{b_p\}}^{(\nu)}], \end{aligned} \quad (4.91)$$

où le facteur algébrique prend sa forme définitive

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \{y_{b_p}\}, \{\zeta\}) &= \prod_{j=1}^m \left\{ \frac{\theta_1(\tilde{\eta}(\mathbf{s} + \alpha_{1, \dots, i_j-1}) + y_{b_j} - \zeta_{i_j})}{\theta_1(\tilde{\eta}(\mathbf{s} + \alpha_{1, \dots, i_j-1}))} \right\} \\ &\times \prod_{j < k}^m \frac{1}{\theta_1(\zeta_k - \zeta_j)} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m \frac{1}{\theta_1(y_{b_i} - y_{b_j} + \tilde{\eta})} \\ &\times \prod_{p=1}^m \left\{ \prod_{k=1}^{i_p-1} \theta_1(\zeta_k - y_{b_p}) \prod_{k=i_p+1}^m (\theta_1(\zeta_k - y_{b_p} + \tilde{\eta}\alpha_{i_p})) \right\}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

De plus, le premier quotient de déterminants intervenant dans (4.91) coïncide avec celui intervenant dans l'élément de matrice de  $\delta_s$ , et pour lequel une expression explicite en termes

de déterminants de Fredholm a été obtenue à la limite homogène. La généralisation inhomogène de ce calcul ne pose aucune difficulté, la seule différence réside dans la substitution des densités  $\rho$  par leur analogue inhomogène  $\rho_{\text{tot}}$  (4.23) dans (4.63) et (4.32), de telle sorte que (4.66) soit inchangé. La partie relative à l'élément de matrice de  $\delta_s$  s'extrait par conséquent du déterminant de taille  $m \times m$  résultant du produit de (4.57) par les (au plus)  $m$  colonnes échangées de (4.86), dont la matrice  $\tilde{\mathcal{S}}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)}$  est donnée par

$$\left[ \tilde{\mathcal{S}}_{\gamma; \{b_p\}}^{(\nu)} \right]_{jk} = \begin{cases} \left[ \tilde{\mathcal{S}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{y\}, \{\zeta\}) \right]_{b_j, k} & \text{si } b_j \leq n, \\ -\delta_{n+m-1-b_j, k} & \text{si } b_j > n, \end{cases} \quad (4.93)$$

en fonction de ses éléments de matrice  $\tilde{\mathcal{S}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{y\}, \{\zeta\})$ . Ces derniers, en vertu de (4.89)-(4.90), sont solutions de l'équation suivante :

$$\sum_{b=1}^n \left[ \tilde{\mathcal{H}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{x\}, \omega_x; \{y\}, \omega_y) \right]_{jb} \cdot \left[ \tilde{\mathcal{S}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{y\}, \{\zeta\}) \right]_{bk} = \left[ \tilde{\mathcal{Q}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{x\}, \{y\} | \{\zeta\}) \right]_{jk}, \quad (4.94)$$

avec la matrice  $\tilde{\mathcal{Q}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{x\}, \{y\} | \{\zeta\})$  s'exprimant comme suit,

$$\left[ \tilde{\mathcal{Q}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{x\}, \{y\} | \{\zeta\}) \right]_{jk} = \frac{\tilde{\eta} \theta'_1(0) q^{|x|-|y|}}{\theta_1(|x|-|y|+\tilde{\gamma})} \left\{ q^{-\nu+\tilde{\gamma}} \frac{\theta_1(y_j - \zeta_k + |x| - |y| + \tilde{\gamma} + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - \zeta_k + \tilde{\eta})} - \frac{\theta_1(y_j - \zeta_k + |x| - |y| + \tilde{\gamma})}{\theta_1(y_j - \zeta_k)} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(y_l - \zeta_k) \theta_1(x_l - \zeta_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(x_l - \zeta_k) \theta_1(y_l - \zeta_k + \tilde{\eta})} \right\}, \quad (4.95)$$

et  $\tilde{\mathcal{H}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{x\}, \omega_x; \{y\}, \omega_y)$  est toujours donné par (4.60). A la limite thermodynamique, comme

$$\prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(y_l - \zeta_k) \theta_1(x_l - \zeta_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(x_l - \zeta_k) \theta_1(y_l - \zeta_k + \tilde{\eta})} = e^{-2i\pi(|x|-|y|)} + O(N^{-\infty}), \quad (4.96)$$

les éléments de matrice de (4.95) tendent vers

$$\left[ \tilde{\mathcal{Q}}_{\gamma}^{(\nu)}(\{x\}, \{y\} | \{\zeta\}) \right]_{jk} = -2\pi i \tilde{\eta} e^{2\pi i(\eta-1)(|x|-|y|)} t_{\tilde{\gamma}+|x|-|y|}^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)}(y_j, \zeta_k) + O(N^{-\infty}), \quad (4.97)$$

où l'on a défini la fonction  $t_X^{(Y)}(z, \zeta_j)$ , pour tout  $X, Y$ , comme

$$t_X^{(Y)}(z, \zeta_j) = \frac{i}{2\pi} \frac{\theta'_1(0)}{\theta_1(X)} \left\{ e^{2i\pi Y} \frac{\theta_1(z - \zeta_j + X + \tilde{\eta})}{\theta_1(z - \zeta_j + \tilde{\eta})} - \frac{\theta_1(z - \zeta_j + X)}{\theta_1(z - \zeta_j)} \right\}, \quad (4.98)$$

et dont les coefficients de Fourier sont donnés, dans le régime principal et pour  $0 < \Im \zeta_j < \Im \tilde{\eta} < \Im \tilde{\tau}$  par,

$$\begin{aligned} \left( t_X^{(Y)}(\zeta_j) \right)_m &= \int_{-1/2}^{1/2} t_X^{(Y)}(z, \zeta_j) e^{-2\pi i m z} dz \\ &= e^{-2\pi i m \zeta_j} \left\{ e^{2\pi i Y} \frac{e^{2\pi i m \tilde{\eta}}}{1 - e^{2\pi i(X+m\tilde{\tau})}} + \frac{1}{1 - e^{-2\pi i(X+m\tilde{\tau})}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

C'est ce qui nous permet de montrer que, à la limite thermodynamique, l'équation (4.94) tend vers une équation intégrale, qui est en fait un analogue modifié de l'équation intégrale intervenant dans la simplification des déterminants pour les blocs élémentaires à  $m$  points de la chaîne de spins XXZ [126]. Dans ce dernier cas, la solution à cette équation intégrale s'exprime comme un quotient des densités des racines de Bethe. Pour le modèle SOS cyclique ci-dessus, on montre que la solution s'exprime également comme un quotient de densités de racines de Bethe, mais la densité du numérateur est modifiée par une fonction du paramètre  $\nu$  et de la différence des racines  $|x| - |y|$ . On peut toujours réexprimer ce quotient de densités comme

$$[\tilde{\mathcal{S}}_\gamma^{(\nu)}(\{y\}, \{\zeta\})]_{jk} = \frac{1}{N \rho_{\text{tot}}(y_j)} S^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)}(y_j - \zeta_k) + O(N^{-\infty}), \quad (4.100)$$

avec

$$S^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\theta'_1(0; \tilde{\eta}) \theta_2(z + \eta(\tilde{\gamma} - \nu) + |x| - |y|; \tilde{\eta})}{\theta_2(\eta(\tilde{\gamma} - \nu) + |x| - |y|; \tilde{\eta}) \theta_1(z; \tilde{\eta})}. \quad (4.101)$$

Par ailleurs, nous aurons besoin du calcul du déterminant des éléments de matrice de (4.101),

$$\det_{1 \leq j, k \leq m} [S^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)}(z_j - \zeta_k)] = \frac{\theta_2(|z| - |\zeta| + |x| - |y| + \eta(\tilde{\gamma} - \nu); \tilde{\eta})}{\theta_2(|x| - |y| + \eta(\tilde{\gamma} - \nu); \tilde{\eta})} \bar{\mathcal{S}}_m(\{z\}; \{\zeta\}),$$

qui se réécrit en fonction d'une partie indépendante de  $\tilde{\gamma}$ ,  $\nu$ , et des deux états fondamentaux  $(\{x\}, \omega_x)$  et  $(\{y\}, \omega_y)$  comme :

$$\bar{\mathcal{S}}_m(\{z\}; \{\zeta\}) = \left( \frac{\theta'_1(0; \tilde{\eta})}{2\pi i} \right)^m \frac{\prod_{i < j} \theta_1(z_i - z_j; \tilde{\eta}) \theta_1(\zeta_j - \zeta_i; \tilde{\eta})}{\prod_{i, j=1}^m \theta_1(z_i - z_j)}. \quad (4.102)$$

### 4.3.3 Probabilités de hauteurs locales multi-points

Nous disposons à présent de tous les ingrédients nécessaires au passage à la limite thermodynamique des éléments de matrice multi-points normalisées (3.67). En fait, à l'instar de ce qui se passe pour la chaîne de spins XXZ [126], les sommes sur les racines de Bethe et sur les paramètres d'inhomogénéités résultant de l'action des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter sur l'état de Bethe peuvent être étendues : les sommes sur les indices  $\{b_j\}$  soumises aux conditions (4.79) s'étendent à des sommes sur les indices  $b_j = 1, \dots, n$  si  $j \leq |\alpha_-|$ , et sur les  $b_j = 1, \dots, n + m$  si  $j > |\alpha_-|$ , à cause de l'annulation des termes ne satisfaisant pas aux conditions (4.79). De plus, à l'aide de la proposition sur les corrections de tailles finies 4.1.1, on montre que les sommes sur les racines de Bethe (c'est-à-dire sur les  $b_j$  compris entre 1 et  $n$ ) deviennent des intégrales, tandis que celles sur les  $b_j > n$  deviennent des intégrales de contour en vertu de

$$2i\pi \operatorname{Res} \left[ S^{(\eta(\tilde{\gamma}-\nu)+|x|-|y|)}(z) \right]_{z=0} = 1. \quad (4.103)$$

Dès lors, en utilisant tous les résultats précédents, (3.67) est égal à la limite thermodynamique à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \mathbf{k}_x, \ell_x; \mathbf{k}_y, \ell_y) &= (-1)^{|\alpha_+|} \int_{\tilde{\mathcal{C}}_-} \prod_{j=1}^{|\alpha_-|} dz_j \int_{\tilde{\mathcal{C}}_+} \prod_{j=|\alpha_-|+1}^m dz_j \tilde{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \{z\}, \{\zeta\}) \\ &\quad \times \bar{\mathcal{S}}_m(\{z\}; \{\zeta\}) \bar{\mathbb{P}}(\mathbf{s}, |z| - |\zeta|; \mathbf{k}, \ell) + O(N^{-\infty}), \end{aligned} \quad (4.104)$$

où nous avons séparé dans (4.104) la partie purement algébrique, qui découle des relations de commutation de l'algèbre de Yang-Baxter, avec la partie analytique encodant l'information sur les états fondamentaux que l'on considère. Les contours d'intégration dans (4.104) sont les suivants :

$$\mathcal{C}_- = [-1/2, 1/2], \quad (4.105)$$

$$\mathcal{C}_+ = \mathcal{C}_- \cup \Gamma(\{\xi\}), \quad (4.106)$$

où  $\Gamma(\{\xi\})$  entoure les  $\xi_1, \dots, \xi_m$  avec un indice 1, les autres pôles de l'intégrande étant tous en dehors de ce contour, tandis que la partie analytique est finalement égale à

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(\mathbf{s}, Z; \mathbf{k}, \ell) &= e^{-i\pi\mathbf{s} \left( -\frac{rk+2\ell}{L-r} + 2\eta\tilde{\gamma} \right)} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}\mathbf{s}; \tilde{\tau})}{\tilde{\eta} \theta_1 \left( Z - \frac{Lk+2\ell}{2(L-r)} + \tilde{\gamma} + \tilde{\eta}\mathbf{s}; \tilde{\tau} \right)} \\ &\times \frac{1}{L-r} \sum_{\nu=0}^{L-1} q^{\nu\mathbf{s}} a_{\gamma}^{(\nu)}(s_0) \frac{\theta_1 \left( (1-\eta)\tilde{\gamma} + \eta\nu; \tilde{\tau} - \tilde{\eta} \right)}{\theta_1'(0; \tilde{\tau} - \tilde{\eta})} \frac{\theta_2 \left( Z - \frac{Lk+2\ell}{2(L-r)} + \eta(\tilde{\gamma} - \nu); \tilde{\eta} \right)}{\theta_2(0; \tilde{\eta})}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Notons qu'en vertu de (4.16), nous avons tout exprimé en fonction des nombres quantiques  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_y - \mathbf{k}_x$  et  $\ell = \ell_y - \ell_x$ . En particulier, la partie analytique ci-dessus contient d'une part toute l'information sur les états fondamentaux, et est d'autre part une déformation par  $Z = |z| - |\xi|$  de l'élément de matrice de  $\delta_{\mathbf{s}}$  (4.67) :

$$\mathbb{P}(\mathbf{s}; \mathbf{k}_x, \ell_x; \mathbf{k}_y, \ell_y) = \bar{\mathbb{P}}(\mathbf{s}, 0; \mathbf{k}, \ell) + O(N^{-\infty}). \quad (4.108)$$

Remarquons que la somme sur le paramètre de déformation  $\nu$  est entièrement comprise dans cette partie analytique, et se découple totalement de la partie algébrique. Ce résultat n'est a priori pas trivial, car bien que dans la base des états propres de Bethe l'élément de matrice de  $\delta_{\mathbf{s}}$  (c'est-à-dire (4.104) pour  $m = 0$ ) s'exprime effectivement comme une somme de  $L$  termes, on pourrait a priori s'attendre à ce que ce soit toute l'expression des éléments de matrice multi-points qui s'en retrouve déformée, et non uniquement la partie à 0 point.

On vérifie alors naturellement que dans la base des états fondamentaux du modèle SOS (4.18), les éléments de matrice multi-points sont diagonaux et coïncident avec les probabilités de hauteurs locales multi-points. Dans cette nouvelle base, ces probabilités prennent la forme suivante,

$$\langle \phi_g^{(\epsilon_1, \mathbf{t}_1)} | \delta_{\mathbf{s}} E_1^{\alpha_1 \alpha_1} \dots E_m^{\alpha_m \alpha_m} | \phi_g^{(\epsilon_2, \mathbf{t}_2)} \rangle = \delta_{\epsilon_1, \epsilon_2} \delta_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2} \bar{\mathbf{P}}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \epsilon_1, \mathbf{t}_1) + O(N^{-\infty}), \quad (4.109)$$

et sont donc effectivement diagonales, avec bien sûr

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \epsilon, \mathbf{t}) &= (-1)^{|\alpha_+|} \int_{\mathcal{C}_-} \prod_{j=1}^{|\alpha_-|} dz_j \int_{\mathcal{C}_+} \prod_{j=|\alpha_-|+1}^m dz_j \tilde{G}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\mathbf{s}; \{z\}, \{\zeta\}) \\ &\times \bar{\mathcal{S}}_m(\{z\}; \{\zeta\}) \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}, |z| - |\zeta|; \epsilon, \mathbf{t}) + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Le changement de base laisse par conséquent invariant toute la partie algébrique, qui est en fait très proche celle obtenue pour les blocs élémentaires à  $m$  points de la chaîne de spins XXZ

[126]. Nous cherchons ainsi à simplifier la partie analytique suivante,

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}, Z; \epsilon, \mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k}=0}^1 \sum_{\ell=0}^{L-r-1} (-1)^{\mathbf{k}\epsilon} e^{-i\pi \frac{r\mathbf{k}+2\ell}{L-r}(\mathbf{t}+s_0)} \bar{\mathbb{P}}(\mathbf{s}, Z; \mathbf{k}, \ell), \quad (4.111)$$

qui une fois encore s'identifie à une modification par  $Z$  de (4.70). Or, on montre de manière tout à fait similaire à ce que nous avons fait dans la partie 3.3.3, à l'aide d'identités non triviales sur les fonctions thêta, que les probabilités de hauteurs locales multi-points (4.111) s'expriment comme un quotient relativement simple de fonctions thêta :

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}, Z; \epsilon, \mathbf{t}) \Big|_{\substack{L \text{ pair} \\ \epsilon + \mathbf{t} + s_0 - \mathbf{s} \text{ impair}}} = 0, \quad (4.112)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}, Z; \epsilon, \mathbf{t}) \Big|_{\substack{L \text{ pair} \\ \epsilon + \mathbf{t} + s_0 - \mathbf{s} \text{ pair}}} = 2e^{i\pi(2\frac{r}{L}\tilde{\mathbf{s}}Z - \frac{L-r}{L}Z^2\tilde{\tau})} \frac{\theta_4\left(\frac{r\tilde{\mathbf{s}}}{L}; \tau\right) \theta_3\left(\frac{\tilde{s}_0 + \mathbf{t}}{L-r} - \frac{\tilde{\mathbf{s}}}{2L} + \frac{Z\tau}{r}, \frac{\tau}{r(L-r)}\right)}{L \theta_4\left(0; \frac{L}{r}\tau\right) \theta_4\left(\frac{r(\tilde{s}_0 + \mathbf{t})}{L-r}; \frac{L}{L-r}\tau\right)}, \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{s}, Z; \epsilon, \mathbf{t}) \Big|_{L \text{ impair}} &= e^{i\pi(2\frac{r}{L}\tilde{\mathbf{s}}Z - \frac{L-r}{L}Z^2\tilde{\tau})} \\ &\times \frac{\theta_4\left(\frac{r\tilde{\mathbf{s}}}{L}; \tau\right) \theta_3\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2L}\right)\tilde{\mathbf{s}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(L-r)}\right)(\tilde{s}_0 + \mathbf{t}) - \frac{\epsilon}{2} + \frac{Z}{2r}\tau; \frac{\tau}{4r(L-r)}\right)}{L \theta_4\left(0; \frac{L}{r}\tau\right) \theta_4\left(\frac{r(\tilde{s}_0 + \mathbf{t})}{L-r}; \frac{L}{L-r}\tau\right)}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

où nous avons posé  $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s} - \frac{\tau}{2\eta} = \mathbf{s} + \frac{1}{2\bar{\eta}}$ , i.e.  $\tilde{s}_0 = s_0 + \frac{1}{2\bar{\eta}}$  avec  $\tilde{s}_0 \in \mathbb{R}$ .



# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié l'archetype d'un modèle exactement soluble de physique statistique bidimensionnel de type face, le modèle solid-on-solid. Ce modèle décrit les interactions d'une variable de hauteur associée à chaque vertex d'un réseau carré bidimensionnel, les poids statistiques locaux étant paramétrés par des fonctions elliptiques rendant compte des différentes configurations locales de la hauteur autour d'une face du réseau. La structure algébrique sous-jacente est le groupe quantique elliptique  $E_{\tau,\eta}(\mathfrak{sl}_2)$ . Par rapport aux modèles usuels de type vertex, la matrice  $R$  associée dépend d'un paramètre supplémentaire appelé paramètre dynamique (correspondant au paramètre de hauteur), et est solution d'une généralisation de l'équation de Yang-Baxter dans laquelle la hauteur subit des décalages dans la direction du générateur du Cartan de  $\mathfrak{sl}_2$ . Outre son intérêt intrinsèque, ce modèle joue un rôle clé dans la résolution du modèle à huit-vertex pour lequel les méthodes usuelles de diagonalisation des matrices de transfert ne s'appliquent pas directement. Les poids statistiques locaux de ces deux modèles sont en effet reliés par une transformation de jauge dynamique appelée transformation Vertex-IRF. Cette dernière permet, comme l'a montré Baxter, d'exprimer les états propres de la matrice de transfert du modèle à huit-vertex d'une manière relativement simple en fonction de ceux, explicitement calculables, du modèle SOS.

L'objet de la thèse est le calcul exact et explicite des fonctions de corrélation de ce modèle SOS de type face, à l'aide de l'algèbre de Yang-Baxter dynamique permettant de construire la matrice de transfert en volume fini ainsi que les états propres de cette dernière. Nous avons initié ce calcul dans le cadre de deux méthodes de diagonalisation exacte, l'ansatz de Bethe algébrique d'une part et la séparation des variables d'autre part, qui ont déjà fait leurs preuves dans le cas des modèles à vertex simples tels que le modèle à six-vertex (ou chaîne de spins XXZ). Que ce soit par l'une ou l'autre approche, le calcul exact des fonctions de corrélation, et plus généralement des éléments de matrice de produits d'opérateurs locaux entre les états propres de la matrice de transfert, passe par les trois points clés suivants :

- (i) la résolution du problème inverse quantique, donnant les opérateurs locaux en fonction des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter, et permettant ainsi de calculer, à l'aide des relations de commutation de l'algèbre de Yang-Baxter, l'action de ces opérateurs locaux sur les états propres de la matrice de transfert,
- (ii) l'obtention d'une formule explicite et aisément manipulable pour les produits scalaires résultants,
- (iii) le calcul de la limite de volume infini (limite thermodynamique) des éléments de matrice ainsi obtenus, car ce n'est que dans cette limite que ces derniers s'identifient aux fonctions de corrélation du modèle SOS.

Pour chacun de ces trois points, la présence du paramètre dynamique pose un problème plus ou moins difficile à résoudre par rapport au cas des modèles non dynamiques tels que la chaîne

de spins XXZ. En particulier, la résolution du point (ii) dans le cadre de la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique est a priori beaucoup plus délicate. Dans le cas de la chaîne XXZ, les produits scalaires utilisés sont en effet calculés en volume fini sous forme d'un unique déterminant de fonctions usuelles. Une telle représentation est intéressante car elle permet de passer à la limite thermodynamique (point (iii)) relativement facilement. Dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique, cette représentation sous forme de déterminant est reliée à une représentation similaire pour la fonction de partition du modèle à six-vertex associé avec des conditions aux limites particulières. Or, pour le modèle SOS, la fonction de partition correspondante ne semble pas admettre de représentation aussi simple, et s'exprime au mieux comme une somme de déterminants avec un nombre de termes dépendant explicitement du nombre de sites (et donc du volume). Il est par conséquent crucial d'obtenir une expression simplifiée de ces produits scalaires, sans quoi le passage en volume infini des éléments de matrice d'un produit d'opérateurs locaux (point (iii)) ne saurait être accompli.

Les résultats obtenus au cours de la thèse sont les suivants.

Nous avons tout d'abord étudié le modèle SOS périodique dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique, et nous avons obtenu une représentation similaire à celle de la fonction de partition (c'est-à-dire sous forme d'une somme de déterminants, comme mentionné ci-dessus) pour les produits scalaires généraux (point (ii)). Dans le cas cyclique, c'est-à-dire lorsque le paramètre de croisement du modèle prend des valeurs rationnelles, nous avons réussi à simplifier drastiquement l'expression des produits scalaires d'états de Bethe en volume fini, qui peuvent alors s'exprimer sous la forme d'un unique déterminant comme dans le cas XXZ. En se basant sur cette représentation et la résolution du problème inverse quantique (point (i)), une formule sous la forme d'un unique déterminant a également été obtenue pour les facteurs de forme en volume fini. Comme dans le cas de la chaîne XXZ, ces formules peuvent servir au calcul de la fonction à deux points. En particulier, en sommant formellement la série sur les facteurs de forme à l'aide d'intégrales de contour, nous avons obtenu une représentation exacte pour une fonctionnelle génératrice de la fonction à deux points, similaire à celle qui, dans le cas du modèle XXZ, avait été utilisée pour l'étude asymptotique de cette fonction à deux points.

Notons toutefois que la simplification mentionnée ci-dessus, qui permet d'exprimer les produits scalaires et les facteurs de forme du modèle SOS cyclique comme un unique déterminant, n'est possible que parce que la partie dépendant explicitement du paramètre dynamique dans les expressions obtenues est dans une certaine mesure simplifiable. Cela ne semble plus être le cas si l'on considère des éléments de matrice plus compliqués, avec plusieurs opérateurs locaux (éléments de matrice multi-points) : l'action des opérateurs locaux sur un des états propres de la matrice de transfert résulte en une somme de nouveaux états avec une dépendance du paramètre dynamique qui n'est plus du même type que celle des états de Bethe, et donc qui n'est pas en général simplifiable. Toujours dans le cas du modèle cyclique, nous avons toutefois pu étudier ces éléments de matrice en calculant les produits scalaires résultants, plus généraux que les produits scalaires d'états de Bethe proprement dits, sous forme d'une somme finie de déterminants, c'est-à-dire d'une somme dont le nombre de terme reste fini à la limite thermodynamique.

Nous avons ensuite utilisé les représentations ainsi obtenues pour le calcul effectif de plusieurs quantités physiques à la limite thermodynamique. Dans cette limite, l'état fondamental du modèle SOS cyclique est multiplement dégénéré. Nous avons ainsi calculé explicitement les éléments de matrices des opérateurs locaux entre deux états fondamentaux tout en contrôlant les corrections de tailles finies. Il est alors commode, dans le secteur des états fondamentaux, d'ef-

fectuer un changement de base entre les états fondamentaux de type Bethe et ceux redonnant, dans la limite de basse température où le modèle est complètement ordonné, les configurations plates où les spins sont alternés. Dans cette dernière base, les opérateurs locaux sont en effet diagonaux. D'autre part, cette base est polarisée, et nous avons explicitement calculé les polarisations spontanées correspondantes, précédemment conjecturées par Date, Jimbo, Kuniba et Miwa [60]. Nous avons également calculé les probabilités de hauteurs locales en un point du réseau, retrouvant ainsi un résultat de Pearce et Seaton [171], et plus généralement les probabilités de hauteurs locales en  $m$  sites successifs du réseau. Nous avons obtenu pour ces dernières une représentation sous la forme d'une seule intégrale multiple, de forme très similaire à celle précédemment obtenue pour les blocs élémentaires de la chaîne de spins  $1/2$  XXZ.

Enfin, comme la méthode de séparation des variables fournit un cadre dans lequel les produits scalaires d'états s'écrivent de façon naturelle et (semble-t-il) quasi-automatique sous forme d'un unique déterminant en termes des fonctions du modèle, et que la forme de ce déterminant ne semble que peu dépendre du modèle considéré, nous avons également initié le calcul des fonctions de corrélation du modèle SOS anti-périodique par cette méthode. À l'aide de la résolution du problème inverse quantique (point (i)), nous avons ainsi obtenu une expression sous la forme d'un unique déterminant pour les facteurs de forme des opérateurs locaux entre les états propres de la matrice de transfert anti-périodique en volume fini.

Ces résultats posent les bases de l'étude des fonctions de corrélation pour les modèles associés à une algèbre de Yang-Baxter dynamique. Signalons pour finir quelques perspectives intéressantes et questions ouvertes à l'issue de cette thèse :

1. L'étude des fonctions de corrélation du modèle SOS anti-périodique effectué au cours de cette thèse s'arrête au calcul des facteurs de forme en volume fini. Il serait intéressant de poursuivre cette étude, en calculant plus généralement les probabilités de hauteurs locales à  $m$  points comme cela a été fait dans le cas du modèle cyclique périodique, et surtout en étudiant la limite thermodynamique des expressions ainsi obtenues. En effet, le problème du passage à la limite thermodynamique<sup>3</sup> pour les résultats obtenus par la méthode de séparation des variables est un problème encore largement ouvert, même dans le cas de modèles plus simples tels que la chaîne de spins XXZ. Il serait probablement utile, pour l'application de cette limite, d'être capable de transformer les déterminants obtenus dans le cadre de cette méthode sous une forme plus similaire à ceux donnés via la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique et pour lesquels la limite thermodynamique est connue.
2. L'étude des fonctions de corrélation du modèle SOS périodique par la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique est plus aboutie, au moins dans le cas cyclique. Il serait cependant intéressant d'élargir cette étude au cas de modèles SOS plus généraux. Un cas intéressant est celui du modèle SOS restreint (RSOS) pour lequel les hauteurs ne peuvent prendre que  $L - 1$  valeurs entières. Ceci correspond à la limite  $s_0 \rightarrow 0$ , dans laquelle certains des éléments de la matrice  $R$  divergent, ce qui pose a priori des problèmes pour la définition des états propres dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique. Un autre cas intéressant est celui du modèle SOS non restreint avec paramètre de croisement non rationnel. Le problème dans ce dernier cas est que l'espace des états est de dimension infinie, même en volume fini. On s'attend alors à des représentations sous forme de séries (et non plus

---

3. sans oublier le problème de la limite homogène

de sommes finies) pour les produits scalaires entre états. La difficulté est alors d'être capable de contrôler la convergence de ces séries à chaque étape du calcul des fonctions de corrélations. Alternativement, on pourrait envisager d'étudier la limite dans lequel le paramètre de croisement tend vers une valeur irrationnelle directement dans les formules obtenues pour les éléments de matrices renormalisés en volume fini, et ceci avant de considérer la limite thermodynamique.

3. Dans la suite de cette étude, un réel défi serait maintenant d'utiliser la connaissance fournie par l'étude du modèle SOS cyclique périodique pour s'attaquer au problème du calcul des fonctions de corrélation du modèle à huit-vertex (ou de façon équivalente de la chaîne de spins XYZ). Ce dernier problème, bien que difficile et encore très largement ouvert, constituait d'ailleurs l'une des motivations principales de notre étude. Des premiers résultats dans cette direction ont été obtenus dans [138, 139] par une approche différente, basée sur l'utilisation des opérateurs de vertex  $q$ -déformés en volume infini, à partir des formules de bosonisation obtenues dans [150] pour le modèle SOS. Signalons également une approche plus directe proposée par Shiraishi [187] pour des valeurs particulières du paramètre elliptique, ainsi que des représentations conjecturales pour les fonctions de corrélation obtenues dans [45].

La transformation Vertex-IRF étant hautement non-locale (elle ne stabilise en effet aucun sous-espace  $\text{Fun}(H[\mu])$ ), exporter les résultats obtenus pour les fonctions de corrélation du modèle SOS vers le modèle à huit-vertex est a priori un problème difficile. Notons qu'il n'existe pas d'expression connue de la transformation Vertex-IRF en termes des générateurs de l'algèbre de Yang-Baxter du modèle SOS, ce qui rend la combinatoire du calcul des facteurs de forme compliquée. Dans le cadre de la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique, même le problème du calcul des produits scalaires sous une forme compacte est un problème combinatoirement très compliqué, nécessitant par ailleurs le calcul de produit scalaires partiels plus généraux (sur chaque sous-espace  $\text{Fun}(H[\mu])$ ) pour le modèle dynamique associé.

Rappelons à ce propos qu'une des raisons qui nous ont amenés à utiliser la méthode de séparation des variables est justement le caractère relativement universel des expressions obtenues pour les produits scalaires. De fait, des premiers résultats semblent montrer que ces expressions se transmettent assez naturellement, via la transformation vertex-IRF, aux produits scalaires d'un modèle XYZ avec des conditions aux limites de type quasi-périodique. Ainsi, cette méthode apparaît a priori assez prometteuse (au moins d'un point de vue combinatoire) pour l'étude des facteurs de forme et des fonctions de corrélation du modèle XYZ.

Signalons pour terminer un travail récent sur le calcul des produits scalaires de la chaîne XYZ avec bords non diagonaux dans le cadre de la méthode de séparation des variables [72]. Dans ce cas, la structure de l'algèbre de réflexion [191] fait que le modèle SOS avec bords associé n'est en fait pas réellement dynamique, ce qui simplifie les représentations pour les produits scalaires et leur exportation vers le modèle XYZ via la transformation vertex-IRF. Cependant, l'étude des éléments de matrice des opérateurs locaux (facteurs de forme) est a priori plus compliquée pour les modèles avec bords que pour les modèles (quasi-)périodiques, à cause du fait que l'on perd l'invariance par translation.

# **Appendices**



## Annexe A

# Définition et propriétés des fonctions elliptiques

Soit  $\tau$  un nombre complexe qui est tel que  $0 < \Im \tau$ , et  $\eta$  un nombre réel a priori quelconque. Dans tout ce qui suit, on pose  $q = \exp(2i\pi\eta)$  et  $p = \exp(2i\pi\tau)$ .

### A.1 Définition des fonctions $\theta$ et propriétés fondamentales

On définit les quatre fonctions thêta de Jacobi de quasi-période 1 et  $\tau$  de la manière suivante :

$$\theta_1(z; \tau) = -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n p^{\frac{1}{2}(n+1/2)^2} e^{(2n+1)i\pi z}, \quad (\text{A.1})$$

$$\theta_2(z; \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p^{\frac{1}{2}(n+1/2)^2} e^{(2n+1)i\pi z}, \quad (\text{A.2})$$

$$\theta_3(z; \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p^{\frac{1}{2}n^2} e^{(2n+1)i\pi z}, \quad (\text{A.3})$$

$$\theta_4(z; \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n p^{\frac{1}{2}n^2} e^{(2n+1)i\pi z}. \quad (\text{A.4})$$

La fonction  $\theta_1$  est impaire, et satisfait aux propriétés de quasi-périodicité suivantes,

$$\theta_1(z+1; \tau) = -\theta_1(z; \tau) = \theta_1(-z; \tau), \quad \theta_1(z+\tau; \tau) = -e^{-i\pi\tau} e^{-2i\pi z} \theta_1(z; \tau). \quad (\text{A.5})$$

Les trois autres fonctions  $\theta$  sont paires et sont reliées à la fonction  $\theta_1$  par translation par des demis quasi-périodes,

$$\theta_1(z; \tau) = -ie^{i\pi z + i\pi \frac{\tau}{4}} \theta_4(z + \frac{\tau}{2}; \tau), \quad \theta_2(z; \tau) = \theta_1(z + \frac{1}{2}; \tau), \quad \theta_3(z; \tau) = \theta_4(z + \frac{1}{2}; \tau), \quad (\text{A.6})$$

ce qui permet d'en calculer leurs propriétés respectives de quasi-périodicité à partir de A.5. Une représentation en termes de produits infinis existe pour ces fonctions :

$$\theta_1(z; \tau) = 2p^{1/8} \sin(\pi z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^n \cos(2\pi z) + p^{2n})(1 - p^n), \quad (\text{A.7})$$

$$\theta_2(z; \tau) = 2p^{1/8} \cos(\pi z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^n \cos(2\pi z) + p^{2n})(1 - p^n), \quad (\text{A.8})$$

$$\theta_3(z; \tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2p^{\frac{1}{2}(2n-1)} \cos(2\pi z) + p^{2n-1})(1 - p^n), \quad (\text{A.9})$$

$$\theta_4(z; \tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^{\frac{1}{2}(2n-1)} \cos(2\pi z) + p^{2n-1})(1 - p^n). \quad (\text{A.10})$$

De plus, ces fonctions  $\theta$  sont entières et ne disposent que d'un unique zéro par parallélogramme élémentaire :

$$\theta_2(z; \tau) = 0 \Leftrightarrow z = m + n\tau + \frac{1}{2}, \quad \theta_1(z; \tau) = 0 \Leftrightarrow z = m + n\tau, \quad (\text{A.11})$$

$$\theta_4(z; \tau) = 0 \Leftrightarrow z = m + n\tau + \frac{\tau}{2}, \quad \theta_3(z; \tau) = 0 \Leftrightarrow z = m + n\tau + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}. \quad (\text{A.12})$$

## A.2 Quelques propriétés utiles de la fonction $u \rightarrow [u]$

Soit la fonction  $u \rightarrow [u] = \theta_1(\eta u; \tau)$ . Cette fonction satisfait aux propriétés utiles suivantes :

1. Formule d'addition :

$$[x+u][x-u][y+v][y-v] - [x+v][x-v][y+u][y-u] = [x+y][x-y][u+v][u-v]. \quad (\text{A.13})$$

2. Soit  $t \in \mathbb{C}$  et  $f$  de la forme,

$$f(x) = \sum_j C^{(j)} \frac{[x - a_1^{(j)}] \dots [x - a_{\ell+m}^{(j)}]}{[x - b_1^{(j)}] \dots [x - b_{\ell}^{(j)}]}, \quad (\text{A.14})$$

où  $a_i^{(j)}, b_i^{(j)}, C^{(j)} \in \mathbb{C}$  sont tels que  $a_1^{(j)} + \dots + a_{\ell+m}^{(j)} - b_1^{(j)} - \dots - b_{\ell}^{(j)} = t \pmod{\frac{1}{\eta}}, \forall j$ , alors,  $f$  satisfait aux propriétés de quasi-périodicité suivantes :

$$f\left(x + \frac{1}{\eta}\right) = (-1)^m f(x), \quad f\left(x + \frac{\tau}{\eta}\right) = (-1)^m e^{2i\pi\eta t - i\pi m(2\eta x + \tau)} f(x). \quad (\text{A.15})$$

De plus, si  $f$  est entière, alors elle peut être factorisée comme

$$f(x) = C[x - a_1] \dots [x - a_m], \quad (\text{A.16})$$

où  $C, a_1, \dots, a_m$  sont également des nombres complexes tels que  $a_1 + \dots + a_m = t$ .

