



**HAL**  
open science

# Mesure lagrangienne en turbulence : mise en oeuvre et analyse

Nicolas Mordant

► **To cite this version:**

Nicolas Mordant. Mesure lagrangienne en turbulence : mise en oeuvre et analyse. Acoustique [physics.class-ph]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2001. Français. NNT: . tel-00003926

**HAL Id: tel-00003926**

**<https://theses.hal.science/tel-00003926>**

Submitted on 8 Dec 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 199

Année : 2001

N° (bibliothèque) : 01ENSL0 199

Thèse présentée à  
l'ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON  
Laboratoire de Physique

# Mesure lagrangienne en turbulence : mise en œuvre et analyse

soutenue publiquement le 15 novembre 2001 par

**Nicolas MORDANT**

pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon**  
Spécialité : Physique

## **JURY :**

MM. C. BAUDET	Rapporteur
E. BODENSCHATZ	
B. CASTAING	Président
Y. COUDER	
O. MICHEL	
J.-F. PINTON	Directeur
A. PUMIR	Rapporteur



## Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord et très chaleureusement Pascal Metz avec qui nous avons conçu les dispositifs électroniques et qui les a réalisés et mis au point avec une persévérance qui mérite l'admiration. Sans lui la mesure n'aurait jamais vu le jour. Un grand merci également à Marc Moulin qui s'est occupé de la partie mécanique avec son efficacité habituelle. Merci à Philippe Auclair chez Vermon qui a réparé gracieusement les transducteurs que je me suis évertué à abimer. Merci à Christian Doppler dont la connaissance approfondie de l'acoustique a eu un effet important sur mon travail.

Je remercie bien sûr Jean-François Pinton pour m'avoir proposé ce sujet de thèse. Je ne nie pas qu'il a pu exister pendant ces années quelques jours où je me suis maudit de l'avoir accepté... Néanmoins les conditions de travail idéales ainsi que sa disponibilité et sa jovialité légendaires m'ont rendu ces trois années fort agréables. Je profite de ces lignes pour lui témoigner ma reconnaissance de m'avoir accepté (et supporté) depuis si longtemps dans son équipe. J'ai toujours eu un grand plaisir à travailler avec lui ainsi qu'avec les autres membres du groupe : Francesca, Catherine, Philippe et Mickael. Je remercie également Olivier Michel, dont la jovialité est non moins légendaire, pour m'avoir initié aux mystères insondables de la vraisemblance approchée. Rudolf Kalman m'a également fortement aidé à limiter les effets du bruit dans la démodulations des signaux.

Je suis reconnaissant aux membres de mon jury d'avoir accepté de juger mon travail, en particulier Christophe Baudet et Alain Pumir qui ont eu la lourde tâche de rapporteur, ainsi qu'Eberhard Bodenschatz qui a fait spécialement le voyage en Europe.

De façon générale, je remercie tous les personnels du labo, Anne dont les éclats rejaillissent jusqu'à mon bureau, Laurence mon fournisseur officiel de CDs vierges, Franck, Djamel et André à l'atelier.

J'embrasse Céline, correctrice officielle de fautes d'orthographe qui a été contrainte de lire ma prose. J'embrasse encore plus fort Pascale qui a supporté bien souvent malgré l'éloignement des conversations lagrangiennes au cours des longues soirées de déprime qui jalonnent la vie d'un thésard. Elle a écouté patiemment l'exposé de mes problèmes sans intérêt et a su me redonner envie de continuer à affronter les fuites, les court-circuits, les amplis qui oscillent et les programmes qui plantent.



*à mes grands-pères...*



# Table des matières

<b>Introduction</b> . . . . .	17
<b>1. État de l'art en lagrangien</b> . . . . .	19
1.1 Théorie . . . . .	19
1.1.1 Les variables lagrangiennes . . . . .	19
1.1.2 La turbulence homogène . . . . .	21
1.1.3 Les prédictions de la théorie Kolmogorov 41 . . . . .	22
1.2 Expériences . . . . .	24
1.2.1 Les premières mesures indirectes . . . . .	24
1.2.2 Les mesures lagrangiennes directes . . . . .	25
1.3 Simulations numériques . . . . .	28
1.3.1 Les simulations totales . . . . .	28
1.3.2 Les modèles stochastiques . . . . .	29
<b>2. Montage expérimental</b> . . . . .	33
2.1 Principe de la mesure : effet Doppler ultrasonore . . . . .	33
2.2 Écoulement . . . . .	36
2.3 Diffusion du son par une bille . . . . .	37
2.3.1 Expression de l'onde diffusée . . . . .	38
2.3.2 Application à notre cas . . . . .	38
2.4 Transducteurs . . . . .	40
2.4.1 Les contraintes . . . . .	40
2.4.2 Les deux réseaux de transducteurs . . . . .	42
2.5 Chaîne d'acquisition . . . . .	43
2.5.1 Cahier des charges . . . . .	43
2.5.2 Principe . . . . .	44
2.5.3 Réalisation pratique (en collaboration avec Pascal Metz) . . . . .	44
<b>3. Forces hydrodynamiques sur une bille</b> . . . . .	53
3.1 Formalisation de l'interaction fluide/particule . . . . .	53
3.1.1 Prédications dans la limite $Re \rightarrow 0$ . . . . .	54
3.1.2 Extension au cas $Re \leq 1$ . . . . .	55
3.1.3 Équation empirique . . . . .	55
3.2 Expériences . . . . .	56
3.2.1 Dispositif expérimental . . . . .	56
3.2.2 Traitement du signal . . . . .	57
3.2.3 Chute d'une bille dans un fluide au repos . . . . .	59
3.2.4 Rebonds . . . . .	68

3.2.5	Conclusion	71
<b>4.</b>	<b>Analyse spectrale des signaux acoustiques</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction aux méthodes d'analyse spectrale	73
4.2	Théorie : méthode de maximum de vraisemblance approchée	74
4.2.1	Position du problème	74
4.2.2	Méthode de maximum de vraisemblance	75
4.2.3	Maximum de vraisemblance approché	76
4.2.4	Intégration d'une nouvelle mesure	77
4.2.5	Récapitulatif	78
4.3	Extension à l'estimation de la directivité	79
4.4	Pratique	79
4.4.1	Mise en œuvre	79
4.4.2	Rappels des différents paramètres	81
4.4.3	Signaux synthétiques	81
4.4.4	Signal expérimental	86
<b>5.</b>	<b>Description des mesures</b>	<b>89</b>
5.1	Configuration expérimentale	89
5.1.1	Présentation de l'écoulement	89
5.1.2	Mesure de $\epsilon$	89
5.2	La mesure lagrangienne	90
5.2.1	Configuration expérimentale	90
5.2.2	Valeurs des paramètres de l'algorithme	93
5.3	Cohérence de l'estimation de vitesse	95
5.3.1	La mesure de la position	95
5.3.2	La position	96
5.3.3	Cohérence de la mesure de vitesse	97
<b>6.</b>	<b>La vitesse lagrangienne</b>	<b>101</b>
6.1	Les signaux lagrangiens	101
6.1.1	Les segments	101
6.1.2	Comment faire des moyennes ?	102
6.1.3	PDF de vitesse	105
6.2	Fonction d'autocorrélation de la vitesse lagrangienne	107
6.2.1	Les estimateurs de la fonction d'autocorrélation	107
6.2.2	Autocorrélation d'une composante de vitesse	109
6.2.3	Corrélation des composantes de vitesse	113
6.3	Spectre de puissance lagrangien	115
6.3.1	Les estimateurs du spectre de puissance	115
6.3.2	Résultat et discussion	116
6.4	Discussion sur la fonction de structure d'ordre 2	119
<b>7.</b>	<b>Accélération de la bille</b>	<b>123</b>
7.1	PDF de l'accélération de la particule	123
7.2	La corrélation de l'accélération	126
7.2.1	Auto-corrélation de l'accélération	126

---

7.2.2	La fin du régime inertiel . . . . .	126
7.2.3	La corrélation des composantes d'accélération . . . . .	128
<b>8.</b>	<b>L'intermittence lagrangienne . . . . .</b>	<b>135</b>
8.1	Mise en évidence de l'intermittence . . . . .	135
8.1.1	La déformation des PDFs des incréments . . . . .	135
8.1.2	Fonctions de structure . . . . .	141
8.1.3	Les cumulants . . . . .	147
8.2	De l'origine de l'intermittence lagrangienne ? . . . . .	153
8.2.1	Le modèle MRW[21] . . . . .	153
8.2.2	Les observations expérimentales . . . . .	154
8.2.3	Discussion . . . . .	158
8.3	Une équation de Langevin ? . . . . .	159
8.3.1	Un modèle stochastique . . . . .	159
8.3.2	Le terme de rappel . . . . .	159
8.3.3	Vers une modélisation tridimensionnelle du terme stochastique . . . . .	161
<b>9.</b>	<b>Considérations énergétiques . . . . .</b>	<b>163</b>
9.1	Corrélations . . . . .	164
9.1.1	Corrélations du carré de la vitesse . . . . .	164
9.1.2	Corrélations des incréments du carré de la vitesse . . . . .	164
9.2	Intermittence du carré de la vitesse . . . . .	166
9.2.1	La déformation des PDFs . . . . .	166
9.2.2	Fonctions de structure . . . . .	169
9.3	Cumulants . . . . .	171
	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>175</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>178</b>



## Table des figures

2.1	Schéma de principe de la mesure . . . . .	34
2.2	Schéma de la cuve . . . . .	36
2.3	Fonction de forme en fonction de $k_1 a$ . . . . .	39
2.4	Diagrammes de rayonnement . . . . .	41
2.5	Schéma des deux réseaux . . . . .	42
2.6	Schéma de principe de la chaîne d'acquisition . . . . .	44
2.7	Schéma d'une voie . . . . .	45
2.8	Spectre du signal de sortie de chaque voie isolée. . . . .	46
2.9	Spectre du signal de sortie du sommateur sans tourner . . . . .	47
2.10	Spectre du signal de sortie du sommateur en tournant . . . . .	48
2.11	Spectre du signal de sortie du sommateur avec les billes . . . . .	49
3.1	Spectrogrammes de la chute d'une bille de 0.8 mm . . . . .	58
3.2	Vitesse de chute d'une bille d'acier de 1 mm . . . . .	60
3.3	Coefficient de traînée . . . . .	60
3.4	Terme de mémoire extrait de la chute d'une bille d'acier de 1 mm . . . . .	62
3.5	Évolution de la vitesse pour l'expérience #1. $Re = 41$ . . . . .	63
3.6	Vitesse de chute pour les billes d'acier de 0.8, 2, 3, 4 mm . . . . .	64
3.7	Temps caractéristique de chute en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	65
3.8	Vitesses de chutes en unités adimensionnées . . . . .	66
3.9	Vitesse de chute d'une bille d'acier de 6 mm ( $Re = 7700$ ) . . . . .	67
3.10	Comparaison des chutes de billes de différentes densités . . . . .	67
3.11	Mesure des rebonds d'une bille d'acier de 6 mm . . . . .	69
3.12	Comparaison de la mesure des rebonds avec les simulations . . . . .	70
3.13	Accélération de la bille pendant le premier rebond . . . . .	71
4.1	Signal synthétique à fréquence constante SNR=0 dB . . . . .	82
4.2	Spectre du signal de fréquence de la figure précédente . . . . .	82
4.3	Signal synthétique à modulation en $1/f^2$ , SNR=80 dB . . . . .	83
4.4	Spectre du signal de fréquence de la figure précédente . . . . .	83
4.5	Signal synthétique à modulation en $1/f^2$ , SNR=0 dB . . . . .	85
4.6	Spectre du signal de fréquence de la figure précédente . . . . .	85
4.7	Partie réelle d'un signal acoustique expérimental . . . . .	86
4.8	Spectrogramme du signal expérimental comparé à la sortie de l'algorithme . . . . .	87
4.9	Sorties de l'algorithme MVA appliqué au signal précédent. . . . .	87
5.1	Coupe schématique de la cuve ; position des axes . . . . .	91
5.2	Schéma de la zone de mesure de la mesure de vitesse 1D . . . . .	92
5.3	Schéma de la zone de mesure 2D . . . . .	93

5.4	Mesure 3D : les composantes de la position . . . . .	97
5.5	Trajectoire correspondant à la figure précédente. . . . .	98
5.6	Détail de la trajectoire . . . . .	98
5.7	Comparaison des composantes de vitesse obtenues par dérivation de la position et par effet Doppler . . . . .	99
5.8	Comparaison de la position obtenue par intégration de $V_1$ et $V_2$ à celle obtenues par triangulation . . . . .	100
6.1	Histogramme des tailles des segments 1D . . . . .	102
6.2	Histogramme des tailles des segments 2D . . . . .	103
6.3	Variation de la vitesse quadratique en fonction de la longueur des segments 1D . . . . .	104
6.4	Variation de la vitesse quadratique des différentes composantes mesurées . . . . .	104
6.5	PDF de la vitesse 1D . . . . .	105
6.6	PDF de la vitesse 2D . . . . .	106
6.7	Autocorrélation de la vitesse ; estimateur non-biaisé . . . . .	109
6.8	Évolution du nombre $N(\tau)$ de segments utilisés pour le calcul de $R^L(\tau)$ pour l'expérience man290501. . . . .	110
6.9	Fonction de structure d'ordre 2 . . . . .	111
6.10	Autocorrélation de la vitesse ; estimation par la fonction de structure . . . . .	111
6.11	Détail de l'autocorrélation aux temps courts . . . . .	112
6.12	Corrélations des composantes de vitesse . . . . .	113
6.13	PDF bidimensionnelle des composantes de vitesse . . . . .	114
6.14	Corrélations des valeurs absolues des composantes de vitesse . . . . .	114
6.15	Spectre lagrangien estimé par FFT . . . . .	116
6.16	Spectre lagrangien estimé à partir de l'autocovariance . . . . .	118
6.17	Spectre lagrangien reconstitué . . . . .	119
6.18	Spectre lagrangien pour différentes tailles de bille . . . . .	120
6.19	$D_2^L/\epsilon\tau$ ; estimations de $C_0$ . . . . .	121
7.1	PDF d'accélération de la bille . . . . .	124
7.2	Exemples d'événements de forte accélération . . . . .	125
7.3	Autocorrélation de l'accélération . . . . .	127
7.4	Autocorrélation de la valeur absolue de l'accélération . . . . .	128
7.5	PDFs des composantes d'accélération 2D . . . . .	129
7.6	Corrélation des composantes d'accélération . . . . .	130
7.7	PDF bidimensionnel des deux composantes de l'accélération. . . . .	131
7.8	Exemple de signal des valeurs absolues des composantes d'accélération . . . . .	132
7.9	Corrélations des modules des composantes d'accélération . . . . .	132
7.10	Spectres d'accélération . . . . .	133
7.11	Cohérence des composantes d'accélération et de leur module . . . . .	133
8.1	PDFs des incréments de vitesse . . . . .	136
8.2	PDFs des incréments de vitesse normalisés . . . . .	137
8.3	Évolution avec l'échelle de la moyenne des incréments . . . . .	138
8.4	Évolution avec l'échelle de la variance des incréments . . . . .	139
8.5	Évolution avec l'échelle de la skewness des incréments . . . . .	140
8.6	Évolution avec l'échelle de la flatness des incréments . . . . .	141
8.7	Les fonctions de structure . . . . .	142

---

8.8	Les fonctions de structure en fonction de celle d'ordre 2 . . . . .	143
8.9	Les exposants de structure . . . . .	144
8.10	Les cumulants du log. . . . .	148
8.11	Les cumulants tracés en fonction de $\ln D_2^L$ . . . . .	150
8.12	C2 en fonction de C1 . . . . .	151
8.13	Évolution des cumulants avec le nombre de Reynolds . . . . .	152
8.14	Autocovariance du log. des incréments . . . . .	155
8.15	Paramètres de la décroissance de la covariance du log. des incréments . . . . .	155
8.16	Autocovariance du log. des incréments dans deux expériences . . . . .	156
8.17	Forme de la décroissance de la covariance du log. des incréments . . . . .	157
8.18	Comparaison des prédictions MRW avec la mesure des cumulants . . . . .	158
8.19	Le terme de frottement d'une équation de Langevin . . . . .	160
8.20	Corrélations des valeurs absolues des composantes des incréments . . . . .	161
9.1	Corrélations du carré de la vitesse . . . . .	164
9.2	Corrélations des incréments du carré de la vitesse . . . . .	165
9.3	Corrélations des valeurs absolues des incréments du carré de la vitesse . . . . .	165
9.4	Exemple de signal d'incréments de $v^2$ . . . . .	166
9.5	PDFs des incréments du carré de la vitesse . . . . .	167
9.6	PDFs des incréments du carré de vitesse normalisés . . . . .	167
9.7	Skewness des incréments du carré de la vitesse . . . . .	168
9.8	Asymétrie de la PDF des incréments du carré de la vitesse . . . . .	168
9.9	Fonctions de structure du carré de la vitesse . . . . .	170
9.10	Les cumulants du log. pour le carré de la vitesse . . . . .	172
9.11	C2 en fonction de C1 pour le carré de la vitesse . . . . .	173
9.12	C3 en fonction de C1 pour le carré de la vitesse . . . . .	173



## Liste des tableaux

2.1	Ordres de grandeurs des différentes échelles de l'écoulement . . . . .	37
2.2	Valeurs de $k_1 a$ pour les paramètres de nos expériences. . . . .	39
3.1	Caractéristiques des sphères solides et des différentes expériences . . . . .	57
5.1	Valeurs des divers paramètres de l'algorithme de démodulation . . . . .	94
6.1	Caractéristiques des différentes expériences . . . . .	107
6.2	Évolution de $C_0$ avec le nombre de Reynolds . . . . .	121
8.1	Valeurs des exposants $\xi_p$ pour les différentes expériences . . . . .	145
8.2	Valeurs des exposants $\zeta_p^L$ pour le modèle log-normal . . . . .	147
9.1	Valeurs des exposants $\xi_p$ pour les différentes expériences . . . . .	169



# Introduction

Dans les premiers cours de mécanique des fluides, on introduit l'équation d'Euler par le raisonnement suivant : on considère une particule de fluide et on écrit la loi de Newton

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \sum \mathbf{Forces} \quad (0.1)$$

Ceci est une approche de nature lagrangienne, c'est-à-dire concernant les particules de fluide. La définition d'une telle particule est délicate car elle se situe dans une gamme d'échelle mésoscopique. On appelle particule de fluide un volume de taille grande par rapport aux échelles microscopiques de façon à demeurer dans le formalisme des milieux continus. Néanmoins sa taille doit être faible devant la plus petite échelle de l'écoulement s'assurant ainsi d'un comportement homogène de tout le volume de la particule au cours de son mouvement. Ensuite on nous apprend que la force due à la pression qui s'applique sur la particule peut s'écrire sous la forme d'un densité volumique de force  $\nabla p$ . A partir de ce stade on a commencé à dévier de l'approche lagrangienne car on a exprimé le champ de pression en fonction des coordonnées spatiales et temporelles et non plus en fonction des particules de fluide. En particulier le gradient est pris fonction de l'espace. L'étape suivante consiste alors à ajouter les efforts visqueux pour aboutir à l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} , \quad (0.2)$$

qui est une expression de nature eulérienne où la vitesse et la pression sont exprimées comme des champs fonction de l'espace et du temps. De nombreux travaux de mécanique des fluides et en particulier l'étude de la turbulence se sont longtemps placés dans ce contexte eulérien.

Cependant un certain nombre de problèmes se formulent de façon naturelle dans un formalisme lagrangien. Il s'agit par exemple de la dispersion de polluants. Une usine émet un polluant en un point et un temps donnés. Il est dispersé par la turbulence atmosphérique et on souhaite savoir où il se situera à un instant ultérieur. Ceci est une formulation de nature lagrangienne : les coordonnées naturelles sont la position initiale de la particule et le temps. Il en est de même pour le problème du mélange de deux produits. On considère dans ce cas plutôt la position relative de deux particules initialement proches l'une de l'autre. Quelle va être leur position relative à un instant ultérieur ? Quelle va être l'efficacité du mélangeur ? Il en est de même dans les problèmes de combustion ou de réactions chimiques. Les différents constituants doivent être en contact l'un de l'autre pour pouvoir réagir. Est-ce que l'écoulement considéré permet une réaction optimale ? Toutes ces questions se formulent naturellement en terme de particules de fluide.

Des études récentes concernant l'étude de la dispersion du scalaire passif [24] se placent donc dans ce contexte lagrangien et mettent en évidence l'existence d'exposants anormaux pour le champ scalaire tout en prenant en compte un écoulement simplifié (gaussien et  $\delta$ -corrélé en

temps). En ce qui concerne le champ de vitesse, il n'existe que peu de résultats analytiques. On trouve un certain nombre de prédictions basées sur des raisonnements dimensionnels de type théorie de Kolmogorov 41. Les mesures de vitesse dans des écoulements turbulents à haut nombre de Reynolds sont très peu nombreuses. On observe donc un manque sérieux de bases de comparaisons pour les simulations numériques de l'équation de Navier-Stokes ainsi que pour les nombreux modèles stochastiques de dispersion.

Pour apporter notre pierre à l'édifice, nous avons donc mis au point un outil de mesure de vitesse lagrangienne. On injecte de petites particules solides pour individualiser les particules de fluide. Le principe de la mesure est l'effet Doppler sur des ondes ultrasonores. Les particules solides, neutres du point de vue de la gravité, sont échogènes et diffusent donc les ondes acoustiques avec un décalage fréquentiel proportionnel à leur vitesse. Il suffit donc d'extraire la modulation de fréquence du signal acoustique diffusé par une particule pour obtenir sa vitesse. On obtient alors une composante de la vitesse. Si on enregistre par deux récepteurs placés à deux endroits distincts on peut extraire deux composantes de la vitesse de la particule.

Cet ouvrage est séparé en neuf chapitres. On effectue dans le premier une brève revue de l'état de l'art sur l'étude de la vitesse lagrangienne tant du point de vue théorique qu'expérimental et numérique. On rappelle brièvement les modèles stochastiques de dispersion par la turbulence. Le dispositif expérimental est introduit dans le chapitre suivant tant dans son principe que dans sa réalisation pratique. On décrit en particulier le principe de l'effet Doppler et de la diffusion du son par une sphère ainsi que le choix et le dimensionnement des transducteurs puis la réalisation du système électronique de mise en forme des signaux avant l'acquisition numérique. Le troisième chapitre est dévolu à l'étude des forces hydrodynamiques agissant sur une sphère solide plongée dans un fluide. Du fait des conditions aux limites à sa surface, une sphère solide ne se comporte pas comme une particule de fluide et crée un sillage susceptible de réagir sur son mouvement. Cet aspect est étudié par le biais d'expériences simples de chute de billes sous l'action de la pesanteur. Le chapitre suivant est consacré à la description de l'algorithme de traitement numérique du signal nécessaire à l'extraction de la modulation de fréquence induite par le mouvement de la bille dans le faisceau d'ultrasons. Le chapitre 5 décrit les conditions expérimentales des différentes mesures effectuées. On donne les valeurs des divers paramètres de l'expérience. On présente une mesure de position de la particule obtenue par triangulation à partir des estimations de la direction d'arrivée du son diffusé par la bille. On la compare alors aux mesures de vitesse obtenue par analyse du décalage Doppler. Cela permet de valider la qualité de la mesure. Les quatre derniers chapitres sont consacrés à l'étude statistique des signaux lagrangiens. On présente tout d'abord les estimations des fonctions de corrélation des composantes de la vitesse ainsi que le spectre de vitesse lagrangien. Le chapitre 7 est dévolu à l'étude de l'accélération de la bille. Le huitième se focalise sur l'intermittence lagrangienne qui jusqu'à présent n'a fait l'objet d'aucune étude expérimentale. Finalement le dernier chapitre pose la question de l'échange d'énergie entre la particule et le reste du fluide.

# Chapitre 1

## État de l'art en lagrangien

L'approche lagrangienne de la turbulence en terme de particule de fluide, si elle peut apparaître plus intuitive dans certains problèmes tels le mélange du scalaire passif, n'est pas réellement plus simple à aborder du point de vue théorique que l'approche eulérienne. En réalité, on trouve encore moins de résultats analytiques, même dans l'hypothèse de la turbulence homogène et isotrope. Par contre, la littérature est riche d'un grand nombre de modèles décrivant la dispersion de particules. En effet, ce problème concerne de nombreux domaines allant de questions liées à la combustion, au mélange ou à l'étude de la dispersion de polluant dans l'atmosphère. On peut voir des démarches d'ordre technologique ou d'autres entièrement fondamentales. Ainsi chaque auteur met dans son modèle les ingrédients qui le concernent le plus, créant ainsi une vaste palette de modèles *ad hoc*. Cependant, le nombre de mesures expérimentales est plus que restreint, quelques expériences de laboratoire ou bien des suivis de ballons atmosphériques ou de flotteurs océaniques. Le développement dans les deux dernières décennies de l'outil informatique permet de simuler quelques écoulements, en général à nombre de Reynolds plutôt faible. Parallèlement, on simule également des modèles d'évolution de particules lagrangiennes, mais on manque de données de comparaison. S'il existe quelques données en ce qui concerne la dispersion, c'est-à-dire la position des particules, les données concernant spécifiquement la vitesse lagrangienne sont extrêmement rares.

### 1.1 Théorie

#### 1.1.1 Les variables lagrangiennes

Dans une approche lagrangienne, on considère individuellement les particules de fluide. Les variables naturelles sont donc le temps  $t$  et les positions initiales  $\alpha$  (à  $t = 0$  disons) de toutes les particules à l'intérieur du volume occupé par l'écoulement. La position à l'instant  $t$  d'une particule initialement en  $\alpha$  est donc

$$\mathbf{X}(\alpha, t). \quad (1.1)$$

Par définition, la vitesse lagrangienne d'une particule est

$$\mathbf{v}(\alpha, t) = \frac{\partial \mathbf{X}(\alpha, t)}{\partial t}. \quad (1.2)$$

La vitesse eulérienne au point  $r$  à l'instant  $t$  est la vitesse de la particule de fluide qui se trouve à cet endroit au même moment. On peut donc relier le champ eulérien  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  fonction de la position  $\mathbf{r}$  et du temps  $t$  au champ lagrangien par

$$\mathbf{v}(\alpha, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\alpha, t), t). \quad (1.3)$$

On voit le rôle important que jouent les trajectoires  $\mathbf{X}(\alpha, t)$  dans le changement de variables eulérien/lagrangien. Il faut exprimer l'équation de Navier-Stokes dans le système de variables lagrangiennes. Dans les coordonnées eulériennes, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1.4)$$

où  $p$  est le champ de pression,  $\rho$  la densité du fluide et  $\nu$  la viscosité cinématique. On suppose par ailleurs l'écoulement incompressible. Il faut donc prendre en compte l'équation d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.5)$$

Le passage aux coordonnées lagrangiennes est simple pour le membre de gauche de l'équation de Navier-Stokes car il s'agit simplement de l'accélération d'une particule de fluide

$$\mathbf{a}(\alpha, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2}(\alpha, t). \quad (1.6)$$

L'impression de simplification s'arrête ici car dans le membre de droite, il faut remplacer les termes de gradient fonction de l'espace en gradient fonction de la position initiale  $\alpha$ . Cela nécessite l'introduction du jacobien du changement de variable  $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\alpha, t)$ . La non-linéarité qui a disparu du membre de gauche réapparaît bien sûr dans l'utilisation du jacobien. En reprenant les notations du Monin & Yaglom [56] on note

$$\frac{\partial(A, B, C)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = [A, B, C]. \quad (1.7)$$

On notera en particulier

$$\mathbf{M} = \left( \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_j} \right)_{(i,j)} \quad \text{et } |\mathbf{M}| = [X_1, X_2, X_3]. \quad (1.8)$$

$|\mathbf{M}|$  est donc le jacobien du changement de variables eulérien/lagrangien. Pour écrire l'équation de Navier-Stokes dans le nouveau système de variables, il faut exprimer les gradients par rapport aux positions  $\mathbf{X}$  en fonction des positions initiales  $\alpha$ . Pour toute fonction  $f$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{1}{|\mathbf{M}|} [X_j, X_k, f], \quad (1.9)$$

où  $(i, j, k)$  est une permutation paire de  $(1, 2, 3)$ .

Comme  $\mathbf{X}(\alpha, 0) = \alpha$ , la valeur initiale de  $|\mathbf{M}|$  vaut 1. On peut montrer que la condition de divergence nulle (1.5) s'écrit en coordonnées lagrangiennes [56] :

$$\frac{\partial |\mathbf{M}|}{\partial t} = 0. \quad (1.10)$$

On peut intégrer simplement cette équation :

$$|\mathbf{M}(\alpha, t)| = 1 \quad \forall (\alpha, t). \quad (1.11)$$

L'équation de Navier-Stokes peut donc se réécrire dans le jeu de variables lagrangiennes :

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2}(\alpha, t) = -\frac{1}{\rho}[X_j, X_k, p] + \mathbf{v} \left\{ \left[ X_2, X_3, \left[ X_2, X_3, \frac{\partial X_i}{\partial t} \right] \right] + \left[ X_3, X_1, \left[ X_3, X_1, \frac{\partial X_i}{\partial t} \right] \right] + \left[ X_1, X_2, \left[ X_1, X_2, \frac{\partial X_i}{\partial t} \right] \right] \right\}. \quad (1.12)$$

Les non-linéarités sont contenues cette fois dans le terme de forces. En particulier, la force visqueuse qui était linéaire dans le système eulérien, présente ici des non-linéarités d'ordre 5 en  $X_i$ . On conçoit dès lors qu'il soit délicat d'affronter directement cette équation.

### 1.1.2 La turbulence homogène

Malgré la complexité d'utilisation des coordonnées lagrangiennes, l'ajout de l'hypothèse d'homogénéité permet de dériver quelques résultats. Soit une fonction  $\phi$  du champ de vitesse. On considère un volume  $\mathcal{V}$  de l'espace contenant un certain nombre de particules de fluide à l'instant  $t = 0$  et  $\mathcal{V}_t$  le volume de l'espace occupé à l'instant  $t$  par les particules qui étaient dans  $\mathcal{V}$  initialement. Alors on a

$$\int_{\mathcal{V}} \phi(\mathbf{v}(\alpha, t)) d\alpha = \int_{\mathcal{V}_t} \phi(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) d\mathbf{r} \quad (1.13)$$

par définition des variables lagrangiennes. Comme l'écoulement est non borné dans le cas homogène, on peut prendre un volume assez grand pour que le volume de  $\mathcal{V}$  et de  $\mathcal{V}_t$  ne diffèrent que d'une fraction infinitésimale. Dès lors on peut moyennner (sur les réalisations) chacun des intégrandes et après division par le volume on obtient :

$$\langle \phi(\mathbf{v}(\alpha, t)) \rangle = \langle \phi(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \rangle. \quad (1.14)$$

La moyenne de  $\phi$  est identique dans les deux systèmes de coordonnées et ne dépend pas des variables d'espace. Si on prend pour  $\phi(\mathbf{v})$  la fonction exponentielle  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}$ , on obtient la fonction caractéristique. Par conséquent la fonction densité de probabilité (PDF) de la vitesse est identique dans le contexte eulérien et dans le lagrangien. Comme la PDF eulérienne est gaussienne, on s'attend à ce qu'il en soit de même pour la PDF lagrangienne. De plus, tous les moments de la vitesse seront égaux et donc en particulier la variance de la vitesse. Cela ne concerne que les statistiques à un point et un temps et donc les fonctions d'autocorrélation ne seront pas égales *a priori* et les temps caractéristiques eulériens et lagrangiens non plus. Le résultat n'est pas vérifié si on lève l'hypothèse d'homogénéité. Par exemple dans le cas d'une couche limite, on observe que la vitesse verticale (perpendiculaire à la paroi) est en moyenne nulle pour la vitesse eulérienne et positive pour la vitesse lagrangienne [56].

Un certain nombre de résultats ont été obtenus dans l'étude de la dispersion de particules dans un écoulement turbulent à la suite des travaux pionniers de Taylor [84]. Appelons  $\mathbf{Y}$  le vecteur déplacement d'une particule, c'est à dire :

$$\mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{X}(\alpha, \tau) - \alpha = \int_0^\tau \mathbf{v}(\alpha, t) dt \quad (1.15)$$

Soit  $D_{ij}$  la covariance des composantes  $i$  et  $j$  de  $\mathbf{Y}^l(\tau) = \mathbf{Y}(\tau) - \langle \mathbf{Y}(\tau) \rangle$ . Alors Taylor a montré que l'on peut relier la covariance du déplacement des particules à celle de la vitesse lagrangienne :

$$D_{ij}(\tau) = \sqrt{\langle v_i'^2 \rangle \langle v_j'^2 \rangle} \int_0^\tau (\tau - s) [R_{ij}^L(s) + R_{ji}^L(s)] ds, \quad (1.16)$$

avec  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle$  et

$$R_{ij}^L(\tau) = \frac{\langle v'_i(\alpha, t) v'_j(\alpha, t + \tau) \rangle}{\left( \langle v_i'^2 \rangle \langle v_j'^2 \rangle \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.17)$$

dans l'hypothèse où la turbulence est stationnaire. Aux temps courts on a

$$D_{ij}(\tau) \sim \langle v'_i v'_j \rangle \tau^2 \quad (1.18)$$

et aux temps longs

$$R_{ij}^L(\tau) \sim \left( \langle v_i'^2 \rangle \langle v_j'^2 \rangle \right)^{\frac{1}{2}} T_{ij} \tau \quad (1.19)$$

avec

$$T_{ij} = \int_0^\infty (R_{ij}^L(s) + R_{ji}^L(s)) ds. \quad (1.20)$$

$T_{ij}$  est le temps de décorrélation lagrangien. Aux temps courts, les fluctuations du déplacement croissent en  $\tau^2$  puis pour des temps supérieurs au temps de décorrélation de la vitesse, on obtient le comportement du mouvement brownien, une diffusion en  $\tau$ . On peut donc obtenir la fonction d'autocorrélation de la vitesse lagrangienne en observant la loi de dispersion des particules. Cette méthode est celle utilisée dans les premières expériences de recherche des caractéristiques lagrangiennes des écoulements (voir § 1.2.1). L'autocorrélation de la vitesse est donc :

$$\langle v_i'^2 \rangle R_{ii}^L(\tau) = \frac{1}{2} \frac{d^2 D_{ii}}{d\tau^2}. \quad (1.21)$$

On notera cependant que l'hypothèse d'homogénéité de l'écoulement est extrêmement restrictive et ne s'applique rigoureusement en réalité à aucun écoulement. En effet, elle impose en particulier que l'écoulement ne soit pas borné, ce qui est assez délicat à réaliser en laboratoire.

### 1.1.3 Les prédictions de la théorie Kolmogorov 41

Les hypothèses strictes d'homogénéité et d'isotropie ne sont bien sûr que des abstractions mathématiques. Dans le monde réel, il faut mettre le fluide en mouvement et l'écoulement est borné. L'entraînement du fluide se fait par exemple par des parois en mouvement. L'existence de parois fixes et mobiles brisent ces hypothèses. Néanmoins on peut introduire une notion de turbulence localement isotrope (voir Monin et Yaglom par exemple [56]). Cela impose de se restreindre à une région d'espace-temps de taille spatiale faible par rapport à l'échelle intégrale de l'écoulement  $L$  et de taille temporelle faible devant  $T_0$  échelle de temps caractéristique de la non-stationnarité à grande échelle de l'écoulement. Dans une telle zone, on suppose que les caractéristiques statistiques de la turbulence sont stationnaires, homogènes et isotropes.

Dans un écoulement localement isotrope, Kolmogorov a énoncé en 1941 deux hypothèses de similarité :

- i. Si le nombre de Reynolds est suffisamment élevé alors les caractéristiques statistiques des vitesses relatives dépendent uniquement de  $\langle \varepsilon \rangle$ , taux moyen de dissipation d'énergie, et de  $\nu$ , viscosité cinématique. Cela fixe les petites échelles de longueur  $\eta$ , vitesse  $v_\eta$  et temps  $\tau_\eta$  à

$$\eta = (\nu^3 / \langle \varepsilon \rangle)^{\frac{1}{4}}, \quad v_\eta = (\nu \langle \varepsilon \rangle)^{\frac{1}{4}}, \quad \tau_\eta = (\nu / \langle \varepsilon \rangle)^{\frac{1}{2}} \quad (1.22)$$

- ii. Si le nombre de Reynolds est tel qu'il existe une région vérifiant l'hypothèse i, alors pour des tailles spatiales  $\mathbf{r}_i$  et temporelles  $t_i$  vérifiant à la fois

$$L \leq |\mathbf{r}_i| \leq \eta \quad \text{et} \quad T_0 \leq |t_i| \leq \tau_\eta, \quad (1.23)$$

les fonctions statistiques des vitesses relatives ne dépendent que de  $\langle \varepsilon \rangle$  et sont indépendantes de  $v$ . Dans ces conditions, comme on ne peut construire d'échelles de longueur, vitesse et temps à partir de  $\langle \varepsilon \rangle$ , ces fonctions des variables d'espace  $l$  et de temps  $\tau$  doivent être autosimilaires dans ce régime dit inertiel.

On appelle fonction de structure longitudinale eulérienne d'ordre  $p$  la fonction

$$S_p(l) = \langle \Delta_l u^p \rangle \quad (1.24)$$

avec

$$\Delta_l u = (\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})) \cdot \frac{\mathbf{l}}{l}. \quad (1.25)$$

La seconde hypothèse (ii) impose dans le régime inertiel que les fonctions de structure eulériennes soient des lois des puissance de  $l$  :

$$S_p(l) = C_p^L \langle \varepsilon \rangle l^{\frac{p}{3}}, \quad (1.26)$$

où les  $C_p$  sont des constantes universelles. En particulier pour  $p = 3$  on devrait observer

$$S_3(l) = C_3^L \langle \varepsilon \rangle l, \quad (1.27)$$

Or un des résultats analytiques majeur issu de l'équation de Navier-Stokes est l'équation de Kármán-Howarth-Monin :

$$S_3(l) = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle l + 6\nu \frac{dS_2(l)}{dl}, \quad (1.28)$$

Ce résultat exact justifie en partie l'hypothèse de Kolmogorov pour le champ de vitesse eulérien. Dans la limite  $Re \rightarrow \infty$  (dans la limite  $\nu \rightarrow 0$  et  $\langle \varepsilon \rangle$  constant), on s'attend à obtenir

$$\langle (\Delta_l u)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon \rangle l, \quad (1.29)$$

et donc  $C_3^L = -4/5$ .

De la même façon, la seconde hypothèse de Kolmogorov prédit les comportement des incréments de vitesse lagrangienne

$$\Delta_\tau \mathbf{v} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}, t + \tau) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}, t), \quad (1.30)$$

sous la forme

$$D_p(\tau) = \langle (\Delta_\tau v_i)^p \rangle = C_p^L \langle \varepsilon \rangle \tau^{\frac{p}{2}} \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (1.31)$$

L'hypothèse d'isotropie locale implique que la statistique de l'incrément de vitesse  $\Delta_\tau \mathbf{v}$  soit isotrope et donc que tous les moments impairs sont nuls. Cela signifie que la fonction densité de probabilité des incréments est symétrique par changement  $\Delta v \rightarrow -\Delta v$ . Il s'agit d'une différence

significative avec l'approche eulérienne dans laquelle les densités de probabilité des incréments spatiaux sont non-symétriques à cause de la relation de Kármán-Howarth-Monin. Cela implique donc que les fonctions de structure d'ordre impair soient nulles. En particulier pour  $p = 2$  on peut écrire

$$\langle \Delta_\tau v_i \Delta_\tau v_j \rangle = D_2^L(\tau) \delta_{ij} = C_2^L \langle \varepsilon \rangle \tau. \quad (1.32)$$

On voit que pour cette fonction de structure d'ordre 2, à la fois  $\langle \varepsilon \rangle$  et l'échelle  $\tau$  interviennent avec un exposant unité de même que pour la fonction de structure eulérienne d'ordre 3. On attachera donc une attention particulière à cette fonction de structure lagrangienne  $D_2^L$  qui aura dans le contexte eulérien un rôle équivalent à la fonction  $S_3^E$  dans le contexte eulérien. Par contre, à notre connaissance, il n'existe pas d'équivalent à la relation de Kármán-Howarth-Monin concernant la variable lagrangienne.

De la même façon que les hypothèses de Kolmogorov prédisent un spectre de puissance de la vitesse eulérienne ayant, dans le régime inertiel, la variation suivante (d'après 1.29) :

$$E^E(k) = C \langle \varepsilon \rangle^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (1.33)$$

on prédit d'après 1.32 un spectre lagrangien ayant l'allure

$$E^L(\omega) = B_0 \langle \varepsilon \rangle \omega^{-2}. \quad (1.34)$$

Si on suppose que  $u_i(t)$  est différentiable alors  $D^{(2)}(\tau) \propto \tau^2$  quand  $\tau$  tend vers 0 donc la variance de l'accélération s'écrit

$$\langle a_i a_j \rangle = a_0 \langle \varepsilon \rangle^{3/2} \nu^{-1/2} \delta_{ij}, \quad (1.35)$$

où  $a_0$  est une constante universelle. La théorie de Kolmogorov 41 suppose que  $\varepsilon$  reste fini quand on fait tendre  $\nu$  vers 0. L'équation ci-dessus implique donc que la variance de l'accélération devienne infinie lorsque l'on diminue la viscosité. Cela est compatible avec la forme du spectre de vitesse proposé. Elle implique que le spectre de l'accélération soit constant, indépendant de la fréquence dans le régime inertiel. Comme celui-ci est limité par  $\tau_\eta$ , lorsque l'on fait tendre celui-ci vers 0, l'intégrale du spectre d'accélération (qui est la variance d'accélération) devient effectivement infinie. De plus si le temps caractéristique de la grande échelle reste inchangé alors on voit que l'expression de la variance se réécrit

$$\langle a_i a_j \rangle = a_0 \langle \varepsilon \rangle / \tau_\eta, \quad (1.36)$$

qui varie effectivement linéairement en  $1/\tau_\eta$ .

## 1.2 Expériences

### 1.2.1 Les premières mesures indirectes

La difficulté principale pour effectuer des mesures lagrangiennes réside dans le fait qu'il faut marquer d'une manière ou d'une autre des particules de fluide et pouvoir les suivre individuellement. Avant le développement de l'informatique et, en particulier, de l'acquisition numérique d'image, il était plutôt difficile de mettre en œuvre une mesure lagrangienne en laboratoire. C'est pourquoi on a cherché tout d'abord une manière indirecte d'obtenir une information de

nature lagrangienne. Le principe est basé sur les travaux de Taylor dans les années 1920-30 liant la fonction d'autocorrélation de la vitesse lagrangienne à la dispersion de particules qui aboutit dans le cas de la turbulence homogène et isotrope à la formule 1.21. La mesure de la dispersion de particule étant également délicate, les expériences concernent surtout une mesure de la dispersion de la chaleur. Le dispositif classique de ces expériences (voir entre autres Taylor 1935 [85], Uberoi & Corrsin 1953, [89], Townsend 1954 [87], Mickelsen 1955 [53], Shlien & Corrsin 1974 [78] et Karnik & Tavoularis 1990 [39]) consiste à placer un fil métallique chauffé dans une soufflerie créant de la turbulence de grille. On mesure alors les profils de température en aval du fil. Il faut alors effectuer des corrections pour prendre en compte la décroissance de la turbulence et l'influence de la diffusion de la chaleur. On peut alors relier la corrélation de la vitesse à la dispersion de la chaleur. Plus précisément, les profils de température en aval de la source sont gaussiens et l'évolution de la largeur de ces gaussiennes le long de l'écoulement peut être reliée à l'autocorrélation de la vitesse lagrangienne dans le même esprit que l'équation 1.21. L'expérience la plus récente concernant la turbulence homogène et isotrope est rapportée par Shlien & Corrsin [78]. Ils obtiennent par cette méthode l'autocorrélation de la vitesse. Ils observent que le temps caractéristique de la vitesse lagrangienne est plus grand que celui de la vitesse eulérienne de même que le temps à petite échelle. La corrélation de la vitesse lagrangienne est systématiquement plus élevée que celle de la vitesse eulérienne. Le nombre de Reynolds est relativement faible de l'ordre de 70. Cependant à cause du faible nombre de Reynolds et du nombre d'hypothèses effectuées, on ne peut guère tirer de conclusions définitives de ces expériences. Les mesures directes de la vitesse de particules dans un écoulement vont permettre d'obtenir directement les grandeurs statistiques caractérisant la vitesse lagrangienne.

