

Évaluation des performances par l'Analyse Spectrale

Sommaire

2.1	Introduction	43
2.2	Cas de deux classes de service	45
2.2.1	Formulation du problème	45
2.2.2	Cas d'une cellule WCDMA isolée	47
2.2.3	Analyse du système	49
2.2.4	Approche par l'analyse spectrale	51
2.2.5	Distribution stationnaire	56
2.2.6	Métriques de performances	58
2.2.7	Cas multi cellules	59
2.2.8	Résultats numériques	60
2.3	Cas de trois classes de service	65
2.3.1	Contrôle d'admission du trafic temps réel	65
2.3.2	Contrôle d'admission du trafic non temps réel	67
2.3.3	Trafic <i>best effort</i> sans contrôle d'admission	69
2.3.4	Évaluation des performances par l'analyse spectrale	71
2.3.5	Illustrations numériques	74
2.4	Conclusion	76

2.1 Introduction

Le système de communications mobile UMTS de troisième génération s'appuie sur la technique d'accès multiple WCDMA de l'interface radio. L'avantage de la troisième génération de réseaux mobiles réside dans le fait qu'elle offre aux utilisateurs une variété de services et permet d'obtenir des hauts débits allant jusqu'à 2Mbps. Parmi ces

services, citons la voix, l'accès Internet à haute vitesse, le téléchargement de fichiers audio et vidéo, la réception de programmes télévisés et la visiophonie. Ces services sont étudiés dans la littérature en deux grandes classes à savoir les appels temps réel et les appels *best effort*. Chaque service a une exigence particulière en terme de qualité de service QoS, ce qui peut affecter la capacité du système WCDMA.

Le travail développé dans ce chapitre s'ajoute aux travaux antérieurs sur la capacité du lien montant (la communication du mobile vers la station de base) du système WCDMA. Pour ce faire, nous avons séparé la diversité de services offerts par ce système, en deux puis en trois classes de trafic. Dans la section 2.2, nous considérons le lien montant du système WCDMA avec deux classes de services, temps réel qui ont des ressources dédiées et *best effort* sans aucune exigence sur la QoS. Notre analyse est basée sur la modélisation du système par une chaîne de Markov à deux dimensions, où la première composante correspond au nombre d'appels temps réel et la deuxième composante correspond au nombre d'appels *best effort*. Pour obtenir la distribution stationnaire du nombre d'appels temps réel et *best effort*, nous utilisons l'approche de l'Analyse spectrale avec un processus quasi naissance et mort QBD (Queija, 2000; Elazouzi et Altman, 2004). En particulier, nous obtenons les probabilités d'états d'équilibre en fonction des valeurs propres et vecteurs propres de certaines matrices finies. Nous obtenons une solution explicite contrairement à celle proposée dans (Hegde et Altman, 2003). Ce résultat nous permettra d'évaluer les performances du système en fonction de valeurs propres et vecteurs propres de certaines matrices. Désormais, les appels temps réel ont besoin d'un taux de transmission minimum à garantir, donc le système ne peut manipuler qu'un nombre fini d'appels temps réel. Toutefois, nous montrons que ces valeurs propres et vecteurs propres sont obtenus indépendamment du nombre d'appels *best effort* qui réduit la complexité de calcul de la distribution stationnaire. Une autre application importante de notre approche par analyse spectrale (Pla et Casares-Giner, 2005; Mitrani, 1995; Elazouzi et Altman, 2004; Queija, 2000; Chakka, 1998; Chakka et Mitrani, 1995b,a) est de réduire la complexité de calcul du contrôle d'admission pour les appels *best effort*. Par conséquent, notre approche est utile pour un opérateur dans sa politique d'admission d'appels *best effort*, avec moins de calcul, qui maximise l'utilisation de la bande passante et à garantir la QoS exigée par les appels temps réel et *best effort*.

Dans la section 2.3, nous considérons tous les services supportés par le lien montant du système WCDMA en trois classes à savoir : temps réel, non temps réel et *best effort*. La classe temps réel nécessite un débit constant avec des contraintes strictes sur le délai, comme la voix et la vidéo. La classe non temps réel exige un taux minimum de transmission et peut tolérer un certain délai d'attente, par exemple, le transfert de fichiers FTP. La classe *best effort* quant à elle, considère des applications qui peuvent adapter leur taux de transmission selon les ressources disponibles du réseau, donc les appels de cette classe ne font pas l'objet d'un CAC dans ce travail. La principale qualité de service est de garantir le temps de séjour d'un appel dans le système. Nous introduisons un nouveau mécanisme du CAC pour les appels non temps réel en nous basant sur le temps de séjour qui doit être borné. Le nouvel appel non temps réel est accepté si le délai correspondant au nombre actuel d'appels non temps réel est borné par une constante positive fixée par l'opérateur. Nous supposons que la classe non temps réel

et *best effort* partagent une partie des ressources du réseau avec la classe temps réel. Notre objectif est d'étudier la qualité de service d'appels non temps réel et *best effort* en agissant sur les métriques de performance : le temps de séjour et la probabilité de blocage. En effet, nous proposons un contrôle d'admission qui donne un compromis dans la gestion de la capacité entre les trois classes en terme de qualité de service exigée par chaque appel. La qualité de service est déterminée par rapport au temps de séjour qui doit être borné. L'opérateur peut calculer le taux maximum des arrivées pour assurer ce temps de séjour.

2.2 Cas de deux classes de service

Nous nous intéressons à l'analyse de la capacité WCDMA en nous basant sur l'approche de l'analyse spectrale en présence de deux types de trafic :

- Trafic *best effort* (BE) où aucune garantie n'est faite sur le service offert, autre que l'engagement du système à faire "du mieux qu'il peut" ;
- Trafic temps réel (RT) avec des contraintes de type temps réel et une garantie de délai et de débit.

2.2.1 Formulation du problème

La diversité de service qu'offre le réseau UMTS, aux utilisateurs mobiles, est un axe de recherche qui intéresse plusieurs chercheurs. L'interface air WCDMA a été conçue de telle façon que certaines fonctionnalités avancées du CDMA, comme la détection multi-utilisateurs et les antennes adaptatives, peuvent être déployées par l'opérateur afin d'accroître la capacité et/ou la couverture de son réseau. Cependant, la gestion dynamique de la capacité des systèmes cellulaires CDMA reste un défi majeur à relever par les opérateurs Télécoms. Notons que le nombre d'appels actifs ne donne pas la capacité réelle du système, car elle est limitée par les interférences. Ces interférences peuvent être due au bruit thermique, interférences provoquées par les utilisateurs, qu'elles soient situées dans la même cellule (interférence intracellulaire) ou dans les cellules voisines (interférence intercellulaire), pertes de propagation dues à la distance (*path-loss*), atténuations induites par les obstacles (*shadowing*) et évanouissements (*fading*) suscités par l'existence de trajets multiples. Pour formaliser le problème, nous considérons C classes de services. Cependant, pour un mobile de la classe i ($i \in S = \{1, \dots, C\}$), son rapport signal sur bruit plus les interférences (SIR) à la station de base, doit satisfaire la condition ci-après, afin de lui garantir une communication sans interruption (Laiho et Wacker, 2001) :

$$\frac{P_i}{N + I_{own} + I_{other} - P_i} = \alpha_i \geq \left(\frac{E_i R_i}{N_0 W} \right) = \chi, \quad (2.1)$$

où P_i est la puissance reçue d'un mobile de la classe i par la station de base ; N est la densité de puissance du bruit de fond ; E_i est l'énergie par bit transmis de type i , R_i est le taux de transmission de la classe de service i ; W est l'étalement du spectre de

la bande passante; I_{own} désigne l'intra-interférence reçue de tous les mobiles appartenant à la même cellule et I_{other} désigne l'inter-interférence reçue de tous les mobiles des autres secteurs. Nous rappelons que les interférences inter et intra cellulaires sont respectivement :

$$I_{own} = \sum_{j=1}^C M_j P_j, \quad (2.2)$$

$$I_{other} = g I_{own}, \quad (2.3)$$

où g est la constante des interférences donnée par expérience (Laiho et Wacker, 2001) et M_i est le nombre de mobiles de la classe i . Dans le système WCDMA il existe d'autres sources de dégradation de la qualité du signal tel que *shadowing fading* qui est due aux chemins multiples et aux effets de masque. Donc, le seuil n'est pas toujours fixe c'est-à-dire n'est pas toujours égale à $(\frac{E_i R_i}{N_0 W})$. La variation du *shadow fading* est une variable aléatoire qui suit la distribution lognormal tel que $\alpha_i = 10^{0.1\zeta_i}$, où $\zeta_i \sim N(\mu_\zeta, \sigma_\zeta)$. Afin de prendre en compte ce type de dégradation, les auteurs dans (Hegde et Altman, 2003) ont introduit une nouvelle fonction (Γ), indépendamment du type de classe. Elle dépend uniquement de la valeur de déviation du rapport signal sur interférence α_i telle que

$$\Gamma = 10^{\frac{\sigma_\zeta^2}{20h} - \frac{\sigma_\zeta^2 Q^{-1}(\beta)}{10}},$$

$$\beta = P(\alpha_i > \chi) = \int_{\chi_i}^{\infty} f_{\alpha_i}(x) dx = Q\left(\frac{h \ln \chi - \mu_\zeta}{\sigma_\zeta}\right),$$

$$f_{\alpha_i}(x) = \frac{h}{x \sigma_\zeta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{h(\ln x - \mu_\zeta)^2}{2\sigma_\zeta^2}\right), \quad h = \frac{10}{\ln 10},$$

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{2\pi} dt.$$

Donc, le rapport SIR doit être supérieur ou égale à $(\frac{E_i R_i}{N_0 W} \Gamma)$. Pour une meilleure satisfaction d'appels de la classe i , sans dégradation de la qualité de service, et dans un but de servir un nombre important d'utilisateurs, la puissance minimum reçue (P_i) doit satisfaire l'équation suivante

$$P_i = \frac{N\Delta_i}{1 - (1 + g) \sum_{j=1}^C M_j \Delta_j}, \quad (2.4)$$

où $\Delta_i = \frac{\gamma_i}{1 + \gamma_i}$ et $\gamma_i = (\frac{E_i R_i}{N_0 W} \Gamma)$. Le taux de charge du système est défini comme suit

$$\theta = \sum_{j=1}^C M_j \Delta_j. \quad (2.5)$$

Nous obtenons une nouvelle expression de la puissance minimale reçue P_i en fonction du taux de charge

$$P_i = \frac{N\Delta_i}{1 - (1 + g)\theta}. \quad (2.6)$$

Cette puissance doit être finie et positive dans un but de limiter les interférences. D'où le dénominateur qui doit être strictement positive. Notons par Θ_ϵ la capacité du système définie comme étant la borne supérieur du taux de charge θ . Nous avons $\theta \leq \Theta_\epsilon / (1 + g)$ où $\Theta_\epsilon = 1 - \epsilon$ où ϵ est un nombre réel strictement positif. Γ est une fonction de l'écart-type, σ_ζ , du *shadow fading*, dont la valeur varie avec la mobilité des utilisateurs. Dans cette première partie, nous ne considérons pas la mobilité des utilisateurs.

2.2.2 Cas d'une cellule WCDMA isolée

Dans la suite de ce travail, nous limitons notre étude à deux classes de service : temps réel (RT) et *best effort* (BE). Nous considérons une seule cellule WCDMA dans cette section et le cas multi cellulaire sera traité dans la section 2.2.7. Donc, nous négligeons les interférences provenant d'autres cellules, c'est-à-dire, $g = 0$ dans l'équation (2.3).

Nous utilisons le codec AMR¹ pour les appels RT. Le taux minimum de transmission d'appels RT est noté par R_{RT}^m et le taux maximum de transmission est désignée par R_{RT}^r . On définit la bande passante Δ_{RT}^h correspondante au taux R_{RT}^h comme suit

$$\Delta_{RT}^h = \frac{\Gamma E_{RT} / N_0}{W / R_{RT}^h + \Gamma E_{RT} / N_0}, \quad h = r, m, \quad (2.7)$$

où E_{RT} est l'énergie par bit transmis pour RT ; N_0 est la densité du bruit de fond. La capacité disponible pour les BE dépend du nombre d'appels RT. Nous supposons que les appels BE n'ont aucune QoS garantie par le système et donc un nombre infini ou quelconque sera accepté par le système.

Nous modélisons le système WCDMA par une chaîne de Markov à deux dimensions $(X(t), Y(t))$, où $X(t)$ (respectivement $Y(t)$) représente le nombre d'appels de type RT (respectivement BE) dans le système à l'instant t . Les appels de la classe RT (respectivement BE) arrivent selon un processus de Poisson avec le paramètre λ_{RT} (respectivement λ_{BE}) et leurs durées de service distribuées exponentiellement avec le paramètre μ_{RT} (respectivement μ_{BE}). Soit M_{RT} le nombre maximum d'appels RT qui peuvent être servis simultanément par le système, il est donné par $M_{RT} = \lfloor \frac{L_{RT}}{\Delta_{RT}^m} \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x et L_{RT} indique la capacité maximale d'appels RT :

$$L_{RT} = \Theta_\epsilon - L_{BE}, \quad (2.8)$$

où L_{BE} est la proportion minimale de la capacité réservée aux appels BE. Les appels BE peuvent utiliser la bande passante non utilisée par les appels RT comme suit

$$C(X_{RT}) = \begin{cases} \Theta_\epsilon - X_{RT} \Delta_{RT}^r, & \text{si } 1 \leq X_{RT} \leq N_{RT}, \\ L_{BE}, & \text{si } N_{RT} < X_{RT} \leq M_{RT}, \end{cases} \quad (2.9)$$

1. Pour la définition du codeur AMR, voir la référence (Holma et Toskala, 2001)

où N_{RT} est le nombre d'appels RT correspondant à la capacité normalisée (Δ_{RT}^r) requise par chaque appel RT, où $N_{RT} = \lfloor \frac{L_{RT}}{\Delta_{RT}^r} \rfloor$.