3. Déterminant de Frobenius : soit  $t$  un nombre complexe quelconque différent de 0 modulo le réseau des quasi-périodes,

$$\det_n \left( \frac{[x_i - y_j + t]}{[x_i - y_j]} \right) = [t]^{n-1} [|x| - |y| + t] \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} [x_i - x_j][y_j - y_i]}{\prod_{i,j=1}^n [x_i - y_j]}, \quad (\text{A.17})$$

où  $|x| = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ , et  $|y| = y_1 + \dots + y_n$ .

Dans le cas cyclique, c'est-à-dire lorsqu'il existe des entiers  $L$ ,  $r_1$ , et  $r_2$  tels que  $L\eta = r_1 + r_2\tau$ , il est commode en suivant Baxter [20] de redéfinir la fonction  $u \mapsto [u]$  par,

$$[u]_\eta = \theta_1(\eta u; \tau) e^{i\pi r_2 \frac{\eta}{L} u^2}. \quad (\text{A.18})$$

Cette fonction modifiée (A.18) est impaire et satisfait aux propriétés de quasi-périodicités suivantes,

$$[u + \frac{1}{\eta}]_\eta = -e^{i\pi \frac{r_2}{L} (2u + \frac{1}{\eta})} [u]_\eta, \quad [u + \frac{\tau}{\eta}]_\eta = -e^{-i\pi \frac{r_1}{L} (2u + \frac{\tau}{\eta})} [u]_\eta. \quad (\text{A.19})$$

De plus, (A.18) est aussi quasi-périodique de quasi-période  $L$ ,

$$[u + L]_\eta = (-1)^{r_1 + r_2 + r_1 r_2} [u]_\eta, \quad (\text{A.20})$$

de telle sorte que le quotient de deux de ces fonctions est  $L$ -périodique. De plus, comme remarqué dans [67], la fonction modifiée (A.18) n'est autre qu'une fonction  $\theta_1$  avec des quasi-périodes différentes de 1 et  $\tau$ . En effet, pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ , l'action du groupe modulaire sur l'ensemble des fonctions thêta est la suivante,

$$e^{i\pi \frac{cz^2}{c\tau + d}} \theta_1(z; \tau) \propto \theta_1\left(\frac{z}{c\tau + d}; \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right), \quad (\text{A.21})$$

de telle sorte que (A.18) est tout simplement proportionnelle à

$$[u]_\eta \propto \theta_1(\eta' u; \tau'), \quad \text{avec } \eta' = \frac{r}{L} \text{ et } \tau' = \frac{b + a\tau}{\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2\tau}. \quad (\text{A.22})$$

Dans l'expression précédente,  $r$  est le plus grand commun diviseur de  $r_1$  et  $r_2$ , et les entiers  $a$ ,  $b$ ,  $\tilde{r}_1$  et  $\tilde{r}_2$  sont tels que  $r_1 = r\tilde{r}_1$ ,  $r_2 = r\tilde{r}_2$  et  $a\tilde{r}_1 - b\tilde{r}_2 = 1$ . Dès lors, toutes les propriétés (A.2) se transposent trivialement à (A.18) par simple substitution de  $\eta$  par  $\eta'$ , et  $\tau$  par  $\tau'$ . L'étude du cas cyclique  $L\eta = r_1 + r_2\tau$  est ainsi équivalente au cas le plus simple pour lequel  $\eta = \frac{r}{L}$ .

### A.3 Transformation de Jacobi

On rappelle la transformation imaginaire de Jacobi pour les fonctions thêta :

$$\theta_1(z; \tau) = -i (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_1\left(-\frac{z}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right), \quad (\text{A.23})$$

$$\theta_2(z; \tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_4\left(-\frac{z}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right), \quad (\text{A.24})$$

$$\theta_3(z; \tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_3\left(-\frac{z}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right). \quad (\text{A.25})$$

Rappelons également deux formules de resommation utiles (voir par exemple [148]) :

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{-2\pi i k \frac{\nu}{n}} \frac{\theta_1\left(x + y + \frac{\nu}{n}; \tau\right) \theta_1'(0; \tau)}{\theta_1(x; \tau) \theta_1\left(y + \frac{\nu}{n}; \tau\right)} = e^{2\pi i k y} \frac{\theta_1(x + ny + k\tau; n\tau) \theta_1'(0; n\tau)}{\theta_1(x + k\tau; n\tau) \theta_1(ny; n\tau)}, \quad (\text{A.26})$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{\nu}{n} x} \frac{\theta_1\left(x + y + \frac{\nu}{n}; \tau\right) \theta_1'(0; \tau)}{\theta_1(x; \tau) \theta_1\left(y + \frac{\nu}{n}; \tau\right)} = \frac{\theta_1\left(\frac{x}{n} + y; \frac{\tau}{n}\right) \theta_1'(0; \frac{\tau}{n})}{\theta_1\left(\frac{x}{n}; \frac{\tau}{n}\right) \theta_1\left(y; \frac{\tau}{n}\right)}, \quad (\text{A.27})$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Ces deux identités sont équivalentes par transformation imaginaire de Jacobi et par les propriétés de quasi-périodicité. On dispose également de la formule de Schröter suivante :

$$\begin{aligned} \theta_3\left(x; \frac{r}{L}\tau\right) \theta_3\left(y; \frac{L-r}{L}\tau\right) &= \sum_{k=0}^{L-1} e^{i\pi \frac{r}{L}\tau k^2} e^{2\pi i k x} \\ &\times \theta_3\left(x - y + \frac{rk}{L}\tau; \tau\right) \theta_3\left((L-r)x + ry + \frac{r(L-r)k}{L}\tau; r(L-r)\tau\right). \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [2] M. Adler, *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations*, Invent. Math. **50** (1979), 219–248.
- [3] M. Adler and P. van Moerbeke, *Completely integrable systems, euclidean Lie algebras and curves*, Adv. Math. **38** (1980), 267–317.
- [4] I. Affleck, *Critical behavior of two-dimensional systems with continuous symmetries*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985), no. 13, 1355–1358.
- [5] I. Affleck, *Exact correlation amplitude for the  $S = \frac{1}{2}$  Heisenberg antiferromagnetic chain*, J. Phys. A : Math. Gen. **31** (1998), 4573–4581.
- [6] T. D. Albert, H. Boos, R. Flume, R. H. Poghossian, and K. Ruhlig, *An F-twisted XYZ model*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), 201–214.
- [7] G. E. Andrews, R. J. Baxter, and P. J. Forrester, *Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities*, J. Stat. Phys. **35** (1984), 193–266.
- [8] M. Arikawa, M. Karbach, G. Muller, and K. Wiele, *Spinon excitations in the XX chain : spectra, transition rates, observability*, J. Phys. A : Math. Gen. **39** (2006), 10623–10640.
- [9] D. Arnaudon, N. Crampé, A. Doikou, L. Frappat, and E. Ragoucy, *Spectrum and bethe ansatz equations for the  $U_q(\mathfrak{gl}(\mathcal{N}))$  closed and open spin chains in any representation*, Annales Henri Poincaré **07** (2006), 1217–1268.
- [10] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate texts in mathematics, vol. 60, Springer Verlag, 1978.
- [11] S. Artz, L. Mezincescu, and R. Nepomechie, *Analytical Bethe Ansatz for  $A_{2n-1}^{(2)}$ ,  $B_n^{(1)}$ ,  $C_n^{(1)}$ ,  $D_n^{(1)}$  quantum-algebra-invariant open spin chains*, J. Phys. A **28** (1995), 5131–5142.
- [12] J. Avan, O. Babelon, and E. Billey, *The Gervais-Neveu-Felder equation and the quantum Calogero-Moser systems*, Comm. Math. Phys. **178** (1996), 281–299, hep-th/9505091.
- [13] O. Babelon, D. Bernard, and F. A. Smirnov, *Quantization of solitons and the restricted sine-Gordon model*, Commun.Math.Phys. **182** (1996), 319–354.
- [14] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press, 2003.
- [15] H. Babujian, A. Fring, M. Karowski, and A. Zapletal, *Exact form factors in integrable field theories : the sine-Gordon model*, Nucl. Phys. B **538** (1999), 535.

- [16] R. J. Baxter, *Eight-vertex model in lattice statistics*, Phys. Rev. Lett. **26** (1971), 832–833.
- [17] ———, *One-dimensional anisotropic Heisenberg chain*, Phys. Rev. Lett. **26** (1971), 834.
- [18] ———, *One-dimensional anisotropic Heisenberg chain*, Ann. Phys. **70** (1972), 323–37.
- [19] ———, *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Phys. **70** (1972), 193–228.
- [20] ———, *Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain I, II, III*, Ann. Phys. **76** (1973), 1–24, 25–47, 48–71.
- [21] R. J. Baxter, *Spontaneous staggered polarization of the F-model*, J. Stat. Phys. **9** (1973), no. 2, 145–182.
- [22] R. J. Baxter, *Corner transfer matrices of the eight-vertex model I*, J. Stat. Phys. **15** (1976), 485–503.
- [23] ———, *Corner transfer matrices of the eight-vertex model II*, J. Stat. Phys. **17** (1977), 1–14.
- [24] ———, *Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice*, Phil. Trans. Royal Soc. London **289** (1978), 315–46.
- [25] ———, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [26] ———, *Onsager and Kaufman’s calculation of the spontaneous magnetization of the Ising model*, J. Stat. Phys. **145** (2011), 518–548.
- [27] A. A. Belavin and V. G. Drinfel’d, *Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. **16** (1982), 159–180.
- [28] ———, *Classical Young-Baxter (sic) equation for simple Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. **17** (1984), 220–221.
- [29] ———, *Triangle equations and simple Lie algebras*, Soviet Scientific Reviews Sect. C **4** (1984), 93–165.
- [30] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B **241** (1984), 333–380.
- [31] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, and N. A. Slavnov, *The algebraic bethe ansatz for scalar products in  $SU(3)$ -invariant integrable models*, J. Stat. Mech. (2012), P10017.
- [32] ———, *Highest coefficient of scalar products in  $SU(3)$ -invariant integrable models*, J. Stat. Mech. (2012), P09003.
- [33] ———, *Bethe vectors of  $gl(3)$ -invariant integrable models*, J. Stat. Mech. (2013), P02020.
- [34] ———, *Bethe vectors of quantum integrable models with  $GL(3)$  trigonometric  $r$ -matrix*, (2013), math-ph/1304.7602.
- [35] ———, *Form factors in  $SU(3)$ -invariant integrable models*, J. Stat. Mech. (2013), P04033.
- [36] S. Belliard and E. Ragoucy, *The nested Bethe Ansatz for ‘all’ open spin chains with diagonal boundary conditions*, J. Phys. A : Math. Theor. **42** (2009), 205203.
- [37] F. A. Beresin, *Several remarks on the associative envelope of a Lie algebra*, Funk. Anal. Priloz. **1** (1967), no. 2, 1–14, In russian.

- [38] B. Berg, M. Karowski, and P. Weisz, *Phys. Rev.* **D 19** (1979), 2477.
- [39] H. Bethe, *Zür Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkete*, *Zeitschrift für Physik* **71** (1931), 205–226.
- [40] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy, and M. P. Nightingale, *Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986), no. 7, 742–745.
- [41] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, and N. A. Kitanine, *Correlation functions of a strongly correlated boson system*, *Nucl. Phys.* **B 516** (1998), 501.
- [42] H. Boos and F. Göhmann, *On the physical part of the factorized correlation functions of the XXZ chain*, *J. Phys. A : Math. Gen.* **42** (2009), 315001.
- [43] H. Boos, F. Göhmann, A. Klümper, and J. Suzuki, *Factorization of the finite temperature correlation function of the XXZ chain in a magnetic field*, *J. Phys. A : Math. Theor.* **40** (2007), 10699.
- [44] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model IV : CFT Limit*, *Comm. Math. Phys.* **299** (2010), 825–866.
- [45] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *Traces on the Sklyanin algebra and correlation functions of the eight-vertex model*, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38** (2005), 7629–7659.
- [46] ———, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model*, *Comm. Math. Phys.* **272** (2007), 263–281.
- [47] ———, *Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model II : Creation Operators*, *Comm. Math. Phys.* **286** (2009), 875–932.
- [48] S. Brush, *History of the Lenz-Ising model*, *Review of Modern Physics* **39** (1967), 883–893.
- [49] J. L. Cardy, *Conformal invariance and universality in finite size scaling*, *J. Phys. A : Math. Gen.* **17** (1984), L385–L387.
- [50] J. L. Cardy, *Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories*, *Nucl. Phys.* **B270** (1986), 186–204.
- [51] O. A. Castro-Alvaredo and J. M. Maillet, *Form factor of integrable Heisenberg (higher) spin chains*, *J. Phys. A : Math. Theor.* **40** (2012), 7451.
- [52] J. S. Caux, R. Hagemans, and J. M. Maillet, *Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains : the gapless anisotropic regime*, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* (2005), P09003.
- [53] J. S. Caux and J. M. Maillet, *Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains in a magnetic field*, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), 077201.
- [54] J.-S. Caux and J. Mossel, *Remarks on the notion of quantum integrability*, *arXiv :1012.3587v1*, 2010.
- [55] V. Chari and A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994.
- [56] I. V. Cherednik, *Factoring particles on the half line, and root systems*, *Teor. Mat. Fiz.* **61** (1984), 35–44.

- [57] J. Cl  mente-Gallardo and G. Marmo, *Towards a definition of quantum integrability*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **6** (2009), 129–172.
- [58] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti, *Correlators in the Heisenberg XX0 chain as Fredholm determinants*, Phys. Lett. A **169** (1992), 243–247.
- [59] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti, *Temperature correlation functions in the XX0 Heisenberg chain. I.*, Theor. Math. Phys. **94** (1993), 11–38.
- [60] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, and T. Miwa, *Spontaneous staggered polarisations of the cyclic solid-on-solid models*, J. Phys. A : Math. Gen. **23** (1990), L163–L167.
- [61] T. Deguchi, *Reduction formula of form factors for the integrable spin-s XXZ chains and application to correlation functions*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2012), P04001.
- [62] V. G. Drinfel’d, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations*, Soviet Math. Dokl. **27** (1983), no. 1, 68–71.
- [63] ———, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), no. 1, 254–258.
- [64] ———, *Quantum groups*, Proc. Internat. Congress of Math., Berkeley, USA, 1986, AMS, 1987, pp. 798–820.
- [65] ———, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 6, 1419–57.
- [66] B. Enriquez, S. Khoroshkin, and S. Pakuliak, *Weight functions and Drinfeld currents*, Comm. Math. Phys. **276** (2007), 691–725.
- [67] K. Fabricius and B. M. McCoy, *The TQ equation of the eight-vertex model for complex elliptic roots of unity*, J. Phys. A **40** (2007), 14893.
- [68] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and L. A. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193–225.
- [69] L. D. Faddeev and E. K. Sklyanin, *Quantum-mechanical approach to completely integrable field theory models*, Sov. Phys. Dokl. **23** (1978), 902–904.
- [70] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, and L. A. Takhtajan, *Quantum inverse problem method I*, Theor. Math. Phys. **40** (1979), 688–706, Translated from Teor. Mat. Fiz. 40 (1979) 194–220.
- [71] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer-Verlag, 1987.
- [72] S. Faldella and G. Niccoli, *SOV approach for integrable quantum models associated to general representations on spin-1/2 chains of the 8-vertex reflection algebra*, arXiv :1307.5531.
- [73] G. Felder, *Elliptic quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematical Physics, Paris (1994), International Press, 1995, pp. 211–218.
- [74] G. Felder, V. Tarasov, and A. Varchenko, *Solutions of the elliptic qKZB equations and Bethe ansatz, I*, Topics in singularity theory : V. I. Arnold’s 60th Anniversary Collection, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 180, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1997, pp. 45–75.

- [75] G. Felder and A. Varchenko, *Algebraic Bethe ansatz for the elliptic quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$* , Nucl. Phys. B **480** (1996), 485–503.
- [76] ———, *On representations of the elliptic quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$* , Commun. Math. Phys. **181** (1996), 741–761.
- [77] L. Frappat, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, and E. Ragoucy, *Bethe ansatz for the universal weight function*, Annales Henri Poincaré **10** (2009), 513–548.
- [78] L. Frappat, R. Nepomechie, and E. Ragoucy, *Complete Bethe Ansatz solution of the open spin- $s$  XXZ chain with general integrable boundary terms*, J. Stat. Mech. **0709** (2007), P09009.
- [79] I. B. Frenkel and N. Yu. Reshetikhin, *Quantum affine algebras and holonomic difference equations*, Commun. Math. Phys. **146** (1992), 1–60.
- [80] Y. Fujii and M. Wadati, *Gaudin hypothesis for the XYZ spin chain*, J. Phys. A : Math. Gen. **32** (1999), 8389.
- [81] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095–1097.
- [82] M. Gaudin, *Bose gas in one dimension. I. II*, J. Math. Phys. **12** (1971), 1674–1676, 1677–1680.
- [83] ———, *La fonction d’onde de Bethe*, Masson, 1983.
- [84] M. Gaudin, B. M. McCoy, and T. T. Wu, *Normalization sum for the Bethe’s hypothesis wave functions of the Heisenberg-Ising model*, Phys. Rev. D **23** (1981), 417–419.
- [85] I. M. Gel’fand and B. M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **1** (1955), 253–304.
- [86] J. L. Gervais and A. Neveu, *Novel triangle relation and absence of tachions in Liouville string field theory*, Nucl. Phys. B **238** (1984), 125–141.
- [87] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature*, J. Phys. A **37** (2004), 7625–7652.
- [88] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *Integral representation of the density matrix of the XXZ chain at finite temperatures*, J. Phys. A : Math. Gen. **38** (2005), 1833–1841.
- [89] N. Grosjean, J.M. Maillet, and G. Niccoli, *On the form factors of local operators in the lattice sine-gordon model*, J. Stat. Mech. (2012), P10006.
- [90] Eugene Gutkin, *Quantum nonlinear Schrödinger equation : Two solutions*, Physics Reports **167** (1988), 1–131.
- [91] F. D. M. Haldane, *General relation of correlation exponents and spectral properties of one-dimensional Fermi systems : Application to the anisotropic  $s=1/2$* , Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 1358–1362.
- [92] ———, *Demonstration of the “Luttinger liquid” character of Bethe-ansatz soluble models of 1-d quantum fluids*, Phys. Lett. A **81** (1981), 153–155.
- [93] ———, *Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids : I. Properties of the Luttinger model and their extension to the general 1d interacting spinless Fermi gas*, J. Phys. C : Solid State Phys. **14** (1981), 2585–2609.

- [94] W. R. Hamilton, *On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics*, British Association Report (1834), 513–528.
- [95] W. Heisenberg, *Zur Theorie der Ferromagnetismus*, Zeitschrift für Physik **49** (1928), 619–636.
- [96] J. Honerkamp, P. Weber, and A. Wiesler, Nucl. Phys. B **152** (1979), 266.
- [97] L. Hulthén, *Über das Austauschproblem eines Kristalls*, Ark. Mat. Astron. Fys. A **26** (1939), no. 11, 1–106.
- [98] A. R. Its and N. A. Slavnov, *On the Riemann-Hilbert approach to asymptotic analysis of the correlation functions of the quantum nonlinear Schrödinger equation : Interacting fermion case*, Theor. Math. Phys. **119** (1999), 541–593.
- [99] A. G. Izergin, *Partition function of the six-vertex model in a finite volume*, Sov. Phys. Dokl. **32** (1987), 878–879.
- [100] A. G. Izergin, N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, *Spontaneous magnetization of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain*, Nucl. Phys. B **554** (1999), 679–696, solv-int/9812021.
- [101] A. G. Izergin and V. E. Korepin, *The quantum inverse scattering method approach to correlation functions*, Commun. Math. Phys. **94** (1984), 67–92.
- [102] M. Souriau J, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
- [103] C. G. J. Jacobi, *Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **17** (1837), 97–162.
- [104] M. Jimbo, *A  $q$ -difference analogue of  $U(g)$  and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.
- [105] M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, and M. Okado, *The  $A_n^{(1)}$  face models*, Comm. Math. Phys. **119** (1988), 543–565.
- [106] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, and A. Nakayashiki, *Correlation functions of the XXZ model for  $\Delta < -1$* , Phys. Lett. A **168** (1992), 256–263.
- [107] M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, AMS, 1995.
- [108] ———, *Quantum KZ equation with  $|q| = 1$  and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime*, J. Phys. A : Math. Gen. **29** (1996), 2923–2958.
- [109] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori, and M. Sato, *Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent*, Physica D **1** (1980), 80–158.
- [110] M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model III : introducing the Matsubara direction*, J. Phys. A : Math. Gen. **42** (2009), 304018.
- [111] M. Karowski and P. Weisz, *Exact form-factors in  $(1 + 1)$ -dimensional field theoretic models with soliton behavior*, Nucl. Phys. B **139** (1978), 445.
- [112] B. Kaufman and L. Onsager, *Crystal statistics. III. Short range order in a binary Ising lattice*, Phys. Rev. **76** (1949), 1244–1252.
- [113] S. Khoroshkin and S. Pakuliak, *A computation of an universal weight function for the quantum affine algebra  $u_q(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$* , J. Math. Kyoto Univ. **48** (2008), 227–321.

- [114] N. Kitanine, *Correlation functions of the higher spin XXX chains*, J. Phys. A : Math. Gen. **34** (2001), 8151–8169.
- [115] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, *Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models*, arXiv :1206.2630.
- [116] ———, *Algebraic Bethe ansatz approach to the asymptotic behavior of correlation functions*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2009), P04003.
- [117] ———, *On the thermodynamic limit of form factors in the massless XXZ Heisenberg chain*, J. Math. Phys. **50** (2009), 095209.
- [118] ———, *Riemann-Hilbert approach to a generalized sine kernel and applications*, Comm. Math. Phys. **291** (2009), 691–761.
- [119] ———, *A form factor approach to the asymptotic behavior of correlation functions in critical models*, J. Stat. Mech. (2011), P12010.
- [120] ———, *Form factor approach to the asymptotic behavior of correlation functions in critical models*, J. Stat. Mech. (2011), P12010.
- [121] ———, *The thermodynamic limit of particle-hole form factors in the massless XXZ Heisenberg chain*, J. Stat. Mech. : Theory Exp. (2011), P05028.
- [122] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, *Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models*, J. Stat. Mech. (2012), P09001.
- [123] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, *Dynamical correlation functions of the XXZ spin-1/2 chain*, Nucl. Phys. B **729** (2005), 558–580.
- [124] ———, *Master equation for spin-spin correlation functions of the XXZ chain*, Nucl. Phys. B **712** (2005), 600–622.
- [125] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, *Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain*, Nucl. Phys. B **554** (1999), 647–678.
- [126] ———, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **567** (2000), 554–582.
- [127] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. B **247** (1984), 83.
- [128] V. E. Korepin, *Dual field formulation of quantum integrable models*, Commun. Math. Phys. **113** (1987), 177–190.
- [129] B. Kostant, *Quantization and unitary representations. I. Prequantization*, vol. 170, pp. 87–208, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [130] B. Kostant, *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. Math. **34** (1979), 195–338.
- [131] K. K. Kozłowski, *Large-distance and long-time asymptotic behavior of the reduced density matrix in the non-linear Schrödinger model*, arXiv :1101.1626.
- [132] K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, and N. A. Slavnov, *Long-distance behavior of temperature correlation functions of the quantum one-dimensional Bose gas*, J. Stat. Mech. (2011), P03018.

- [133] K. K. Kozłowski and V. Terras, *Long-time and large-distance asymptotic behavior of the current-current correlators in the non-linear Schrödinger model*, J. Stat. Mech. : Theory Exp. (2011), P09013.
- [134] H. A. Kramers and G. H. Wannier, *Statistics of the two-dimensional ferromagnet. part ii*, Phys. Rev. **60**(3) (1941), 263–276.
- [135] P. P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin, *Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations*, Zap. Nauch. Sem. LOMI **101** (1981), 101–110, Translation in J. Sov. Math. 23 (1983) 2435–41.
- [136] A. Kuniba and T. Yajima, *Local State Probabilities for Solvable Restricted Solid-on-Solid Models :  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $D_n^{(1)}$ , and  $A_n^{(1)}$* , J. Stat. Phys. **52** (1988), 829–883.
- [137] J.-L. Lagrange, J. Bertrand, and G. Darboux, *Mécanique analytique*, Oeuvre complètes, 1787.
- [138] M. Lashkevich, *Free field construction for the eight-vertex model : Representation for form factors*, Nucl. Phys. **B621** (2002), 587–621.
- [139] M. Lashkevich and Y. Pugai, *Free Field Construction for Correlation Functions of the Eight-Vertex Model*, Nucl. Phys. **B516** (1998), 623–651.
- [140] P. D. Lax, *Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968), 467–490.
- [141] W. Lenz, *Beiträge zum verständnis der magnetischen eigenschaften in festen körpern*, Physikalische Zeitschrift **21** (1920), 613–615.
- [142] E. Lieb, *Residual entropy of square ice*, Phys. Rev. **162** (1967), 162–172.
- [143] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, *Two soluble models of an antiferromagnetic chain*, Ann. Phys. **16** (1961), 407–466.
- [144] E. H. Lieb, *Exact analysis of an interacting Bose gas II. The excitation spectrum*, Phys. Rev. **130** (1963), 1616–1624.
- [145] E. H. Lieb and W. Liniger, *Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state*, Phys. Rev. **130** (1963), no. 4, 1605–1616.
- [146] J. Liouville, J. Math. **18** (1853).
- [147] J. Liouville, *Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique*, Journal de Mathématiques (Journal de Liouville) **20** (1855), 137.
- [148] Z.-G. Liu, *Some inverse relations and theta function identities*, Int. J. Number Theory **8** (2012), 1977–2002.
- [149] S. Lukyanov, *Correlation amplitude for the XXZ spin chain in the disordered regime*, Phys. Rev. B **59** (1999), 11163–11164.
- [150] S. Lukyanov and Y. Pugai, *Multi-point local height probabilities in the integrable RSOS model*, Nucl. Phys. B **473** (1996), 631–658.
- [151] S. Lukyanov and V. Terras, *Long-distance asymptotics of spin-spin correlation functions for the XXZ spin chain*, Nucl. Phys. B **654** (2003), 323–356.
- [152] A. Luther and I. Peschel, *Calculation of critical exponents in two dimensions from quantum field theory in one dimension*, Phys. Rev. B **12** (1975), 3908–3917.

- [153] J. M. Maillet and J. Sanchez de Santos, *Drinfel'd twists and algebraic Bethe Ansatz*, L. D. Faddeev's Seminar on Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 201, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 137–178.
- [154] J. M. Maillet and V. Terras, *On the quantum inverse scattering problem*, Nucl. Phys. B **575** (2000), 627–644.
- [155] S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, 2000.
- [156] V. A. Marchenko, *On reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **104** (1955), 695–698, In russian.
- [157] B. M. McCoy, *Theory of a two-dimensional Ising model with random impurities III. Boundary effects*, Phys. Rev. **188** (1969), 1014.
- [158] B. M. McCoy, C. A. Tracy, and T. T. Wu, *Painlevé functions of the third kind.*, J. Math. Phys. **18** (1977), 1058.
- [159] B. M. McCoy and T. T. Wu, *Theory of Toeplitz determinants and the spin correlation functions of the two-dimensional Ising model IV*, Phys. Rev. **162** (1967), 436.
- [160] L. Mezincescu and R. Nepomechie, *Analytical Bethe Ansatz for quantum algebra invariant spin chains*, Nucl. Phys. B **372** (1991), 597–621.
- [161] E. W. Montroll, *Statistical mechanics of nearest-neighborg system*, J. Chem. Phys. **9** (1941), 706.
- [162] E. Mukhin, V. Tarasov, and A. Varchenko, *Bethe eigenvectors of higher transfer matrices*, J. Stat. Mech. **8** (2006), P08002.
- [163] G. Niccoli, *Non-diagonal open spin-1/2 XXZ quantum chains by separation of variables : Complete spectrum and matrix elements of some quasi-local operators*, J. Stat. Mech. (2012), P10025.
- [164] ———, *An antiperiodic dynamical six-vertex model : I. complete spectrum by SOV, matrix elements of the identity on separate states and connections to the periodic eight-vertex model*, J. Phys. A **46** (2013), 075003.
- [165] ———, *Antiperiodic spin-1/2 XXZ quantum chains by separation of variables : Complete spectrum and form factors*, Nucl. Phys. B **870** (2013), 397–420.
- [166] ———, *Form factors and complete spectrum of XXX antiperiodic higher spin chains by quantum separation of variables*, J. Math. Phys. **54** (2013), 053516.
- [167] L. Onsager, *Cristal statistics I. A two-dimensional model with an order-disorder transition.*, Phys. Rev. **65** (1944), 117–149.
- [168] R. Orbach, *Linear antiferromagnetic chain with anisotropic coupling*, Phys. Rev. **112** (1958), 309–316.
- [169] S. Pakuliak, V. Roubtsov, and A. Silantyev, *The SOS model partition function and the elliptic weight functions*, J. Phys. A : Math. Theor. **41** (2008), 295204.
- [170] P. A. Pearce and M. T. Batchelor, *Row transfer matrix spectra of cyclic solid-on-solid lattice models*, J. Stat. Phys. **60** (1990), 77–135.
- [171] P. A. Pearce and K. A. Seaton, *Exact solution of cyclic solid-on-solid lattice models*, Ann. Phys. **193** (1989), 326–366.

- [172] A. M. Polyakov, *Conformal symmetry of critical fluctuations*, JETP Lett. **12** (1970), 381–383.
- [173] E. Ragoucy and G. Satta, *Analytical Bethe Ansatz for closed and open  $gl(\mathcal{M}|\mathcal{N})$  super-spin chains in arbitrary representations and for any dynkin diagram*, JHEP **09** (2007), 001.
- [174] N. Yu. Reshetikhin, *Calculation of the norm of bethe vectors in model with  $SU(3)$ -symmetry*, Journal of Soviet Mathematics **46** (1989), 1694–1706.
- [175] A. Reyman and M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Reduction of hamiltonian systems, affine Lie algebras, and Lax equations II*, Invent. Math. **63** (1981), 423–432.
- [176] A. G. Reyman and M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Reduction of hamiltonian systems, affine Lie algebras, and Lax equations I*, Invent. Math. **54** (1979), 81–100.
- [177] A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky, and I. B. Frenkel, *Graded Lie algebras and completely integrable systems*, Soviet Math. Dokl. **20** (1979), 811–814.
- [178] A. G. Reyman and M. A. Semenov-Tjan-Shanskii, *Group-theoretical methods in the theory of finite dimensional integrable systems*, Encyclopedia of Mathematical Science **16** (1991), 190.
- [179] H. Rosengren, *An Izergin-Korepin-type identity for the 8VSOS model, with applications to alternating sign matrices*, Adv. Appl. Math. **43** (2009), 137–155.
- [180] K. Sakai, *Dynamical correlation functions of the XXZ model at finite temperature*, J. Phys. A : Math. Theor. **40** (2007), 7523–7542.
- [181] M. Sato, T. Miwa, and M. Jimbo, *Holonomic quantum fields. III,IV*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **15** (1979), 577–629, 871–972.
- [182] ———, *Holonomic quantum fields. V*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **16** (1980), 531–584.
- [183] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin, *The soliton : a new concept in applied science*, Proceedings of the IEEE **61** (1973), no. 10, 1443–1483.
- [184] M. A. Semenov-Tian-Shansky, *What is a classical  $r$ -matrix ?*, Funct. Anal. Appl. **17** (1983), 259–272.
- [185] ———, *Classical  $r$ -matrices and quantization*, J. Soviet. Math. **31** (1984), 3411–3416.
- [186] ———, *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21** (1985), 1237–1260.
- [187] J. Shiraishi, *Free field constructions for the elliptic algebra  $\mathcal{A}_{p,q}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  and Baxter’s eight-vertex model*, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004), 363–380.
- [188] E. K. Sklyanin, *Method of the inverse scattering problem and the non-linear quantum Schrödinger equation*, Sov. Phys. Dokl. **24** (1979), 107–109.
- [189] ———, *Quantum version of the inverse scattering problem method.*, J. Sov. Math. **19** (1982), 1546–1595.
- [190] ———, *On some algebraic structures associated with the Yang-Baxter equation*, Func. Anal. Appl. **16** (1983), 263.
- [191] ———, *Boundary conditions for integrable quantum systems*, J. Phys. A : Math. Gen. **21** (1988), 2375–2389.

- [192] ———, *Functional Bethe Ansatz*, Integrable and Superintegrable Systems (B.A. Kupershmidt, ed.), World Scientific, Singapore, 1990, pp. 8–33.
- [193] E. K. Sklyanin, *Separation of Variables. New Trends.*, eprint arXiv :solv-int/9504001, 1995, p. 4001.
- [194] N. Slavnov, *The algebraic Bethe ansatz and quantum integrable systems*, Russ. Math. Surv. **62** (2007), 727.
- [195] N. A. Slavnov, *Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe Ansatz*, Theor. Math. Phys. **79** (1989), 502–508.
- [196] ———, *Nonequal-time current correlation-function in a one-dimensional Bose-gas*, Theor. Math. Phys. **82** (1990), 273–282.
- [197] F. A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [198] ———, *Structure of matrix elements in the quantum Toda chain*, J. Phys. A : Math. Gen. **31** (1998), 8953.
- [199] B. Sutherland, *Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 103–104.
- [200] ———, *Two-dimensional hydrogen bonded crystals without the ice rule*, J. Math. Phys. **11** (1970), 3183.
- [201] W. Symes, *Systems of Toda type, inverse spectral problems and representation theory*, Invent. Math. **59** (1980), 13–53.
- [202] M. Takahashi, *Thermodynamical Bethe ansatz and condensed matter*, Lecture Notes in Phys. **498**, 204–250.
- [203] ———, *Spin-correlation function of the  $s = 1$  antiferromagnetic Heisenberg chain at  $t = 0$* , Phys. Rev. B **38** (1988), 5188–5191.
- [204] ———, *Thermodynamics of the one-dimensional solvable models*, Cambridge University Press, 1999.
- [205] L. A. Takhtajan, *Integration of the continuous heisenberg spin chain through the inverse scattering method*, Phys. Lett. A **64** (1977), 235–237.
- [206] L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model*, Russ. Math. Surveys **34** (1979), no. 5, 11–68.
- [207] V. Tarasov and A. Varchenko, *Completeness of Bethe vectors and difference equations with regular singular points*, Int. Math. Research Notices **1995** (1995), no. 13, 637–669.
- [208] V. Terras, *Drinfel'd twists and functional Bethe Ansatz*, Lett. Math. Phys. **48** (1999), 263–276.
- [209] H. B. Thacker and D. Wilkinson, *Inverse scattering transform as an operator method in quantum field theory*, Phys. Rev. D **19** (1979), no. 12, 3660–3665.
- [210] L. R. Walker, *Antiferromagnetic linear chain*, Phys. Rev. **116** (1959), 1089–1090.
- [211] A. Weinstein, *Local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 523–557.
- [212] M. Wheeler, *Scalar products in generalized models with  $SU(3)$ -symmetry*, (2012), math-ph/1204.2089.