### 1.2.2 Les mesures lagrangiennes directes

Le principe des mesures directes consiste à placer dans le fluide un certain nombre de particules solides et à enregistrer leur mouvement. Le point commun à toutes ces expériences est l'utilisation de méthodes optiques. Un dispositif photographique ou un ensemble de caméras enregistrent les trajectoires des particules et on extrait les informations sur la vitesse par dérivation des trajectoires. Cette étape est toujours délicate lorsqu'il s'agit de signaux expérimentaux et doit être effectuée avec grand soin. La question qui se pose est la suivante : les particules solides se comportent-elles comme des particules de fluide ? La réponse est certainement négative pour des particules grosses et de densité différente de celle du fluide. Néanmoins même dans le cas de particules de densité identique à celle du fluide, le fait d'introduire une interface solide/fluide perturbe l'écoulement et cause l'apparition d'un certain nombre de forces d'origine hydrodynamique. Cet aspect est discuté dans le chapitre 3. Il est généralement admis que des particules petites devant la longueur de Kolmogorov  $\eta$  et de même densité que le fluide se comportent comme des traceurs parfaits. Il convient de noter qu'à haut nombre de Reynolds, cette taille est très faible (de l'ordre de 20  $\mu\text{m}$  dans nos expériences) et qu'il peut être délicat de détecter de si petites particules.

Les expériences existantes sont les suivantes :

- Sullivan 1971 [83] : L'auteur étudie l'écoulement d'eau dans un canal. Il effectue une mesure de dispersion de particules au moyen de photographies prises toutes les 0.07 s. L'appareil se déplace à la vitesse moyenne de l'écoulement pour conserver la particule plus longtemps dans la zone de mesure et réduire sa vitesse relative. 150 trajectoires sont enregistrées pour en extraire la fonction d'auto-corrélation de la vitesse. Le nombre de Reynolds basé sur la profondeur du canal est de l'ordre de 600. L'écoulement est

cisaillé et donc fortement anisotrope. On observe cette isotropie sur les coefficients d'autocorrélation dont les temps caractéristiques et les formes dépendent de la composante étudiée. Du fait de cette anisotropie et de la faible résolution de la mesure, il est délicat de tirer des conclusions générales. L'auteur étudie également la dispersion d'une ligne de colorant initialement à la surface de l'eau, dispersée à la fois par la turbulence et par le gradient de vitesse vertical.

- Snyder & Lumley 1971 [80] : Ils étudient un écoulement de grille dans l'air à  $R_\lambda \sim 80$ . Ils injectent divers types de particules (billes de verre creuses, de verre pleines, pollen de maïs et cuivre) toutes de densité nettement supérieure à celle de l'air. Les trajectoires sont enregistrées au moyen de 10 appareils photographiques disposés le long du tunnel. Les appareils sont synchronisés pour photographier la particule lorsqu'elle entre dans leur champ de vision. Les trajectoires sont donc constituées de dix positions. Ils enregistrent environ 700 trajectoires pour chaque type de particules. Ils calculent la dispersion et la fonction d'autocorrélation de la vitesse pour chacune des particules en corrigeant de façon semi-empirique la décroissance de l'intensité de la turbulence. Le nombre d'échantillons temporels est réduit du fait du faible nombre de photographies. A la précision de leurs mesures, qui ne prend en compte que les grandes échelles temporelles de l'écoulement, ils observent que la dispersion des particules les plus lourdes est plus faible. Par des effets d'inertie, la décorrélation de la vitesse est plus rapide pour les particules lourdes. A la précision de leurs mesures, ils ne voient pas de différence entre la forme de l'autocorrélation temporelle de la vitesse des particules et celle de l'autocorrélation spatiale de la vitesse eulérienne. Cependant leurs mesures sont limitées aux grandes échelles et des problèmes de sous-échantillonnage rendent une partie des résultats délicate à interpréter.
- Sato & Yamamoto 1987 [76] : On notera qu'il a fallu attendre 16 ans avant de voir paraître les résultats d'une nouvelle expérience lagrangienne. La nouveauté principale est l'utilisation de l'informatique pour le traitement de l'image. Cela permet d'avoir une plus grande quantité de données ainsi qu'une meilleure résolution temporelle. Les auteurs effectuent des mesures de dispersion de particules par une turbulence de grille dans l'eau. Le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  est compris entre 25 et 66. Les particules sont en polystyrène, de densité 1 et de diamètre  $400 \mu\text{m}$  et la longueur de Taylor vaut environ 5 mm. La mesure est effectuée dans le plan perpendiculaire à l'écoulement moyen par une caméra. Ils prennent en compte la décroissance de l'intensité de la turbulence en changeant l'échelle des temps de façon adéquate. Ils effectuent des mesures de dispersion et observent un comportement  $D_{ij}(\tau) \propto \tau^2$  aux temps courts et tendant vers  $D_{ij}(\tau) \propto \tau^2$  aux temps longs. Les mesures de coefficient d'autocorrélation montrent une forme proche d'une décroissance exponentielle dont le temps caractéristique lagrangien est plus faible que l'eulérien. Les spectres de puissance présentés ne mettent pas en évidence de régime inertiel évident (même pour les mesures eulériennes) mais semblent montrer une décroissance plus rapide que  $-5/3$  ce qui est cohérent avec une forme exponentielle. Leur étude du champ de vitesse se limite à la fonction d'autocorrélation de vitesse et au spectre, en partie à cause du faible échantillonnage temporel.
- Virant & Dracos 1997 [91] : Il s'agit d'un papier très riche vantant les mérites d'une technique de mesure appelée 3D PTV (pour 3D particle tracking velocimetry). Elle est basée sur l'enregistrement simultané par 4 caméras de la trajectoire tridimensionnelle d'un grand nombre de particules (100 à 150). Les mesures sont effectuées dans un canal rempli d'eau. Les particules sont des sphères de plastique de diamètre  $50 \mu\text{m}$  et de densité 1.02. Le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  est compris entre 50 et 250 et les longueurs de Kolmo-

gorov sont plus grandes que la taille de la particule (de l'ordre de  $500 \mu\text{m}$ ). Ils disposent pour chaque nombre de Reynolds de 1 à 6 millions de points. La méthode permet bien sûr d'obtenir des mesures de dispersion mais également de vitesse et d'accélération. Ils obtiennent des histogrammes d'accélération symétriques avec des ailes larges et dont la flatness, chose surprenante, décroît lorsque  $R_\lambda$  augmente. La norme du vecteur accélération a une distribution approximativement log-normale. Malgré une faible résolution temporelle, la décorrélation de l'accélération intervient en un temps très court de l'ordre du temps de Kolmogorov. Ils observent des fonctions d'autocorrélation de la vitesse approximativement exponentielles et une très faible corrélation entre les composantes de vitesse (sauf entre composantes verticales et dans le sens du flot dû au cisaillement). Ils ont effectué un certain nombre de mesures de dispersion. En particulier ils estiment la fonction "distance-neighbour" (introduite par Richardson [71]) qui semble proche de l'estimation fournie par le modèle de Batchelor [6]. Les auteurs ont prouvé le potentiel de leur méthode de suivi de particules. La limitation principale de leur système est la faible résolution temporelle liée à la fréquence d'échantillonnage de leurs caméras (25 Hz). On regrette que les auteurs ne se soient pas intéressés à l'étude de l'intermittence de leurs signaux de vitesse. . .

- Voth et al 1998 [92], La Porta et al. 2001 [69] : le but de leur technique expérimentale est de mesurer les caractéristiques de l'écoulement à petite échelle via l'accélération lagrangienne. L'écoulement considéré est un écoulement tourbillonnaire de Von Kármán dans l'eau. Le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  est compris entre 140 et 1000. Les particules font  $50 \mu\text{m}$  et la longueur de Kolmogorov vaut  $20 \mu\text{m}$  au nombre de Reynolds  $R_\lambda$  le plus élevé. La mesure utilise des "silicon strip detectors" issus de la physique des particules qui fournissent chacun une composante de la position avec une très bonne résolution temporelle (70000 images par seconde et une résolution temporelle de l'ordre de  $\tau_\eta/20$ ). Cela leur permet d'avoir accès à l'accélération lagrangienne par double différenciation. Ils montrent que l'accélération se décorrèle en un temps proche de  $\tau_\eta$  temps de Kolmogorov [92]. Les histogrammes de l'accélération sont symétriques avec des ailes très larges. Le coefficient de flatness croît avec le nombre de Reynolds jusqu'à des valeurs de l'ordre de 60 à  $R_\lambda = 1000$  où il semble saturer. Il semble que les histogrammes normalisés de l'accélération atteignent une forme limite à haut Reynolds. Le coefficient

$$a_0 = \frac{\langle a_i^2 \rangle}{\varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2}} \quad (1.37)$$

semble atteindre une valeur constante (de l'ordre de 5-6) à haut  $R_\lambda$  comme prévu par la théorie de Kolmogorov 1941.

Par ailleurs, il existe de nombreuses expériences d'origine géophysique ou climatique de flotteurs dans l'océan ou de ballons atmosphériques. Une bonne part est dévolue à l'étude des courants océaniques mais certaines fournissent des informations sur les caractéristiques statistiques de la turbulence. On peut citer par exemple les mesures de Hanna 1981 [33]. Il lâche des ballons de même densité effective que l'air dans la couche limite atmosphérique et mesure leur position. Il observe un spectre de puissance dont la décroissance est à tendance  $-5/3$  pour les mesures eulériennes et  $-2$  pour les ballons. On notera aussi le papier de Lien et al. [45] rapportant des mesures de suivi de flotteurs dans la couche limite turbulente dans l'océan. Ils observent un régime inertiel compatible avec un spectre en  $\omega^{-2}$  dont la coupure à haute fréquence est due à la réponse du flotteur.

Il existe également quelques rares papiers concernant la dispersion de paires. Virant &

Dracos [91] ont effectué de telles mesures à 3D qui ont tendance à confirmer l'approche de Batchelor[6] prédisant une loi de probabilité normale pour les séparations. Jullien et al. [37] ont mesuré la dispersion de paires de particules dans un écoulement bidimensionnel. La loi de probabilité de la séparation est une exponentielle étirée proche de celle proposée par Richardson [71]. Ott & Mann 2000 [63] en arrivent à la même conclusion par des mesures de dispersion dans une turbulence 3D créée par deux grilles oscillantes.

## 1.3 Simulations numériques

### 1.3.1 Les simulations totales

Les simulations numériques de dispersion de particules sont des entreprises très lourdes. Tout d'abord, elles nécessitent une simulation numérique totale (DNS) de l'écoulement. Cette étape est déjà fort coûteuse en temps de calcul. Ensuite il faut effectuer un suivi de particules dans l'écoulement. La position des particules n'étant pas sur les points de grille à priori, on doit interpoler le champ de vitesse de façon à obtenir la vitesse de la particule de fluide. Les nombres de Reynolds les plus élevés sont obtenus pour des grilles  $512^3$  et valent 230 environ [95]. On suit alors typiquement entre 10000 et 100000 particules. Ces simulations sont particulièrement riches en informations car elles donnent accès au champ de vitesse lagrangien complet bien sûr mais également à l'accélération et un certain nombre d'autres quantités telles que la dissipation, la vorticité le long des trajectoires lagrangiennes. Elles permettent également de suivre la diffusion relative de deux (ou plus) particules. Elles sont donc susceptibles de fournir une vaste palette de renseignements. Leur inconvénient principal est le nombre de Reynolds relativement faible pour lequel on n'observe pas de régime inertiel très clair. Les publications de simulations numériques lagrangiennes sont apparues principalement à la fin des années 80, début des années 90 mais sont tout de même encore relativement rares surtout lorsqu'on recherche des informations plus fines que la simple position des particules.

Un des articles pionniers et très riche a été publié par Yeung & Pope en 1989 [96]. Il s'agit d'un des papiers les plus complets sur ce que la DNS peut extraire comme informations sur la vitesse lagrangienne. Les auteurs analysent la vitesse et l'accélération, mais également les gradients, enstrophie ou dissipation le long des trajectoires. Malheureusement le nombre de Reynolds est limité à  $R_\lambda < 90$ . A un tel nombre de Reynolds, le régime inertiel est inexistant et on n'observe pas de loi d'échelle sur la densité spectrale de puissance. Ils s'intéressent tout d'abord à l'accélération. Les composantes de l'accélération se d  corr  lent en un temps de l'ordre de  $\tau_\eta$  alors que la norme se décorrèle en un temps voisin de  $T_L$ . En d'autres termes, l'information de direction de l'accélération est perdue en un temps très court tandis que l'amplitude reste corrélée pendant un temps très long. On peut donc écrire l'accélération comme

$$\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{e} \quad (1.38)$$

où  $\mathbf{e}$  est un vecteur unitaire rapidement variable contenant tout l'information de direction. Ces résultats sont détaillés dans un papier de Pope (1990) [66] et confirmés dans un papier de Yeung (1997) [94] à un nombre de Reynolds un peu plus élevé (140). La norme  $a(t)$  a une statistique proche de log-normale. Le coefficient  $a_0$  de Kolmogorov est de l'ordre de 2-3 et croît avec  $R_\lambda$  (peut-être car le nombre de Reynolds n'est pas assez élevé). En ce qui concerne la statistique de la vitesse, ils observent que la fonction d'autocorrélation décroît exponentiellement sauf aux temps courts à cause de la régularisation à petite échelle. Ils n'observent pas de scaling de la

fonction de structure d'ordre 2 dans le régime inertiel. Par contre on observe une déformation des PDFs des incréments qui sont gaussiens à grande échelle, et fortement déformés aux petites échelles (intermittence) avec des ailes larges. Ils obtiennent des flatness valant jusqu'à 18 aux plus petites échelles et croissant avec le nombre de Reynolds.

Une autre étude extrêmement riche a été publiée par Yeung (2001) [95]. Il effectue des simulations DNS de turbulence homogène isotrope forcée, jusqu'à  $R_\lambda$  de l'ordre de 230. Il a accès à nombre de variables telles la vitesse lagrangienne, la dissipation d'énergie, le scalaire, la dissipation du scalaire, la vorticité ou l'ensrophie le long des trajectoires lagrangiennes. Il étudie surtout ces dernières quantités plutôt que la vitesse. Il observe au plus haut nombre de Reynolds un spectre qui, lorsqu'il est compensé par  $\omega^2$  montre nettement un plateau. L'autocorrélation de la vitesse lagrangienne a également été étudiée par Gotoh et al. (1993) [31] en utilisant une autre méthode appelée PVM (Passive Vector Method) essentiellement pour comparer avec les statistiques eulériennes.

On peut citer également le travail de Squires & Eaton (1991) [81] qui étudient surtout la dispersion d'une particule dans une turbulence homogène ou cisailée, ainsi que l'article de Yeung (1997) sur l'accélération relative de deux particules.

Dans une approche légèrement différente, Yeung & Vedula ont effectué une analyse détaillée de l'accélération des particules de fluide et des gradients de pression. Ils se placent dans un contexte eulérien, c'est à dire à un temps fixé, et en étudiant les variations spatiales. Les nombres de Reynolds atteints dans leurs calculs varient entre 21 et 235. Ils arrivent à séparer les termes de gradients de pression et de dissipation dans l'accélération. La partie liée à la pression est dominante et son rapport avec la partie dissipative croît avec  $R_\lambda$ , peut-être en  $R_\lambda^{1/2}$ . Le coefficient  $a_0$  augmente avec  $R_\lambda$  sans montrer de saturation, passant de 0.8 à 4. En ce qui concerne les gradients de pression qui constituent la majeure part de l'accélération lagrangienne, les densités de probabilité sont très fortement non-gaussiennes, symétriques, avec une flatness croissant fortement avec  $R_\lambda$  jusqu'à une valeur de 40    $R_\lambda = 235$ . Ce comportement et ces valeurs sont tout à fait en accord avec les mesures d'accélération de La Porta et al. (2001) [69] qui mesurent des flatness tout à fait voisines.

Des travaux à la fois théoriques et numériques de Pumir et al. [70, 17] concernent les statistiques à plusieurs points et en particulier les statistiques à 4 particules c'est-à-dire l'évolution temporelle de tétraèdres. Ces quantités nous sont malheureusement totalement inaccessibles.

### 1.3.2 Les modèles stochastiques

Dans l'étude de la dispersion, des écoulements réactifs ou de la combustion, l'approche naturelle est lagrangienne. Il s'agit de savoir comment les particules de fluide s'éloignent de leur position initiale (approche à une particule) ou l'une de l'autre (approche à deux particules). Une approche souvent adoptée consiste à modéliser l'évolution temporelle de la vitesse par une équation de type Langevin :

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{v_i(t)}{T_L} + f_i(t) \quad (1.39)$$

où  $v_i$  est une composante de vitesse,  $f_i(t)$  est une force rapide,  $\delta$ -corrélée et gaussienne. Le processus est alors un processus de Markov pour les vitesses. En réalité, l'écriture sous la forme d'une équation de Langevin est problématique du point de vue mathématique car la variance de  $f$  est infinie. Pour contourner ce problème on se place dans le formalisme de Ito [28]. Le

problème peut alors se réécrire de façon générale sous la forme :

$$dx_i(t) = v_i(t)dt \quad (1.40)$$

$$dv_i(t) = A_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t)dt + B_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t)dW_i(t), \quad (1.41)$$

où  $dW_i$  est un processus de Wiener c'est à dire un bruit blanc gaussien de variance  $dt$ . Les coefficients  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont susceptibles de dépendre de  $\mathbf{x}$  pour prendre en compte une éventuelle anisotropie de l'écoulement[68]. Pour simplifier on se place dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope pour supprimer cette dépendance. On prend  $B_i(\mathbf{v}, t) = \sqrt{C_0}\varepsilon$  de façon à ce que la fonction de structure d'ordre 2 vérifie la prédiction K41

$$\langle dv_i(t)dv_j(t) \rangle = \delta_{ij}C_0\varepsilon dt. \quad (1.42)$$

On note  $P^L(\mathbf{v}, t | \mathbf{v}_0, t_0)$  la probabilité de transition de la vitesse lagrangienne. Elle vérifie l'équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial P^L}{\partial t} = -\frac{\partial A_j P^L}{\partial v_j} + \frac{1}{2}C_0\varepsilon \frac{\partial^2 P^L}{\partial v_j^2}. \quad (1.43)$$

Par ailleurs on a la relation fondamentale suivante :

$$P^E(\mathbf{V}; \mathbf{x}, t) = \iint P^E(\mathbf{V}_0; \mathbf{x}_0, t_0)P^L(\mathbf{V}, \mathbf{x}; t | \mathbf{V}_0, \mathbf{x}_0; t_0)d\mathbf{V}_0d\mathbf{x}_0, \quad (1.44)$$

où  $P^E(\mathbf{V}; \mathbf{x}, t)$  est la densité de probabilité de la vitesse eulérienne en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ . Comme cette relation est linéaire, on peut en déduire que  $P^E$  vérifie également l'équation de Fokker-Planck 1.43. Pour la turbulence homogène isotrope, la forme de  $P^E$  est connue, un consensus s'étant formé pour dire qu'elle est gaussienne :

$$P^E(u) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.45)$$

Cela contraint fortement la forme de  $\mathbf{A}$ . Thomson [86] a montré que  $A_i$  doit vérifier

$$A_i = \frac{1}{2}C_0\varepsilon \frac{1}{P^E} \frac{\partial P^E}{\partial u_i} + \phi_i \quad (1.46)$$

où le vecteur  $\phi$  vérifie

$$\text{div}(P^E\phi) = 0. \quad (1.47)$$

En général, cela ne contraint pas  $\mathbf{A}$  de façon unique mais dans le cas homogène et isotrope, on a

$$A_i(v) = f(v)v_i \quad (1.48)$$

et avec l'équation 1.47 on montre que  $\phi = 0$  est la seule solution qui a un comportement régulier en  $v = 0$ .  $\mathbf{A}$  est donc déterminé de façon unique et vaut

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = -\frac{C_0\varepsilon}{2\sigma^2}\mathbf{v}. \quad (1.49)$$

On retombe donc sur une équation de Langevin classique qui sous la forme de Ito s'écrit donc

$$d\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{v}}{T_L}dt + \sqrt{C_0\varepsilon}d\mathbf{W}, \quad (1.50)$$

avec

$$T_L = \frac{2\sigma^2}{C_0\varepsilon}. \quad (1.51)$$

Si on a  $\varepsilon = \sigma^3/L$  et  $T_E = L/\sigma$  alors on a  $T_L = \frac{2T_E}{C_0}$ . On voit que pour les valeurs de  $C_0$  de l'ordre de 3 à 5 rapportées dans la littérature on a  $T_L < T_E$ , ce qui est effectivement observé. Cette équation peut être résolue :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0)e^{-\frac{t}{T_L}} + \sqrt{C_0\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{T_L}} d\mathbf{W}(s). \quad (1.52)$$

Si on prend une condition initiale gaussienne de variance  $\sigma^2$  alors on obtient une variance constante et le coefficient d'autocorrélation vaut

$$R^L(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{T_L}\right). \quad (1.53)$$

La fonction de structure d'ordre 2 vaut

$$D_2^L(\tau) = 2\sigma^2(1 - R^L(\tau)) = 2\sigma^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_L}\right)\right) \quad (1.54)$$

et dans la limite  $t \ll T_L$  on retrouve la prévision K41

$$D_2^L(\tau) = C_0\varepsilon\tau. \quad (1.55)$$

Par ailleurs, comme le processus de Wiener  $d\mathbf{W}$  est gaussien,  $\mathbf{v}$  et les incréments  $\Delta_\tau\mathbf{v}$  le sont également. On notera que cette forme d'équation de Langevin peut être dérivée à partir des équations de Navier-Stokes via des approximations de type relations d'Onsager originaires de la physique statistique hors-équilibre [55].

Quels sont les inconvénients du modèle ? Tout d'abord il ne présente qu'une seule échelle de temps  $T_L$  et donc qu'il se situe dans la limite de nombre de Reynolds infini. On note également que l'accélération est un bruit blanc et donc sa variance est infinie. Par ailleurs, comme tous les incréments sont gaussiens, on n'observe pas l'intermittence observée par Yeung & Pope [96].

Ces modèles ont été raffinés pour prendre en compte ces objections. Tout d'abord Sawford [77] a modélisé un nombre de Reynolds fini en utilisant un modèle stochastique d'ordre 2, ce qui revient à utiliser un bruit corrélé au lieu du processus de Wiener. Il obtient alors un coefficient d'auto-corrélation ayant la structure suivante :

$$R^L(\tau) = \frac{T_L \exp\left(-\frac{\tau}{T_L}\right) - T_2 \exp\left(-\frac{\tau}{T_2}\right)}{T_L - T_2}, \quad (1.56)$$

où  $T_L$  a l'expression précédente et  $T_2$  est le temps petite échelle dont l'expression est

$$T_2 = \frac{C_0\tau_\eta}{2a_0}. \quad (1.57)$$

Les expressions des temps caractéristiques ont été choisies de façon à vérifier les deux prédictions K41 concernant la fonction de structure d'ordre 2 de la vitesse et la variance de l'accélération. Dans le cas d'un nombre de Reynolds élevé, on a  $T_2 \ll T_L$  et on observe un régime inertiel. La fonction d'auto-corrélation est quasi exponentielle sauf aux temps très faibles pour lesquels on observe une courbure pour satisfaire à une variance d'accélération finie. Le rapport des deux temps limites du régime inertiel vaut

$$R^L = \frac{T_L}{T_2} = \frac{4a_0}{C_0^2 \sqrt{15}} R_\lambda. \quad (1.58)$$

On voit que le nombre de Reynolds  $R^L$  que l'on construit à partir de ce modèle, est proportionnel aux nombre de Reynolds  $R_\lambda$  et le coefficient de proportionnalité est, d'après les valeurs rapportées dans la littérature, de l'ordre de 0.3. Les résultats obtenus sont alors très proches de ceux de Yeung & Pope [96].

On peut également tenter d'introduire l'intermittence. Pope & Chen [67] proposent un modèle stochastique prenant en compte simultanément la dissipation et la vitesse. Borgas & Sawford [13] proposent, dans une démarche de même type que celle d'Obukhov, de remplacer  $\varepsilon$  dans l'équation de Langevin 1.50 par une série temporelle  $\varepsilon(t)$  issue d'une cascade multifractale ( $\mathcal{P}$ -model). L'équation de Langevin s'écrit alors

$$d\mathbf{v} = -\frac{C_0 \varepsilon(t)}{2\sigma^2} \mathbf{v} dt + \sqrt{C_0 \varepsilon(t)} d\mathbf{W}, \quad (1.59)$$

Il faut alors effectuer des moyennes également sur les réalisations de  $\varepsilon(t)$ . Dans le même esprit Delour et al. [21, 61, 5] proposent de synthétiser un bruit multifractal de type aggloméré, ce qui permet de supprimer les inconvénients majeurs des synthèses de type cascade discrète (base d'ondelettes ou  $\mathcal{P}$ -model). Ce modèle MRW est donc multifractal, à incréments stationnaires et présentant une invariance d'échelle continue. On peut donc l'injecter dans l'équation de Langevin à la place du processus de Wiener. Ce modèle est décrit en détail dans le chapitre 8. Si le processus obtenu présente de bonnes propriétés de multifractalité, les auteurs n'ont pas étudié la forme à donner au terme de rappel de l'équation de Langevin.

Ces modèles ont également été étendus pour étudier la dispersion relative de deux particules [12], cette démarche étant en partie justifiée par la dérivation d'une équation de type Langevin, exacte, à partir de l'équation de Navier-Stokes [35].

## Chapitre 2

# Montage expérimental

Nous avons vu que les rares expériences de mesures lagrangiennes effectuées jusqu'à présent sont basées sur des techniques optiques : on suit la trajectoire d'un certain nombre de particules et on la dérive pour obtenir la vitesse puis l'accélération. Ces étapes de dérivation de signaux expérimentaux sont toujours délicates. Pour contourner ce problème, nous avons décidé de focaliser notre étude sur la vitesse lagrangienne et avons cherché un moyen permettant d'obtenir la vitesse en une seule étape. L'utilisation de l'effet Doppler permet de réaliser cette exigence : une particule solide se déplaçant dans un champ acoustique va diffuser le son avec un décalage fréquentiel proportionnel à sa vitesse. Une fois le principe choisi, il reste à choisir les différents paramètres de l'expérience de façon à optimiser les performances du système de mesure. On commence par décrire en détails l'effet Doppler ainsi que les limites de validité des hypothèses effectuées. Puis on présente le dispositif expérimental créant l'écoulement tourbillonnaire de Von Kármán. On étudie ensuite la diffusion du son par une sphère solide, ce qui est la base de la méthode de mesure. Ces différents aspects font fixer un certain nombre de contraintes. Le respect de ces contraintes parfois opposées nécessite de faire des compromis et impose la valeur des différents paramètres acoustiques concernant les transducteurs et la chaîne de mesure. On décrit finalement le principe et la réalisation de l'électronique d'acquisition.

### 2.1 Principe de la mesure : effet Doppler ultrasonore

Le principe de la mesure est donc le suivant (figure 2.1) : on émet une onde monochromatique avec un transducteur. Lorsqu'une bille passe dans le faisceau d'ultrasons, elle diffuse le son avec un décalage fréquentiel Doppler. On enregistre alors cette onde par un transducteur récepteur.

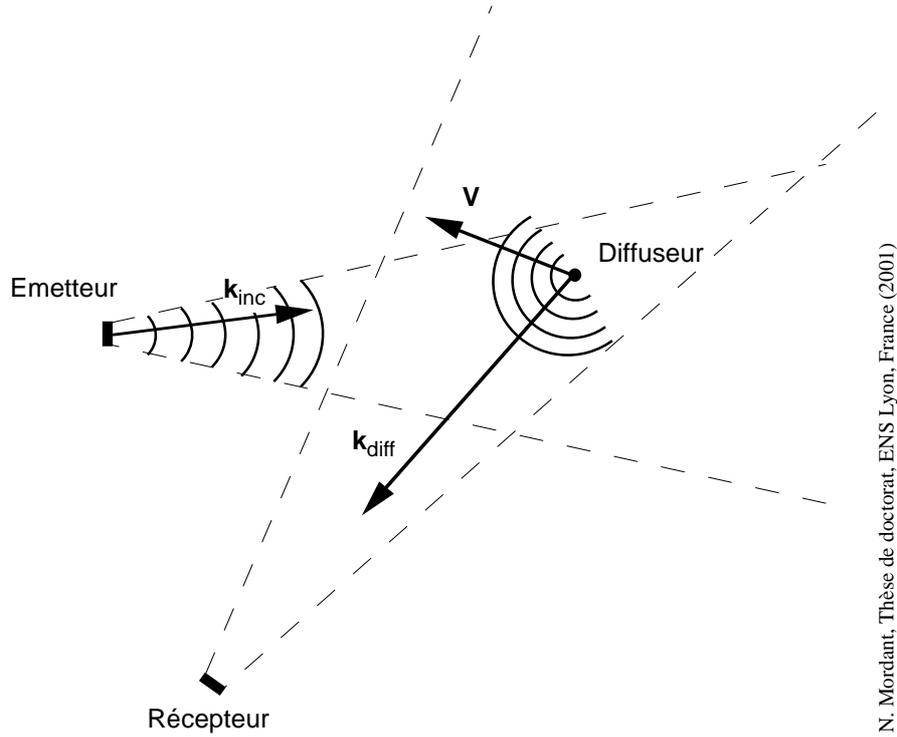
Pour calculer l'expression du décalage fréquentiel, on effectue les hypothèses suivantes :

- on suppose que le nombre de Mach  $M = v/c$  est faible (dans nos expériences  $M \sim 10^{-3}$ ),
- on néglige la perturbation due à l'écoulement dans la propagation en ligne droite du son,
- on suppose que l'émetteur E est ponctuel et émet une onde sinusoïdale  $p(t) = p_0 e^{i\omega_0 t}$  (pour s'affranchir des problèmes de champ proche et d'anisotropie d'émission),
- on suppose le diffuseur ponctuel.

Dans ces conditions, le signal reçu par le diffuseur D à l'instant  $t_2$  est simplement le signal émis par E au temps retardé de la durée du parcours

$$t_1 = t_2 - \frac{ED(t_2)}{c} \quad (2.1)$$

où  $ED(t)$  est la distance émetteur-diffuseur à l'instant  $t$ . La phase est donc  $\phi_1 = \omega_0 t_1$ . Le signal



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 2.1 – Schéma de principe de la mesure

reçu à  $t$  par le récepteur R a été émis par D à l'instant  $t_2$  tel que

$$t_2 = t - \frac{DR(t_2)}{c}. \quad (2.2)$$

La phase reçue par R à l'instant  $t$  est donc

$$\phi(t) = \omega_0 t_2 - \frac{ED(t_2)}{c}. \quad (2.3)$$

Pour obtenir la pulsation, il suffit de dériver par rapport à  $t$ . La dérivée de  $t_2$  par rapport à  $t$  est

$$\frac{dt_2}{dt} = \frac{1}{1 + v_R(t_2)} \quad (2.4)$$

où  $v_R$  est la vitesse de la particule projetée sur la droite DR dans le sens de R vers D. De même on définit  $v_E$  la vitesse projetée sur la droite ED dans le sens de E vers D. Alors la pulsation reçue par le récepteur s'exprime :

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{1 - \frac{v_E(t_2)}{c}}{1 + \frac{v_R(t_2)}{c}}. \quad (2.5)$$

Dans l'approximation  $M \ll 1$  et en supposant que le temps de vol  $t - t_2$  est négligeable devant les temps caractéristiques d'évolution de la vitesse, on peut simplifier l'expression précédente :

$$\omega(t) = \omega_0 + \mathbf{q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{t}), \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_{diff} - \mathbf{k}_{inc}$  est la différence des vecteurs d'onde incident et diffusé et  $\mathbf{v}$  est la vitesse de la particule. Dans notre expérience, la longueur maximum de propagation entre la bille et

le récepteur est au maximum 30 cm. Avec une vitesse du son de 1500 m/s, on obtient donc un temps de vol maximum de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-4}$  s. On pourra donc négliger l'influence du temps de vol si on ne s'intéresse qu'à des phénomènes dont les temps caractéristiques sont typiquement supérieurs à  $2 \cdot 10^{-3}$  s, ce qui correspond à une plage de fréquences inférieures à 500 Hz. On note que  $v(t_2)$  peut être approximée au premier ordre par

$$v(t_2) = v(t) - \frac{DR(t)}{c} \frac{dv}{dt}(t). \quad (2.7)$$

Pour une vitesse typique de 1 m/s, et une distance de 15 cm, on ne pourra négliger la correction que si l'accélération est faible devant  $10^4 \text{ m/s}^2$ . On verra dans le chapitre décrivant les mesures que des valeurs de l'ordre de  $5000 \text{ m/s}^2$  sont enregistrées. Néanmoins ces valeurs sont peu probables et donc pour l'immense majorité des instants, on peut négliger le temps de vol.

En pratique la propagation est plus complexe car le milieu est lui-même en mouvement. Cela peut induire plusieurs effets :

- i. la propagation n'est plus rectiligne,
- ii. des structures de l'écoulement peuvent diffuser du son et
- iii. l'écoulement cause lui-même un effet Doppler.

Le premier effet est négligeable car il intervient au second ordre en  $v/c$ . Les structures susceptibles de diffuser du son sont essentiellement des filaments de vorticité ( [22, 48] ) et leur contribution est négligeable car leur section efficace de diffusion est nettement plus faible que celle d'une bille solide. Le décalage Doppler d  à l'écoulement lui-même peut être estimé : si on suppose que la propagation reste rectiligne mais que l'on prend en compte la vitesse du fluide (on néglige la vorticité), le temps  $t_1$  s'exprime alors

$$t_1 = t - \int_E^D \frac{ds}{c + v(s, t)} \quad (2.8)$$

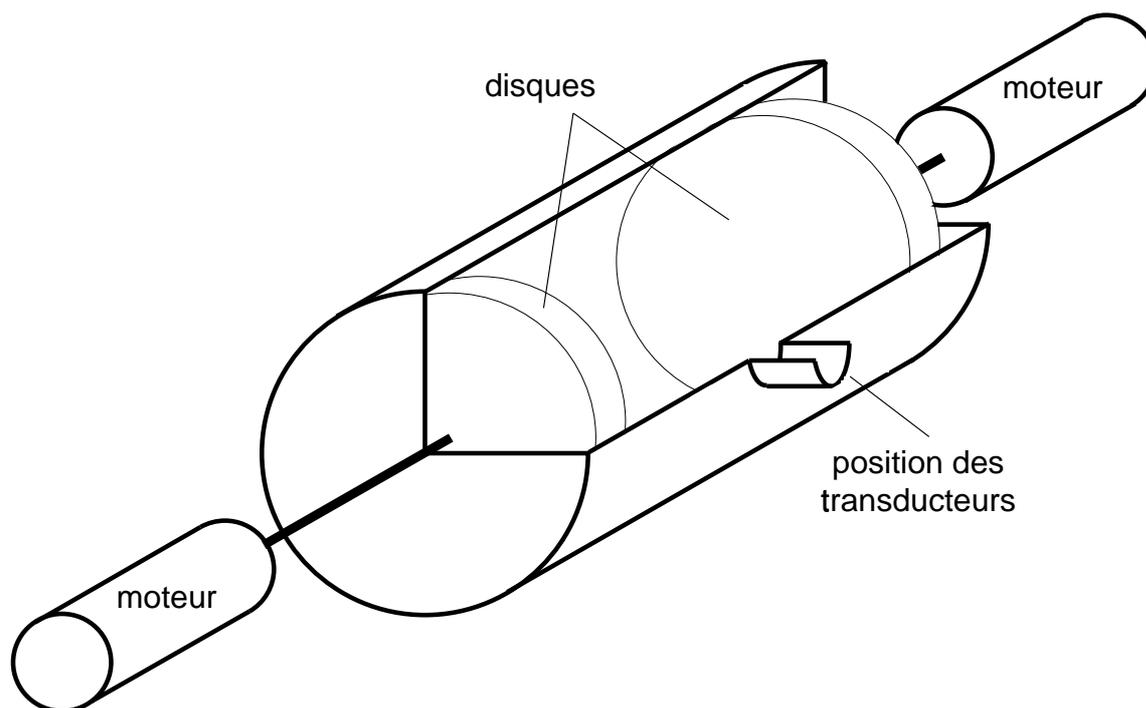
où  $s$  est l'abscisse curviligne et  $v(s, t)$  le vitesse projetée sur le rayon. Au premier ordre on peut le réecrire

$$t_1 = t - \int_E^D \left( 1 - \frac{v(s, t)}{c} \right) ds = t - \frac{r(t)}{c} \left( 1 - \frac{v_r(t)}{c} \right) \quad (2.9)$$

où  $v_r$  est la vitesse de l'écoulement à l'échelle  $r = ED$ . La pulsation devient donc pour le trajet aller :

$$\omega(t) = \omega_0 \left( 1 - \frac{v(t)}{c} + \frac{r(t)}{c^2} \frac{dv_r}{dt} \right). \quad (2.10)$$

On note que  $v_r$  est une vitesse à grande échelle car  $r$  est de l'ordre de 20 cm. Pour une turbulence isotrope et homogène, sa dérivée peut-être estimée par  $v_r^2/r$  et le terme correctif est donc d'ordre  $v_r^2/c^2$ . Le décalage Doppler crée par l'écoulement lui-même intervient à l'ordre supérieur en  $v/c$ . On peut donc négliger cette perturbation sur l'estimation de la vitesse de la bille. Cela signifie également que les échos sur les parois immobiles de la cuve ne présentent pas de décalage fréquentiel notable autour de la fréquence d'émission. On note que la présence de structures instationnaires à grande échelle peut mettre à mal le raisonnement précédent. Dans le cas du régime corotatif de l'écoulement de Von Kármán ([79]), on observe un gros vortex qui "explose" de façon répétée. La phase d'explosion peut créer un changement brutal de  $v_r$ .



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 2.2 – Schéma de la cuve. Les moteurs entraînent les disques en rotation en sens contraire. Les transducteurs sont placés à l'extrémité d'un cylindre pointant vers l'axe de la cuve et situé à égale distance des deux disques.

Il faudrait néanmoins une durée extrêmement courte pour que cela perturbe notablement la fréquence. Dans notre cas, il existe des structures à grande échelle (couche de cisaillement par exemple) mais qui ont une évolution lente et qui ne perturbent pas la mesure.

Par contre, les échos sur les parois mobiles (sur les disques) peuvent causer un décalage Doppler très important et il convient donc de les atténuer fortement.

La mesure du décalage Doppler permet donc d'avoir accès à la projection de la vitesse sur le vecteur d'onde de diffusion  $\mathbf{q}$ . Mais ce dernier dépend de la position de la bille et donc varie au cours du mouvement. Dans une géométrie de rétrodiffusion, le vecteur d'onde variera à l'intérieur du cône formé par le faisceau ultrasonore. Afin d'avoir une zone de mesure suffisamment grande pour que la bille y demeure quelques fois le temps de décorrélation de la vitesse, il est nécessaire que ce cône soit large. Dans notre cas, le demi-angle au sommet du cône vaut  $15^\circ$ , ce qui est suffisamment faible pour négliger en première approximation la variation de  $\mathbf{q}$  et considérer que la vitesse mesurée est la composante projetée sur l'axe normal aux transducteurs.

## 2.2 Écoulement

L'écoulement choisi comme base de notre étude est un écoulement tourbillonnaire de Von Kármán (2.2). Il s'agit de l'écoulement fermé entre deux disques coaxiaux contrarotatifs. Le diamètre de la cuve est de 20 cm et la distance entre les disques vaut 18 cm. Les disques sont, suivant les expériences, lisses ou avec 8 pales de 0.5 cm de haut. Les disques sont entraînés par deux moteurs à courant continu de 1 kW contrôlés en vitesse permettant d'atteindre des fréquences de rotation de  $\Omega = 28$  Hz avec les disques lisses et de  $\Omega = 11$  Hz avec les pales.

Le fluide utilisé est de l'eau et il est contrôlé en température au moyen d'une circulation d'eau passant dans deux serpentins situés derrière les disques. Le volume total est de 9 l. Par ailleurs, la cuve est connectée à un vase d'expansion. L'eau est dégazée dans la cuve par utilisation d'une pompe à vide permettant de faire bouillir l'eau à température ambiante. Après dégazage poussé, on applique une surpression de 2 bars afin d'éviter toute cavitation dans la cuve. Les réseaux de transducteurs sont positionnés dans des hublots situés à égale distance des disques et pointant vers l'axe de la cuve. On dispose de trois hublots dont les axes font un angle de  $45^\circ$  entre eux. Le plan des transducteurs est situé à 18 cm de l'axe de la cuve. Les mesures de pression sont faites dans un hublot de façon à ce que le capteur soit affleurant à la paroi cylindrique de la cuve, à égale distance des deux disques. L'intérieur de la cuve ainsi que les faces des disques en regard sont couverts de 3 cm de résine UREOL 6414B/5073A. Cette résine polyuréthane a une densité comprise entre 1 et 1.1 pour une célérité du son de l'ordre de 1500 m/s. Son impédance acoustique est donc voisine de celle de l'eau et induit une faible réflectivité. De plus, elle absorbe le son à raison d'environ 6 dB/cm pour des fréquences de l'ordre du MHz. Ainsi on limite fortement les réflexions sur les parois.

$R$ (cm)	10
$T$ (ms)	100
$U$ (m/s)	0.1
$\sigma$ (m/s)	1
$L$ (cm)	4
$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	600
$\eta$ ( $\mu\text{m}$ )	20
$\tau_\eta$ (ms)	0.2

Tab. 2.1 – Ordre de grandeur des différentes caractéristiques de l'écoulement.  $R$  rayon des disques,  $T$  période de rotation,  $U$  vitesse de l'écoulement moyen,  $\sigma$  vitesse quadratique moyenne,  $L$  grande échelle de l'écoulement,  $\lambda$  longueur de Taylor,  $\eta$  longueur de Kolmogorov,  $\tau_\eta$  temps de Kolmogorov

Le choix de cet écoulement a été fait en raison de l'expertise de l'équipe dans l'étude de cet écoulement ([25, 79, 59]) et du fait qu'il est l'objet d'un grand nombre d'études dans la communauté ([14, 7, 69, 97]). Il présente par ailleurs des avantages intéressants : il s'agit d'un écoulement fermé et donc sans vitesse moyenne. Dans le cas d'un écoulement de jet par exemple, il faudrait déplacer les transducteurs pour garder les particules suffisamment longtemps dans le faisceau. Il est de taille raisonnable pour que les effets d'atténuation des ultrasons dans l'eau soient faibles. Il permet également d'atteindre des nombres de Reynolds assez élevés ( $Re = \frac{R^2\Omega}{\nu} \sim 10^5$ ). Il présente néanmoins des inconvénients : il existe des parois mobiles susceptibles de créer du décalage fréquentiel Doppler et l'écoulement n'est ni homogène ni isotrope.

## 2.3 Diffusion du son par une bille

On considère une sphère élastique plongée dans un fluide. On émet une onde plane incidente et on cherche l'amplitude de l'onde diffusée par la sphère. Comme la sphère n'est pas infiniment rigide, on observe un certain nombre de résonances dues à la propagation d'ondes de Rayleigh à sa surface. Par conséquent, l'amplitude rayonnée dépend de façon assez complexe du rapport longueur d'onde sur rayon de la sphère.

### 2.3.1 Expression de l'onde diffusée

Ce problème de diffusion du son par une sphère élastique a été traité analytiquement par Gaunard & Überall [29]. On suppose que la sphère est plongée dans un liquide infini de masse volumique  $\rho_1$  dans lequel la célérité du son vaut  $c_1$ . On émet une onde plane de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $k_1$ . La sphère est un solide élastique de masse volumique  $\rho_2$ , de rayon  $a$  dans lequel peuvent se propager des ondes longitudinales de célérité  $c_L$  et de cisaillement  $c_S$  dont les vecteurs d'onde sont respectivement  $k_L$  et  $k_S$ . Chaque type d'onde vérifie une équation d'onde dans son milieu. On effectue une décomposition de la pression en fonctions de Bessel sphériques et on peut montrer que l'amplitude de la pression diffusée à l'extérieur de la sphère s'écrit

$$p_{\text{diff}}(r, \theta) = p_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n(\cos \theta) b_n h_n^{(1)}(k_1 r), \quad (2.11)$$

où  $p_0$  est l'amplitude de l'onde plane incidente,  $P_n$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ ,  $\theta$  est l'angle avec le vecteur d'onde incident et  $h_n^1$  la fonction de Hankel sphérique de première espèce.  $b_n$  est un coefficient fonction de  $\rho_1/\rho_2$ ,  $n$ ,  $k_S a$ ,  $k_L a$  et  $k_1 a$ , dont l'expression est fournie dans la référence [29]. Ce terme décrit les résonances successives dues à la propagation des ondes de surface sur la sphère et leur rayonnement dans le fluide.

Dans la limite du champ lointain (pour la bille), l'expression précédente peut être réécrite

$$p_{\text{diff}}(r, \theta) = p_0 \frac{af(\theta)}{2r} e^{ik_1 r - i\omega t} \quad (2.12)$$

avec

$$f(\theta) = \frac{2}{ik_1 a} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n(\cos \theta) b_n. \quad (2.13)$$

Cette fonction  $f$  appelée fonction de forme, représente l'amplitude relative de l'onde diffusée par rapport à l'onde plane incidente. Elle fournit l'évolution de l'amplitude avec la longueur d'onde et avec l'angle.