Nous signalons que les appels RT sont indépendants d'appels BE, d'où nous modélisons le système avec seulement les appels RT par une file d'attente $M/M/M_{RT}/M_{RT}$ avec un taux d'arrivée λ_{RT} et un taux de service exponentielle noté μ_{RT} . A partir des équations de balances d'une chaîne de Markov associée à cette file d'attente, les probabilités stationnaires $q_i = \lim_{t \rightarrow \infty} Pr[X(t) = i]$ peuvent être réécrites de manière récursive comme :

$$q_{i+1} = \frac{\rho_{RT}}{i+1} q_i, \quad i = 0, 1, \dots, M_{RT}, \quad (2.10)$$

où $\rho_{RT} = \frac{\lambda_{RT}}{\mu_{RT}}$. Utilisant l'équation (2.10) et la condition de normalisation $\sum_{i=0}^{M_{RT}} q_i = 1$, chaque probabilité d'obtenir i appels RT dans le système est calculée par

$$q_i = \frac{(\rho_{RT})^i / i!}{\sum_{j=0}^{M_{RT}} \frac{(\rho_{RT})^j}{j!}}, \quad (2.11)$$

Alors, la probabilité de blocage d'un nouvel appel RT s'écrit

$$P_B^{RT} = q_{M_{RT}} = \frac{(\rho_{RT})^{M_{RT}} / M_{RT}!}{\sum_{j=0}^{M_{RT}} \frac{(\rho_{RT})^j}{j!}}. \quad (2.12)$$

Les appels BE dépendent de ceux RT en cours. Nous considérons les appels des deux classes simultanément dans notre analyse. Soient $K(t) = (X(t), Y(t))$ la chaîne de Markov à temps continue et $E^{(\infty)}$ un espace d'états infini par

$$E^{(\infty)} = \{(i, j) : 0 \leq i \leq M_{RT}, j \geq 0\}, \quad (2.13)$$

où le symbole ∞ désigne un nombre infini d'appels BE. Notons également par $\nu(i)$ le temps de service d'appels BE et donc

$$\nu(i) = \mu_{BE} R_{BE}(i), \quad (2.14)$$

où $R_{BE}(i)$ est le taux de transmission total d'appels BE qui correspond à la capacité $C(i)$. Il donné par

$$R_{BE}(i) = \frac{C(i)}{1 - C(i)} \frac{W}{\Gamma E_{BE} / N_0}, \quad (2.15)$$

E_{BE} est l'énergie d'appels BE. La chaîne de Markov est ergodique si et seulement si le temps de service moyen des BE est supérieur à la charge d'appels BE, c'est à dire

$$\mu_{BE} E[R_{BE}(i)] > \lambda_{BE}, \quad (2.16)$$

$\mu_{BE} E[R_{BE}(i)] = \sum_{i=1}^{M_{RT}} \nu(i) q_i$. Le générateur infinitesimal de ce système est décrit par le

processus homogène de naissance et de mort indiqué par $\mathbf{Q}^{(\infty)}$ et donné par

$$\mathbf{Q}^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

où \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 et \mathbf{B} sont des matrices carrées d'ordres $M_{RT} + 1$ définies comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \text{diag}(\lambda_{BE}), \\ \mathbf{A}_2 &= \text{diag}(\nu(i); i = 0, 1, 2, \dots, M_{RT}), \\ \mathbf{A}_1[i, i+1] &= \lambda_{RT}; i = 0, 1, 2, \dots, M_{RT} - 1 \\ \mathbf{A}_1[i, i-1] &= i\mu_{RT}; i = 1, 2, \dots, M_{RT} \\ \mathbf{A}_1[i, i] &= -(\lambda_{BE} + \lambda_{RT} + i\mu_{RT} + \nu(i)), \\ &\quad i = 0, \dots, M_{RT} - 1, \\ \mathbf{A}_1[M_{RT}, M_{RT}] &= -(\lambda_{BE} + M_{RT}\mu_{RT} + \nu(M_{RT})), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2. \end{aligned}$$

Nous supposons qu'en parallèle du cas infini, les appels BE demandent un délai moyen borné. Donc, le système traite un nombre fini d'appels BE pour assurer ce délai, noté M_{BE} . Pour cela, nous décrivons le système avec une chaîne de Markov homogène quasi-naissance et mort à temps continu notée $K'(t)$ où $K'(t) = (X(t), Y(t))$. Il en suit que l'espace d'états correspondant s'écrit

$$E^{(f)} = \{(i, j) : 0 \leq i \leq M_{RT}, 0 \leq j \leq M_{BE}\}, \quad (2.17)$$

le symbole f désigne le cas où le nombre d'appels BE est fini. Le générateur infinitésimal de ce système est

$$\mathbf{Q}^{(f)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \dots & \ddots & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{F} \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{F} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0$, \mathbf{B} , \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_0 et \mathbf{A}_2 sont données dans le cas infini précédent.

2.2.3 Analyse du système

Dans cette section, nous analysons le système par l'approche de l'analyse spectrale avec le processus de naissance et de mort. Elle nous permettra de trouver la distribution stationnaire du système en fonction des valeurs et vecteurs propres de certaines

matrices finies de manière détaillée. Nous distinguons deux cas de figures : fini et infini.

Cas infini d'appels best effort : Soit $\pi^{(\infty)}$ le vecteur de probabilités d'états d'équilibres de la chaîne de Markov $(X(t), Y(t))$ et la probabilité d'avoir i appels de type RT et j appels de type BE est

$$\pi_{i,j}^{(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} Pr[X(t) = i, Y(t) = j]. \quad (2.18)$$

Sous la condition de stabilité du système, la matrice génératrice $Q^{(\infty)}$ est irréductible et apériodique. Par conséquent la distribution stationnaire de cette chaîne est la solution unique du système suivant

$$\pi^{(\infty)} \mathbf{Q}^{(\infty)} = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=0}^{M_{RT}} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i,j}^{(\infty)} = 1. \quad (2.20)$$

Notons que $\pi^{(\infty)}$ désigne un vecteur de blocs et il a la forme suivante

$$\pi^{(\infty)} = (\pi_0^{(\infty)}, \pi_1^{(\infty)}, \dots, \pi_j^{(\infty)}, \dots), \quad (2.21)$$

où $\pi_j^{(\infty)} = (\pi_{0,j}^{(\infty)}, \dots, \pi_{M_{RT},j}^{(\infty)})$. L'équation (2.19) peut se réécrire sous forme

$$\pi_0^{(\infty)} \mathbf{B} + \pi_1^{(\infty)} \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

$$\pi_{n-1}^{(\infty)} \mathbf{A}_0 + \pi_n^{(\infty)} \mathbf{A}_1 + \pi_{n+1}^{(\infty)} \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}, \quad n \geq 1. \quad (2.23)$$

Sous la condition de stabilité du système, la distribution stationnaire existe et est donnée par (Neuts, 1981) :

$$\pi_n^{(\infty)} = \pi_0^{(\infty)} \mathbf{R}^n, \quad n \geq 1, \quad (2.24)$$

où \mathbf{R} est une matrice carrée d'ordre $M_{RT} + 1$. Le rayon spectrale de la matrice \mathbf{R} est strictement inférieur à 1 et le vecteur $\pi_0^{(\infty)}$ est donné en combinant l'équation de frontière (2.24), la condition de normalisation (2.20) et les valeurs propres de la matrice \mathbf{R} . La matrice \mathbf{R} est la solution minimale non négative de l'équation suivante

$$\mathbf{A}_0 + \mathbf{R} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2 \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Pour obtenir les valeurs propres de \mathbf{R} , nous définissons une matrice polynomial tridiagonale quadratique notée $\mathbf{T}(z)$ ($\forall z \in \mathbb{R}$)

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{A}_0 + z \mathbf{A}_1 + z^2 \mathbf{A}_2. \quad (2.26)$$

Cas fini d'appels best effort : Puisque le générateur $\mathbf{Q}^{(f)}$ est apériodique et irréductible, alors il admet une distribution stationnaire de probabilités, unique, et solution de système des équations suivant

$$\pi^{(f)} \mathbf{Q}^{(f)} = \mathbf{0}, \quad (2.27)$$

$$\pi^{(f)} \mathbf{e}^{(f)} = \mathbf{1}, \quad (2.28)$$

où $e^{(f)}$ est le vecteur colonne des uns. Donc, nous obtenons le système suivant

$$\pi_0^{(f)} \mathbf{B} + \Pi_1^{(f)} \mathbf{A}_2 = 0, \quad (2.29)$$

$$\pi_{n-1}^{(f)} \mathbf{A}_0 + \pi_n^{(f)} \mathbf{A}_1 + \Pi_{n+1}^{(f)} \mathbf{A}_2 = 0, \quad (2.30)$$

$$\pi_{M_{BE}-1}^{(f)} \mathbf{A}_0 + \Pi_{M_{BE}}^{(f)} \mathbf{F} = 0, \quad (2.31)$$

pour $n = 1, \dots, M_{BE} - 1$.

Si $\lambda_{BE} \neq \sum_{i=0}^{M_{RT}} v(i)q_i$, alors le vecteur de probabilités $\pi^{(f)}$ d'appels BE s'écrit sous la forme

$$\pi_j^{(f)} = \bar{\mathbf{x}}\mathbf{R}^j + \bar{\mathbf{y}}\mathbf{S}^{M_{BE}-j}, \quad 0 \leq j \leq M_{BE}, \quad (2.32)$$

où \mathbf{R} et \mathbf{S} sont des matrices géométriques représentant les solutions minimales non négatives, respectivement, des équations suivantes

$$\mathbf{A}_0 + \mathbf{R}\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{S}^2\mathbf{A}_0 + \mathbf{S}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.34)$$

Pour obtenir les valeurs propres de \mathbf{R} et \mathbf{S} , nous définissons également deux matrices quadratiques polynomiales $\mathbf{T}(z)$ et $\mathbf{T}'(z)$ ($z \in \mathbb{R}$)

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{A}_0 + z\mathbf{A}_1 + z^2\mathbf{A}_2, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{T}'(z) = \mathbf{A}_2 + z\mathbf{A}_1 + z^2\mathbf{A}_0. \quad (2.36)$$

2.2.4 Approche par l'analyse spectrale

Pour trouver les distributions stationnaires évoquées précédemment en fonction des valeurs et des vecteurs propres des matrices \mathbf{R} et \mathbf{S} , nous présentons quelques résultats préliminaires pour aboutir à ces distributions.

Lemme 1 1. Les racines non nulles du $\det[\mathbf{T}(z)]$ sont également les racines du $\det[(\mathbf{T}'(z))]$.

2. Les valeurs propres de la matrice \mathbf{R} (d'ordre m_i) sont les racines d'ordre supérieur ou égale à m_i du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$.

3. Les vecteurs propres v_i de la matrice \mathbf{R} associés aux valeurs propres ϕ_i , sont les vecteurs qui annulent à gauche $\mathbf{T}(\phi_i)$.

4. Si $\phi_i \neq 0$ et $\frac{1}{\phi_i}$ une valeur propre de la matrice \mathbf{S} avec une multiplicité algébrique d'ordre m_i , alors ϕ_i est une racine du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ dont la multiplicité est d'ordre au moins égale à m_i . Si v_i est un vecteur propre de la matrice \mathbf{S} correspondant à la valeur propre $\frac{1}{\phi_i}$, alors v_i est un vecteur qui annule à gauche $\mathbf{T}(\phi_i)$.

Démonstration du Lemme 1 1. Nous pouvons écrire l'équation $\mathbf{T}(z)$ pour $z \neq 0$ comme $\mathbf{T}(z) = z^2\mathbf{T}'(1/z)$. Nous remarquons que les racines du polynôme $\det[\mathbf{T}'(z)]$ sont exactement les racines du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$.

2. A partir de l'équation (2.25) nous avons $\mathbf{A}_0 = -\mathbf{R}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{A}_2)$. En remplaçant celle-ci dans (2.26) nous obtenons

$$\mathbf{T}(z) = -\mathbf{R}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{A}_2) + z(\mathbf{A}_1 + z\mathbf{A}_2) + z\mathbf{R}\mathbf{A}_2 - z\mathbf{R}\mathbf{A}_2. \quad (2.37)$$

Donc, nous avons

$$\mathbf{T}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{A}_2 + z\mathbf{A}_2). \quad (2.38)$$

Le déterminant de la matrice $\mathbf{T}(z)$ est décomposé sous la forme

$$\det[\mathbf{T}(z)] = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{R})\det(\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{A}_2 + z\mathbf{A}_2). \quad (2.39)$$

De plus, $P_{\mathbf{R}}(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{R})$ est un polynôme caractéristique de la matrice \mathbf{R} et ϕ_i sa valeur propre d'ordre m_i . Nous obtenons la forme suivante pour $z = \phi_i$

$$\det[\mathbf{T}(\phi_i)] = P_{\mathbf{R}}(\phi_i)\det(\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{A}_2 + \phi_i\mathbf{A}_2). \quad (2.40)$$

Puisque la valeur propre ϕ_i est une racine de la matrice $\det(\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{A}_2 + z\mathbf{A}_2)$ d'ordre n_i , alors

$$\det[\mathbf{T}(z)] = (z - \phi_i)^{m_i+n_i}g(z), \quad (2.41)$$

où $g(z)$ est un polynôme de degré $M_{\mathbf{RT}} - m_i - n_i + 1$. Par conséquent $\det[\mathbf{T}(\phi_i)] = 0$ où ϕ_i est une racine d'ordre $m_i + n_i$.