- [213] C. N. Yang, *The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model*, Phys. Rev. **85** (1952), 808–816.
- [214] ———, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction.*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312–1314.
- [215] C. N. Yang and C. P. Yang, *One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system*, Phys. Rev. **150** (1966), no. 1, 321–327.
- [216] ———, *One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. II. Properties of the ground state energy per lattice site for an infinite system*, Phys. Rev. **150** (1966), no. 1, 327–339.
- [217] ———, *One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. III. Applications*, Phys. Rev. **151** (1966), 258.
- [218] ———, *Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction*, J. Math. Phys. **10** (1969), 1115–1122.
- [219] V. E. Zakharov and L. D. Faddeev, *Korteweg-de Vries equation, a complete integrable hamiltonian system.*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 280–287.
- [220] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, and L. P. Pitaievski, *Theory of solitons. The inverse problem method*, Plenum, New-York, 1984.
- [221] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in non-linear media*, Sov. Phys. JETP **34** (1972), 62–69.
- [222] ———, *Interaction between solitons in a stable medium*, Sov. Phys. JETP **37** (1973), 823–828.
- [223] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models*, Ann. Phys. **120** (1979), 253–291.



## **Article 1**

Algebraic Bethe Ansatz approach to form factors and correlation functions of the cyclic eight-vertex solid-on-solid model

Publié dans  
J. Stat. Mech. (2013) P04015  
arXiv :1212.0246



# Algebraic Bethe Ansatz approach to form factors and correlation functions of the cyclic eight-vertex solid-on-solid model

D. Levy-Bencheton<sup>1</sup> and V. Terras<sup>2</sup>

Laboratoire de Physique, ENS Lyon & CNRS UMR 5672,  
Université de Lyon, France

February 18, 2013

## Abstract

We consider the problem of the exact computation of the correlation functions of the eight-vertex solid-on-solid model by means of the algebraic Bethe Ansatz. We compute the scalar product between a Bethe eigenstate and an arbitrary state of Bethe type and show that, in the cyclic case, it can be formulated as a single determinant of usual functions. It allows us to obtain determinant representations for finite-size form factors. By summing up over the form factors, we also give a multiple integral representation for a generating function of the two-point function.

## 1 Introduction

In the domain of integrable systems, after the successful determination of the spectrum and the eigenstates of the Hamiltonian [10, 26, 94, 7, 35, 79, 25], a crucial problem is the computation of the form factors and correlation functions which are essential objects for the description of the full dynamical properties of the models. For truly interacting integrable models (i.e. for models which are not equivalent to free fermions), this problem represents a real challenge and has been intensively studied during the last decades (see e.g. [51, 20, 33, 95, 92, 66, 44, 45, 46, 75, 72, 76, 74, 63, 64, 59, 61, 56, 15, 14, 16, 17, 12, 13, 47, 49, 48, 19, 87, 22]). Several methods have been developed so far, and important progresses have been made recently, in particular

---

<sup>1</sup>damien.levybencheton@ens-lyon.fr

<sup>2</sup>veronique.terras@ens-lyon.fr

for the archetypal integrable models such as the isotropic (XXX) and partially anisotropic (XXZ) Heisenberg chains, or the one-dimensional quantum Bose gas.

Among these methods, one [63, 64], based on algebraic Bethe Ansatz (ABA) [26, 25], has led to important recent developments [59, 38, 39, 61, 60, 86, 55, 56, 68, 67, 57, 58]. It relies on the solution of the quantum inverse problem [63, 78, 40] and on a compact and explicit expression, in the form of a determinant of usual functions, for the scalar products between a Bethe eigenstate and an arbitrary state of Bethe type [91]. The combination of these two results leads to simple determinant representations for the form factors (i.e. for the matrix elements of local operators in the basis of eigenstates of the transfer matrix) in finite volume [63]. Although the exact representations which are obtained for the physical correlation functions (and in particular for the two-point functions) have a less simple form [59, 62, 61, 60, 55], it is nevertheless possible to obtain quantitative results for these quantities as well, for instance by summation over the corresponding form factors series. This can be achieved either by numerical methods relying on the efficient, explicit aforementioned determinant representation for the form factors [11, 21, 22] or, in the asymptotic regime, from the analytic study of the series [56, 68, 67, 57, 58].

However, until now, this method has been essentially developed in the relatively simple case of the periodic XXZ spin-1/2 Heisenberg chain or some of its variants (open chain [53, 54], higher spins [52, 41, 23] ...), or in the even simpler case of the Bose gas model [55, 68, 58]. In fact, for more complicated models, the solution of one of the two aforementioned basic ingredients (solution of the inverse problem and determinant representation for the scalar products of Bethe states) is often missing.

In particular, a real challenge would be to adapt this method so as to find explicit and manageable expressions for the correlation functions of the completely anisotropic (XYZ) Heisenberg chain. The latter is a natural generalization of the XXZ Heisenberg chain, and is related to the eight-vertex model of statistical physics (which in its turn is a natural generalization of the six-vertex model related to the XXZ chain). It was solved for the first time by Baxter [3, 4, 5, 6] (see also [50] for the computation of the correlation length, and [93, 29] for the ABA formulation). In fact, it is worth mentioning here that, due to the non-conservation of the spin, the XYZ (or eight-vertex) model is not *directly* solvable by Bethe Ansatz. Nevertheless, Baxter managed to construct the eigenstates of this model by relating them (via the so-called Vertex-IRF transformation) to the Bethe eigenstates of another model of solid-on-solid (SOS) type. The latter, which is often called eight-vertex SOS model (8VSOS), is a  $L$ -state IRF (interaction-round-a-face) model on a square lattice and is solvable by Bethe Ansatz [6, 29]. However, due to the need of the Vertex-IRF transformation to come back to the XYZ (or eight-vertex) model, the solution process is much more complicated than in the XXZ case, and the exact computation of the correlation functions is in this case still a widely open problem. In particular, through the aforementioned method based on ABA, no significant results in this direction have been obtained so far (see nevertheless, by means of another approach using  $q$ -vertex operators [45], some first results based on those of [73] in [71, 70], an attempt of a direct approach in [88], and conjectural representations for the correlation functions in [18]).

Actually, the combinatorial complexity due to the Vertex-IRF transformation is not the only problem for the computation of the XYZ correlation functions. In fact, even in the simpler case of the related SOS models [2, 69, 84, 83], the ABA approach to correlation functions presents some difficulties, in particular concerning the obtention of a compact and manageable formula for the scalar products of states. Let us recall at this point that, in the XXZ case, the scalar product between a Bethe eigenstate and an arbitrary state of Bethe

type can be written as a determinant of usual functions [91], and that the ABA approach to correlation functions relies strongly on such a representation [63]. The latter originates (see for instance the derivation of [63]) from the explicit determinant representation of the partition function of the six-vertex model with special boundary conditions, the so-called domain wall boundary conditions [65, 43]. The main problem in the 8VSOS case is that the analogous partition function with domain wall boundary conditions does not seem to admit a representation in the form of a single determinant [85, 82] (see also [34]). This is due to the fact that the  $R$ -matrix of the model depends (compared to the simpler six-vertex  $R$ -matrix) on an extra dynamical parameter related to the fluctuation variable (height) of the model. This  $R$ -matrix hence satisfies the dynamical version of the Yang-Baxter equation [27, 30, 29] instead of the usual one. As a result, the dynamical parameter is subject to some shifts, which prevents one from reducing the sum of determinants obtained in [85] for the 8VSOS partition function to a unique one as in [43] (see nevertheless [32, 31] for a model with a reflecting end, for which the partition function indeed reduces to a unique determinant of Izergin type). Hence, a mere generalization of the process described in [63] seems to be not so easy.

This is the problem that we tackle in this article, namely to set the stage for the ABA approach to correlation functions in the dynamical case, i.e. in the case of the periodic 8VSOS model. We especially study the scalar product between two states constructed in the ABA framework, in the case where one of the corresponding set of spectral parameters satisfies the Bethe equations. Building on Rosengren's representation [85] for the partition function with domain wall boundary conditions as a sum of determinants, we obtain a similar representation (i.e. as a sum of determinants) for the partial scalar product evaluated at a fixed value of the height  $s$ . Hence, the fact that we do not *a priori* obtain a single determinant may be a problem for the computation of correlation functions. However we show that, in the cyclic case (i.e. when the parameter  $\eta$  of the model is rational and the space of states is finite-dimensional), the true scalar product of Bethe states, which is obtained by summing up over all values of the dynamical parameter, can in fact be represented as a unique determinant. In the same way, the finite-size form factors (i.e. the matrix elements, in the basis of eigenstates of the finite-size transfer matrix, of local operators labeling the difference of height between two neighboring vertices) can be written as a unique determinant which has a similar form as in XXZ. This opens the way to the computation of correlation functions, for instance by summation over the form factor series. In particular, we define a generating function of the two-point function and show that, in the cyclic dynamical model in finite volume, the latter admits a multiple integral representation very similar to the *master equation* representation that was obtained in [61] and used in [56] to derive the long-distance asymptotic behavior for the two-point function in the XXZ case.

The content of the article is the following. In Section 2, we define the 8VSOS model and recall the main steps of its algebraic Bethe Ansatz solution. In Section 3, we compute the scalar product between a Bethe eigenstate and an arbitrary state of Bethe type. In Section 4, we solve the quantum inverse problem in the dynamical case, namely we express local spin operators in terms of elements of the dynamical monodromy matrix. In Section 5, we compute the finite-size form factors. In Section 6, we formally sum up the form factor series and obtain a multiple integral representation (master equation representation) for a generating function of the two-point function of the (finite-size) cyclic dynamical model. Details and technicalities are gathered in a set of appendices.

## 2 The 8VSOS model and algebraic Bethe Ansatz

Let us consider a two-dimensional square lattice with  $N \times M$  elementary square cells (or faces), with periodic (toroidal) boundary conditions. A height  $s$  is attached to each vertex (site) of the lattice, so that heights on adjacent sites are restricted to differ by  $\pm 1$ , and a complex parameter  $u_i$  (resp.  $\xi_j$ ) is attached to each column  $i$  (resp. line  $j$ ) of cells. To each height configuration  $(s_1, s_2, s_3, s_4)$  (with  $|s_1 - s_2| = |s_2 - s_3| = |s_3 - s_4| = |s_4 - s_1| = 1$ ) around an elementary face of the lattice is associated a statistical weight  $W \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_4 & s_3 \end{pmatrix}$ , which can be understood as a matrix element of some matrix  $R$  depending on the difference of the two corresponding parameters:

$$R(u_i - \xi_j; s)_{\epsilon'_i, \epsilon'_j}^{\epsilon_i, \epsilon_j} = \begin{array}{c} s \quad \quad \quad s + \epsilon'_i \\ \xi_j \leftarrow \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \text{---} \\ \downarrow \\ s + \epsilon_j \quad \quad \quad s + \epsilon_i + \epsilon_j \\ \quad \quad \quad u_i = s + \epsilon'_i + \epsilon'_j \end{array} \equiv W \begin{pmatrix} s & s + \epsilon'_i \\ s + \epsilon_j & s + \epsilon_i + \epsilon_j \end{pmatrix}.$$

Here  $\epsilon_i, \epsilon'_i, \epsilon_j, \epsilon'_j \in \{+1, -1\}$ , and the matrix  $R(u; s) \in \text{End}(V \otimes V)$ , where  $V \sim \mathbb{C}^2$  is a two-dimensional vector space with basis  $(\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-)$ , is such that

$$R(u; s) (\mathbf{e}_{\epsilon'_1} \otimes \mathbf{e}_{\epsilon'_2}) = \sum_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon'_1 + \epsilon'_2}} R(u; s)_{\epsilon'_1, \epsilon'_2}^{\epsilon_1, \epsilon_2} (\mathbf{e}_{\epsilon_1} \otimes \mathbf{e}_{\epsilon_2}). \quad (2.1)$$

The  $R$ -matrix of the SOS model admits only six non-zero elements, which can be parameterized as follows:

$$R(u; s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u; s) & c(u; s) & 0 \\ 0 & \bar{c}(u; s) & \bar{b}(u; s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

with

$$b(u; s) = \frac{[s+1][u]}{[s][u+1]}, \quad c(u; s) = \frac{[s+u][1]}{[s][u+1]}, \quad (2.3)$$

$$\bar{b}(u; s) = \frac{[s-1][u]}{[s][u+1]} = b(u; -s), \quad \bar{c}(u; s) = \frac{[s-u][1]}{[s][u+1]} = c(u; -s). \quad (2.4)$$

The parameters  $u$  and  $s$  are respectively called spectral and dynamical parameters. The function  $u \mapsto [u]$  is an entire, odd and quasi-periodic function of quasi-periods  $1/\eta$  and  $\tau/\eta$ , where  $\eta$  and  $\tau$  are two parameters such that  $\Im \tau > 0$  (see Appendix A for the precise definition of this function). Graphically, the above non-zero matrix elements correspond to the six following statistical weights:

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} s \quad + \quad s+1 \\ + \quad \square \quad + \\ s+1 \quad + \quad s+2 \end{array} & \begin{array}{c} s \quad + \quad s+1 \\ - \quad \square \quad - \\ s-1 \quad + \quad s \end{array} & \begin{array}{c} s \quad - \quad s-1 \\ - \quad \square \quad + \\ s-1 \quad + \quad s \end{array} \\
a(u; s) = 1 & b(u; s) & c(u; s) \\
\\
\begin{array}{c} s \quad - \quad s-1 \\ - \quad \square \quad - \\ s-1 \quad - \quad s-2 \end{array} & \begin{array}{c} s \quad - \quad s-1 \\ + \quad \square \quad + \\ s+1 \quad - \quad s \end{array} & \begin{array}{c} s \quad + \quad s+1 \\ + \quad \square \quad - \\ s+1 \quad - \quad s \end{array} \\
\bar{a}(u; s) = 1 & \bar{b}(u; s) & \bar{c}(u; s)
\end{array}$$

The  $R$ -matrix (2.2) satisfies the dynamical Yang-Baxter equation [37, 27] (which is equivalent to Baxter's star-triangle relation for the Boltzmann weights  $W$ ) :

$$\begin{aligned}
R_{12}(u_1 - u_2; s + h_3) R_{13}(u_1 - u_3; s) R_{23}(u_2 - u_3; s + h_1) \\
= R_{23}(u_2 - u_3; s) R_{13}(u_1 - u_3; s + h_2) R_{12}(u_1 - u_2; s), \quad (2.5)
\end{aligned}$$

with

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

This equation should be understood as an identity for meromorphic functions of  $u_1, u_2, u_3, s$  with values in  $\text{End}(V \otimes V \otimes V)$ . The indices label as usual the space of the tensor product on which the corresponding operator acts. The  $R$ -matrix (2.2) also satisfies the following properties:

- zero weight:  $[R_{12}(u; s), h_1 + h_2] = 0$ ,
- unitarity:  $R_{12}(u; s) R_{21}(-u; s) = \text{Id}$ ,
- crossing symmetry:  $\sigma_1^y R_{12}(-u - 1; s - h_1) \sigma_1^y \frac{[s + h_2][u]}{[s][u + 1]} = R_{21}^{t_1}(u; s)$ ,

in which, in the expression  $R_{12}(-u - 1; s - h_1)$ , the  $h_1$  operator should be understood as acting to the right of any other operator involved in the definition of the  $R$ -matrix.

The transfer matrix of the model corresponds to the product of all statistical weights along a column of elementary cells of the lattice. A given allowed configuration of heights along a vertical line of vertices of the lattice (a state on which the transfer matrix acts) corresponds to a  $N$ -tuple of heights  $(s_1, s_2, \dots, s_N)$  such that  $s_{i+1} - s_i = \pm 1$ ,  $i = 1, \dots, N$  (with the convention  $s_{N+1} = s_1$ ), i.e. to a configuration  $(s, \mathbf{e}_{\epsilon_1}, \dots, \mathbf{e}_{\epsilon_N})$  with  $s = s_1$  and  $\epsilon_i \equiv s_{i+1} - s_i$  such that  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_N = 0$ . Hence, the space of states of the model can be seen as the space of functions  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  of one complex variable (the height  $s$ ) with values in the zero-weight space  $\mathcal{H}[0]$ , where  $\mathcal{H} = V^{\otimes N}$ .

In the general (unrestricted) SOS model,  $\eta$  is arbitrary and the dynamical parameter  $s$  may take an infinite discrete set of values, i.e. belongs to some set  $\mathbf{C}_{\mathbf{s}_0} = s_0 + \mathbb{Z}$  for some

arbitrary parameter  $s_0$ . Hence, in that case, the space of states is infinite-dimensional even for a finite lattice. Usually, however, one considers situations for which the height  $s$  is only allowed to take a finite set of values and the space of states is finite-dimensional. This happens for rational values of  $\eta$ , i.e. for  $\eta = r/L$  with  $r, L$  being relatively prime integers such that  $L > 0$  (or more generally<sup>3</sup>, as in [6], when there exist two integers  $r_1$  and  $r_2$  such that  $L\eta = r_1 + r_2\tau$ ). In that case, that will be referred to as the *cyclic case* (or cyclic SOS (CSOS) model [84]), the statistical weights of the model (i.e. the elements (2.3)-(2.4) of the  $R$ -matrix) are periodic of period  $L$ , and the space of states  $\mathbf{H}_{s_0}^L$  corresponds to the space of functions  $\psi : \mathbf{C}_{s_0} \mapsto \mathcal{H}[0]$  such that  $\psi(s + L) = \psi(s)$  or, equivalently, to the space of functions  $\psi : \mathbf{C}_{s_0}^L \mapsto \mathcal{H}[0]$ , with  $\mathbf{C}_{s_0}^L = s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ .

The algebraic Bethe Ansatz approach to the SOS model, which enables one to diagonalize the transfer matrix of the model, has been developed in [29], based on the study of representations [30] of Felder's dynamical quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$  associated to the dynamical  $R$ -matrix (2.2). The central object of this approach is the monodromy matrix, defined as the following ordered product of  $R$ -matrices along a column of elementary cells of the lattice:

$$\begin{aligned} T_{a,1\dots N}(u; \xi_1, \dots, \xi_N; s) &= R_{aN}(u - \xi_N; s + h_1 + \dots + h_{N-1}) \dots R_{a1}(u - \xi_1; s) \\ &= \begin{pmatrix} A(u; s) & B(u; s) \\ C(u; s) & D(u; s) \end{pmatrix}_{[a]}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

It acts on  $V_a \otimes \mathcal{H}$ , where  $V_a \sim \mathbb{C}^2$  is another copy of  $V$  usually called auxiliary space. In this framework, the entries  $A, B, C, D$  of the monodromy matrix are linear operators acting on  $\mathcal{H}$ , and the commutation relations of these operators are given by the following quadratic equation on  $V_{a_1} \otimes V_{a_2} \otimes \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; s + h_{1\dots N}) T_{a_1,1\dots N}(u_1; s) T_{a_2,1\dots N}(u_2; s + h_{a_1}) \\ = T_{a_2,1\dots N}(u_2; s) T_{a_1,1\dots N}(u_1; s + h_{a_2}) R_{a_1 a_2}(u_1 - u_2; s), \end{aligned} \quad (2.8)$$

which is a consequence of the Yang-Baxter relation (2.5). Here  $h_{1\dots N} = h_1 + \dots + h_N$ .

It may be convenient to define, from the above monodromy matrix  $T \in \text{End}(V_a \otimes \mathcal{H})$ , the following matrix of finite-difference operators:

$$\widehat{T}(u) = \begin{pmatrix} \widehat{A}(u) & \widehat{B}(u) \\ \widehat{C}(u) & \widehat{D}(u) \end{pmatrix}_{[a]} = T(u; \widehat{s}) \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_s & 0 \\ 0 & \widehat{\tau}_s^{-1} \end{pmatrix}_{[a]} \in \text{End}(V_a \otimes \text{Fun}(\mathcal{H})), \quad (2.9)$$

where  $\widehat{\tau}_s \widehat{s} = (\widehat{s} + 1) \widehat{\tau}_s$ , and the action of  $\widehat{s}$  and  $\widehat{\tau}_s$  on functions  $f \in \text{Fun}(\mathcal{H})$  are given as

$$[\widehat{s}f](s) = sf(s), \quad [\widehat{\tau}_s f](s) = f(s + 1). \quad (2.10)$$

This defines an operator algebra whose commutation relations follow from (2.8) (see [30, 29]). In this picture, the (operator) transfer matrix is  $\widehat{t}(u) = \widehat{A}(u) + \widehat{D}(u)$ . It is easy to see [30, 29] that these transfer matrices preserve the space  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  of functions with values in the zero weight space  $\mathcal{H}[0]$  (the subspace of  $\mathcal{H}$  on which  $h_{1\dots N}$  vanishes), and that they commute pairwise on  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$ :  $[\widehat{t}(u), \widehat{t}(v)] = 0$  on  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$ .

The structure of the  $R$ -matrix implies that there exists a reference state  $|0\rangle = \mathbf{e}_+ \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_+ \in \mathcal{H}$  which is an eigenstate of  $A(u; s)$  and  $D(u; s)$ . More precisely,

$$A(u; s)|0\rangle = a(u)|0\rangle, \quad D(u; s)|0\rangle = \frac{[s-1]}{[s+N-1]} d(u)|0\rangle, \quad (2.11)$$

<sup>3</sup>This situation is actually equivalent to the case  $\eta = r/L$  with  $r$  being the greatest common divisor of  $r_1$  and  $r_2$  (see Appendix A).

with, in our normalization,

$$a(u) = 1, \quad d(u) = \prod_{j=1}^N \frac{[u - \xi_j]}{[u - \xi_j + 1]}. \quad (2.12)$$

Starting from this reference state, one can construct states in the zero-weight space  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  as

$$s \mapsto \varphi(s) B(v_1; s) B(v_2; s-1) \dots B(v_n; s-n+1) |0\rangle, \quad (2.13)$$

where  $v_1, \dots, v_n$  are arbitrary spectral parameters,  $\varphi$  is an arbitrary numerical function of the dynamical parameter and  $n$  is such that  $N = 2n + \aleph L$  for some integer  $\aleph$  (or  $N = 2n$  in the unrestricted case). Bethe states correspond to states (2.13) for which the function  $\varphi$  takes the form

$$\varphi_\omega(s) = \omega^s \prod_{j=1}^n \frac{[1]}{[s-j]}, \quad (2.14)$$

depending on some complex parameter  $\omega$ . Such states will be denoted as  $|\{v_1, \dots, v_n\}, \omega\rangle$ , or simply as  $|\{v\}, \omega\rangle$  when there is no ambiguity concerning the set  $\{v\} \equiv \{v_1, \dots, v_n\}$ . Note that, whereas  $\omega$  can a priori take any complex value in the unrestricted case, it is no longer the case in the cyclic case: for such a state  $|\{v\}, \omega\rangle$  to belong to  $\mathbf{H}_{\mathbf{s}_0}^L$  (i.e. to be  $L$ -periodic as a function of  $s$ ), one should impose  $\omega$  to be such that  $(-1)^{r\aleph} \omega^L = 1$ .

It can easily be shown, using the commutation relations coming from (2.8), that, if  $v_1, \dots, v_n$  are off-diagonal<sup>4</sup> solutions to the following system of Bethe equations<sup>5</sup>

$$a(v_j) \prod_{l \neq j} \frac{[v_l - v_j + 1]}{[v_l - v_j]} = (-1)^{r\aleph} \omega^{-2} d(v_j) \prod_{l \neq j} \frac{[v_j - v_l + 1]}{[v_j - v_l]}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

then

$$\hat{t}(u) |\{v\}, \omega\rangle = \tau(u; \{v\}, \omega) |\{v\}, \omega\rangle, \quad (2.16)$$

with

$$\tau(u; \{v\}, \omega) = \omega a(u) \prod_{l=1}^n \frac{[v_l - u + 1]}{[v_l - u]} + (-1)^{r\aleph} \omega^{-1} d(u) \prod_{l=1}^n \frac{[u - v_l + 1]}{[u - v_l]}. \quad (2.17)$$

Similarly, setting  $\langle 0| = |0\rangle^\dagger$  and

$$\tilde{\varphi}_\omega(s) = \omega^{-s} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{[s+j]}{[1]}, \quad (2.18)$$

one can define Bethe states  $\langle \{v\}, \omega|$  in the dual space of states as

$$\langle \{v\}, \omega| : s \mapsto \langle 0| C(v_n; s-n) \dots C(v_2; s-2) C(v_1; s-1) \tilde{\varphi}_\omega(s). \quad (2.19)$$

Then, if the set of spectral parameters  $\{v\} \equiv \{v_1, \dots, v_n\}$  is an off-diagonal solution of the system of Bethe equations (2.15), one has

$$\langle \{v\}, \omega| \hat{t}(u) = \tau(u; \{v\}, \omega) \langle \{v\}, \omega|, \quad (2.20)$$

with  $\tau(u; \{v\}, \omega)$  given by (2.17).

<sup>4</sup>i.e. such that, for all  $i < j$ ,  $\eta v_i \neq \eta v_j \pmod{\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}}$ .

<sup>5</sup>These equations are also valid in the unrestricted case for  $N = 2n$  with the convention  $r\aleph = 0$ .

### 3 Scalar product of Bethe states

The next step towards the calculation of form factors and correlation functions, after the determination of the eigenvectors of the transfer matrix, is to obtain manageable and compact formulas for their scalar products. To compute these scalar products we use here the method proposed in [63], which is based on some recursion relation initiated from the determinant representation of the partition function with domain wall boundary conditions [43]. This recursion uses the expression of the operators  $B$  and  $C$  in the so-called  $F$ -basis, a basis of the space of states in which these operators become quasi-local [77].

In the case of the dynamical SOS model, the  $F$ -basis has been explicitly obtained in [1], whereas an expression (unfortunately not as a single determinant but as a sum of determinants) for the partition function of the model with domain wall boundary conditions has been obtained in [82, 85] (see Appendix B). The fact that one does not know a compact formula (as a single determinant) for the partition function is a difficulty for the computation of the scalar product, but the approach of [63] can nevertheless be achieved and, at least in the cyclic case for which the space of states is finite-dimensional, the result can be presented as a single determinant.

Let  $\langle \{u\}, \omega_u |$  be a dual Bethe eigenstate given in terms of a function  $\tilde{\varphi}_{\omega_u}$  of the form (2.18) with complex parameter  $\omega_u$ ,  $\{u\} \equiv \{u_1, \dots, u_n\}$  being solution of the corresponding Bethe equations, and  $| \{v\}, \omega_v \rangle \in \mathbf{H}_{\mathbf{s}_0}^{\mathbf{L}}$  be a state of the form (2.13) given in terms of a function  $\varphi_{\omega_v}$  (2.14) with complex parameter  $\omega_v$ ,  $\{v\} \equiv \{v_1, \dots, v_n\}$  being a set of arbitrary parameters. In the cyclic case, we consider the following scalar product between these two states:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) &= \langle \{u\}, \omega_u | \{v\}, \omega_v \rangle \\ &= \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^{\mathbf{L}}} \tilde{\varphi}_{\omega_u}(s) \varphi_{\omega_v}(s) S_n(\{u\}; \{v\}; s) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^{\mathbf{L}}} \omega_u^{-s} \omega_v^s \prod_{j=1}^n \frac{[s+j-1]}{[s-j]} S_n(\{u\}; \{v\}; s), \end{aligned} \quad (3.1)$$

where  $S_n(\{u\}; \{v\}; s)$  is the partial scalar product at a given height  $s$  defined as

$$S_n(\{u\}; \{v\}; s) = \langle 0 | C(u_n; s-n) \dots C(u_1; s-1) B(v_1; s) \dots B(v_n; s-n+1) | 0 \rangle. \quad (3.2)$$

Following the method proposed in [63], (3.2) can be calculated in the  $F$ -basis because the reference state and the dual reference state are left invariant under the action of the  $F$ -matrix which induces the corresponding change of basis (see [77, 63, 1] for more details about the  $F$ -basis). (3.2) is therefore equal to

$$S_n(\{u\}; \{v\}; s) = \langle 0 | \tilde{C}(u_n; s-n) \dots \tilde{C}(u_1; s-1) \tilde{B}(v_1; s) \dots \tilde{B}(v_n; s-n+1) | 0 \rangle, \quad (3.3)$$

where  $\tilde{C}$  and  $\tilde{B}$  stand for the expressions of the corresponding operators  $C$  and  $B$  in the  $F$ -basis (see [1] for details):

$$\tilde{B}(u; s) = \frac{[s-1]}{[s+h_{1\dots N}]} \sum_{i=1}^N \sigma_i^- \frac{[1][s+\sum_{l \neq i} h_l + u - \xi_i]}{[s+\sum_{l \neq i} h_l][u - \xi_i + 1]} \otimes_{j \neq i} \left( \begin{array}{cc} \frac{[u-\xi_j]}{[u-\xi_j+1]} & 0 \\ 0 & \frac{[\xi_j-\xi_i+1]}{[\xi_j-\xi_i]} \end{array} \right)_{[j]}, \quad (3.4)$$

$$\tilde{C}(u; s) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^+ \frac{[1][s-u+\xi_i]}{[s][u-\xi_i+1]} \otimes_{j \neq i} \left( \begin{array}{cc} \frac{[u-\xi_j]}{[u-\xi_j+1]} \frac{[\xi_i-\xi_j+1]}{[\xi_i-\xi_j]} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)_{[j]}. \quad (3.5)$$

As already mentioned, (3.3) can be computed by recursion. For  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , we consider the following quantity:

$$G_{\ell_{k+1}, \dots, \ell_n}^{(k)}(\{u\}; \{v_1, \dots, v_k\}; s) = \langle 0 | \tilde{C}(u_n; s-n) \dots \tilde{C}(u_1; s-1) \tilde{B}(v_1; s) \dots \tilde{B}(v_k; s-k+1) | \ell_{k+1}, \dots, \ell_n \rangle, \quad (3.6)$$

where  $|\ell_{k+1}, \dots, \ell_n\rangle$  denotes the state with  $N-k$  down spins at sites  $\ell_{k+1}, \dots, \ell_n$ . For  $k=n$ , the quantity  $G^{(n)}(\{u\}; \{v_1, \dots, v_n\}; s)$  corresponds to the partial scalar product (3.3). For  $k=0$ ,  $G_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(0)}(\{u\}; \emptyset; s)$  can easily be computed, by means of the expression (3.5) of the operator  $C$  in the  $F$ -basis, in terms of the partition function with domain wall boundary conditions (B.1) on a lattice of size  $n \times n$  (we also use the fact that the  $F$ -matrix leaves invariant the state  $|\bar{0}\rangle$  so that (B.1) can be written directly in the  $F$ -basis):

$$\begin{aligned} G_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(0)}(\{u\}; \emptyset; s) &= \langle 0 | \tilde{C}_{1\dots N}(u_n; s-n) \dots \tilde{C}_{1\dots N}(u_1; s-1) | \ell_1, \dots, \ell_n \rangle \\ &= \prod_{j \neq \ell_1, \dots, \ell_n} \left\{ \prod_{\alpha=1}^n \frac{[u_\alpha - \xi_j]}{[u_\alpha - \xi_j + 1]} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{[\xi_{\ell_k} - \xi_j + 1]}{[\xi_{\ell_k} - \xi_j]} \right\} \\ &\quad \times Z_n(u_1, \dots, u_n; \xi_{\ell_1}, \dots, \xi_{\ell_n}; s-n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

The functions (3.6) admit the following recursion relation:

$$\begin{aligned} G_{\ell_{k+1}, \dots, \ell_n}^{(k)}(\{u\}; \{v_1, \dots, v_k\}; s) &= \sum_{\ell_k \neq \ell_{k+1}, \dots, \ell_n} G_{\ell_k, \dots, \ell_n}^{(k-1)}(\{u\}; \{v_1, \dots, v_{k-1}\}; s) \\ &\quad \times \langle \ell_k, \dots, \ell_n | \tilde{B}(v_k; s-k+1) | \ell_{k+1}, \dots, \ell_n \rangle, \end{aligned} \quad (3.8)$$

with, using the expression (3.4) of the operator  $B$  in the  $F$ -basis,

$$\begin{aligned} \langle \ell_k, \dots, \ell_n | \tilde{B}(v_k; s-k+1) | \ell_{k+1}, \dots, \ell_n \rangle &= \frac{[1][s+N-2n+k+v_k-\xi_{\ell_k}]}{[s+N-2n+k][v_k-\xi_{\ell_k}]} \\ &\quad \times \frac{[s-k]d(v_k)}{[s+N-2n+k-1]} \prod_{j=k+1}^n \left\{ \frac{[v_k-\xi_{\ell_j}+1][\xi_{\ell_j}-\xi_{\ell_k}+1]}{[v_k-\xi_{\ell_j}][\xi_{\ell_j}-\xi_{\ell_k}]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

The recursion relation (3.8) with initial condition (3.7) is explicitly solved in Appendix C. Here we merely give the result for the partial scalar product (3.2).

**Proposition 3.1.** *For  $N = 2n + \aleph L$  with  $\aleph$  integer, let  $\{u_1, \dots, u_n\}$  be a solution of the Bethe equations (2.15) with complex parameter  $\omega_u$ , and  $\{v_1, \dots, v_n\}$  be a set of arbitrary parameters. Then the partial scalar product  $S_n(\{u\}; \{v\}; s)$  can be represented as the following sum of determinants:*

$$\begin{aligned} S_n(\{u\}; \{v\}; s) &= \frac{[s-n]}{[\gamma]^n[|u|-|v|+\gamma+s]} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{[s-j]}{[s+j]} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t) d(v_t)}{\prod_{j < k} [u_j - u_k][v_k - v_j]} \\ &\quad \times \sum_{S, \tilde{S} \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \prod_{j \notin \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_{\aleph}} \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{t=1}^n [u_t - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ \omega_u^{-2} \prod_{t=1}^n [u_t - v_j - 1] \right\} \\ &\quad \times \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{v - \delta^S \tilde{S}\})]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

In this expression,  $\gamma$  is an arbitrary complex parameter (the result does not depend on  $\gamma$ ),  $|u| = u_1 + \dots + u_n$ ,  $|v| = v_1 + \dots + v_n$ , and the elements of the  $n \times n$  matrix  $\mathcal{N}_\gamma$  are given by

$$[\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{v\})]_{jk} = \frac{[u_j - v_k + \gamma]}{[u_j - v_k]}. \quad (3.11)$$

The sum in (3.10) runs over all subsets  $S$  and  $\tilde{S}$  of  $\{1, \dots, n\}$ ,  $|S|$  and  $|\tilde{S}|$  being the cardinality of these subsets, and  $\{v - \delta^{S\tilde{S}}\} = \{v_1 - \delta_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_n - \delta_n^{S\tilde{S}}\}$ , with

$$\delta_k^{S\tilde{S}} = \begin{cases} 1 & \text{if } k \in S \text{ and } k \notin \tilde{S}, \\ -1 & \text{if } k \notin S \text{ and } k \in \tilde{S}, \\ 0 & \text{if } k \notin S \cup \tilde{S} \text{ or } k \in S \cap \tilde{S}. \end{cases} \quad (3.12)$$

*Remark 3.1.* The formula (3.10) is also valid for any generic SOS model (i.e. for generic  $\eta$ ) in the case  $N = 2n$  ( $\aleph = 0$ ).

*Remark 3.2.* The apparent poles at  $v_k = u_j$  are removable due to the fact that  $\{u\}$  satisfies the Bethe equations. The apparent pole at  $|u| - |v| + \gamma + s = 0$  is also removable due to Remark B.1.