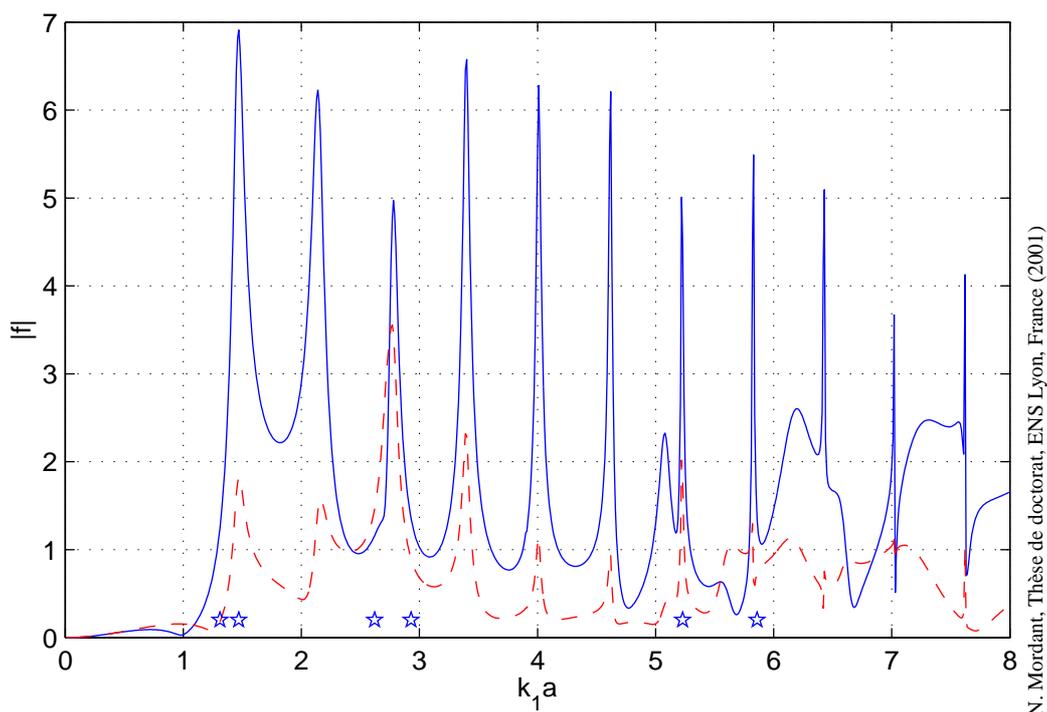
### 2.3.2 Application à notre cas

Dans notre cas, les sphères sont en polystyrène de masse volumique  $\rho_2 = 1.056 \text{ kg/m}^3$ . Les célérités du son dans ce matériau sont  $c_L = 2350 \text{ m/s}$  et  $c_S = 1120 \text{ m/s}$  [32]. Les billes utilisées sont de diamètre 1, 0.5 et 0.25 mm. Le fluide est de l'eau de masse volumique 1.00 et dont la célérité vaut 1.479 m/s à 25°C. On peut avec ces valeurs numériques estimer la fonction de forme pour diverses valeurs de  $a$  et  $\omega$ .

#### Réponse fréquentielle

La fonction de forme est fonction du rayon et de la fréquence via le paramètre unique  $k_1 a$ . La figure 2.3 présente l'évolution de  $f$  en fonction de  $k_1 a$  pour deux angles d'incidence  $\theta = \pi$  (rétrodiffusion) et  $\theta = 3\pi/4$  qui correspondent aux deux situations envisageables pratiquement dans nos expériences. Les valeurs de  $k_1 a$  correspondant aux fréquences et tailles de billes utilisées dans nos expériences sont données dans la table 2.2. La variation de la fonction de forme est assez complexe, présentant une suite de pics assez larges sur lesquels se superposent d'autres

$a$ $\mu\text{m}$	$f$ MHz	$k_1a$
250	2.50	1.31
250	2.80	1.47
500	2.50	2.62
500	2.80	2.93
1000	2.50	5.23
1000	2.80	5.86

Tab. 2.2 – Valeurs de  $k_1a$  pour les paramètres de nos expériences.

N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 2.3 – Variation de la fonction de forme en fonction de  $k_1a$  pour des angles de  $\pi$  rad (trait plein) et  $3\pi/4$  rad (trait pointillé). Les étoiles marquent les valeurs de  $k_1a$  utilisées dans nos expériences.

pics très fins. Comme signalé par Hefner & Marston [34], la fonction de forme prend des valeurs supérieures à 1. Ceci est dû au fait que la célérité du son dans le polystyrène ( $c_S$ ) est inférieure à celle de l'eau. On a donc un renforcement de la diffusion (surtout en rétrodiffusion) pour  $k_1a > 1.3$ . On observe que pour les petites valeurs de  $k_1a$ ,  $f$  décroît fortement comme  $a^2$ . Par contre, quand  $k_1a$  augmente, la fonction de forme garde des valeurs oscillant autour de 1. Par conséquent, l'amplitude de l'onde diffusée varie comme  $a$  pour les valeurs de  $k_1a$  supérieures à 1.3 et en  $a^3$  quand  $k_1a$  tend vers 0. Les billes de 250  $\mu\text{m}$  à 2.5 ou 2.8 MHz correspondent donc au voisinage du premier pic de résonance. En réalité les amplitudes du son enregistrées sur les deux voies est du même ordre de grandeur, semblant signifier que les billes utilisées sont légèrement plus grosses que 250  $\mu\text{m}$  (ce qui est tout à fait possible car le lot utilisé est poly-disperse autour d'un diamètre moyen de 250  $\mu\text{m}$ ) de telle sorte que les valeurs de  $k_1a$  soient symétriques par rapport au pic de la résonance.

## Diagramme de rayonnement

On a tracé sur la figure 2.4 le diagramme de rayonnement pour les différents couples taille de bille, fréquence d'émission. Ces diagrammes sont, de façon générale, multilobés et le nombre de lobes croît avec la taille de la bille (et donc avec  $k_1 a$ ). On observe une diffusion importante à angle nul dans la direction de l'onde incidente. L'orientation des autres lobes varie fortement avec la valeur de  $k_1 a$ . On voit que la direction de  $3\pi/4$  ( $135^\circ$ ) choisie dans la plupart des expériences n'est pas forcément la direction optimale. C'est le cas de façon flagrante pour les billes les plus petites pour lesquelles la directivité est proche du quadripôle. Néanmoins on opère dans cette géométrie pour d'autres raisons pratiques.

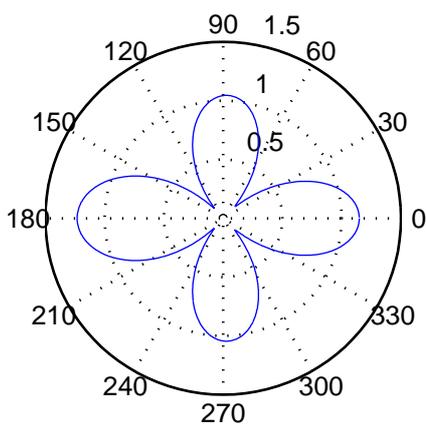
Il faut noter néanmoins que les formules précédentes ne sont valables que dans l'hypothèse d'un fluide et d'une bille au repos. La présence d'un écoulement qui entraîne la bille peut modifier fortement les caractéristiques du rayonnement. Du fait du mouvement, le son reçu par la bille a une fréquence légèrement variable. Cela peut contrarier fortement les résonances des ondes de surface et élargir les pics. Une éventuelle rotation de la bille sur elle-même peut également perturber les diagrammes de rayonnement car les ondes de surface n'auront plus la même célérité selon leur sens de propagation à la surface de la bille. Il ne faut donc vraisemblablement pas prendre à la lettre les prédictions précédentes qui constituent plutôt une indication des phénomènes pouvant se produire lors de la diffusion du son par les particules.

## 2.4 Transducteurs

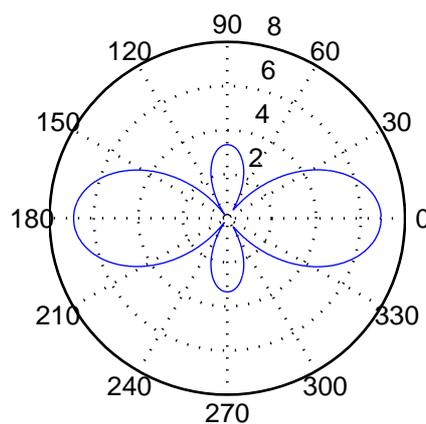
### 2.4.1 Les contraintes

Dans notre choix des transducteurs (géométrie, fréquence de travail...), nous devons faire face à un certain nombre de contraintes d'origine technique ou expérimentale.

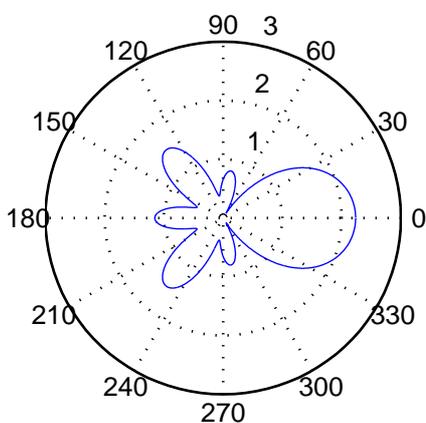
1. le décalage Doppler est proportionnel à la fréquence d'émission. Par ailleurs à fenêtre de temps fixée, il est plus simple d'estimer une fréquence élevée. Par exemple pour une analyse de Fourier, on doit compter avec la relation d'incertitude  $\delta t \cdot \delta f > 1/2$  (où  $\delta t$  et  $\delta f$  sont les ordres de grandeurs des incertitudes sur le temps et la fréquence respectivement). Si on se fixe  $\delta t$  alors la résolution en fréquence est minorée. Pour  $\delta t \sim 10^{-3}$  s on obtient une résolution minimale de  $\delta f > 500$  Hz. Pour une incertitude relative de 10%, il faudrait une fréquence typique de Doppler de 5 kHz. Pour 1 m/s, on obtiendrait alors une fréquence d'émission de 7.5 MHz. De façon générale, il sera donc plus aisé pour extraire le décalage Doppler, d'émettre à haute fréquence.
2. La taille de la zone de mesure est déterminée par l'intersection du faisceau d'émission et du faisceau de réception. Or ces deux faisceaux sont d'autant plus larges que la taille  $a$  des transducteurs est faible. En effet la largeur angulaire est proportionnelle au rapport de la taille sur la longueur d'onde  $\lambda/a \propto 1/fa$ . Il faut donc diminuer la taille des transducteurs et/ou diminuer la fréquence d'émission. Un premier compromis se dessine entre qualité de démodulation et taille de la zone de mesure.
3. Une contrainte technologique apparaît alors : il existe une plage de taille de transducteurs inaccessible pour des questions de résonance des cristaux piézo-électriques. En particulier, la firme Vermon qui a fabriqué les réseaux que nous utilisons, ne peut réaliser une



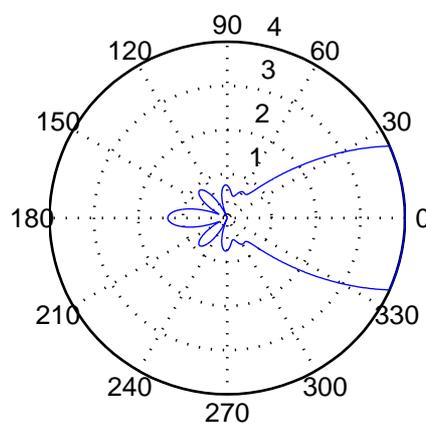
bille diametre 250 µm, frequence 2.5 MHz



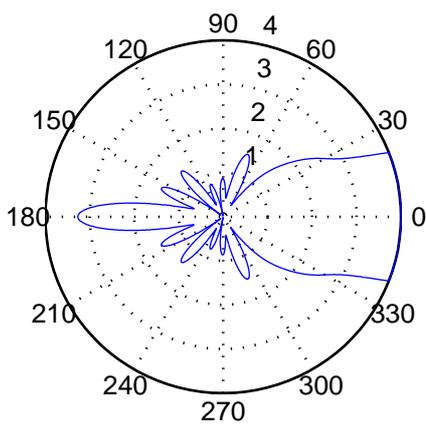
bille diametre 250 µm, frequence 2.8 MHz



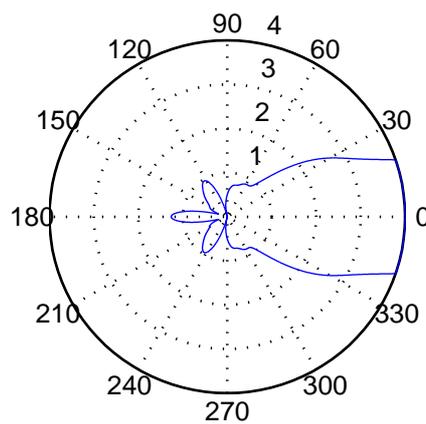
bille diametre 500 µm, frequence 2.5 MHz



bille diametre 500 µm, frequence 2.8 MHz



bille diametre 1000 µm, frequence 2.5 MHz



bille diametre 1000 µm, frequence 2.8 MHz

N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 2.4 – Diagramme de rayonnement (fonction de forme) pour les différentes configurations expérimentales. Le son arrive de la gauche pour un angle de 180°.

taille plus petite que 2 mm, ou alors nettement plus petite.

4. Par ailleurs, la puissance acoustique émise est proportionnelle à la surface du transducteur et donc plus le transducteur est petit, moins on a de signal. Comme le signal diffusé par la bille est lui-même faible car la bille est petite, on ne peut diminuer exagérément la taille des transducteurs sans détériorer de façon irrémédiable le rapport signal/bruit.
5. Afin d'éviter les problèmes de résonance sur la bille, il vaut mieux que la fréquence ne soit pas trop élevée (typiquement  $ka \sim 2$ ). Mais on a vu que lorsque la taille  $a$  de la bille devient petite devant la longueur d'onde, l'amplitude diffusée est alors proportionnelle au volume de la bille et donc diminue fortement quand on accroît la fréquence. Cela contraint la taille de la bille à fréquence fixée ou bien la fréquence à taille donnée.
6. L'écoulement turbulent présente un régime dit inertiel s'étendant en terme d'échelle spatiale jusqu'à des tailles de l'ordre de quelques centaines de microns (voir table 2.1). Afin de les résoudre, il est souhaitable que la taille de la bille soit au plus égale à ces échelles.
7. Il est nécessaire de disposer de plusieurs transducteurs en réception pour améliorer le rapport signal/bruit mais aussi pour réaliser des antennes linéaires de capteurs afin d'avoir accès à la direction d'arrivée du son et donc à la position et au vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ .

Nous avons donc dû faire un choix réalisant un compromis raisonnable entre ces différents points.

### 2.4.2 Les deux réseaux de transducteurs

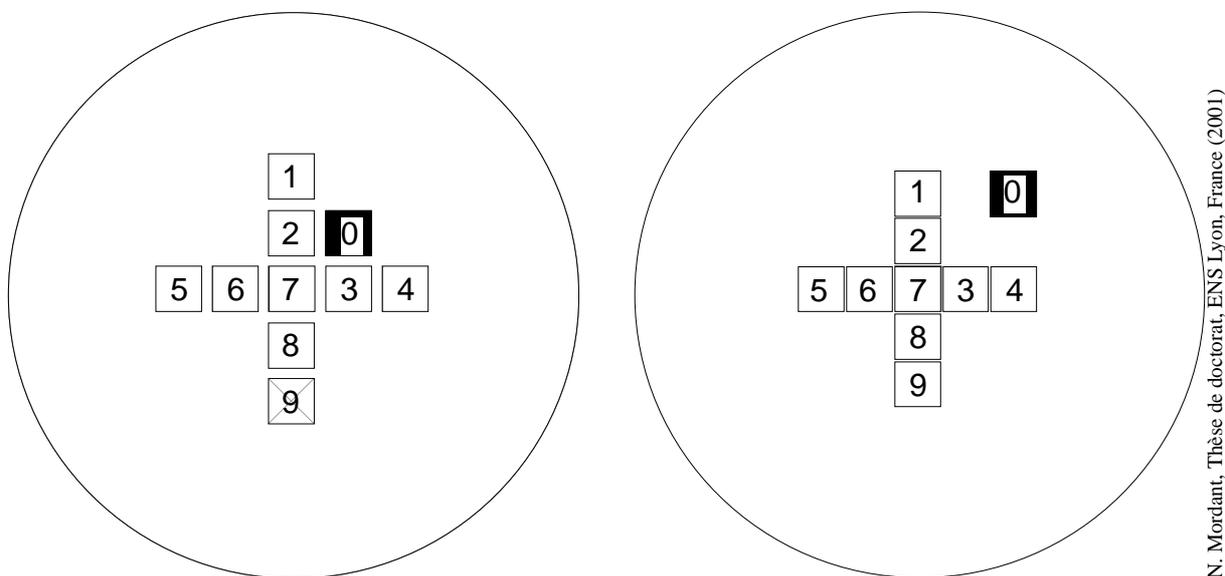


Fig. 2.5 – Schéma des deux réseaux : les transducteurs font 2 mm de côté. A gauche l'espace entre les transducteurs vaut 0.5 mm, il est utilisé à une fréquence de 2.5 MHz ( $\lambda=0.59$  mm), le transducteur n°9 est inopérant suite à une mauvaise utilisation accidentelle ; à droite, l'espace entre les transducteurs vaut 0.1 mm et la fréquence de travail est 2.8 MHz ( $\lambda=0.53$  mm).

Le choix d'une fréquence d'émission de l'ordre de 2.5 MHz pour des transducteurs carrés de 2 mm réalise ce compromis :

- le décalage Doppler pour une vitesse de 1 m/s est de l'ordre de 3.3 kHz, donc une fréquence assez élevée pour espérer obtenir une bonne résolution
- avec  $a = 2$  mm, on obtient un faisceau dont l'amplitude dépend de l'angle  $\theta$  suivant l'expression  $\text{sinc}(\frac{1}{2}ka \sin(\theta))$ . La largeur angulaire du faisceau (donnée par le premier zéro du sinus cardinal) correspond à un angle de  $17^\circ$ . Le diamètre du faisceau au centre de la cuve est alors de l'ordre de 11 cm. On explore donc une zone importante de l'écoulement dont la taille fait plusieurs fois la taille caractéristique des grandes échelles.
- à cette fréquence, on a  $ka = 2$  pour une taille de bille de rayon  $200 \mu\text{m}$ . On peut donc espérer obtenir un signal suffisamment élevé pour détecter des billes d'un diamètre de l'ordre de  $250 \mu\text{m}$ , inférieur d'un facteur 2 à la longueur de Taylor.

On a choisi de prendre 9 transducteurs disposés en croix (2.5). Ceci permet donc de disposer de deux antennes linéaires de 5 capteurs disposées à angle droit. Par ailleurs un transducteur supplémentaire est prévu sur l'un des réseaux utilisable en émission. L'un des réseaux est plan et les éléments sont séparés de 0.5 mm ; le second est monté sur une calotte sphérique de rayon 20 cm et la séparation entre transducteurs vaut 0.1 mm.

## 2.5 Chaîne d'acquisition

### 2.5.1 Cahier des charges

Pour mesurer une composante de vitesse, nous devons donc enregistrer de façon synchrone les signaux issus de 9 transducteurs. La fréquence typique de ces signaux se situe autour de 2.5 MHz qui doit donc être la fréquence de travail de l'électronique. La fréquence d'échantillonnage doit donc être au moins égale à 5.6 MHz (dans le cas d'un échantillonnage direct du signal, afin de respecter le critère de Shannon). Par ailleurs, on observe en réception une forte composante à la fréquence d'émission qui a plusieurs origines :

- un couplage émetteur/récepteur, électromagnétique ou acoustique (en particulier des ondes de surface) qui peut être très fort si on utilise l'émetteur situé sur le même réseau (typiquement de l'ordre du millivolt tandis que le signal est plutôt de l'ordre du  $\mu\text{V}$ ),
- les échos sur les parois fixes en particulier la réflexion directe sur la paroi située face au transducteur. Cet écho est fortement atténué par la résine polyuréthane mais reste nettement plus fort que celui de la bille.

Par conséquent, le signal acoustique utile est noyé sous une composante harmonique d'amplitude 100 à 1000 fois plus élevée. Par ailleurs, pour pouvoir diminuer la taille de la bille, il faut que le bruit de l'électronique soit le plus faible possible. Cela impose plusieurs conditions sur l'électronique qui doit posséder les caractéristiques suivantes :

- i. rapidité
- ii. très faible bruit
- iii. très faible non-linéarité

Un appareil est particulièrement adapté à ces contraintes : l'échantillonneur VXI 10 MHz, 23 bits hpe1430A de Agilent Technologies. Cependant, des considérations financières limitent sérieusement le nombre de tiroirs utilisables, il est hors de question de disposer de 18 échantillonneurs. Par conséquent, il est nécessaire de pouvoir enregistrer simultanément 9 signaux sur un seul appareil.

## 2.5.2 Principe

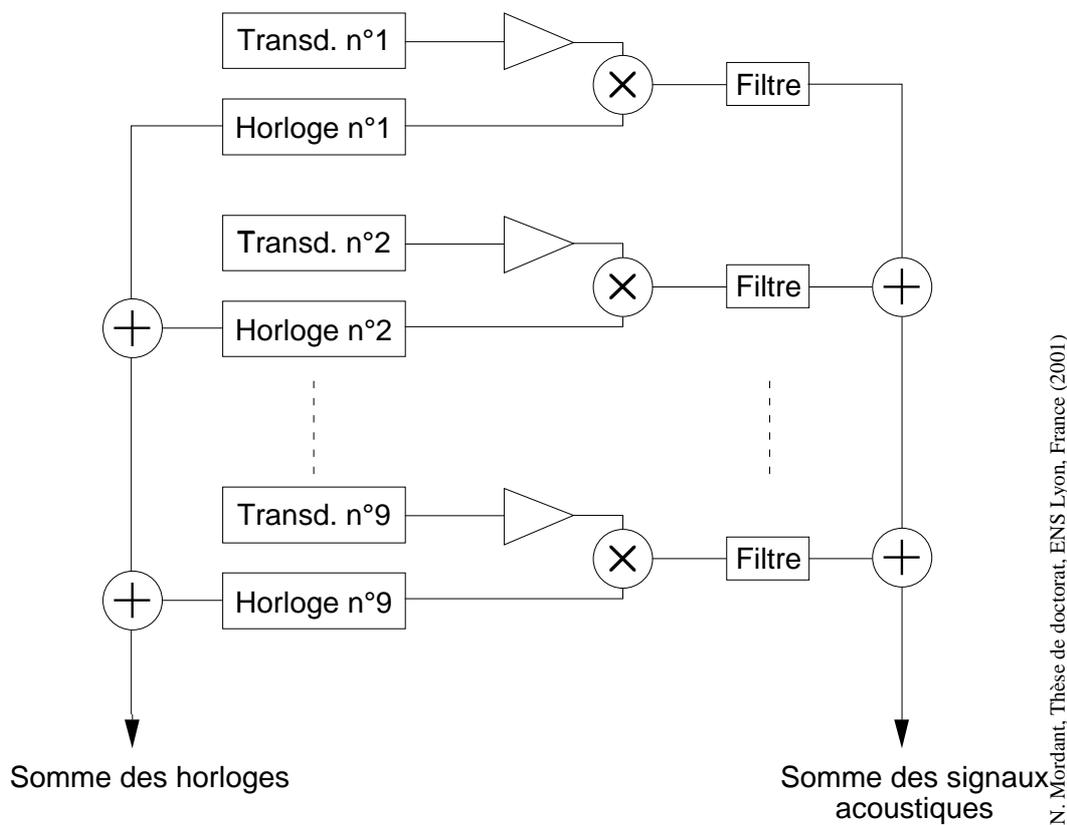


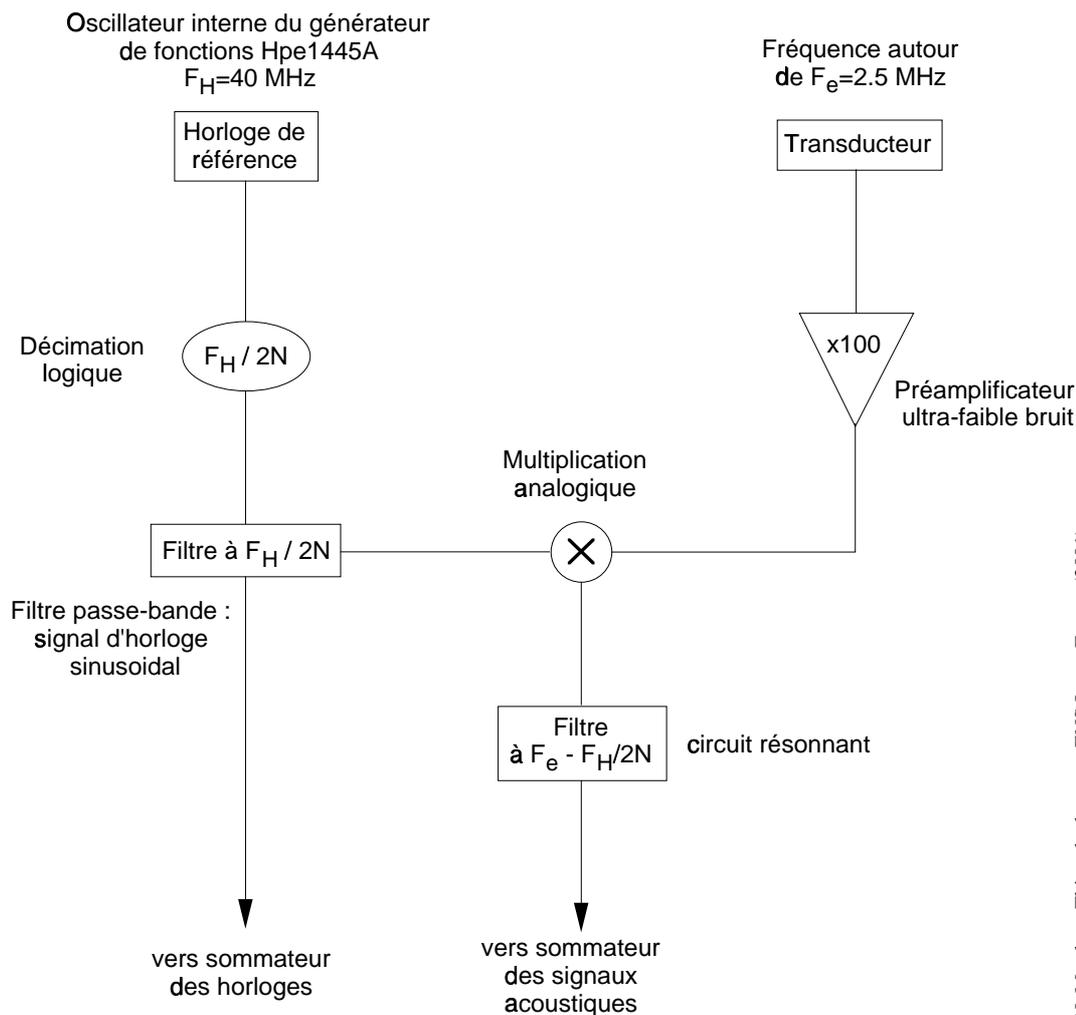
Fig. 2.6 – Schéma de principe de la chaîne d'acquisition

Le principe de la chaîne d'acquisition est le multiplexage fréquentiel. Le signal de chacun des récepteurs est hétérodyné dans une bande de fréquence distincte et sommé aux autres. Le schéma de principe de la chaîne d'acquisition est présenté figure 2.6. Chaque voie comporte tout d'abord un préamplificateur. Ensuite le signal est multiplié par une horloge et filtré pour ne garder que la bande fréquentielle utile. Les neuf voies sont alors sommées et échantillonnées par un tiroir hpe1430A. Celui-ci effectue alors une détection hétérodyne numérique du signal acoustique (autour de la fréquence centrale de la bande passante contenant les 9 signaux acoustiques). On obtient ainsi un signal complexe (analytique). Afin de conserver la synchronisation des signaux, il faut enregistrer également les signaux des 9 horloges.

## 2.5.3 Réalisation pratique (en collaboration avec Pascal Metz)

### La mise en forme du signal

Un schéma plus détaillé d'une voie est présenté figure 2.7. Les circuits électroniques sont détaillés en annexe. Le signal d'horloge est synthétisé à partir d'un signal de référence TTL à 40 MHz fourni par un générateur de fonction hpe1445A. Dans un premier temps, la fréquence de ce signal est divisée par deux, à 20 MHz puis par un entier prenant des valeurs distinctes entre 29 et 37 selon les voies. Ce signal TTL est alors filtré passe-bas pour ne garder que la composante harmonique fondamentale. On obtient alors un signal d'horloge sinusoïdal de fréquence connue et stable.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 2.7 – Schéma d'une voie

La préamplification est réalisée par un amplificateur opérationnel rapide et ultra-faible bruit. Il s'agit de l'étape limitante en terme de bruit électronique. C'est le bruit en tension ( $1.05\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ ) à l'entrée du préamplificateur qui fixe le niveau de bruit en sortie. Il est nécessaire d'amplifier fortement le signal d'entrée (ici d'un facteur 100) car le circuit multiplieur analogique 4 quadrants qui vient ensuite dans la chaîne a un niveau de bruit assez élevé ( $50\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ ). Les circuits multiplieurs à quatre quadrants sont assez rares et d'autant plus s'ils doivent être rapides. De plus, ils ont un niveau de bruit plus élevé que les AO par exemple. La sortie de l'étage de multiplication est ensuite filtrée par un circuit résonnant qui amplifie dans une bande passante de largeur 20 kHz. Celle-ci est centrée de façon à amplifier la composante de fréquence correspondant à la différence des fréquences de l'horloge et du signal.

### Performances du circuit sans émission ultrasonore

La figure 2.8 présente le spectre du signal de sortie de chaque voie isolée lorsqu'on branche un court-circuit  $50\ \Omega$  à l'entrée (impédance du même ordre de grandeur que celle des transducteurs). On voit nettement la réponse du circuit résonnant qui amplifie le niveau de bruit dû au préamplificateur. Le niveau de base est -160 dB. Le circuit résonnant amplifie donc d'un facteur

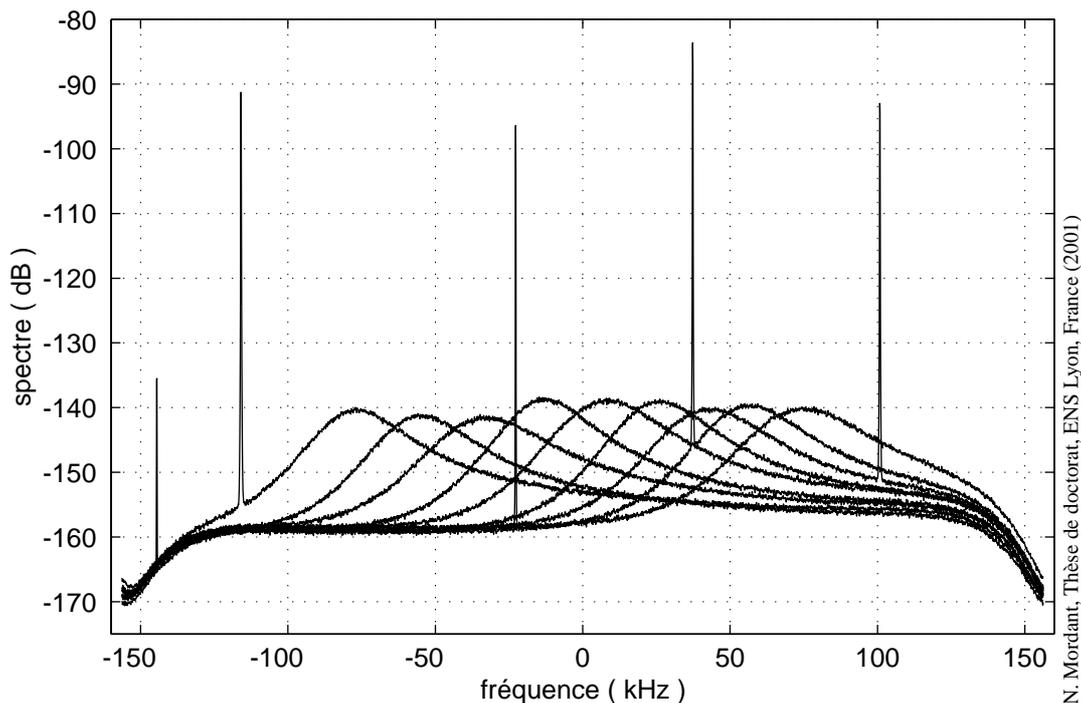
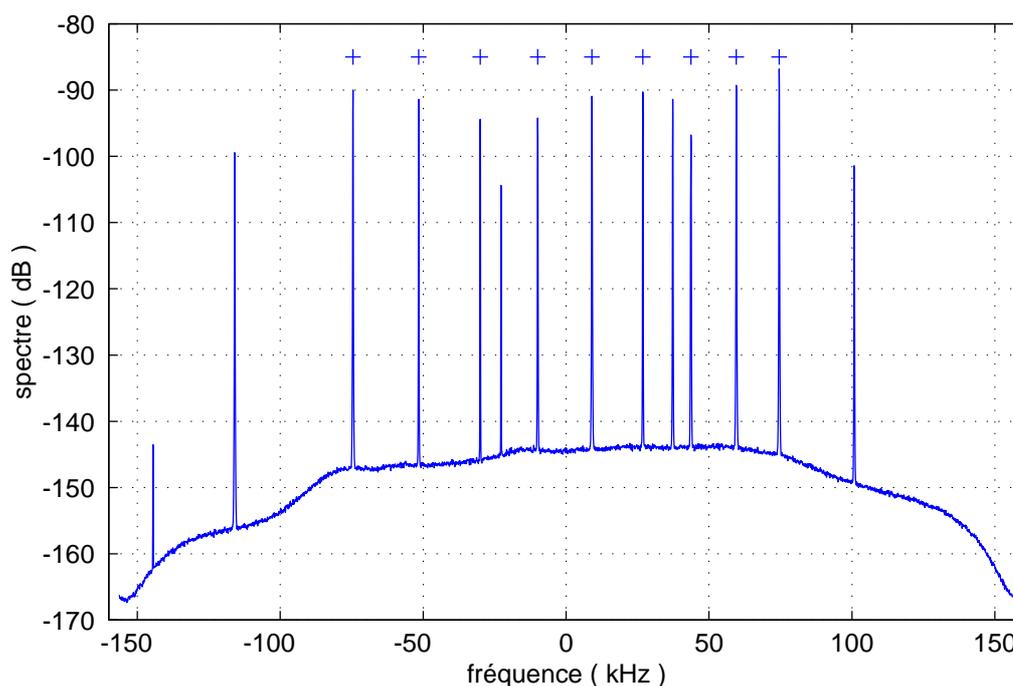


Fig. 2.8 – Spectre du signal de sortie de chaque voie isolée.

10 (20 dB) à sa fréquence de résonance. Le but du circuit résonnant est d'amplifier le signal de façon à ce qu'il soit supérieur au niveau de bruit de la somme des 9 voies. En effet, lorsqu'on somme les 9 voies, on additionne les signaux mais aussi le bruit. Par conséquent, spectralement parlant, le niveau de bruit augmente de 10 dB environ (on somme 9 bruits indépendants ; la variance résultante est donc multipliée par  $\sqrt{9} = 3$ ). Par contre dans chaque bande de fréquence le signal n'augmente pas. Sans le circuit résonnant, le rapport signal/bruit se dégraderait d'un facteur 3. Grâce à l'inclusion de ce circuit on empêche cette dégradation et on garde sensiblement le même rapport signal/bruit dans chaque bande de fréquence. Les pics que l'on peut observer sont des harmoniques des signaux d'horloge. Il sont donc très fin et à des fréquences bien définies. On peut donc aisément les filtrer numériquement avant l'étape de traitement du signal.

### Performances avec émission sans rotation

La figure 2.9 montre le spectre du signal de sortie du sommateur. Celui-ci est constitué simplement d'un pont de résistances. On voit que grâce aux circuits résonnants, le signal est toujours supérieur au niveau de bruit. Cela signifie que l'on pourrait éventuellement augmenter le nombre de voies de réception sans dégrader significativement le rapport signal/bruit dans chaque bande passante. On observe de nombreux pics supplémentaires. Leur fréquence correspond exactement à la fréquence d'émission décalée dans la bande passante des différentes cartes. Ces pics sont dûs aux différents couplages qui ont lieu dans la cuve : couplage électromagnétique ou acoustique (réflexions sur les parois, transmission par la structure de la cuve, ondes de surface). Les plus intenses de ces pics correspondent à une oscillation d'amplitude 0.6 mV. La valeur quadratique moyenne du bruit dans une bande passante de 26 kHz (largeur utilisée dans l'expérience man290501 largement décrite dans les derniers chapitres de cet ouvrage) vaut



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 2.9 – Spectre du signal de sortie du sommateur. On émet à 2.8 MHz par un autre réseau situé sur un hublot à 45°. Les croix marquent les pics correspondants à la fréquence d'émission décalée dans la bande passante de chacune des voies. Les disques ne tournent pas, le fluide est au repos.

14  $\mu\text{V}$ , soit 40 fois moins.

### Performances avec émission et rotation sans billes

On a présenté sur la figure 2.10 le spectre de la sortie du sommateur, dans le cas où les disques tournent mais sans avoir introduit de billes dans la cuve. On voit deux effets dus à la turbulence. Le premier est l'élargissement du pic dont la largeur vaut 800 Hz à sa base. Le second est l'augmentation du bruit de fond qui est plat lorsque les disques ne tournent pas et qui a une forme en cloche lorsqu'ils tournent. Le niveau a augmenté de 6 dB au maximum et la largeur de la cloche vaut 15 kHz (dans le cas présenté).

Le premier effet d'élargissement est dû à l'effet Doppler sur la réflexion directe contre les parois fixes à l'intérieur de la cuve. On a vu dans la partie 2.1 que les réflexions sur les parois immobiles ne créent pas de décalage Doppler notable. On en a ici la preuve. En effet la contribution principale des réflexions est due à la réflexion directe du son sur la paroi en vis à vis de l'émetteur vers le récepteur (qui est situé soit sur le même réseau, soit sur un second réseau dans un hublot à 45°) qui peut être atteint directement par cet écho direct. Celui-ci demeure assez important malgré la résine polyuréthane car la surface illuminée est très grande. Les contributions dues aux réflexions sur les disques sont très faibles. En effet, les réseaux sont dans un hublot dont la profondeur est de l'ordre de 8 cm. Cela limite la largeur du faisceau (en plus de sa largeur naturelle) et empêche l'illumination directe des disques. Par conséquent, le son qui les atteint a déjà subi une réflexion. De la même façon, le son doit subir une réflexion supplémentaire avant de revenir vers le récepteur. On a donc au moins trois réflexions fortement

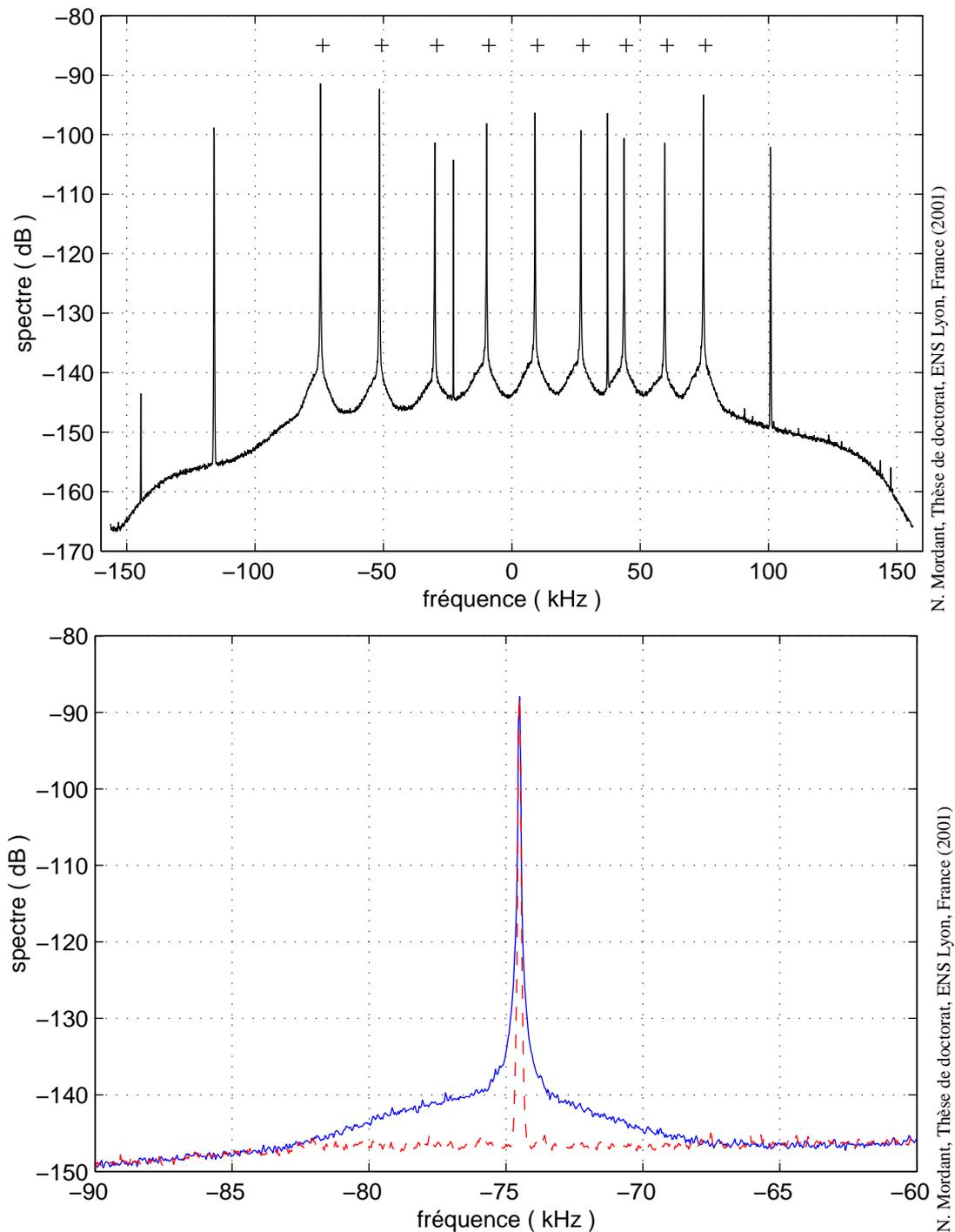


Fig. 2.10 – Spectre du signal de sortie du sommateur. On émet à 2.8 MHz par un autre réseau situé sur un hublot à  $45^\circ$ . Les croix marquent les pics correspondants à la fréquence d'émission décalée dans la bande passante de chacune des voies. Les disques tournent à 8 Hz, on n'a pas mis de bille dans la cuve. En haut : les 9 voies. En bas, détail du pic correspondant à la voie 1 ; en pointillé le spectre obtenu sans tourner.

atténuées. Le signal qui revient même s'il a des composantes spectrales fortement décalées par effet Doppler n'est pas visible ici. La présence de disques à pales dans l'exemple présenté ne se fait pas ressentir sur le signal car on n'observe pas de pics correspondant à la fréquence de rotation des moteurs.

L'élargissement du pic central dû à l'écoulement est handicapant pour l'extraction des composantes spectrales dues au passage des billes. On élimine ce problème par filtrage numérique réjecteur de bande de largeur 600 Hz (dans le cas de l'expérience man290501) – filtre de Butterworth d'ordre 5. Cela revient à supprimer les vitesses inférieures à 0.085 m/s (en valeur absolue). On aura donc toujours une annulation du signal lorsque la vitesse de la bille deviendra faible. On notera que dans le cas de l'expérience man290501, la vitesse quadratique moyenne vaut 1 m/s environ. On n'a donc éliminé qu'une faible partie du signal. Si l'on suppose que la densité de probabilité de la vitesse est gaussienne, la probabilité de mesurer de telles vitesses vaut 0.07. On a donc perturbé 7% du signal. Néanmoins on verra que l'algorithme de traitement du signal est conçu pour affronter ce genre de situation. Il ne décrochera pas si la bille ne reste pas trop longtemps dans la zone de faible vitesse. Si la vitesse traverse franchement cette zone, on peut même espérer que l'algorithme reconstruise le signal. On verra que dans le cas où la vitesse de la bille reste nulle assez longtemps, l'algorithme (s'il ne décroche pas) va donner une valeur de la vitesse non nulle et de l'ordre de la vitesse à la limite de la coupure jusqu'à ce que le signal réaugmente. On va donc perturber légèrement la statistique de vitesse.