3. Soit v_i le vecteur propre associé à la valeur propre ϕ_i . Nous multiplions l'équation (2.26) par le vecteur propre v_i et utilisant l'équation (2.33), nous trouvons

$$\begin{aligned} v_i\mathbf{T}(\phi_i) &= v_i\mathbf{A}_0 + \phi_i v_i\mathbf{A}_1 + v_i\phi_i^2\mathbf{A}_2 \\ &= v_i\mathbf{A}_0 + v_i\mathbf{R}\mathbf{A}_1 + v_i\mathbf{R}^2\mathbf{A}_2 \\ &= v_i(\mathbf{A}_0 + \mathbf{R}\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2\mathbf{A}_2) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration.

4. Nous remarquons que $\mathbf{T}'(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{S})((z\mathbf{I} + \mathbf{S})\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)$. Soit $\frac{1}{\phi_i}$ une valeur propre de \mathbf{S} , alors $\frac{1}{\phi_i}$ est une racine de $\det[\mathbf{T}'(z)]$ de multiplicité au moins égale m_i . Nous avons également

$$v_i\mathbf{T}(\phi_i) = v_i\phi_i^2\mathbf{T}'(1/\phi_i) = \phi_i^2\left(\frac{1}{\phi_i}v_i - v_i\mathbf{S}\right)\left(\left(\frac{1}{\phi_i}\mathbf{I} + \mathbf{S}\right)\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\right) = \mathbf{0}.$$

La dernière equation est due à la relation $v_i\mathbf{S} = \frac{1}{\phi_i}v_i$.

- Lemme 2**
1. La matrice $\mathbf{T}(z)$ a une valeur propre $\lambda_{\mathbf{BE}}$ de multiplicité $M_{\mathbf{RT}} + 1$ pour $z = 0$.
 2. Si $z \neq 0$, la matrice $\mathbf{T}(z)$ a $M_{\mathbf{RT}} + 1$ valeurs propres différentes.
 3. Le déterminant de la matrice $\mathbf{T}(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$\det[\mathbf{T}(z)] = (1 - z)d(z), \quad (2.42)$$

où $d(z)$ est un polynôme de degré $2M_{\mathbf{RT}} + 1$.

Démonstration du Lemme 2 1. Nous posons $\mathbf{T}(0) = \mathbf{A}_0$ et pour un réel λ , nous écrivons le polynôme caractéristique de $\mathbf{T}(0)$ sous la forme

$$P_{\mathbf{T}(0)}(\lambda) = P_{\mathbf{A}_0}(\lambda) = (\lambda - \lambda_{BE})^{M_{RT}+1}. \quad (2.43)$$

Par conséquent $\lambda = \lambda_{BE}$ est une valeur propre d'ordre $M_{RT} + 1$ de la matrice $\mathbf{T}(z)$ à $z = 0$.

2. Pour $z \in \mathbb{R}^*$. Soit $\mathbf{D} = \text{diag}(d_i)$ une matrice diagonale telle que la matrice $\mathbf{DT}(z)\mathbf{D}^{-1}$ est symétrique. Les éléments de la matrice \mathbf{D} sont obtenus par la relation $\frac{d_i}{d_0} = \sqrt{\left(\frac{\lambda_{RT}}{\mu_{RT}}\right)^i \frac{1}{i!}}$ pour $i = 0, \dots, M_{RT}$. On peut vérifier facilement que les éléments de la matrice $\mathbf{E}(z) = \mathbf{DT}(z)\mathbf{D}^{-1}$ peuvent s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z)[i, i] &= k(i, z), \quad \text{for } i = 0, \dots, M_{RT}, \\ \mathbf{E}(z)[i, i+1] &= z\sqrt{i\lambda_{RT}\mu_{RT}}, \\ &\quad i = 0, \dots, M_{RT} - 1, \\ \mathbf{E}(z)[i, i-1] &= z\sqrt{(i-1)\lambda_{RT}\mu_{RT}}, \\ &\quad i = 1, \dots, M_{RT}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} k(i, z) &= \lambda_{BE} - z(\lambda_{RT} + \lambda_{BE} + i\mu_{RT} + v(i)) + z^2v(i), \\ k(M_{RT}, z) &= \lambda_{BE} - z(\lambda_{BE} + M_{RT}\mu_{RT} + v(M_{RT})) + z^2v(M_{RT}), \end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, \dots, M_{RT} - 1$. La matrice $\mathbf{E}(z)$ est réelle et symétrique d'ordre $M_{RT} + 1$, alors $\mathbf{E}(z)$ a $M_{RT} + 1$ vecteurs propres associés aux $M_{RT} + 1$ valeurs propres réelles (voir (Burden et Faires, 1997)). Ces vecteurs propres forment une base orthonormale. En plus elles constituent une famille libre ce qui montre que la matrice $\mathbf{E}(z)$ a $M_{RT} + 1$ valeurs propres différentes.

3. Le déterminant de la matrice $\mathbf{T}(z)$ peut se réécrire sous la forme (2.44).

$$\det[\mathbf{T}(z)] = \begin{vmatrix} k(0, z) & z\lambda_{RT} & 0 & \dots & 0 \\ z\mu_{RT} & k(1, z) & z\lambda_{RT} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & z\lambda_{RT} \\ 0 & \dots & 0 & zM_{RT}\mu_{RT} & k(M_{RT}, z) \end{vmatrix}. \quad (2.44)$$

En remplaçant la dernière colonne de la matrice $\det[\mathbf{T}(z)]$ par la somme de toutes les colonnes, nous trouvons

$$\det[\mathbf{T}(z)] = (1 - z)d(z), \quad (2.45)$$

où $d(z)$ est de la forme

$$d(z) = \begin{vmatrix} k(0, z) & z\lambda_{RT} & 0 & \dots & 0 & (\lambda_{BE} - z\nu(0)) \\ z\mu_{RT} & k(1, z) & z\lambda_{RT} & \ddots & \vdots & (\lambda_{BE} - z\nu(1)) \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & z\lambda_{RT} & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & z(M_{RT} - 1)\mu_{RT} & k(M_{RT} - 1, z) & (\lambda_{BE} - z\nu(M_{RT} - 1)) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & zM_{RT}\mu_{RT} & (\lambda_{BE} - z\nu(M_{RT})). \end{vmatrix}.$$

Puisque les matrices $\mathbf{E}(z)$ et $\mathbf{T}(z)$ sont similaires, alors elles ont les mêmes valeurs propres. Ces valeurs propres sont $\theta_0(z), \dots, \theta_{M_{RT}}(z)$. Soit $P_{\mathbf{T}(z)}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}(z))$ le polynôme caractéristique de la matrice polynômiale $\mathbf{T}(z)$ et un réel λ . Nous appliquons le lemme 2 et nous avons

$$P_{\mathbf{T}(z)}(\lambda) = (\lambda - \theta_0(z))(\lambda - \theta_1(z)) \dots (\lambda - \theta_{M_{RT}}(z)). \quad (2.46)$$

Et la trace de $\mathbf{T}(z)$ est donnée par

$$Tr[\mathbf{T}(z)] = (M_{RT} + 1)\lambda_{BE} - M_{RT}\lambda_{RT} \sum_{i=0}^{M_{RT}} (\lambda_{BE} + i\mu_{RT} + \nu(i))z + \sum_{i=0}^{M_{RT}} \nu(i)z^2.$$

Alors

$$P_{\mathbf{T}(z)}(\lambda) = \alpha_0(z) + \alpha_1(z)\lambda + \dots + \alpha_{M_{RT}-1}(z)\lambda^{M_{RT}-1} + \lambda^{M_{RT}},$$

où $\alpha_i(z)$ est une fonction polynômiale de degré 2 et la trace de la matrice $Tr[\mathbf{T}(z)]$ est (Burden et Faires, 1997)

$$Tr[\mathbf{T}(z)] = \alpha_{M_{RT}-1}(z)$$

et la fonction $\alpha_{M_{RT}-1}(z)$ est aussi continue. Donc $\alpha_{M_{RT}-1}(z) = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \theta_i(z)$ et nous déduisons la continuité des valeurs propres $\theta_i(z) (\forall z \in \mathbb{R})$. Nous avons $P_{\mathbf{T}(z)}(0) = \det[\mathbf{T}(z)] = \alpha_0(z)$ et

$$\det[\mathbf{T}(z)] = \theta_0(z)\theta_1(z) \dots \theta_{M_{RT}}(z). \quad (2.47)$$

Nous avons vu que les fonctions $\theta_k(z)$ sont continues pour tout z . En plus, nous pouvons écrire les valeurs propres selon le lemme 2 sous la forme

1. Si $z \neq 0$ alors nous avons

$$\theta_0(z) < \theta_1(z) < \dots < \theta_{M_{RT}}(z). \quad (2.48)$$

2. Si $z = 0$ alors nous avons

$$\theta_0(0) = \theta_1(0) = \dots = \theta_{M_{RT}}(0) = \{\lambda_{BE}\}. \quad (2.49)$$

Lemme 3 1. Toutes les valeurs propres $\theta_i(z)$ sont négatifs à $z = 1$, cela signifie que $\theta_i(1) \leq 0$ pour $i = 0, 1, \dots, M_{RT}$.

2. Pour $z \in]0, 1[$, les équations des valeurs propres en fonction de z , $\theta_i(z) = 0$, ont au moins une solution, ce qui signifie que $\exists \psi_i \in]0, 1[$ tel que $\theta_i(\psi_i) = 0$ pour $i = 0, 1, \dots, M_{RT}$.

Démonstration du Lemme 3 1. Pour faciliter la notation, nous posons $\mathbf{Q}_{RT} = \mathbf{T}(1)$ où \mathbf{Q}_{RT} est une matrice carrée d'ordre $M_{RT} + 1$ définie par $\mathbf{Q}_{RT} = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq M_{RT}}$. Nous constatons que les éléments diagonaux de cette matrice sont tous négatives. En appliquant le théorème de Gersgorin détaillé dans (Burden et Faires, 1997), nous disons que chaque valeur propre $\theta_i(1)$ de la matrice $\mathbf{T}(1)$ appartient au moins à un disque de type $\mathbf{D}(a_{i,i}, r_i)$ dont le centre est

$$a_{i,i} = -(\lambda_{RT} + i\mu_{RT}) \quad (2.50)$$

et le rayon est

$$r_i = \lambda_{RT} + i\mu_{RT}, \quad i = 0, \dots, M_{RT}. \quad (2.51)$$

D'où la démonstration est terminée par $|\theta_i(1) - a_{i,i}| \leq r_i$, ce qui signifie que nous aurons $\theta_i(1) \leq r_i + a_{i,i} = 0$.

2. Nous avons $\theta_i(0) > 0$, $\theta_i(1) < 0$ et la continuité de ces fonctions, ce qui montre qu'il existe au moins une solution ψ_i dans l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\theta_i(\psi_i) = 0$.

Théorème 1 Le polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ possède au maximum $2M_{RT} + 2$ racines non nulles localisées selon les trois cas :

1. si $\lambda_{BE} < \sum_{i=0}^{M_{RT}} \nu(i)q_i$, alors nous avons une racine à $z = 1$, $M_{RT} + 1$ racines dans le disque unité M_{RT} à l'extérieur du disque unité ;
2. si $\lambda_{BE} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \nu(i)q_i$, nous avons une racine d'ordre 2 à $z = 1$, $M_{RT} + 1$ dans le disque unité et $M_{RT} - 1$ à l'extérieur du disque unité ;
3. si $\lambda_{BE} > \sum_{i=0}^{M_{RT}} \nu(i)q_i$, nous avons M_{RT} racines dans le disque unité, une à $z = 1$ et $M_{RT} + 1$ à l'extérieur du disque unité.

Démonstration du Théorème 1 1. Nous décomposons le polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ en utilisant le lemme 2 sous la forme

$$\det[\mathbf{T}(z)] = (1 - z)d(z), \quad (2.52)$$

où $d(z)$ est un polynôme de degré $2M_{RT} + 1$. Nous remarquons que le polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ possède au maximum $2M_{RT} + 2$ racines.

2. Si $\lambda_{BE} < \sum_{i=0}^{M_{RT}} \nu(i)q_i$, Alors le rayon spectral de la matrice R est strictement inférieur à 1, c'est à dire $sp(R) < 1$, voir Théorème 3.1.1 (Neuts, 1981). A partir du lemme 6 nous montrons que toutes les valeurs propres de la matrice R sont aussi des racines du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$. Par conséquent, il y a $M_{RT} + 1$ racines du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ dans le disque unité pour $|z| < 1$. Ces valeurs propres sont réelles et strictement positives. Quand $z = 1$, il y a une racine d'ordre 1 du $\det[\mathbf{T}(z)]$ selon les lemmes 2 et 3. L'inverse de ces racines est valeur propre de la matrice S et ces valeurs sont toutes des racines du $\det[\mathbf{T}(z)]$ pour $|z| > 1$.

3. Nous calculons d'abord $d(1)$ par l'expression

$$d(1) = (-1)^{M_{RT}+1} (\mu_{RT})^{M_{RT}} \sum_{i=0}^{M_{RT}} (\lambda_{BE} - \nu(i)) \left(\frac{\lambda_{RT}}{\mu_{RT}}\right)^i \frac{M_{RT}!}{i!}.$$

Nous remplaçons dans l'expression ci-dessus $\left(\frac{\lambda_{RT}}{\mu_{RT}}\right)^i$ par $\frac{q_i}{q_0} i!$ et retrouvons

$$\begin{aligned} d(1) &= (-1)^{M_{RT}+1} (\mu_{RT})^{M_{RT}} \frac{M_{RT}!}{q_0} \sum_{i=0}^{M_{RT}} (\lambda_{BE} q_i - \nu(i) q_i), \\ d(1) &= (-1)^{M_{RT}+1} (\lambda_{BE} - \omega) \left(\frac{M_{RT}!}{q_0}\right) (\mu_{RT})^{M_{RT}}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

où $\omega = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \nu(i) q_i$. Si $\lambda_{BE} = \omega$ alors dans l'expression (2.53) nous trouvons $d(1) = 0$.