In the case when  $\eta$  is rational, i.e. if there exists a positive integer  $L$  such that  $L\eta$  is integer, the sum of determinants in (3.10) can be reduced, by a similar argument as for the partition function in [85], to a sum over only  $L$  terms. Indeed, using (A.9) and the periodicity of the theta-function to re-express the ratio  $\frac{[\gamma+s-|S|+|\tilde{S}|]}{[s-|S|+|\tilde{S}|]}$  in (3.10), one obtains the following result:

**Corollary 3.1.** *Suppose that there exists a positive integer  $L$  such that  $L\eta$  is integer. Then, with the same hypothesis and notations as in Proposition 3.1, the partial scalar product  $S_n(\{u\}; \{v\}; s)$  can be written as a sum of only  $L$  terms:*

$$S_n(\{u\}; \{v\}; s) = \frac{[\gamma][s]}{[0]'[|u| - |v| + \gamma + s]} \prod_{j=1}^n \frac{[s-j]}{[s+j-1]} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{j < k} [u_j - u_k][v_k - v_j]} \\ \times \sum_{\ell=0}^{L-1} q^{\ell s} \frac{[Ls_0 + \gamma + \ell \frac{\tau}{\eta}]_L [0]'_L}{[Ls_0]_L [\gamma + \ell \frac{\tau}{\eta}]_L} \det_n [\Omega_\gamma^{(\ell)}(\{u\}, \omega_u; \{v\})], \quad (3.13)$$

with

$$[\Omega_\gamma^{(\ell)}(\{u\}, \omega_u; \{v\})]_{ij} = \frac{(-1)^{r\aleph}}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - q^{-\ell} \frac{[u_i - v_j + \gamma + 1]}{[u_i - v_j + 1]} \right\} a(v_j) \prod_{t=1}^n [u_t - v_j + 1] \\ + \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - q^\ell \frac{[u_i - v_j + \gamma - 1]}{[u_i - v_j - 1]} \right\} \omega_u^{-2} d(v_j) \prod_{t=1}^n [u_t - v_j - 1]. \quad (3.14)$$

Here we have set  $q = e^{2\pi i \eta}$  and  $[u]_L = \theta_1(\eta u; L\tau)$ .

Although we do not obtain a single determinant, the representation (3.13) seems nevertheless more convenient than (3.10) for the computation of the correlation functions, its main advantage being that the number of terms remains finite in the thermodynamic limit.

At this point, we would like to make the following remark. As we have seen, we did not succeed to represent the partial scalar product (3.2) as a single determinant as in [91]. However, it is worth stressing that the state

$$B(v_1; s)B(v_2; s-1) \dots B(v_n; s-n+1)|0\rangle \in \mathcal{H}[0] \quad (3.15)$$

is *not* a Bethe state: even when the parameters  $\{v\}$  satisfy the Bethe equations, the shifts of the dynamical parameter that appear when commuting  $A(u; s)$  or  $D(u; s)$  with  $B(u; s \pm 1)$  prevent this state from directly being an eigenstate of, for instance,  $A(u; s) + D(u; s)$ . In other words, it means that the function of the dynamical parameter

$$\tilde{s} \mapsto \delta_{\tilde{s}, s} B(v_1; \tilde{s})B(v_2; \tilde{s}-1) \dots B(v_n; \tilde{s}-n+1)|0\rangle \in \text{Fun}(\mathcal{H}[0]) \quad (3.16)$$

is not a Bethe state: it is a state of the form (2.13), but the corresponding numerical function  $\varphi$  (given here by  $\varphi(\tilde{s}) = \delta_{\tilde{s}, s}$ ) is not of the right form (2.14)<sup>6</sup>. Therefore, it is not very surprising that the occurrence of dynamical shifts prevent us from re-expressing the scalar product (3.2) of such states, i.e. the partial scalar product (3.10) or (3.13) (and the partition function (B.1) as a particular case) as a single determinant as in the non-dynamical case. In fact, if we consider instead the true Bethe state, i.e. the function (2.13)-(2.14), we shall see that the natural scalar product of functions (3.1) can, in the cyclic case, and for one of the set of parameters being solution of the Bethe equations, be represented as a single determinant.

Let us therefore now consider the scalar product (3.1). Using the  $L$ -periodicity and the fact that the right hand side of (3.10) does not depend on  $\gamma$  and hence that a convenient choice can be made for this parameter, we can extract the dependence in the dynamical parameter  $s$  from the sum of determinants and factorize the latter as a single determinant. More precisely, we get from (3.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) &= \frac{1}{[\gamma]^n} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t) d(v_t)}{\prod_{j < k} [u_j - u_k][v_k - v_j]} \sum_{S, \tilde{S} \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \\ &\times \prod_{j \notin \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_N} \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{t=1}^n [u_t - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ \omega_u^{-2} \prod_{t=1}^n [u_t - v_j - 1] \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbb{C}_{S_0}^L} \frac{\omega_u^{-s} \omega_v^s [s]}{[|u| - |v| + \gamma + s]} \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \right\} \\ &\times \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{v - \delta^{S\tilde{S}}\})]. \quad (3.17) \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Note however that this function  $\varphi$  can, in the cyclic case, be expressed as a finite linear combination (with  $L$  terms) of functions of the type (2.14) (the latter form a basis of the finite-dimensional space of discrete  $L$ -periodic functions of the dynamical parameter). This has to be put in relation to the fact that the corresponding scalar product can in this case be represented as a sum of  $L$  determinants (such as for instance in (3.13)).

Setting  $\gamma = -|u| + |v|$ , and performing a change of indices in the sum over  $s$ , we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) &= \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \frac{1}{[\gamma]^n} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t) d(v_t)}{\prod_{j < k} [u_j - u_k] [v_k - v_j]} \\ &\times \sum_{S, \tilde{S} \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^{|S|-|\tilde{S}|} \prod_{j \notin \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_{\mathbf{s}}} \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{t=1}^n [u_t - v_j + 1] \right\} \\ &\times \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ \omega_u^{-2} \prod_{t=1}^n [u_t - v_j - 1] \right\} \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{v - \delta^S \tilde{S}\})]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Using the linearity of the determinant, one can now express the last sum in (3.18) as a single determinant. We have the following result:

**Theorem 3.1.** *For  $N = 2n + \aleph L$  with  $\aleph$  integer, let  $\{u_1, \dots, u_n\}$  be a solution of the Bethe equations (2.15) with complex parameter  $\omega_u$ , and  $\{v_1, \dots, v_n\}$  be a set of arbitrary parameters. Then, the scalar product  $\mathbf{S}_n(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)$  (3.1) between the Bethe eigenstate  $\langle \{u\}, \omega_u |$  and the state  $| \{v\}, \omega_v \rangle \in \mathbf{H}_{\mathbf{s}_0}^L$  of the form (2.13), (2.14) with parameter  $\omega_v$  can be represented as:*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) &= \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^L} \frac{\omega_v^s}{\omega_u^s} \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{j < k} [u_j - u_k] [v_k - v_j]} \\ &\times \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)], \end{aligned} \quad (3.19)$$

with  $\gamma = -|u| + |v|$  and  $\Omega_\gamma$  given by

$$\begin{aligned} [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)]_{ij} &= \frac{(-1)^{r_{\mathbf{s}}}}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_i - v_j + \gamma + 1]}{[u_i - v_j + 1]} \right\} a(v_j) \prod_{t=1}^n [u_t - v_j + 1] \\ &+ \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_u}{\omega_v} \frac{[u_i - v_j + \gamma - 1]}{[u_i - v_j - 1]} \right\} \omega_u^{-2} d(v_j) \prod_{t=1}^n [u_t - v_j - 1]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

From this determinant formula, it can be shown (see Appendix D) that two different Bethe eigenstates are orthogonal. On the contrary, taking the limit in which  $\{v\} = \{u\}$  with  $\omega_v = \omega_u$  in (3.19), we obtain the formula for the “square norm” of a Bethe eigenstate (in that case  $\gamma = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n(\{u\}, \omega_u; \{u\}, \omega_u) &= \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t) \cdot \det_n [\Omega_0(\{u\}, \omega_u; \{u\}, \omega_u)]}{\prod_{j \neq k} [u_j - u_k]} \\ &= \frac{(-1)^{nr_{\mathbf{s}}}}{(-[0]')^n} \frac{\prod_{t=1}^n a(u_t) d(u_t) \prod_{j,k=1}^n [u_j - u_k + 1]}{\prod_{j \neq k} [u_j - u_k]} \det_n [\Phi(\{u\})], \end{aligned} \quad (3.21)$$

with

$$[\Phi(\{u\})]_{jk} = \delta_{jk} \left\{ \log' \frac{a}{d}(u_j) + \sum_{t=1}^n \tilde{K}(u_j - u_t) \right\} - \tilde{K}(u_j - u_k). \quad (3.22)$$

Here we have defined the even function

$$\tilde{K}(u) = \frac{[u-1]'}{[u-1]} - \frac{[u+1]'}{[u+1]}. \quad (3.23)$$

Note that the formula (3.21) is very similar to its XXZ analog [36, 65].

*Remark 3.3.* In the case  $\aleph = 0$  ( $n = N/2$ ), the above formula does not explicitly depend on the periodicity  $L$  of the model. Hence, one can easily take the limit  $L \rightarrow \infty$ , extending by continuity the validity of (3.21) to all values of  $\eta$ , including irrational ones. In that case, the cyclic condition has only been used so as to avoid the subtleties of dealing with an infinite-dimensional space of states.

## 4 Solution of the quantum inverse problem

In the ABA framework, the Bethe states are constructed by a repeated action of  $n$  non-local operators  $B$  on the reference state  $|0\rangle$ . In order to compute form factors and correlation functions, one needs to be able to act explicitly with local operators on such states, which may seem not so easy (at least by direct computation) due to the mixture of local and non-local operators in a same expression. A way to solve this problem was proposed in [63]: it relies on the solution of the quantum inverse problem, which consists in expressing the local operator we consider in terms of the generators of the Yang-Baxter algebra; as a result, it is possible to compute the action of this local operator on a Bethe state by using only the quadratic Yang-Baxter commutation relations given by the  $R$ -matrix.

The method described in [63, 78], which relies on the fundamental property that the  $R$ -matrix evaluated at 0 coincides with a permutation operator, can also be applied to the dynamical case. Indeed, the structure of the  $R$ -matrix (2.2) implies that, for any value of  $s$ ,

$$R_{ij}(0; s) = P_{ij}, \quad (4.1)$$

where  $P_{ij}$  is the permutation operator of spaces  $i$  and  $j$ . The explicit reconstruction of local operators in the dynamical SOS case involves however some subtleties (with respect to the simplest XXZ case) due to the presence of the dynamical parameter  $s$ .

Let  $E_i^{\alpha\beta}$  be the elementary matrix, acting on the  $i$ -th space of the tensor product  $\mathcal{H} = V^{\otimes N}$ , with elements  $(E_i^{\alpha\beta})_{jk} = \delta_j^\alpha \delta_k^\beta$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are equal to  $\pm 1$ . In order to adapt the method of [63, 78] to the dynamical case, we first note that

$$h_i E_i^{\alpha\beta} = E_i^{\alpha\beta} (h_i + \alpha - \beta). \quad (4.2)$$

We shall also use the following lemmas:

**Lemma 4.1.** *For any value of  $s$ , we have the identity*

$$T_{a_1, 1 \dots N}(\xi_1; s) T_{a, 1 \dots N}(u; s + h_{a_1}) = T_{a, 2 \dots N a_1}(u; s + h_1) T_{a_1, 1 \dots N}(\xi_1; s + h_a), \quad (4.3)$$

in which  $T_{a, 1 \dots N}$  (respectively  $T_{a, 2 \dots N a_1}$ ) is the monodromy matrix of a chain of  $N$  sites labelled (in this order) by  $1, 2, \dots, N$  (respectively by  $2, 3, \dots, N, a_1$ ) with inhomogeneity parameters  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  (respectively  $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N, \xi_1$ ).

*Proof* — Applying the quadratic commutation relation (2.8) on the l.h.s. of (4.3), we get

$$\begin{aligned} T_{a_1, 1 \dots N}(\xi_1; s) T_{a, 1 \dots N}(u; s + h_{a_1}) &= R_{a_1 a}^{-1}(\xi_1 - u; s + h_{1 \dots N}) \\ &\quad \times T_{a, 1 \dots N}(u; s) T_{a_1, 1 \dots N}(\xi_1; s + h_a) R_{a_1 a}(\xi_1 - u; s). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Then, using the fact that  $R_{a_1 1}(0) = P_{a_1 1}$  and that  $R$  is of weight 0, we have

$$T_{a_1, 1 \dots N}(\xi_1; s + h_a) R_{a_1 a}(\xi_1 - u; s) = R_{1a}(\xi_1 - u; s) T_{a_1, 1 \dots N}(\xi_1; s + h_a). \quad (4.5)$$

On the other hand, the  $R$ -matrix being unitary, we have

$$R_{a_1 a}^{-1}(\xi_1 - u; s + h_{1 \dots N}) T_{a, 1 \dots N}(u; s) R_{1a}(\xi_1 - u; s) = T_{a, 2 \dots N a_1}(u; s + h_1), \quad (4.6)$$

which ends the proof.  $\square$

**Lemma 4.2.** *For any value of  $s$ , we have the following identity between products of monodromy matrices:*

$$\begin{aligned} & T_{a_1, 1 \dots N}(\xi_1; s) T_{a_2, 1 \dots N}(\xi_2; s + h_{a_1}) \dots T_{a_i, 1 \dots N}(\xi_i; s + h_{a_1} + h_{a_2} + \dots + h_{a_{i-1}}) \\ &= T_{a_i, i \dots N a_1 a_2 \dots a_{i-1}}(\xi_i; s + h_1 + h_2 + \dots + h_{i-1}) \\ &\times T_{a_{i-1}, i-1 \dots N a_1 a_2 \dots a_{i-2}}(\xi_{i-1}; s + h_1 + h_2 + \dots + h_{i-2} + h_{a_i}) \dots \\ &\dots T_{a_2, 2 \dots N a_1}(\xi_2; s + h_1 + h_{a_3} + \dots + h_{a_i}) T_{a_1, 1 \dots N}(\xi_1; s + h_{a_2} + \dots + h_{a_i}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

where the notations are similar to Lemma 4.1 (i.e. for instance  $T_{a_i, i \dots N a_1 a_2 \dots a_{i-1}}$  denotes the monodromy matrix of a chain of  $N$  sites labelled by  $i, \dots, N, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$  with inhomogeneity parameters  $\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_N, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}$ ).

*Proof* — (4.7) can be proven by induction on  $i$  using (4.3).  $\square$

The solution of the quantum inverse problem, i.e. the reconstruction of local operators  $E_i^{\alpha\beta}$  in terms of the entries of the monodromy matrix (2.9), can be formulated as follows:

**Theorem 4.1.** *A local operator  $E_i^{\alpha\beta}$  acting on the  $i$ -th space of the tensor product  $\mathcal{H} = V^{\otimes N}$  can be expressed in terms of the entries of the monodromy matrix (2.9) in the following way:*

$$E_i^{\alpha\beta} = \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_i) \cdot \prod_{k=i}^1 [\hat{t}(\xi_k)]^{-1} \cdot \hat{\tau}_s^{\beta-\alpha}. \quad (4.8)$$

Hence, a product of local operators on adjacent sites admits the following reconstruction:

$$E_i^{\alpha_i \beta_i} E_{i+1}^{\alpha_{i+1} \beta_{i+1}} \dots E_{i+j}^{\alpha_{i+j} \beta_{i+j}} = \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \prod_{k=i}^{i+j} \hat{T}_{\beta_k \alpha_k}(\xi_k) \cdot \prod_{k=i+j}^1 [\hat{t}(\xi_k)]^{-1} \cdot \hat{\tau}_s^{\sum_{k=i}^{i+j} [\beta_k - \alpha_k]}. \quad (4.9)$$

*Proof* — Let us first prove (4.8) for  $i = 1$ . Writing  $\hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_1)$  as a trace over an auxiliary space, and expressing the monodromy matrix (2.9) in terms of products of  $R$ -matrices and shift operator  $\hat{\tau}_s$ , we get

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_1) &= \text{tr}_a [\hat{T}_{a, 1 \dots N}(\xi_1; \xi_1, \dots, \xi_N) E_a^{\alpha\beta}] \\ &= \text{tr}_a [R_{aN}(\xi_1 - \xi_N; \hat{s} + h_1 + \dots + h_{N-1}) \dots R_{a2}(\xi_1 - \xi_2; \hat{s} + h_1) P_{a1} \hat{\tau}_s^{h_a} E_a^{\alpha\beta}], \end{aligned}$$

in which we have used (4.1). Passing in this expression the operator  $E_a^{\alpha\beta}$  from right to left by means of (4.2), we obtain

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_1) &= \text{tr}_a [E_1^{\alpha\beta} R_{aN}(\xi_1 - \xi_N; \hat{s} + h_1 + \dots + h_{N-1} + \alpha - \beta) \dots \\ &\dots R_{a2}(\xi_1 - \xi_2; \hat{s} + h_1 + \alpha - \beta) P_{a1} \hat{\tau}_s^{h_a + \alpha - \beta}] \\ &= E_1^{\alpha\beta} \text{tr}_a [T_{a, 1 \dots N}(\xi_1; \xi_1, \dots, \xi_N; \hat{s} + \alpha - \beta) \hat{\tau}_s^{h_a + \alpha - \beta}] \\ &= E_1^{\alpha\beta} \hat{\tau}_s^{\alpha - \beta} \hat{t}(\xi_1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

which ends the proof of (4.8) in the case  $i = 1$ .

In the general case, one proceeds similarly by writing  $\prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_i)$  as a trace over auxiliary spaces:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_i) &= \text{tr}_{a_1 \dots a_{i-1} a_i} [\hat{T}_{a_1}(\xi_1) \dots \hat{T}_{a_{i-1}}(\xi_{i-1}) \hat{T}_{a_i}(\xi_i) E_{a_i}^{\alpha\beta}] \\ &= \text{tr}_{a_1 \dots a_{i-1} a_i} [T_{a_1}(\xi_1; \hat{s}) \dots T_{a_{i-1}}(\xi_{i-1}; \hat{s} + h_{a_1} + \dots + h_{a_{i-2}}) \\ &\quad \times T_{a_i}(\xi_i; \hat{s} + h_{a_1} + \dots + h_{a_{i-1}}) \hat{\tau}_s^{h_{a_1} + \dots + h_{a_{i-1}} + h_{a_i}} E_{a_i}^{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Passing the elementary matrix  $E_{a_i}^{\alpha\beta}$  from the right to the left, first through the shift operator  $\hat{\tau}_s^{h_{a_1} + \dots + h_{a_{i-1}} + h_{a_i}}$ , and then through the product of monodromy matrices, one obtains

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_i) &= E_i^{\alpha\beta} \text{tr}_{a_1 \dots a_{i-1} a_i} [T_{a_1}(\xi_1; \hat{s} + \alpha - \beta) \dots \\ &\quad \dots T_{a_{i-1}}(\xi_{i-1}; \hat{s} + h_{a_1} + \dots + h_{a_{i-2}} + \alpha - \beta) \\ &\quad \times T_{a_i}(\xi_i; \hat{s} + h_{a_1} + \dots + h_{a_{i-1}} + \alpha - \beta) \hat{\tau}_s^{h_{a_1} + \dots + h_{a_{i-1}} + h_{a_i} + \alpha - \beta}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Here we have used (4.2), and the fact that the product of monodromy matrices could be expressed in a convenient way by means of Lemma 4.2, so that its commutation with  $E_a^{\alpha\beta}$  (which becomes  $E_i^{\alpha\beta}$  by this process) can be performed similarly as in the case  $i = 1$ . Finally, it remains to note that (4.12) can be rewritten as

$$\prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \hat{T}_{\beta\alpha}(\xi_i) = E_i^{\alpha\beta} \hat{\tau}_s^{\alpha-\beta} \prod_{k=1}^i \hat{t}(\xi_k), \quad (4.13)$$

which ends the proof of (4.8).

(4.9) can be proven by induction from (4.13).  $\square$

## 5 Determinant representation for finite-size form factors

In this section we consider finite-size form factors of the 8VSOS model in the cyclic case, i.e. matrix elements of local operators between Bethe eigenstates of the finite-size transfer matrix. We recall that the space of states of the 8VSOS model corresponds to the space of functions of the height  $s$  with values in the zero-weight space  $\mathcal{H}[0]$ , where  $\mathcal{H} = V^{\otimes N}$ . Note that the action of an operator of the type  $E_i^{+-}$  or  $E_i^{-+}$  on a zero-weight state of  $\mathcal{H}[0]$  results in a new state of  $\mathcal{H}$  which is no longer of zero-weight, and therefore does not belong to the space of states of the model. Hence, the only physical form factors of the model are those involving local operators of the type  $E_i^{++}$  or  $E_i^{--}$ .

Let us first consider the matrix element of the operator  $E_i^{--}$  at site  $i$  between two Bethe eigenstates  $\langle \{u\}, \omega_u |$  and  $| \{v\}, \omega_v \rangle$ , where  $\{u\} \equiv \{u_1, \dots, u_n\}$  and  $\{v\} \equiv \{v_1, \dots, v_n\}$  are solutions of Bethe equations, associated respectively to  $\omega_u$  and  $\omega_v$ . From the solution (4.8) of the inverse problem, we get

$$E_i^{--} = \prod_{k=1}^{i-1} \hat{t}(\xi_k) \cdot \hat{D}(\xi_i) \cdot \prod_{k=i}^1 [\hat{t}(\xi_k)]^{-1}. \quad (5.1)$$

Hence we have

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | E_i^{--} | \{v\}, \omega_v \rangle &= \frac{\prod_{k=1}^{i-1} \tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\prod_{k=1}^i \tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \tilde{\varphi}_{\omega_u}(s) \varphi_{\omega_v}(s-1) \\ &\times \langle 0 | C(u_n; s-n) \dots C(u_1; s-1) D(\xi_i; s) B(v_1; s-1) \dots B(v_n; s-n) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Using the commutation relation, which follows from (2.8), of the operator  $D$  with the operators  $B$ , we can express (5.2) in terms of the partial scalar product (3.10):

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | E_i^{--} | \{v\}, \omega_v \rangle &= \frac{\prod_{k=1}^{i-1} \tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\prod_{k=1}^i \tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \tilde{\varphi}_{\omega_u}(s) \varphi_{\omega_v}(s-1) \\ &\times \frac{[s-n-1][1]}{[s][s-1]} \sum_{j=1}^n (-1)^{r_{\mathbb{N}}} d(v_j) \frac{[s+v_j-\xi_i]}{[v_j-\xi_i]} \prod_{l \neq j} \frac{[v_j-v_l+1]}{[v_j-v_l]} \\ &\times S_n(\{u\}; \{v_\beta\}_{\beta \neq j} \cup \{\xi_i\}; s). \end{aligned} \quad (5.3)$$

From (2.14), (2.18), and the value (3.10) of the partial scalar product, we get

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | E_i^{--} | \{v\}, \omega_v \rangle &= \frac{\prod_{k=1}^{i-1} \tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\prod_{k=1}^i \tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \frac{1}{[\gamma]^n} \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \\ &\times \sum_{j=1}^n (-1)^{r_{\mathbb{N}}+1} d(v_j) \prod_{l=1}^n \frac{[v_j - v_l + 1]}{[\xi_i - v_l]} \sum_{S, \tilde{S} \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \\ &\times \prod_{k \notin \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_{\mathbb{N}}} a(\hat{v}_k) \prod_{t=1}^n [u_t - \hat{v}_k + 1] \right\} \prod_{k \in \tilde{S}} \left\{ \frac{d(\hat{v}_k)}{\omega_u^2} \prod_{t=1}^n [u_t - \hat{v}_k - 1] \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \frac{\omega_u^{-s} \omega_v^{s-1} [s + v_j - \xi_i]}{[|u| - |v| + v_j - \xi_i + \gamma + s]} \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \right\} \\ &\times \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{\hat{v} - \delta^{S\tilde{S}}\})], \end{aligned} \quad (5.4)$$

where  $\gamma$  is arbitrary, and  $\hat{v}_k = v_k$  if  $k \neq j$ ,  $\hat{v}_j = \xi_i$ . Setting  $\gamma = -|u| + |v|$  and performing a change of indices in the sum over  $s$ , we see that, similarly as for the computation of the scalar product, we can factorize out the sum over  $s$  and use the linearity of the determinant to recast the last sum over determinants into a single one:

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | E_i^{--} | \{v\}, \omega_v \rangle &= \frac{\prod_{k=1}^{i-1} \tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\prod_{k=1}^i \tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^{s-1} \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \sum_{j=1}^n (-1)^{r_{\mathbb{N}}+1} d(v_j) \prod_{l=1}^n \frac{[v_j - v_l + 1]}{[\xi_i - v_l]} \\ &\times \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{\hat{v}\}, \omega_v)], \end{aligned} \quad (5.5)$$

with  $\Omega_\gamma$  given by (3.20). Finally, the remaining sum can be seen as the expansion of the

determinant of the sum of two matrices, one of which being of rank 1:

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | E_i^{--} | \{v\}, \omega_v \rangle &= \left\{ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \left\{ \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)] \right. \\ &\quad \left. - \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) - \mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_i)] \right\}, \quad (5.6) \end{aligned}$$

where we have defined the rank 1 matrix  $\mathcal{P}_\gamma$  as

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_i)]_{ab} &= \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_a - \xi_i + \gamma]}{[u_a - \xi_i]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_a - \xi_i + \gamma + 1]}{[u_a - \xi_i + 1]} \right\} \\ &\times (-1)^{r_{\mathbf{N}}} a(v_b) \prod_{t=1}^n \left\{ [v_t - v_b + 1] \frac{[u_t - \xi_i + 1]}{[v_t - \xi_i + 1]} \right\}. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Note that we have used the Bethe equations for  $\{v\}$  to express  $\mathcal{P}_\gamma$  as in (5.7).

*Remark 5.1.* When  $\{u\} \neq \{v\}$ , one can use the orthogonality of the corresponding Bethe eigenstates and the fact that  $\det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)] = 0$  to simplify the expression (5.6).

The computation of the matrix element  $\langle \{u\}, \omega_u | E_i^{++} | \{v\}, \omega_v \rangle$  can be performed in a similar way, by using the solution of the quantum inverse problem for the operator  $E_i^{++}$  in terms of the operator  $\hat{A}(\xi_i)$ , and by computing the action of the latter on the state  $|\{v\}, \omega_v\rangle$ . One can also notice that  $E_i^{++} = 1 - E_i^{--}$  and use the previous result concerning the form factor of  $E_i^{--}$ . One obtains:

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | E_i^{++} | \{v\}, \omega_v \rangle &= \left\{ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) - \mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_i)]. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Combining these two results, one gets the following expression for the form factor of the operator  $\sigma_i^z$  between two Bethe eigenstates:

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | \sigma_i^z | \{v\}, \omega_v \rangle &= \left\{ \prod_{k=1}^{i-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbf{C}_{\mathbf{s}_0}^L} \omega_u^{-s} \omega_v^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) - 2\mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_i)]. \quad (5.9) \end{aligned}$$

We recall that, in all these expressions,  $\gamma = -|u| + |v|$ . Note that these formulas are very similar to those obtained in the XXZ case.

## 6 Master equation representation for the two-point function

We now consider the problem of the computation of the two-point function, which can be tackled by summation over the corresponding form factor series. We explain here how such a

summation can be formally performed in finite volume, hence resulting into a multiple integral representation for the two-point function, similar to the representation that was introduced in [61] in the XXZ case under the name of *master equation* representation. This terminology was due to the fact that such a formula could be understood as the common result of two possible ways of computing the two-point function as a sum over elementary objects: over form factors on the one hand, or over elementary building blocks on the other hand.

We consider here a quantity which is the analog of the generating function studied in [61]. Namely, for a generic complex number  $\kappa$ , we introduce the operator

$$\mathcal{Q}_{1,m}^\kappa = \prod_{j=1}^m \left( \frac{1+\kappa}{2} + \frac{1-\kappa}{2} \sigma_j^z \right) = \prod_{j=1}^m (E_j^{++} + \kappa E_j^{--}). \quad (6.1)$$

The mean value of this operator in the ground state  $|\{u\}, \omega_u\rangle$  of the transfer matrix,

$$\langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle = \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa | \{u\}, \omega_u \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle}, \quad (6.2)$$

which can be seen as a polynomial of degree  $m$  in  $\kappa$ , is a generating function for the two-point function of the finite-size one-dimensional quantum dynamical model whose Hamiltonian is obtained from the finite-size transfer matrix. In the thermodynamic limit, it also gives the probability, in the CSOS model, that two sites on a same line at distance  $m$  have a difference of height  $\ell \leq m$ : the latter is given by the coefficient of  $\kappa^{\frac{m-\ell}{2}}$  of (6.2)<sup>7</sup>.

The quantity (6.2) can be evaluated by summation over form factors corresponding to a suitable basis of the space of states. In the present case, such states can be conveniently chosen as the eigenstates of the  $\kappa$ -twisted transfer matrix  $\hat{t}_\kappa(u) = \hat{A}(u) + \kappa \hat{D}(u)$ . The latter can be constructed similarly as in the untwisted case, as states of the form (2.13)-(2.14) or (2.18)-(2.19) with parameters  $\{v\}_\kappa$  satisfying the following system of  $\kappa$ -twisted Bethe equations:

$$a(v_j) \prod_{l \neq j} \frac{[v_l - v_j + 1]}{[v_l - v_j]} = (-1)^{r_\kappa} \kappa \omega^{-2} d(v_j) \prod_{l \neq j} \frac{[v_j - v_l + 1]}{[v_j - v_l]}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

The corresponding eigenvalues are

$$\tau_\kappa(u; \{v\}_\kappa, \omega) = \omega a(u) \prod_{l=1}^n \frac{[v_l - u + 1]}{[v_l - u]} + (-1)^{r_\kappa} \kappa \omega^{-1} d(u) \prod_{l=1}^n \frac{[u - v_l + 1]}{[u - v_l]}. \quad (6.4)$$

Indeed, from the solution (4.9) of the inverse problem, the operator (6.1) can be expressed as follows:

$$\mathcal{Q}_{1,m}^\kappa = \prod_{i=1}^m \hat{t}_\kappa(\xi_i) \cdot \prod_{i=m}^1 [\hat{t}(\xi_i)]^{-1}. \quad (6.5)$$

Hence, provided the eigenstates  $|\{v\}_\kappa, \omega_v\rangle$  of  $\hat{t}_\kappa(u)$  form a complete basis of the space of

---

<sup>7</sup>We suppose here that  $m \ll L$ . In fact, in this section, we are not interested in the specific properties of the root of unity case, but rather in obtaining a formula that could be extended by continuity to the case of irrational  $\eta$ . Therefore, when necessary, we may suppose  $L$  large enough (for instance  $L > N$ ) to avoid problems of cyclicity on the lattice.

states, one can expand the mean value (6.2) as

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle &= \sum_{\{v\}_\kappa, \omega_v} \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v | \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa | \{u\}, \omega_u \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v | \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle}, \\ &= \sum_{\{v\}_\kappa, \omega_v} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_i; \{v\}_\kappa, \omega_v)}{\tau(\xi_i; \{u\}, \omega_u)} \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v | \{u\}, \omega_u \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}_\kappa, \omega_v | \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle},\end{aligned}\quad (6.6)$$

and then use the determinant representations obtained in Section 3 to express the scalar products.

In the untwisted case, for a rational parameter  $\eta = \frac{1}{L}$  and for  $n = N/2$ , the completeness of quasi  $L$ -periodic Bethe eigenstates (2.13)-(2.14) with generic multiplier  $\alpha$  (i.e. associated to  $\omega$  such that  $(-1)^n \omega^L = \alpha$ ) and generic inhomogeneity parameters  $\{\xi\}$  was shown by Felder, Tarasov and Varchenko in [28], at least for any large enough odd integer  $L > n$ . Their proof can easily be extended to the case of  $L$ -periodic  $\kappa$ -twisted Bethe eigenstates with arbitrary  $\kappa$  (at least in a vicinity of  $\kappa = 0$ , which is enough for the study of the polynomial quantity (6.2)), and to more general rational parameters  $\eta = r/L$  for  $L$  odd and large enough. This problem is discussed in Appendix E. Hence, in (6.6), the sum should be understood over all admissible<sup>8</sup> off-diagonal<sup>9</sup> solutions  $\{v\}_\kappa$  of the  $\kappa$ -twisted Bethe equations (6.3) with  $n = N/2$  ( $\aleph = 0$ ), associated to all possible values of  $\omega_v \in \mathbb{C}$  such that  $(-1)^{rn} \omega_v^L = 1$ .

The computation of the scalar product performed in Section 3 can easily be generalized to the  $\kappa$ -twisted case. Using the same arguments as for (3.19), one obtains that the scalar product between a  $\kappa$ -twisted Bethe eigenstate  $\langle \{v\}_\kappa, \omega_v |$  and a general state  $| \{w\}, \omega_w \rangle$  of the form (2.13)-(2.14) with  $n = N/2$  can be represented as<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}\langle \{v\}_\kappa, \omega_v | \{w\}, \omega_w \rangle &= \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in \mathbb{C}_{s_0}^L} \frac{\omega_w^s [\gamma + s]}{\omega_v^s [s]} \right\} \frac{\prod_{t=1}^n d(v_t)}{\prod_{j < k} [v_j - v_k] [w_k - w_j]} \\ &\quad \times \det_n [\Omega_\gamma^{(\kappa)}(\{v\}_\kappa, \omega_v; \{w\}, \omega_w)],\end{aligned}\quad (6.7)$$

with  $\gamma = -|v| + |w|$ , and

$$\begin{aligned}[\Omega_\gamma^{(\kappa)}(\{v\}, \omega_v; \{w\}, \omega_w)]_{ij} &= \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[v_i - w_j + \gamma]}{[v_i - w_j]} - \frac{\omega_w}{\omega_v} \frac{[v_i - w_j + \gamma + 1]}{[v_i - w_j + 1]} \right\} a(w_j) \prod_{t=1}^n [v_t - w_j + 1] \\ &\quad + \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[v_i - w_j + \gamma]}{[v_i - w_j]} - \frac{\omega_v}{\omega_w} \frac{[v_i - w_j + \gamma - 1]}{[v_i - w_j - 1]} \right\} \frac{\kappa}{\omega_v^2} d(w_j) \prod_{t=1}^n [v_t - w_j - 1].\end{aligned}\quad (6.8)$$

The “square of the norm” of a  $\kappa$ -twisted Bethe eigenstate is given by (3.21) or, alternatively, in terms of the function

$$\mathcal{Y}_{\kappa; \omega}(u; \{v\}) = a(u) \prod_l [v_l - u + 1] + \kappa \omega^{-2} d(u) \prod_l [v_l - u - 1],\quad (6.9)$$

as

$$\langle \{v\}_\kappa, \omega_v | \{v\}_\kappa, \omega_v \rangle = \frac{1}{(-[0]')^n} \frac{\prod_{t=1}^n d(v_t)}{\prod_{j \neq k} [v_j - v_k]} \cdot \det_n \left[ \frac{\partial}{\partial v_k} \mathcal{Y}_{\kappa; \omega_v}(v_j | \{v\}_\kappa) \right].\quad (6.10)$$

<sup>8</sup>A solution  $\{v\}$  of the system (6.3) is called admissible, if  $\prod_{k=1}^n [v_j - \xi_k] \prod_{l=1}^n [v_j - v_l + 1] \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

<sup>9</sup>See footnote 4.

<sup>10</sup>Here we only give the case  $n = N/2$  (i.e.  $\aleph = 0$ ). In the general case, there is an additional sign in the expression of  $\Omega_\gamma^{(\kappa)}$  as in (3.20).