L'origine du second effet d'augmentation du bruit de fond est moins claire. La vitesse correspondant à la largeur à -3 dB de la cloche est de l'ordre de 1 m/s. C'est l'ordre de grandeur de la variance de la vitesse dans ces conditions. On peut donc penser que c'est la diffusion du son par l'écoulement qui apparaît dans ces conditions. Cet effet apparaît uniquement sous la forme d'une augmentation du bruit de fond. On n'observe pas de composantes spectrales localisées dans le plan temps-fréquence tant que l'on n'a pas introduit les particules.

### Performances dans les conditions expérimentales

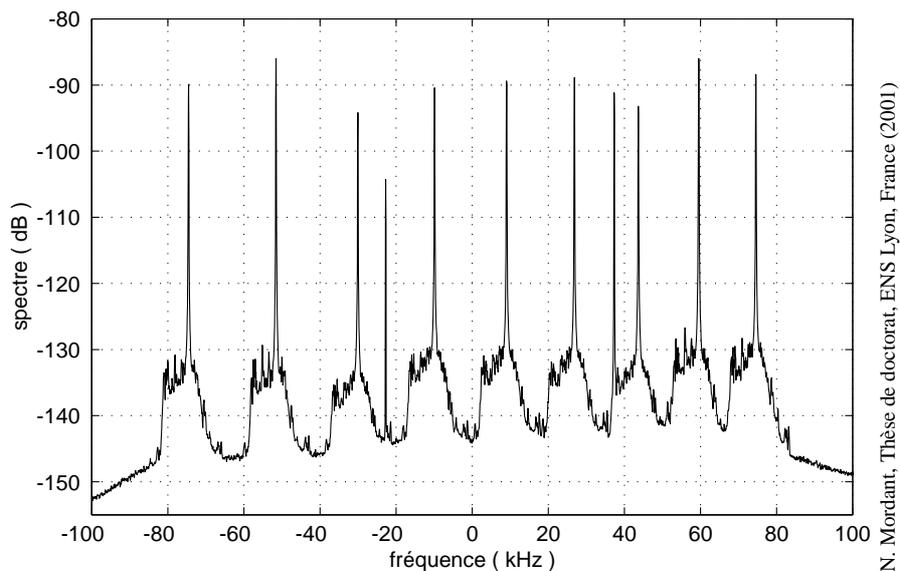


Fig. 2.11 – Spectre du signal issu du sommateur. Dans ce cas les disques tournent à 7 Hz. On a mis environ 6 billes dans la cuve.

La figure 2.11 représente le spectre du signal acoustique issu de la sortie du sommateur dans le cas où les disques tournent à 7 Hz et la cuve contient environ 6 billes. Le signal est extrait de l'expérience man290501. Le niveau de bruit en dehors de la bande utile n'a pas varié. On distingue maintenant dans la bande passante correspondant à chacune des voies, des composantes spectrales supplémentaires dues au passage des billes dans la zone de mesure. Les spectres sont très semblables dans chaque bande de fréquence car ils résultent des mêmes événements.

Sur la figure présentée, le décalage Doppler vaut jusqu'à 7 kHz ce qui correspond à 2 m/s. On notera que l'on a mesuré des vitesses allant jusqu'à plus de 5 m/s. Le Doppler correspondant vaut 17 kHz. On a donc recouvrement des bandes passantes des différentes voies. Tant que l'on ne cherche à mesurer la vitesse que d'une seule bille, cela n'est pas problématique car les composantes spectrales sont toutes décalées dans le même sens et donc elles ne se recourent jamais entre elles. On notera que le niveau du signal intéressant n'est guère plus élevé que le niveau de bruit qui se situe à -145 dB.

On a donc conçu un système d'acquisition qui permet d'enregistrer les signaux diffusés par des particules de diamètre aussi petit que  $250 \mu\text{m}$ . On dispose de deux systèmes d'acquisition qui vont nous permettre de mesurer simultanément deux composantes de la vitesse et d'avoir accès à une estimation de la position de la particule par l'utilisation de réseaux de 9 transducteurs en réception. En ce qui concerne la technique de mesure, il reste à décrire une étape cruciale : l'extraction de la modulation de fréquence due à l'effet Doppler. Ceci fait l'objet du chapitre 4. Auparavant se pose une question fondamentale concernant la mesure elle-même. On marque les particules de fluide par des billes solides pour pouvoir faire la détection. Dans quelle mesure des particules solides suivent-elles les mouvements du fluide ? Peut-on les considérer comme des traceurs ?



## Chapitre 3

# Forces hydrodynamiques sur une bille

Toutes les méthodes de mesures lagrangiennes (du moins les plus récentes) ainsi que les mesures de type "Particle Image Velocimetry" (PIV), utilisent des particules solides pour marquer des particules de fluide. Lorsque la taille de la bille devient très petite devant toutes les échelles spatiales intervenant dans l'écoulement et que sa densité est égale à celle de l'eau alors, intuitivement, on s'attend à ce que la bille ait le même comportement qu'une particule de fluide. Néanmoins, il s'avère difficile de quantifier cette intuition. En particulier, pour une taille et une densité données de la bille peut-on définir un temps caractéristique de réponse de la bille ? Ce problème ne se réduit pas simplement à notre méthode, il concerne une vaste classe de domaines liés à des écoulements polyphasiques comme la sédimentation, la combustion, l'érosion par des particules etc. Quelle est la réponse d'une particule solide à un brusque changement de l'écoulement ? Les approches analytiques se limitent à des nombres de Reynolds relativement bas mais permettent de saisir la physique de ce problème fort délicat.

La question se formule selon les termes suivants : on se donne un fluide vérifiant les équations de Navier-Stokes et une particule solide imposant des conditions aux limites rigides à sa surface. Peut-on formaliser l'action de l'écoulement sur la bille ? La bille introduit une perturbation dans le milieu pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle a une densité pouvant être différente de celle du fluide. Cela crée une force d'Archimède mais intervient également au niveau de son inertie qui sera différente de celle du fluide. Par ailleurs, elle impose des conditions aux limites solides et donc elle est soumise à des forces de frottements visqueux du type forces de traînée. Mais à cause de ces conditions aux limites, elle modifie l'écoulement en créant un sillage. Cette perturbation elle-même est susceptible de réagir sur le mouvement de la bille. On cherche à exprimer la résultante des forces hydrodynamiques subies par une sphère solide plongée dans un fluide sous la forme d'une fonction dépendant des caractéristiques de l'écoulement non perturbé.

### 3.1 Formalisation de l'interaction fluide/particule

On définit un nombre de Reynolds basé sur la taille de la bille :

$$Re = \frac{2rU}{\nu}, \quad (3.1)$$

où  $r$  est le rayon de la bille,  $U$  un ordre de grandeur de la vitesse de glissement de la bille par rapport au fluide et  $\nu$  la viscosité du fluide. Dans la limite  $Re \rightarrow 0$ , une approche analytique peut être menée sous forme de calculs perturbatifs.

### 3.1.1 Prédications dans la limite $Re \rightarrow 0$

Le travail de référence sur le sujet a été publié par Maxey & Riley [49]. Ils considèrent une particule sphérique dans un écoulement de Stokes. En calculant la perturbation induite sur l'écoulement par la présence de la bille, ils arrivent à l'équation suivante :

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = (m_p - m_f)\mathbf{g} + m_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 6\pi r\mu_f(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) + \frac{1}{2}m_f \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)}{dt} + 6r^2(\pi\mu_f\rho_f)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.2)$$

à l'ordre le plus bas en  $r$ .  $\mathbf{u}$  est la vitesse de l'écoulement non perturbé,  $\rho_f$  et  $\mu_f$  respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide.  $\mathbf{v}_p$  est la vitesse de la bille,  $m_p$  sa masse et  $m_f$  la masse de fluide déplacé par la sphère solide.  $d\mathbf{v}_p/dt$  est l'accélération de la particule,  $D\mathbf{u}/Dt \equiv (\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  est l'accélération lagrangienne de l'écoulement non perturbé, à la position de la bille. Cette expression est établie pour un écoulement non uniforme dans la limite  $Re \rightarrow 0$  avec  $\rho_f r W_0 / \mu_f \ll 1$ ,  $\rho_f r^2 U / (\mu_f L) \ll 1$  et  $r/L \ll 1$  ( $U$  est un ordre de grandeur de la vitesse du fluide,  $W_0$  un ordre de grandeur de  $\mathbf{u} - \mathbf{v}_p$  et  $L$  est une échelle spatiale différentielle caractéristique de l'écoulement non-perturbé. On retrouve pour  $\mathbf{u} = 0$  les résultats historiques de Basset(1888), Boussinesq(1903) et Oseen(1927).

L'équation 3.2 est écrite sous une forme que l'on pourrait qualifier de canonique, séparant les différentes actions du fluide :

- le premier terme du membre de droite est simplement la force d'Archimède. Il est dû uniquement à la différence de densité entre le fluide et le solide.
- Le second est l'accélération de la particule de fluide qui se trouverait à la place de la sphère dans l'écoulement non perturbé. Ce terme ne fait pas intervenir les caractéristiques de la bille.
- Le troisième terme est la force de traînée de Stokes.
- Le terme suivant est appelé classiquement en mécanique des milieux continus la *masse ajoutée*. C'est un terme d'origine inertielle. Il est dû à la résistance qu'oppose le fluide environnant la sphère à un changement d'accélération.
- Le dernier terme est le plus intéressant et le plus problématique à la fois. Il est qualifié usuellement de *force d'histoire* ou *force de mémoire*. Il a une origine à la fois visqueuse et inertielle et implique l'ensemble de l'histoire de la particule jusqu'à l'instant  $t$ . Il prend la forme d'un produit de convolution de l'accélération du glissement par un noyau en  $1/\sqrt{t}$ , c'est à dire une mémoire très longue. Ce terme est issu de l'interaction entre la bille et le sillage qu'elle crée lors de son mouvement. On obtient une décroissance en racine carrée du temps car on ne prend en compte dans ces calculs que des phénomènes diffusifs sans considérer les termes non-linéaires ( $Re \rightarrow 0$ ). A nombre de Reynolds plus élevé, on s'attend à ce que des comportements advectifs se mettent en marche et modifient la force d'histoire du moins aux temps longs, car le phénomène diffusif restera présent dans la couche limite.

Dans l'équation 3.2 ne sont pas présentés les termes correctifs dûs à la non-uniformité de l'écoulement qui interviennent dans les trois derniers termes. On ne considérera pas cet aspect dans la suite de ce chapitre. Dans la limite des nombres de Reynolds très petits, on a donc réussi à exprimer les forces hydrodynamiques à partir du champ de vitesse de l'écoulement non perturbé.

### 3.1.2 Extension au cas $Re \leq 1$

L'extension du résultat précédent au cas des nombres de Reynolds finis mais encore petits s'avère assez difficile. Il a été mené en particulier par Lovalenti & Brady ([46, 47]). Il s'agit de prendre en compte les premiers effets convectifs liés à la valeur finie du nombre de Reynolds. Les auteurs se limitent au cas d'un écoulement uniforme et effectuent des calculs perturbatifs. Leurs hypothèses conduisent à modifier l'expression de la force de traînée qui s'écrit alors sous la forme prédite par Oseen

$$\mathbf{F}_{traînee} = -6\pi r \mu_f (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) \left( 1 + \frac{3}{8} Re \right) \quad (3.3)$$

Par contre, la force d'histoire s'écrit de façon beaucoup plus complexe que l'expression fournie par le calcul de Maxey & Riley. En particulier, on ne peut plus réduire son expression sous la forme d'un produit de convolution.

### 3.1.3 Équation empirique

Les différents résultats analytiques mais également numériques ont conduit à une formule empirique pour les forces hydrodynamiques : la poussée d'Archimède et le terme hydrodynamique classique d'accélération lagrangienne ne sont pas modifiés. Le terme de traînée statique est modifié pour prendre en compte les corrections non-linéaires dues au nombre de Reynolds. Cependant ces corrections ne sont pas exprimables de façon analytique et on doit faire appel aux valeurs empiriques obtenues en soufflerie pour le coefficient de traînée. Ce terme prend donc la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{traînee} = \frac{1}{2} \pi r^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p\| (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) c_D(Re) , \quad (3.4)$$

avec  $c_D$  le coefficient de traînée empirique et  $Re$  le nombre de Reynolds instantané.

Le terme de masse ajoutée a fait l'objet d'après discussions sur sa forme ([4, 72, 16]). Finalement, les auteurs s'accordent sur la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{MA} = \frac{1}{2} m_f \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \right) . \quad (3.5)$$

Ce terme fait donc intervenir la différence entre l'accélération lagrangienne, c'est à dire de la particule de fluide en absence de solide, et l'accélération de la bille. On voit que cette expression donne tout son sens au terme *masse ajoutée* car il peut se réécrire simplement en ajoutant  $\frac{1}{2}m_f$  à la fois à la masse d'inertie de la bille et à la masse d'inertie de la particule de fluide. La particule solide se déplace donc avec une inertie supplémentaire due à la présence du fluide autour d'elle.

Le terme d'histoire est présent bien sûr mais son expression est totalement inconnue pour  $Re > 1$ . Nombre d'auteurs ont tenté de retrouver numériquement une formulation sous forme de produit de convolution ayant la dépendance en  $1/\sqrt{t}$  aux temps courts puis une autre dépendance en  $t$  mais aussi en  $Re(t)$  mais sans grand succès ([50, 41]). Les différents auteurs se basent donc, à faible  $Re$  sur une équation de la forme suivante :

$$\begin{aligned} (m_p + \frac{1}{2}m_f) \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = & (m_p - m_f) \mathbf{g} + \frac{3}{2} m_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \\ & + \frac{1}{2} \pi r^2 \rho_f \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_p\| (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) c_D(Re) + \mathbf{F}_{histoire} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les expériences sur ce domaine sont extrêmement rares et se limitent essentiellement à la mesure du coefficient de traînée. Par contre on trouve un nombre conséquent de références relatant des simulations numériques. L'expression du terme de masse ajoutée a été validée par les simulations numériques Chang & Maxey [16] pour une sphère fixe dans un écoulement accéléré. Shridhar & Katz [82] ont effectué des mesures de vitesse sur des bulles d'air dans l'eau. Les mesures sont en accord avec les expressions de la traînée et de la masse ajoutée. L'étude du terme d'histoire est nettement plus délicate. De nombreuses études numériques à la recherche d'un noyau de convolution donnent un comportement aux temps courts compatible avec un noyau en  $1/\sqrt{t}$  ([43, 16, 41]) et en accord avec Lovalenti & Brady aux petits  $Re$ . Mais le comportement aux temps longs est nettement moins clair entre autres pour des problèmes de résolution. Lawrence & Mei [43] trouvent un comportement intermédiaire en décroissance exponentielle de plusieurs ordres de grandeurs suivi par un comportement sous-dominant aux temps extrêmement longs en  $1/t^2$ . De plus ces études se limitent au cas d'un saut instantané dans la vitesse de glissement de la sphère et d'un écoulement uniforme. Expérimentalement ces problèmes n'ont pas été tranchés mais il est clair que dans la limite de la précision des mesures, les particules en chute libre dans un fluide au repos atteignent une vitesse limite en un temps fini. On notera que nous n'avons pas mentionné la présence d'éventuelles forces de lift. Ce problème est encore plus délicat à appréhender et fait l'objet d'une vaste littérature ([3, 4, 18, 20, 44, 74, 82, 88]) qui ne parvient pas à dégager de consensus.

## 3.2 Expériences

Les expériences que nous avons menées pour apporter notre pierre à l'édifice se focalisent sur la chute libre d'une particule initialement immobile dans un fluide au repos [58]. La bille subit donc une marche d'accélération et le moteur du mouvement est la gravité. L'action de l'extérieur est donc d'appliquer une force constante via la poussée d'Archimède. Le régime transitoire et la vitesse limite sont donc entièrement dûs à l'action du fluide. Ces expériences tentent de mettre en évidence la présence ou non d'un temps caractéristique d'atteinte de la vitesse limite. Incidemment, elles permettront également de tester la méthode acoustique de mesure de vitesse.

### 3.2.1 Dispositif expérimental

L'expérience est réalisée dans une cuve de taille  $1.1 \text{ m} \times 0.75 \text{ m}$  et de profondeur  $0.65 \text{ m}$  remplie d'eau au repos. On utilise des billes en verre, acier ou carbure de tungstène de différents diamètres (table 3.1)

La bille est tenue par des pinces cinq centimètres sous la face du transducteur. Elle est lâchée à temps  $t = 0$  sans vitesse initiale et sa trajectoire fait environ  $50 \text{ cm}$  de long. L'acquisition est démarrée un peu avant le lâcher de la bille de façon à obtenir le début du mouvement.

L'écoulement non-perturbé est simplement un liquide en équilibre hydrostatique. Les conditions initiales sont symétriques par rapport à un axe vertical passant par le centre de la bille. Pour des nombres de Reynolds faibles (inférieurs à 200), l'écoulement autour de la sphère reste axisymétrique et on s'attend à ce que la bille ne tourne pas. On a observé que la chute des différentes billes reste verticale et on néglige donc tout effet de rotation. Le nombre de Reynolds prend des valeurs entre 40 et 7700 qui sont des valeurs relativement élevées pour l'étude de ce problème. La vitesse limite des billes varie selon les expériences entre  $0.07$  et  $1.16 \text{ m/s}$ .

N°	$2r$		$\rho_p$	$V_l$	$\sigma_{V_l}$	$\frac{\sigma_{V_l}}{V_l}$	Re	$\tau_{95}$
	mm		$\text{kg m}^{-3}$	$\text{m s}^{-1}$	$\text{mm s}^{-1}$	%		ms
1	0.5	v	2560	0.0741	0.4	0.6	41	55
2	1.5	v	2560	0.218	0.9	0.4	360	142
3	2	v	2480	0.271	1	0.5	600	197
4	0.8	a	7710	0.316	3	0.9	280	108
5	1	a	7850	0.383	2	0.5	430	132
6	2	a	7670	0.636	1	0.2	1400	197
7	3	a	7800	0.813	4	0.5	2700	225
8	4	a	7700	0.973	4	0.4	4300	292
9	6	a	7750	1.158	5	0.4	7700	315
10	1	t	14800	0.590	2	0.3	660	148

Tab. 3.1 – Caractéristiques des sphères solides et des différentes expériences. La troisième colonne indique le matériau : v verre, a acier et t pour carbure de tungstène.  $V_l$  est la vitesse limite et  $\sigma_{V_l}$  la variance correspondante.  $\rho_p$  est la masse volumique de la bille.

On utilise deux transducteurs voisins décrits précédemment et distants de  $100 \mu\text{m}$ . Nous nous sommes donc placé dans une géométrie de rétrodiffusion et le décalage Doppler s'exprime simplement :

$$\Delta\omega = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \quad (3.7)$$

Le signal reçu est directement échantillonné par un appareil hpe1430A à une fréquence de 10 MHz et hétérodyné numériquement à la fréquence d'émission puis décimé. La fréquence d'émission est 2.5 ou 3.5 MHz selon les expériences.

### 3.2.2 Traitement du signal

La nature des signaux enregistrés dans ces expériences est sensiblement différente dans sa structure et ses temps caractéristiques des signaux turbulents attendus pour notre méthode de mesure lagrangienne. Par conséquent, nous utilisons une méthode de traitement du signal autre que celle décrite dans le chapitre 4. Pour ce problème, l'utilisation du spectrogramme et de sa version réallouée ([2, 40]) se révèle particulièrement adaptée. Comme indiqué dans le chapitre précédent, on observe une forte composante autour la fréquence d'émission ramenée à la fréquence nulle après l'hétérodynage (correspondant aux échos des parois de la cuve et de la surface de l'eau qui ne peut être maintenue parfaitement horizontale). Elle est supprimée par filtrage passe-haut numérique d'ordre 5, de fréquence de coupure 25 Hz, ce qui correspond à une vitesse de 0.005 m/s en émettant à 3.5 MHz. Par conséquent, on perd les tous premiers instants de la chute ce qui est gênant surtout pour les vitesses limites les plus faibles. On ne peut éviter ce désagrément qui est dû à la nature de la mesure.

Un exemple de spectrogramme est montré figure 3.1a dans le cas d'une bille d'acier de diamètre 0.8 mm. Cette technique met en évidence l'évolution de la vitesse de la bille mais avec une résolution faible. La version réallouée du spectrogramme est présentée figure 3.1b. Le principe consiste à réallouer l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence. On considère le voisinage d'un point dans le plan temps-fréquence. On affecte l'énergie de ce voisinage au

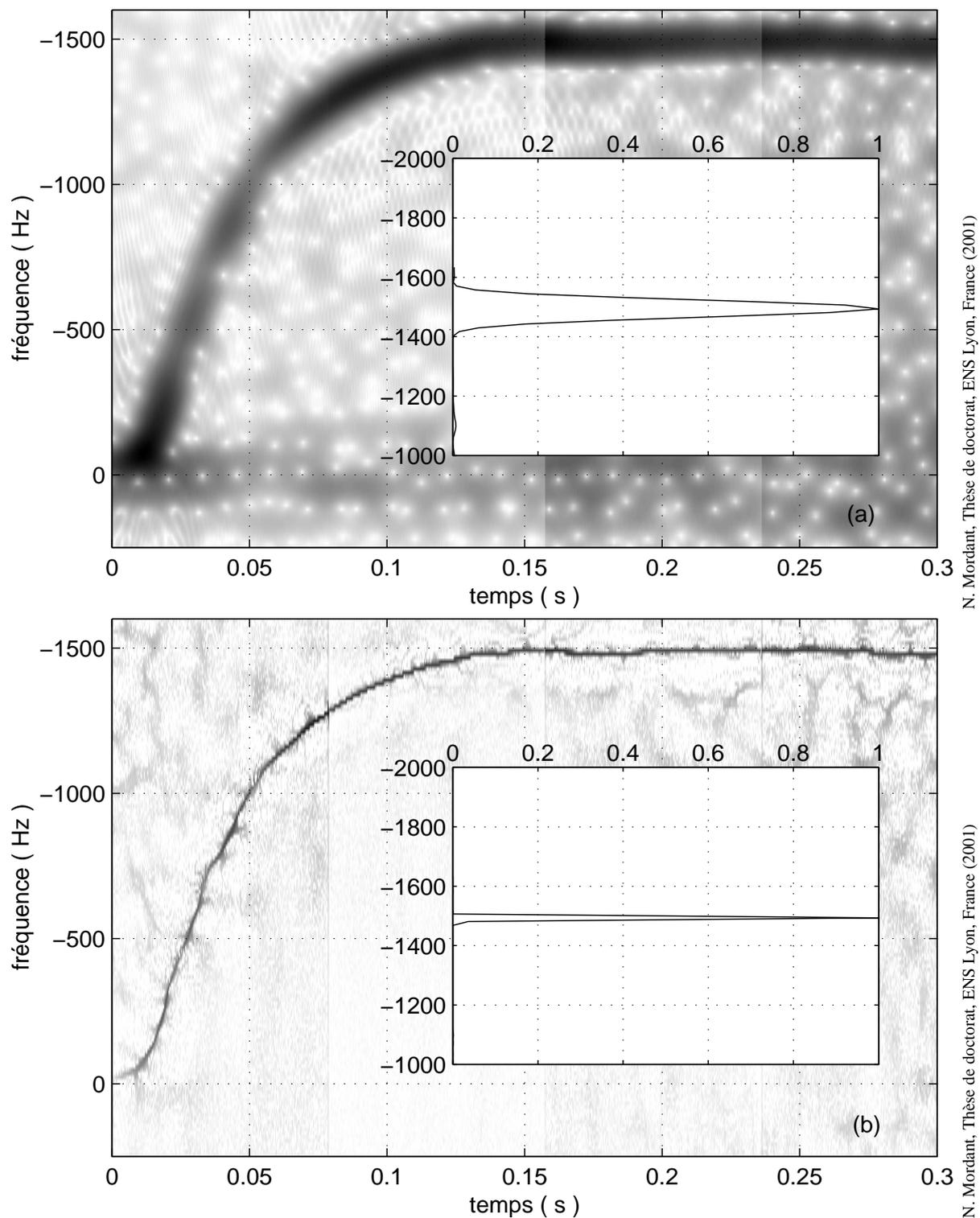


Fig. 3.1 – (a) Spectrogramme du son rétrodiffusé pour une bille d'acier de diamètre 0.8 mm et une fréquence d'émission de 3.5 MHz. (b) Spectrogramme réalloué. Dans chaque image, l'inclusion montre une section normalisée du spectrogramme pour  $t = 0.246$  s.

barycentre de l'énergie de ce voisinage. On peut montrer que cette méthode est optimale dans le cas de modulations linéaires de fréquence [2]. Dans notre cas, comme les constantes de temps sont relativement faibles, on peut tout à fait approximer localement la trajectoire dans le plan temps/fréquence par une droite et la méthode se révèle efficace. On voit sur la figure 3.1b que l'énergie est réallouée sur un pixel de l'image. Dès lors il est simple d'extraire la modulation de fréquence de l'image en prenant simplement le maximum d'amplitude pour chaque instant  $t$ . Pour estimer la sensibilité de cette méthode, on l'applique à des signaux synthétiques modélisant la dynamique de la bille. On simule la chute de la bille et on construit un signal acoustique synthétique modulé en fréquence. On ajoute alors un bruit synthétique similaire à ceux observés dans les expériences (bruit blanc gaussien plus un bruit en  $1/f$  à basse fréquence, le tout filtré à 25 Hz comme les signaux expérimentaux). Le rapport signal/bruit est fixé égal à celui des expériences et les autres paramètres sont identiques. On observe que la résolution de la mesure (en unités *rms*) est alors de l'ordre d'un demi pixel de l'image temps/fréquence. Ceci correspond à 0.3% sur la vitesse de la bille et une résolution temporelle de l'ordre de 1 ms. On notera que la résolution se dégrade aux tous premiers instants de la chute (ie pour  $t < 5$  ms et  $v_p < 0.02$  m/s) à cause de la nature intégrale de la mesure.

On peut également estimer l'erreur de mesure expérimentale de deux façons :

- la fluctuation du décalage Doppler lorsque la bille a atteint sa vitesse limite
- la dispersion des vitesses limites mesurées pour 10 chutes de la même bille.

On trouve alors une erreur *rms* de la vitesse limite de l'ordre de 0.5% (table 3.1) compatible avec la valeur trouvée pour les signaux synthétiques.

### 3.2.3 Chute d'une bille dans un fluide au repos

Afin de comparer le résultat de nos mesures avec les modèles présentés dans le §3.1.3, nous avons effectué une simulation de l'équation empirique dans le cas d'un fluide au repos :

$$(m_p + \frac{1}{2}m_f) \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = (m_p - m_f)\mathbf{g} - \frac{1}{2}\pi r^2 \rho_f \|\mathbf{v}_p\| \mathbf{v}_p c_D(Re) + \mathbf{F}_{histoire} .$$

Nous avons considéré deux cas :

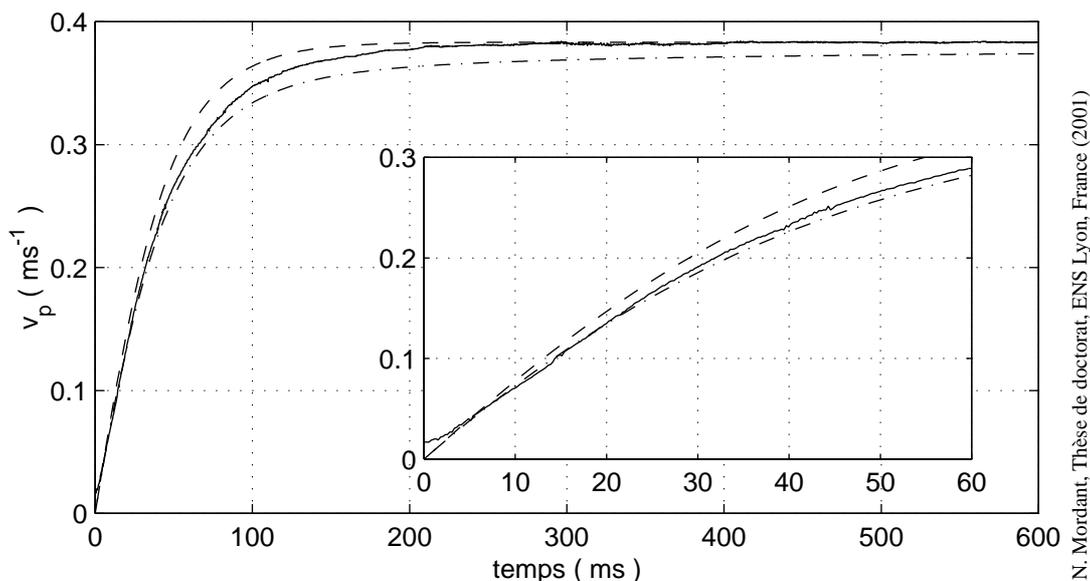
- le cas *sans mémoire* dans lequel on ne prend pas en compte de terme d'histoire
- la cas *de Stokes* dans lequel on considère la forme obtenue dans la limite  $Re \rightarrow 0$  avec un noyau en  $1/\sqrt{t}$ .

Nous avons utilisé les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 en temps et les formules de Newton-Cotes pour le terme d'histoire.

La figure 3.2 présente une mesure de vitesse pour une bille d'acier de 1 mm de diamètre, moyennée sur 10 chutes. Elle présente des caractéristiques communes à toutes les mesures. La vitesse de la bille a une évolution monotone à partir de la vitesse nulle et atteint une vitesse limite.

#### Traînée

On mesure la vitesse limite pour chaque type d'expérience et on moyenne à chaque fois sur 10 réalisations (table 3.1). Lorsque la bille a atteint sa vitesse limite, alors la force d'histoire est nulle ; on a équilibre entre traînée et gravité. Cela permet d'extraire la valeur du coefficient de



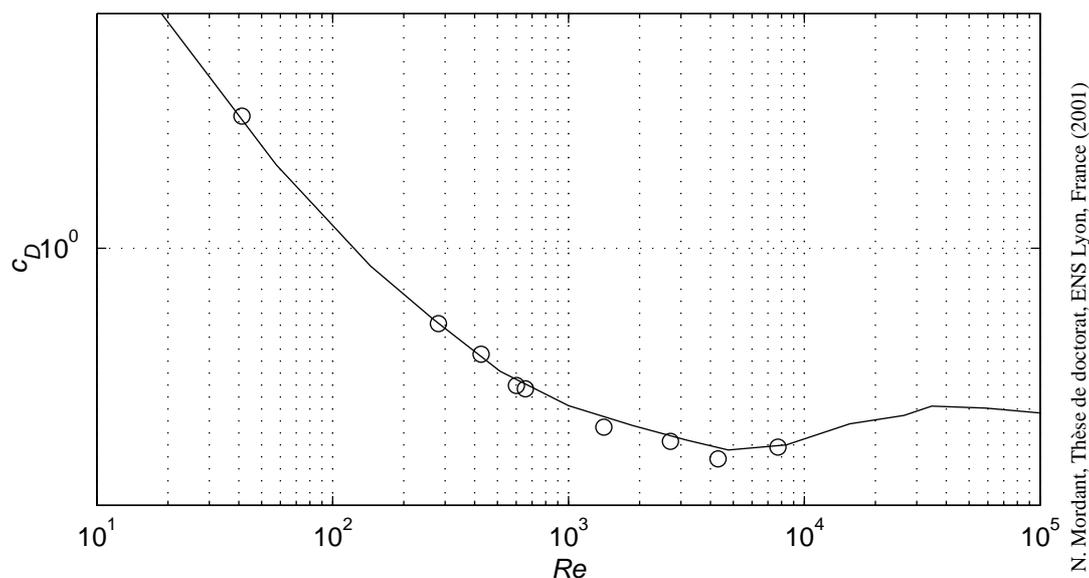
N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 3.2 – Vitesse d’une bille en acier de 1 mm de diamètre (trait plein) comparée à la simulation numérique sans mémoire (pointillé) et avec mémoire de Stokes (trait mixte). L’inclusion montre un agrandissement près du début du mouvement.  $Re = 430$  pour la vitesse limite. On a moyenné 10 réalisations.

traînée  $c_D(Re)$  :

$$c_D = \frac{8rg(d-1)}{3V_l^2} . \quad (3.8)$$

Pour le calcul du nombre de Reynolds, on a utilisé la valeur de la viscosité de l’eau à 25°C,  $\nu = 0.89 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  [93] (confirmée par une mesure avec un viscosimètre de Hubbelhode). Le



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 3.3 – Courbe empirique (trait plein) du coefficient de traînée [73] en fonction du nombre de Reynolds, et nos mesures (o).

résultat est tracé figure 3.3 avec les valeurs empiriques standards. Les résultats sont en bon accord. Si cela est attendu à faible nombre de Reynolds d'après les calculs analytiques, ce résultat n'est pas si évident car les deux mesures ont été effectuées dans des conditions très différentes. La mesure standard est effectuée dans des conditions où la sphère est fixe et l'écoulement incident est uniforme. La forme qui agit sur la sphère peut alors prendre n'importe quelle valeur imposée par les conditions aux limites. On observe alors une série d'instabilités du sillage [62, 75, 36] aboutissant à la génération et l'advection de vortex dans le sillage et donc à un sillage non-stationnaire et à une traînée pouvant présenter des oscillations. Dès lors, à nombre de Reynolds comparable, il n'est pas évident que la bille puisse atteindre une vitesse limite constante car dans notre mesure, toute fluctuation de la traînée a une conséquence directe sur l'accélération de la bille.

On notera que l'existence de la fonction  $c_D(Re)$  induit une équation implicite pour le nombre de Reynolds en fonction des paramètres de l'expérience :

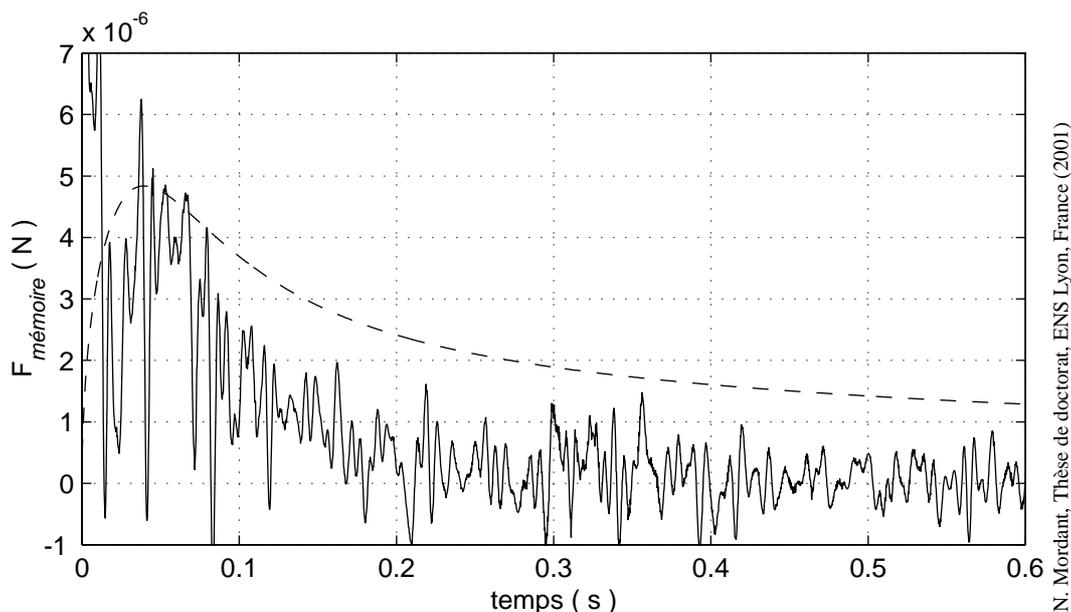
$$Re^2 c_D(Re) = \frac{32r^3(d-1)g}{3v^2} . \quad (3.9)$$

Ceci signifie que l'on ne peut fixer indépendamment  $Re$ ,  $r$  et  $d$ . En pratique, on ne maîtrise pas le choix du nombre de Reynolds qui est imposé par les valeurs du diamètre et de la densité de la bille.

### Effet de mémoire

Pour estimer l'importance de l'influence du sillage de la bille sur son mouvement, c'est à dire l'effet de mémoire, on a tracé sur la figure 3.2, le résultat de la simulation numérique de l'équation (3.6) sans force d'histoire et avec force de Stokes. Dans ces simulations, on a utilisé les valeurs du coefficient de traînée obtenues par nos mesures de façon à obtenir la même vitesse limite pour la mesure et pour les simulations. On voit aux temps courts (inférieurs à 20 ms) une déviation de la mesure par rapport à la simulation sans terme de mémoire. La mesure est en réalité proche de la simulation avec terme de mémoire de Stokes. Ceci est cohérent avec l'intuition qu'aux temps courts, le sillage se forme par diffusion de la vortécité à partir de la surface de la sphère. Par contre, on s'attend à un comportement différent pour des temps plus longs car alors le phénomène d'advection se met en marche et l'approximation de Stokes n'est plus valide. Pour des temps plus longs, on observe que la mesure s'éloigne de la courbe simulée avec mémoire de Stokes, pour atteindre une vitesse limite pour un temps de l'ordre de 300 ms. La simulation avec mémoire en  $1/\sqrt{t}$  n'atteint pas la vitesse limite. On note que la mesure est toujours comprise entre les deux courbes simulées correspondant à des cas extrêmes, mémoire "infinie" et pas de mémoire du tout.

En dérivant le signal de vitesse, nous avons accès à la force appliquée à la bille. Par ailleurs, nous pouvons calculer la force de traînée statique et la poussée d'Archimède et donc par différence estimer la force de mémoire. Le résultat est présenté sur la figure 3.4 et comparé au résultat de la simulation avec force de Stokes. En dépit du bruit élevé, on observe que les deux courbes ont un comportement similaire aux petits temps et atteignent un maximum dont la valeur est comparable pour les deux courbes. Par contre, pour des temps longs apparaît alors la différence notable entre les deux comportements. En 0.25 s, la force mesurée s'annule (à la précision de la mesure) tandis que la courbe simulée n'a perdu que 50% de son maximum. Ceci est cohérent avec les simulations numériques de Lawrence et Mei [43] : aux temps courts, ils observent un comportement de Stokes. Aux temps très longs, la décroissance de la mémoire est



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 3.4 – Le terme de mémoire de l'équation (3.2.3) calculé à partir de la vitesse de la sphère d'acier de 1 mm (figure 3.2). En pointillés, le terme de mémoire issu de la simulation avec mémoire de Stokes.

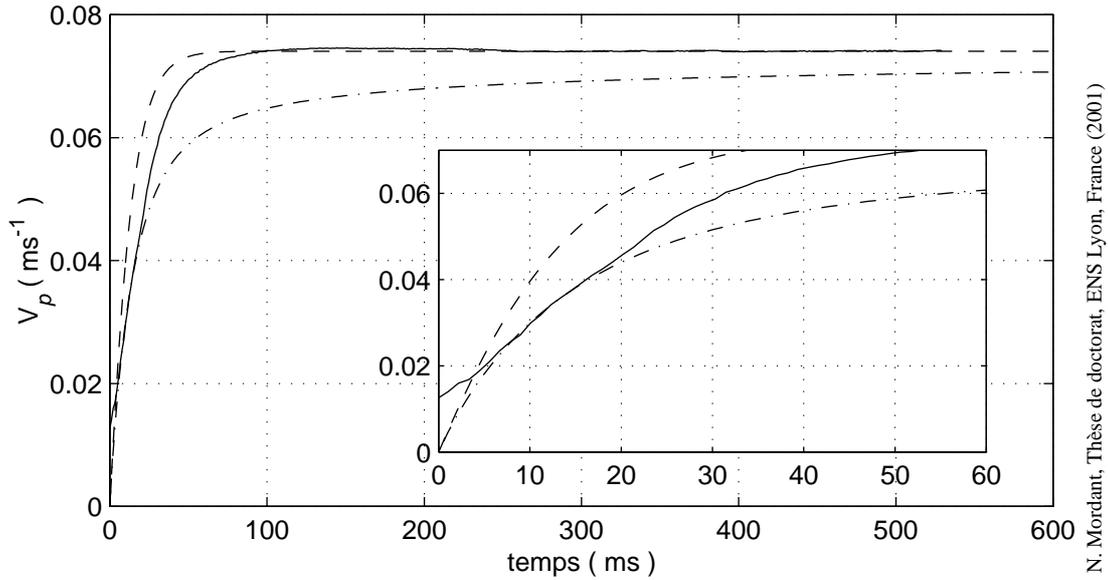
en  $1/t^2$  mais seulement après une chute sévère, exponentielle, de plusieurs ordres de grandeur. Si un tel comportement a lieu dans notre cas, il est vraisemblable que le terme asymptotique soit inférieur à la précision de la mesure.

On remarquera que dans toutes les expériences, on retrouve un comportement de Stokes au démarrage du mouvement, jusqu'à ce que la bille atteigne une fraction de  $1/3$  à  $1/2$  de sa vitesse limite. Cela peut correspondre à des nombres de Reynolds assez élevés ( $Re \sim 300$  pour la bille d'acier de 1 mm). Le terme de mémoire a donc une contribution significative, en dépit du fait que l'amplitude de la force de mémoire vaut au mieux un dixième du poids de la bille. Pour la bille d'acier de 1 mm, la force de gravité vaut  $70 \mu\text{N}$  alors que la valeur maximale mesurée pour la force d'histoire vaut  $5 \mu\text{N}$ .

### Effet du nombre de Reynolds

Le mouvement de la bille pour différents nombres de Reynolds est présenté figure 3.5 et 3.6 correspondant aux expériences numéro 1,4,6,7,8. L'expérience numéro 1 correspond à une bille de verre de diamètre 0.5 mm. Elle a le plus petit nombre de Reynolds atteint dans nos expériences, autour de 40, et est dans la plage couverte par les simulations numériques de Lawrence et Mei. Le comportement est le même que dans toutes les autres expériences et ne met pas en évidence une décroissance algébrique lente.

Afin d'étudier la dépendance en nombre de Reynolds, indépendamment d'effets de densité, on utilise des billes d'acier de divers diamètres (figure 3.6). L'évolution de la vitesse est similaire pour toutes les billes, en particulier la vitesse atteint sa limite en un temps fini. Bien entendu, la valeur de cette limite et le temps mis pour l'atteindre dépendent du diamètre de la bille. On définit un temps caractéristique  $\tau_{95}$  comme le temps nécessaire à la bille pour atteindre 95% de sa vitesse limite. Une analyse dimensionnelle du problème fournit l'expression suivante pour



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 3.5 – Évolution de la vitesse pour l'expérience #1.  $Re = 41$

$\tau_{95}$  :

$$\tau_{95} = \left( \frac{r}{g} \right)^{\frac{1}{2}} F(Re, d) , \quad (3.10)$$

où  $F$  est une fonction de la densité et du nombre de Reynolds. A partir de l'équation 3.6 sans terme de mémoire, on obtient un temps caractéristique  $\tau_0$  :

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{8}{3}} \sqrt{\frac{r}{c_{D0}g}} \frac{d + \frac{1}{2}}{\sqrt{d-1}} , \quad (3.11)$$

où  $c_{D0}$  est le coefficient de traînée basé sur la vitesse limite et contient la dépendance en nombre de Reynolds. Nous n'observons pas de dépendance claire de  $\tau_{95}$  avec le nombre de Reynolds (figure 3.7). Dans l'intervalle de  $Re$  exploré dans nos expériences, la dépendance de  $\tau_{95}$  est  $(r/g)^{\frac{1}{2}}$  (pour densité fixée) qui est un temps convectif. Pour des nombres de Reynolds très faibles, on prédit un temps caractéristique diffusif  $r^2/\nu$ . Cela confirme que pour des nombres de Reynolds grands par rapport à 1, le phénomène impliqué dans le mouvement de la bille passe de la diffusion à l'advection. On note également que le terme de mémoire doit être pris en compte jusqu'à des nombres de Reynolds supérieurs à 4000 pour décrire correctement l'accélération de la bille.