Ce qui montre qu'il y a une autre racine quand $z = 1$, d'où il y a une racine d'ordre 2 à $z = 1$ et $M_{RT} + 1$ racines dans le disque unité (voir les lemmes 2 et 3).

4. La preuve est similaire au troisième cas.

Jusqu'à maintenant, nous avons trouvé les valeurs et les vecteurs propres des matrices \mathbf{R} et \mathbf{S} nécessaires pour calculer la distribution stationnaire du nombre d'appels RT et BE. Mais d'autres coefficients, restent inconnus pour exprimer correctement cette distribution en fonction de ces valeurs et vecteurs propres. Ces coefficients font l'objet de ce qui suit.

2.2.5 Distribution stationnaire

Cas infini d'appels best effort : Nous écrivons la probabilité d'état d'équilibre sous la forme spectrale

$$\pi_j^{(\infty)} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i \phi_i^j v_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots \tag{2.54}$$

D'après le résultat de l'analyse précédente, la matrice \mathbf{R} a $M_{RT} + 1$ valeurs propres simples qui sont $\phi_0, \dots, \phi_{M_{RT}}$. Il existe une matrice \mathbf{V} inversible composée par les vecteurs propres de la matrice \mathbf{R} tel que

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \Phi \mathbf{V},$$

où

$$\begin{aligned} \Phi &= \text{diag}(\phi_0, \dots, \phi_{M_{RT}}), \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{M_{RT}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'équation (2.54) peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\pi_j^{(\infty)} = \pi_0^{(\infty)} \mathbf{V}^{-1} \Phi^j \mathbf{V}. \quad (2.55)$$

Alors, le résultat du produit $\pi_0^{(\infty)} \mathbf{V}^{-1}$ est noté $\bar{\beta}$. Ce qui nous a permis de réécrire l'équation (2.54) comme suit

$$\pi_j^{(\infty)} = \bar{\beta} \Phi^j \mathbf{V}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2.56)$$

où

$$\bar{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{M_{RT}}).$$

Cependant, la condition de normalisation devient sous la forme suivante

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^{(\infty)} \bar{\mathbf{1}} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \frac{\beta_i}{1 - \phi_i} v_i \bar{\mathbf{1}} = 1, \quad (2.57)$$

où $\bar{\mathbf{1}}$ est un vecteur colonne d'ordre $M_{RT} + 1$. Nous combinons l'expression (2.56), les équations de frontière (2.22) et la condition de la normalisation (2.57), pour trouver les seules inconnues β_k comme des solutions du système linéaire suivant :

$$\bar{\beta} [\mathbf{V}\mathbf{B} + \Phi \mathbf{V}\mathbf{A}_2, \Psi \mathbf{V}\bar{\mathbf{1}}] = [\mathbf{0}, 1],$$

où

$$\Psi = \text{diag}\left(\frac{1}{1 - \phi_i}; i = 0, 1, \dots, M_{RT}\right).$$

Cas fini d'appels best effort : De la même façon que dans le cas précédent, en utilisant la décomposition de Jordan, nous écrivons les deux matrices \mathbf{R} et \mathbf{S} comme suit

$$\mathbf{S} = \mathbf{W}^{-1} \Omega \mathbf{W},$$

où

$$\Omega = \text{diag}\left(\frac{1}{\phi_i}; i = M_{RT} + 1, \dots, 2M_{RT} + 2\right),$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} v_{M_{RT}+1} \\ \vdots \\ v_{2M_{RT}+2} \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda_{BE} \neq \sum_{i=0}^{M_{RT}} \nu(i) q_i$ et les valeurs propres de la matrice \mathbf{R} sont non nulles et simples, alors nous pouvons réécrire l'équation (2.32) pour $j = 0, 1, \dots, M_{BE}$ comme suit

$$\pi_j^{(f)} = \bar{\mathbf{x}} \mathbf{V}^{-1} \Psi^j \mathbf{V} + \bar{\mathbf{y}} \mathbf{W}^{-1} \Omega^{M_{BE}-j} \mathbf{W}. \quad (2.58)$$

La forme finale de la distribution stationnaire dans ce cas est

$$\pi_j^{(f)} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i (\phi_i)^j v_i + \sum_{i=M_{RT}+1}^{2M_{RT}+2} \beta_i \left(\frac{1}{\phi_i}\right)^{M_{BE}-j} v_i. \quad (2.59)$$

Les seules inconnues maintenant sont les coefficients β_i . Ces coefficients seront obtenus comme solution du système des équations formées en combinant l'expression (2.59) avec les équations de frontières (2.29), (2.31) et l'équation de normalisation (2.28), comme suit

$$(\beta_0, \dots, \beta_{2M_{RT}+2}) \times \begin{bmatrix} \mathbf{VB} + \Phi \mathbf{VA}_2 & \Phi^{(M_{BE}-1)} \mathbf{VA}_0 + \Phi^{M_{BE}} \mathbf{VF} \\ \Omega^{M_{BE}} \mathbf{WB} + \Omega^{(M_{BE}-1)} \mathbf{WA}_2 & \Omega \mathbf{WA}_0 + \mathbf{WF} \end{bmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

Résumé des résultats : Maintenant, nous résumons les résultats trouvés par notre analyse. Les distributions de probabilités pour le cas fini donnée dans (2.24) et le cas infini dans (2.32) sont réécrites sous les formes d'analyse spectrale comme suit :

1. Cas infini d'appels BE

$$\pi_j^{(\infty)} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i (\phi_i)^j v_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.60)$$

où $\phi_0, \dots, \phi_{M_{RT}}$ sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres $v_0, \dots, v_{M_{RT}}$ de la matrice \mathbf{R} , c'est à dire $v_i \mathbf{R} = \phi_i v_i$ et $\beta_0, \dots, \beta_{M_{RT}}$ sont des coefficients réels.

2. Cas fini d'appels BE

$$\pi_j^{(f)} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i (\phi_i)^j v_i + \sum_{i=M_{RT}+1}^{2M_{RT}+2} \beta_i \left(\frac{1}{\phi_i}\right)^{M_{BE}-j} v_i, \quad (2.61)$$

où $j = 0, 1, \dots, M_{BE}$; les valeurs $\phi_0, \dots, \phi_{M_{RT}}$ sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres $v_0, \dots, v_{M_{RT}}$ de la matrice \mathbf{R} ; les valeurs $1/\phi_{M_{RT}+1}, \dots, 1/\phi_{2M_{RT}+2}$ sont des valeurs propres associées aux vecteurs propres gauches $v_{M_{RT}+1}, \dots, v_{2M_{RT}+2}$ de la matrice \mathbf{S} et $\beta_0, \dots, \beta_{2M_{RT}+2}$ sont des coefficients réels pour les deux vecteurs : \bar{x} et \bar{y} .

2.2.6 Métriques de performances

Après avoir trouvé les formes explicites de la distribution stationnaire dans les deux cas étudiés précédemment, nous fournissons quelques métriques de performances du système, comme la probabilité marginale, le temps de séjour et le nombre moyen marginale d'appels BE.

Cas infini d'appels best effort : Puisque les appels BE dépendent de ceux en RT dans le système, la probabilité marginale des BE est une métrique de mesure importante qui nous permet d'évaluer les performances du système en terme d'appels BE par rapport

aux différents configurations possibles de ceux en RT. Alors la probabilité marginale $P_j^{(\infty)}$ est donnée par

$$P_j^{(\infty)} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i \phi_i^j v_i \bar{1}. \quad (2.62)$$

Ansi, le nombre marginal moyen d'appels BE et le temps de séjour de ces appels sont illustrés respectivement par :

$$E_{BE}^{(\infty)} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i \frac{\phi_i}{(1 - \phi_i)^2} v_i \bar{1}, \quad (2.63)$$

$$T_{BE}^{(\infty)} = \frac{E_{BE}^{(\infty)}}{\lambda_{BE}}. \quad (2.64)$$

Nous constatons que ces métriques citées ci-dessus sont indépendantes de nombre d'appels BE dans le système. Ce qui permet de simplifier la complexité de calcul des différentes métriques de performances du système.

Cas fini d'appels *best effort* : La probabilité marginale dans ce cas est définie comme suit

$$P_j^{(f)} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i (\phi_i)^j v_i \bar{1} + \sum_{i=M_{RT}+1}^{2M_{RT}+2} \beta_i \left(\frac{1}{\phi_i}\right)^{M_{BE}-j} v_i \bar{1}. \quad (2.65)$$

Nous déduisons la probabilité de blocage d'un nouvel appel de type BE qui est calculée dans la formule ci-dessus quand le nombre de BE est exactement égale M_{BE} . D'où

$$P_{M_{BE}}^{(f)} = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i (\phi_i)^{M_{BE}} v_i \bar{1} + \sum_{i=M_{RT}+1}^{2M_{RT}+2} \beta_i v_i \bar{1}. \quad (2.66)$$

Le nombre marginal moyen et le temps de séjour en utilisant la formule de Little pour les appels BE sont respectivement :

$$E_{BE}^{(f)} = \sum_{j=0}^{M_{BE}} j P_j^{(f)}, \quad (2.67)$$

$$T_{BE}^{(f)} = \frac{E_{BE}^{(f)}}{\lambda_{BE}(1 - P_{M_{BE}}^{(f)})}. \quad (2.68)$$

2.2.7 Cas multi cellules

Dans cette section nous étendons notre analyse au cas multi cellules en introduisant une approximation aux interférences inter cellules (I_{other}). Nous supposons que toutes les cellules sont statistiquement identiques et homogènes. Ainsi, le nombre de classes de service dans la cellule est un nombre aléatoire. Il dépend du taux d'arrivées d'appels et de leurs durées de service. Ce n'est pas raisonnable de considérer que la relation (2.3) soit valide tout le temps. Cependant, nous supposons qu'elle est vraie par estimation

et particulièrement dans un réseau de densité forte, nous avons $E[I_{other}] = gE[I_{own}]$. En plus, la puissance minimale (P_i) donnée par (2.4) devient

$$P_i = \frac{N\Delta_i}{1 - X_{RT}\Delta_{RT} - X_{BE}\Delta_{BE} - gE[I_{own}]} \quad (2.69)$$

où

$$\begin{aligned} E[I_{own}] &= E[X_{RT}\Delta_{RT}] + E[X_{BE}\Delta_{BE}] \\ &= \sum_{i=0}^{M_{RT}} iq_i\Delta_{RT} + (1 - \mathbf{\Pi}_0^{BE}\mathbf{e}) \times \\ &\quad \sum_{i=0}^{M_{RT}} q_iC(i) \end{aligned} \quad (2.70)$$

où q_i est donné par (2.11), $\mathbf{\Pi}_0^{BE}$ est obtenu par la relation (2.56) pour le cas infini et à partir de la relation (2.59) pour le cas fini, et \mathbf{e} est un vecteur colonne de même dimension. Le second terme de l'équation (2.70) est donné par le fait que les appels BE utilisent tous la capacité restante quand il y a au moins un appel d'eux. La nouvelle capacité devient inconnue et dépend de la distribution stationnaire du système, elle s'écrit sous la forme $\Theta = 1 - gE[I_{own}]$. Dans un but d'obtenir la capacité totale du système nous utilisons l'algorithme suivant

Algorithm 1 : Convergence de la capacité totale

- 1: Initialiser la capacité de la cellule par $\Theta_{old} = 1 - gI_0$, où I_0 est la valeur initiale des interférences $E[I_{own}]$.
 - 2: Calculer la distribution de probabilité $\mathbf{\Pi}_0^{BE}$ par (2.56) pour le cas infini et par(2.59) dans le cas fini.
 - 3: Calculer l'interférence total estimée ($E[I_{own}]$) due aux appels RT et BE par l'équation (2.70).
 - 4: Dédire la capacité totale notée par $\Theta_{new} = 1 - gE[I_{own}]$.
 - 5: Vérifier la convergence de la capacité entre l'ancienne et la nouvelle valeur, c'est à dire si $|\Theta_{new} - \Theta_{old}| < \epsilon_0$, où ϵ_0 est un nombre très petit et strictement positive, alors la nouvelle capacité est utilisée pour l'analyse du système. Sinon, passer à l'étape 2 avec la nouvelle capacité. Les itérations sont poursuivies jusqu'à atteindre la convergence de la capacité.
-

2.2.8 Résultats numériques

Nous utilisons le codec vocal AMR pour les appels RT, qui propose huit taux de transmissions allant de 4,75 à 12,2 *Kbps*. Ces taux peuvent changer dynamiquement toutes les 20 *ms*. Le taux total de chargement normalisé et demandé par les appels RT est le suivant $R_T = |\Theta_\epsilon / \Delta_{RT}^m| R_{RT}^m$. La valeur du paramètre ϵ est égale à 10^{-5} . Ainsi, les taux de charges normalisés pour RT et BE sont respectivement : $\bar{\rho}_{BE} = \frac{\lambda_{BE}}{\mu_{BE}} \frac{1}{R_T}$ et

$\bar{\rho}_{RT} = \rho_{RT} \frac{R_{RT}^m}{R_T}$. Nos applications numériques sont basées sur les valeurs des paramètres standards du système WCDMA et sont résumées dans le tableau 2.1.