Hence, using these determinant representations for the scalar products, one can rewrite (6.6) as

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle &= \frac{([0]')^{2n}}{L^2} \sum_{\{v\}_\kappa, \omega_v} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_i; \{v\}_\kappa, \omega_v)}{\tau(\xi_i; \{u\}, \omega_u)} \left\{ \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^{\mathbf{L}}} \frac{\omega_v^s}{\omega_u^s} \frac{[\gamma_v + s]}{[s]} \right\} \left\{ \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^{\mathbf{L}}} \frac{\omega_u^s}{\omega_v^s} \frac{[-\gamma_v + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\det_n [\Omega_{\gamma_v}(\{u\}, \omega_u; \{v\}_\kappa, \omega_v)] \cdot \det_n [\Omega_{-\gamma_v}^{(\kappa)}(\{v\}_\kappa, \omega_v; \{u\}, \omega_u)]}{\det_n \left[ \frac{\partial}{\partial u_k} \mathcal{Y}_{1;\omega_u}(u_j; \{u\}) \right] \cdot \det_n \left[ \frac{\partial}{\partial v_k} \mathcal{Y}_{\kappa;\omega_v}(v_j; \{v\}_\kappa) \right]}, \quad (6.11) \end{aligned}$$

in which we have set  $\gamma_v = |v| - |u|$ . As in [61], the sum over admissible off-diagonal solutions of the  $\kappa$ -twisted Bethe equations in (6.11) can be reexpressed as a multiple integral, and one obtains the following representation (*master equation*) for the generating function (6.2):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle &= \frac{1}{n!} \frac{([0]')^{2n}}{L^2} \sum_{\omega} \oint_{\Gamma(\{v\}_\kappa)} \frac{d^n z}{(2i\pi)^n} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_i; \{z\}, \omega)}{\tau(\xi_i; \{u\}, \omega_u)} \left\{ \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^{\mathbf{L}}} \frac{\omega^s}{\omega_u^s} \frac{[\gamma_z + s]}{[s]} \right\}^2 \\ &\times \frac{\det_n [\Omega_{\gamma_z}(\{u\}, \omega_u; \{z\}, \omega)] \cdot \det_n [\Omega_{-\gamma_z}^{(\kappa)}(\{z\}, \omega; \{u\}, \omega_u)]}{\det_n \left[ \frac{\partial}{\partial u_k} \mathcal{Y}_{1;\omega_u}(u_j; \{u\}) \right] \cdot \prod_{j=1}^n \mathcal{Y}_{\kappa;\omega}(z_j; \{z\})}. \quad (6.12) \end{aligned}$$

The sum in (6.12) is taken over all  $\omega \in \mathbb{C}$  such that  $(-1)^{rn} \omega^L = 1$ , and the integration contour is such that it surrounds (with index 1) all poles corresponding to solutions  $\{v\}_\kappa$  with  $n = N/2$  of the  $\kappa$ -twisted Bethe equations associated to  $\omega$ . The other poles of the integrand, which lie outside the contour, are poles at  $z_\ell = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  (issued from the factors  $\tau_\kappa(\xi_i; \{z\}, \omega)$ ), and poles at  $z_\ell = u_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  (contained in  $\det_n [\Omega_{-\gamma_z}^{(\kappa)}(\{z\}, \omega; \{u\}, \omega_u)]$ ). By considering these poles, one can, as in the XXZ case [61], rewrite the above integral in the alternative form

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}_{1,m}^\kappa \rangle &= \frac{1}{n!} \frac{([0]')^n}{L^2} \sum_{\omega} \oint_{\Gamma(\{\xi\}) \cup \Gamma(\{u\})} \frac{d^n z}{(2i\pi)^n} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_i; \{z\}, \omega)}{\tau(\xi_i; \{u\}, \omega_u)} \left\{ \sum_{s \in \mathbf{C}_{s_0}^{\mathbf{L}}} \frac{\omega^s}{\omega_u^s} \frac{[\gamma_z + s]}{[s]} \right\}^2 \\ &\times \frac{\det_n [\Omega_{\gamma_z}(\{u\}, \omega_u; \{z\}, \omega)] \cdot \det_n [\Omega_{-\gamma_z}^{(\kappa)}(\{z\}, \omega; \{u\}, \omega_u)]}{\det_n [\Omega_0(\{u\}, \omega_u; \{u\}, \omega_u)] \cdot \prod_{j=1}^n \mathcal{Y}_{\kappa;\omega}(z_j; \{z\})}. \quad (6.13) \end{aligned}$$

## 7 Conclusion

In this paper we have generalized the algebraic Bethe Ansatz approach to correlation functions to the dynamical case, i.e. to the case of an  $R$ -matrix depending on a dynamical parameter and satisfying the dynamical Yang-Baxter equation. In this framework, we have obtained finite-size representations for scalar products of Bethe states, form factors of local operators and two-point correlation function. These results hence initiate the study of correlation functions of the (cyclic) 8VSOS model within the framework of algebraic Bethe Ansatz. Applications of these formulas at the thermodynamic limit will be considered in further publications.

As we have seen, one of the difficulties of the ABA approach to correlation functions is that it relies on the existence of a compact and manageable expression, preferably as a single determinant, for the scalar products of Bethe states. In practice, such a representation may not be easy to obtain. It is even possible that it does not exist for all models, at least in the simplest expected form of a single determinant (see for instance the recent preprints [9, 8])

concerning  $SU(3)$ -invariant models). In the case of general SOS models, in fact, it seems that we can only obtain representations for the height-dependent (partial) scalar products (3.2) as sums of determinants. As in the case of the partition function with domain wall boundary conditions [85, 82], this is due to the shifts undergone by the dynamical parameter. However, as mentioned in Section 3, this is not very surprising, since height-dependent partial scalar products are actually not scalar products of Bethe states: the shifts of the dynamical parameter also prevent the corresponding states ((3.15) or (3.16)) from being eigenstates of the transfer matrix. In fact, when one considers true Bethe states (2.13)-(2.14) as adequate functions of the dynamical parameter, and their natural scalar products (3.1) which, in the cyclic case, can be expressed as a finite sum over all values of the dynamical parameter, one obtains for the latter a single determinant representation very similar to its XXZ analog. It follows in particular that the norm of a Bethe eigenstate can be expressed as a single determinant. As we have seen, this opens the way to the computation of form factors and correlation functions.

As a final remark, we would like to mention an interesting and promising alternative method: Sklyanin's separation of variables (SOV) method [89, 90], which has been recently developed in the direction of the computation of form factors [42, 81, 80]. The advantage of this approach is that it enables one to free oneself from the main difficulty of the ABA approach to correlation functions: the fact that, depending on the model we consider, we have a priori no guaranty that a convenient expression for the scalar products of Bethe states does exist and — should it exist — no model-independent constructive method to derive it. On the contrary, it seems that scalar products of states in the SOV framework can automatically (i.e. by construction) be expressed as a determinant. Let us note however that, at least at the present state of the art, the determinant representation obtained from ABA still presents some advantages, since it is more appropriate than its SOV counterpart for taking the thermodynamic limit.

## Acknowledgements

We thank G. Filali, N. Kitanine, G. Niccoli and J.M. Maillet for their interest in this work. V. T. would also like to thank M. Jimbo and J. Shiraishi for an old discussion at the origin of this work.

V. T. is supported by CNRS. We also acknowledge the support from the ANR grant DIADEMS 10 BLAN 012004. V. T. would like to thank LPTHE (Paris VI University) for hospitality.

## A Definition and useful properties of the function $u \mapsto [u]$

Let us set  $p = e^{2\pi i\tau}$ , with  $\Im\tau > 0$ . Let  $\theta_1(z; \tau)$  be the Theta function of quasi-periods 1 and  $\tau$  and nome  $p^{1/2} = e^{i\pi\tau}$ :

$$\begin{aligned}\theta_1(z; \tau) &= 2p^{1/8} \sin \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^n \cos 2\pi z + p^{2n})(1 - p^n) \\ &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n p^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)i\pi z}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

In the generic SOS model (i.e. for  $\eta$  generic), the elements (2.3)-(2.4) of the dynamical  $R$ -matrix are usually defined in terms of the function

$$[u] = \theta_1(\eta u; \tau), \quad (\text{A.2})$$

which is odd, entire, and satisfies the quasi-periodicity properties

$$[u + 1/\eta] = -[u], \quad [u + \tau/\eta] = -e^{-i\pi\tau} e^{-2i\pi\eta u} [u]. \quad (\text{A.3})$$

This function also satisfies the following useful properties:

1. Addition formula:

$$[x+u][x-u][y+v][y-v] - [x+v][x-v][y+u][y-u] = [x+y][x-y][u+v][u-v]. \quad (\text{A.4})$$

2. Let  $t \in \mathbb{C}$  and  $f$  be of the form

$$f(x) = \sum_j C^{(j)} \frac{[x - a_1^{(j)}] \cdots [x - a_{\ell+m}^{(j)}]}{[x - b_1^{(j)}] \cdots [x - b_\ell^{(j)}]}, \quad (\text{A.5})$$

where  $a_i^{(j)}, b_i^{(j)}, C^{(j)} \in \mathbb{C}$  such that  $a_1^{(j)} + \cdots + a_{\ell+m}^{(j)} - b_1^{(j)} - \cdots - b_\ell^{(j)} = t \pmod{1/\eta}$ ,  $\forall j$ . Then  $f$  satisfies the quasi-periodicity properties

$$f(x + 1/\eta) = (-1)^m f(x), \quad f(x + \tau/\eta) = (-1)^m e^{2\pi i \eta t - i\pi m(2\eta x + \tau)} f(x). \quad (\text{A.6})$$

Moreover, if  $f$  is entire (i.e. if the singularities at  $x = b_i^{(j)}$  are all removable), then it can be factored as

$$f(x) = C[x - a_1] \cdots [x - a_m], \quad (\text{A.7})$$

where  $C, a_1, \dots, a_m$  are complex numbers such that  $a_1 + \cdots + a_m = t$ .

3. Frobenius' determinant evaluation:

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} \left( \frac{[x_i - y_j + t]}{[x_i - y_j]} \right) = [t]^{n-1} [|x| - |y| + t] \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} [x_i - x_j][y_j - y_i]}{\prod_{i, j=1}^n [x_i - y_j]}, \quad (\text{A.8})$$

where  $|x| = x_1 + \cdots + x_n$ ,  $|y| = y_1 + \cdots + y_n$ .

4. For any positive integer  $L$ , one has the following identity:

$$\frac{[u + \gamma][0]'}{[u][\gamma]} = \sum_{k=0}^{L-1} e^{2\pi i \eta k u} \frac{[Lu + \gamma + k\frac{\tau}{\eta}]_L [0]'_L}{[Lu]_L [\gamma + k\frac{\tau}{\eta}]_L}, \quad (\text{A.9})$$

where  $[u]_L = \theta_1(\eta u; L\tau)$ . (A.9) can be shown by relabeling the sum ( $k \rightarrow k + Lj$ ) in the Fourier series expansion:

$$\frac{[u + \gamma][0]'}{[u][\gamma]} = -2i\pi\eta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i \eta k u}}{1 - e^{2\pi i \eta \gamma p^k}}. \quad (\text{A.10})$$

In the cyclic case, when  $L\eta = r_1 + r_2\tau$  with  $L, r_1, r_2$  integers, it is convenient, following Baxter [6]<sup>11</sup>, to re-define the function  $u \mapsto [u]$  as

$$[u] = \theta_1(\eta u; \tau) e^{i\pi r_2 \frac{\eta}{L} u^2}. \quad (\text{A.11})$$

The modified function (A.11) is odd, entire, and satisfies the quasi-periodicity properties:

$$[u + 1/\eta] = -e^{i\pi \frac{r_2}{L} (2u + \frac{1}{\eta})} [u], \quad [u + \tau/\eta] = -e^{-i\pi \frac{r_1}{L} (2u + \frac{\tau}{\eta})} [u]. \quad (\text{A.12})$$

It is also quasi-periodic of period  $L$  with a mere sign:

$$[u + L] = (-1)^{r_1 + r_2 + r_1 r_2} [u], \quad (\text{A.13})$$

so that a ratio of two such functions is periodic of period  $L$ . The modified function (A.11) still satisfies the properties 1. and 3. above. If moreover  $f$  is of the form (A.5) with  $a_1^{(j)} + \dots + a_{\ell+m}^{(j)} - b_1^{(j)} - \dots - b_{\ell}^{(j)} = t \pmod{L}$ ,  $\forall j$ , then  $f$  satisfies the quasi-periodicity properties

$$f(x + 1/\eta) = (-1)^m e^{i\pi \frac{r_2}{L} (2mx - 2t + m\frac{1}{\eta})} f(x), \quad f(x + \tau/\eta) = (-1)^m e^{i\pi \frac{r_1}{L} (2mx - 2t + m\frac{\tau}{\eta})} f(x),$$

and can be factored as in (A.7). In that case, it is enough to find  $m$  independent zeroes to prove that  $f$  vanishes identically.

In fact, as noticed in [24], the modified function (A.11) is nothing else but a usual theta function of the form (A.2) with different quasi-periods. This can easily be seen from the transformation property of the theta function (A.1) under the action of the modular group:

$$e^{i\pi \frac{cz^2}{c\tau+d}} \theta_1(z; \tau) \propto \theta_1\left(\frac{z}{c\tau+d}; \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right), \quad \text{for any } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}). \quad (\text{A.14})$$

Hence the modified function (A.11) is simply proportional to

$$[u] \propto \theta_1(\eta' u; \tau'), \quad \text{with } \eta' = \frac{r}{L} \quad \text{and} \quad \tau' = \frac{b + a\tau}{\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2\tau}. \quad (\text{A.15})$$

In this expression,  $r$  is the greatest common divisor of  $r_1$  and  $r_2$ , and the integers  $a, b, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2$  are such that  $r_1 = r\tilde{r}_1$ ,  $r_2 = r\tilde{r}_2$  and  $a\tilde{r}_1 - b\tilde{r}_2 = 1$ . Hence all the properties of (A.2) can trivially be extended to (A.11) with the mere replacement of  $\eta$  by  $\eta'$  and  $\tau$  by  $\tau'$ , and the study of the case  $L\eta = r_1 + r_2\tau$  is therefore equivalent to the simplest  $\eta = r/L$  case.

## B Partition function of the 8VSOS model with domain wall boundary conditions

In this appendix, we recall the result of [85] concerning the representation of the partition function of the 8VSOS model with domain wall boundary conditions as a sum of determinants, useful for the computation of scalar products. For a inhomogeneous square lattice of size  $N \times N$  with parameters  $u_1, \dots, u_N, \xi_1, \dots, \xi_N$ , this partition function can be expressed in terms of the entries of the monodromy matrix (2.7) (with inhomogeneity parameters  $\xi_1, \dots, \xi_N$ ) as

$$Z_N(u_1, \dots, u_N; \xi_1, \dots, \xi_N; s) = \langle 0 | C(u_N; s) C(u_{N-1}; s+1) \dots C(u_1; s + (N-1)) | \bar{0} \rangle, \quad (\text{B.1})$$

where  $|\bar{0}\rangle = \mathbf{e}_- \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_-$ . It can easily be shown that this quantity is uniquely determined by the following properties [85, 82]:

<sup>11</sup>Equation (9) of paper I of [6] corresponds in fact to  $L\eta = 2r_1 + 2r_2\tau$ . Here we get rid of factor 2 by allowing a sign in the  $L$ -periodicity (A.13) of the function  $u \mapsto [u]$ .

1.  $Z_1(u, \xi; s) = \frac{[1][s - u + \xi]}{[s][u - \xi + 1]}$ ;
2.  $Z_N(u_1, \dots, u_N; \xi_1, \dots, \xi_N; s)$  is symmetric in  $u_1, \dots, u_N$  and in  $\xi_1, \dots, \xi_N$  separately;
3.  $\prod_{\alpha, \ell=1}^N [u_\alpha - \xi_\ell + 1] Z_N(u_1, \dots, u_N; \xi_1, \dots, \xi_N; s)$  is a holomorphic function of each  $u_\alpha$  and each  $\xi_\ell$ ;
4. it satisfies the recursion relation:

$$\begin{aligned} & \frac{[u_N - \xi_N + 1]}{[1]} Z_N(u_1, \dots, u_N; \xi_1, \dots, \xi_N; s) \Big|_{u_N = \xi_N - 1} = \frac{[s + N]}{[s + N - 1]} \\ & \times \prod_{j=1}^{N-1} \frac{[u_j - \xi_N]}{[u_j - \xi_N + 1]} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{[\xi_k - \xi_N + 1]}{[\xi_k - \xi_N]} Z_{N-1}(u_1, \dots, u_{N-1}; \xi_1, \dots, \xi_{N-1}; s); \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

note that we have also

$$Z_N(u_1, \dots, u_N; \xi_1, \dots, \xi_N; s) \Big|_{u_N = \xi_N} = Z_{N-1}(u_1, \dots, u_{N-1}; \xi_1, \dots, \xi_{N-1}; s + 1); \quad (\text{B.3})$$

5.  $Z_N = f(u_1)$  as a function of  $u_1$  satisfies the quasi-periodicity properties:

$$f(u_1 + 1/\eta) = e^{-2i\pi \frac{\tau_2}{L}(s+N)} f(u_1), \quad f(u_1 + \tau/\eta) = e^{-2i\pi \frac{\tau_1}{L}(s+N)} f(u_1). \quad (\text{B.4})$$

In [85, 82], a representation of the partition function as a sum over the permutations of the set  $\{\xi\}$  was proposed. In [85], it was shown that this representation could be reduced to the following sum of determinants:

$$\begin{aligned} Z_N(\{u\}; \{\xi\}; s) &= \frac{[s + N]}{[\gamma]^N [|u| - |\xi| + \gamma + s + N]} \frac{\prod_{\alpha, \ell=1}^N [u_\alpha - \xi_\ell]}{\prod_{j < k} [u_j - u_k] [\xi_k - \xi_j]} \\ &\times \sum_{S \subset \{1, \dots, N\}} (-1)^{|S|} \frac{[\gamma + s + N - |S|]}{[s + N - |S|]} \det_N [\mathcal{N}_\gamma(\{u + \delta^S\}; \{\xi\})]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

In this expression,  $\gamma$  is a generic parameter (the left-hand side being independent of  $\gamma$ ),  $\mathcal{N}_\gamma$  is given by (3.11),  $|u| = u_1 + \dots + u_N$ ,  $|\xi| = \xi_1 + \dots + \xi_N$ , the sum runs over all subsets  $S$  of  $\{1, \dots, N\}$ , with  $|S|$  being the cardinality of  $S$  and  $\{u + \delta^S\} = \{u_j - \delta_j^S\}_{1 \leq j \leq N}$  with

$$\delta_j^S = \begin{cases} 1 & \text{if } j \in S, \\ 0 & \text{if } j \notin S. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Formula (B.5) was proved in [85] by induction over  $N$ . It is easy to see that, following the lines of the proof of [85], one can also obtain the equivalent formula:

$$\begin{aligned} Z_N(\{u\}; \{\xi\}; s) &= \frac{[s + N]}{[\gamma]^N [|u| - |\xi| + \gamma + s + N]} \frac{\prod_{\alpha, \ell=1}^N [u_\alpha - \xi_\ell]}{\prod_{j < k} [u_j - u_k] [\xi_k - \xi_j]} \\ &\times \sum_{S \subset \{1, \dots, N\}} (-1)^{|S|} \frac{[\gamma + s + N - |S|]}{[s + N - |S|]} \det_N [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; \{\xi - \delta^S\})]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

*Remark B.1.* The partition function  $Z_N(\{u\}; \{\xi\}; s)$  has no pole at  $|u| - |\xi| + \gamma + s + N = 0$  (it is holomorphic except at the points  $u_\alpha - \xi_\ell + 1 = 0$ ), which means that the sum of determinants in the second line of (B.5) or (B.7) has a zero at this point.

## C Solution of the recursion relation (3.8) for the scalar product

We show here that the solution of the recursion relation (3.8),(3.9), with the initial condition (3.7), is given by the following expression:

$$\begin{aligned}
G_{\ell_{k+1}, \dots, \ell_n}^{(k)}(\{u\}; \{v_1, \dots, v_k\}; s) &= \frac{[s-k]}{[\gamma]^n [|u| - |\xi_\ell|_{n-k} - |v|_k + \gamma + s]} \\
&\times \prod_{j=0}^{k-1} \frac{[s-j]}{[s+N-2n+j]} \prod_{l=k+1}^n \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell_l}}^N \frac{[\xi_{\ell_l} - \xi_j + 1]}{[\xi_{\ell_l} - \xi_j]} \cdot \prod_{j=1}^k \frac{1}{[\xi_{\ell_l} - v_j]} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n [u_j - \xi_{\ell_l} + 1]}{\prod_{\substack{j=k+1 \\ j \neq \ell_l}}^n [\xi_{\ell_j} - \xi_{\ell_l} + 1]} \right\} \\
&\times \frac{\prod_{j=1}^k d(v_j) \prod_{j=1}^n d(u_j) \prod_{k < j < l} [\xi_{\ell_j} - \xi_{\ell_l}]}{\prod_{j < l} [u_j - u_l] \prod_{j < l \leq k} [v_l - v_j]} \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \\ \tilde{S} \subset \{1, \dots, k\}}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \\
&\times \prod_{j \notin \tilde{S}} \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_{\mathbb{R}}} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \\
&\times \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_k^{S\tilde{S}}, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)]. \quad (\text{C.1})
\end{aligned}$$

Here we have used the notations of Proposition 3.1 with  $v_j^{S\tilde{S}} = v_j - \delta_j^{S\tilde{S}}$ ,  $\xi_{\ell_j}^S = \xi_{\ell_j} - \delta_j^S$  with  $\delta_j^S$  given by (B.6),  $|v|_k = v_1 + \dots + v_k$ ,  $|\xi_\ell|_{n-k} = \xi_{k+1} + \dots + \xi_n$ .

Let us first remark that (C.1) provides the correct expression for  $G_{\ell_1, \dots, \ell_n}^{(0)}$ : this follows from (3.7) and from the representation (B.7) for the partition function with domain wall boundary conditions.

Supposing that (C.1) is valid at level  $k-1$ , we now want to prove that it is also valid at level  $k$ . From the recursion relation (3.8), (3.9), we obtain

$$\begin{aligned}
G_{\ell_{k+1}, \dots, \ell_n}^{(k)}(\{u\}; \{v_1, \dots, v_k\}; s) &= \frac{1}{[\gamma]^n} \prod_{j=0}^k \frac{[s-j]}{[s+N-2n+j]} \\
&\times \prod_{l=k+1}^n \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell_l}}^N \frac{[\xi_{\ell_l} - \xi_j + 1]}{[\xi_{\ell_l} - \xi_j]} \cdot \frac{[\xi_{\ell_l} - v_k - 1]}{\prod_{j=1}^k [\xi_{\ell_l} - v_j]} \cdot \frac{\prod_{j=1}^n [u_j - \xi_{\ell_l} + 1]}{\prod_{\substack{j=k+1 \\ j \neq \ell_l}}^n [\xi_{\ell_j} - \xi_{\ell_l} + 1]} \right\} \\
&\times \frac{\prod_{j=1}^k d(v_j) \prod_{j=1}^n d(u_j) \prod_{k < j < l} [\xi_{\ell_j} - \xi_{\ell_l}]}{\prod_{j < l} [u_j - u_l] \prod_{j < l < k} [v_l - v_j]} \prod_{j=1}^N \frac{1}{[v_k - \xi_j]} \cdot f^{(k)}(v_k), \quad (\text{C.2})
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(v_k) &= \prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j] \sum_{\ell_k=1}^N \frac{[1][s + N - 2n + k + v_k - \xi_{\ell_k}]}{[v_k - \xi_{\ell_k}][|u| - |\xi_{\ell}|_{n-k+1} - |v|_{k-1} + \gamma + s]} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell_k}}^N \frac{[\xi_{\ell_k} - \xi_j + 1]}{[\xi_{\ell_k} - \xi_j]} \\
&\times \frac{\prod_{j=1}^n [u_j - \xi_{\ell_k} + 1]}{\prod_{j=k+1}^n [\xi_{\ell_j} - \xi_{\ell_k} - 1] \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [\xi_{\ell_k} - v_j]} \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \\ \tilde{S} \subset \{1, \dots, k-1\}}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \\
&\times \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \tilde{S}}}^{k-1} \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_N} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \\
&\times \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, \xi_{\ell_k}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)]. \quad (\text{C.3})
\end{aligned}$$

Note that the sum in (C.3) (which corresponds to the sum in (3.8)) has been extended to all values of  $\ell_k$ : indeed the sum over determinants, which is antisymmetric by exchange of two different  $\xi_\ell$ , vanishes for  $\ell_k = \ell_j$ ,  $j = k+1, \dots, n$ . The function (C.3) of  $v_k$  is an entire function of the form (A.5) with  $m = N$  and  $t = \sum_{j=1}^N \xi_j - s - N + 2n - k$ . It can also be written as

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(v_k) &= \prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j] \sum_{\ell_k=1}^N \frac{[1][s + N - 2n + k + v_k - \xi_{\ell_k}]}{[v_k - \xi_{\ell_k}][|u| - |\xi_{\ell}|_{n-k+1} - |v|_{k-1} + \gamma + s]} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell_k}}^N \frac{[\xi_{\ell_k} - \xi_j + 1]}{[\xi_{\ell_k} - \xi_j]} \\
&\times \frac{1}{\prod_{j=k+1}^n [\xi_{\ell_j} - \xi_{\ell_k} - 1] \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [\xi_{\ell_k} - v_j]} \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{k\} \\ \tilde{S} \subset \{1, \dots, k-1\}}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \\
&\times \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \tilde{S}}}^{k-1} \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_N} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \\
&\times \det_n [\hat{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, \xi_{\ell_k}, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)], \quad (\text{C.4})
\end{aligned}$$

with  $[\hat{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}]_{ij} = [\mathcal{N}_\gamma]_{ij}$  for  $j \neq k$  and

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, \xi_{\ell_k}, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)]_{ik} &= \prod_{j=1}^n [u_j - \xi_{\ell_k} + 1] \\
&\times \left\{ \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \frac{[u_i - \xi_{\ell_k} + \gamma]}{[u_i - \xi_{\ell_k}]} - \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}| - 1]}{[s - |S| + |\tilde{S}| - 1]} \frac{[u_i - \xi_{\ell_k} + \gamma + 1]}{[u_i - \xi_{\ell_k} + 1]} \right\} \\
&= - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [u_j - \xi_{\ell_k} + 1] \frac{[1][\gamma][u_i - \xi_{\ell_k} + s - |S| + |\tilde{S}| + \gamma][u_i - \xi_{\ell_k} - s + |S| - |\tilde{S}| + 1]}{[s - |S| + |\tilde{S}|][s - |S| + |\tilde{S}| - 1][u_i - \xi_{\ell_k}]},
\end{aligned}$$

in which we have used (A.4). This function is equal to

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(v_k) &= \frac{[s + N - 2n + k]}{[|u| - |\xi_\ell|_{n-k} - |v|_k + \gamma + s]} \frac{1}{\prod_{j=k+1}^n [\xi_{\ell_j} - v_k - 1] \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [v_k - v_j]} \\
&\times \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{k\} \\ \tilde{S} \subset \{1, \dots, k-1\}}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \tilde{S}}}^{k-1} \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_{\mathbb{N}}} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \\
&\times \left\{ \prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j + 1] \det_n [\hat{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, v_k, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)] \right. \\
&\quad \left. - (-1)^{r_{\mathbb{N}}} \omega_u^{-2} \prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j] \det_n [\tilde{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, v_k, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)] \right\} \\
&+ (-1)^{r_{\mathbb{N}}} \omega_u^{-2} \prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j] \sum_{q=k+1}^n \frac{[s + N - 2n + v_k - \xi_{\ell_q} + k + 1]}{[|u| - |\xi_\ell|_{n-k} - |v|_{k-1} - \xi_{\ell_q} + \gamma + s + 1]} \frac{1}{[\xi_{\ell_q} - v_k - 1]} \\
&\times \prod_{\substack{j=k+1 \\ j \neq q}}^n \frac{1}{[\xi_{\ell_j} - \xi_{\ell_q}]} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{[\xi_{\ell_q} - v_j - 1]} \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{k\} \\ \tilde{S} \subset \{1, \dots, k-1\}}} (-1)^{|S|} \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \tilde{S}}}^{k-1} \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \\
&\times \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_{\mathbb{N}}} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \det_n [\tilde{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, \xi_{\ell_q} - 1, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)] \\
&- \sum_{q=1}^{k-1} \frac{[s + N - 2n + v_k - v_q + k]}{[|u| - |\xi_\ell|_{n-k} - |v|_{k-1} - v_q + \gamma + s]} \frac{\prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j]}{[v_k - v_q]} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq q}}^{k-1} \frac{1}{[v_q - v_l]} \prod_{j=k+1}^n \frac{1}{[\xi_{\ell_j} - v_q - 1]} \\
&\times \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{k\} \\ \tilde{S} \subset \{1, \dots, k-1\}}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \tilde{S}}}^{k-1} \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_{\mathbb{N}}} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \\
&\times (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \left\{ \prod_{j=1}^N \frac{[v_q - \xi_j + 1]}{[v_q - \xi_j]} \det_n [\hat{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, v_q, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)] \right. \\
&\quad \left. - (-1)^{r_{\mathbb{N}}} \omega_u^{-2} \det_n [\tilde{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, v_q, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)] \right\}, \quad (\text{C.5})
\end{aligned}$$

with  $[\tilde{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, v_k, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)]_{ij} = [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, \xi_{\ell_k}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)]_{ij}$  for  $j \neq k$  and

$$\begin{aligned}
&[\tilde{\mathcal{N}}_\gamma^{(k)}(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, v_k, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)]_{ik} \\
&= - \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n [u_l - v_k - 1] \frac{[1][\gamma][u_i - v_k + s - |S| + |\tilde{S}| + \gamma][u_i - v_k - s + |S| - |\tilde{S}| - 1]}{[s - |S| + |\tilde{S}|][s - |S| + |\tilde{S}| + 1][u_i - v_k]}
\end{aligned}$$

$$= - \prod_{l=1}^n [u_l - v_k - 1] \left\{ \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \frac{[u_i - v_k + \gamma]}{[u_i - v_k]} - \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}| + 1]}{[s - |S| + |\tilde{S}| + 1]} \frac{[u_i - v_k + \gamma - 1]}{[u_i - v_k - 1]} \right\}, \quad (\text{C.6})$$

in which we have used (A.4). Note that, due to the fact that  $\{u\}$  satisfies the Bethe equations, there is no pole at  $v_k = u_i$  in (C.5). Note also that, due to Remark (B.1), there is no pole at  $|u| - |\xi_\ell|_{n-k} - |v|_k + \gamma + s = 0$  since the corresponding sums over determinants have a zero at this point. Therefore the function (C.5) is an entire function of the form (A.5) with  $m = N$  and  $t = \sum_{j=1}^N \xi_j - s - N + 2n - k$ , and it takes the same value than (C.4) at the  $N$  independent points  $v_k = \xi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Hence the equality between (C.4) and (C.5).

Up to the product  $\prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j]$ , the second term in (C.5) is equal to

$$\begin{aligned} & (-1)^{r\aleph} \omega_u^{-2} \sum_{q=k+1}^n \frac{[s + N - 2n + v_k - \xi_{\ell_q} + k + 1]}{[|u| - |\xi_\ell|_{n-k} - |v|_{k-1} - \xi_{\ell_q} + \gamma + s + 1]} \frac{\prod_{l=1}^n [u_l - \xi_{\ell_q}]}{[\xi_{\ell_q} - v_k - 1]} \prod_{\substack{l=k+1 \\ l \neq q}}^n \frac{1}{[\xi_{\ell_l} - \xi_{\ell_q}]} \\ & \times \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{[\xi_{\ell_q} - v_j - 1]} \sum_{\tilde{S} \subset \{1, \dots, k-1\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \tilde{S}}}^{k-1} \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r\aleph} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \\ & \times \sum_{S \subset \{1, \dots, n\} \cup \{q\}} (-1)^{|S|} \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}| + 1]}{[s - |S| + |\tilde{S}| + 1]} \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, \xi_{\ell_q}^S, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)], \end{aligned}$$

which is equal to zero since the sum over  $S$  is antisymmetric with respect to the variables  $\xi_\ell$ , and since the variable  $\xi_{\ell_q}$  appears twice in this sum. Also, up to the product  $\prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j]$ , the third term in (C.5) is equal to

$$\begin{aligned} & - \sum_{q=1}^{k-1} \frac{[s + N - 2n + v_k - v_q + k]}{[|u| - |\xi_\ell|_{n-k} - |v|_{k-1} - v_q + \gamma + s]} \frac{1}{[v_k - v_q]} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq q}}^{k-1} \frac{1}{[v_q - v_l]} \prod_{j=k+1}^n \frac{1}{[\xi_{\ell_j} - v_q - 1]} \\ & \times \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \cup \{q\} \setminus \{k\} \\ \tilde{S} \subset \{1, \dots, k-1\} \cup \{q\}}} \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, k-1\} \\ \cup \{q\} \setminus \tilde{S}}} \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r\aleph} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \\ & \times (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; v_1^{S\tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S\tilde{S}}, v_q^{S\tilde{S}}, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)], \end{aligned}$$

which is equal to zero due to the antisymmetry of the sum over determinants by exchange of two  $v_\beta$  (the variable  $v_q$  appears twice in this sum). In the two above expressions, the notation  $\{1, \dots, n\} \cup \{q\}$  or  $\{1, \dots, k-1\} \cup \{q\}$  means a set that contains twice the element  $q$ .

Finally, we obtain,

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(v_k) &= \frac{[s + N - 2n + k]}{[|u| - |\xi_{\ell}|_{n-k} - |v|_k + \gamma + s]} \frac{\prod_{j=1}^N [v_k - \xi_j]}{\prod_{j=k+1}^n [\xi_{\ell_j} - v_k - 1] \cdot \prod_{j=1}^{k-1} [v_k - v_j]} \\
&\times \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, n\} \\ \tilde{S} \subset \{1, \dots, k\}}} (-1)^{|S|+|\tilde{S}|} \prod_{j=1}^k \left\{ \frac{a(v_j)}{d(v_j)} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1] \right\} \prod_{j \in \tilde{S}} \left\{ (-1)^{r_N} \omega_u^{-2} \prod_{l=1}^n [u_l - v_j - 1] \right\} \\
&\times \frac{[\gamma + s - |S| + |\tilde{S}|]}{[s - |S| + |\tilde{S}|]} \det_n [\mathcal{N}_\gamma(\{u\}; v_1^{S \tilde{S}}, \dots, v_{k-1}^{S \tilde{S}}, v_k^{S \tilde{S}}, \xi_{\ell_{k+1}}^S, \dots, \xi_{\ell_n}^S)], \quad (\text{C.7})
\end{aligned}$$

which means that  $G_{\ell_{k+1}, \dots, \ell_n}^{(k)}(\{u\}; \{v_1, \dots, v_k\}; s)$  is given by (C.1).

## D Orthogonality of two different Bethe eigenstates

We show in this Appendix that, similarly to the XXZ chain [60], the matrix  $\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)$  (3.20) giving the scalar product of two different Bethe eigenstates  $\langle \{u\}, \omega_u |$  and  $| \{v\}, \omega_v \rangle$ , with  $\{u\}$  and  $\{v\}$  two different off-diagonal solutions of the Bethe equations (2.15), admits a zero eigenvalue.