On peut retracer les signaux de vitesse, adimensionnés par leur valeur limite en fonction d'un temps  $t^* = t/(r/g)^{\frac{1}{2}}$  (figure 3.8). On voit alors qu'après la période de régime de Stokes, les courbes se superposent selon une forme exponentielle :

$$V^* = \frac{v_p}{V_l} = 1 - \exp\left(-\frac{3t}{\tau_{95}}\right) . \quad (3.12)$$

Finalement, l'observation du cas du nombre de Reynolds le plus grand montre un nouveau phénomène intéressant (figure 3.9, bille d'acier de 6 mm, expérience numéro 9). Tandis que pour toutes les autres billes, la courbe mesurée se tenait dans l'intervalle entre les deux courbes

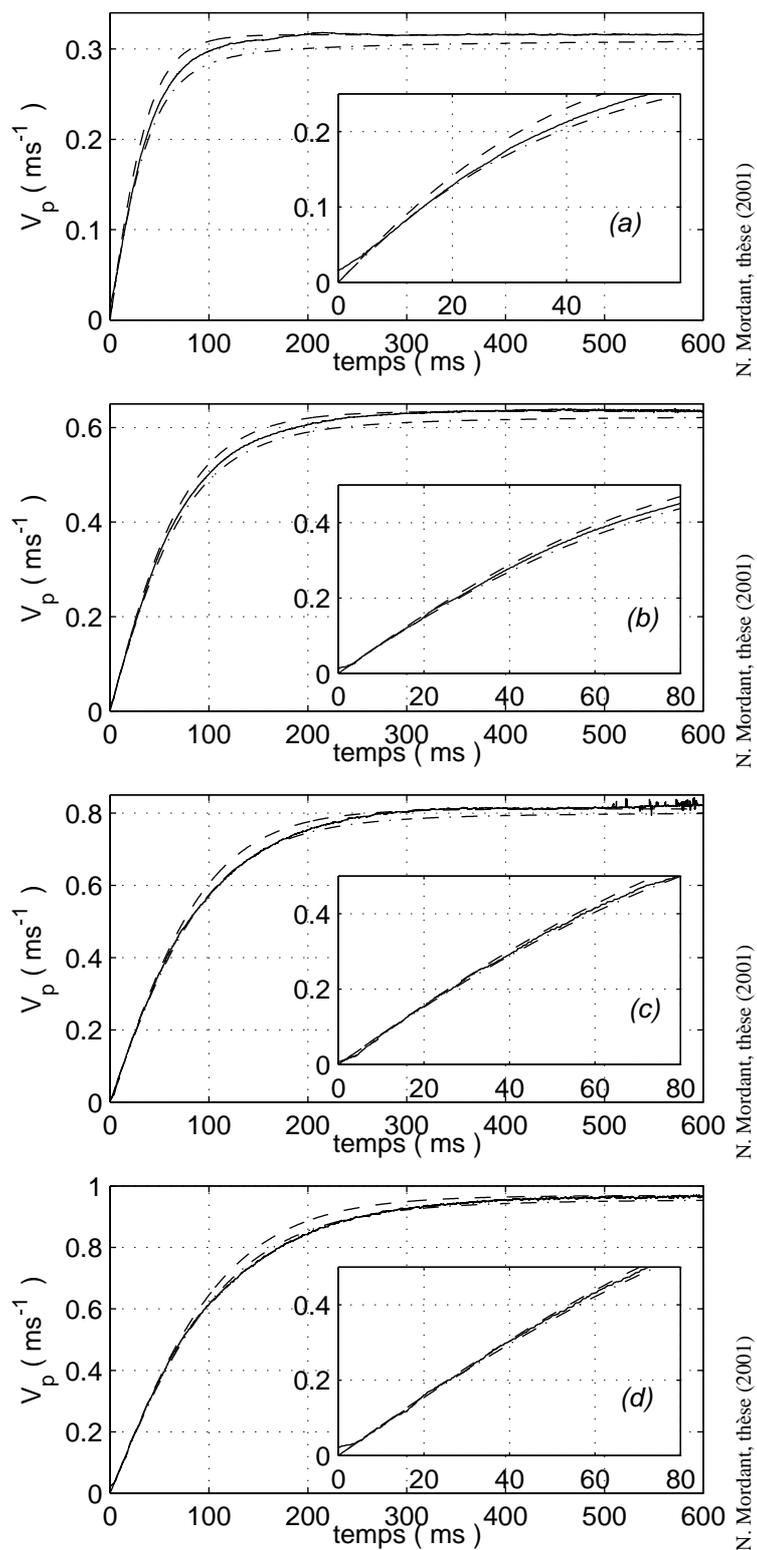


Fig. 3.6 – Évolution de la vitesse pour les expériences #4(a),6(b),7(c),8(d) pour des billes d'acier de diamètre 0.8, 2, 3, 4 mm – voir table 3.1.

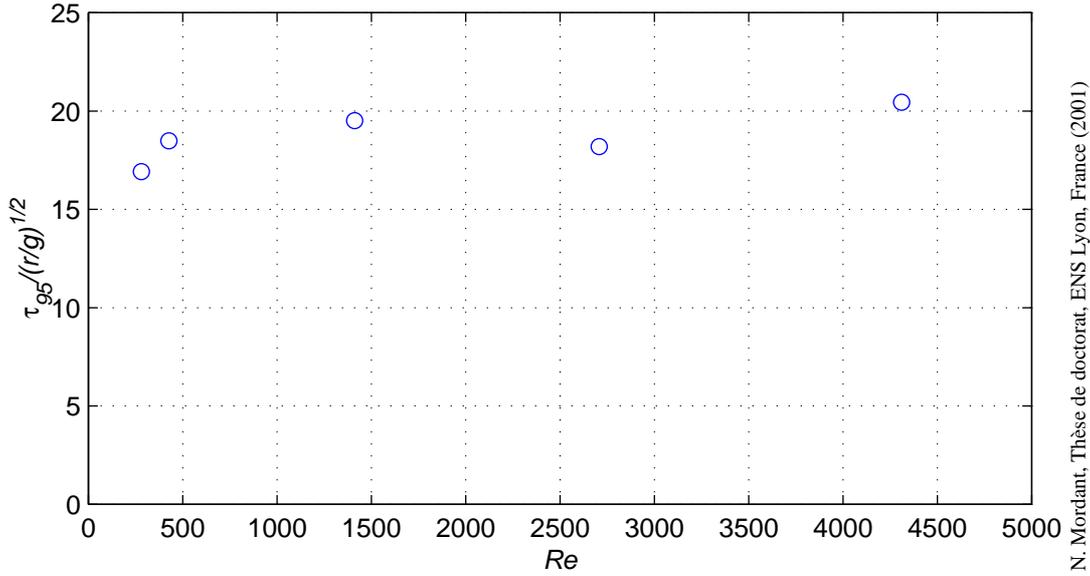


Fig. 3.7 – Temps caractéristique  $\tau_{95}$  adimensionné par  $(r/g)^{1/2}$  en fonction du nombre de Reynolds pour des billes d'acier de diamètre 0.8 à 4 mm

simulées, ce n'est plus le cas ici. La bille accélère tout d'abord sans effet de mémoire puis subit une réduction brutale de son accélération qui passe de  $a_1 = 6 \text{ m.s}^{-2}$  à  $a_1 = 3.6 \text{ m.s}^{-2}$  en moins de 20 ms. Alors la vitesse devient plus faible que dans la simulation avec force de Stokes. Cependant, la bille atteint toujours sa vitesse limite en un temps de l'ordre de  $(r/g)^{1/2}$ . Cet effet est extrêmement reproductible et des précurseurs peuvent être observés pour les billes d'acier de 3 et 4 mm. Une variation d'accélération aussi brutale doit être liée à un changement violent dans la structure du sillage de la bille. Cet effet apparaît pour des nombres de Reynolds supérieurs à 3000 et semble s'amplifier quand on accroît le diamètre de la bille.

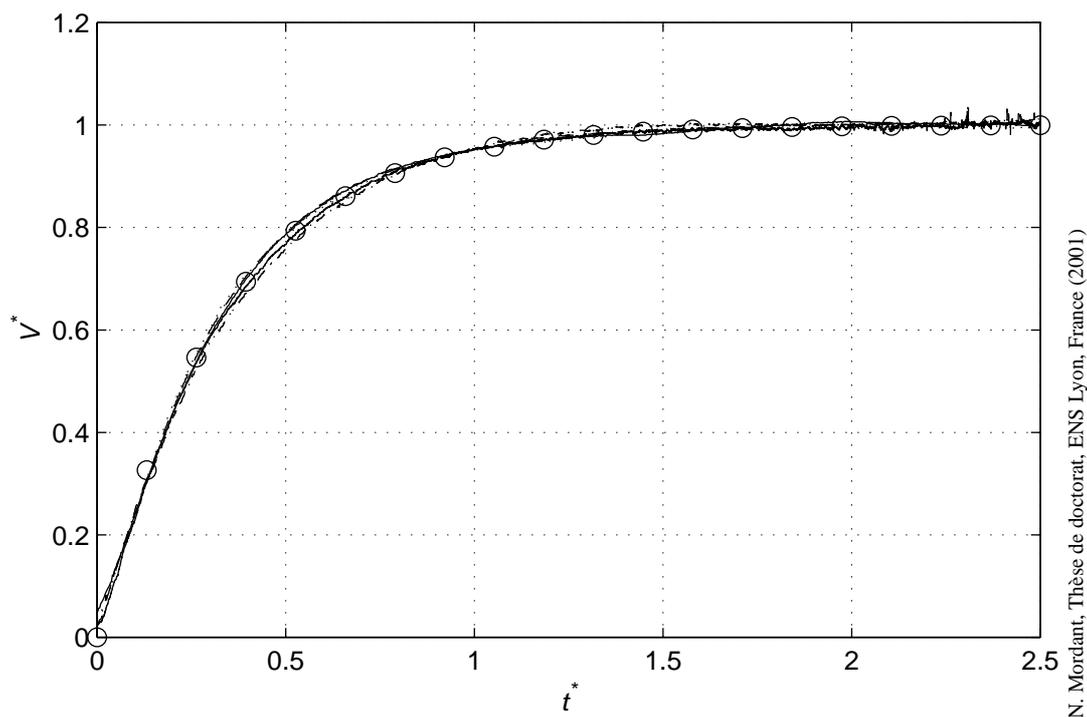
### Effets de densité

La densité apparaît dans l'équation 3.6 de deux façons. Tout d'abord, dans le terme de gravité, la quantité  $d - 1$  est présente dans la masse gravitationnelle effective. La densité apparaît différemment dans la masse inertielle effective sous la forme  $d + \frac{1}{2}$ . L'équation peut être réécrite sous la forme

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{3}{8} \frac{v_p^2 c_D(Re)}{r(d + \frac{1}{2})} - \frac{d - 1}{d + \frac{1}{2}} g + \frac{F_{history}}{m_f(d + \frac{1}{2})} \quad (3.13)$$

La traînée et la gravité effectives varient alors en  $(d - 1)/(d + 1/2)$  tandis que le terme de mémoire varie en  $1/(d + 1/2)$ . Sa contribution est donc accentuée lorsque  $d$  tend vers 1.

En changeant la densité, on change le rapport inertie/gravité et on s'attend donc à observer des comportements dynamiques différents. En particulier, on espère qu'une bille légère sera davantage influencée par la non-stationnarité éventuelle de son sillage. Dans la figure 3.10a et b, on compare deux billes à  $Re$  voisin de 400 (verre et acier) et 630 (carbure de tungstène et verre) pour une seule réalisation. Dans les deux cas, on voit que la bille de verre (plus légère) montre des oscillations avant d'atteindre sa valeur limite. De telles oscillations sont probablement liées à l'évolution temporelle du sillage de la bille. La vitesse n'est plus une fonction monotone et



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 3.8 – Mesures de vitesse en unités adimensionnées pour les billes d’acier de diamètres 0.8 à 4 mm. Les cercles marquent l’évolution exponentielles de l’équation 3.12.

alterne croissance et décroissance. Cela signifie que l’accélération de la bille change de signe et que la réaction du sillage, et donc le terme d’histoire, est suffisamment intense pour dominer la gravité. Cet effet n’est pas observé pour les billes métalliques plus inertielles.

Les oscillations disparaissent lorsqu’on moyenne sur plusieurs réalisations (fig. 3.10c,d). On obtient alors des valeurs de  $\tau_{95}$  voisines de celles obtenues pour les autres densités. Cette disparition montre que les événements responsables de ces oscillations ne sont pas cohérents dans le sens où ils se dérouleraient toujours aux mêmes instants. Il est tentant d’associer ces événements avec la génération périodique de vortex dans le sillage qui a lieu à ces valeurs de  $Re$  pour une sphère fixe (le seuil est alors de l’ordre de 250). Cependant, les oscillations sont plus lentes que celles observées pour une sphère fixe pour lesquelles le nombre Strouhal est de l’ordre de 0.2 pour  $Re = 500$  tandis que nous mesurons  $St \sim 0.05$ . Les oscillations sont atténuées et on n’observe pas, dans la limite de la précision de notre mesure, d’oscillations persistantes aux grands temps. Ces oscillations seraient donc plutôt reliées à un changement structural du sillage qui se stabilise dans une configuration lorsque la bille atteint sa vitesse limite.

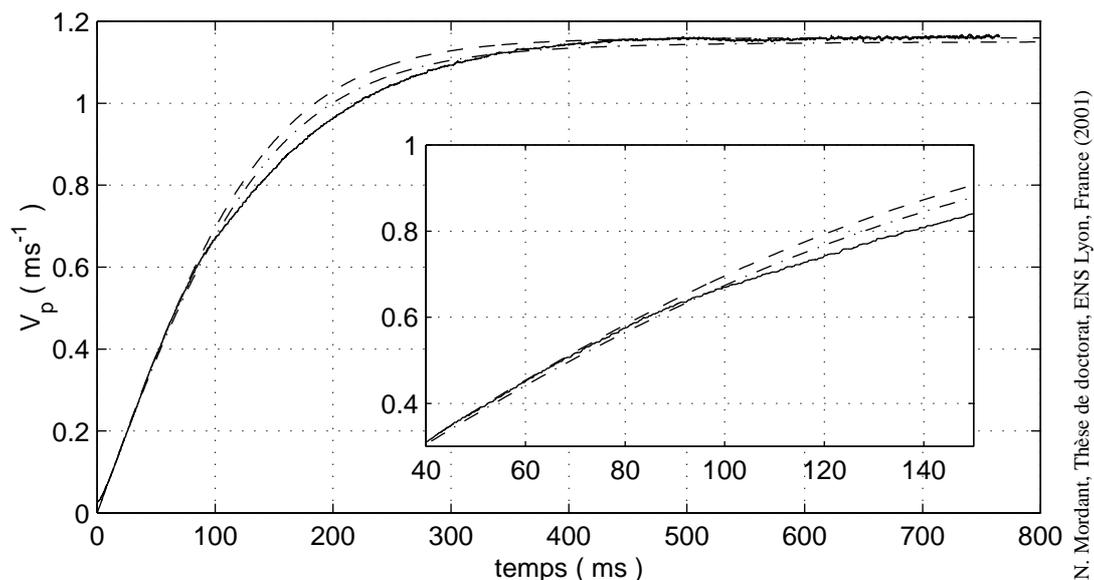


Fig. 3.9 – Mesure de la vitesse et simulations numériques correspondant à une bille d’acier de 6 mm ( $Re = 7700$ ).

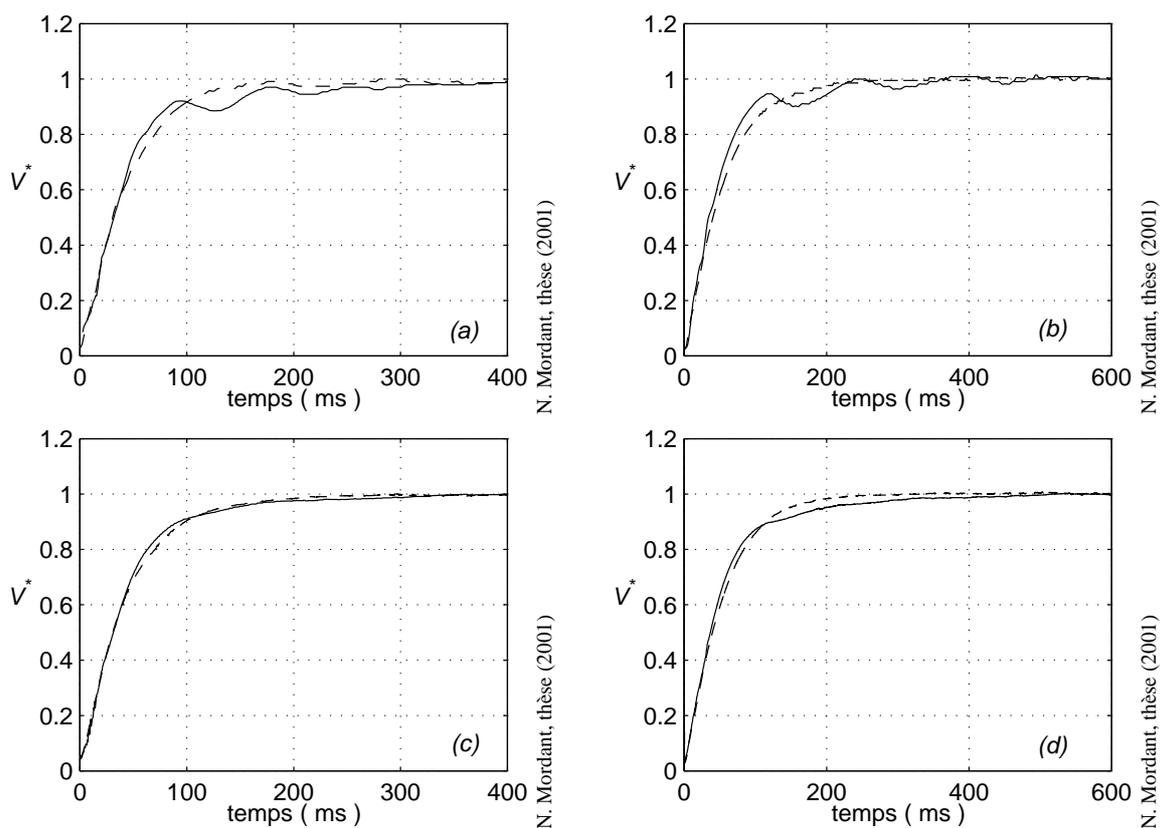


Fig. 3.10 – Comparaison des vitesses mesurées pour (a) carbure de tungstène diamètre 1 mm (pointillés) et verre diamètre 2 mm (trait plein)  $Re \sim 400$ , (b) acier diamètre 1 mm (pointillés) et verre diamètre 1.5 mm (plein)  $Re \sim 630$ . (c) et (d) sont les graphes équivalent après moyenne de 10 réalisations.

### 3.2.4 Rebonds

Jusqu'à présent, nous avons considéré uniquement le cas d'une bille tombant dans un fluide initialement parfaitement au repos. On peut aussi se demander ce qui se passe lorsque la bille, après avoir rebondi au fond de la cuve remonte dans le fluide. Dans ce cas, elle retransverse en sens inverse son sillage et on s'attend à observer une forte différence avec les mesures précédentes car la bille va traverser du fluide ayant été mis en mouvement par son premier passage. Au moment du rebond, la vitesse subit un changement de sens brutal qui peut s'écrire comme une marche à l'instant  $t_0$ . L'accélération s'écrira donc avec une fonction de Dirac au même instant. Dans le cas d'une mémoire de type Stokes, la contribution due au Dirac  $\delta(t - t_0)$  à l'instant  $t$  est proportionnelle à :

$$\int_0^t \frac{\delta(\tau - t_0)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{t - t_0}}. \quad (3.14)$$

On voit que l'accélération, en plus de la discontinuité due au changement de signe de la vitesse en contient une autre, due à l'effet de mémoire, dont l'effet s'atténue dans ce cas en  $1/\sqrt{t}$ .

Nous avons enregistré les ultrasons diffusés par différentes billes d'acier lorsqu'elle rebondissent sur une plaque de résine polyuréthane posée sur le fond de la cuve. Cette résine est nécessaire pour supprimer la réflexion des ultrasons sur le fond de la cuve. La vitesse mesurée dans le cas d'une bille de 6 mm est présentée figure 3.11(a). La bille subit une première chute assez longue pour atteindre sa vitesse limite avant de heurter le fond et de rebondir. On mesure un coefficient de restitution pour le premier rebond proche de 0.7. On peut intégrer temporellement le signal de vitesse pour obtenir la position de la bille (figure 3.11(b)). On notera que l'on enregistre un grand nombre de rebonds (supérieur à 10) et qu'à partir du quatrième rebond, la hauteur du rebond est inférieure au diamètre de la bille. Les derniers rebonds enregistrés correspondent à des mouvements de quelques dixièmes de millimètres. Ceci met en évidence la sensibilité de cette technique de mesure. On peut effectuer la simulation numérique de la chute avec ou sans terme de mémoire en ajoutant comme ingrédients supplémentaires la position du fond, le coefficient de restitution et en modifiant le terme de masse ajoutée pour prendre en compte la présence d'une paroi. Dans la limite non visqueuse, le coefficient de masse ajoutée est modifié d'un facteur :

$$1 + \frac{3}{8} \frac{r}{r+h} \quad (3.15)$$

où  $h$  est la distance entre la particule et la paroi [54]. Donc lorsque la particule touche la paroi ( $h = 0$ ), le coefficient de masse ajoutée passe de  $\frac{1}{2}$  à  $\frac{11}{8}$ . On a vu dans les paragraphes précédents, qu'aucune des deux simulations ne décrit parfaitement la chute mesurée. Par conséquent, la bille n'atteint pas le fond au même instant dans les deux simulations et pour la mesure. Néanmoins, en recalant les axes temporels de façon à faire coïncider le temps du premier impact, on peut comparer les trois comportements (figure 3.12 dans le cas d'une bille d'acier de 3 mm). On voit tout d'abord que les simulations sont loin de reproduire le premier rebond. On note que la simulation sans terme de mémoire est plus loin de la réalité que la simulation avec terme de mémoire de Stokes. En regardant de façon plus précise, on note que c'est principalement dans les premiers instants après le rebond que les simulations sont en désaccord très net avec la vitesse mesurée. Pendant la première dizaine de millisecondes on remarque que la vitesse mesurée décroît nettement plus rapidement pour la mesure que pour chacune des deux simulations. Par conséquent dans la mesure, la bille perd davantage d'énergie cinétique après le rebond

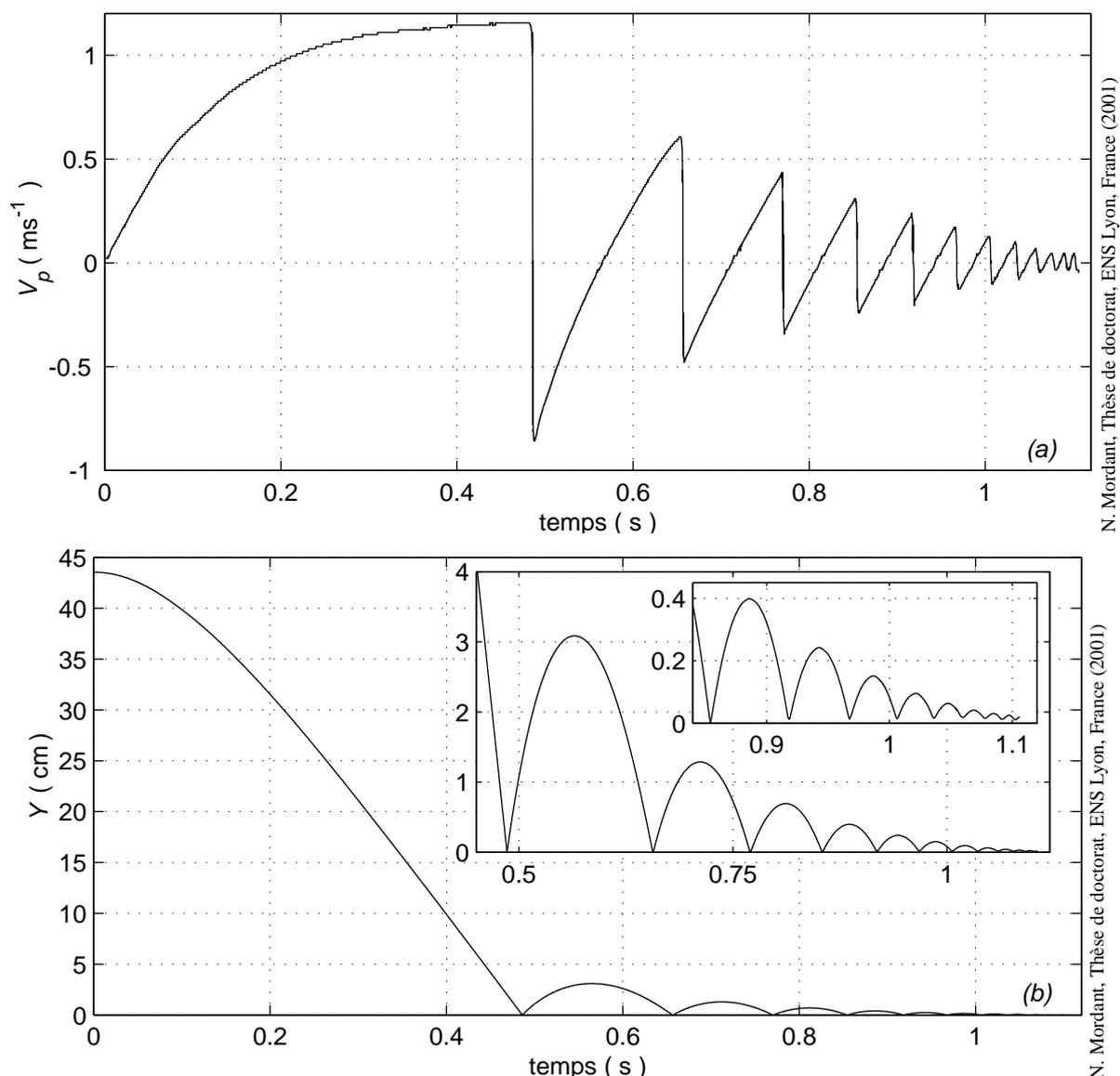


Fig. 3.11 – Mesure de vitesse pour les rebonds d’une bille d’acier de diamètre 6 mm. (a) vitesse mesurée, (b) altitude calculée. La bille a atteint sa vitesse limite lorsqu’elle heurte le fond ( $Re = 7700$ ).

que dans les simulations. On note qu’une fois passée cette dizaine de millisecondes, la vitesse mesurée reprend une évolution parallèle aux deux simulations. La distance verticale parcourue pendant la phase initiale de remontée est 4.5 mm soit un peu plus que son diamètre (3 mm) donc une distance très courte. On peut mettre en évidence cet effet en calculant l’accélération de la bille et en la comparant avec les contributions dues à la gravité et la traînée calculée à partir de la vitesse mesurée. On peut également estimer la contribution d’une force de mémoire de Stokes. Le résultat est tracé sur la figure 3.13. L’accélération expérimentale est assez bruitée car elle est calculée à partir d’une seule réalisation et qu’il est difficile de dériver proprement le signal à cause des pixels de l’image qui créent un signal en marches d’escalier. Néanmoins cette figure met nettement en évidence le fait que la contribution due uniquement à la gravité et la traînée est nettement insuffisante pour reproduire la mesure. Si on calcule quelle serait

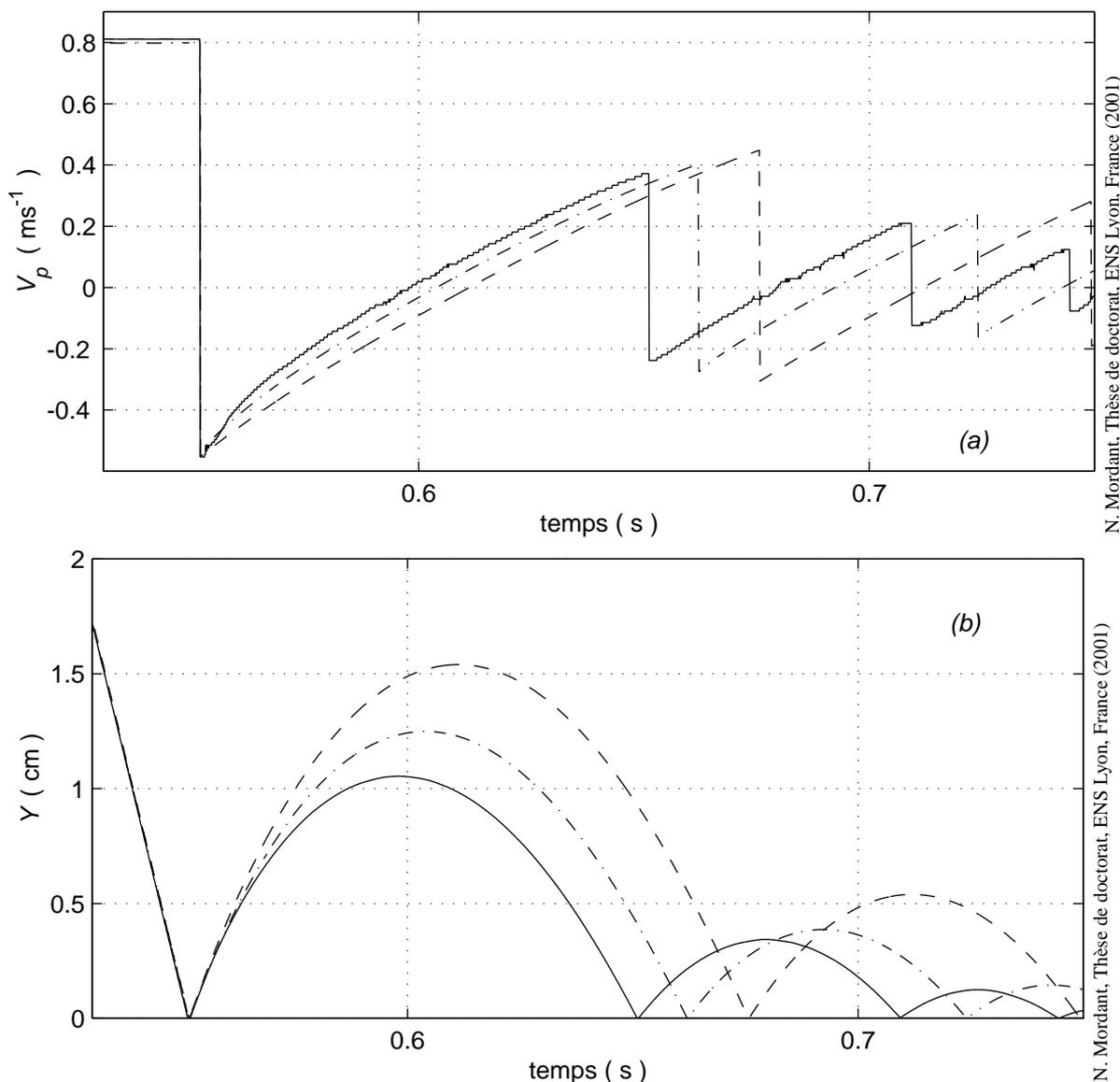


Fig. 3.12 – (a) comparaison de la vitesse mesurée (trait plein) avec la simulation sans mémoire (tirets) et avec mémoire de Stokes (mixte) (b) idem pour la position

l'accélération avec un terme de mémoire de Stokes, on voit que l'on se rapproche de la réalité. Dans ce cas, il est donc clair qu'un autre phénomène est la cause de cet effet de fort freinage après le rebond. On peut imaginer que cela puisse être dû à l'interaction de la bille lorsqu'elle commence à remonter avec une structure du sillage qu'elle a créé en descendant. Le nombre de Reynolds lorsque la bille heurte le fond est de l'ordre de 2700. A un  $Re$  aussi élevé, on s'attend à ce que le sillage ait une structure complexe. Par ailleurs, comme la première chute est très longue, cette structure a eu le temps de se développer avant l'impact (ce qui n'est pas le cas pour les rebonds suivants pour lesquels on n'observe pas un effet similaire). L'interaction de la bille avec son sillage encore intact lors du début de la remontée pourrait expliquer ce freinage violent. De plus à ces nombres de Reynolds, on ne s'attend pas à une interaction spéciale (autre que via le terme de masse ajoutée) entre la bille et la paroi ([30]).

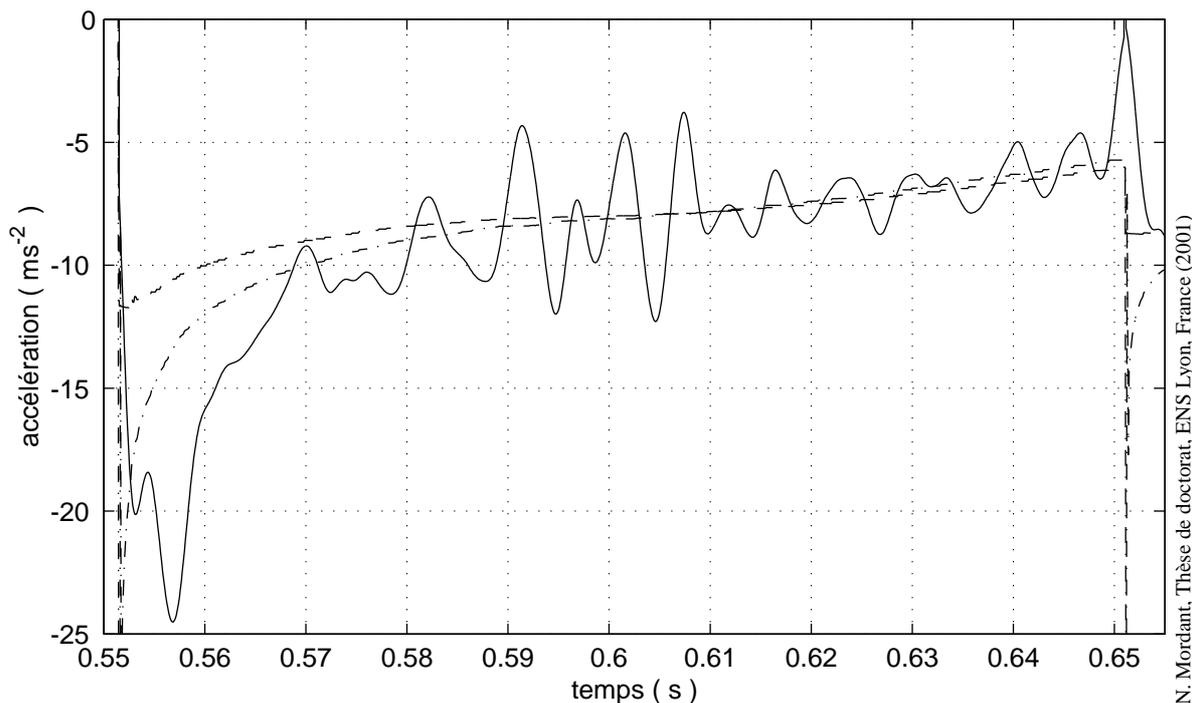


Fig. 3.13 – Trait plein : accélération de la bille obtenue par dérivation du signal de vitesse ; tirets : contribution de la traînée et la gravité calculée à partir de la vitesse mesurée ; trait mixte : contribution de la traînée, la gravité et une force de mémoire de Stokes estimée à partir de la vitesse et l'accélération mesurées. Les fortes oscillations pour des temps voisins de 0.6 s sont dues au passage de la vitesse par 0 (la dérivation agit comme un filtre passe-haut)

### 3.2.5 Conclusion

La principale conclusion qui ressort de ces expériences est la mise en évidence de l'existence d'un temps caractéristique dans l'évolution de la vitesse d'une particule en chute libre dans un fluide au repos. Ce temps caractéristique s'exprime

$$\tau = 6.5 \sqrt{\frac{r}{g}}, \quad (3.16)$$

que l'on peut reformuler

$$\tau = 6.5 \sqrt{\frac{r(d-1)}{a_p}}, \quad (3.17)$$

où  $a_p$  est l'accélération typique subie par la particule c'est-à-dire  $(d-1)g$  dans le cas de la chute. Si on suppose qu'une telle expression reste valide dans le cas d'une bille dans un écoulement turbulent, on peut comparer ce temps caractéristique au temps caractéristique de l'écoulement à l'échelle du diamètre de la bille qui vaut  $\tau_f = \varepsilon^{-1/3}(2r)^{2/3}$ . Dans le cas d'une particule de  $250 \mu\text{m}$  à un nombre de Reynolds  $R_\lambda = 740$ , on mesure une accélération subie par la bille de l'ordre de  $300 \text{ m/s}^2$  (voir chapitre 7). Pour une densité de 1.06, on obtient un rapport temps caractéristique de la bille / temps caractéristique de l'écoulement de l'ordre de 0.7, ce qui tend à dire que la bille suit l'écoulement pour des temps au moins égaux au temps

caractéristique de l'écoulement à son échelle. Cependant ce temps n'est pas le plus petit présent dans l'écoulement. Dans le même écoulement, on estime  $\tau_\eta = 0.2$  ms. Le rapport du temps caractéristique de la bille sur le temps de Kolmogorov est donc de l'ordre de 7. Le spectre de vitesse sera donc tronqué par la réponse de la bille aux alentours de quelques  $\tau_\eta$  (voir chapitre 6). On ne s'attend pas à ce que ces valeurs numériques soient exactes, mais elles fournissent des ordres de grandeurs que l'on vérifiera dans les chapitres suivants.

## Chapitre 4

# Analyse spectrale des signaux acoustiques

Afin de compléter la présentation de la méthode de mesure, il reste à décrire l'étape de traitement numérique du signal permettant d'extraire la modulation de fréquence due à l'effet Doppler. Il s'agit d'un problème assez délicat et inhabituel dans le domaine de l'analyse spectrale. En effet, on cherche à démoduler des signaux dont les composantes spectrales varient très rapidement. Le décalage Doppler vaut quelques kiloHertz et est susceptible d'évoluer sur des durées de l'ordre de la milliseconde. On dispose donc au mieux de quelques périodes d'oscillation pour estimer la fréquence. Ceci est très différent des configurations usuelles de modulation de fréquence dont les fréquences caractéristiques sont généralement bien distinctes. De la même façon, en matière de détection par sonar, les sous-marins n'ont pas un mouvement erratique comme une bille dans un écoulement turbulent. Les techniques usuelles sont donc inadaptées à notre problème très instationnaire. On a donc utilisé une méthode de maximum de vraisemblance approchée dont le couplage avec un filtre de Kalman permet d'obtenir les performances désirées[60].

### 4.1 Introduction aux méthodes d'analyse spectrale

On peut décrire deux grandes classes de méthodes d'analyse spectrale : les méthodes paramétriques et les non-paramétriques. Parmi ces dernières, on peut séparer les méthodes s'appliquant dans un contexte stationnaire et les méthodes non-stationnaires.

Les méthodes non-paramétriques stationnaires sont basées essentiellement sur l'utilisation de la transformée de Fourier. On suppose que le signal à étudier est stationnaire et l'on cherche à estimer son contenu spectral sans hypothèse *a priori* sur sa forme. L'outil classique est le périodogramme. La résolution de ces méthodes est liée en grande partie à la limitation introduite par la transformée de Fourier via la relation d'incertitude.

Les méthodes non-paramétriques instationnaires prennent en compte explicitement le fait que le contenu spectral du signal peut évoluer en fonction du temps. Une grande classe de telles méthodes regroupe les méthodes temps-fréquence basées sur la transformée de Wigner [26]. Parmi celles-ci, on a déjà utilisé dans le chapitre 3 le spectrogramme et le spectrogramme réalloué. Ces méthodes peuvent être très performantes dans certains cas, en particulier si le contenu spectral ne varie pas trop rapidement. Par exemple, le spectrogramme réalloué est particulièrement adapté aux modulations linéaires de fréquence. Cependant ces méthodes sont mises en difficultés lorsque le signal contient plusieurs composantes spectrales localisées car on observe de fortes interférences qu'il n'est pas toujours possible d'éliminer.

Les méthodes paramétriques supposent une structure *a priori* du signal. Généralement, la paramétrisation est stationnaire. Parmi celles-ci, on peut citer les méthodes de type ARMA (pour AutoRegressive Moving Average) qui supposent que le signal  $x(n)$  vérifie une équation

de type

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^q b(k)u(n-k) \quad (4.1)$$

où  $u(n)$  est un bruit blanc gaussien. Une autre classe de méthodes s'applique au cas d'exponentielles pures plongées dans un bruit blanc. On peut expliciter la méthode de maximum de vraisemblance pour ce cas. Néanmoins, elle est très délicate à mettre en œuvre. Une méthode approchée est présentée dans ce chapitre. On peut citer d'autres méthodes dites haute résolution du type MUSIC (pour Multiple Signal Classification) [40]. Notre problème est relativement proche de cette classe avec l'ingrédient supplémentaire de la non-stationnarité des fréquences et amplitudes des exponentielles.

## 4.2 Théorie : méthode de maximum de vraisemblance approchée

### 4.2.1 Position du problème

Nous connaissons *a priori* la structure du signal enregistré. Il est constitué d'une part du signal diffusé par les billes avec un décalage fréquentiel dû à l'effet Doppler. D'autre part, le signal contient une part de bruit provenant de l'électronique et du bruit de fond acoustique (réflexions sur les parois, turbulence). Le problème consiste donc à estimer les fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_M$  de  $M$  composantes harmoniques modulées à la fois en fréquence et en amplitude et plongées dans un bruit de fond. On suppose donc que le signal est analytique et peut être modélisé sous la forme suivante :

$$x(t) = \sum_{m=1}^M a_m(t) \exp(j(2\pi f_m(t)t + \phi_m)) + n(t) \quad (4.2)$$

Afin d'obtenir la meilleure résolution temporelle possible sur la mesure de vitesse, il est nécessaire d'estimer ces fréquences à partir d'un nombre d'échantillons successifs le plus réduit possible. Une approche classique par analyse de Fourier est donc poussée à ses limites par cette requête car la fenêtre temporelle devient trop restreinte pour une estimation correcte. En effet, même si la transformée de Fourier réalise le filtre adapté dans le cas d'une composante spectrale unique dans du bruit blanc, elle est mise en défaut dès qu'il y a plusieurs sources et si le niveau de bruit est trop élevé (ce qui est le cas pour des particules petites). Comme nous avons une connaissance préalable de la structure du signal, cela conduit naturellement à suivre une approche paramétrique basée sur le modèle proposé dans l'équation 4.2. Ce problème a été abordé de façon approfondie dans les références [52] et [51]. Nous rappelons ici les grandes lignes de ce travail en l'adaptant à notre problème spécifique.

Dans la suite de ce chapitre, nous effectuons les hypothèses suivantes :

- Les signaux sont échantillonnés régulièrement avec la période temporelle  $T_S$  de façon à vérifier le critère de Shannon. Pour simplifier, on prendra  $T_S = 1$  et sous l'appellation *fréquence* on sous-entendra *fréquence normalisée*.
- Le nombre  $M$  de composantes spectrales est supposé connu. En pratique, ce nombre est délicat à estimer. Une stratégie possible consiste à détecter le nombre de valeurs propres importantes de la matrice de covariance du signal. Cette stratégie est difficile à mettre

en œuvre, en particulier lorsque le rapport signal/bruit est faible. Dans notre cas on se limitera la plupart du temps à une ou deux sources.

- Les amplitudes ont une évolution déterministe mais inconnue. En pratique, cette évolution est due en particulier à la directivité des transducteurs mais également à l'évolution de la distance  $r$  diffuseur/émetteur avec une dépendance en  $1/r^2$ , aux filtres nécessaires à l'élimination de couplage entre transducteurs et aux raies spectrales introduites par l'électronique d'acquisition (voir partie concernée).
- Le bruit est supposé blanc, gaussien, iid (incrémentés indépendants identiquement distribués) avec une variance (inconnue)  $\sigma^2$ . La fonction de distribution d'un vecteur de bruit  $\mathbf{N}$  de dimension  $K$

$$\mathbf{N}(t) = [n(t), n(t+1), n(t+2), \dots, n(t+(K-1))]^T$$

s'écrit donc simplement

$$p(\mathbf{N}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^K} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{N}\|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4.3)$$

De plus, le bruit est supposé indépendant du signal. En pratique, le bruit électronique vérifie les hypothèses mais le bruit d'origine acoustique est un peu plus problématique.

- On appellera *observation* l'ensemble de  $Q$  vecteurs de dimension  $K$  extraits du signal :

$$\mathbf{X}(t_j) = [x(t_j), x(t_j+1), x(t_j+2), \dots, x(t_j+(K-1))]^T \quad j = 1, \dots, Q.$$

- Les fréquences  $f_1, f_2, \dots, f_M$  ainsi que les amplitudes  $a_1, a_2, \dots, a_M$  sont supposées constantes pendant la durée de l'observation (ou, en pratique, de variation lente par rapport à la taille temporelle de la fenêtre utilisée).

Sous ces hypothèses, la vraisemblance d'une observation est donc simplement le produit des vraisemblances des  $Q$  vecteurs  $\mathbf{X}$  (de dimension  $K$ ). Appelons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des paramètres recherchés : la variance de bruit  $\sigma^2$ , le vecteur des fréquences  $F = \{f_1, \dots, f_M\}$  et celui des amplitudes  $\mathbf{A} = [a_1 \exp(j\phi_1), \dots, a_M \exp(j\phi_M)]^T$ . La log-vraisemblance (le logarithme de la vraisemblance) s'exprime donc :

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = -\frac{KQ}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{q=1}^Q |\mathbf{X}(q) - \mathbf{S}(\mathbf{F})\mathbf{A}(q)|^2, \quad (4.4)$$

avec

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}) = [\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_M] = \begin{pmatrix} 1 & \exp(2\pi f_1) & \dots & \exp(2\pi(K-1)f_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \exp(2\pi f_M) & \dots & \exp(2\pi(K-1)f_M) \end{pmatrix}^T$$

Le principe de maximum de vraisemblance exprime que la meilleure estimation des paramètres  $\mathcal{P}$  est celle qui maximise 4.4.