Energie du signal par bit divisée par la densité du bruit pour le trafic RT, E_{RT}/N_0	4.1 dB
Energie du signal par bit divisée par la densité du bruit pour le trafic NRT, E_{BE}/N_0	3.1 dB
Débit minimum d'appels RT, R_{RT}^m	4.27 Kbps
Débit maximum d'appels RT, R_{RT}^r	12.2 Kbps
Charge total d'appels RT, R_T	38 Kbps
Débit chip WCDMA, W	3.84 Mcps
Taux d'arrivée d'appels BE, λ_{BE}	10 appels/s
Durée moyenne d'une session BE, $1/\mu_{BE}$	1/5 Mbits
Taux de charge normalisé d'appels BE, $\bar{\rho}_{BE}$	0.5
Taux d'arrivée d'appels RT, λ_{RT}	0.3 appels/s
Durée moyenne de service RT, $1/\mu_{RT}$	10 s
Taux de charge normalisé d'appels RT, $\bar{\rho}_{RT}$	0.3

TABLE 2.1 – Valeurs numériques pour WCDMA (Holma et Toskala, 2001; Hegde et Altman, 2003)

La figure 2.1 expose la probabilité de blocage d'appels RT en fonction de la proportion de la capacité réservée aux appels BE L_{BE} . Les résultats de cette figure sont obtenus pour différentes charges du réseau par les appels RT. Selon cette figure nous remarquons bien que lorsque L_{BE} augmente la probabilité augmente, ceci est justifié par le fait qu'il reste moins de ressources pour les appels RT. En plus, une remarque importante s'ajoute c'est que le blocage croît rapidement pour les valeurs de L_{BE} supérieures à 0.55, car il y a moins de ressources restantes pour les appels RT et surtout dans la forte densité de charge du réseau $\bar{\rho}_{RT} = 0.8$.

Nous gardons les taux de charges constants et varions les temps de services d'appels RT, $1/\mu_{RT}$, dans la plage de valeurs $\{100, 10, 1, 0.01\}$. Nous évaluons les performances du système de manière numérique en fonction de la capacité réservée aux appels BE. En effet, la figure 2.2 présente le temps du séjour des BE pour différentes valeurs du temps de service d'appels RT. Nous constatons que le temps de séjour dans ces différentes configurations décroît rapidement quand les valeurs du seuil L_{BE} sont faibles et devient constant juste après la valeur 0.005 ms. Par conséquent, un résultat très important de cette figure est que pour une capacité importante réservée aux appels BE (plus de 50%), leur temps de séjour devient insensible à la durée de service d'appels RT. Donc, l'impact d'appels RT sur ceux en BE devient négligeable.

Nous essayons dans ce paragraphe de définir un contrôle d'admission d'appels BE. Supposons que l'opérateur ou le fournisseur de service (Internet Service Provider) veut imposer une qualité de service en terme du temps de séjour pour les appels BE. Ce temps de séjour ou un seuil de séjour est déterminé via la figure 2.3. Cette figure représente le temps de séjour moyen d'appels BE en fonction de la proportion de la capacité

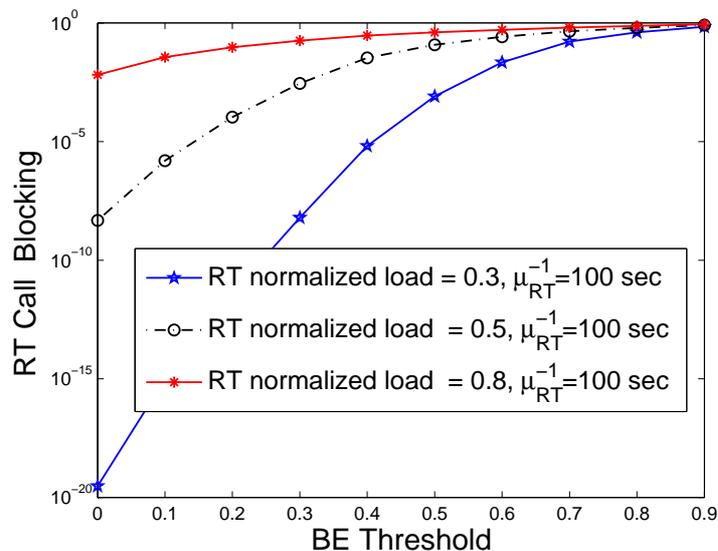


FIGURE 2.1 – Probabilité de blocage d'appels RT en fonction du seuil de la capacité réservée aux appels BE, pour $\bar{\rho}_{RT} = 0.3$ et $\mu_{RT} = 0.1$.

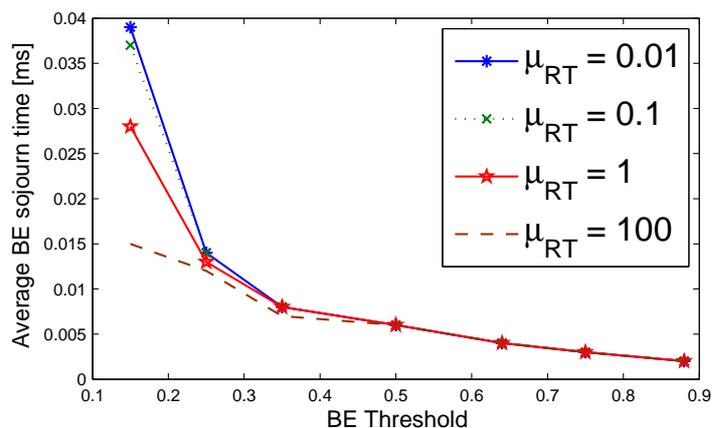


FIGURE 2.2 – Temps de séjour d'appels BE en fonction du seuil de la capacité réservée aux appels BE pour différents taux de service d'appels RT, $\mu_{BE} = 5$, $\lambda_{BE} = 10$ et $\bar{\rho}_{RT} = 0.5$.

réservée aux appels BE (L_{BE}). Remarquons ici que le temps de séjour prévu diminue remarquablement avec l'augmentation du seuil L_{BE} . Alors une petite réservation de ressources pour les appels BE implique une longue durée de séjour de ces appels. Notons que ce résultat confirme celui trouvé dans (Altman, 2002). Maintenant, nous supposons que l'opérateur via les statistiques historiques d'utilisation du canal par les appels RT et BE, connaît comment il peut partager les ressources entre les deux classes d'appels. La qualité de service visée par l'opérateur est que temps de séjour soit borné. Par exemple, s'il réserve aux appels BE la proportion $L_{BE} = 0.3$, la qualité de service est que le temps de séjour d'appels BE soit inférieur à 0.015 ms.

La figure 2.4 illustre le taux maximum d'arrivée (λ_{BE}^*) d'appels BE en fonction du seuil du temps de séjour de ces appels. Nous constatons que le taux maximum d'appels BE varie conjointement avec le temps de séjour, quand ce temps est faible (moins de 0.09 ms), le taux correspondant est grand. Aussi quand l'opérateur propose un seuil de temps de séjour supérieur à 0.1 ms , le taux maximum d'arrivée devient légèrement constant. Ce qui nous permet de fixer une qualité de service pour les appels BE comme le temps de leurs séjour ne doit pas dépasser le seuil 0.15 ms .

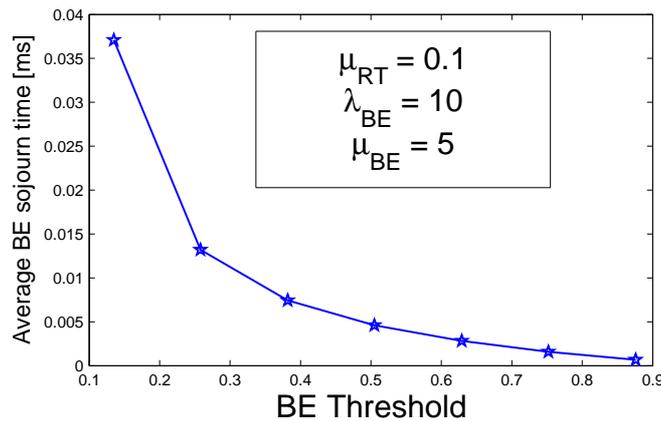


FIGURE 2.3 – Temps de séjour d'appels BE vs seuil de la capacité réservée aux appels BE, pour $\mu_{RT} = 0.1$, $\mu_{BE} = 5$, $\lambda_{BE} = 10$, et $\bar{\rho}_{RT} = 0.5$.

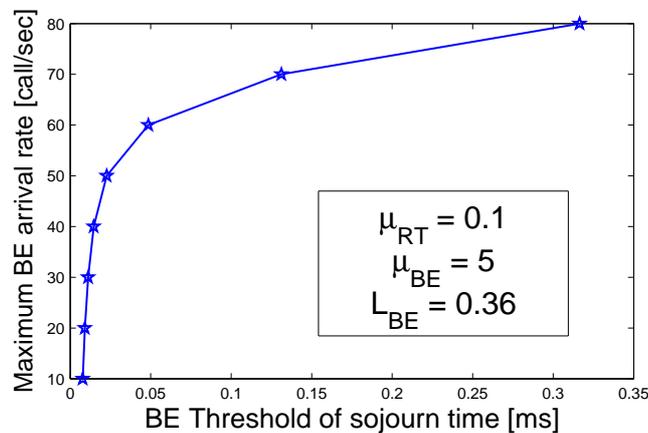


FIGURE 2.4 – Taux d'arrivée maximum d'appels BE en fonction du seuil de temps de séjour d'appels BE, pour $\mu_{RT} = 0.1$, $\mu_{BE} = 5$, et $\bar{\rho}_{RT} = 0.5$.

Validation des résultats par le simulateur NS2 : Dans ce paragraphe nous utilisons le simulateur à événements discrets (Network Simulator) NS2 pour valider nos résultats théoriques précédents. Nous avons considéré les paramètres suivants : la durée moyenne de service d'appels RT est de 180 s ; le taux d'arrivée d'appels RT est de 0.5

$appel/s$; la taille moyenne d'une session BE est de 1.6 Mbits et le taux d'arrivée d'appels BE est de 0.5 appel/s . Nous comparons les résultats analytiques et ceux issues de la simulation dans les figures 2.5 et 2.6. Par conséquent, nous remarquons dans ces figures que les deux résultats, analytiques et simulations sont quasiment les mêmes, ce qui valide notre approche théorique.

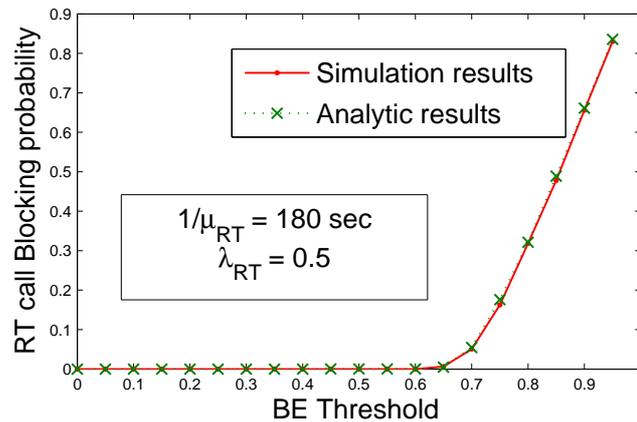


FIGURE 2.5 – Probabilité de blocage d'appels RT en fonction du seuil L_{BE} , comparaison entre les résultats analytiques et de simulations sur NS2.

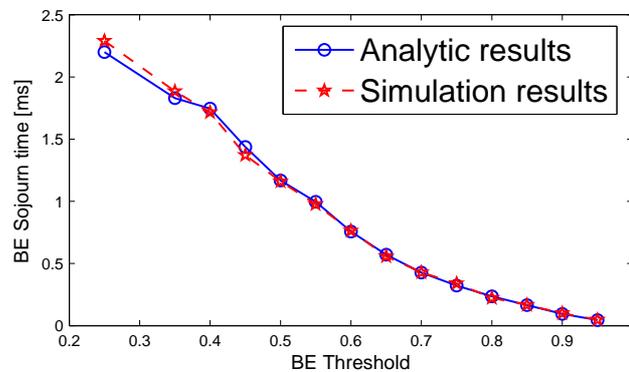


FIGURE 2.6 – Temps de séjour d'appels BE en fonction du seuil L_{BE} , comparaison entre les résultats analytiques et de simulations sur NS2.

2.3 Cas de trois classes de service

Puisque plusieurs trafics dans la classe BE ont besoin d'un minimum de qualité de service, la nécessité d'introduire un autre type de trafic est primordiale. En effet, une connexion FTP par exemple, a besoin d'un débit minimum pour échanger les fichiers entre le serveur et le client. Dans cette section, nous avons considéré plusieurs flots multimédia ayant chacun des besoins en qualité de service et des caractéristiques de trafic différents. Nous avons analysé les performances de la stratégie (contrôle d'admission) avec la priorité donnée à l'obtention d'une meilleure performance globale du système en respectant à peu près la qualité de service demandée par chaque classe. En effet, nous proposons trois classes de services pour mieux gérer les nouveaux services dans l'UMTS. Ces classes de qualité de services sont classées selon les applications :

- Trafic temps réel (RT) : pour des flux temps réel de paquets de taille fixe émis périodiquement, mode particulièrement adapté aux conversations vocales qui bénéficient d'une bande passante contrôlée avec échange interactif en temps réel et avec un minimum de délai entre les paquets ;
- Trafic non temps réel (NRT) pour des flux supposant des débits minimum mais tolérants en termes de délai comme les échanges en FTP ;
- Trafic *best effort* (BE) pour un trafic qui ne demande aucune qualité de service, mode particulièrement adapté au mode interactif qui est plutôt destiné à des échanges de type navigation sur le Web (requête/réponse).