Let us first suppose that  $u_j \neq v_k, \forall j, k$ . Then, using the Bethe equations for  $\{v\}$  and factorizing the product  $(-1)^{r_N} a(v_j) \prod_{l=1}^n [u_l - v_j + 1]$  out of each column  $j$  of the matrix  $\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)$ , we obtain a matrix  $M_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)$  of elements

$$\begin{aligned}
[M_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)]_{ij} &= \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_i - v_j + \gamma + 1]}{[u_i - v_j + 1]} \right\} \\
&- \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_u}{\omega_v} \frac{[u_i - v_j + \gamma - 1]}{[u_i - v_j - 1]} \right\} \frac{\omega_v^2}{\omega_u^2} \prod_{l=1}^n \frac{[v_l - v_j + 1]}{[v_l - v_j - 1]} \frac{[u_l - v_j - 1]}{[u_l - v_j + 1]}. \quad (\text{D.1})
\end{aligned}$$

The action of the transpose of the above matrix on the non-zero vector  $\mathbf{w}$  of components

$$\mathbf{w}_i = \frac{\prod_{l=1}^n [u_i - v_l]}{\prod_{l \neq i}^n [u_i - u_l]} \quad (\text{D.2})$$

produces a new vector  $\tilde{\mathbf{w}}$  of components

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}_i &= \sum_{j=1}^n [M_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)^t]_{ij} \mathbf{w}_j \\
&= \left\{ G_0 - \frac{\omega_v}{\omega_u} G_1 \right\} - \left\{ G_0 - \frac{\omega_u}{\omega_v} G_{-1} \right\} \frac{\omega_v^2}{\omega_u^2} \prod_{l=1}^n \frac{[v_l - v_i + 1]}{[v_l - v_i - 1]} \frac{[u_l - v_i - 1]}{[u_l - v_i + 1]}, \quad (\text{D.3})
\end{aligned}$$

with

$$G_\epsilon = \sum_{j=1}^n \frac{[u_j - v_i + \gamma + \epsilon]}{[\gamma]} \frac{\prod_{l=1}^n [u_j - v_l]}{\prod_{l \neq j}^n [u_j - u_l]} \quad (\text{D.4})$$

$$= - \prod_{l=1}^n \frac{[v_i - v_l - \epsilon]}{[v_i - u_l - \epsilon]}. \quad (\text{D.5})$$

The equality between (D.4) and (D.5) follows from the residue theorem applied to the elliptic function

$$f_\epsilon(z) = \frac{[z - v_i + \gamma + \epsilon]}{[z - v_i + \epsilon]} \prod_{l=1}^n \frac{[z - v_l]}{[z - u_l]} \quad (\text{D.6})$$

integrated on an elementary cell (we recall here that  $\gamma = |v| - |u|$ , which means that the function  $f_\epsilon$  (D.6) is effectively doubly periodic, and that its integral on an elementary cell vanishes). Replacing the value (D.5) of  $G_\epsilon$  into the expression (D.3), we get that  $\tilde{\mathbf{w}} = 0$ , which means that the non-zero vector  $\mathbf{w}$  is an eigenvector of  $M_\gamma^t$  with zero-eigenvalue, and hence that the scalar product  $\langle \{u\}, \omega_u | \{v\}, \omega_v \rangle$  vanishes.

In the case when some (not all) of the variables  $u_j$  coincide with some of the variables  $v_k$ , the proof is similar but one has first to take the limit in the corresponding columns of the determinant.

## E Completeness of Bethe eigenstates

In the untwisted case and for a rational parameter  $\eta = \frac{1}{L}$ , the completeness of Bethe eigenstates (with arbitrary multiplier through the transformation  $s \rightarrow s + L$ ) was studied by Felder, Tarasov and Varchenko in [28]. More precisely, there was shown the following result (Corollary 19, Theorem 21 of [28]):

**Theorem E.1.** [28] *Let  $N = 2n$  and  $\eta = 1/L$  for some odd integer  $L > n$ . For generic  $\alpha$ ,  $\{\xi\}$ , there are  $d = L \dim \mathcal{H}[0]$  admissible<sup>12</sup> off-diagonal<sup>13</sup> solutions of the Bethe equations*

$$\prod_{k=1}^N \frac{[v_j - \xi_k + 1]}{[v_j - \xi_k]} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{[v_j - v_l - 1]}{[v_j - v_l + 1]} = \omega^{-2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{E.1})$$

with  $\omega^L = (-1)^n \alpha$  such that the corresponding Bethe eigenstates (2.13)-(2.14) form a basis of the  $d$ -dimensional vector space of quasi  $L$ -periodic functions  $f \in \text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  with multiplier  $\alpha$ , i.e. such that  $f(s + L) = \alpha f(s)$ .

For our purpose, we need a slightly modified version of Theorem E.1:

**Theorem E.2.** *Let  $N = 2n$  and  $\eta = r/L$  for some relatively prime integers  $L, r$  with  $L$  odd and  $L > n$ . There exist  $\kappa_0 > 0$  such that, for  $0 < |\kappa| < \kappa_0$  and generic  $\{\xi\}$ , there are  $d = L \dim \mathcal{H}[0]$  admissible off-diagonal solutions of the  $\kappa$ -twisted Bethe equations*

$$\prod_{k=1}^N \frac{[v_j - \xi_k + 1]}{[v_j - \xi_k]} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{[v_j - v_l - 1]}{[v_j - v_l + 1]} = \kappa \omega^{-2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{E.2})$$

with  $\omega^L = (-1)^{rn}$ , and the corresponding  $\kappa$ -twisted Bethe eigenstates (2.13)-(2.14) form a basis of the  $d$ -dimensional vector space of functions  $f \in \text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  such that  $f(s + L) = f(s)$ .

<sup>12</sup>See footnote 8.

<sup>13</sup>See footnote 4.

The proof of Theorem E.1 in [28] follows from the study the following eigenvalue problem with multiplier condition (this problem is related to the study of solutions of qKZB equations for the elliptic quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ ):

$$\begin{aligned} H_j(\xi) \psi &= \epsilon_j \psi, & j &= 1, \dots, N, \\ \psi &\in \text{Fun}(\mathcal{H}[0]) \quad \text{such that} \quad \psi(s+L) = \alpha \psi(s). \end{aligned}$$

Here  $H_j(\xi)$  are commuting difference operators defined in terms of  $R$ -matrices of the elliptic quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$ :

$$H_j(\xi) = R_{j,j-1} \dots R_{j,1} \hat{\tau}_s^{h_j} R_{j,N} \dots R_{j,j+1}, \quad (\text{E.3})$$

where  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$  is a fixed generic point in  $\mathbb{C}^N$ , and where we have used the shorthand notation

$$R_{j,k} \equiv R_{j,k}(\xi_j - \xi_k; \hat{s} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{k-1} h_l). \quad (\text{E.4})$$

In particular, in the fundamental case, the difference operators (E.3) coincide with special values of the transfer matrix of the SOS model, and their eigenfunctions (for generic  $\xi$ ) coincide with Bethe eigenstates.

The first part of the proof of [28] consists in constructing common eigenfunctions to the operators  $H_j(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . To this aim, the spaces dual to tensor products of evaluation Verma modules over  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$  are realized as particular spaces of meromorphic functions of  $n+1$  complex variables (typically the  $n$  spectral parameters and the dynamical parameter) with adequate quasi-periodicity properties. A basis of this space of functions is explicitly identified. Common eigenfunctions (with given multiplier  $\alpha$ ) of the commuting difference operators  $H_j(\xi)$  are then constructed in terms of these basis elements evaluated at the solutions of the system of Bethe equations (E.1). These eigenfunctions are identified (up to a factor that vanishes for diagonal solutions of (E.1)) with Bethe eigenstates. We refer the reader to [28] for explicit details about this construction, which is valid for any value of  $\eta$  and of the multiplier  $\alpha$ .

The second part of the proof of [28] consists in showing that, in the case  $n = N/2$ ,  $\eta = 1/L$ , and for generic  $\alpha$ , the previously constructed set of eigenfunctions is indeed complete. For  $\alpha$  large but finite, one can identify  $L \dim \mathcal{H}[0]$  different sets of admissible off-diagonal solutions of the system (E.1). Using the explicit expressions, previously obtained through the aforementioned construction, of the corresponding eigenfunctions, the authors of [28] are finally able to show that the latter are indeed linearly independent, at least for  $\alpha$  large enough (see [28] for details).

To prove Theorem E.2, one needs to extend these arguments to the  $\kappa$ -twisted case with multiplier 1. It is in fact easy to see that, in the previous reasoning, one can use  $\kappa$  as a free parameter instead of  $\alpha$ . We use the fact that solutions of the system of Bethe equations at  $\kappa = 0$  are very simple and that, for  $L$  odd, there exist  $L$  possible distinct values of the parameter  $\omega^2$  such that  $\omega^L = (-1)^n$ . Hence, considering the system (E.2) when  $\kappa$  tends to zero and using the implicit function Theorem, one can identify  $L \dim \mathcal{H}[0]$  different<sup>14</sup> sets of admissible off-diagonal solutions  $\{v_j^{I,\ell}(\kappa)\}_{1 \leq j \leq n}$  (corresponding to all possible subsets

<sup>14</sup>up to periodicity in  $1/\eta$  and  $\tau/\eta$ . The condition  $L$  odd and  $L > n$  ensures that the zero weight space  $\mathcal{H}[0]$  reduces to the space corresponding to  $n = N/2$ .

$I = (i_1, \dots, i_n) \subset \{1, \dots, N\}$  and all possible integers  $\ell \in \{0, \dots, L-1\}$  which are continuous functions of  $\kappa$  in a vicinity of  $\kappa = 0$ . They are such that

$$v_j^{I,\ell}(\kappa) = \xi_{i_j} - 1 + \kappa e^{4\pi i \frac{\ell}{L}} u_j^I(0) + o(\kappa), \quad (\text{E.5})$$

with

$$u_j^I(0) = e^{2i\pi \frac{r_n}{L}} \frac{[1]}{[0]'} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i_j}}^N \frac{[\xi_{i_j} - \xi_k - 1]}{[\xi_{i_j} - \xi_k]} \prod_{k=1}^n \frac{[\xi_{i_k} - \xi_{i_j} - 1]}{[\xi_{i_k} - \xi_{i_j} + 1]}. \quad (\text{E.6})$$

To show that the corresponding Bethe eigenstate form a basis of the corresponding space of functions, i.e. that they are linearly independent, one can adapt the arguments of [28] to the  $\kappa$ -twisted case by explicitly constructing common eigenfunctions to the  $\kappa$ -twisted commuting difference operators

$$H_j^{(\kappa)}(\xi) = R_{j,j-1} \dots R_{j,1} \widehat{\tau}_s^{h_j} K_j^{(\kappa)} R_{j,N} \dots R_{j,j+1}, \quad \text{with} \quad K^{(\kappa)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}. \quad (\text{E.7})$$

The linear independence, for  $\kappa$  small enough, of the eigenfunctions corresponding to solutions (E.5) then follows from the same reasoning as in [28], which can easily be extended to the case of rational  $\eta = r/L$ .

Alternatively, one can remark that:

- the scalar product (6.7) of two Bethe states corresponding to different off-diagonal solutions of the  $\kappa$ -twisted Bethe equations (E.2) vanishes (the proof of Appendix D is indeed directly generalizable to the  $\kappa$ -twisted case).
- the “square of the norm” (6.10) of a  $\kappa$ -twisted Bethe state corresponding to an admissible off-diagonal solution of (E.2) is non-zero in a vicinity of  $\kappa = 0$ . Namely, one has,

$$\frac{\partial}{\partial v_k} \mathcal{Y}_{\kappa;\omega}(v_j | \{v\}_\kappa) = \kappa^{-1} \left\{ \omega^2 \delta_{j,k} \frac{[1]}{[0]'} u_j(0)^2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i_j}}^N \frac{[\xi_{i_j} - \xi_k - 1]}{[\xi_{i_j} - \xi_k]} \prod_{k=1}^n [\xi_{i_k} - \xi_{i_j} - 1] + o(\kappa) \right\},$$

for  $\{v\} \equiv \{v^{I,\ell}\}$  given by (E.5) with  $\omega = e^{i\pi \frac{r_n}{L} - 2i\pi \frac{\ell}{L}}$  and  $u_j(0) \equiv u_j^I(0)$  given by (E.6).

This proves the linear independence, for  $0 < |\kappa| < \kappa_0$  for some  $\kappa_0 > 0$ , of the  $L \dim \mathcal{H}[0]$   $\kappa$ -twisted Bethe eigenvectors corresponding to the solutions (E.5), and hence ends the proof of Theorem E.2.

## References

- [1] T. D. Albert, H. Boos, R. Flume, R. H. Poghossian, and K. Ruhlig, *An F-twisted XYZ model*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), 201–214.
- [2] G. E. Andrews, R. J. Baxter, and P. J. Forrester, *Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities*, J. Stat. Phys. **35** (1984), 193–266.
- [3] R. J. Baxter, *Eight-vertex model in lattice statistics*, Phys. Rev. Lett. **26** (1971), 832–833.
- [4] ———, *One-dimensional anisotropic Heisenberg chain*, Phys. Rev. Lett. **26** (1971), 834.

- [5] ———, *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Phys. **70** (1972), 193–228.
- [6] ———, *Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain I, II, III*, Ann. Phys. **76** (1973), 1–24, 25–47, 48–71.
- [7] ———, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [8] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, and N. A. Slavnov, *Algebraic Bethe ansatz for scalar products in  $SU(3)$ -invariant integrable models*, arXiv:1207.0956.
- [9] ———, *Highest coefficient of scalar products in  $SU(3)$ -invariant integrable models*, arXiv:1206.4931.
- [10] H. Bethe, *Zür Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette*, Zeitschrift für Physik **71** (1931), 205–226.
- [11] D. Biegel, M. Karbach, and G. Müller, *Transition rates via Bethe ansatz for the spin-1/2 planar XXZ antiferromagnet*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 5361–5368.
- [12] H. Boos and F. Göhmann, *On the physical part of the factorized correlation functions of the XXZ chain*, J. Phys. A: Math. Gen. **42** (2009), 315001.
- [13] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Completeness of a fermionic basis in the homogeneous XXZ model*, J. Math. Phys. **50** (2009), 095206.
- [14] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *Algebraic representation of correlation functions in integrable spin chains*, Annales Henri Poincaré **7** (2006), 1395–1428.
- [15] ———, *Density matrix of a finite sub-chain of the Heisenberg anti-ferromagnet*, Lett. Math. Phys. **75** (2006), 201–208.
- [16] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *A recursion formula for the correlation functions of an inhomogeneous XXX model*, St. Petersburg Math. J. **17** (2006), 85–117.
- [17] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), 263–281.
- [18] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama, *Traces on the Sklyanin algebra and correlation functions of the eight-vertex model*, J. Phys. A **38** (2005), 7629–7660.
- [19] A. H. Bougourzi, M. Karbach, and G. Müller, *Exact two-spinon dynamic structure factor of the one-dimensional  $s=1/2$  Heisenberg-Ising antiferromagnet*, Phys. Rev. B **57** (1998), 11429–11438.
- [20] J. L. Cardy and G. Mussardo, *Form factors of descendent operators in perturbed conformal field theories*, Nucl. Phys. B **340** (1990), 387–402.
- [21] J. S. Caux, R. Hagemans, and J. M. Maillet, *Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains: the gapless anisotropic regime*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2005), P09003.

- [22] J. S. Caux and J. M. Maillet, *Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains in a magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 077201.
- [23] T. Deguchi, *Reduction formula of form factors for the integrable spin- $s$  XXZ chains and application to correlation functions*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2012), P04001.
- [24] K. Fabricius and B. M. McCoy, *The TQ equation of the eight-vertex model for complex elliptic roots of unity*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), 14893–14926.
- [25] L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model*, hep-th/9605187, 1996.
- [26] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, and L. A. Takhtajan, *Quantum inverse problem method I*, Theor. Math. Phys. **40** (1979), 688–706, Translated from Teor. Mat. Fiz. 40 (1979) 194–220.
- [27] G. Felder, *Elliptic quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematical Physics, Paris (1994), International Press, 1995, hep-th/9412207, pp. 211–218.
- [28] G. Felder, V. Tarasov, and A. Varchenko, *Solutions of the elliptic  $q$ KZB equations and Bethe ansatz, I*, Topics in singularity theory: V. I. Arnold’s 60th Anniversary Collection, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 180, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1997, pp. 45–75.
- [29] G. Felder and A. Varchenko, *Algebraic Bethe ansatz for the elliptic quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$* , Nucl. Phys. B **480** (1996), 485–503, q-alg/9605024.
- [30] ———, *On representations of the elliptic quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$* , Commun. Math. Phys. **181** (1996), 741–761.
- [31] G. Filali, *Elliptic dynamical reflection algebra and partition function of SOS model with reflecting end*, J. Geom. Phys. **61** (2011), 1789–1796.
- [32] G. Filali and N. Kitanine, *Partition function of the trigonometric SOS model with reflecting end*, J. Stat. Mech. (2010), L06001.
- [33] A. Fring, G. Mussardo, and P. Simonetti, *Form factors for integrable lagrangian field theories, the sinh-Gordon model*, Nucl. Phys. B **393** (1993), 413–441.
- [34] W. Galleas, *Refined functional relations for the elliptic SOS model*, arXiv:1207.5283.
- [35] M. Gaudin, *La fonction d’onde de Bethe*, Masson, 1983.
- [36] M. Gaudin, B. M. McCoy, and T. T. Wu, *Normalization sum for the Bethe’s hypothesis wave functions of the Heisenberg-Ising model*, Phys. Rev. D **23** (1981), 417–419.
- [37] J. L. Gervais and A. Neveu, *Novel triangle relation and absence of tachions in Liouville string field theory*, Nucl. Phys. B **238** (1984), 125–141.
- [38] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature*, J. Phys. A **37** (2004), 7625–7652.
- [39] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel, *Integral representation of the density matrix of the XXZ chain at finite temperatures*, J. Phys. A : Math. Gen. **38** (2005), 1833–1841.

- [40] F. Göhmann and V. E. Korepin, *Solution of the quantum inverse problem*, J. Phys. A **33** (2000), 1199–1220.
- [41] F. Göhmann, A. Seel, and J. Suzuki, *Correlation functions of the integrable isotropic spin-1 chain at finite temperature*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2010), P11011.
- [42] N. Grosjean, J. M. Maillet, and G. Niccoli, *On the form factors of local operators in the lattice sine-Gordon model*, J. Stat. Mech.: Theory Exp. (2012), P10006.
- [43] A. G. Izergin, *Partition function of the six-vertex model in a finite volume*, Sov. Phys. Dokl. **32** (1987), 878–879.
- [44] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, and A. Nakayashiki, *Correlation functions of the XXZ model for  $\Delta < -1$* , Phys. Lett. A **168** (1992), 256–263.
- [45] M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, AMS, 1995.
- [46] ———, *Quantum KZ equation with  $|q| = 1$  and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime*, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (1996), 2923–2958.
- [47] M. Jimbo, T. Miwa, and F. Smirnov, *Hidden Grassmann structure in the XXZ model III: introducing the Matsubara direction*, J. Phys. A : Math. Gen. **42** (2009), 304018.
- [48] ———, *Fermionic structure in the sine-Gordon model: Form factors and null-vectors*, Nucl. Phys. B **852** (2011), 390–440.
- [49] ———, *Hidden Grassmann Structure in the XXZ Model V: Sine-Gordon Model*, Lett. Math. Phys. **96** (2011), 325–365.
- [50] J. D. Johnson, S. Krinsky, and B. M. McCoy, *Vertical-arrow correlation length in the eight-vertex model and the low-lying excitations of the X-Y-Z Hamiltonian*, Phys. Rev. A **8** (1973), 2526–2547.
- [51] M. Karowski and P. Weisz, *Exact form-factors in  $(1 + 1)$ -dimensional field theoretic models with soliton behavior*, Nucl. Phys. B **139** (1978), 445.
- [52] N. Kitanine, *Correlation functions of the higher spin XXX chains*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), 8151–8169.
- [53] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, G. Niccoli, N. A. Slavnov, and V. Terras, *Correlation functions of the open XXZ chain: I*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2007), P10009.
- [54] ———, *Correlation functions of the open XXZ chain: II*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2008), P07010.
- [55] N. Kitanine, K. K. Kozłowski, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, *On correlation functions of integrable models associated with the six-vertex R-matrix*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2007), P01022.
- [56] ———, *Algebraic Bethe ansatz approach to the asymptotic behavior of correlation functions*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2009), P04003.
- [57] ———, *A form factor approach to the asymptotic behavior of correlation functions in critical models*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2011), P12010, arXiv:1110.0803.

- [58] ———, *Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models*, J. Stat. Mech. Theory Exp. (2012), P09001, arXiv:1206.2630.
- [59] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras, *Spin-spin correlation functions of the XXZ-1/2 Heisenberg chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **641** (2002), 487–518.
- [60] ———, *Dynamical correlation functions of the XXZ spin-1/2 chain*, Nucl. Phys. B **729** (2005), 558–580, hep-th/0407108.
- [61] ———, *Master equation for spin-spin correlation functions of the XXZ chain*, Nucl. Phys. B **712** (2005), 600–622, hep-th/0406190.
- [62] ———, *On the spin-spin correlation functions of the XXZ spin-1/2 infinite chain*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), 7441–7460, hep-th/0407223.
- [63] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, *Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain*, Nucl. Phys. B **554** (1999), 647–678.
- [64] ———, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field*, Nucl. Phys. B **567** (2000), 554–582.
- [65] V. E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
- [66] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge University Press, 1993.
- [67] K. K. Kozłowski, *Large-distance and long-time asymptotic behavior of the reduced density matrix in the non-linear Schrödinger model*, arXiv:1101.1626.
- [68] K. K. Kozłowski and V. Terras, *Long-time and large-distance asymptotic behavior of the current-current correlators in the non-linear Schrödinger model*, J. Stat. Mech.: Theory Exp. (2011), P09013, arXiv:1101.0844.
- [69] A. Kuniba and T. Yajima, *Local State Probabilities for Solvable Restricted Solid-on-Solid Models:  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $D_n^{(1)}$ , and  $A_n^{(1)}$* , J. Stat. Phys. **52** (1988), 829–883.
- [70] M. Lashkevich, *Free field construction for the eight-vertex model: Representation for form factors*, Nucl. Phys. **B621** (2002), 587–621.
- [71] M. Lashkevich and Y. Pugai, *Free Field Construction for Correlation Functions of the Eight-Vertex Model*, Nucl. Phys. **B516** (1998), 623–651.
- [72] S. Lukyanov, *Correlation amplitude for the XXZ spin chain in the disordered regime*, Phys. Rev. B **59** (1999), 11163–11164.
- [73] S. Lukyanov and Y. Pugai, *Multi-point local height probabilities in the integrable RSOS model*, Nucl. Phys. B **473** (1996), 631–658.
- [74] S. Lukyanov and V. Terras, *Long-distance asymptotics of spin-spin correlation functions for the XXZ spin chain*, Nucl. Phys. B **654** (2003), 323–356.
- [75] S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, *Exact expectation values of local fields in the quantum sine-Gordon model*, Nucl. Phys. B **493** (1997), 571–587.

- [76] ———, *Form factors of soliton-creating operators in the sine-Gordon model*, Nucl. Phys. B **607** (2001), 437–455.
- [77] J. M. Maillet and J. Sanchez de Santos, *Drinfel’d twists and algebraic Bethe Ansatz*, L. D. Faddeev’s Seminar on Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 201, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, q-alg/9612012, pp. 137–178.
- [78] J. M. Maillet and V. Terras, *On the quantum inverse scattering problem*, Nucl. Phys. B **575** (2000), 627–644, hep-th/9911030.
- [79] D. C. Mattis, *The many body problem: An encyclopedia of exactly solved models in one dimension*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [80] G. Niccoli, *Antiperiodic dynamical 6-vertex and periodic 8-vertex models I: Complete spectrum by SOV and matrix elements of the identity on separate states*, arXiv:1207.1928.
- [81] ———, *Antiperiodic spin-1/2 XXZ quantum chains by separation of variables: Complete spectrum and form factors*, arXiv:1205.4537.
- [82] S. Pakuliak, V. Rubtsov, and A. Silantyev, *The SOS model partition function and the elliptic weight functions*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 295204.
- [83] P. A. Pearce and M. T. Batchelor, *Row transfer matrix spectra of cyclic solid-on-solid lattice models*, J. Stat. Phys. **60** (1990), 77–135.
- [84] P. A. Pearce and K. A. Seaton, *Exact solution of cyclic solid-on-solid lattice models*, Ann. Phys. **193** (1989), 326–366.
- [85] H. Rosengren, *An Izergin-Korepin-type identity for the 8VSOS model, with applications to alternating sign matrices*, Adv. Appl. Math. **43** (2009), 137–155.
- [86] K. Sakai, *Dynamical correlation functions of the XXZ model at finite temperature*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), 7523–7542.
- [87] J. Sato, M. Shiroishi, and M. Takahashi, *Evaluation of Dynamic Spin Structure Factor for the Spin-1/2 XXZ Chain in a Magnetic Field*, J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004), 3008–3014.
- [88] J. Shiraishi, *Free field constructions for the elliptic algebra  $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  and Baxter’s eight-vertex model*, Int. J. Mod. Phys. A **19** (2004), 363–380.
- [89] E. K. Sklyanin, *Functional Bethe Ansatz*, Integrable and Superintegrable Systems (B.A. Kupershmidt, ed.), World Scientific, Singapore, 1990, pp. 8–33.
- [90] ———, *Quantum inverse scattering method. Selected topics*, Quantum Group and Quantum Integrable Systems (Mo-Lin Ge, ed.), Nankai Lectures in Mathematical Physics, World Scientific, 1992, pp. 63–97.
- [91] N. A. Slavnov, *Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe Ansatz*, Theor. Math. Phys. **79** (1989), 502–508.
- [92] F. A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [93] L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model*, Russ. Math. Surveys **34** (1979), no. 5, 11–68.

- [94] H. B. Thacker, *Exact integrability in quantum field theory and statistical systems.*, Rev. Mod. Phys. **53** (1981), no. 2, 253–285.
- [95] Al. B. Zamolodchikov, *Two-point correlation function in scaling Lee-Yang model*, Nucl. Phys. B **348** (1991), 619–641.



## **Article 2**

Spontaneous staggered polarizations of the cyclic solid-on-solid  
model from algebraic Bethe Ansatz

A paraître dans  
J. Stat. Mech. (2013)  
arXiv :1304.7814



# Spontaneous staggered polarizations of the cyclic solid-on-solid model from algebraic Bethe Ansatz

D. Levy-Bencheton<sup>1</sup> and V. Terras<sup>2</sup>

Laboratoire de Physique, ENS Lyon & CNRS UMR 5672,  
Université de Lyon, France

## Abstract

We compute the spontaneous staggered polarizations of the cyclic SOS model at the thermodynamic limit. We use the determinant representation for finite-size form factors obtained from algebraic Bethe Ansatz.

## 1 Introduction

In a previous paper [10], we have initiated the study of form factors and correlation functions of the cyclic solid-on-solid (CSOS) model [1, 9, 13] by means of algebraic Bethe Ansatz (ABA). In particular, we have obtained determinant representations for the scalar products of Bethe states and the form factors in finite volume. The aim of this paper is to show how to apply these results to the computation of physical quantities at the thermodynamic limit. As a simple example, we consider here the spontaneous staggered polarizations.

The CSOS model is an exactly solvable model of classical statistical mechanics describing interactions around faces of a two-dimensional square lattice. More precisely, to each vertex of the lattice is associated a ‘height’ variable  $s$  which may take  $L$  different values, so that heights on adjacent sites differ by  $\pm 1$ . The difference of heights between two adjacent sites of the lattice is hence described by a ‘spin’ variable  $\epsilon = \pm 1$  attached to the corresponding bond. In the cyclic SOS model [9, 13], heights are periodic in  $L$  (i.e. there exists  $s_0 \in \mathbb{C}$  such that  $s - s_0 \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ ). There are six different allowed configurations around a face, of the type

---

<sup>1</sup>damien.levybencheton@ens-lyon.fr

<sup>2</sup>veronique.terras@ens-lyon.fr

$$\begin{array}{ccc}
& \epsilon'_i & \\
s & \xrightarrow{\epsilon'_i} & s + \epsilon'_i \\
\epsilon_j \uparrow & \square & \uparrow \epsilon'_j \\
s + \epsilon_j & \xrightarrow{\epsilon_i} & s + \epsilon_i + \epsilon_j \\
& & = s + \epsilon'_i + \epsilon'_j
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\text{with } \epsilon_i, \epsilon'_i, \epsilon_j, \epsilon'_j \in \{+1, -1\} \\
\text{such that } \epsilon_i + \epsilon_j = \epsilon'_i + \epsilon'_j.
\end{array}$$

To these configurations correspond six statistical weights  $W\left(\begin{smallmatrix} s & s+\epsilon'_i \\ s+\epsilon_j & s+\epsilon_i+\epsilon_j \end{smallmatrix}\right)$  which can be parameterized in terms of elliptic theta functions. They depend on a parameter  $\eta$  (crossing parameter) which, in the cyclic case, is a rational number:  $\eta = r/L$  with  $r, L$  coprime integers. Hence, the statistical weights of the CSOS model are  $L$ -periodic functions of the height  $s$ .

It has been shown in [13, 12] that the transfer matrix of the model with periodic boundary conditions possesses  $2(L - r)$  largest (in magnitude) eigenvalues which are asymptotically degenerate in the thermodynamic limit, corresponding to  $2(L - r)$  coexisting phases. These largest eigenvalues are separated from the other ones by a gap which remains finite in the thermodynamic limit. The corresponding  $2(L - r)$  (quasi-)ground states can be constructed by means of Bethe Ansatz. In this framework, the spontaneous staggered polarizations can be computed, as in the case of the  $F$ -model [2], from the normalized matrix elements, between two of the corresponding Bethe eigenstates, of the  $\sigma_m^z$  Pauli spin operator acting on the spin (or variable  $\epsilon_m = \pm 1$ ) on a given bond  $m$  of the lattice.

The computation of spontaneous staggered polarizations in the CSOS model has already been considered in [3] in the case  $\eta = 1/L$ . The derivation of [3] uses the representation of Bethe vectors in the framework of coordinate Bethe Ansatz. However, since no compact and convenient representation was known at that time for the scalar products (and form factors) between such Bethe eigenstates, the derivation of [3] actually relies on two conjectural mathematical identities for elliptic functions. The use of the determinant representations obtained in [10] from algebraic Bethe Ansatz enables us instead to easily compute (for any rational value of the parameter  $\eta$  of the model) the thermodynamic limit of the form factors contributing to spontaneous staggered polarizations. By this method, we are also able to control the finite-size corrections to the result in the same way as in [8].

This paper is organized as follows. In Section 2, we briefly recall the ABA solution of the CSOS model and the result of [10] concerning the finite-size determinant representation for the normalized matrix element of the local operator  $\sigma_m^z$  between two Bethe eigenstates. In Section 3, we characterize the  $2(L - r)$  (quasi-)ground states from the study of their Bethe equations, and discuss the process of taking the thermodynamic limit and of controlling the finite-size corrections. In Section 4, we apply this process to the form-factor representation of Section 2 in the case where the two Bethe states belong to the previously described set of ground states. We obtain a Fredholm determinant representation that can be explicitly computed, leading, in Section 5, to explicit expressions for the spontaneous polarizations of the model.

## 2 The form factor in the ABA framework

Let us consider a two-dimensional square lattice of size  $N \times N$  ( $N$  even), with periodic boundary conditions. The statistical weights  $W\left(\begin{smallmatrix} s & s+\epsilon'_i \\ s+\epsilon_j & s+\epsilon_i+\epsilon_j \end{smallmatrix}\right)$ ,  $\epsilon_i, \epsilon'_i, \epsilon_j, \epsilon'_j \in \{+1, -1\}$ , corresponding to the six allowed configurations around a face of the SOS model, can be seen as the six

non-zero elements  $R(u_i - \xi_j; s)_{\epsilon'_i, \epsilon'_j}^{\epsilon_i, \epsilon_j}$  of the following  $R$ -matrix:

$$R(u_i - \xi_j; s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u_i - \xi_j; s) & c(u_i - \xi_j; s) & 0 \\ 0 & c(u_i - \xi_j; -s) & b(u_i - \xi_j; -s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2). \quad (2.1)$$

Here  $u_i$  (respectively  $\xi_j$ ) is an inhomogeneity parameter attached to the column  $i$  (resp. row  $j$ ) of cells of the lattice. The functions  $b(u; s)$  and  $c(u; s)$  are given as

$$b(u; s) = \frac{[s+1][u]}{[s][u+1]}, \quad c(u; s) = \frac{[s+u][1]}{[s][u+1]}, \quad \text{with } [u] = \theta_1(\eta u; \tau), \quad (2.2)$$

where  $\theta_1$  denotes the usual theta function (A.1) with quasi-periods 1 and  $\tau$  ( $\Im \tau > 0$ ). The height  $s$  in (2.1) is called dynamical parameter. The  $R$ -matrix (2.1) with dynamical parameter  $s$  satisfies the dynamical Yang-Baxter equation [7, 4], and the corresponding SOS model is also sometimes called dynamical six-vertex model. In the cyclic case that we consider here, the parameter  $\eta$  of the model is chosen to be rational:  $\eta = r/L$ ,  $r$  and  $L$  being relatively prime integers. Hence, the statistical weights elements of the  $R$ -matrix are  $L$ -periodic functions of the dynamical parameter  $s$ . In other words, it means that the dynamical parameter  $s$  takes its values in  $s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ , where  $s_0$  is a fixed global shift of the dynamical parameter (such that  $s - s_0$  is an integer) introduced so as to avoid the singularities in (2.2).

*Remark 2.1.* Our parameter  $\eta s_0$  is related to the phase angle  $\mu = w_0/\pi$  of the physical model considered in [13, 12] by a shift of  $\tau/2$  (later on, we will for simplicity set  $s_0 = \frac{\tau}{2\eta}$  in our result, i.e.  $\mu = 0$ , which also corresponds to the choice of [3]). Note also that the statistical weights of [13, 12] correspond to a diagonal dynamical gauge transformation of the  $R$ -matrix (2.1) which leaves the local height probabilities invariant.