### 4.2.2 Méthode de maximum de vraisemblance

La maximisation analytique de 4.4 est généralement impossible. L'approche traditionnelle consiste à maximiser 4.4 par rapport aux amplitudes. Cette maximisation est simple car la vraisemblance dépend quadratiquement des amplitudes. On obtient alors l'expression suivante pour

le vecteur des amplitudes maximisant la log-vraisemblance :

$$\mathbf{A}(q) = (\mathbf{S}^+\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^+(\mathbf{F})\mathbf{X}(q) . \quad (4.5)$$

Le vecteur signal seul  $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{N}$  apparaît comme la projection du vecteur signal  $\mathbf{X}$  sur le sous-espace "signal" engendré par les colonnes de la matrice  $\mathbf{S}$  (de dimension  $M$  si les raies spectrales sont indépendantes). En effet,  $\mathbf{Y}$  se réécrit :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{F}).\mathbf{A}(q) = \mathbf{S}(\mathbf{S}^+\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^+(\mathbf{F})\mathbf{X} = \Pi_s(\mathbf{F})\mathbf{X} . \quad (4.6)$$

On peut vérifier que  $\Pi_s$  est bien le projecteur sur l'espace signal. On définit alors  $\Pi_b(\mathbf{F}) = \mathbf{I} - \Pi_s(\mathbf{F})$  comme projecteur sur l'espace bruit. En insérant l'expression 4.5 dans l'expression 4.4 de la vraisemblance, on obtient que la maximisation de la vraisemblance est équivalente à la minimisation de l'expression suivante :

$$L(\mathbf{F}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{q=1}^Q |\Pi_b(\mathbf{F})\mathbf{X}|^2 . \quad (4.7)$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur trace et du projecteur  $\Pi_b$ , on peut réécrire l'expression précédente sous la forme

$$L(\mathbf{F}) = \frac{Q}{\sigma^2} \text{Tr} [\Pi_b(\mathbf{F})\hat{\mathbf{R}}_x] , \quad (4.8)$$

dans laquelle  $\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q X(q)X(q)^T$  est une estimation de la matrice de covariance du processus vectoriel  $\mathbf{X}(q)$ . La minimisation de  $L(\mathbf{F})$  conduit à la valeur exacte  $\mathbf{F}_{ML}$  qui a la plus grande vraisemblance au vu de l'observation effectuée.

### 4.2.3 Maximum de vraisemblance approché

Malheureusement, la maximisation de 4.8 est encore impossible à réaliser de façon analytique à cause du projecteur  $\Pi_b$ . On va donc utiliser une expression approchée de la vraisemblance proposée par Clergeot & Tressens[19]. Soit  $\mathbf{R}_y$  la matrice de covariance des vecteurs signal seul  $\mathbf{Y}(q)$ . Sous l'hypothèse d'indépendance du signal et du bruit, on peut établir :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_x &= \mathbf{R}_y + \hat{\sigma}^2\mathbf{I} , \\ \mathbf{R}_y &= \mathbf{S}\mathbf{P}\mathbf{S}^+ , \\ \mathbf{P} &= \mathcal{E}[\mathbf{A}\mathbf{A}^+] , \end{aligned}$$

où  $\mathcal{E}$  désigne l'espérance mathématique et  $\hat{\cdot}$  signifie que l'on considère l'estimée de la variable. Après substitution dans 4.8, on obtient :

$$L(\mathbf{F}) = \frac{Q}{\hat{\sigma}^2} \text{Tr} [\Pi_b(\mathbf{F})\mathbf{S}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{S}^+] . \quad (4.9)$$

Clergeot et Tressens proposent d'approximer cette expression au second ordre au voisinage du minimum par :

$$L_{AML}(\mathbf{F}) = \frac{Q}{\hat{\sigma}^2} \text{Tr} [\hat{\Pi}_b\mathbf{S}(\mathbf{F})\hat{\mathbf{P}}\mathbf{S}^+(\mathbf{F})] . \quad (4.10)$$

$\Pi_b$  est estimé en calculant le projecteur engendré par les  $K - M$  vecteurs propres de plus petites valeurs propres et, en pratique, on utilisera les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{K - M} \text{Tr}(\hat{\Pi}_b \hat{\mathbf{R}}_x), \\ \Pi_s(\mathbf{F}) &= \mathbf{S}(\mathbf{F})(\mathbf{S}^+(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{F}))^{-1} \cdot \mathbf{S}^+(\mathbf{F}), \\ \mathbf{S}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{S}^+(\mathbf{F}) &= \Pi_s(\mathbf{F})(\hat{\mathbf{R}}_x - \sigma^2 \mathbf{I}) \cdot \Pi_s(\mathbf{F}).\end{aligned}$$

L'expression approchée a une structure quadratique en  $\mathbf{S}(\mathbf{F})$  qui permet donc l'implémentation d'un algorithme rapide de minimisation de type Newton-Gauss dont le  $k$ -ième pas s'écrit :

$$\mathbf{F}(k + 1) = \mathbf{F}(k) - \mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{\text{grad}}(L_{AML})|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}(k)}. \quad (4.11)$$

$\vec{\text{grad}}$  et  $\mathbf{H}$  sont respectivement les gradient et hessien de la fonction  $L_{AML}$  donc les expressions approchées au même ordre sont

$$\vec{\text{grad}} = \frac{2Q}{\sigma^2} \text{Re} \left\{ \text{Diag}(\mathbf{S}'^+(\mathbf{F}) \cdot \Pi_b(\mathbf{F}) \cdot \hat{\Pi}_b \cdot \mathbf{S}(\mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{P}}) \right\}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{H} = \frac{2Q}{\sigma^2} \text{Re} \left\{ \text{Diag} \left( (\mathbf{S}'^+(\mathbf{F}) \cdot \Pi_b(\mathbf{F}) \cdot \hat{\Pi}_b \cdot \Pi_b(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{S}') \right) \star \hat{\mathbf{P}}^* \right\}, \quad (4.13)$$

où l'opérateur  $\star$  est la multiplication matricielle terme à terme,  $\mathbf{P}^*$  est le complexe conjugué de  $\mathbf{P}$  et

$$\mathbf{S}' = \left[ \frac{d\mathbf{S}_1}{df_1}, \dots, \frac{d\mathbf{S}_M}{df_M} \right]^T.$$

#### 4.2.4 Intégration d'une nouvelle mesure

Comme l'objectif de cette analyse spectrale est de suivre l'évolution de la vitesse d'une particule au cours du temps, il peut être avantageux de combiner l'estimée au temps  $t$  avec une nouvelle mesure au temps  $t + 1$  via une structure de filtre de type prédicteur/correcteur afin d'obtenir une estimation moins sensible au bruit d'une part et d'autre part d'empêcher l'algorithme de "décrocher" au cas où le signal disparaîtrait temporairement sous le niveau de bruit [52, 51].

Soit  $\hat{\mathbf{F}}(t)$  une estimée de  $\mathbf{F}$  à l'instant  $t$  de densité de probabilité  $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{F}}(t), \Gamma(t))$  qui est supposée normale de variance  $\Gamma(t)$ . Cette hypothèse est valide tant que la Log-vraisemblance peut être approximée par un développement au second ordre autour de son maximum. Si un modèle linéaire d'évolution de  $\mathbf{F}(t)$  est connu alors on peut écrire

$$\mathbf{F}(t + 1) = \mathbf{M}\mathbf{F}(t) + \varepsilon(t), \quad (4.14)$$

$$p_{t+1|t}(\mathbf{F}) = \mathcal{N}(\mathbf{M}\hat{\mathbf{F}}(t), \mathbf{M}\Gamma(t)\mathbf{M}^+ + \mathbf{R}_\varepsilon), \quad (4.15)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice d'évolution,  $\varepsilon$  est un bruit de modélisation statistiquement indépendant de  $\mathbf{F}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_\varepsilon$ .  $p_{t+1|t}$  est la densité de probabilité qui peut être calculée à l'instant  $t + 1$  lorsque seules les observations jusqu'à  $t$  sont connues. Le problème est qu'une telle matrice  $\mathbf{M}$  est inconnue en réalité pour notre problème. Par conséquent, on choisit le modèle le plus simple :  $\mathbf{M} = I$  (cf [51]). On peut alors utiliser la règle de Bayes des probabilités conditionnées :

$$p_{t+1|t+1}(\mathbf{F}) = \frac{p_{t+1|t}(\mathbf{F}) \cdot p_{t+1}(\mathbf{X}|\mathbf{F})}{p_{t+1}(\mathbf{X})}.$$

On notera que  $\log(p_{t+1}(\mathbf{X}|\mathbf{F}))$  est la log-vraisemblance dont une expression approchée est donnée par 4.10. Après quelques calculs, on obtient :

$$\hat{\mathbf{F}}(t+1|t) = \hat{\mathbf{F}}(t), \quad (4.16)$$

$$\Gamma(t+1|t) = \Gamma(t) + \mathbf{R}_\varepsilon, \quad (4.17)$$

$$\Gamma(t+1)^{-1} = \mathbf{H} + \Gamma(t+1|t)^{-1}, \quad (4.18)$$

$$\hat{\mathbf{F}}(t+1|t+1) = \hat{\mathbf{F}}(t+1) = \hat{\mathbf{F}}(t+1|t) - \Gamma(t+1)^{-1} \cdot \vec{\text{grad}}, \quad (4.19)$$

où on peut montrer que les gradient et hessien ont les expressions précédemment données [51].  $\mathbf{R}_\varepsilon$  est une matrice inconnue que l'on choisira en pratique égale à  $v^2 \mathbf{I}$ . La valeur de  $v^2$  correspond à la latitude laissée à l'algorithme de prendre en compte les variations de la fréquence. Par conséquent, ce paramètre est lié à la fréquence de coupure de ce filtre et pourra donc être réglé de façon à laisser l'algorithme suivre les variations de  $\mathbf{F}$  tout en l'empêchant de décrocher si le niveau de bruit se détériore. On remarquera que le système d'équations précédent à la structure d'un filtre de Kalman généralisé (non linéaire). Les propriétés statistiques et de convergence de cet algorithme sont décrites en détail dans les références [52, 51].

## 4.2.5 Récapitulatif

En résumé, supposons que l'on connaisse  $\hat{\mathbf{F}}(t)$ . Les étapes successives pour obtenir l'estimée des fréquences à l'instant  $t+1$  sont donc :

- Estimation de la matrice de covariance du signal selon la formule suivante :

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{2Q} \sum_{i=t+1}^{t+Q} (\mathbf{X}(i)\mathbf{X}(i)^T + \tilde{\mathbf{X}}(i)\tilde{\mathbf{X}}(i)^T), \quad (4.20)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{X}}(i) = [x(i+K-1), x(i+K-2), \dots, x(i)]^*{}^T, \quad (4.21)$$

où  $*$  est la conjugaison complexe. On estime donc  $\mathbf{R}_x$  pour des fenêtres temporelles décalées d'un échantillon et leur renversée temporelle conjuguée. On note que si le signal a la structure proposée dans l'équation 4.2, cette opération ne modifie pas le contenu spectral mais modifie seulement la phase relative des composantes spectrales et du bruit. On peut montrer ([51]) que cela améliore le conditionnement de la matrice de covariance et donc l'estimation du niveau de bruit et des sous-espaces signal et bruit. On notera que les fenêtres temporelles se recouvrent et donc que les observations ne sont pas strictement indépendantes. On introduit ainsi une sorte d'intégration temporelle. Les conséquences de ce lissage ont été étudiées par Clergeot & Tressens [19] et Oamri [64].

- On diagonalise  $\hat{\mathbf{R}}_x$  de façon à obtenir les vecteurs propres  $(\mathbf{V}_i)_{i=1..K}$  et leurs valeurs propres associées  $(\lambda_i)_{i=1..K}$  classées dans l'ordre décroissant. En pratique, on utilise une décomposition en valeurs singulières qui assure l'obtention de valeurs propres réelles et positives.
- On peut alors estimer le projecteur sur le sous-espace bruit  $\hat{\Pi}_b$  et la variance du bruit par sommation sur les plus petites valeurs propres :

$$\hat{\Pi}_b = \sum_{i=M+1}^K \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T, \quad (4.22)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K-M} \text{Tr}(\hat{\Pi}_b \hat{\mathbf{R}}_x) = \frac{1}{K-M} \sum_{i=M+1}^K \lambda_i. \quad (4.23)$$

- On choisit donc  $\hat{\mathbf{F}}(t+1|t) = \hat{\mathbf{F}}(t)$  comme valeur candidate pour estimer les gradient et hessien puis l'estimation au temps  $t+1$  en utilisant les équations 4.16 à 4.19.

### 4.3 Extension à l'estimation de la directivité

Considérons un ensemble de  $N$  transducteurs acoustiques coplanaires, placés sur une ligne et distants l'un de l'autre d'une distance  $d$ . Une source à l'infini dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec l'axe des transducteurs induit donc une amplitude sur ce réseau de transducteurs s'écrivant :

$$\mathbf{Z} = \left[ 1, e^{i\omega d \sin \theta / c}, e^{2i\omega d \sin \theta / c}, \dots, e^{(N-1)i\omega d \sin \theta / c} \right] \quad (4.24)$$

où  $\omega$  est la pulsation temporelle de la source et  $c$  la célérité du son dans le milieu considéré.

On remarque donc que le cas de  $M$  sources à l'infini plongées dans du bruit s'écrit donc formellement exactement de la même façon que le problème temporel avec cette fois une fréquence spatiale valant  $\frac{\omega \sin \theta}{2\pi c}$ . On peut donc appliquer directement l'algorithme de maximum de vraisemblance.

En pratique, néanmoins, les sources ne sont pas à l'infini, ce qui signifie en particulier que le front d'onde n'est pas plan mais sphérique et ceci malgré l'éloignement des billes de 20 cm typiquement. En effet, dans notre cas,  $d=2.5$  mm et on a 5 transducteurs, ce qui crée un déphasage entre le transducteur central et le transducteur extrême de  $0.04 \mu\text{s}$  pour une source à  $\theta = 0$  rad et 20 cm. Ceci correspond à  $1/10^{\text{ème}}$  de période à 2.5 MHz (0.6 radian) et n'est donc pas totalement négligeable. En particulier, cela interdit l'astuce décrite dans la section précédente conduisant à la formule 4.20. En effet, dans ce cas le front conjugué renversé a une courbure inverse et correspond donc à une fréquence différente. Idéalement, il faudrait donc corriger par formation de voies. Par ailleurs, dans nos expériences, l'espacement des transducteurs ne permet pas de vérifier le critère de Shannon. On induit donc un éventuel phénomène de repliement de spectre lorsque la direction de la source est fortement inclinée par rapport à la normale au réseau. Cependant la directivité des transducteurs limite ce repliement. On peut alors envisager de reconstruire la trajectoire en prenant en compte ce phénomène.

## 4.4 Pratique

### 4.4.1 Mise en œuvre

#### Point de départ

En pratique, la cuve contient un faible nombre de particules. On a ainsi au maximum une particule dans le faisceau et très rarement plusieurs particules simultanément. A un instant donné, on lance l'acquisition du signal acoustique sans savoir *a priori* s'il y a une bille dans le faisceau. Le signal enregistré est donc constitué d'une suite de moments sans particule et de moments à une particule. Dans un premier temps, on construit un algorithme en supposant qu'il y a au plus une bille dans le faisceau. Le premier pas est la détection des portions de signal où est réellement présente une source. Pour cela, on effectue un simple test d'énergie en observant le carré de l'amplitude du signal filtré passe-bas. On note alors les régions où l'énergie dépasse un seuil donné déterminé par le niveau de bruit. Le point de départ de l'algorithme est choisi au maximum d'énergie sur la fenêtre sélectionnée.

### Initialisation

Le point suivant est d'estimer une première valeur de démarrage de l'algorithme. Pour cela, on effectue une estimation grossière de la fréquence sur une fenêtre relativement longue (typiquement 64 ou 128 points) par transformée de Fourier discrète. Ensuite, on utilise cette première estimation comme point de départ de l'algorithme de maximum de vraisemblance approchée brut (sans filtre de Kalman) décrit dans le paragraphe 4.10 jusqu'à convergence. Finalement, on prend les valeurs convergées de la fréquence et du hessien comme initialisation de l'algorithme complet que l'on propage à partir du point de départ (maximum d'énergie) dans le sens du temps puis, à partir de ce même point, dans le sens contraire afin d'avoir un décodage complet du passage de la particule dans le faisceau.

### Arrêt

On rappelle que l'inverse du hessien est lié à la matrice de d'information de Fisher et en particulier, que les valeurs diagonales sont donc liées à la variance d'estimation de la fréquence. Ces coefficients sont donc liés à la qualité de l'estimation. Cependant, ces quantités sont très fluctuantes et assez délicates à utiliser pour une décision de stopper l'algorithme. Nous avons préféré nous baser sur la valeur de l'amplitude de la source fournie par l'algorithme MVA. Lorsque celle-ci passe sous un seuil choisi en fonction du niveau de bruit et qu'elle y demeure pendant un certain temps (suffisamment long pour prendre en compte la traversée d'un filtre, en particulier à fréquence nulle) alors on décide d'arrêter l'algorithme.

### Ajout d'une source

Le bruit peut éventuellement présenter par moment des composantes localisées dans le plan temps-fréquence, en particulier le bruit d'origine acoustique. Par ailleurs, de temps en temps, on observe l'entrée d'une seconde bille dans le faisceau. Cela résulte en une inadéquation temporaire du modèle (une seule source) avec la réalité (deux composantes spectrales). Afin de ne pas perturber l'algorithme et de continuer à démoduler le signal pendant plus longtemps, il peut être avantageux d'ajouter une seconde source de façon temporaire. Il faut détecter la seconde source et l'initialiser. Le premier point est réalisé de la façon suivante : quand l'inverse du hessien dépasse un certain seuil, on teste si l'ajout d'une seconde source fait diminuer de façon significative cette estimation de la variance d'erreur. Si c'est le cas, cela signifie qu'un modèle à deux sources est meilleur. Sinon on reste avec une seule source. L'initialisation de la seconde source se fait de façon grossière en estimant une seconde fréquence par transformée de Fourier sur une fenêtre suffisamment longue. Si avec les deux sources la variance d'estimation de la seconde devient trop élevée, alors on peut estimer qu'elle a en réalité disparu et donc on la supprime.

### Cas de plusieurs voies

En pratique, on utilise un réseau de 9 transducteurs et donc on dispose de plusieurs réalisations simultanées du signal  $x(t)$ . On peut donc effectuer le test de démarrage sur la moyenne de l'énergie des 9 voies et surtout estimer la matrice de corrélation  $\mathbf{R}_x$  en moyennant les 9 matrices correspondantes sur chaque voie. Cela permet, en particulier, de réduire significativement le nombre  $Q$  de fenêtres successives utilisées pour chaque voie.

### 4.4.2 Rappels des différents paramètres

En résumé, nous disposons donc d'un certain nombre de paramètres qu'il va falloir régler au mieux pour optimiser la détection :

- La fréquence d'échantillonnage. Celle-ci doit être réglée de façon à vérifier le critère de Shannon.
- La taille  $K$  de la fenêtre temporelle. Elle doit être suffisamment longue pour fournir une estimation fiable de la fréquence mais sa taille ne doit pas pénaliser la résolution temporelle finale de la vitesse.
- Le nombre  $Q$  de fenêtres temporelles utilisées. Ce nombre doit satisfaire les mêmes exigences que le précédent.
- La variance  $\sigma_\varepsilon^2$  du bruit de modélisation. Ce nombre règle la souplesse du filtre de Kalman. Une valeur élevée lui permet de suivre des changements rapides de la fréquence mais le rend sensible au bruit. Par contre, une valeur trop faible peut l'empêcher de suivre la modulation de fréquence et donc risque de faire décrocher l'algorithme.
- Le seuil d'énergie  $S_e$  fournissant les portions de signal où les billes sont présentes. Une valeur trop élevée va laisser passer des portions intéressantes mais une valeur trop faible va créer des fausses alarmes.
- Le seuil d'amplitude  $S_a$  qui décide l'arrêt de l'algorithme. Il est fixé par rapport à la variance du bruit.

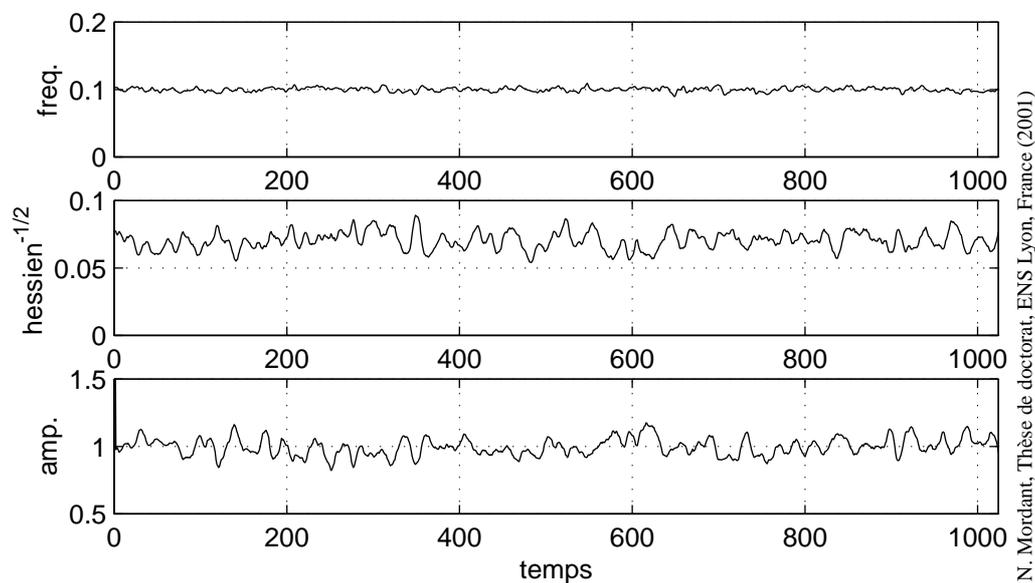
### 4.4.3 Signaux synthétiques

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme, on l'applique à un certain nombre de signaux synthétiques. Cela fournit également une base de comparaison pour interpréter les résultats expérimentaux. On choisit tout d'abord un signal constitué d'une exponentielle complexe pure dans un bruit de variance 1. Cela permet d'évaluer le spectre des fluctuations de l'estimation de la fréquence induites par le bruit. Ensuite, nous considérons le cas d'une modulation de fréquence à spectre large en  $1/f$  avec un faible bruit pour estimer les performances de l'algorithme en tant que filtre. Finalement, on étudie une modulation à spectre large en présence d'un bruit de même amplitude.

#### Cas d'une sinusoïdale pure, SNR=0 dB

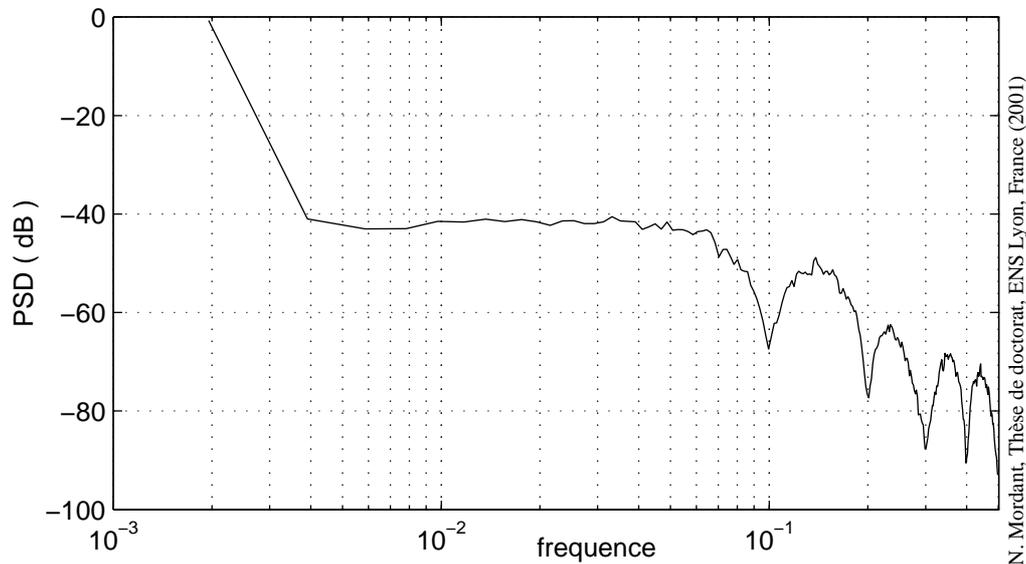
Le premier de ces signaux contient une composante spectrale unique et constante valant 0.1 d'amplitude 1. On ajoute un bruit blanc complexe de variance égale à 1. On choisit comme paramètres  $K = 5$ ,  $Q = 10$  et  $\sigma_\varepsilon^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ . Les fréquence, hessien et amplitude décodés sont présentés figure 4.1. On voit que l'algorithme donne effectivement une fréquence de 0.1 avec une amplitude de 1.

On note des fluctuations sur l'estimation de la fréquence dues au bruit. On notera que pour un rapport signal/bruit valant 1, on a des fluctuations légères sur la fréquence de variance 0.003. Le spectre de ces fluctuations est tracé figure 4.2. Le pic à basse fréquence est dû à la valeur constante 0.1. On note un certain nombre de coupures dans le spectre dues aux fenêtres temporelles utilisées. Les fluctuations ont un spectre plat à basse fréquence jusqu'à la première coupure à une fréquence de 0.1. Puis on observe une décroissance liée au filtrage de Kalman et aux autres coupures.



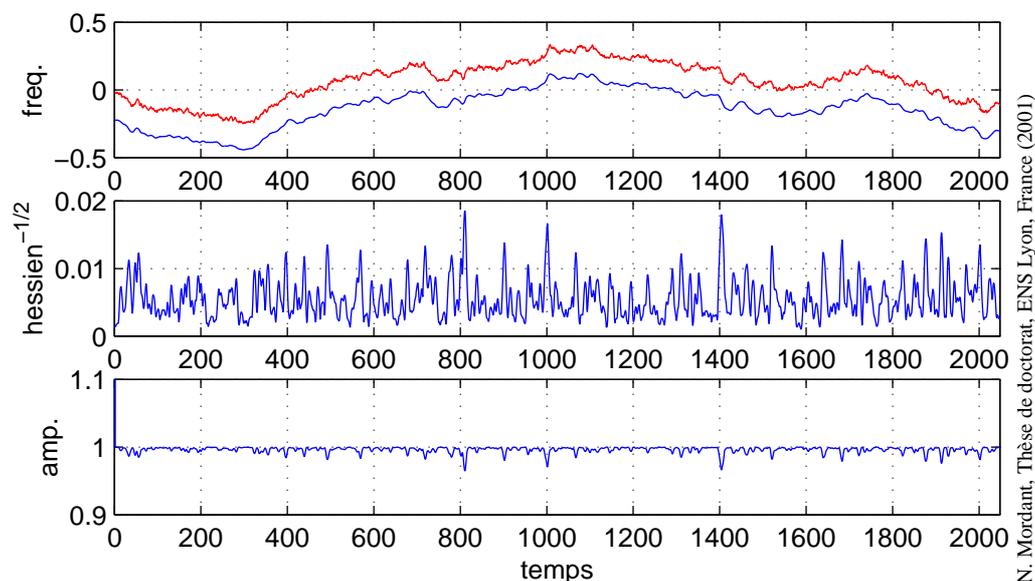
N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 4.1 – Sorties de l’algorithme dans le cas d’un signal synthétique à fréquence constante.  $K=5$ ,  $Q=10$ ,  $\sigma_{\xi}^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ , 9 récepteurs.



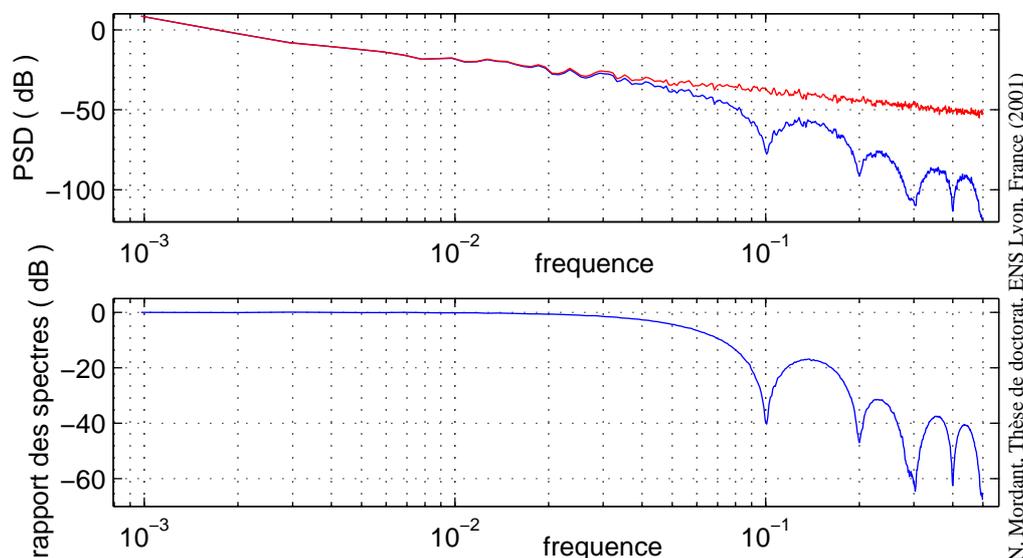
N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 4.2 – Spectre de puissance du signal de fréquence fourni par l’algorithme MVA pour le signal de la figure précédente.

Cas d'une modulation de fréquence en  $1/f^2$ , SNR=80 dB

N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 4.3 – Sorties de l'algorithme dans le cas d'un signal synthétique à modulation de fréquence en  $1/f^2$  er SNR=80 dB.  $K=5$ ,  $Q=10$ ,  $\sigma_{\xi}^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ , 9 récepteurs. On a tracé la modulation d'origine décalée vers le haut de 0.2 pour permettre la comparaison.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 4.4 – Spectre de puissance du signal de fréquence fourni par l'algorithme MVA pour le signal de la figure précédente. Le spectre du signal de référence est tracé pour comparaison. On a tracé en bas le rapport des deux spectres.

On synthétise un signal dont la modulation en fréquence est un signal stochastique de spectre en  $1/f^2$  plus un bruit blanc complexe de variance  $10^{-4}$ . Les sorties de l'algorithme sont présentées sur la figure 4.3. On a également tracé la modulation de départ afin de comparer. On note immédiatement l'effet de filtrage passe-bas dû au filtre de Kalman et aux fenêtres

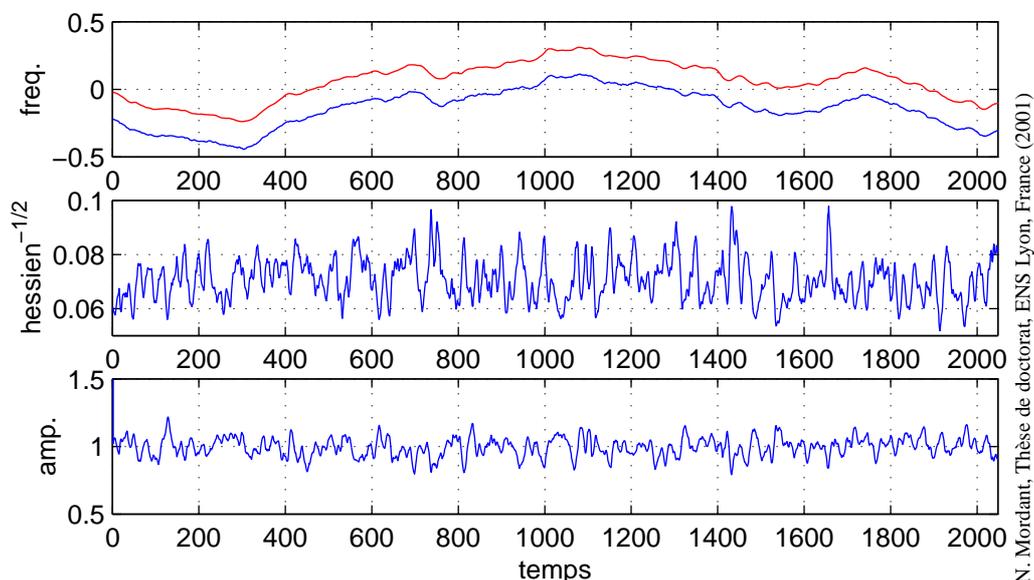
temporelles. Les fluctuations hautes fréquences ont été lissées. On note également que l'amplitude et le hessien présentent des fluctuations à haute fréquence qui sont liées d'une part au bruit mais également (surtout dans ce cas où le niveau de bruit est faible) aux fluctuations de la modulation haute fréquence. La valeur de la racine du hessien est dans ce cas de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-3}$  soit seulement 10 fois plus faible que dans le cas précédent, malgré un bruit 10000 fois plus faible. Dans ce cas, la variance de l'estimation est essentiellement due à la non-stationnarité du processus.

Le spectre de puissance du signal démodulé est comparé avec celui de la modulation originale (figure 4.4). On voit nettement l'effet de filtrage passe-bas dont la fréquence de coupure est dans ce cas de l'ordre de 0.043.

### Cas d'une modulation en $1/f^2$ , SNR=1

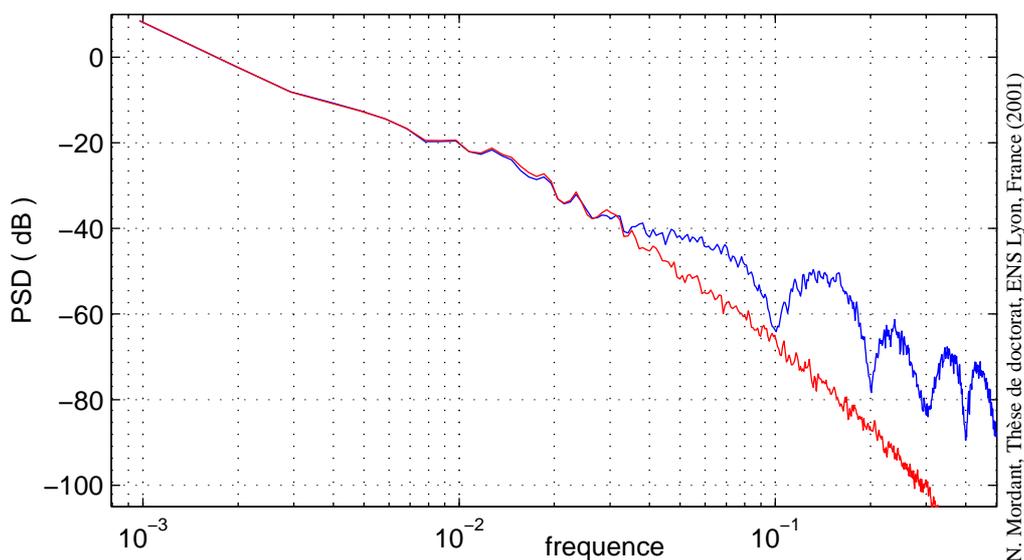
On prend maintenant comme modulation de fréquence le signal précédent en  $1/f^2$  filtré passe-bas à 0.02. On prend un bruit blanc d'amplitude 1. Les sorties de l'algorithme MVA sont présentées figure 4.5. On observe cette fois que le signal décodé présente davantage de fluctuations haute fréquence. Ceci est dû à l'excitation de l'algorithme par le bruit. Le spectre de puissance de la fréquence extraite par l'algorithme est présenté figure 4.6 et comparé au spectre initial. On voit que les fluctuations engendrées par le bruit ressortent pour une fréquence de l'ordre de 0.03 pour les paramètres choisis ici.

En résumé, l'algorithme agit donc comme un filtre passe-bas sur le signal. Cela est dû d'une part au filtre de Kalman qui limite les variations de la sortie et d'autre part à l'utilisation de fenêtres temporelles qui lissent les fluctuations. Par ailleurs, si le rapport signal/bruit est faible, l'algorithme est excité par ce bruit et induit des fluctuations sur la fréquence extraite.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 4.5 – Sorties de l’algorithme dans le cas d’un signal synthétique à modulation de fréquence en  $1/f^2$  filtré passe-bas et SNR=0 dB.  $K=5$ ,  $Q=10$ ,  $\sigma_{\epsilon}^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ , 9 récepteurs. On a tracé la modulation d’origine décalée vers le haut de 0.2 pour permettre la comparaison.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 4.6 – Spectre de puissance du signal de fréquence fourni par l’algorithme MVA pour le signal de la figure précédente. Le spectre du signal de référence est tracé pour comparaison (courbe du bas).

#### 4.4.4 Signal expérimental

On considère maintenant un extrait de signal expérimental. Il s'agit d'une bille de  $250 \mu\text{m}$  dans l'écoulement de Von Kármán avec disques lisses et une fréquence de rotation de  $17.4 \text{ Hz}$ . La variance du bruit est de l'ordre de  $1.5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ . La partie réelle du signal reçu par l'un des récepteurs est présentée figure 4.7. Le signal est fortement modulé en amplitude pour plusieurs raisons : la position de la bille dans le faisceau qui donne une modulation relativement lente et le filtre numérique autour de la fréquence nulle qui peut amener une modulation plus rapide. Sur la figure 4.8, on a superposé un spectrogramme du signal et la fréquence fournie par l'algo-

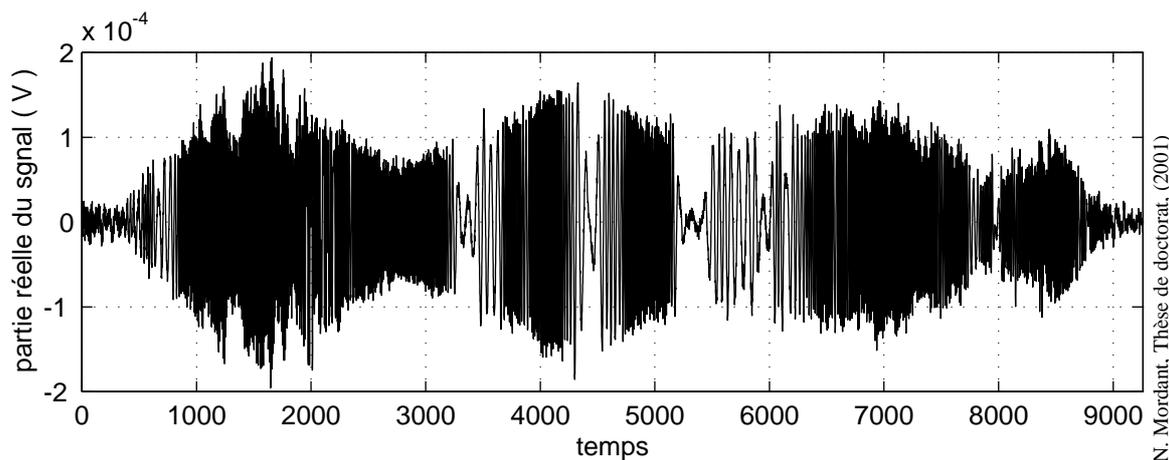


Fig. 4.7 – Partie réelle d'un signal expérimental. Il s'agit d'une bille de  $250 \mu\text{m}$ . Le signal a été filtré passe-haut autour de la fréquence nulle pour éliminer la composante due au couplage et aux échos.

rithme MVA. On a 8 récepteurs et les paramètres sont identiques à ceux utilisés pour les signaux synthétiques. On voit que l'algorithme décode parfaitement la fréquence même dans des zones de forte variation dans lesquelles une approche de type Fourier commence à être mise en difficulté. L'ensemble des sorties de l'algorithme MVA sont présentées sur la figure 4.9. L'amplitude fournie par l'algorithme suit l'amplitude du signal. On voit que la variance d'estimation (liée à la valeur de l'inverse du hessien) augmente lorsque l'amplitude du signal est faible, en particulier au début et à la fin où il n'y a plus de bille dans le faisceau mais également à chaque passage à zéro car le signal a été filtré. Elle augmente également légèrement lorsque la fréquence varie très rapidement car le modèle s'approche de ses limites dans de telles régions.

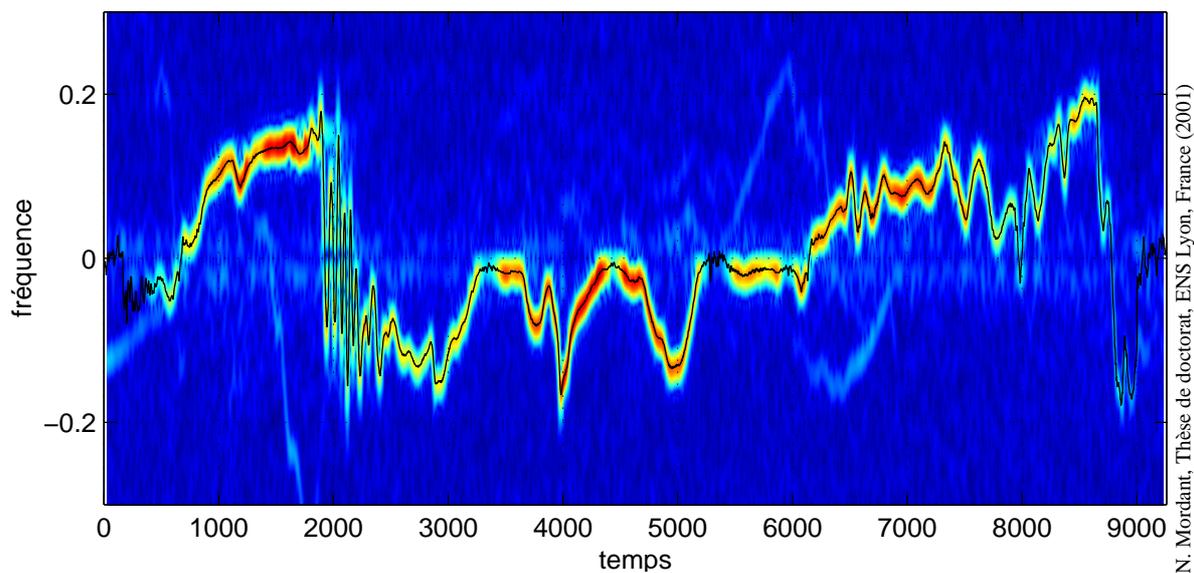


Fig. 4.8 – Superposition du spectrogramme du signal précédent et de la sortie de l’algorithme MVA. On a 8 récepteurs et  $K=5$ ,  $Q=10$ .

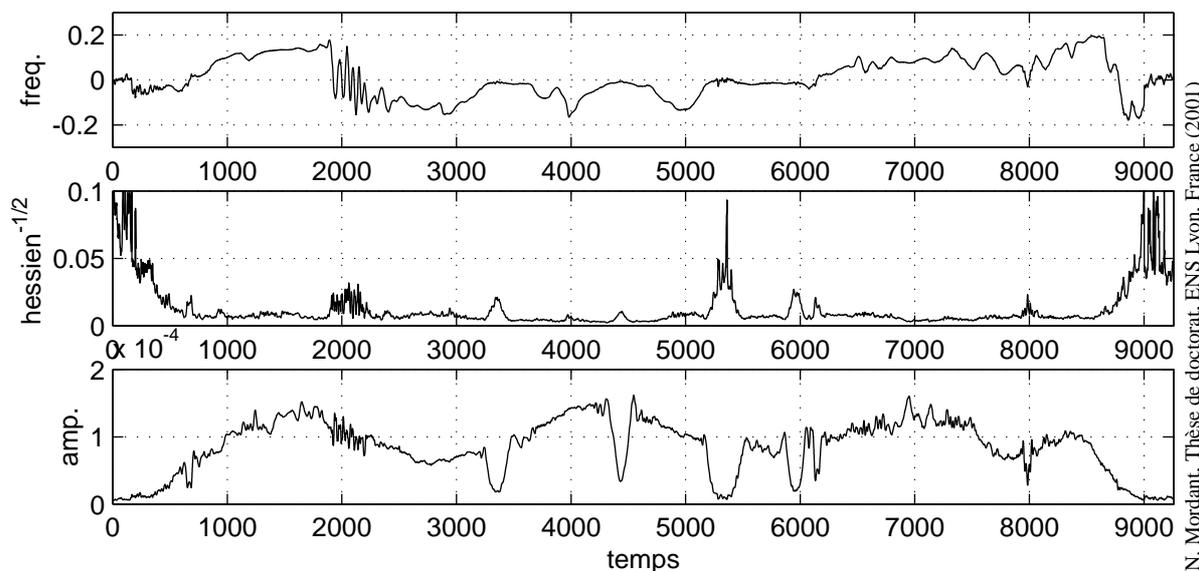


Fig. 4.9 – Sorties de l’algorithme MVA appliqué au signal précédent.



## Chapitre 5

# Description des mesures

La réalisation de la chaîne d'acquisition et la mise au point de l'algorithme MVA nous fournissent un outil de mesure inédit. Cela nous permet d'envisager des mesures de vitesse lagrangienne à haut nombre de Reynolds. Ce chapitre présente en détails la configuration expérimentale. On décrit en particulier les valeurs des différents paramètres de l'algorithme de démodulation. Enfin, une mesure de la position de la particule par triangulation nous permet de valider la mesure de vitesse lagrangienne.