Modèle : Nous modélisons le lien montant du système WCDMA multiservices par un processus de naissance et de mort d'une chaîne de Markov $(X(t), Y(t), Z(t))$ à trois dimensions. $X(t)$ correspond aux trafics RT, $Y(t)$ correspond aux trafics NRT et $Z(t)$ correspond aux trafics BE à l'instant t . Les taux d'arrivées de ces trafics sont respectivement λ_{RT} , λ_{NRT} et λ_{BE} . Ainsi les taux de départ de ces trafics sont respectivement μ_{RT} , μ_{NRT} et μ_{BE} . Nous supposons que les temps inter-arrivées, les durées d'appels RT, les tailles des fichiers NRT et BE sont mutuellement indépendants. Nous utilisons les mêmes notions utilisées dans le premier cas de deux classes 2.2. La capacité du système définie dans (2.8) devient ici

$$L_{RT} = \Theta_\epsilon - L_{NRT}, \quad (2.71)$$

où L_{NRT} est la capacité minimale nécessaire à réserver aux appels NRT pour avoir un débit minimum et L_{RT} les ressources utilisées par les RT.

2.3.1 Contrôle d'admission du trafic temps réel

Nous rappelons que l'UMTS utilise la technique AMR pour le trafic RT. AMR propose huit taux de transmission variant entre 4.75 kbps et 12.2 Kbps dynamiquement chaque 20 msec. Soient R_{min}^{RT} le taux minimum de transmission et R_{max}^{RT} le taux maximum de transmission. Donc les taux de transmission d'appels RT appartient à $[R_{min}^{RT}, R_{max}^{RT}]$. La bande minimale normalisée correspond au taux R_{min}^{RT} et est désignée par Δ_{min}^{RT} et celle

correspondant au R_{max}^{RT} est notée par Δ_{max}^{RT} . Leurs expressions sont

$$\begin{aligned}\Delta_{max}^{RT} &= \frac{\Gamma E_{RT}/N_0}{W/R_{max}^{RT} + \Gamma E_{RT}/N_0}, \\ \Delta_{min}^{RT} &= \frac{\Gamma E_{RT}/N_0}{W/R_{min}^{RT} + \Gamma E_{RT}/N_0},\end{aligned}$$

où E_{RT}/N_0 est l'énergie requise pour transmettre un bit de type RT. Le nombre d'appels RT correspondant au taux de transmission R_{min}^{RT} est donnée par $M_{RT} = \lfloor L_{RT}/\Delta_{max}^{RT} \rfloor$ et celui qui correspond au taux R_{max}^{RT} est $N_{RT} = \lfloor L_{RT}/\Delta_{min}^{RT} \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Alors, la bande nécessaire pour un appel RT est calculée dynamiquement comme suit

$$\Delta(i) = \begin{cases} \Delta_{max}^{RT}, & \text{si } i \leq N_{RT}, \\ L_{RT}/i, & \text{si } N_{RT} < i \leq M_{RT}, \end{cases} \quad (2.72)$$

Puisque le processus $X(t)$ est indépendant des autres processus $Y(t)$ et $Z(t)$, nous le modélisons tout seul par un processus de naissance et de mort avec un taux de naissance λ_{RT} et un taux de mort μ_{RT} . Le débit d'appel RT est

$$R_{RT}(i) = \frac{\Delta(i)}{1 - \Delta(i)} \frac{W}{E_{RT}/N_0}.$$

Le débit moyen total d'appels temps réel est défini par

$$\bar{D}_{RT} = \frac{\sum_{i=0}^{M_{RT}} iP(X(t) = i)R_{RT}(i)}{E(X(t))},$$

où

$$E(X(t)) = \sum_{i=0}^{M_{RT}} iP(X(t) = i),$$

$$P(X(t) = i) = \frac{\rho_{RT}^{M_{RT}}/M_{RT}!}{\sum_{j=0}^i \frac{\rho_{RT}^j}{j!}},$$

où ρ_{RT} est le taux de charge d'appels RT défini par $\rho_{RT} = \frac{\lambda_{RT}}{\mu_{RT}}$. La probabilité de blocage d'un nouvel appel temps réel est

$$P_B^{RT} = \frac{\rho_{RT}^{M_{RT}}/M_{RT}!}{\sum_{i=0}^{M_{RT}} \frac{\rho_{RT}^i}{i!}}.$$

2.3.2 Contrôle d'admission du trafic non temps réel

Nous considérons que les appels NRT ont une capacité minimale non nulle L_{NRT} et peuvent augmenter leurs ressources dans le cas où il y a moins d'appels RT dans le système. Les ressources qui seront partagées par les appels NRT sont

$$L_{NRT}(i) = \begin{cases} \Theta_\epsilon - (N_{RT} - 1)\Delta_{max}^{RT}, & \text{si } i \leq N_{RT}, \\ L_{NRT}, & \text{si } N_{RT} < i \leq M_{RT}, \end{cases} \quad (2.73)$$

Nous définissons un contrôle d'admission pour les appels NRT, qui vise à garantir une qualité de service particulière. Pour avoir cette qualité de service, un nombre maximum M_{NRT} d'appels NRT devrait être accepté par le système. Ce nombre est défini comme un nombre qui correspond au taux d'arrivée maximal d'appels NRT tels que leurs temps de séjour prévu est borné par une constante positive imposée par l'opérateur.

Le taux de départ d'appels NRT dépend du nombre de ceux en RT dans le système. Alors, le taux effectif de départ d'appels NRT est donné par

$$v_1(i) = \mu_{NRT} R_{NRT}^{tot}(i),$$

où $R_{NRT}^{tot}(i)$ est le taux total de transmission d'appels NRT correspondant à leur capacité disponible $L_{NRT}(i)$ et est défini par

$$R_{NRT}^{tot}(i) = \frac{L_{NRT}(i)}{1 - L_{NRT}(i)} \times \frac{W}{\Gamma E_{NRT}/N_0},$$

où E_{NRT}/N_0 est l'énergie pour transmettre un bit de type NRT.

Modèle du trafic non temps réel : La chaîne de Markov $(X(t), Y(t))$ est un processus QBD de deux dimensions, dont les taux de naissances sont λ_{RT} et λ_{NRT} . Alors que ses taux de morts sont μ_{RT} et μ_{NRT} . Nous nous intéressons ici au calcul de la distribution stationnaire, notée \mathbf{y} de cette chaîne. Soit \mathbf{Q}_Y le générateur correspondant dont la dimension est $(M_{RT} + 1)(M_{NRT} + 1)$. La distribution est solution du système suivant

$$\mathbf{y}\mathbf{Q}_Y = \mathbf{0}, \mathbf{y}\mathbf{e} = 1, \quad (2.74)$$

où \mathbf{e} (resp, $\mathbf{0}$) est un vecteur colonne des uns (resp, zéros) de même dimension. Le vecteur \mathbf{y} représente les probabilité d'états d'équilibres du processus de naissance et de mort à deux dimensions et sa forme est $\{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{M_{NRT}}\}$, où \mathbf{y}_j est un vecteur qui représente le niveau j . Chaque niveau peut partitionner en probabilité d'avoir i appels RT comme suit : $\mathbf{y}_j = [y_j(0), \dots, y_j(M_{RT})]$ et le générateur est de la forme

$$\mathbf{Q}_Y = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_0 & 0 & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2$ et \mathbf{B}_2 sont des matrices carrées d'ordre $M_{RT} + 1$. La matrice $\mathbf{A}_0 = \text{diag}(\lambda_{NRT})$ représente les arrivées d'appels NRT. La matrice \mathbf{A}_2 quant à elle, représente les départs d'appels NRT, $\mathbf{A}_2 = \text{diag}(v_1(i), 0 \leq i \leq M_{RT})$. Nous définissons les matrices $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_2$ et \mathbf{B}_1 sous la forme $\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}_1 - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0$ et $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. Ainsi la matrice \mathbf{C}_1 représente les arrivées et les départs d'appels RT dont la forme est

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1[i, i] &= -(\lambda_{RT} + i\mu_{RT}), 0 \leq i \leq M_{RT} - 1; \\ \mathbf{C}_1[i, i + 1] &= \lambda_{RT}, 0 \leq i \leq M_{RT} - 1; \\ \mathbf{C}_1[i, i - 1] &= i\mu_{RT}; 1 \leq i \leq M_{RT}; \\ \mathbf{C}_1[M_{RT}, M_{RT}] &= -M_{RT}\mu_{RT}. \end{aligned}$$

La distribution stationnaire de ce système est donnée par l'équation (2.61) dans le cas de deux classes sous la forme

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i (\phi_i)^j w_i + \sum_{i=M_{RT}+1}^{2M_{RT}+2} \beta_i \left(\frac{1}{\phi_i}\right)^{M_{NRT}-j} w_i, \quad (2.75)$$

où $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{M_{RT}}$ sont des valeurs propres correspondant aux vecteurs propres $w_0, \dots, w_{M_{RT}}$ de la matrice \mathbf{R} , tel que $w_i \mathbf{R} = \phi_i w_i$; Ainsi $\frac{1}{\phi_i}; i = M_{RT} + 1, \dots, 2M_{RT} + 2$ sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres $w_{M_{RT}+1}, \dots, w_{2M_{RT}+2}$ de la matrice \mathbf{S} . Notons que ces matrices \mathbf{R} et \mathbf{S} sont données dans le cas de deux classes dans ce chapitre. Les inconnus β_i représentent les coefficients des vecteurs v_1 et v_2 et sont solutions du système d'équation suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 \mathbf{B}_1 + \mathbf{y}_1 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}_{M_{NRT}-1} \mathbf{A}_0 + \mathbf{y}_{M_{NRT}} \mathbf{B}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{y} \mathbf{e} = 1.$$

Pour résoudre le système ci-dessus, nous pouvons l'écrire sous forme matricielle

$$(\beta_0, \dots, \beta_{2M_{RT}+2}) \times \begin{bmatrix} \mathbf{M1} & \mathbf{M2} \\ \mathbf{M3} & \mathbf{M4} \end{bmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad (2.76)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{M1} &= \mathbf{V} \mathbf{B}_1 + \mathbf{\Psi} \mathbf{V} \mathbf{A}_2, \\ \mathbf{M2} &= \mathbf{\Psi}^{(M_{NRT}-1)} \mathbf{V} \mathbf{A}_0 + \mathbf{\Psi}^{M_{NRT}} \mathbf{V} \mathbf{B}_2, \\ \mathbf{M3} &= \mathbf{\Phi}^{M_{NRT}} \mathbf{W} \mathbf{B}_1 + \mathbf{\Phi}^{(M_{NRT}-1)} \mathbf{W} \mathbf{A}_2, \\ \mathbf{M4} &= \mathbf{\Phi} \mathbf{W} \mathbf{A}_0 + \mathbf{W} \mathbf{B}_2, \\ \mathbf{\Psi} &= \text{diag}(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{M_{RT}}), \\ \mathbf{\Phi} &= \text{diag}(1/\phi_{M_{RT}+1}, \dots, 1/\phi_{2M_{RT}+2}), \\ \mathbf{V} &= (w_0, \dots, w_{M_{RT}}), \\ \mathbf{W} &= (w_{M_{RT}+1}, \dots, w_{2M_{RT}+2}). \end{aligned}$$

Ainsi la condition de normalisation devient

$$\sum_{i=0}^x \beta_i \frac{1 - \phi_i^{(M_{NRT}+1)}}{1 - \phi_i} w_i \bar{\mathbf{1}} + \sum_{i=x+1}^{2x+2} \beta_i \frac{1 - (1/\phi_i)^{(M_{NRT}+1)}}{1 - 1/\phi_i} w_i \bar{\mathbf{1}} = 1, \quad (2.77)$$

où $x = M_{RT}$ et $\bar{\mathbf{1}}$ est un vecteur colonne des uns de même dimension que le vecteur w_i . Pour $z = 1$, nous utilisons la relation $\frac{1 - z^{y+1}}{1 - z} = y + 1$, car on a $1 - z^{y+1} = (1 - z)(1 + z + \dots + z^y)$. Par conséquent, nous combinons les équations (2.76) et (2.77) et trouvons les coefficients β_i comme solutions du système suivant

$$(\beta_0, \dots, \beta_{2x+2}) \times \begin{bmatrix} \mathbf{Vr} & \mathbf{M1} & \mathbf{M2} \\ \mathbf{Vs} & \mathbf{M3} & \mathbf{M4} \end{bmatrix} = (1, \mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

où

$$\mathbf{Vr} = \left(\frac{1 - \phi_0^{(M_{NRT}+1)}}{1 - \phi_0} w_0 \bar{\mathbf{1}}, \dots, \frac{1 - \phi_x^{(M_{NRT}+1)}}{1 - \phi_x} w_x \bar{\mathbf{1}} \right)^T,$$

et

$$\mathbf{Vs} = \left(\frac{1 - (\frac{1}{\phi_{x+1}})^{(M_{NRT}+1)}}{1 - \frac{1}{\phi_{x+1}}} w_{x+1} \bar{\mathbf{1}}, \dots, \frac{1 - (\frac{1}{\phi_{2x+2}})^{(M_{NRT}+1)}}{1 - \frac{1}{\phi_{2x+2}}} w_{2x+2} \bar{\mathbf{1}} \right)^T.$$

Le nombre moyen d'appels NRT est calculé par $E[Y] = \sum_{j=0}^{M_{NRT}} j y_j e$ et la probabilité de blocage d'un nouvel appel NRT est déterminée quand le nombre d'appels dans le système est exactement M_{NRT} via l'équation (2.75) :

$$P_B^{NRT} = Pr[Y = M_{NRT}] = \sum_{i=0}^{M_{RT}} \beta_i (\phi_i)^{M_{NRT}} w_i e + \mathbf{v}_2 e, \quad (2.78)$$

où $\mathbf{v}_2 = \sum_{i=M_{RT}+1}^{2M_{RT}+2} \beta_i w_i$ et le temps de séjour d'appels NRT est obtenu via la formule de Little

$$T^{NRT} = \frac{E[Y]}{\lambda_{NRT}(1 - P_B^{NRT})}. \quad (2.79)$$

Nous rappelons que le délai T^{NRT} d'appels NRT est inférieure au égale à une constante imposée par l'opérateur qu'on note par d . Cela signifie que $T^{NRT}(M_{NRT}^*) \leq d$. Alors le nombre maximum d'appels NRT que peut manipuler le système en satisfaisant cette qualité de service est noté M_{NRT}^* . Enfin, ce nombre M_{NRT}^* est exactement M_{NRT} .