Eigenstates of the dynamical transfer matrix  $\hat{t}(u)$  constructed from the  $R$ -matrix (2.1) can be obtained by means of algebraic Bethe Ansatz (see [6, 5]). In this framework, the space of states of the model corresponds to the space of functions  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  of the dynamical parameter  $s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$  with values in the zero-weight space  $\mathcal{H}[0] = \{|\mathbf{v}\rangle \in \mathcal{H} \mid (\sum_{j=1}^N \sigma_j^z)|\mathbf{v}\rangle = 0\}$ , with  $\mathcal{H} \sim (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$  (see [10] for more details). Common eigenstates  $|\{v\}, \omega\rangle$  (respectively  $\langle\{v\}, \omega|$  in the dual space) to all transfer matrices,

$$\hat{t}(u) |\{v\}, \omega\rangle = \tau(u; \{v\}, \omega) |\{v\}, \omega\rangle, \quad \langle\{v\}, \omega| \hat{t}(u) = \tau(u; \{v\}, \omega) \langle\{v\}, \omega|, \quad (2.3)$$

are parametrized by a set of  $n$  complex numbers  $\{v\} \equiv \{v_1, \dots, v_n\}$  (with  $\eta v_i \neq \eta v_j \pmod{\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}}$ ) and a root of unity  $\omega$  (such that  $(-1)^{r\aleph} \omega^L = 1$ ) satisfying the system of Bethe equations

$$a(v_j) \prod_{l \neq j} \frac{[v_l - v_j + 1]}{[v_l - v_j]} = (-1)^{r\aleph} \omega^{-2} d(v_j) \prod_{l \neq j} \frac{[v_j - v_l + 1]}{[v_j - v_l]}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

with

$$a(u) = 1, \quad d(u) = \prod_{j=1}^N \frac{[u - \xi_j]}{[u - \xi_j + 1]}. \quad (2.5)$$

Here  $n$  and  $\aleph$  are two integers such that  $N = 2n + \aleph L$ . The corresponding eigenvalue  $\tau(u; \{v\}, \omega)$  is

$$\tau(u; \{v\}, \omega) = \omega a(u) \prod_{l=1}^n \frac{[v_l - u + 1]}{[v_l - u]} + (-1)^{r\aleph} \omega^{-1} d(u) \prod_{l=1}^n \frac{[u - v_l + 1]}{[u - v_l]}. \quad (2.6)$$

From now on, we restrict our study to Bethe states in the sector  $n = N/2$ , i.e.  $\aleph = 0$ , which is enough for our purpose. For two such Bethe eigenstates, associated to two different solutions  $\{u\}, \omega_u$  and  $\{v\}, \omega_v$  of the system of Bethe equations (2.4), we want to compute the following normalized form factor:

$$\mathbf{s}_m^z(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) = \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle}{(\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle \langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle)^{1/2}} \quad (2.7)$$

$$= \frac{\langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} \cdot \left( \frac{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle} \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

This quantity can be rewritten in terms of a ratio of determinants by means of the representations obtained in our previous paper [10]. We recall that the matrix element of the operator  $\sigma_m^z$  between two different Bethe eigenstates  $\langle \{u\}, \omega_u |$  and  $| \{v\}, \omega_v \rangle$  in the sector  $N = 2n$  is given as

$$\begin{aligned} \langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle &= \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \omega_u^{-s} \omega_v^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ &\times \frac{\prod_{t=1}^n d(u_t)}{\prod_{k < l} [u_k - u_l][v_l - v_k]} \det_n [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v) - 2\mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_m)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

with  $\gamma = \sum_{j=1}^n (v_j - u_j)$ . Here  $\Omega_\gamma$  is the matrix appearing in the determinant representation for the scalar product (see Theorem 3.1 of [10]), with matrix elements

$$\begin{aligned} [\Omega_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v)]_{jk} &= \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_j - v_k + \gamma]}{[u_j - v_k]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_j - v_k + \gamma + 1]}{[u_j - v_k + 1]} \right\} a(v_k) \prod_{t=1}^n [u_t - v_k + 1] \\ &+ \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_j - v_k + \gamma]}{[u_j - v_k]} - \frac{\omega_u}{\omega_v} \frac{[u_j - v_k + \gamma - 1]}{[u_j - v_k - 1]} \right\} \omega_u^{-2} d(v_k) \prod_{t=1}^n [u_t - v_k - 1], \end{aligned} \quad (2.10)$$

whereas  $\mathcal{P}_\gamma$  is a rank 1 matrix defined as

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_\gamma(\{u\}, \omega_u; \{v\}, \omega_v | \xi_m)]_{jk} &= \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_j - \xi_m + \gamma]}{[u_j - \xi_m]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_j - \xi_m + \gamma + 1]}{[u_j - \xi_m + 1]} \right\} \\ &\times a(v_k) \prod_{t=1}^n \left\{ [v_t - v_k + 1] \frac{[u_t - \xi_m + 1]}{[v_t - \xi_m + 1]} \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

We also recall the determinant representation for the scalar product of a Bethe eigenstate  $| \{u\}, \omega_u \rangle$  with the corresponding Bethe eigenstate  $\langle \{u\}, \omega_u |$  in the dual space:

$$\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle = \frac{\prod_{t=1}^n a(u_t) d(u_t) \prod_{j,k=1}^n [u_j - u_k + 1]}{(-[0]')^n \prod_{j \neq k} [u_j - u_k]} \det_n [\Phi(\{u\})], \quad (2.12)$$

with

$$\begin{aligned} [\Phi(\{u\})]_{jk} &= \delta_{jk} \left\{ \log' \frac{a}{d}(u_j) + \sum_{t=1}^n \left( \frac{[u_j - u_t - 1]'}{[u_j - u_t - 1]} - \frac{[u_j - u_t + 1]'}{[u_j - u_t + 1]} \right) \right\} \\ &- \left( \frac{[u_j - u_k - 1]'}{[u_j - u_k - 1]} - \frac{[u_j - u_k + 1]'}{[u_j - u_k + 1]} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Factorizing the quantity  $a(v_j) \prod_{t=1}^n [v_t - v_j + 1] = -\omega_v^{-2} d(v_j) \prod_{t=1}^n [v_t - v_j - 1]$  out of each column of the determinant in (2.9), we can rewrite the first ratio in (2.8) as:

$$\frac{\langle \{u\}, \omega_u | \sigma_m^z | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle} = \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\tau(\xi_k; \{u\}, \omega_u)}{\tau(\xi_k; \{v\}, \omega_v)} \right\} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \left( \frac{\omega_v}{\omega_u} \right)^s \frac{[\gamma + s]}{[s]} \right\} \\ \times (-[0]')^n \prod_{k=1}^n \frac{d(u_k)}{d(v_k)} \prod_{k < l} \frac{[v_k - v_l]}{[u_k - u_l]} \frac{\det_n[H(\{u\}, \{v\}) - 2Q(\{u\}, \{v\})]}{\det_n[\Phi(\{v\})]}, \quad (2.14)$$

where  $\gamma = \sum_{t=1}^n (v_t - u_t)$ ,  $\Phi$  is given by (2.13), and

$$[H(\{u\}, \{v\})]_{ij} = \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_i - v_j + \gamma + 1]}{[u_i - v_j + 1]} \right\} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_j + 1]}{[v_t - v_j + 1]} \\ - \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - v_j + \gamma]}{[u_i - v_j]} - \frac{\omega_u}{\omega_v} \frac{[u_i - v_j + \gamma - 1]}{[u_i - v_j - 1]} \right\} \frac{\omega_v^2}{\omega_u^2} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - v_j - 1]}{[v_t - v_j - 1]}, \quad (2.15)$$

$$[Q(\{u\}, \{v\})]_{ij} = \frac{1}{[\gamma]} \left\{ \frac{[u_i - \xi_m + \gamma]}{[u_i - \xi_m]} - \frac{\omega_v}{\omega_u} \frac{[u_i - \xi_m + \gamma + 1]}{[u_i - \xi_m + 1]} \right\} \prod_{t=1}^n \frac{[u_t - \xi_m + 1]}{[v_t - \xi_m + 1]}. \quad (2.16)$$

In its turn, from (2.12), the second ratio is given by

$$\frac{\langle \{v\}, \omega_v | \{v\}, \omega_v \rangle}{\langle \{u\}, \omega_u | \{u\}, \omega_u \rangle} = \prod_{k=1}^n \frac{a(v_k) d(v_k)}{a(u_k) d(u_k)} \prod_{j,k=1}^n \frac{[v_j - v_k + 1]}{[u_j - u_k + 1]} \prod_{j \neq k} \frac{[u_j - u_k]}{[v_j - v_k]} \frac{\det_n[\Phi(\{v\})]}{\det_n[\Phi(\{u\})]}. \quad (2.17)$$

These representations are the starting point for our study of the spontaneous staggered polarizations of the model, which can be obtained from the thermodynamic limit of the quantity (2.7) in the case when  $|\{u\}, \omega_u\rangle$  and  $|\{v\}, \omega_v\rangle$  correspond to two different (quasi-)ground states of the homogeneous model.

*Remark 2.2.* The case of the mean value of the operator  $\sigma_m^z$  in the same Bethe state should be treated separately since the proper limit has to be taken into the determinant of (2.9) in the same way as in (2.12)-(2.13). We will in that case use the formula

$$\mathbf{s}_m^z(\{u\}, \omega_u; \{u\}, \omega_u) = \frac{\det_n[\Phi(\{u\}) + 2Q^{(+)}(\{u\})]}{\det_n[\Phi(\{u\})]}, \quad (2.18)$$

with  $\Phi$  given by (2.13) and

$$[Q^{(+)}(\{u\})]_{jk} = \frac{[u_j - \xi_m]'}{[u_j - \xi_m]} - \frac{[u_j - \xi_m + 1]'}{[u_j - \xi_m + 1]}. \quad (2.19)$$

One should also pay special care to possible other cases for which  $\gamma = 0$  or when some of the  $v_j$  coincide with some the  $u_j$ . In particular, when  $L$  is even, there is a little subtlety that was not mentioned in our previous article [10]: in that case, with each solution  $\{u\}, \omega^2$  of the Bethe equations (2.4), one can associate two different Bethe eigenstates  $|\{u\}, \omega\rangle$  (with  $\omega = e^{i\pi(rn+2\ell)/L}$  for some integer  $\ell$ ) and  $|\{u\}, -\omega\rangle$  ( $-\omega = e^{i\pi(rn+2\ell')/L}$  with  $\ell' = \ell - L/2$ ) with

opposite eigenvalue. The corresponding normalized form factor can be explicitly represented as

$$\mathbf{s}_m^z(\{u\}, \omega_u; \{u\}, -\omega_u) = \frac{(-1)^{m-1}}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} e^{-i\pi s} \frac{\det_n [\Phi^{(-)}(\{u\}) + 2Q^{(-)}(s)]}{\det_n [\Phi(\{u\})]}, \quad (2.20)$$

with  $\Phi$  given by (2.13) and

$$[\Phi^{(-)}(\{u\})]_{jk} = \delta_{jk} \left\{ \log' \frac{a}{d}(u_j) + \sum_{t=1}^n \left( \frac{[u_j - u_t - 1]'}{[u_j - u_t - 1]} - \frac{[u_j - u_t + 1]'}{[u_j - u_t + 1]} \right) \right\} \\ + \left( \frac{[u_j - u_k - 1]'}{[u_j - u_k - 1]} - \frac{[u_j - u_k + 1]'}{[u_j - u_k + 1]} \right), \quad (2.21)$$

$$[Q^{(-)}(s)]_{jk} = 2 \frac{[s]'}{[s]}. \quad (2.22)$$

### 3 The degenerate ground states in the thermodynamic limit

According to [13, 12], the ground state of the CSOS model is degenerate in the thermodynamic limit: there are  $2(L - r)$  (quasi-)ground states in the sector  $n = N/2$ , which were identified in [13, 12] in the low-temperature limit.

To characterize these states, it is convenient, by means of Jacobi's imaginary transformation

$$[u] = -i(-i\tau)^{-1/2} e^{i\pi\eta\tilde{\eta}u^2} \theta_1(\tilde{\eta}u; \tilde{\tau}), \quad \tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau}, \quad \tilde{\eta} = -\frac{\eta}{\tau}, \quad (3.1)$$

to rewrite the Bethe equations (2.4) in terms of theta functions with imaginary quasi-period  $\tilde{\tau}$ . In the sector  $n = N/2$  and at the homogeneous limit  $\xi_k = 1/2$ ,  $k = 1, \dots, N$ , it gives

$$\omega^2 e^{4i\pi\eta \sum_{l=1}^n z_l} \frac{\theta_1^N(z_j + \tilde{\eta}/2)}{\theta_1^N(z_j - \tilde{\eta}/2)} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(z_l - z_j + \tilde{\eta})}{\theta_1(z_l - z_j - \tilde{\eta})} = -1, \quad (3.2)$$

where we have set  $z_j = \tilde{\eta}v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Here and in the following, unless explicitly specified, the considered theta functions are of imaginary quasi-period  $\tilde{\tau}$ , i.e.  $\theta_1(z) \equiv \theta_1(z; \tilde{\tau})$ .

These Bethe equations can be rewritten in the logarithmic form as

$$Np_0(z_j) - \sum_{l=1}^n \vartheta(z_j - z_l) = 2\pi \left( n_j - \frac{n+1}{2} + \beta + 2\eta \sum_{l=1}^n z_l \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

where  $n_j$  are integers,  $p_0$  and  $\vartheta$  are the bare momentum and bare phase

$$p_0(z) = i \log \frac{\theta_1(\tilde{\eta}/2 + z)}{\theta_1(\tilde{\eta}/2 - z)}, \quad \vartheta(z) = i \log \frac{\theta_1(\tilde{\eta} + z)}{\theta_1(\tilde{\eta} - z)}, \quad (3.4)$$

and  $\omega = e^{i\pi\beta}$ . The degenerate ground states identified in [12] correspond to real solutions of (3.3) such that  $n_{j+1} - n_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . In the thermodynamic limit  $N \rightarrow \infty$  (with  $n = N/2$ ), the distribution of the Bethe roots corresponding to such states tends to a positive density  $\rho(z)$  on the interval  $[-1/2, 1/2]$ , solution of the following integral equation:

$$\rho(z) + \int_{-1/2}^{1/2} K(z - w) \rho(w) dw = \frac{p'_0(z)}{2\pi}, \quad (3.5)$$

with

$$p'_0(z) = i \left\{ \frac{\theta'_1(z + \tilde{\eta}/2)}{\theta_1(z + \tilde{\eta}/2)} - \frac{\theta'_1(z - \tilde{\eta}/2)}{\theta_1(z - \tilde{\eta}/2)} \right\}, \quad (3.6)$$

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \vartheta'(z) = \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{\theta'_1(z + \tilde{\eta})}{\theta_1(z + \tilde{\eta})} - \frac{\theta'_1(z - \tilde{\eta})}{\theta_1(z - \tilde{\eta})} \right\}. \quad (3.7)$$

The solution of the integral equation (3.5) can easily be computed by means of the Fourier transform. In the domain  $0 < \eta < 1/2$ , i.e.  $0 < -i\tilde{\eta} < -\frac{i}{2}\tilde{\tau}$ , we have

$$p'_m = \int_{-1/2}^{1/2} p'_0(z) e^{-2\pi i m z} dz = \begin{cases} 2\pi & \text{for } m = 0, \\ 2\pi \tilde{q}^{\frac{|m|}{2}} \frac{1 - \tilde{p}^{|m|} \tilde{q}^{-|m|}}{1 - \tilde{p}^{|m|}} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$k_m = \int_{-1/2}^{1/2} K(z) e^{-2\pi i m z} dz = \begin{cases} 1 & \text{for } m = 0, \\ \tilde{q}^{|m|} \frac{1 - \tilde{p}^{|m|} \tilde{q}^{-2|m|}}{1 - \tilde{p}^{|m|}} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.9)$$

such that

$$\rho(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m z}}{2 \cosh(i\pi m \tilde{\eta})} = \frac{1}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2} \frac{\theta_3(z; \tilde{\eta})}{\theta_4(z; \tilde{\eta})}, \quad (3.10)$$

in which we have set  $\tilde{q} = e^{2\pi i \tilde{\eta}}$ ,  $\tilde{p} = e^{2\pi i \tilde{\tau}}$ .

We now want to study more precisely how the Bethe roots of one of these ground states behave with respect to finite size corrections. Let us introduce, for a given (quasi-)ground state parametrized by the set of roots  $\{x_j\}_{1 \leq j \leq n}$  solution to (3.3) with  $\omega_x = e^{i\pi \beta_x}$  and a given shift of integers  $k_x = n_j - j$  (which does not depend on  $j$ ), the following counting function on  $\mathbb{R}$ :

$$\hat{\xi}_{N;x}(z) = \frac{1}{\pi} p_0(z) - \frac{1}{\pi N} \sum_{l=1}^n \vartheta(z - x_l) + \frac{1}{n} \left( \frac{n+1}{2} - k_x - \beta_x - 2\eta \sum_{l=1}^n x_l \right). \quad (3.11)$$

This function is such that  $\hat{\xi}_{N;x}(x_j) = j/n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Moreover, since its derivative,

$$\hat{\xi}'_{N;x}(z) = \frac{1}{\pi} p'_0(z) - \frac{2}{N} \sum_{l=1}^n K(z - x_l), \quad (3.12)$$

which is 1-periodic, tends to  $2\rho(z)$  (which is positive) in the thermodynamic limit,  $\hat{\xi}_{N;x}$  is an increasing, and hence invertible function, at least for  $N$  large enough<sup>3</sup>. Hence one can show the following result:

**Proposition 3.1.** *Let  $f$  be a  $C^\infty$  1-periodic function on  $\mathbb{R}$ . Then, the sum of all the values  $f(x_j)$ , where the set of spectral parameters  $\{x_j\}_{1 \leq j \leq n}$  parametrizes one of the quasi-ground states solution to (3.3), can be replaced by an integral in the thermodynamic limit according to the following rule:*

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \int_{-1/2}^{1/2} f(z) \rho(z) dz + O(N^{-\infty}). \quad (3.13)$$

---

<sup>3</sup>Otherwise, it means that  $\forall N, \exists j_N > N, \exists z_{j_N} \in [-1/2, 1/2]$  such that  $\hat{\xi}'_{j_N;x}(z_{j_N}) \leq 0$ . The sequence  $(z_{j_N})_{N>0}$  being bounded, it admits a subsequence  $(z_{k_N})_{N>0}$  converging to some value  $z_0 \in [-1/2, 1/2]$ . Since the corresponding sequence of second derivatives  $\hat{\xi}''_{k_N;x}$  of the counting function (3.11) is uniformly bounded, it follows that  $\hat{\xi}'_{k_N;x}(z_{k_N}) \rightarrow 2\rho(z_0)$ , which is in contradiction with the fact that  $\rho(z_0) > 0$ .

Similarly, if  $g$  is a  $C^\infty$  function such that  $g'$  is 1-periodic, then

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n g(x_j) = \int_{-1/2}^{1/2} g(z) \rho(z) dz + \frac{c_g}{N} \sum_{j=1}^n x_j + O(N^{-\infty}), \quad (3.14)$$

where  $c_g = \int_{-1/2}^{1/2} g'(z) dz = g(1/2) - g(-1/2)$ .

*Proof* — The proof of (3.13) is similar to the proof of Proposition 3.1 of [8]. For completeness, we recall its main arguments. It relies on the fact that one can easily prove, using the Taylor expansion of the 1-periodic function  $f$ , the analog of (3.13) in the case of homogeneously distributed variables:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(z) dz + O(N^{-\infty}). \quad (3.15)$$

One should then notice that  $\widehat{\xi}_{N;x}$  is a  $C^\infty$  function of real variables such that  $\widehat{\xi}_{N;x}(z+1) = \widehat{\xi}_{N;x}(z) + 1$ , so that the function  $f \circ \widehat{\xi}_{N;x}^{-1}$  is also 1-periodic. One can therefore apply (3.15) to  $f \circ \widehat{\xi}_{N;x}^{-1}$  and perform a change of variables in the integral to express the sum over  $x_j$  as

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\widehat{\xi}_{N;x}^{-1}(j/n)) = \int_{-1/2}^{1/2} f(z) \widehat{\xi}_{N;x}'(z) dz + O(N^{-\infty}). \quad (3.16)$$

Finally, applying (3.16) to the r.h.s. of (3.12), we obtain that, up to corrections of order  $O(N^{-\infty})$ , the function  $\widehat{\xi}_{N;x}/2$  satisfies the same integral equation (3.5) as  $\rho$ . By uniqueness of the solution, we have

$$\widehat{\xi}_{N;x}(z) = 2\rho(z) + O(N^{-\infty}), \quad (3.17)$$

which ends the proof of (3.13).

The identity (3.14) is then a direct corollary of (3.13): if  $g'(x)$  is 1-periodic, then  $g(x) - c_g x$  is also 1-periodic, and one can apply (3.13) to get

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n g(x_j) - \frac{c_g}{N} \sum_{j=1}^n x_j = \int_{-1/2}^{1/2} g(z) \rho(z) dz - c_g \int_{-1/2}^{1/2} z \rho(z) dz + O(N^{-\infty}), \quad (3.18)$$

the last integral being zero by symmetry.  $\square$

*Remark 3.1.* Proposition 3.1 can be used to obtain a sum rule for the corresponding ground state roots. Summing all logarithmic Bethe equations (3.3) for  $j = 1, \dots, n$  and using the fact that  $\vartheta$  is an odd function, we get

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n p_0(x_j) = \mathbf{k}_x + \beta_x + 2\eta \sum_{j=1}^n x_j. \quad (3.19)$$

Using then (3.14) applied to the l.h.s of (3.19),

$$\sum_{j=1}^n p_0(x_j) = 2\pi \sum_{j=1}^n x_j + O(N^{-\infty}), \quad (3.20)$$

we obtain that

$$\sum_{j=1}^n x_j = \frac{k_x + \beta_x}{2(1-\eta)} + O(N^{-\infty}) = \frac{Lk_x + rn + 2\ell_x}{2(L-r)} + O(N^{-\infty}), \quad (3.21)$$

in which we have set  $\beta_x = \frac{rn+2\ell_x}{L}$ .

*Remark 3.2.* The counting function (3.11) can be evaluated in the thermodynamic limit as

$$\widehat{\xi}_{N;x}(z) = 2 \int_0^z \rho(w) dw + \frac{n+1}{N} - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^n x_j + O(N^{-\infty}). \quad (3.22)$$

This follows from (3.17) and from the value  $\widehat{\xi}_{N;x}(0)$  which can be evaluated in the thermodynamic limit by means of (3.21) as well as (3.14) applied to the odd function  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_{N;x}(0) &= -\frac{1}{\pi N} \sum_{\ell=1}^n \vartheta(-x_\ell) + \frac{1}{n} \left( \frac{n+1}{2} - k_x - \beta_x - 2\eta \sum_{j=1}^n x_j \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{n+1}{2} - \sum_{j=1}^n x_j \right) + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

One can now use these results to compute more precisely the infinitesimal difference of roots  $x_{j+1} - x_j$ . The latter is given as the value  $\widehat{\delta}_x(x_j)$  of the infinitesimal shift function  $\widehat{\delta}_x$  defined as

$$\widehat{\delta}_x(z) = \widehat{\xi}_{N;x}^{-1} \left( \widehat{\xi}_{N;x}(z) + \frac{1}{n} \right) - z. \quad (3.24)$$

Rewriting the equation  $\widehat{\xi}_{N;x}(\widehat{\delta}_x(z) + z) = \widehat{\xi}_{N;x}(z) + \frac{1}{n}$  using the representation (3.22) of  $\widehat{\xi}_{N;x}$ , one gets

$$\int_z^{z+\widehat{\delta}_x(z)} \rho(w) dw = \frac{1}{N} + O(N^{-\infty}). \quad (3.25)$$

Expanding  $\rho$  in Taylor series, one therefore obtains a relation which enables one in principle to compute  $\widehat{\delta}_x(z)$  at all order in  $N$ :

$$N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \rho^{(k-1)}(z) [\widehat{\delta}_x(z)]^k = 1 + O(N^{-\infty}). \quad (3.26)$$

Let us now consider two different ground states for the system of Bethe equations (3.3), parameterized by a solution  $\{x_j\}_{j=1,\dots,n}$ ,  $\omega_x = e^{i\pi\beta_x}$ , and a shift of integers  $k_x$  (respectively by  $\{y_j\}_{j=1,\dots,n}$ ,  $\omega_y = e^{i\pi\beta_y}$ , and a shift of integers  $k_y$ ). We want to evaluate, at large  $N$ , the infinitesimal difference of roots  $x_j - y_j$ . To this aim, we define the infinitesimal shift function

$$\widehat{\delta}_{x,y}(z) = \widehat{\xi}_{N;y}^{-1} \left( \widehat{\xi}_{N;y}(z) \right) - z, \quad (3.27)$$

which is such that  $\widehat{\delta}_{x,y}(y_j) = x_j - y_j$ . Using again the representation (3.22) for  $\widehat{\xi}_{N;x}$  and  $\widehat{\xi}_{N;y}$ , one obtains for  $\widehat{\delta}_{x,y}$  an equation analog to (3.25):

$$\int_z^{z+\widehat{\delta}_{x,y}(z)} \rho(w) dw = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) + O(N^{-\infty}), \quad (3.28)$$

which leads to

$$N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \rho^{(k-1)}(z) [\hat{\delta}_{x,y}(z)]^k = \sum_l (x_l - y_l) + O(N^{-\infty}). \quad (3.29)$$

Comparing this equation to (3.26), we obtain that the two infinitesimal shift functions  $\hat{\delta}_x$  and  $\hat{\delta}_{x,y}$ , seen as functionals of the density  $\rho$ , are related by

$$\hat{\delta}_{x,y}[\rho(z)] = \hat{\delta}_x \left[ \frac{\rho(z)}{\sum_l (x_l - y_l)} \right] + O(N^{-\infty}). \quad (3.30)$$

This characterizes, at all orders in  $N$ , the infinitesimal difference of roots  $x_j - y_j$ . We recall that, from (3.21), the sum  $\sum_l (x_l - y_l)$  is itself given by

$$\sum_l (x_l - y_l) = \frac{k_x - k_y + \beta_x - \beta_y}{2(1 - \eta)} + O(N^{-\infty}) \quad (3.31)$$

$$= \frac{L(k_x - k_y) + 2(\ell_x - \ell_y)}{2(L - r)} + O(N^{-\infty}), \quad (3.32)$$

which also means that

$$e^{2\pi i(1-\eta) \sum_l (x_l - y_l)} = e^{i\pi(k_x - k_y) \frac{\omega_x}{\omega_y}} + O(N^{-\infty}). \quad (3.33)$$

In particular, the previous study enables us to identify (and count) the degenerate ground states associated with a given set of Bethe equations. We see from (3.30) that two solutions  $\{x\}$  and  $\{y\}$  are different if and only if the total shift  $\sum_l (x_l - y_l)$  is not an integer. Hence, in this setting, the different degenerate ground states are completely determined by two quantum numbers  $k \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  and  $\ell \in \mathbb{Z}/(L-r)\mathbb{Z}$ . If  $L$  is odd, this gives  $2(L-r)$  different values (modulo 1) of (3.32), corresponding to  $2(L-r)$  different Bethe eigenstates. For even  $L$ , we only get  $(L-r)$  different values of (3.32), each of them being associated to two opposite values of  $\omega$  according to the parity of  $k$  (see (3.33)).

## 4 The form factor in the thermodynamic limit

We now study the thermodynamic limit of the renormalized form factor (2.7) in the case where  $|\{u\}, \omega_u\rangle$  and  $|\{v\}, \omega_v\rangle$  are two ground states of the homogeneous model.

Let us set  $x_j \equiv \tilde{\eta}u_j$ ,  $y_j \equiv \tilde{\eta}v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , and  $\omega_x \equiv \omega_u$ ,  $\omega_y \equiv \omega_v$ . We have seen in Section 3 that the Bethe roots  $x_j$  (respectively  $y_j$ ) for one of the ground states are completely determined by the data of two quantum numbers  $k_x, \ell_x$  (respectively  $k_y, \ell_y$ ). From now on, we simply denote  $|k_x, \ell_x\rangle \equiv |\{u\}, \omega_u\rangle$  (respectively  $|k_y, \ell_y\rangle \equiv |\{v\}, \omega_v\rangle$ ) the corresponding Bethe eigenstate, and  $|\psi_g^{(k_x, \ell_x)}\rangle$  (respectively  $|\psi_g^{(k_y, \ell_y)}\rangle$ ) the corresponding state renormalized to unity, i.e.

$$|\psi_g^{(k_x, \ell_x)}\rangle = \frac{|k_x, \ell_x\rangle}{(\langle k_x, \ell_x | k_x, \ell_x \rangle)^{1/2}}, \quad |\psi_g^{(k_y, \ell_y)}\rangle = \frac{|k_y, \ell_y\rangle}{(\langle k_y, \ell_y | k_y, \ell_y \rangle)^{1/2}}. \quad (4.1)$$

In order to study how the determinant representation for  $\mathbf{s}_m^z$  behaves in the thermodynamic limit, it is convenient to rewrite it in terms of theta functions with quasi-period  $\tilde{\tau}$  by means

of Jacobi's imaginary transformation (3.1). Let us first consider the quantity (2.14) in the case  $\gamma \neq 0$ . We obtain

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{k}_x, \ell_x | \sigma_m^z | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle}{\langle \mathbf{k}_y, \ell_y | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle} &= \left[ \frac{\omega_x}{\omega_y} e^{-2\pi i \eta \tilde{\gamma}} e^{-i \sum_{l=1}^n [p_0(x_l) - p_0(y_l)]} \right]^{m-1} \\ &\times \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \right)^s \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \tilde{\gamma})}{\theta_1(\tilde{\eta}s)} \right\} \left( -\tilde{\eta} \theta_1'(0) e^{-2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \frac{\omega_x^2}{\omega_y^2} \right)^n \\ &\times \prod_{k < l} \frac{\theta_1(y_k - y_l)}{\theta_1(x_k - x_l)} \frac{\det_n [\tilde{H}(\{x\}, \{y\}) - 2\tilde{Q}(\{x\}, \{y\})]}{\det_n [\tilde{\Phi}(\{y\})]}, \quad (4.2) \end{aligned}$$

with  $\tilde{\gamma} = \sum_{j=1}^n (y_j - x_j)$  and

$$\begin{aligned} [\tilde{H}]_{jk} &= \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \frac{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_j - y_k)} - \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \frac{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\gamma} + \tilde{\eta})}{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\eta})} \right\} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k + \tilde{\eta})} \\ &- \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \frac{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_j - y_k)} - \frac{\omega_x}{\omega_y} e^{-2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \frac{\theta_1(x_j - y_k + \tilde{\gamma} - \tilde{\eta})}{\theta_1(x_j - y_k - \tilde{\eta})} \right\} \\ &\times \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^2 e^{4\pi i \eta \tilde{\gamma}} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k - \tilde{\eta})}, \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$[\tilde{Q}]_{jk} = \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \frac{\theta_1(x_j - \frac{\tilde{\eta}}{2} + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_j - \frac{\tilde{\eta}}{2})} - \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \frac{\theta_1(x_j + \frac{\tilde{\eta}}{2} + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_j + \frac{\tilde{\eta}}{2})} \right\} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l + \frac{\tilde{\eta}}{2})}{\theta_1(y_l + \frac{\tilde{\eta}}{2})}, \quad (4.4)$$

$$[\tilde{\Phi}]_{jk} = -2\pi i \tilde{\eta} N \delta_{jk} \left\{ \frac{p'_0(y_j)}{2\pi} - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^n K(y_j - y_l) \right\} - 2\pi i \tilde{\eta} K(y_j - y_k) + 4\pi i \tilde{\eta} \eta. \quad (4.5)$$

The determinant of the matrix  $\tilde{\Phi}$  (4.5) is already in a convenient form for taking the thermodynamic limit. Using (3.13), (3.5), we get

$$[\tilde{\Phi}]_{jk} = -2\pi i \tilde{\eta} N \rho(y_k) \left\{ \delta_{jk} + \frac{1}{N} \frac{K(y_j - y_k)}{\rho(y_k)} - \frac{1}{N} \frac{2\eta}{\rho(y_k)} + O(N^{-\infty}) \right\}, \quad (4.6)$$

so that the corresponding determinant can be written in terms of a Fredholm determinant in the thermodynamic limit:

$$\det_n [\tilde{\Phi}(\{y\})] = (-2\pi i \tilde{\eta} N)^n \prod_{l=1}^n \rho(y_l) \left\{ \det [1 + \hat{K} - \hat{V}_0] + O(N^{-\infty}) \right\}. \quad (4.7)$$

Here  $\hat{K}$  and  $\hat{V}_0$  are integral operators acting on the interval  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , with respective kernels  $K(y - z)$  given by (3.7), and  $V_0(y - z) = 2\eta$ .

The determinant appearing in the numerator of (4.2) can be transformed, similarly as what was done in [8], in a more suitable form for the thermodynamic limit. Using the results of Appendix B, we have

$$\begin{aligned} (-1)^n \prod_{j < k} \frac{\theta_1(y_j - y_k)}{\theta_1(x_j - x_k)} \det_n [\tilde{H}(\{x\}, \{y\}) - 2\tilde{Q}(\{x\}, \{y\})] \\ = \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \det_n [(\mathcal{H} - \mathcal{Q})(\{x\}, \{y\})] - \det_n [(\mathcal{H} + \mathcal{Q})(\{x\}, \{y\})] \right\}, \quad (4.8) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}]_{jk} &= \delta_{jk} \frac{\prod_{l \neq j} \theta_1(y_j - y_l)}{\prod_{l=1}^n \theta_1(y_j - x_l)} \left\{ \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k + \tilde{\eta})} - \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^2 e^{4\pi i \eta \tilde{\gamma}} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k - \tilde{\eta})} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\theta'_1(0)} \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \left\{ \frac{\theta'_1(y_j - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k + \tilde{\eta})} - \frac{\theta'_1(y_j - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k - \tilde{\eta})} \right\}, \\
&= \delta_{jk} N \phi_j^{-1}(\{x\}, \{y\}) \left\{ \phi_+(y_k | \{x\}, \{y\}) - \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^2 e^{4\pi i \eta \tilde{\gamma}} \phi_-(y_k | \{x\}, \{y\}) \right\} \\
&\quad - \frac{2\pi i}{\theta'_1(0)} \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} K(y_j - y_k), \tag{4.9}
\end{aligned}$$

and

$$[\mathcal{Q}]_{jk} = \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} - \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l + \frac{\tilde{\eta}}{2}) \theta_1(y_l - \frac{\tilde{\eta}}{2})}{\theta_1(y_l + \frac{\tilde{\eta}}{2}) \theta_1(x_l - \frac{\tilde{\eta}}{2})} = \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} - e^{-i \sum_{l=1}^n [p_0(x_l) - p_0(y_l)]}. \tag{4.10}$$

In (4.9), the factor  $\phi_j(\{x\}, \{y\})$  and the functions  $\phi_{\pm}(y | \{x\}, \{y\})$  are respectively defined as

$$\phi_j(\{x\}, \{y\}) = N \frac{\prod_{l=1}^n \theta_1(y_j - x_l)}{\prod_{l \neq j} \theta_1(y_j - y_l)}, \tag{4.11}$$

$$\phi_{\pm}(y | \{x\}, \{y\}) = \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y \pm \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y \pm \tilde{\eta})}. \tag{4.12}$$

The behavior of the matrix elements of  $\mathcal{Q}$  can straightforwardly be evaluated in the thermodynamic limit. From (3.20) and (3.33), we obtain

$$[\mathcal{Q}]_{jk} = [(-1)^k - 1] e^{2\pi i \tilde{\gamma}} + O(N^{-\infty}), \tag{4.13}$$

where we have set  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_y - \mathbf{k}_x$ . It follows in particular that the form factor (2.7) vanishes in the thermodynamic limit when  $\mathbf{k} = 0$ .