## 5.1 Configuration expérimentale

### 5.1.1 Présentation de l'écoulement

L'entraînement se fait par deux disques lisses ou avec 8 pales. On crée donc au niveau des disques un mouvement de rotation intense. Les deux disques tournant en sens contraire, cela induit un fort cisaillement au milieu de la cuve. Par ailleurs, l'eau est entraînée radialement vers l'extérieur des disques par la force centrifuge. Cette recirculation est bouclée par le retour de l'eau vers l'axe de la cuve à mi-hauteur du cylindre. On obtient ainsi un écoulement moyen qui, au niveau des disques, tourne et a une vitesse radiale positive et au centre de la cuve, a une vitesse radiale convergeant vers l'axe de la cuve. Par ailleurs, le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{R^2 \Omega}{\nu} \quad (5.1)$$

et de l'ordre de  $10^5$ . L'écoulement est donc très turbulent et la partie fluctuante de la vitesse est de l'ordre de 10 fois plus importante que la vitesse typique de la recirculation moyenne du fluide. L'écoulement n'est pas homogène ni isotrope en toute rigueur, d'une part à cause de la recirculation et d'autre part les caractéristiques ne sont pas exactement identiques selon l'axe et selon une direction perpendiculaire (voir par exemple [69]). Néanmoins, cet écoulement présente un grand nombre d'avantages parmi lesquels la stationnarité et la possibilité d'avoir un fort taux de turbulence dans un volume restreint.

### 5.1.2 Mesure de $\varepsilon$

La mesure de la dissipation moyenne est effectuée de façon globale. On mesure l'énergie évacuée par le système de refroidissement lorsque la température est stabilisée à la température ambiante. Pour refroidir la cuve, on dispose de deux serpentins disposés entre les disques et les parois fermant le cylindre. Ils sont reliés à une circulation d'eau froide qui permet ainsi de réguler la température interne de l'eau dans la cuve. On peut estimer l'énergie évacuée par ce

système en mesurant le débit massique  $D$  de l'eau dans le circuit et la différence de température  $\Delta T$  entre l'entrée et la sortie du circuit. On obtient alors  $\varepsilon$  par la formule :

$$\varepsilon = \frac{Dc_p\Delta T}{M} \quad (5.2)$$

où  $c_p$  est la capacité calorifique de l'eau et  $M$  la masse totale d'eau à l'intérieur de la cuve. Il s'agit donc d'une mesure globale de la dissipation car on mesure effectivement l'énergie totale injectée par les moteurs dans la cuve. Néanmoins, cette estimation ne correspond vraisemblablement pas exactement à la dissipation dans la zone de mesure. En effet, la dissipation est liée aux gradients de vitesse. Or il y a des zones dans l'écoulement où les gradients sont extrêmement intenses. Tout d'abord entre le disque et la paroi du cylindre, l'espace est de l'ordre de 5 mm et on a donc un fort gradient moyen. Dans le cas de disques lisses, on a également un fort gradient sur toute la surface du disque dans la couche limite. Dans ce cas, on peut donc s'attendre à ce que cette estimation de  $\varepsilon$  soit plus élevée que la dissipation dans la zone de mesure. Dans le cas des disques à pales, les disques tournent nettement moins vite et l'entraînement s'effectue de manière inertielle et on peut penser que cette valeur de  $\varepsilon$  correspond effectivement au taux de dissipation dans la zone de mesure.

A partir de l'estimation de  $\varepsilon$  et de la mesure de la variance de la vitesse, on peut calculer le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor. En supposant que la turbulence est homogène et isotrope, on a

$$\varepsilon = 15v \frac{\sigma^2}{\lambda^2} . \quad (5.3)$$

On estime donc la longueur de Taylor par

$$\lambda = \sigma \sqrt{\frac{15v}{\varepsilon}} , \quad (5.4)$$

et le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  s'exprime donc

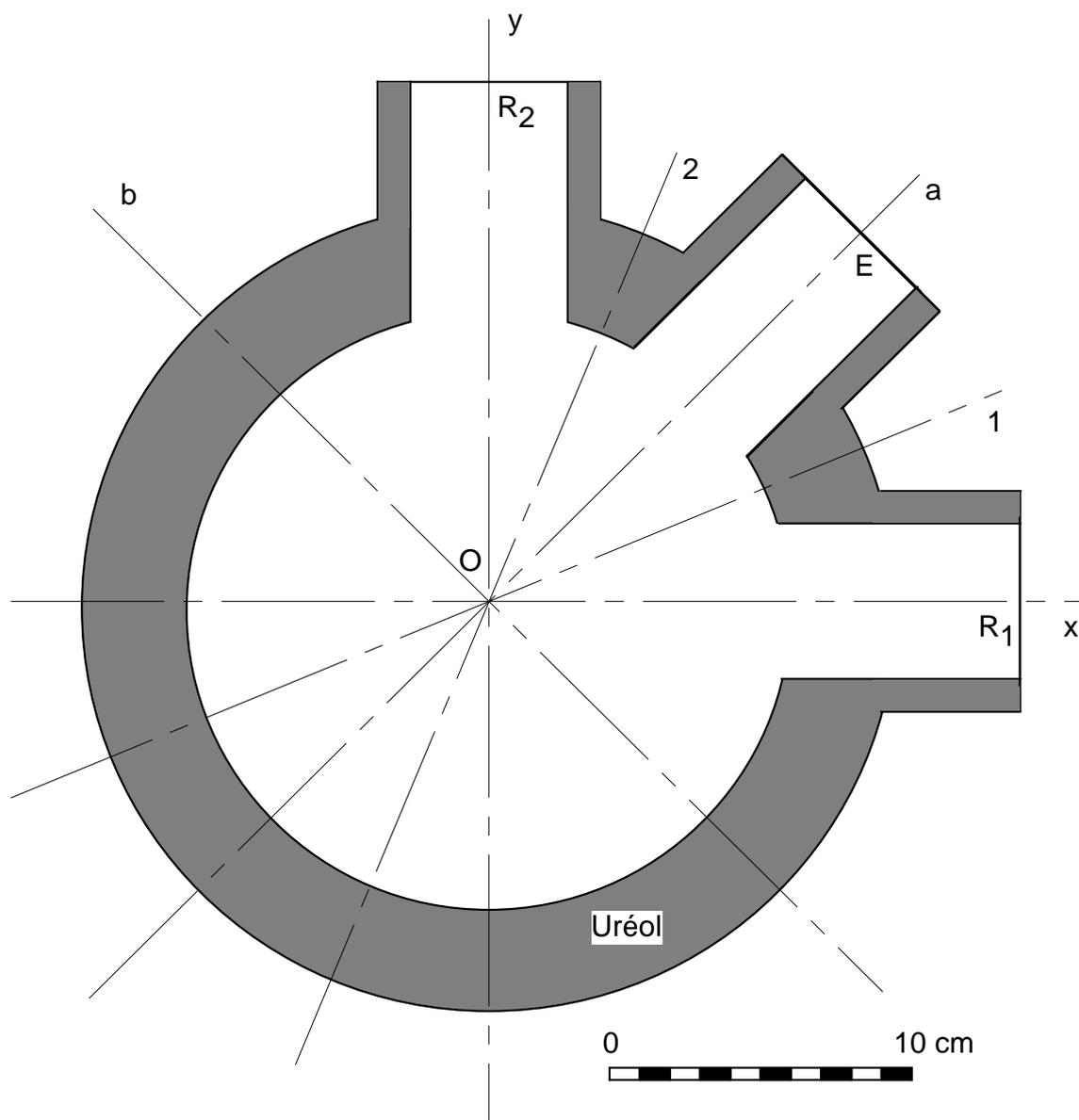
$$R_\lambda = \frac{\lambda\sigma}{v} = \sigma^2 \sqrt{\frac{15}{v\varepsilon}} . \quad (5.5)$$

## 5.2 La mesure lagrangienne

### 5.2.1 Configuration expérimentale

La figure 5.1 montre une coupe de la cuve dans son plan médian. On voit les trois hublots qui supportent les trois réseaux ultrasonores. Les émetteurs à 2.5 et 2.8 MHz sont disposés dans le hublot E. Les récepteurs sont disposés en  $R_1$  pour la fréquence 2.5 MHz et en  $R_2$  pour la fréquence de réception à 2.8 MHz. Les axes des trois réseaux sont concourants en O. On a donc un angle de  $45^\circ$  entre l'émetteur et le récepteur. Chacun des deux systèmes de mesure va donc extraire la composante de vitesse selon la bissectrice de l'angle émetteur/récepteur. Le système à 2.5 MHz va donc mesurer la composante de vitesse  $v_1$  selon l'axe O1 et le système à 2.8 MHz la composante  $v_2$  selon l'axe O2.

Deux types de mesure sont présentés dans la suite de cet ouvrage. Une mesure 1D qui ne concerne que la composante  $v_1$  et une mesure 2D qui présentera simultanément les composantes  $v_1$  et  $v_2$ . Une différence importante entre les deux types de mesure réside dans la zone



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 5.1 – Coupe schématisée de la cuve à égale distance des deux disques. Le hublot E contient l'émetteur, les hublots R<sub>1</sub> et R<sub>2</sub> les récepteurs. On a placé les différents axes qui vont être utilisés. Les composantes de vitesses  $v_a$  et  $v_b$  mesurées par chacun des transducteurs sont selon les axes O1 et O2. A partir de ces deux composantes, on reconstruit deux composantes orthogonales  $v_1$  et  $v_2$  selon les axes O1 et O2 ou bien les composantes  $v_x$  et  $v_y$ .

de mesure. Pour mesurer la composante  $v_1$  seule, il faut que la bille soit dans l'intersection du cône d'émission et du cône de réception du réseau R<sub>1</sub>. La figure 5.2 met en évidence la coupe de la zone de mesure dans le plan médian de la cuve. On voit que cette zone est assez étendue et s'étend sur une dizaine de centimètre en largeur sur une quinzaine de centimètres en longueur selon l'axe O1. Elle est légèrement excentrée et est plus proche de la paroi opposée aux deux réseaux. Dans cette région, la recirculation moyenne a tendance à ramener le fluide vers l'axe de la cuve. On peut donc s'attendre à mesurer une vitesse moyenne sur la composante  $V_1$  légèrement positive.

En ce qui concerne la mesure 2D, il est nécessaire que la bille soit à la fois dans les fais-

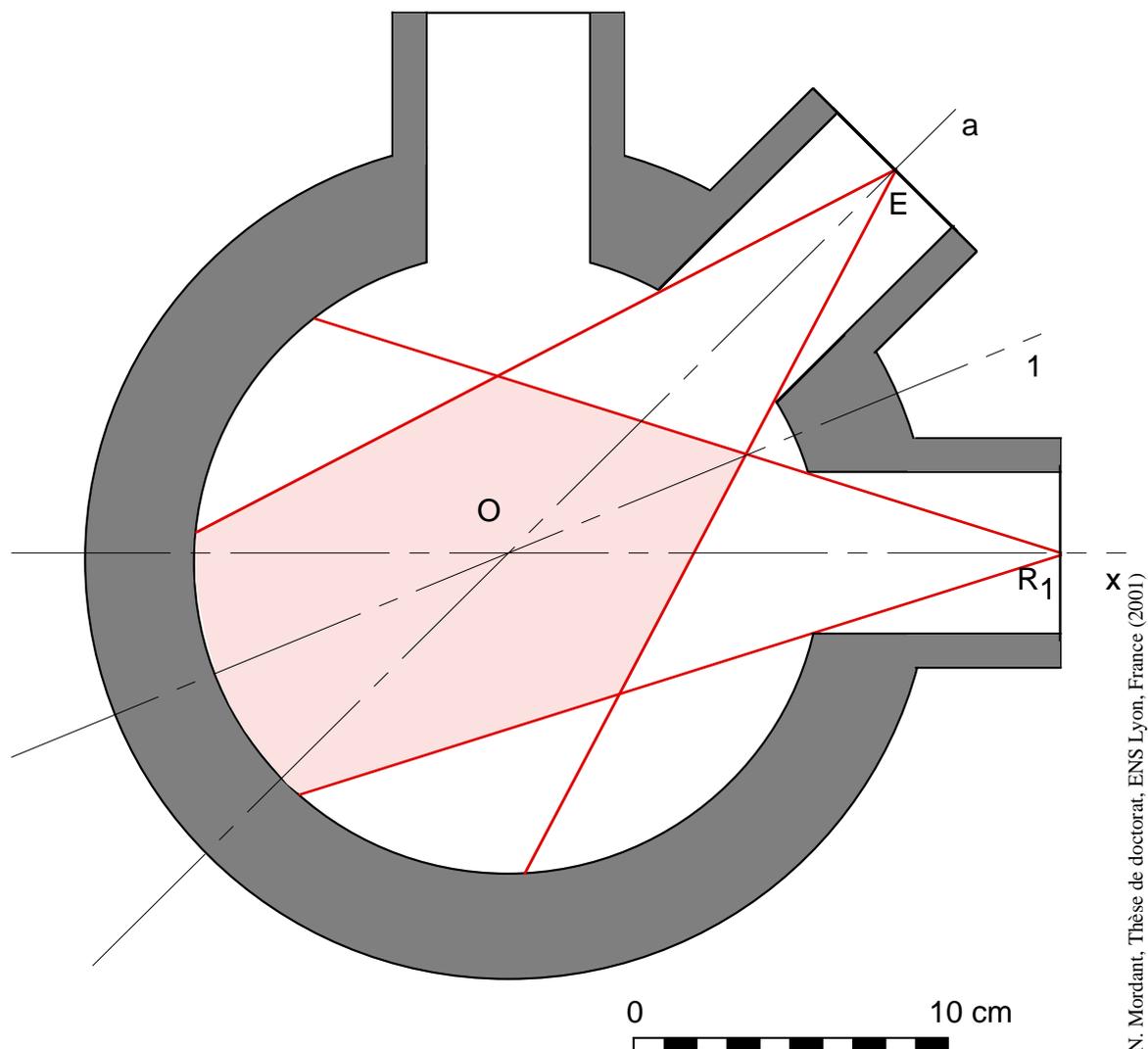
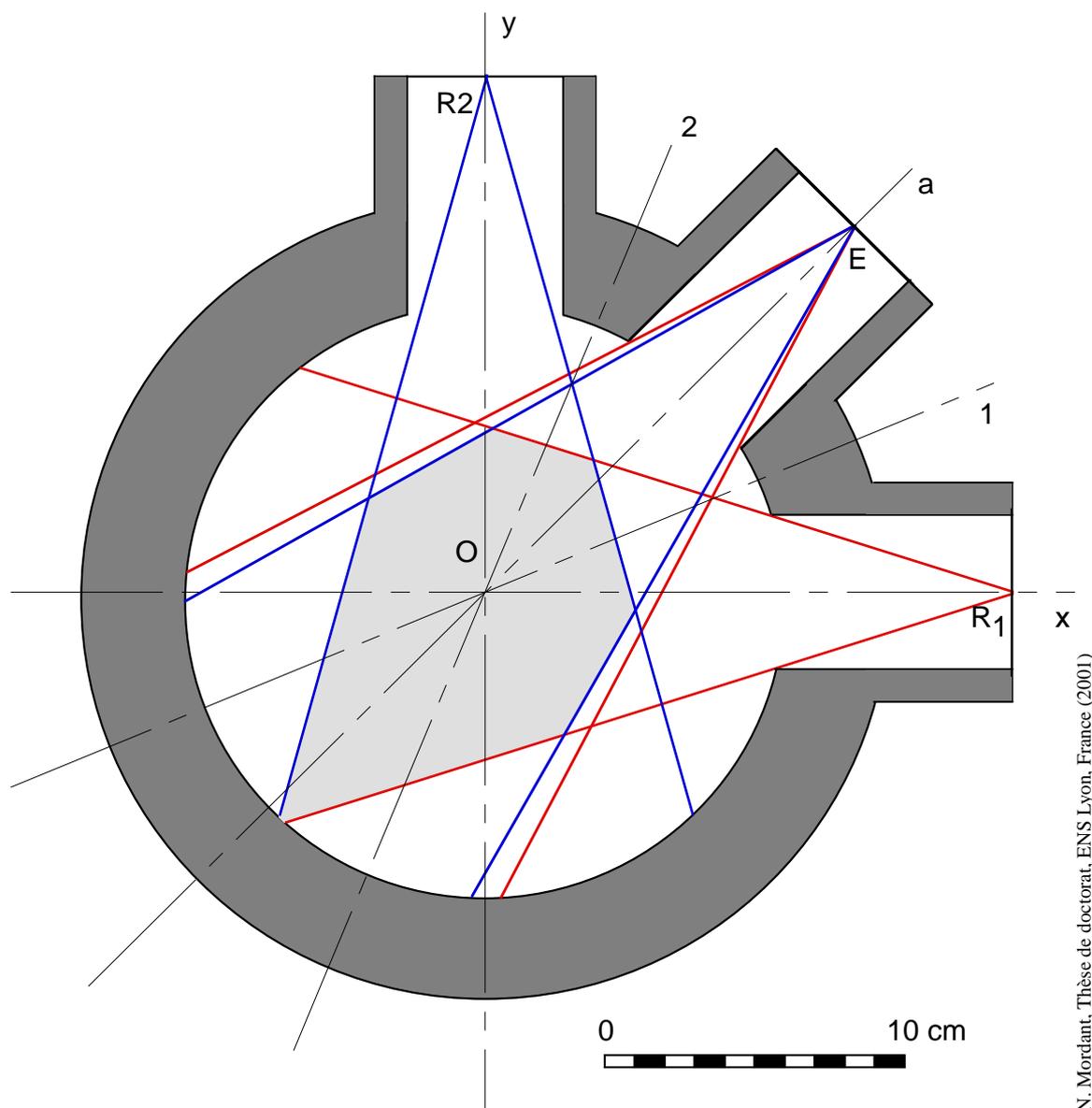


Fig. 5.2 – Schéma de la zone de mesure de la mesure de vitesse 1D. La bille sera visible par les récepteurs si elle est dans l'intersection des cônes d'émission et de réception (zone grisée).

ceux d'émission et dans les deux faisceaux de réception. Cela réduit donc nettement la zone de mesure ainsi qu'il est visible dans la figure 5.3. La zone ne fait plus que 8 cm de large sur une dizaine de longueur. Elle est cette fois allongée selon l'axe  $Oa$  et est nettement moins excentrée que la précédente. Les deux composantes mesurées ne sont pas orthogonales. On peut en extraire des composantes orthogonales par simple combinaison linéaire. Le couple  $(v_a, v_b)$  est étudié dans la suite de cet ouvrage et correspond aux directions selon la plus grande et la plus petite dimension de la zone de mesure. On les obtient simplement :

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{v_1 + v_2}{2 \cos \theta} \\ v_b &= \frac{v_1 - v_2}{2 \sin \theta}, \end{aligned} \quad (5.6)$$



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 5.3 – Schéma de la disposition des transducteurs. Coupe dans le plan médian de la cuve. Les émetteurs sont au point E et les récepteurs sont aux points R1 (2.5 MHz) et R2 (2.8 MHz). L'angle entre les axes des émetteurs et des récepteurs vaut  $45^\circ$ . Le cercle en train plein figure le cylindre de la cuve. Les droites figurent les limites des faisceaux ultrasonores à l'émission et à la réception. La zone d'intersection des faisceaux est figurée en gris. Il s'agit de la zone dans laquelle la bille apparaît simultanément sur les deux voies d'acquisition.

## 5.2.2 Valeurs des paramètres de l'algorithme

On rappelle brièvement comment sont obtenus les signaux. On émet un signal acoustique sinusoïdal (sinusoïde pure) et on enregistre le signal diffusé. Lorsqu'une bille entre dans le faisceau émetteur, elle diffuse les ultrasons avec un décalage fréquentiel Doppler lié à sa vitesse. Lorsqu'elle est également dans le faisceau de réception, on observe alors le décalage Doppler sur le signal réfléchi.

### Fréquence d'échantillonnage

Les signaux sont enregistrés après translation fréquentielle analogique. Le signal est la somme de 9 signaux répartis dans 9 bandes de fréquence distinctes. Le signal sommé ainsi obtenu est centré sur 1.882904 MHz pour une émission à 2.5 MHz et sur 2.182904 MHz pour une émission à 2.8 MHz. Ces signaux sont enregistrés par des échantillonneurs hpe1430A qui effectuent un hétérodynage numérique à la fréquence centrale du signal (qui est donc ramenée à zéro). La fréquence d'échantillonnage du signal sommé est 312.5 kHz. Pour reconstituer le signal reçu par un seul récepteur, on effectue un décalage fréquentiel en multipliant par une sinusoïde dont la fréquence correspond au centre de la bande considérée. Ensuite on effectue une décimation numérique (via la fonction *decimate* de MATLAB) dont l'ordre dépend de la valeur typique du décalage Doppler. Il faut alors prendre garde de ne pas décimer trop fortement car on risque de réduire excessivement la bande passante et donc de perdre les événements de grande vitesse. Par ailleurs, il ne faut pas non plus décimer trop peu car on introduit alors davantage de bruit et on risque de diminuer les performances de l'algorithme de MVA. La fréquence d'échantillonnage est donc en grande partie déterminée par la valeur maximum de la vitesse.

Il serait envisageable d'effectuer un filtrage passe-bas du signal sans décimation de façon à avoir un signal sur-échantillonné. Au vu de quelques tests, il semble que suréchantillonner le signal n'améliore pas les performances de l'algorithme MVA voire les détériore. Par conséquent, on choisit au plus juste le taux de décimation  $td$  de façon à ne perdre que le minimum d'événements. Les valeurs des taux de décimation sont données dans la table 5.1.

	man030401	man020801	man290501	man220501	man310701
$td$	32	24	12	10	12
$F_e$ (Hz)	9765	13021	26042	31250	26042
$K$	5	5	5	5	5
$Q$	10	10	10	10	10
$\sigma_e^2$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$F_b$ (Hz)	100	120	300	500	300
$S_e$ ( $\mu$ V)	30	15	20	50	20
$S_a$ ( $\mu$ V)	20	7.5	15	25	15

Tab. 5.1 – Valeurs des divers paramètres de l'algorithme de démodulation.  $td$  taux de décimation,  $F_e$  fréquence d'échantillonnage,  $K$  taille de la fenêtre,  $Q$  nombre de moyennes,  $F_b$  fréquence de coupure du filtre passe-bas,  $S_e$  seuil de la détection,  $S_a$  seuil d'arrêt de l'algorithme.

### Taille de la fenêtre : $K$

L'estimation de la fréquence nécessite l'utilisation d'un certain nombre d'échantillons successifs. De même que dans les exemples présentés dans le chapitre 4, on utilise une fenêtre de 5 points successifs. Cette faible valeur est suffisante car on ne recherche qu'une bille à la fois. Par ailleurs, comme observé sur la figure 4.4, la taille de la fenêtre intervient dans la fréquence de coupure du filtre (de façon assez complexe car couplée au choix de  $Q$ ). En effet, on conçoit que plus la fenêtre sera grande plus on lissera le signal démodulé. Ce choix de  $K = 5$  réalise un compromis acceptable entre qualité d'estimation et résolution temporelle.

**Nombre de moyennes :  $Q$** 

Bien que l'on dispose de 9 voies de réception et donc de 9 réalisations du bruit, il est tout de même nécessaire d'effectuer des moyennes afin d'améliorer la qualité de l'estimation. On a choisi la valeur  $Q = 10$ . On verra dans le paragraphe 6.3 que le choix de ces paramètres ne limite pas la résolution de la mesure.

**Bruit de modélisation :  $\sigma_{\epsilon}^2$** 

Le choix de  $\sigma_{\epsilon}^2$  détermine en partie la fréquence de coupure du filtre mais également le niveau de bruit sur le signal de fréquence extrait. On doit choisir une valeur suffisamment élevée pour que le filtre suive correctement la modulation de fréquence mais aussi assez basse pour qu'il ne soit pas trop sensible au bruit. Une valeur de l'ordre de  $\sigma_{\epsilon}^2 = 5 \cdot 10^{-3}$  donne des performances acceptables.

**Seuil d'énergie  $S_e$** 

La méthode de détection des événements nécessite un seuillage de l'énergie du signal. En pratique, le signal contient une très forte composante à fréquence nulle due à un couplage direct entre émetteur et récepteur d'origine électromagnétique ou acoustique (réflexions sur les parois ou ondes de surface si l'émetteur est sur le même réseau que les récepteurs). De plus, les réflexions sur les parois subissent un léger décalage Doppler dû à la turbulence de l'écoulement. On observe donc un pic à fréquence nulle dans le spectre du signal reçu. Ce pic est éliminé par filtrage réjecteur de bande via un filtre numérique de Butterworth et la fonction *filtfilt* de MATLAB( qui n'introduit pas de distorsion de phase). La fréquence de coupure  $F_b$  de ce filtre dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement. Les valeurs sont données dans la table 5.1. Par ailleurs, du fait d'interactions non-linéaires entre les voies électroniques, on observe également un certain nombre de raies qui sont éliminées par filtrage réjecteur de bande numérique. Une fois le signal mis en forme de cette façon, on calcule le carré de l'amplitude que l'on moyenne sur les 9 récepteurs. Ensuite ce signal est filtré passe-bas à 100 Hz. On peut alors choisir le seuil d'énergie pour la détection des événements intéressants. Les valeurs sont fournies dans la table 5.1.

**Arrêt de la propagation de l'algorithme :  $S_a$** 

Il faut finalement arrêter la propagation de l'algorithme. On a choisi de se baser sur la valeur d'amplitude fournie par la sortie de l'algorithme MVA. Lorsque l'amplitude est plus faible que le seuil  $S_a$ , on arrête. Les valeurs du seuil sont données dans la table 5.1. En pratique, on arrête l'algorithme si l'amplitude reste plus faible que le seuil pendant plus que 400 échantillons successifs.

## 5.3 Cohérence de l'estimation de vitesse

### 5.3.1 La mesure de la position

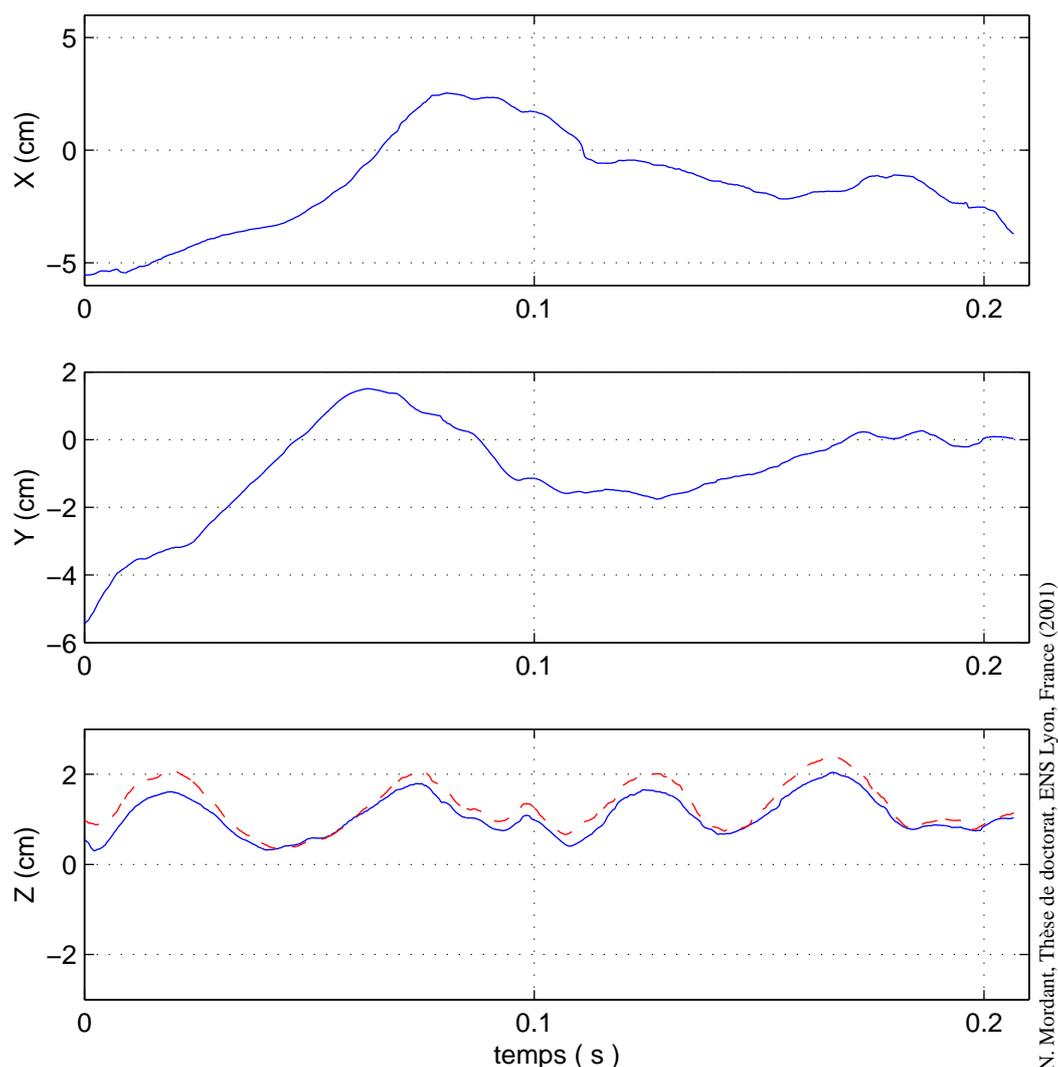
On effectue l'acquisition du signal acoustique sur deux réseaux de 8 et 9 transducteurs. Ceux-ci sont répartis en croix de façon à constituer des antennes linéaires de 4 ou 5 capteurs. En mesurant les retards de phase sur les différents capteurs, on peut estimer la direction d'arrivée

du son. Chaque antenne linéaire fournit un angle. Un réseau étant constitué de deux antennes linéaires, on obtient deux angles qui décrivent une droite sur laquelle se trouve la bille. Avec les deux réseaux, on obtient deux droites qui devraient s'intersecter dans l'espace si la précision des mesures était infinie. Par convention, on définit les axes de façon à ce que l'axe des  $z$  soit l'axe de la cuve et le centre  $O$  du repère, le centre de la cuve (voir figure 5.1). Le réseau 1 est parallèle au plan  $yOz$  et le réseau 2 est parallèle au plan  $xOz$ . Le réseau 1 désignera donc une droite légèrement inclinée par rapport à l'axe des  $x$  et le second réseau une droite légèrement inclinée par rapport à l'axe des  $y$ . Ces deux droites forment donc entre elles un angle qui sera toujours proche de  $90^\circ$  car la particule ne s'éloigne pas de plus de 10 cm maximum du point  $O$  et les transducteurs sont éloignés de 17.6 cm de  $O$ . Les coordonnées  $X$  et  $Y$  du point d'intersection vont donc être bien définies. Par contre une légère erreur dans l'estimation des angles va éloigner les droites selon la direction  $z$ . La coordonnée  $Z$  va donc être la plus délicate à estimer et la plus sensible aux erreurs d'estimation des angles. Dans la mesure présentée ci-dessous, ceci est d'autant plus délicat que l'on n'a que 4 transducteurs pour estimer l'angle par rapport à l'axe  $Oz$  (transducteur 1) tandis que l'on a 5 transducteurs pour estimer les 3 autres angles.

### 5.3.2 La position

On présente dans la suite de cette partie, l'exemple d'un des segments extrait de l'expérience man290501. Sur la figure 5.4, sont tracées les trois coordonnées de la position des points  $P_1$  et  $P_2$  des droites issues des deux transducteurs et minimisant la distance  $P_1P_2$ . Les coordonnées  $X$  et  $Y$  des deux points sont indiscernables sur la figure. L'écart quadratique moyen entre les abscisses et ordonnées des deux points sont de l'ordre de  $100 \mu\text{m}$ . Ce faible écart est dû au fait que les deux droites sont quasi orthogonales. Par contre l'estimation de la coordonnée  $Z$  est nettement moins bonne. On observe un écart qui peut aller jusqu'à 4 mm. L'écart quadratique moyen est de l'ordre de 1.5 mm. Il faut noter cependant que l'incertitude sur la position des centres des transducteurs peut être de l'ordre du millimètre et qu'il y a également une incertitude sur l'angle entre l'axe normal aux transducteurs et les axes  $Ox$  et  $Oy$ . Ces incertitudes sont délicates à mesurer et nécessitent un positionnement très précis des transducteurs dans l'espace. Par ailleurs, pour assurer l'orthogonalité du plan des transducteurs par rapport aux axes, il faut vraisemblablement un réusinage de la cuve. Ces résultats ne prétendent pas présenter les performances optimales de la technique de mesure mais plutôt donner une idée de ses potentialités. Comme on n'utilise que 4 transducteurs sur l'une des directions du réseau 1, on se fiera au point  $P_2$  comme estimées de la position de la particule. On peut raisonnablement espérer que la précision de la localisation est meilleure que le millimètre.

La trajectoire correspondant à ces trois coordonnées est présentée sur la figure 5.5. On voit que cette trajectoire est extrêmement contournée. On observe des points de rebroussement qui doivent correspondre à des accélérations très violentes. L'extrait étudié ici contient un passage avec des accélérations très violentes dues à de fortes oscillations de la vitesse. La trajectoire pendant cet intervalle de temps est présentée sur la figure 5.6. On a soustrait à la position la contribution due à la vitesse moyenne pendant l'intervalle de temps considéré. La trajectoire dans ce référentiel en mouvement s'enroule sur elle-même. On peut tout à fait interpréter ce mouvement comme la rotation de la bille autour d'un vortex, lui-même en translation sous l'effet de l'entraînement par les structures de taille supérieure. On notera que le rayon de la rotation est de l'ordre de quelques centaines de microns. Nous sommes dans ce cas à la limite des performances de la technique de mesure, mais on voit que l'on peut détecter des mouvements de très faible amplitude (dans ce cas de l'ordre de la taille de la bille).



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 5.4 – Composantes de la position. De haut en bas les composantes  $X$   $Y$  et  $Z$ . La courbe en trait plein correspond au point  $P_1$  et les pointillés à  $P_2$ .

### 5.3.3 Cohérence de la mesure de vitesse

Malgré le bruit de mesure sur la position, on peut dériver la position pour obtenir la vitesse. Les vitesses mesurées par effet Doppler peuvent être composées entre elles de façon à obtenir la vitesse projetée sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ . Le résultat est présenté dans la figure 5.7. Le signal issu de la dérivation est très bruité mais ressemble fortement au signal extrait du Doppler. La corrélation entre les deux signaux est supérieure à 0.9. On observe sur le signal dérivé de forts pics qui sont dus aux passages de la vitesse par 0. En effet, dans ce cas, l'amplitude du signal passe sous le niveau de bruit à cause des filtres et donc l'algorithme tend à garder la position constante. Par conséquent, la position reste inchangée jusqu'à ce que le signal réapparaisse et alors l'algorithme effectue une correction brutale qui crée ces pics sur le signal de vitesse. Par ailleurs, de nombreux détails du signal de vitesse Doppler, n'apparaissent pas sur le signal dérivé à cause de la qualité insuffisante de la localisation.

A cause du niveau de bruit élevé, il est délicat d'estimer l'influence de la largeur angulaire du faisceau ultrasonore sur la composante de vitesse mesurée. Il semble que la mesure par effet

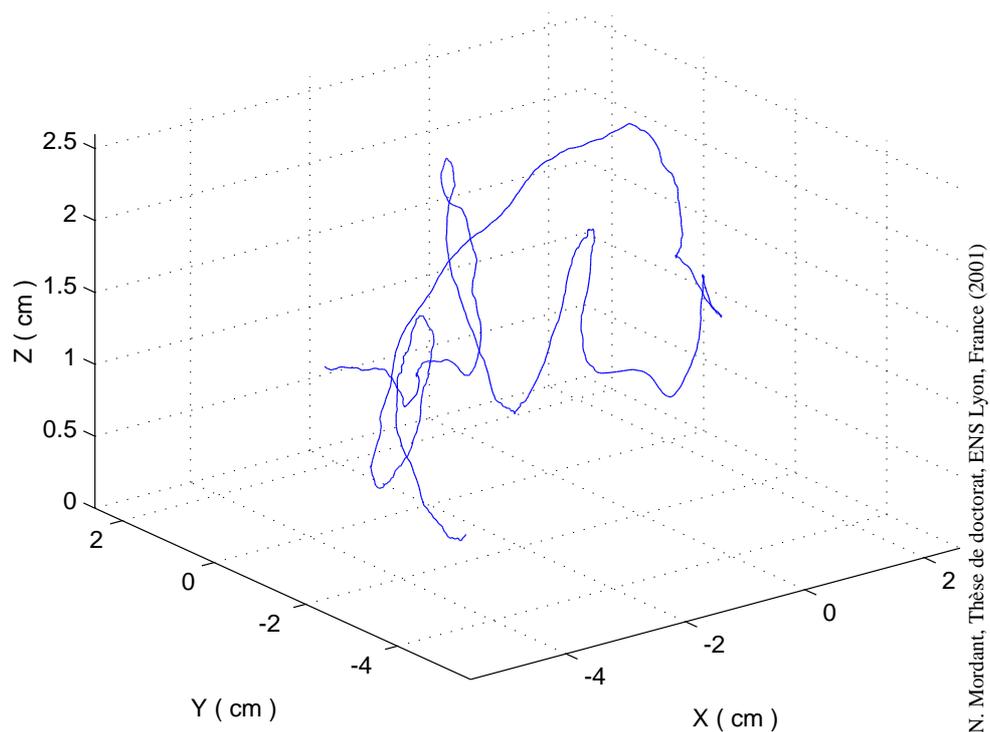


Fig. 5.5 – Trajectoire correspondant à la figure précédente.

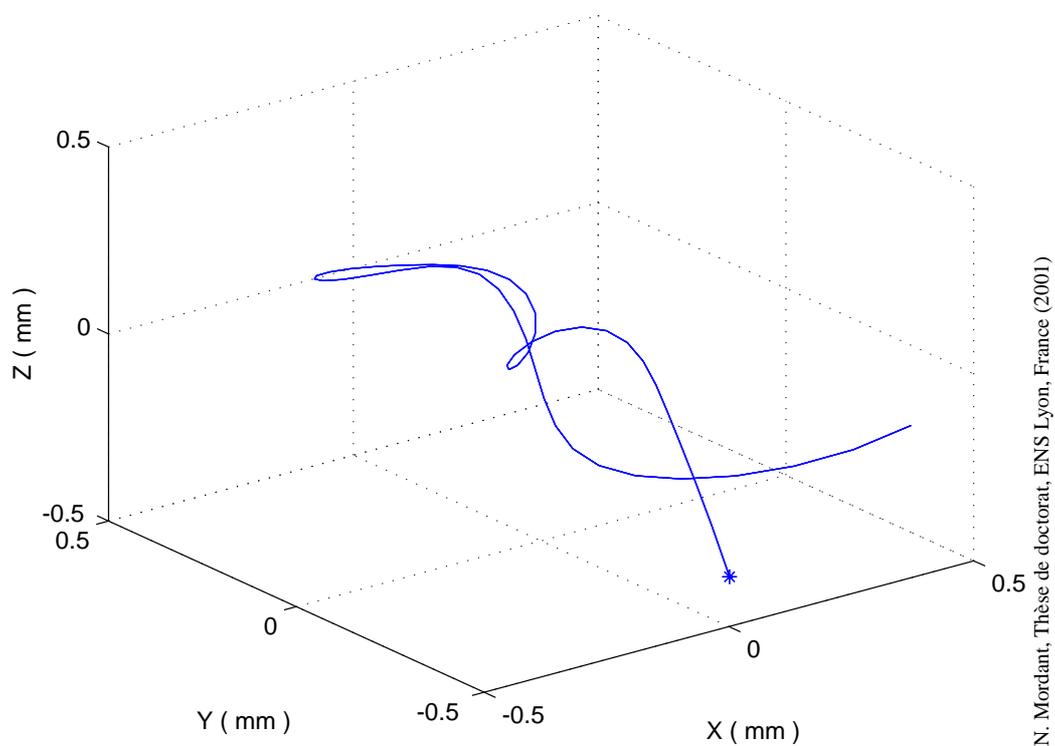
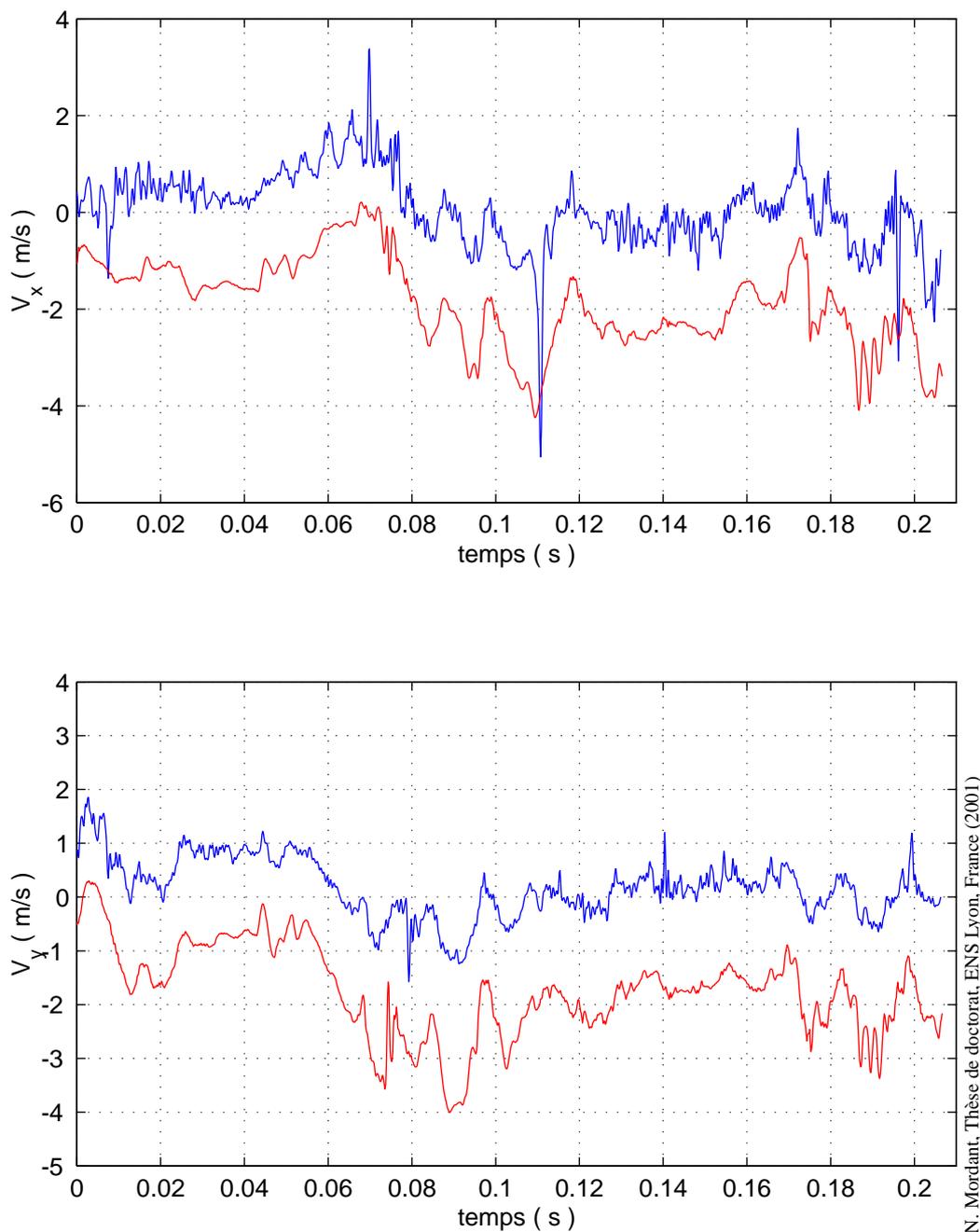


Fig. 5.6 – Trajectoire pour les temps voisins de 0.19s. On a retranché la contribution de la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps considéré. L'étoile indique le premier point. La trajectoire a été lissée par filtrage passe-bas.