2.3.3 Trafic *best effort* sans contrôle d'admission

Nous rappelons que les appels BE dépendent de ceux en RT et en NRT. Nous supposons que les appels BE n'exigent aucune qualité de service et adaptent leurs taux

de transmission selon les ressources du réseau. Ainsi, ils partagent les ressources non utilisées par les appels NRT, d'où le temps de départ d'appels BE défini par

$$v_2(i, j) = \mu_{BE} R_{BE}^{tot}(i, j),$$

où $R_{BE}^{tot}(i, j)$ est le taux total de transmission correspondant à la capacité disponible notée $C(i, j)$, dont sa forme est

$$R_{BE}^{tot}(i, j) = \frac{C(i, j)}{1 - C(i, j)} \times \frac{W}{\Gamma E_{BE}/N_0}.$$

où E_{BE}/N_0 est l'énergie pour transmettre un bit de type BE sur la densité du bruit et

$$C(i, j) = \begin{cases} L_{NRT}(i) - j\Delta_{NRT}(i), & \text{si } j \leq M_{NRT}, \\ 0, & \text{si } N_{RT} < i \leq M_{RT}, \end{cases} \quad (2.80)$$

où $\Delta_{NRT}(i)$ ($i = 0, 1, \dots, M_{RT}$) est la capacité requise par appel NRT $\Delta_{NRT}(i) = \frac{L_{NRT}(i)}{M_{NRT}}$. Puisque nous avons supposé que les appels BE n'ont aucun contrôle d'admission, le système accepte un nombre infini parmi eux. La chaîne de Markov $(X(t), Y(t), Z(t))$ dont le générateur noté \mathbf{Q} est défini par

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{Q}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_0 & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_0 & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$ et \mathbf{Q}_2 sont des matrices carrées par bloc d'ordre $M_{NRT} + 1$. Leurs formes sont

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2^{(0)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{(1)} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{A}_2^{(M_{NRT})} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_Y - \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}_Y - \mathbf{Q}_0$$

où \mathbf{A}_{11} est une matrice carrée d'ordre $M_{RT} + 1$ de la forme $\mathbf{A}_{11} = \text{diag}(\lambda_{BE})$. La matrice \mathbf{Q}_2 contient les taux de départs d'appels BE et formée des blocs matricielle carrées $\mathbf{A}_2^{(j)}$ d'ordre $M_{RT} + 1$ de la forme $\mathbf{A}_2^{(j)} = \text{diag}(v_2(i, j) \quad 0 \leq i \leq M_{RT}); 0 \leq j \leq M_{NRT}$. Enfin, les matrices \mathbf{P}_0 et \mathbf{Q}_1 sont tridiagonales, alors que \mathbf{Q}_0 et \mathbf{Q}_2 sont des matrices diagonales.

2.3.4 Évaluation des performances par l'analyse spectrale

Nous appliquons l'analyse spectrale dans le cas d'une chaîne de Markov à trois dimensions. Cette approche va nous permettre de trouver explicitement de la distribution stationnaire de cette chaîne. Cette distribution de probabilités, notée par π , est la solution du système suivant

$$\pi \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (2.81)$$

$$\pi \mathbf{e} = 1, \quad (2.82)$$

où \mathbf{e} est un vecteur d'ordre infini des uns, $\pi = [\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^{n-1}, \pi^n, \dots]$, π^k est un vecteur dont les composantes sont données par la probabilité d'avoir i RT, j NRT et k BE appels ($\pi_{i,j,k} = P(X = i, Y = j, Z = k)$). Nous avons également

$$\pi^0 \mathbf{P}_0 + \pi^1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}, \quad (2.83)$$

$$\pi^{n-1} \mathbf{Q}_0 + \pi^n \mathbf{Q}_1 + \pi^{n+1} \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}, \quad n \geq 1. \quad (2.84)$$

Nous décomposons le vecteur de probabilités de la ligne n comme suit $\pi^n = [\pi_{0,n}, \dots, \pi_{M_{NRT},n}]$. Chaque composante de ce dernier peut s'écrire sous la forme $\pi_{j,n} = [\pi_{0,j,n}, \dots, \pi_{M_{RT},j,n}]$ pour j NRT et n BE appels.

Théorème 2 *Le système est stable si et seulement si*

$$\lambda_{BE} < \sum_{j=0}^{M_{NRT}} \sum_{i=0}^{M_{RT}} x_i^j v_2(i, j) = c, \quad (2.85)$$

où $x_i^j = \pi_{i,j,n}$.

Démonstration du Théorème 2 *Pour avoir la démonstration, nous appliquons le théorème 1. 7. 1 qui se trouve dans (Neuts, 1981). Donc, la condition de stabilité du système est définie comme le taux moyen d'arrivée qui doit être inférieur au taux moyen de service du système, ce qui signifie que $\mathbf{y} \mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_y < \mathbf{y} \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_y$, où \mathbf{y} est la distribution stationnaire du système (2.74), ainsi nous avons $\mathbf{Q}_y \mathbf{e} = \mathbf{0}$, car la matrice \mathbf{Q}_y est stochastique. Par conséquent, le générateur \mathbf{Q} est une matrice stochastique et le système correspondant est stable si et seulement si*

$$\lambda_{BE} < \sum_{j=0}^{M_{NRT}} \sum_{i=0}^{M_{RT}} x_i^j v_2(i, j),$$

où $x_i^j = \pi_{i,j,n}$.

Nous déduisons que la chaîne de Markov décrite par le générateur ci-dessus, est récurrente positive sous la condition de stabilité (2.85). D'où, la solution (2.81) est unique et satisfait la condition de normalisation (2.82). Nous supposons que le système est stable. Ecrivons sa solution sous la forme développée par Latouche (Latouche et Ramaswami, 1999) : $\pi^n = \pi^0 \mathbf{R}^n$, où \mathbf{R} est une matrice géométrique qui désigne la solution minimale non négative de l'équation matricielle quadratique suivante

$$\mathbf{R}^2 \mathbf{Q}_2 + \mathbf{R} \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.86)$$

et le vecteur de probabilité π^0 est obtenu en résolvant le système

$$\pi^0(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n,$$

où \mathbf{y} est un vecteur de probabilité donné dans (2.75). Les valeurs propres de la matrice \mathbf{R} sont les racines de l'équation

$$\det(\mathbf{T}(z)) = 0,$$

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{Q}_0 + z\mathbf{Q}_1 + z^2\mathbf{Q}_2. \quad (2.87)$$

$\mathbf{T}(z)$ est donc une matrice polynômiale tridiagonale composée de $M_{NRT} + 1$ blocs en lignes et en colonnes, dont la taille est $N = (M_{NRT} + 1)(M_{RT} + 1)$ et les composants sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(z)[j, j] &= \mathbf{A}_{11} + z(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_2) + z^2\mathbf{A}_2^{(j)}, \quad \forall j; \\ \mathbf{T}(z)[j, j-1] &= z\mathbf{A}_2, \quad j \in (1, \dots, M_{NRT}); \\ \mathbf{T}(z)[j, j+1] &= z\mathbf{A}_0, \quad j \in (0, \dots, M_{NRT} - 1). \end{aligned}$$

Nous réécrivons la matrice $\mathbf{T}(z)$ sous la nouvelle forme

$$\mathbf{T}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{R})(z\mathbf{Q}_2 + \mathbf{R}\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_1). \quad (2.88)$$

L'équation suivante (2.89) est très intéressante puisqu'elle montre les valeurs propres de la matrice \mathbf{R} comme racines du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$.

$$\det[\mathbf{T}(z)] = P_{\mathbf{R}}(z) \times f(z), \quad (2.89)$$

où $f(z) = \det(z\mathbf{Q}_2 + \mathbf{R}\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_1)$ et $P_{\mathbf{R}}(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{R})$. Sous la condition de stabilité (2.85), le rayon spectrale de \mathbf{R} est inférieur à 1.

- Lemme 4**
1. Si la valeur λ est une valeur propre de la matrice \mathbf{R} , dont la multiplicité est n . Alors elle est également racine de multiplicité au moins égale à n du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$.
 2. Si le vecteur v est un vecteur propre associé à la valeur propre λ , alors v est un vecteur qu'annule $\mathbf{T}(\lambda)$ à gauche, cela signifie que $v\mathbf{T}(\lambda) = 0$.
 3. Les matrices carrées \mathbf{R} et \mathbf{Q}_0 ont même noyau à gauche.

Démonstration du Lemme 4 Les démonstartions sont similaires à celles des lemmes du cas de deux classes 2.2.4 de ce chapitre.

Lemme 5 Toutes les valeurs propres de la matrice \mathbf{R} sont dans le disque de rayon 1.

Démonstration du Lemme 5 Puisque la matrice \mathbf{Q}_Y est irréductible et en appliquant les théorèmes 1.3.1 et 3.1.1 cités dans (Neuts, 1981), nous trouvons $sp(\mathbf{R}) < 1$.

Théorème 3 Le polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ a au plus $2N$ racines positives et pour leur localisation, nous distinguons les deux cas :

1. Si $\lambda_{BE} < c$, alors toutes les valeurs propres sont simples et non nulles. N d'entre eux se trouvent dans le disque de rayon 1, une racine à $z = 1$ et N sont localisées à l'extérieur du disque unité.

2. Si $\lambda_{BE} = c$, alors toutes les valeurs propres sont simples et non nulles. Deux à $z = 1$, $N - 1$ dans le disque unité et $N - 1$ à l'extérieur du disque unité.

Démonstration du Théorème 3 1. Nous remarquons que le processus QBD du générateur \mathbf{Q} est récurrent positif (Neuts, 1981), car $\lambda_{BE} < c$. Soit G la solution minimale non négative de l'équation quadratique

$$\mathbf{Q}_0 z^2 + \mathbf{Q}_1 z + \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}.$$

Et $\mathbf{F}(z)$ une matrice polynomiale de la forme

$$\mathbf{F}(z) = z^2 \mathbf{Q}_0 + z \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = (z \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_0 G)(z \mathbf{I} - G).$$

Nous écrivons le polynôme $\mathbf{T}(z)$ en fonction de \mathbf{F} comme suit

$$\mathbf{T}(z) = z^2 \mathbf{F}(1/z).$$

Alors nous obtenons la relation suivante (voir (Lancaster, 1984))

$$\det[\mathbf{T}(z)] = z^{2N} \det[\mathbf{F}(z^{-1})].$$

Ce qui montre que le polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ a au moins un degré d'ordre $2N$. La matrice $\mathbf{T}(z)$ est réécrite sous la forme

$$\mathbf{T}(z) = (1 - z)(\mathbf{Q}_0 - z \mathbf{Q}_2) + z \mathbf{Q}_Y.$$

Nous trouvons quand $z = 1$ l'égalité $\det[\mathbf{T}(1)] = \det(\mathbf{Q}_Y) = 0$, car la matrice \mathbf{Q}_Y définie dans (2.74) est une matrice stochastique singulière, c'est à dire qu'il existe un vecteur non nul dans notre cas est bien le vecteur de probabilité \mathbf{y} tel que $\mathbf{y} \mathbf{Q}_Y = \mathbf{0}$. D'où le polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ a une racine à $z = 1$. En plus, selon l'équation (2.88) les valeurs propres de R sont exactement les racines du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ et sont toutes inférieurs à 1 via le Lemme 5. Donc, le polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ a N racines quand $|z| < 1$ et $N - 1$ quand $|z| > 1$.

2. Nous utilisons la même méthode que celle utilisée avant. En effet, si $\lambda_{BE} = c$ le processus QBD est récurrent nul comme montré dans (Neuts, 1981). D'où nous avons $sp(\mathbf{R}) = 1$, ce qui montre qu'il y a une autre racine à $z = 1$ du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$.

Après avoir présenté l'analyse du système par l'approche d'analyse spectrale, nous écrivons la distribution stationnaire π^n sous la forme spectrale suivante

$$\pi^n = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\psi_i)^n v_i, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.90)$$

où $N = (M_{RT} + 1) \times (M_{NRT} + 1)$; ψ_0, \dots, ψ_N sont les valeurs propres de la matrice R associées aux vecteurs propres v_0, \dots, v_N , liées par les relations $v_i \mathbf{R} = \psi_i v_i$ ($i = 0, \dots, N$) et $\alpha_0, \dots, \alpha_N$ sont des coefficients réels. Nous calculons les valeurs propres ψ_i en utilisant le Lemme 4 comme racines du polynôme $\det[\mathbf{T}(z)]$ qui se trouvent dans le disque unité pour $|z| < 1$. Aussi, les coefficients α_i sont obtenus en utilisant la condition de normalisation (2.82).