The behavior of the functions  $\phi_{\pm}(y | \{x\}, \{y\})$  (4.12), conveniently rewritten in the form

$$\phi_{\pm}(y | \{x\}, \{y\}) = \exp \left\{ \sum_{l=1}^n \left( \log \theta_1(x_l - y \pm \tilde{\eta}) - \log \theta_1(y_l - y \pm \tilde{\eta}) \right) \right\}, \tag{4.14}$$

can be evaluated by means of Proposition 3.1. Indeed, the functions  $g^{\pm} : z \mapsto \log \theta_1(z - y \pm \tilde{\eta})$  being  $\mathcal{C}^{\infty}$  on  $\mathbb{R}$  with a 1-periodic derivative, one can apply (3.14) to each of the sums in (4.14), with corresponding constants given by

$$c_{g^{\pm}} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\theta'_1(z - y \pm \tilde{\eta})}{\theta_1(z - y \pm \tilde{\eta})} dz = \mp i\pi. \tag{4.15}$$

One obtains

$$\phi_{\pm}(y | \{x\}, \{y\}) = e^{\pm i\pi \tilde{\gamma}} + O(N^{-\infty}). \tag{4.16}$$

So as to evaluate the factor  $\phi$  (4.11), let us define the function

$$\phi(y | \{x\}, \{y\}) = \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y)}{\theta_1(y_l - y)} \left\{ \omega_y^2 e^{4i\pi \eta \sum_l y_l} \frac{\theta_1^N(y + \tilde{\eta}/2)}{\theta_1^N(y - \tilde{\eta}/2)} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(y_l - y + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y - \tilde{\eta})} + 1 \right\}, \tag{4.17}$$

which is  $\mathcal{C}^\infty$  and 1-periodic on  $\mathbb{R}$ . This function is such that

$$\phi(y_j|\{x\},\{y\}) = -i\pi \frac{\widehat{\xi}'_y(y_j)}{\theta'_1(0)} \phi_j(\{x\},\{y\}). \quad (4.18)$$

Using the fact that the sum of the residues of the elliptic function

$$h_\pm(z) = \frac{\theta_1(z-y-\tilde{\gamma})}{\theta_1(z-y)} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(z-x_l \pm \tilde{\eta})}{\theta_1(z-y_l \pm \tilde{\eta})} \quad (4.19)$$

vanishes in an elementary cell, we obtain the following identity for the quantity  $\phi_j$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \frac{\theta_1(y-y_j+\tilde{\gamma} \pm \tilde{\eta})}{\theta_1(y-y_j \pm \tilde{\eta})} \phi_j(\{x\},\{y\}) = \theta_1(\tilde{\gamma}) \phi_\mp(y|\{x\},\{y\}). \quad (4.20)$$

Rewriting the summand in terms of arguments of 1-periodic  $\mathcal{C}^\infty$  functions evaluated at the ground state roots  $y_j$  by means of (4.18), and applying Proposition 3.1, we obtain that, in the thermodynamic limit, the function  $\phi$  (4.17) satisfies the integral equation

$$-\frac{\theta'_1(0)}{2i\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\theta_1(y-z+\tilde{\gamma} \pm \tilde{\eta})}{\theta_1(y-z \pm \tilde{\eta})} \phi(z) dz = e^{\mp i\pi\tilde{\gamma}} \theta_1(\tilde{\gamma}) + O(N^{-\infty}). \quad (4.21)$$

The latter can easily be solved by Fourier transform and we get

$$-\frac{\theta'_1(0)}{2i\pi} \phi(y_j) = \phi_j \rho(y_j) + O(N^{-\infty}) = \sin(\pi\tilde{\gamma}) \frac{\theta'_1(0)}{\pi} + O(N^{-\infty}). \quad (4.22)$$

Gathering all these results, and using also (3.33), we can therefore rewrite the elements of the matrix  $\mathcal{H}(\{x\},\{y\})$  (4.9) in the thermodynamic limit as

$$[\mathcal{H}]_{jk} = -2\pi i N \frac{\rho(y_k)}{\theta'_1(0)} e^{2\pi i \tilde{\gamma}} \left\{ \delta_{jk} + \frac{(-1)^k}{N} \frac{K(y_j - y_k)}{\rho(y_k)} + O(N^{-\infty}) \right\}. \quad (4.23)$$

Hence, the quantity (4.2) admits the following representation in terms of Fredholm determinants:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{k}_x, \ell_x | \sigma_m^z | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle}{\langle \mathbf{k}_y, \ell_y | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle} &= (-1)^{k(m-1)} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \right)^s \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \tilde{\gamma})}{\theta_1(\tilde{\eta}s) \theta_1(\tilde{\gamma})} \right\} \\ &\times \left( (-1)^k \frac{\omega_x}{\omega_y} \right)^n \frac{\det[1 + (-1)^k \widehat{K} + \frac{1-(-1)^k}{2} \widehat{V}] - \det[1 + (-1)^k \widehat{K} - \frac{1-(-1)^k}{2} \widehat{V}]}{\det[1 + \widehat{K} - \widehat{V}_0]} \\ &+ O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

We recall that  $\widehat{K}$  has kernel  $K$  (3.7), whereas  $\widehat{V}_0$  and  $\widehat{V}$  have respective constant kernels  $2\eta$  and  $\frac{i}{\pi} \theta'_1(0)$ .

In its turn, the second ratio (2.17) can be evaluated using the Bethe equations for  $\{u\}$  and  $\{v\}$ , the estimations (4.16) and (4.22), as well as the Fredholm determinant representation (4.7). It gives

$$\frac{\langle \mathbf{k}_y, \ell_y | \mathbf{k}_y, \ell_y \rangle}{\langle \mathbf{k}_x, \ell_x | \mathbf{k}_x, \ell_x \rangle} = \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right)^{2n} + O(N^{-\infty}), \quad (4.25)$$

so that the conveniently renormalized form factor (2.7) is simply given by

$$\begin{aligned} \langle \psi_g^{(k_x, \ell_x)} | \sigma_m^z | \psi_g^{(k_y, \ell_y)} \rangle &= (-1)^{k(m-1)} \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} e^{2\pi i \eta \tilde{\gamma}} \right)^s \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \tilde{\gamma})}{\theta_1(\tilde{\eta}s) \theta_1(\tilde{\gamma})} \right\} \\ &\times \frac{\det[1 + (-1)^k \hat{K} + \frac{1-(-1)^k}{2} \hat{V}] - \det[1 + (-1)^k \hat{K} - \frac{1-(-1)^k}{2} \hat{V}]}{\det[1 + \hat{K} - \hat{V}_0]} + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

The above Fredholm determinants can be computed by means of Fourier transform. Indeed, as the kernel of the integral operator  $\hat{K}$  depends only on the difference of two variables, its eigenvalues correspond to the Fourier coefficients  $k_m$  (3.9) of the function  $K$  (3.7). We obtain

$$\begin{aligned} \det[1 + \hat{K} - \hat{V}_0] &= (2 - 2\eta) \prod_{m=1}^{+\infty} \left( 1 + \tilde{q}^m \frac{1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-2m}}{1 - \tilde{p}^m} \right)^2 \\ &= 2(1 - \eta) \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 - \tilde{p}^m)^2}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

whereas

$$\begin{aligned} \det \left[ 1 + (-1)^k \hat{K} \pm \frac{1 - (-1)^k}{2} \hat{V} \right] &= \left( 1 + (-1)^k \pm i \frac{1 - (-1)^k}{2\pi} \theta'_1(0) \right) \\ &\times \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 + (-1)^k \tilde{q}^m)^2 (1 - (-1)^k \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 - \tilde{p}^m)^2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Finally, the renormalized form factor (2.7) is given as the following infinite product

$$\begin{aligned} \langle \psi_g^{(k_x, \ell_x)} | \sigma_m^z | \psi_g^{(k_y, \ell_y)} \rangle &= \frac{1 - (-1)^k}{2} (-1)^{m-1} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2} \\ &\times \left\{ \frac{i}{\pi(L-r)} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} e^{i\pi(2\tilde{\gamma}-1)s} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \tilde{\gamma}) \theta'_1(0)}{\theta_1(\tilde{\eta}s) \theta_1(\tilde{\gamma})} \right\} + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

The previous expression is a priori only valid in the case  $\gamma \neq 0$ . One can perform a similar study in the two particular cases mentioned in Remark 2.2, i.e. for the mean value (2.18) and the form factor (2.20) in the case  $L$  even. One obtains that the former vanishes, whereas the latter can be written as

$$\begin{aligned} \langle \psi_g^{(0, \ell_x)} | \sigma_m^z | \psi_g^{(1, \ell_x - L/2)} \rangle &= (-1)^{m-1} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2} \\ &\times \frac{ie^{-i\pi s_0}}{\pi(L-r)} \left\{ \sum_{s=0}^{L-1} (-1)^s \frac{\theta'_1(\tilde{\eta}(s_0 + s))}{\theta_1(\tilde{\eta}(s_0 + s))} - i\pi\eta L \right\} + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Note that we can rewrite a general representation valid for all cases by conveniently reg-

ularizing the representation (4.29) as

$$\begin{aligned} \langle \psi_g^{(k_x, \ell_x)} | \sigma_m^z | \psi_g^{(k_y, \ell_y)} \rangle &= \frac{1 - (-1)^k}{2} (-1)^{m-1} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2} \\ &\times \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{i}{\pi(L-r)} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} e^{i\pi(2\tilde{\gamma}-1+2\eta\alpha)s} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \tilde{\gamma} + \alpha) \theta_1'(0)}{\theta_1(\tilde{\eta}s) \theta_1(\tilde{\gamma} + \alpha)} \right\} + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

We recall that, from (3.32), the difference of roots  $\tilde{\gamma}$  can be expressed in terms of the quantum numbers  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_y - \mathbf{k}_x$ ,  $\ell = \ell_y - \ell_x$  as

$$\tilde{\gamma} = \frac{Lk + 2\ell}{2(L-r)} + O(N^{-\infty}), \quad (4.32)$$

so that

$$\begin{aligned} \langle \psi_g^{(k_x, \ell_x)} | \sigma_m^z | \psi_g^{(k_y, \ell_y)} \rangle &= \frac{1 - (-1)^k}{2} (-1)^{m-1} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2} \\ &\times \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{i}{\pi(L-r)} \sum_{s \in s_0 + \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}} e^{2\pi i(\frac{r+2\ell}{2(L-r)} + \eta\alpha)s} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}s + \frac{L+2\ell}{2(L-r)} + \alpha) \theta_1'(0)}{\theta_1(\tilde{\eta}s) \theta_1(\frac{L+2\ell}{2(L-r)} + \alpha)} \right\} + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Note that this quantity depends only on the differences  $\mathbf{k}$  and  $\ell$  of the quantum numbers:

$$\langle \psi_g^{(k_x, \ell_x)} | \sigma_m^z | \psi_g^{(k_y, \ell_y)} \rangle \equiv \mathbf{s}_m^z(\mathbf{k}, \ell) + O(N^{-\infty}). \quad (4.34)$$

## 5 Spontaneous staggered polarizations of the CSOS model

Let us consider the  $2(L-r)$ -dimensional subspace  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$  of the space of states  $\text{Fun}(\mathcal{H}[0])$  generated by all the ground states, i.e. by the Bethe eigenstates associated to the  $2(L-r)$  largest (in magnitude) eigenvalues of the transfer matrix in the thermodynamic limit. A basis of this subspace is given by the normalized Bethe eigenstates  $|\psi_g^{(\mathbf{k}_\alpha, \ell_\alpha)}\rangle$ , with  $\mathbf{k}_\alpha \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  and  $\ell_\alpha \in \mathbb{Z}/(L-r)\mathbb{Z}$ . This basis is not polarized, since the mean value of  $\sigma_m^z$  in one of the Bethe ground states  $|\psi_g^{(\mathbf{k}_\alpha, \ell_\alpha)}\rangle$  vanishes in the thermodynamic limit. A polarized basis of  $\text{Fun}(\mathcal{H}_g[0])$  is instead given by

$$|\phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(L-r)}} \sum_{\mathbf{k}_\alpha=0}^1 \sum_{\ell_\alpha=0}^{L-r-1} (-1)^{\mathbf{k}_\alpha \epsilon} e^{-i\pi \frac{r\mathbf{k}_\alpha + 2\ell_\alpha}{L-r}(\mathbf{t} + s_0)} |\psi_g^{(\mathbf{k}_\alpha, \ell_\alpha)}\rangle, \quad (5.1)$$

with  $\epsilon \in \{0, 1\}$  and  $\mathbf{t} \in \{0, 1, \dots, L-r-1\}$ . Spontaneous staggered polarizations of the CSOS model are given as the mean values of the  $\sigma_m^z$  operator in the polarized states (5.1).

*Remark 5.1.* It can be shown, for instance by considering the combinatorial formula for the Bethe states (see Theorem 5 of [5]), that the combination (5.1) tends, in the low-temperature limit  $\tilde{p}, \tilde{q} \rightarrow 0$ , to one of the flat ground state configurations of the type  $(a, a+1, a, a+1, \dots)$  or  $(a+1, a, a+1, a, \dots)$  identified in [13]. More precisely, in the case  $s_0 = \frac{\tau}{2\eta} = -\frac{1}{2\eta}$ , the state  $|\phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})}\rangle$  with  $\mathbf{t} = a - \lfloor \eta a \rfloor$  tends to the flat ground state configuration  $(a, a+1, a, a+1, \dots)$  if  $\epsilon - \lfloor \eta a \rfloor$  is even, and to  $(a+1, a, a+1, a, \dots)$  if  $\epsilon - \lfloor \eta a \rfloor$  is odd (here  $\lfloor x \rfloor$  denotes the integer part of  $x$ ).

In fact, the matrix elements of the  $\sigma_m^z$  operator in the states (5.1) are given as

$$\begin{aligned} \langle \phi_g^{(\epsilon_1, \mathbf{t}_1)} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon_2, \mathbf{t}_2)} \rangle &= \frac{1}{2(L-r)} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2=0}^1 \sum_{\ell_1, \ell_2=0}^{L-r-1} (-1)^{\mathbf{k}_1 \epsilon_1 + \mathbf{k}_2 \epsilon_2} \\ &\quad \times e^{i\pi \left[ \frac{r\mathbf{k}_1 + 2\ell_1}{L-r} (\mathbf{t}_1 + s_0) - \frac{r\mathbf{k}_2 + 2\ell_2}{L-r} (\mathbf{t}_2 + s_0) \right]} \langle \psi_g^{(\mathbf{k}_1, \ell_1)} | \sigma_m^z | \psi_g^{(\mathbf{k}_2, \ell_2)} \rangle \\ &= \frac{1}{2(L-r)} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}=0}^1 \sum_{\ell_1, \ell=0}^{L-r-1} (-1)^{\mathbf{k}_1 (\epsilon_1 - \epsilon_2) + \mathbf{k} \epsilon_2} \\ &\quad \times e^{i\pi \left[ \frac{r\mathbf{k}_1 + 2\ell_1}{L-r} (\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) - \frac{r\mathbf{k} + 2\ell}{L-r} (\mathbf{t}_2 + s_0) \right]} \mathbf{s}_m^z(\mathbf{k}, \ell) + O(N^{-\infty}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

in which we have set  $\ell = \ell_2 - \ell_1$  and  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ . We see from the sum over  $\ell_1$  that this quantity is non-zero only if  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ , and then from the sum over  $\mathbf{k}_1$  that one should also have  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ . Hence, up to exponentially small corrections in the size of the system, the local operator  $\sigma_m^z$  is diagonal in the basis (5.1),

$$\langle \phi_g^{(\epsilon_1, \mathbf{t}_1)} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon_2, \mathbf{t}_2)} \rangle = \delta_{\epsilon_1, \epsilon_2} \delta_{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2} \langle \phi_g^{(\epsilon_1, \mathbf{t}_1)} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon_1, \mathbf{t}_1)} \rangle + O(N^{-\infty}), \quad (5.3)$$

and the corresponding mean values are given as

$$\begin{aligned} \langle \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} \rangle &= \frac{i(-1)^{m-1+\epsilon}}{\pi(L-r)} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m})^2} \\ &\quad \times \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{\ell=0}^{L-r-1} \sum_{s=0}^{L-1} e^{2\pi i \left( \frac{r+2\ell}{2(L-r)} + \eta \alpha \right) (s-\mathbf{t})} \frac{\theta_1(\tilde{\eta}(s_0 + s) + \frac{L+2\ell}{2(L-r)} + \alpha) \theta_1'(0)}{\theta_1(\tilde{\eta}(s_0 + s)) \theta_1(\frac{L+2\ell}{2(L-r)} + \alpha)} + O(N^{-\infty}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

The expression (5.4) coincides with the one obtained by Date et al. in [3] in the case  $r = 1$ ,  $L$  odd and  $s_0 = \frac{\tau}{2\eta} = -\frac{1}{2\tilde{\eta}}$ . Note however that the result (5.4) can be presented in a much simpler form by means of the identities of Appendix A for the sums of theta functions. Indeed, using respectively (A.6) to compute the sum over  $\ell$ , and then (A.7) to compute the sum over  $s$ , we obtain a simple combination of theta functions in which the  $\alpha \rightarrow 0$  limit can be straightforwardly taken, so that

$$\langle \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} \rangle = (-1)^{m+\epsilon} \frac{i}{\pi} \frac{\theta_1'(0; \eta \tilde{\tau}) \theta_1(\tilde{\eta} \mathbf{t}; (1-\eta) \tilde{\tau})}{\theta_2(0; \eta \tilde{\tau}) \theta_2(\tilde{\eta} \mathbf{t}; (1-\eta) \tilde{\tau})} + O(N^{-\infty}) \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{m-1+\epsilon} \prod_{m=1}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{q}^m)^2 (1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m-\mathbf{t}})}{(1 + \tilde{q}^m)^2 (1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m-\mathbf{t}})} \prod_{m=0}^{+\infty} \frac{(1 - \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m+\mathbf{t}})}{(1 + \tilde{p}^m \tilde{q}^{-m+\mathbf{t}})} \\ &\quad + O(N^{-\infty}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

in which we have set  $s_0 = -\frac{1}{2\tilde{\eta}}$ .

One recovers the low-temperature completely ordered limit by taking  $|\tilde{\tau}| \rightarrow \infty$ , i.e.  $\tilde{p}, \tilde{q} \rightarrow 0$  in this expression. If on the contrary one wants to study the critical limit  $|\tau| \rightarrow \infty$ , it is better to re-express the result (5.5) by means of Jacobi's imaginary transformation as

$$\langle \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} | \sigma_m^z | \phi_g^{(\epsilon, \mathbf{t})} \rangle = (-1)^{m+\epsilon} \frac{i\tau}{\pi\eta} \frac{\theta_1'(0; \frac{\tau}{\eta}) \theta_1(\frac{\eta \mathbf{t}}{1-\eta}; \frac{\tau}{1-\eta})}{\theta_4(0; \frac{\tau}{\eta}) \theta_4(\frac{\eta \mathbf{t}}{1-\eta}; \frac{\tau}{1-\eta})} + O(N^{-\infty}). \quad (5.7)$$

## 6 Conclusion

In this paper we have computed the spontaneous staggered polarizations of the cyclic solid-on-solid model in the thermodynamic limit. Our study relies on the determinant representation obtained in [10] for the finite-size matrix element of the local operator  $\sigma_m^z$  between two Bethe eigenstates. We have shown that, when the two Bethe eigenstates tend to two of the  $2(L-r)$  degenerate ground states of the model in the thermodynamic limit, the corresponding properly normalized form factor tends in this limit to a ratio of Fredholm determinants which can be explicitly computed. Performing a change of basis from the (unpolarized) Bethe ground states to their (polarized) linear combinations which become completely ordered in the low-temperature limit, we finally obtain very simple expressions for the spontaneous staggered polarizations of the model.

We expect that the techniques developed in this paper will be applicable to the computations of more sophisticated physical quantities, such as for instance local height probabilities. Note however that, whereas the  $\sigma_m^z$  form factor (which do not depend on the value of a reference height) can be expressed in finite volume as a *single* determinant of usual functions (2.9), the situation becomes more complicated as soon as one considers explicitly height-dependent quantities: it seems from [10] that even the simplest one, i.e. the *one-point* local height probability, can only be expressed as a sum of  $L$  (ratios of) determinants. This should nevertheless not be a problem for the study of the thermodynamic limit of this quantity in the case of the cyclic model considered in the present paper (i.e. at rational crossing parameter  $\eta = r/L$  fixed) since the number of terms remains finite in this limit. We plan to consider this problem, as well as the computation of more general multi-point local height probabilities, in a forthcoming publication.

## Acknowledgements

V. T. is supported by CNRS. We also acknowledge the support from the ANR grant DIADEMS 10 BLAN 012004. V. T. would like to thank LPTHE (Paris VI University) for hospitality.

## A Theta functions and useful identities

In this paper,  $\theta_1(z; \tau)$  denotes the usual theta function with quasi-periods 1 and  $\tau$ ,

$$\theta_1(z; \tau) = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{i\pi\tau(k+\frac{1}{2})^2} e^{2i\pi(k+\frac{1}{2})z}, \quad \Im\tau > 0, \quad (\text{A.1})$$

which satisfies

$$\theta_1(z+1; \tau) = -\theta_1(z; \tau), \quad \theta_1(z+\tau; \tau) = -e^{-i\pi\tau} e^{-2\pi iz} \theta_1(z; \tau). \quad (\text{A.2})$$

We also denote

$$\theta_2(z; \tau) = \theta_1\left(z + \frac{1}{2}; \tau\right), \quad \theta_4(z; \tau) = -i e^{\frac{i\pi\tau}{4}} e^{i\pi z} \theta_1\left(z + \frac{\tau}{2}; \tau\right). \quad (\text{A.3})$$

We recall Jacobi's imaginary transformation for the theta functions:

$$\theta_1(z; \tau) = -i (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_1\left(-\frac{z}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right), \quad (\text{A.4})$$

$$\theta_2(z; \tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\pi \frac{z^2}{\tau}} \theta_4\left(-\frac{z}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right). \quad (\text{A.5})$$

We also recall two useful summation identities (see for instance [11]):

$$\frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{-2\pi i k \frac{\ell}{n}} \frac{\theta_1(x + y + \frac{\ell}{n}; \tau) \theta_1'(0; \tau)}{\theta_1(x; \tau) \theta_1(y + \frac{\ell}{n}; \tau)} = e^{2\pi i k y} \frac{\theta_1(x + ny + k\tau; n\tau) \theta_1'(0; n\tau)}{\theta_1(x + k\tau; n\tau) \theta_1(ny; n\tau)}, \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{\ell}{n} x} \frac{\theta_1(x + y + \frac{\ell}{n}; \tau) \theta_1'(0; \tau)}{\theta_1(x; \tau) \theta_1(y + \frac{\ell}{n}; \tau)} = \frac{\theta_1(\frac{x}{n} + y; \frac{\tau}{n}) \theta_1'(0; \frac{\tau}{n})}{\theta_1(\frac{x}{n}; \frac{\tau}{n}) \theta_1(y; \frac{\tau}{n})}, \quad (\text{A.7})$$

with  $k \in \mathbb{Z}$ . These two identities are equivalent through Jacobi's imaginary transformation (A.4) and quasi-periodicity property (A.1).

## B A determinant identity

For two different sets of  $n$  pairwise distinct variables  $\{x\}$  and  $\{y\}$ , and  $\tilde{\gamma} = \sum_{j=1}^n (y_j - x_j)$ , we consider the determinant

$$\det_n [\tilde{H}_\alpha(\{x\}, \{y\}) - 2\tilde{Q}_\beta(\{x\}, \{y\})], \quad (\text{B.1})$$

where  $\tilde{Q}_\beta$  is a  $n \times n$  rank-1 matrix and

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_\alpha]_{ij} = & \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \alpha_1 \frac{\theta_1(x_i - y_j + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_i - y_j)} - \alpha_2 \frac{\theta_1(x_i - y_j + \tilde{\gamma} + \tilde{\eta})}{\theta_1(x_i - y_j + \tilde{\eta})} \right\} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_j + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_j + \tilde{\eta})} \\ & - \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \alpha_3 \frac{\theta_1(x_i - y_j + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_i - y_j)} - \alpha_4 \frac{\theta_1(x_i - y_j + \tilde{\gamma} - \tilde{\eta})}{\theta_1(x_i - y_j - \tilde{\eta})} \right\} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_j - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_j - \tilde{\eta})}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

with  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  arbitrary. For  $t$  being an arbitrary complex parameter, we introduce the matrix  $\mathcal{X}_t(\{x\}, \{y\})$  given by

$$[\mathcal{X}_t]_{jk} = \frac{1}{\theta_1(t)} \frac{\prod_{l=1}^n \theta_1(x_k - y_l)}{\prod_{l \neq k} \theta_1(x_k - x_l)} \frac{\theta_1(y_j - x_k + t)}{\theta_1(y_j - x_k)} \frac{\theta_1(x_k)}{\theta_1(x_k - t)}, \quad (\text{B.3})$$

with determinant

$$\det_n [\mathcal{X}_t(\{x\}, \{y\})] = (-1)^n \frac{\theta_1(\tilde{\gamma} + t)}{\theta_1(t)} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l)}{\theta_1(x_l - t)} \prod_{j < k} \frac{\theta_1(y_j - y_k)}{\theta_1(x_j - x_k)}. \quad (\text{B.4})$$

We have

$$\det_n [\tilde{H}_\alpha(\{x\}, \{y\}) - 2\tilde{Q}_\beta(\{x\}, \{y\})] = \frac{\det_n [(\mathcal{X}_t \tilde{H}_\alpha - 2\mathcal{X}_t \tilde{Q}_\beta)(\{x\}, \{y\})]}{\det_n [\mathcal{X}_t(\{x\}, \{y\})]}. \quad (\text{B.5})$$

We can compute the product of matrices  $\mathcal{X}_t \tilde{H}_\alpha$  by means of the residue theorem applied to the functions

$$g_\epsilon^{(j,k)}(z) = \frac{\theta_1(z - y_k + \tilde{\gamma} + \epsilon \tilde{\eta})}{\theta_1(z - y_k + \epsilon \tilde{\eta})} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(z - y_l)}{\theta_1(z - x_l)} \frac{\theta_1(y_j - z + t)}{\theta_1(y_j - z)} \frac{\theta_1(z)}{\theta_1(z - t)}, \quad (\text{B.6})$$

with  $\epsilon \in \{0, +1, -1\}$  and  $j, k = 1, \dots, n$ . These functions are doubly periodic of periods 1 and  $\tilde{\tau}$ , they are therefore elliptic functions and the sum of their residues inside an elementary cell cancels. It leads to the identities

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=1}^n \frac{\prod_{l=1}^n \theta_1(x_b - y_l)}{\prod_{l \neq b} \theta_1(x_b - x_l)} \frac{\theta_1(y_j - x_b + t)}{\theta_1(y_j - x_b)} \frac{\theta_1(x_b)}{\theta_1(x_b - t)} \cdot \frac{\theta_1(x_b - y_k + \tilde{\gamma} + \epsilon \tilde{\eta})}{\theta_1(x_b - y_k + \epsilon \tilde{\eta})} \\
&= -\theta_1(t) \frac{\theta_1(t - y_k + \tilde{\gamma} + \epsilon \tilde{\eta})}{\theta_1(t - y_k + \epsilon \tilde{\eta})} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(t - y_l)}{\theta_1(t - x_l)} \frac{\theta_1(y_j)}{\theta_1(y_j - t)} \\
&- (1 - \delta_{\epsilon,0}) \theta_1(\tilde{\gamma}) \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(y_k - y_l - \epsilon \tilde{\eta})}{\theta_1(y_k - x_l - \epsilon \tilde{\eta})} \frac{\theta_1(y_j - y_k + t + \epsilon \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k + \epsilon \tilde{\eta})} \frac{\theta_1(y_k - \epsilon \tilde{\eta})}{\theta_1(y_k - t - \epsilon \tilde{\eta})} \\
&\quad + \delta_{j,k} \delta_{\epsilon,0} \theta_1(\tilde{\gamma}) \theta_1(t) \frac{\prod_{l \neq j} \theta_1(y_j - y_l)}{\prod_{l=1}^n \theta_1(y_j - x_l)} \frac{\theta_1(y_j)}{\theta_1(y_j - t)}. \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

Gathering all terms coming from the different versions of (B.7), one obtains

$$(\mathcal{X}_t \tilde{H}_\alpha)(\{x\}, \{y\}) = (\mathcal{H}_{\alpha,t} + 2\mathcal{V}_{\alpha,t})(\{x\}, \{y\}). \quad (\text{B.8})$$

Here

$$\begin{aligned}
& [\mathcal{H}_{\alpha,t}(\{x\}, \{y\})]_{jk} = \frac{\alpha_2}{\theta_1(t)} \left[ \frac{\theta_1(y_j - y_k + t + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k + \tilde{\eta})} - 1 \right] \frac{\theta_1(y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_k - t - \tilde{\eta})} \\
&\quad - \frac{\alpha_4}{\theta_1(t)} \left[ \frac{\theta_1(y_j - y_k + t - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k - \tilde{\eta})} - 1 \right] \frac{\theta_1(y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_k - t + \tilde{\eta})} \\
&+ \delta_{jk} \frac{\theta_1(y_j)}{\theta_1(y_j - t)} \frac{\prod_{l \neq j} \theta_1(y_j - y_l)}{\prod_{l=1}^n \theta_1(y_j - x_l)} \left\{ \alpha_1 \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k + \tilde{\eta})} - \alpha_3 \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k - \tilde{\eta})} \right\}, \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

and  $\mathcal{V}_{\alpha,t}$  is a rank-1 matrix:

$$[\mathcal{V}_{\alpha,t}(\{x\}, \{y\})]_{jk} = \frac{1}{2\theta_1(t)} \left\{ \alpha_2 \frac{\theta_1(y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_k - t - \tilde{\eta})} - \alpha_4 \frac{\theta_1(y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_k - t + \tilde{\eta})} \right\} + O(1), \quad (\text{B.10})$$

where  $O(1)$  stand for terms which remain finite in the limit  $t \rightarrow 0$ .

Recall that  $t$  is an arbitrary parameter. We can therefore take the limit when it tends to 0 to simplify the previous formula. Using the fact that  $\mathcal{V}_{\alpha,t}$  and  $\mathcal{Q}_{\beta,t} \equiv \mathcal{X}_t \tilde{Q}_\beta$  are of rank 1, we have

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta_1(t) \det_n [\mathcal{H}_{\alpha,t} + 2(\mathcal{V}_{\alpha,t} - \mathcal{Q}_{\beta,t})] = \lim_{t \rightarrow 0} \theta_1(t) \det_n \mathcal{H}_{\alpha,t} + 2 \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{b=1}^n \det_n \mathcal{H}_{\alpha,t}^{(b)}, \quad (\text{B.11})$$

with  $[\mathcal{H}_{\alpha,t}^{(b)}]_{jk} = \theta_1(t) [\mathcal{V}_{\alpha,t} - \mathcal{Q}_{\beta,t}]_{jk}$  for  $k = b$  and  $[\mathcal{H}_{\alpha,t}^{(b)}]_{jk} = [\mathcal{H}_{\alpha,t}]_{jk}$  otherwise. The first limit in the right hand side of (B.11) is obviously zero, such that

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \theta_1(t) \det_n [\mathcal{H}_{\alpha,t} + 2(\mathcal{V}_{\alpha,t} - \mathcal{Q}_{\beta,t})] &= 2 \sum_{b=1}^n \det_n [\mathcal{H}_{\alpha}^{(b)}] \\
&= \det_n [\mathcal{H}_\alpha + (\mathcal{V}_\alpha - \mathcal{Q}_\beta)] - \det_n [\mathcal{H}_\alpha - (\mathcal{V}_\alpha - \mathcal{Q}_\beta)].
\end{aligned}$$

Here we have defined

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}_\alpha]_{jk} &= \lim_{t \rightarrow 0} [\mathcal{H}_{\alpha,t}]_{jk} \\
&= \delta_{jk} \frac{\prod_{l \neq j} \theta_1(y_j - y_l)}{\prod_{l=1}^n \theta_1(y_j - x_l)} \left\{ \alpha_1 \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k + \tilde{\eta})} - \alpha_3 \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_l - y_k - \tilde{\eta})} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\theta'_1(0)} \left[ \alpha_2 \frac{\theta'_1(y_j - y_k + \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k + \tilde{\eta})} - \alpha_4 \frac{\theta'_1(y_j - y_k - \tilde{\eta})}{\theta_1(y_j - y_k - \tilde{\eta})} \right], \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$[\mathcal{V}_\alpha]_{jk} = \lim_{t \rightarrow 0} \theta_1(t) [\mathcal{V}_{\alpha,t}]_{jk} = \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}, \tag{B.13}$$

$$[\mathcal{Q}_\beta]_{jk} = \lim_{t \rightarrow 0} \theta_1(t) [\mathcal{Q}_{\beta,t}]_{jk}, \tag{B.14}$$

and

$$[\mathcal{H}_\alpha^{(b)}]_{jk} = \begin{cases} [\mathcal{H}_\alpha]_{jk} & \text{if } k \neq b, \\ [\mathcal{V}_\alpha - \mathcal{Q}_\beta]_{jk} & \text{if } k = b. \end{cases} \tag{B.15}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
\det_n [\tilde{H}_\alpha(\{x\}, \{y\}) - 2\tilde{Q}_\beta(\{x\}, \{y\})] &= \frac{(-1)^n}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \prod_{j < k} \frac{\theta_1(x_j - x_k)}{\theta_1(y_j - y_k)} \\
&\times \left\{ \det_n [(\mathcal{H}_\alpha + (\mathcal{V}_\alpha - \mathcal{Q}_\beta))(\{x\}, \{y\})] - \det_n [(\mathcal{H}_\alpha - (\mathcal{V}_\alpha - \mathcal{Q}_\beta))(\{x\}, \{y\})] \right\}. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

If we suppose moreover that the matrix  $\tilde{Q}_\beta$  is of the type

$$[\tilde{Q}_\beta(\{x\}, \{y\})]_{ij} = \frac{1}{\theta_1(\tilde{\gamma})} \left\{ \beta_1 \frac{\theta_1(x_i - \frac{\tilde{\eta}}{2} + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_i - \frac{\tilde{\eta}}{2})} - \beta_2 \frac{\theta_1(x_i + \frac{\tilde{\eta}}{2} + \tilde{\gamma})}{\theta_1(x_i + \frac{\tilde{\eta}}{2})} \right\} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l + \frac{\tilde{\eta}}{2})}{\theta_1(y_l + \frac{\tilde{\eta}}{2})}, \tag{B.17}$$

with  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  arbitrary, then we can compute the product  $\mathcal{X}_t \tilde{Q}_\beta$  similarly as above by means of the residue theorem applied to the elliptic function

$$g_\epsilon^{(j)}(z) = \frac{\theta_1(z - \epsilon \frac{\tilde{\eta}}{2} + \tilde{\gamma})}{\theta_1(z - \epsilon \frac{\tilde{\eta}}{2})} \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(z - y_l)}{\theta_1(z - x_l)} \frac{\theta_1(y_j - z + t)}{\theta_1(y_j - z)} \frac{\theta_1(z)}{\theta_1(z - t)}, \tag{B.18}$$

with  $\epsilon = \pm 1$ . It leads to

$$[\mathcal{Q}_\beta]_{jk} = \lim_{t \rightarrow 0} \theta_1(t) [\mathcal{X}_t \tilde{Q}_\beta]_{jk} = \beta_2 - \beta_1 \prod_{l=1}^n \frac{\theta_1(x_l + \frac{\tilde{\eta}}{2}) \theta_1(y_l - \frac{\tilde{\eta}}{2})}{\theta_1(x_l - \frac{\tilde{\eta}}{2}) \theta_1(y_l + \frac{\tilde{\eta}}{2})}. \tag{B.19}$$

## References

- [1] R. J. Baxter, *Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain I, II, III*, Ann. Phys. **76** (1973), 1–24, 25–47, 48–71.
- [2] R. J. Baxter, *Spontaneous staggered polarization of the F-model*, J. Stat. Phys. **9** (1973), no. 2, 145–182.

- [3] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, and T. Miwa, *Spontaneous staggered polarisations of the cyclic solid-on-solid models*, J. Phys. A : Math. Gen. **23** (1990), L163–L167.
- [4] G. Felder, *Elliptic quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematical Physics, Paris (1994), International Press, 1995, hep-th/9412207, pp. 211–218.
- [5] G. Felder and A. Varchenko, *Algebraic Bethe ansatz for the elliptic quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$* , Nucl. Phys. B **480** (1996), 485–503, q-alg/9605024.
- [6] ———, *On representations of the elliptic quantum group  $E_{\tau,\eta}(sl_2)$* , Commun. Math. Phys. **181** (1996), 741–761.
- [7] J. L. Gervais and A. Neveu, *Novel triangle relation and absence of tachions in Liouville string field theory*, Nucl. Phys. B **238** (1984), 125–141.
- [8] A. G. Izergin, N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras, *Spontaneous magnetization of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain*, Nucl. Phys. B **554** (1999), 679–696, solv-int/9812021.
- [9] A. Kuniba and T. Yajima, *Local State Probabilities for Solvable Restricted Solid-on-Solid Models:  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $D_n^{(1)}$ , and  $A_n^{(1)}$* , J. Stat. Phys. **52** (1988), 829–883.
- [10] D. Levy-Bencheton and V. Terras, *An algebraic Bethe ansatz approach to form factors and correlation functions of the cyclic eight-vertex solid-on-solid model*, J. Stat. Mech. (2013), P04015, arXiv:1212.0246.
- [11] Z.-G. Liu, *Some inverse relations and theta function identities*, Int. J. Number Theory **8** (2012), no. 8, 1977–2002.
- [12] P. A. Pearce and M. T. Batchelor, *Row transfer matrix spectra of cyclic solid-on-solid lattice models*, J. Stat. Phys. **60** (1990), 77–135.
- [13] P. A. Pearce and K. A. Seaton, *Exact solution of cyclic solid-on-solid lattice models*, Ann. Phys. **193** (1989), 326–366.



### **Article 3**

Multi-point local height probabilities of the cyclic solid on solid  
model from algebraic Bethe Ansatz

En préparation



## **Article 4**

Antiperiodic dynamical 6-vertex model II :  
Form factors by separation of variables

En préparation