Nous présentons quelques métriques du système. Soit z_n la probabilité marginale d'appels BE défini par

$$z_n = \pi^n e,$$

où e est un vecteur colonne des uns de même dimensions que les vecteurs propres. Ainsi, le nombre moyen marginal d'appels BE est calculé par

$$E[Z] = \sum_{n=0}^{\infty} n z_n.$$

Ensuite, le temps moyen de séjour d'appels BE est trouvé en appliquant le résultat de Little $T^{BE} = \frac{E[Z]}{\lambda_{BE}}$. Sa forme en fonction des valeurs et vecteurs propres de la matrice R est

$$T^{BE} = \frac{1}{\lambda_{BE}} \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\psi_i}{(1 - \psi_i)^2} v_i e. \quad (2.91)$$

2.3.5 Illustrations numériques

Nous proposons les évaluation des performances du système sous forme d'applications numériques en nous focalisant sur les probabilités de blocage et les temps de séjour. Nous utilisons les valeurs numériques suivantes (Holma et Toskala, 2001) : le débit minimum d'appels RT est 4.75 *kbps* et la bande nécessaire est $\Delta_{min}^{RT} = 0.124$; le débit maximum d'appels RT est 12.2 *kbps* et la bande correspondante est $\Delta_{max}^{RT} = 0.141$; les énergies transmises d'un bit de type RT (respectivement NRT et BE) sur la densité du bruit sont $E_{RT}/N_0 = 4.1$ dB (respectivement $E_{NRT}/N_0 = 4$ dB et $E_{BE}/N_0 = 3.1$ dB) ; le débit chip est $W = 3.84$ MHz et $\epsilon = 10^{-5}$ (Hegde et Altman, 2003). Le taux total de transmission d'appels RT (R_T) est défini quand tous ces appels ont servi avec un taux minimum R_{RT}^{min} par $R_T = \left| \frac{\Theta \epsilon}{\Delta_{min}^{RT}} \right| R_{min}^{RT}$. Nous considérons que le taux de charge normalisé des trafics temps réel ($\tilde{\rho}_{RT} = \rho_{RT} \frac{R_{max}^{RT}}{R_T}$) est relativement grand $\tilde{\rho}_{RT} = 0.3$. Nous rappelons que pour garantir un taux de transmission minimal non nul aux appels NRT, nous allons leur réserver une proportion minimale L_{NRT} de la capacité totale. Nous supposons que l'opérateur peut fixer cette proportion selon sa politique de gestion de ressources entre les trois classes de service considérées. Par exemple, il veut que cette proportion soit entre 10% et 90% de la capacité totale. Dans ce qui suit nous essayons de trouver un compromis entre tous les appels via les métriques de performances étudiées.

Dans ce paragraphe, nous nous basons sur les détails des formules illustrées dans les précédentes sous sections 2.3.1 et 2.3.2. La figure 2.7 montre la probabilité de blocage P_B^{RT} d'appels RT en fonction de la capacité minimale ou seuil L_{NRT} d'appels NRT. Nous remarquons que lorsque la capacité minimale augmente la probabilité de blocage croît aussi comme prévu. Cela se justifie par le fait qu'augmenter la capacité minimale pour les appels NRT diminue les ressources restantes de ceux en RT. Nous constatons dans cette figure que la probabilité de blocage reste constante et prend la valeur 15% quand

le seuil L_{NRT} appartenant à la région [40%, 50%]. En contre partie, quand L_{NRT} devient supérieur à 0.5, la probabilité de blocage d'appels RT progresse rapidement.

Ensuite, nous étudions l'effet de la capacité minimale L_{NRT} accordée aux appels NRT sur le temps de leur séjour et leur blocage. La figure 2.8 expose cet effet sur le temps de séjour d'appels NRT. Pour des petites valeurs de L_{NRT} (moins de 0.4), les appels NRT restent longtemps dans le système et pour les grandes valeurs de L_{NRT} (supérieur à 0.4), ces appels prennent moins de temps dans leurs service. Le résultat de cette figure montre que pour obtenir une très bonne configuration pour les appels NRT il faut leur réserver une bande passante importante. La figure 2.9 quant à elle, représente l'effet de variation des ressources minimales réservées aux appels NRT sur leur probabilité de blocage dans une échelle logarithmique. Dans la région $0 \leq L_{NRT} \leq 0.5$ la probabilité de blocage décroît lentement avec L_{NRT} . En dehors de cette région, la probabilité décroît rapidement en raison de l'augmentation des ressources disponibles aux appels NRT.

Donc, également nous constatons que la région [40%, 50%] donne de très bonnes performances pour les deux classes RT et NRT, moins de blocages et un temps de séjour acceptable. Il reste à voir les performances de la troisième classe BE dans cette région. Pour cela nous illustrons dans la figure 2.10 l'effet de la capacité minimale sur le temps de séjour d'appels BE. Comme nous avons prévu durant notre analyse théorique, le temps de séjour décroît quand les ressources réservées aux appels NRT augmentent. Nous remarquons aussi que la région trouvé avant est aussi importante pour la classe BE. Par conséquent, cette région offre un bon compromis entre les trois classes, nous avons moins de blocage pour RT et NRT et des temps de séjour raisonnables pour NRT et BE. Un autre résultat important est de proposer un CAC dans cette région. Dans la pratique, un fournisseur de services de télécoms ou opérateur peut appliquer un CAC sur les NRT et BE en fixant la capacité minimale L_{NRT} dans la région [40%, 50%]. Nous fixons $L_{NRT} = 0.4$ et proposons ici un CAC pour NRT et BE qui accepte un taux maximum d'arrivée NRT et BE en leurs garantissant une qualité de service particulière en terme de temps séjour fixé par l'opérateur comme le montrent les figures 2.11 et 2.12.

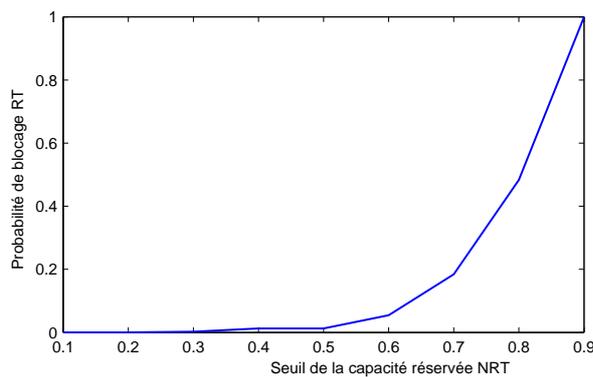


FIGURE 2.7 – Probabilité de blocage d'appels RT en fonction du seuil de la capacité réservée aux appels BE pour $\tilde{\rho}_{RT} = 0.3$ et $\mu_{RT} = 0.01$.

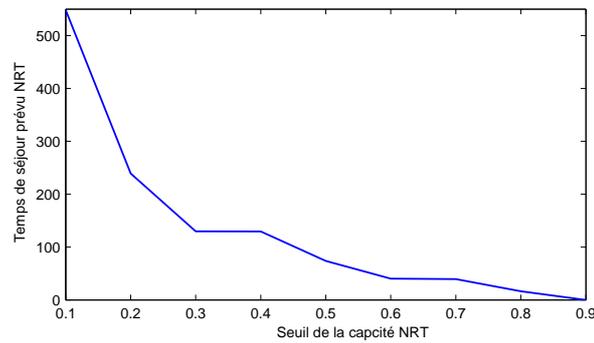


FIGURE 2.8 – Temps de séjour prévu d'appels NRT RT en fonction du seuil NRT pour $\tilde{\rho}_{RT} = 0.3$, $\mu_{RT} = 1$, $\mu_{NRT} = 0.0003$ et $\lambda_{NRT} = 5$.

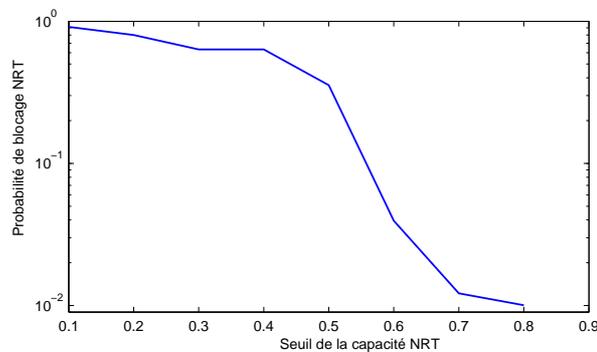


FIGURE 2.9 – Blocage d'appels NRT dans une échelle logarithmique RT en fonction du seuil NRT pour $M_{NRT} = 100$, $\lambda_{NRT} = 8$, $\mu_{RT} = 0.1$, $\tilde{\rho}_{RT} = 0.3$ et $\mu_{NRT} = 0.1$.

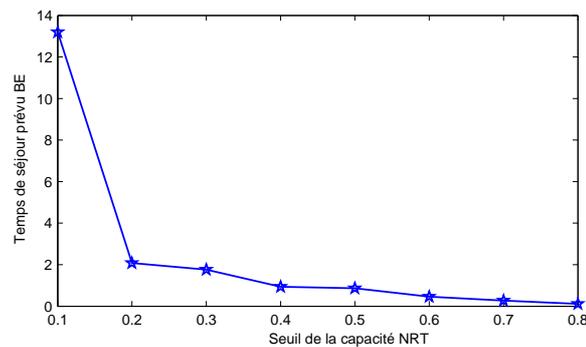


FIGURE 2.10 – Temps de séjour prévu pour les appels BE RT en fonction du seuil NRT pour $\lambda_{NRT} = 0.5$, $\mu_{NRT} = 0.1$, $\mu_{RT} = 0.1$, $\tilde{\rho}_{RT} = 0.3$, $\lambda_{BE} = 0.4$ et $\mu_{BE} = 0.1$.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une analyse de l'évaluation de la capacité pour le lien montant du système WCDMA. Cette analyse est basée sur l'approche d'analyse

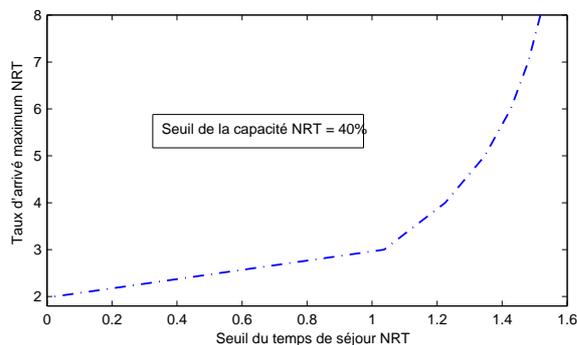


FIGURE 2.11 – Taux maximum d'arrivée d'appels NRT RT en fonction du seuil du temps de séjour NRT pour $\tilde{\rho}_{RT} = 0.3$, $\mu_{RT} = 0.1$ et $\mu_{NRT} = 0.1$.

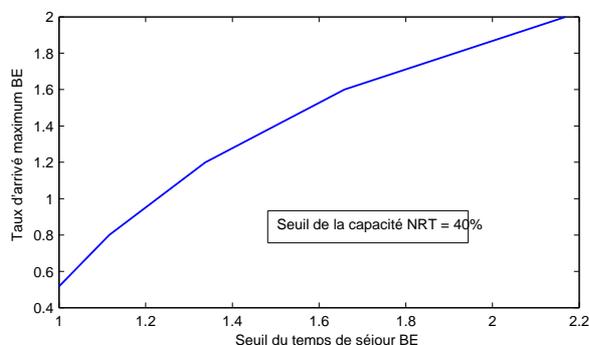


FIGURE 2.12 – Taux maximum d'arrivée d'appels BE RT en fonction du seuil du temps de séjour de ces appels pour $\mu_{RT} = 0.1$, $\tilde{\rho}_{RT} = 0.3$, $\lambda_{NRT} = 0.5$, $\mu_{NRT} = 0.1$ et $\mu_{BE} = 0.1$.

spectrale en séparant les services en deux classes (temps réel et *best effort*) et en trois classes (temps réel, non temps réel et *best effort*). Le cas de deux classes étudiées dans la première partie de ce chapitre nous a permis d'améliorer la gestion de la qualité de service en réduisant la complexité d'analyse des différentes classes de trafic. Car, la complexité du système du réseau de la troisième génération réside dans la diversité de services qu'il offre. L'analyse spectrale nous a permis de trouver de manière explicite la distribution des états d'équilibre du système dans deux scénarios du nombre d'appels *best effort* (fini et infini) que nous avons considéré. Nous signalons que la solution de la distribution stationnaire des états d'équilibre trouvée dans le cas de deux classes est explicite par rapport à celle proposée dans (Hegde et Altman, 2003). En outre, nous avons étudié l'influence de la bande passante minimale réservée aux appels BE sur les performances du système. De plus, nous avons fourni quelques résultats numériques de la performance du système et validé ces résultats par le biais d'un simulateur NS2.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons modélisé le lien montant du système WCDMA, en considérant les trois classes de services temps réel, non temps réel et *best effort* pour réduire la complexité de gestion de ces services. Étant donné que certains services ont besoin d'un minimum de taux transmission à garantir par le fournisseur de service, nous avons introduit une classe de service intermédiaire entre les

deux classes étudiées dans la littérature temps réel et *best effort*. Cette classe, appelée non temps réel (NRT), regroupe tous les services qui demandent un débit minimum comme le transfert de fichiers (FTP). En utilisant également, l'approche d'analyse spectrale, nous avons analysé l'effet de la répartition de la capacité réservée aux appels non temps réel sur les performances des trois classes, nous avons obtenu des expressions explicites des performances et proposé un contrôle d'admission pour les appels non temps réel. Aussi, une analyse numérique est développée dans cette section et nous avons trouvé une région qui représente un compromis entre les trois classes étudiées