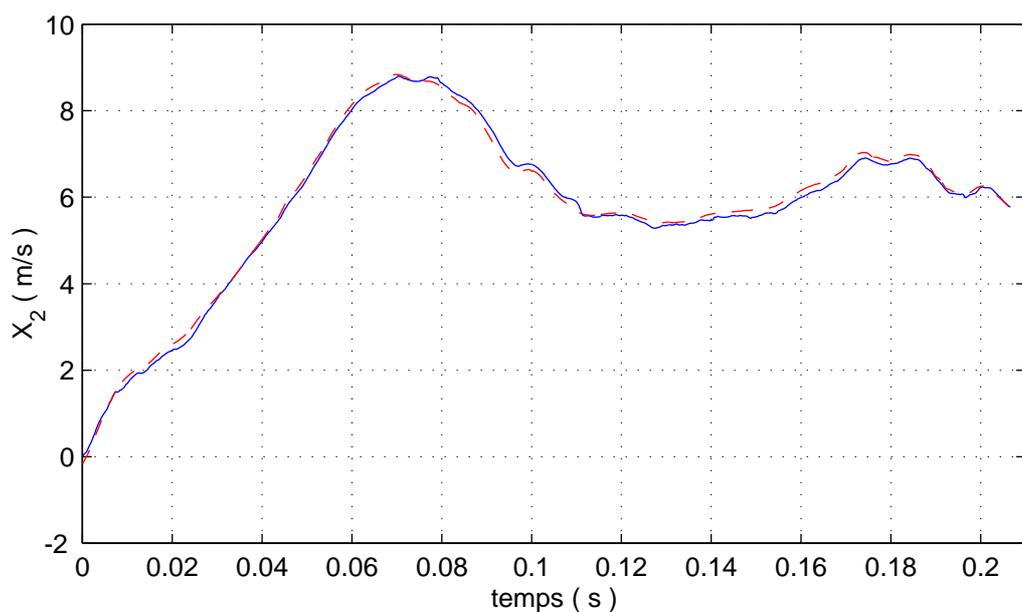
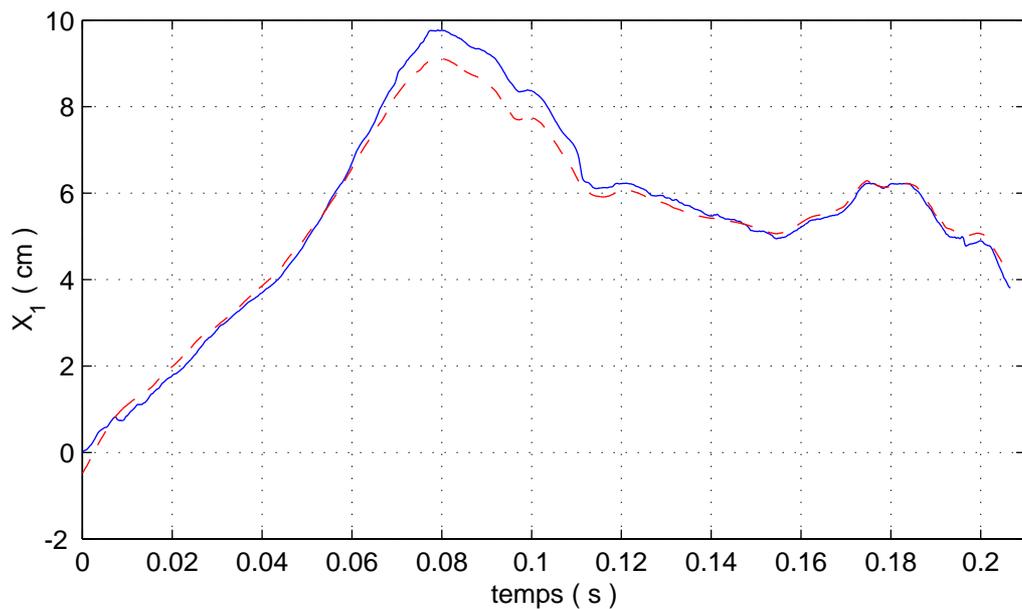


N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 5.7 – Comparaison des composantes de vitesse obtenues par dérivation de la position et par effet Doppler (décalée vers le bas).

Doppler sous estime par moment la vitesse (en valeur absolue) par rapport à la vitesse théorique mais une quantification précise de cet effet nécessite des mesures nettement plus fines de la position. Pour cela, au vu des résultats précédents, il faut améliorer le rapport signal/bruit et vraisemblablement augmenter le nombre de transducteurs par antenne linéaire.

Plutôt que de dériver le signal de position, on peut intégrer le signal de vitesse Doppler. Le résultat est tracé sur la figure 5.8. On a intégré les vitesses  $V_1$  et  $V_2$  et on compare à la position de la bille selon les mêmes axes. Les deux signaux ont la même allure. L'écart entre les deux méthodes est de l'ordre de 0.5 cm maximum pour le premier et de 3 mm pour le second. Les



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 5.8 – Comparaison des coordonnées de position obtenues par intégration de  $V_1$  et  $V_2$  (pointillés) à celle obtenues par triangulation.

écarts quadratiques moyens sont respectivement 3 mm et 1 mm. Il faut noter que dans ce cas, les erreurs d'estimation de la vitesse s'accumulent lors de l'intégration.

Ces différents tests montrent la cohérence entre les deux types de mesure. La vitesse mesurée par les deux méthodes est identique ainsi que le déplacement. On peut estimer que cela valide la mesure par effet Doppler de la vitesse et on peut considérer que l'on mesure ainsi effectivement les composantes de la vitesse.

## Chapitre 6

# La vitesse lagrangienne

Ce chapitre est consacré à l'étude statistique des signaux de vitesse. La première question posée est la manière d'effectuer les moyennes pour une telle mesure. On étudie la forme de la densité de probabilité de la vitesse, puis l'autocorrélation et le spectre lagrangien. On conclura le chapitre par une discussion sur la fonction de structure d'ordre 2 qui est fondamentale dans la théorie K41 ainsi que dans les modèles stochastiques de dispersion.

## 6.1 Les signaux lagrangiens

### 6.1.1 Les segments

#### La mesure 1D

L'algorithme MVA permet donc d'obtenir un certain nombre de morceaux de signaux démodulés. Cependant, ce n'est pas réellement satisfaisant pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le seuil  $S_a$  est fixé volontairement assez bas pour obtenir une portion la plus longue possible. On risque donc de ne pas arrêter assez tôt l'algorithme ou bien celui-ci peut se recaler sur un autre événement. Par ailleurs, il arrive que plusieurs billes soient présentes simultanément dans l'intersection des faisceaux. Or l'algorithme n'est pas optimisé pour traiter ce cas et risque donc d'avoir un comportement aberrant en passant d'une bille à l'autre voire à ne chercher qu'une composante alors qu'il y en a deux. Il est donc nécessaire d'effectuer un second passage afin, d'une part de repérer les endroits où se terminent effectivement les événements détectés et d'autre part, d'éliminer les événements problématiques. Ce second passage a été effectué manuellement, un tel algorithme restant à étudier.

La distribution de la taille de segments obtenus est donnée figure 6.1. L'algorithme d'extraction des segments ne conserve pas les segments très courts. L'histogramme des tailles a donc un maximum suivi d'une queue exponentielle montrant une forte dispersion. Étant donné que l'on a supprimé artificiellement les segments courts, on peut penser que la loi de probabilité des tailles des segments puisse être exponentielle. Il faut noter que la taille des segments ne correspond pas réellement au temps de séjour de la particule dans le faisceau. Il s'agit en réalité de la taille du segment que l'algorithme a réussi à identifier. Le début et la fin du segment sont en réalité davantage déterminés par le comportement de l'algorithme. Ainsi si la qualité de la démodulation se détériore (diminution du rapport signal/bruit, présence simultanée d'une deuxième particule...) alors on peut être amené à stopper l'algorithme tandis que la particule demeure encore un certain temps dans le faisceau.

Pour l'expérience présentée sur la figure (man290501), la moyenne est de l'ordre de 1350 échantillons (52 ms) pour une variance de 950 (37 ms). Le temps de décorrélation de la vitesse

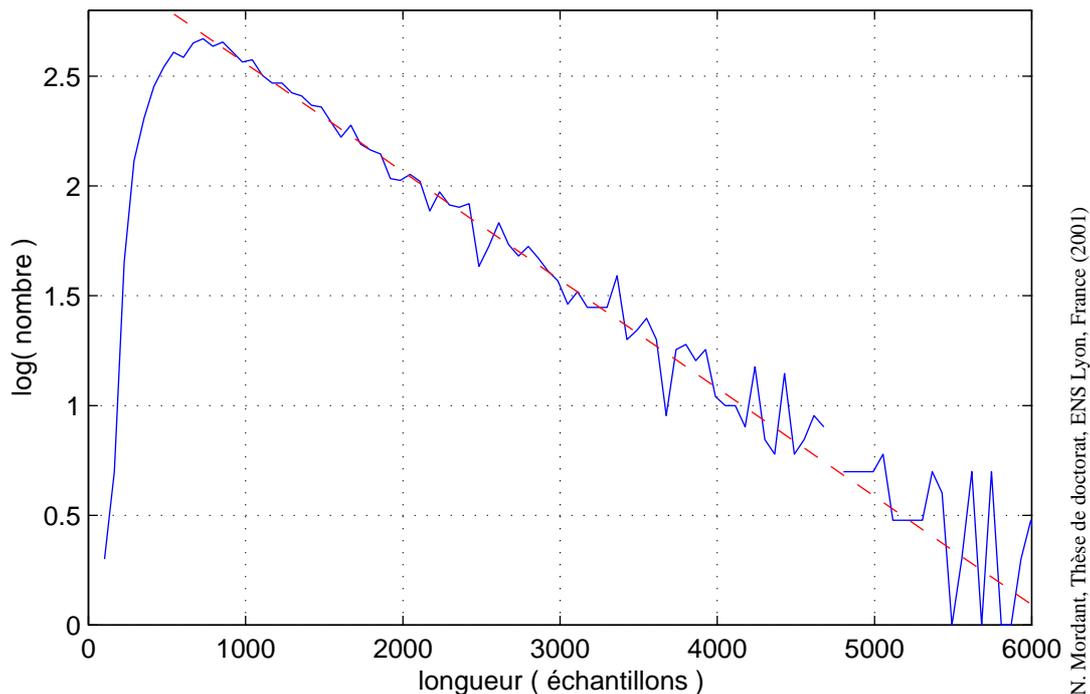


Fig. 6.1 – Histogramme des tailles de segments pour l’expérience man290501. On a placé une droite en pointillés pour marquer la queue exponentielle

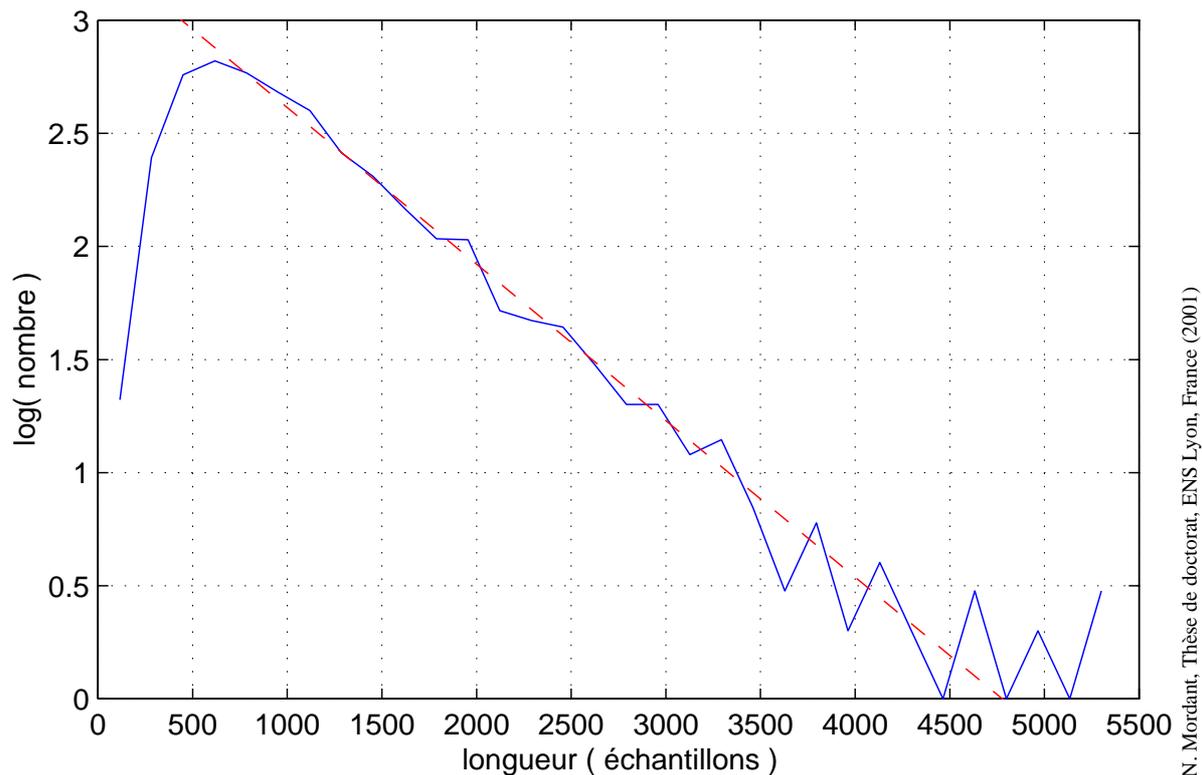
vaut dans l’expérience présentée  $T_L = 22.4$  ms. La taille des segments vaut donc en moyenne  $2.3 T_L$ .

## La mesure 2D

La distribution des longueurs des segments est présentée sur la figure 6.2. La forme est identique à celle présentée dans le cas d’une seule composante mais la moyenne et la variance sont plus faibles et valent respectivement 1014 et 640 échantillons. La zone de mesure étant de volume plus petit que dans le cas monocomposante, la particule demeure moins longtemps dans l’intersection des faisceaux. On dispose de 4068 segments au total, ce qui correspond à trois fois moins d’échantillons que pour les résultats présentés dans les parties précédentes concernant l’expérience man290501.

### 6.1.2 Comment faire des moyennes ?

Dès lors que la durée des événements est variable, se pose la question de la manière d’effectuer des moyennes. La méthode directe consiste à donner à chaque échantillon un poids identique. Alors les segments n’auront pas tous le même poids. Dans l’expérience de Voth et al.[92], les auteurs décrivent leur méthode de pondération lors des moyennes. Dans leur cas, la particule demeure dans la zone de mesure pendant une durée faible par rapport au temps caractéristique d’évolution de la vitesse qui varie donc peu au cours de la mesure. La pondération consiste donc essentiellement à affecter un poids à chaque événement inversement proportionnel au temps de séjour. Dans notre cas, le temps caractéristique pour l’expérience man290501 est de l’ordre de 22 ms c’est à dire un peu moins de la moitié de la moyenne des temps de séjour. De façon



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 6.2 – Histogramme des longueurs des segments pour lesquels la particule est visible simultanément sur les deux voies d'acquisition pour l'expérience man290501.

générale, la bille reste donc plusieurs temps caractéristiques dans la zone de mesure (ce qui était une des exigences de la mesure). La pondération s'annonce donc délicate à effectuer. Par exemple, pour le calcul de la vitesse quadratique moyenne, on obtient  $\sigma = 0.96$  m/s en donnant un poids égal à chaque échantillon tandis qu'en en donnant le même poids à chaque segment on obtient 1.00 m/s soit une différence de 4%. Cette différence est relativement faible mais tout de même significative. Néanmoins, il est difficile de se décider en faveur d'une méthode plutôt qu'une autre. Comme la distribution des temps de séjours est tout de même assez piquée, on prend le parti de donner à chaque segment un poids proportionnel à sa longueur au risque de favoriser les segments les plus longs.

La figure 6.3 présente la vitesse quadratique moyenne des segments de longueur plus grande qu'une taille  $l$  en fonction de  $l$ . On notera désormais cette grandeur  $v^>(l)$ . On voit que la vitesse quadratique moyenne diminue lorsqu'on considère des morceaux de plus en plus longs. Elle passe de 0.96 à 0.84 lorsque la taille dépasse 4000 échantillons soit une diminution de 12%. On peut comprendre cette décroissance en intuitant que les particules allant "le plus lentement" c'est-à-dire de variance plus faible ont une probabilité plus grande de rester longtemps dans la zone de mesure. Dès lors, on conçoit le biais induit par cette méthode de mesure. On verra que ce biais peut devenir significatif et que dans certains cas, il est nécessaire de le compenser.

La vitesse quadratique moyenne des composantes de vitesse des segments plus grands que  $l$  est présentée dans la figure 6.4 dans le cas de la mesure 2D. Le nombre de segments utilisés est nettement plus faible car on a extrait des segments précédents les portions où la bille est détectée simultanément par les deux voies d'acquisition. Les courbes obtenues sont donc nettement moins lisses que celle de la figure précédente. On a tracé  $v^>$  pour les composantes  $v_1, v_2$ ,

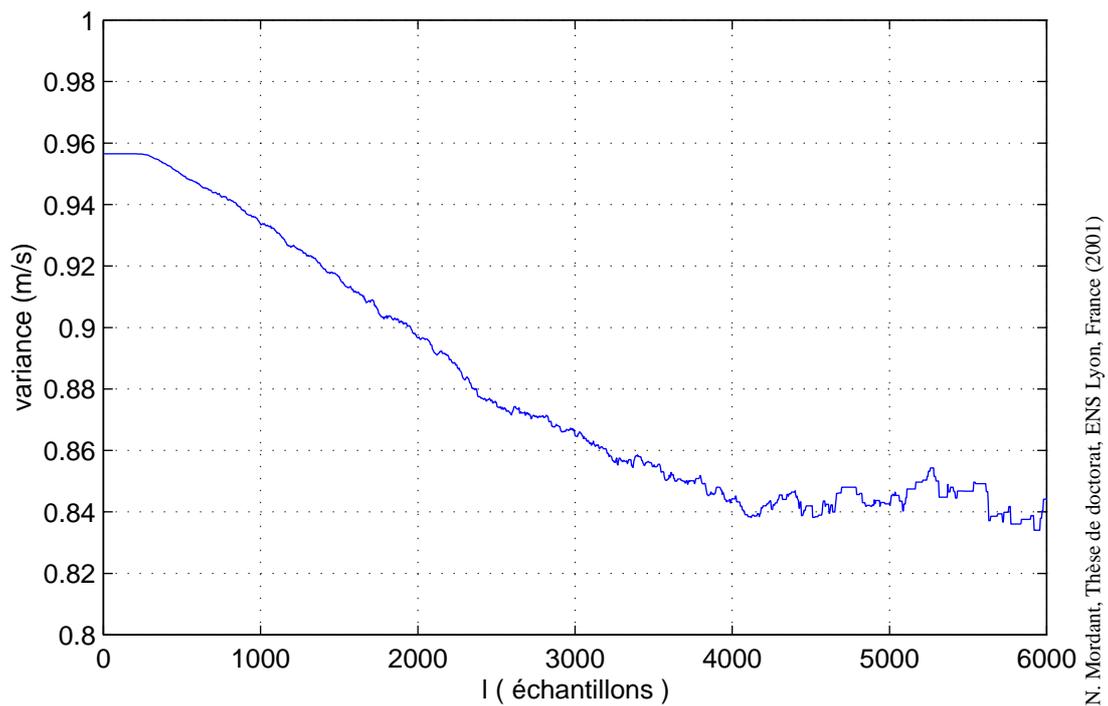


Fig. 6.3 – Vitesse quadratique moyenne des segments plus long que la longueur  $l$  pour l'expérience man290501

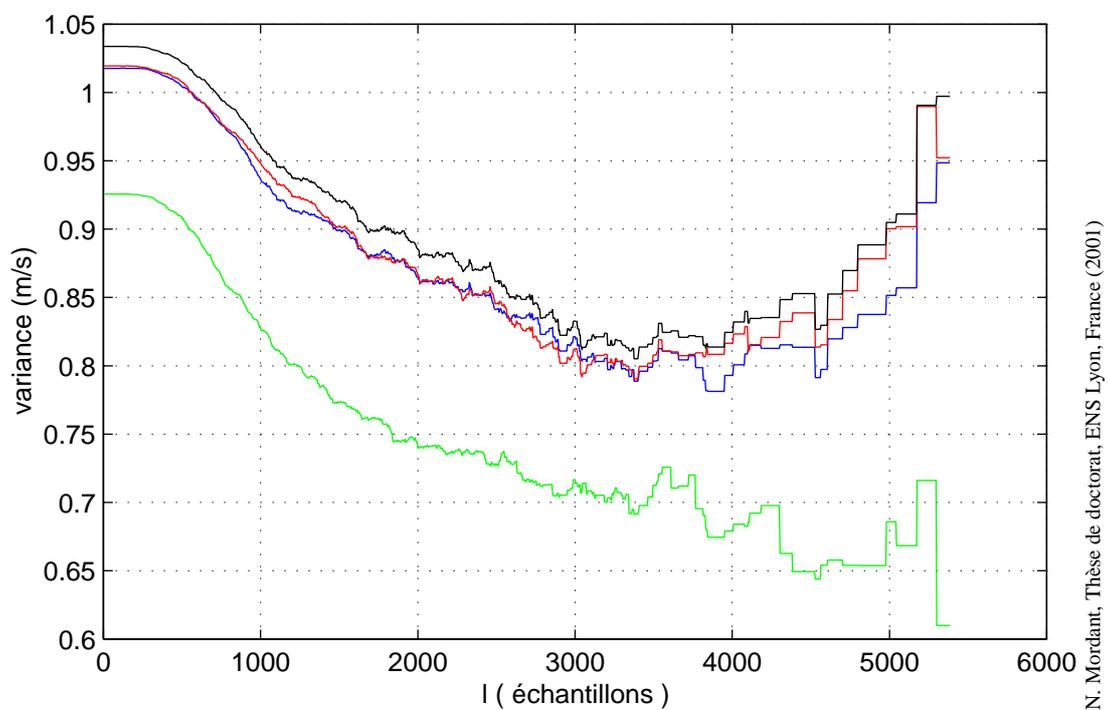


Fig. 6.4 – Vitesse quadratique moyenne des segments plus longs que  $l$  en fonction de  $l$  pour l'expérience man290501. De haut en bas on a  $v^2$  calculée pour les composantes  $v_a$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_b$ .

$v_a$  et  $v_b$ . On remarque que les variances de  $v_1$  et  $v_2$  sont identiques. Cela s'explique par le fait que la zone de mesure est identique "vue" par les deux voies d'acquisition en terme géométrique. Par contre, la variance de  $v_a$  est légèrement supérieure et surtout la variance de  $v_b$  est nettement plus faible. On notera que la zone de mesure est plus étendue dans la direction de  $v_a$  que dans celle de  $v_b$ . On voit donc clairement qu'en sélectionnant les événements d'une certaine durée, on observera préférentiellement les événements de variance la plus faible. Cet effet est important car la vitesse quadratique moyenne de la vitesse  $v_b$  est 20% plus faible que celle de  $v_a$  alors que les directions de mesure sont identiques en termes de symétrie de l'écoulement car elles sont toutes deux dans le plan médian de la cuve.

### 6.1.3 PDF de vitesse

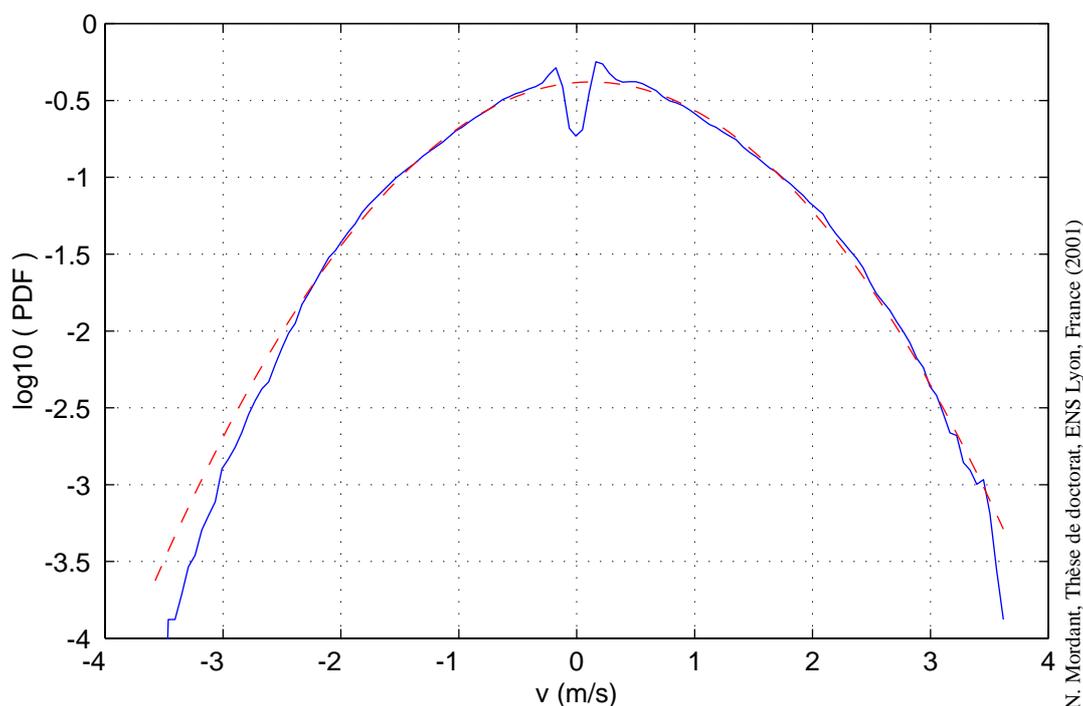


Fig. 6.5 – Fonction densité de probabilité de la vitesse pour l'expérience man290501. On a tracé en pointillés la gaussienne de même variance et valeur moyenne.

Une des premières grandeurs d'intérêt est la fonction densité de probabilité de la vitesse obtenue via l'histogramme de vitesse. Elle est présentée sur le figure 6.5. L'histogramme est calculé en donnant le même poids à chaque échantillon c'est-à-dire simplement en mettant bout-à-bout tous les segments. On observe tout d'abord un creux au voisinage des vitesses nulles et des bosses sur ses bords. Cela est dû aux opérations de filtrage. Pour se débarrasser du pic central, on est obligé d'effectuer un filtrage passe-bas autour de la fréquence nulle. Par conséquent, il est en tout rigueur impossible de mesurer une fréquence nulle. On s'attend donc à observer une probabilité nulle pour les fréquences faibles. De plus, l'algorithme contient un filtre de Kalman interdisant à la fréquence estimée de faire des sauts trop rapides (par réglage de  $R_\epsilon$ ). Par conséquent, lorsque la vitesse de la particule change de signe, l'algorithme va passer continûment d'un côté à l'autre de la fréquence nulle mais en y restant un minimum de temps car il n'y a pas de signal à cette fréquence. Le creux n'est donc pas très profond. Par ailleurs,

cela favorise également les fréquences situées près de la bande coupée car l'algorithme aura tendance à attendre à ces fréquences que le signal réapparaisse de l'autre côté. Cela explique les bosses observées. Il est difficile de corriger cet effet. On pourrait imaginer de reconstituer le signal de façon plus satisfaisante qu'en laissant simplement agir le filtre de Kalman, par exemple en ajustant la trajectoire dans le plan temps-fréquence par des courbes plus ou moins complexes ("cubic splines" ou polynômes).

On observe également que les ailes de la densité de probabilité sont proches de la gaussienne de même variance et valeur moyenne tracée en pointillés. On se rappelle que les densités de probabilité eulériennes et lagrangiennes sont censées être identiques dans le cas de la turbulence homogène. La densité de probabilité eulérienne étant gaussienne, on s'attend à ce qu'il en soit de même dans le cas lagrangien. On note que la valeur moyenne n'est pas nulle et vaut dans ce cas 0.12 m/s, ce qui signifie qu'en moyenne la bille s'approche du transducteur. Ceci est compatible avec la recirculation moyenne observée dans l'écoulement de Von Kármán. Le fluide est éjecté par les disques et revient vers l'axe dans le plan médian. La zone de mesure étant l'intersection de deux cônes, elle est décalée vers le bord de la cuve opposé aux transducteurs acoustiques et donc dans une zone où, en moyenne, le fluide revient vers l'axe et donc vers les transducteurs.

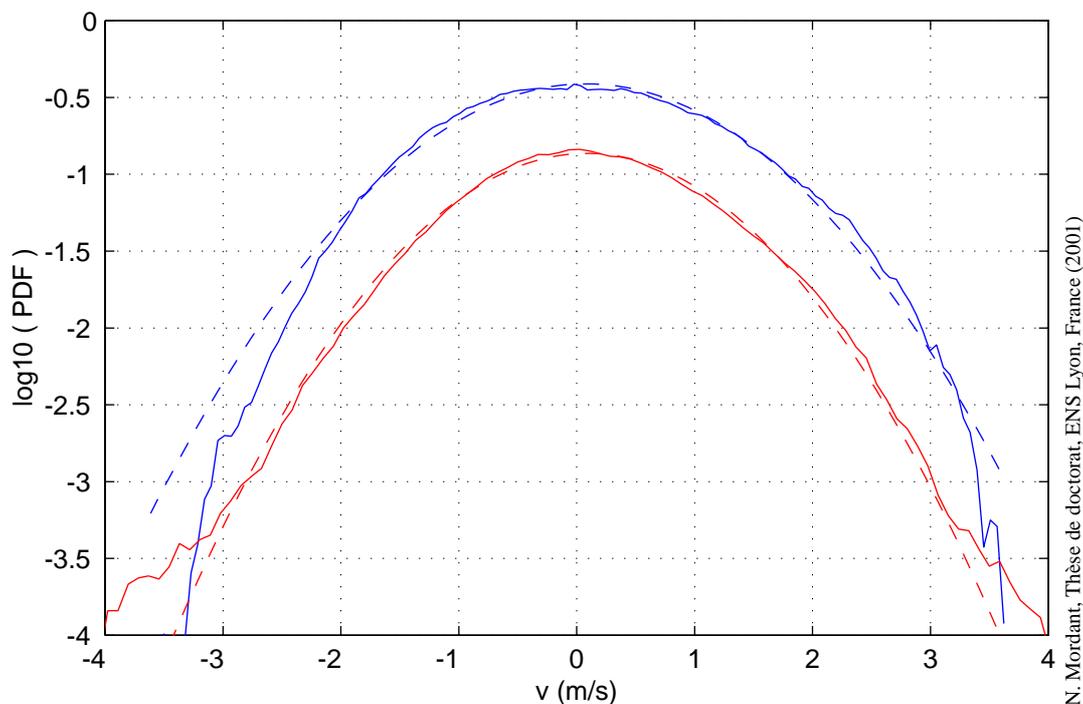


Fig. 6.6 – PDF des deux composantes  $v_a$  (en haut) et  $v_b$  (en bas décalée de 0.5) pour l'expérience man290501. En pointillés : gaussiennes de même moyenne et variance.

Les fonctions densité de probabilité des deux composantes de vitesse  $v_a$  et  $v_b$  sont tracées sur la figure 6.6. La forme des PDFs est encore très proche de la gaussienne.

On a accès à la vitesse quadratique moyenne pour les différentes expériences. On peut donc grâce à la mesure de  $\varepsilon$  estimer les longueurs de Taylor correspondant ainsi que le nombre de Taylor basé sur cette longueur (voir la table 6.1). Les valeurs de  $\lambda$  varient entre 650 et 920  $\mu\text{m}$ . Les tailles de bille utilisées sont 250, 500 et 1000  $\mu\text{m}$ . On voit donc que les billes de la taille la plus petite sont de l'ordre du tiers de la longueur de Taylor. On peut donc espérer que ces billes n'opèrent pas de filtrage spatial trop important. Ce ne sera pas forcément le cas pour les billes

de 1 mm de diamètre.

	man030401	man020801	man290501	man220501	man310701
pales	non	oui	oui	oui	oui
$\Omega$ (Hz)	17.5	4	7.2	11.2	7.2
diam. billes ( $\mu\text{m}$ )	250	250	250	250	1000
$\varepsilon$ (W/kg)	13	8	25	72	25
$R_\lambda$	155	310	740	1100	740
$S$	5153	4269	9506	5331	3113
$N_0$ ( $10^6$ points)	2.01	1.56	3.2	1.44	0.96
$\sigma$ (m/s)	0.38	0.48	0.98	1.58	0.98
$T$ (ms)	57.1	250	139	89.3	139
$T_L$ (ms)	42.5	46.7	22.4	14.7	22.7
$T/T_L$ (ms)	1.3	5.4	6.2	6.1	5.7
$T_2$ (ms)	1	1	0.4	0.3	1.1
$\tau_\eta$ (ms)	0.28	0.35	0.20	0.12	0.20
$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	760	920	880	650	880
$\sigma_a$ ( $\text{m/s}^2$ )	51	64	280	640	100
$a_0$	0.054	0.18	0.63	0.67	0.08
$C_0$	0.44	0.97	2.9	4.0	2.6
$C_0^\infty$	0.52	1.05	3.4	4.7	3.4

Tab. 6.1 – Caractéristiques des différentes expériences.  $\Omega$  fréquence de rotation des disques,  $\varepsilon$  taux de décimation moyen,  $S$  nombre de segments utilisés,  $N_0$  nombre total de points,  $\sigma$  vitesse quadratique moyenne d'une composante,  $T$  période de rotation des disques,  $T_L$  temps caractéristique lagrangien,  $T_2$  temps caractéristique de coupure de la bille,  $\tau_\eta$  temps de Kolmogorov,  $\lambda$  longueur de Taylor,  $\sigma_a$  valeur quadratique moyenne d'une composante d'accélération,  $a_0 = \sigma^2 \tau_\eta / \varepsilon$ ,  $C_0$  maximum de  $D_2^L(\tau) / (\varepsilon \tau)$ ,  $C_0^\infty = 2\sigma^2 / \varepsilon T_L$ .

## 6.2 Fonction d'autocorrélation de la vitesse lagrangienne

### 6.2.1 Les estimateurs de la fonction d'autocorrélation

De façon générale, il est assez délicat d'estimer le coefficient d'autocorrélation. Dans notre cas, la difficulté est accrue par le fait que les segments ne sont pas tous de la même longueur. Un estimateur traditionnel est l'estimateur dit biaisé [42] dont l'expression pour un signal échantillonné  $s$  de longueur  $L$  et de variance  $\sigma^2$  est

$$R(i) = \frac{1}{\sigma^2 L} \sum_{k=1}^{L-i} s(k)s(k+i) \quad \text{pour } i = [1, \dots, L-1]. \quad (6.1)$$

Dans ce cas, on voit qu'à  $i$  fixé, la somme des  $L-i$  produits  $s(k)s(k+i)$  est divisée par  $L$  ce qui limite la variance de l'estimateur. Par contre cet estimateur est biaisé. La version non biaisée s'écrit

$$R(i) = \frac{1}{\sigma^2(L-i)} \sum_{k=1}^{L-i} s(k)s(k+i) \quad \text{pour } i = [1, \dots, L-1]. \quad (6.2)$$

Dans notre cas, il faut opérer une estimation qui prend en compte tous les segments. On se propose d'adapter la version non biaisée. On considère les  $S$  segments  $s^j$  enregistrés. La longueur du segment  $s^j$  vaut  $L_j$ . Il est évident que pour estimer la corrélation  $R(i)$  on ne pourra prendre en compte que les segments dont la taille est supérieure à  $i$ . L'estimation de la corrélation  $R(i)$  sera donc la moyenne des produits  $s^j(k)s^j(k+i)$ , sommés sur les segments de taille supérieure à  $i$  et, pour chaque segment, sommés sur les indices  $k$ . Formellement, on peut donc écrire :

$$R(i) = \frac{1}{N_i \sigma^2} \sum_{j=1 / L_j > i}^S \sum_{k=1}^{L_j - i} s^j(k) s^j(k+i), \quad (6.3)$$

où  $N_i$  est le nombre de produits  $s^j(k)s^j(k+i)$  impliqués dans le calcul.

Pour estimer le spectre de puissance, il sera utile dans la suite de disposer d'une estimation de type biaisée. On pourra la calculer en multipliant le coefficient  $R(i)$  par  $(N_0 - i)/N_0$  dans le même esprit que celui de l'équation 6.1.

Une autre façon de calculer le coefficient d'autocorrélation est d'utiliser la fonction de structure d'ordre 2

$$D_2(i) = \langle (s(t+i) - s(t))^2 \rangle. \quad (6.4)$$

Dans le cas d'un signal stationnaire, on a

$$D_2(i) = 2\sigma^2(1 - R(i)) \quad (6.5)$$

ce qui conduit à

$$R(i) = 1 - \frac{D_2(i)}{2\sigma^2}. \quad (6.6)$$

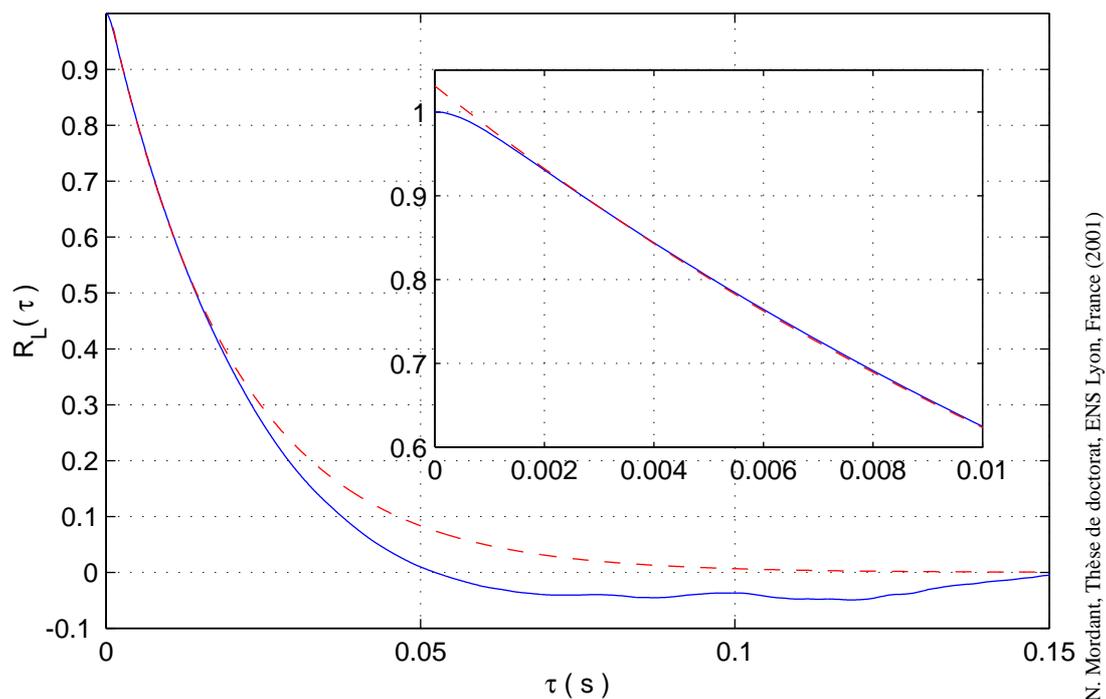
L'avantage de l'utilisation de la fonction de structure est que l'incrément agit comme un filtre sur la non-homogénéité du champ de vitesse. La fonction de structure d'ordre 2 est estimée en utilisant la formule suivante :

$$D_2(i) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1 / L_j > i}^S \sum_{k=1}^{L_j - i} (s^j(k+i) - s^j(k))^2. \quad (6.7)$$

On notera que les moyennes effectuées dans les différents estimateurs agissent sur les segments dont la taille doit être supérieure au décalage  $i$ . Cela permet éventuellement de compenser par la variance des segments de taille supérieure à  $i$ , présentée au paragraphe 6.1.2, de façon à corriger le biais introduit par la technique de mesure.

En ce qui concerne la mesure 2D, on effectuera également un calcul d'intercorrélation entre les deux composantes  $V_1$  et  $V_2$  mesurées. Celle-ci sera calculée selon la formule suivante :

$$R(i) = \frac{1}{N_i \sigma_1 \sigma_2} \sum_{j=1 / L_j > i}^S \sum_{k=1}^{L_j - i} V_1^j(k) V_2^j(k+i), \quad (6.8)$$



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 6.7 – Coefficient d'autocorrélation de la vitesse lagrangienne pour l'expérience man290501 1D. L'autocorrélation est calculée via l'estimateur de l'équation 6.3. L'encart est un agrandissement des petits temps. En pointillés est figurée une exponentielle décroissante  $1.03 \exp(-\tau/0.02)$ .

## 6.2.2 Autocorrélation d'une composante de vitesse

### Estimateur non-biaisé

On présente sur la figure 6.7, le coefficient d'auto-corrélation  $R^L(\tau)$  estimé via l'estimateur "non-biaisé" décrit dans l'équation 6.3. On a tracé pour comparaison une exponentielle estimée en utilisant le début de la décroissance. Le temps caractéristique obtenu est 20 ms. On note que dans cette expérience, les disques tournent avec une période  $T = 139$  ms et que les disques ont 8 pales, ce qui donne une périodicité des pales  $T_p = T/8 = 17.4$  ms. On remarque que  $R^L(\tau)$  décroît plus rapidement que l'exponentielle et devient négatif pour un temps de l'ordre de  $T_1 = 52$  ms. Ce résultat est différent de ceux obtenus par la plupart des autres auteurs qui présentent plutôt une forme exponentielle.

Les écarts de temps plus longs que 0.16 s ne sont pas présentés car la variance d'estimation augmente fortement. Il est assez délicat de fournir une estimation de la barre d'erreur sur la valeur de  $R^L(\tau)$ . Trouver une expression analytique est un défi car il faut prendre en compte à la fois la statistique de la vitesse et celle des longueurs des segments. Il est évident que la variance d'estimation croît très fortement pour les écarts de temps les plus longs car on utilise à la base de notre calcul une combinaison d'estimateurs non biaisés dont la variance augmente fortement lorsqu'on considère les écarts de temps voisins de la longueur des signaux considérés. Comme par ailleurs le nombre  $N(\tau)$  de segments utilisés pour le calcul décroît lorsqu'on augmente  $\tau$ , on conçoit parfaitement que l'estimation soit de moins en moins bonne. On peut intuitivement penser que la variance d'estimation soit liée au nombre de segments utilisés et qu'elle pourrait varier comme l'inverse de ce nombre. La figure 6.8 présente la variation de  $N(\tau)$  en fonction de  $\tau$ . On voit

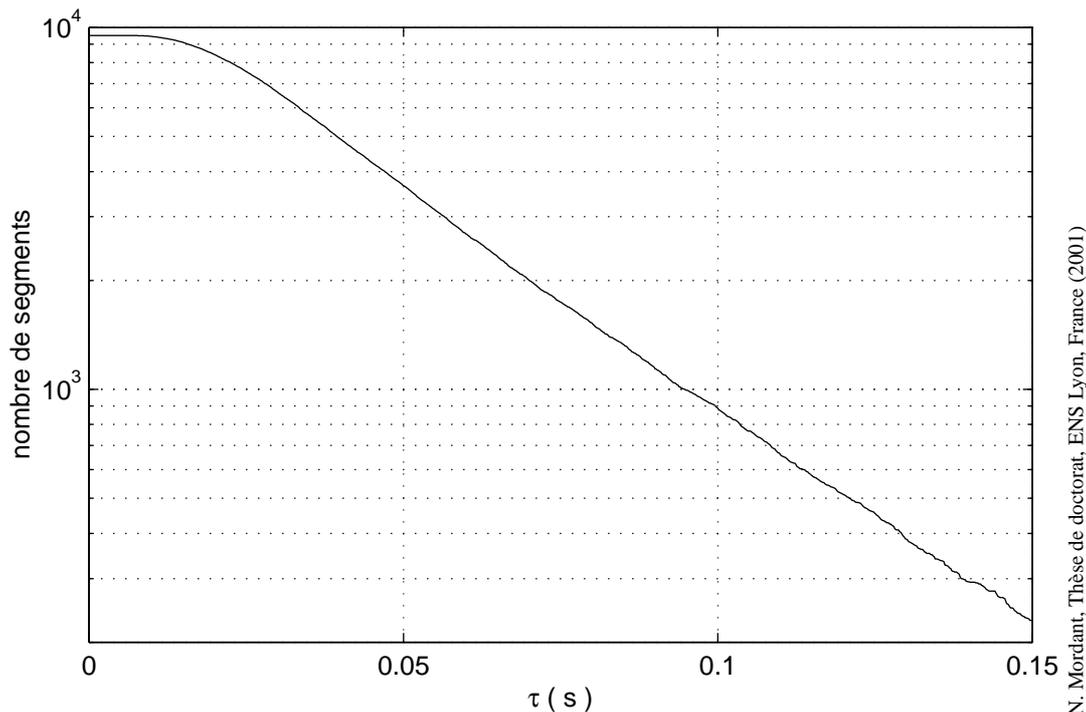


Fig. 6.8 – Évolution du nombre  $N(\tau)$  de segments utilisés pour le calcul de  $R^L(\tau)$  pour l'expérience man290501.

que dans la plage de variation de  $\tau$  présentée, le nombre de segments passe de 9500 à 230 environ soit une chute d'un facteur 40. En imaginant que la variance varie proportionnellement à  $1/\sqrt{N(\tau)}$  cela conduirait à une augmentation de l'erreur d'un facteur 7.

### Estimation par la fonction de structure d'ordre 2

L'estimation de  $R^L(\tau)$  au moyen de la fonction de structure d'ordre 2 est plus délicate. La figure 6.9 présente en trait mixte la fonction de structure d'ordre 2. En théorie, celle-ci devrait saturer à  $2\sigma^2$  c'est-à-dire au voisinage de  $1.8 \text{ m}^2/\text{s}^2$  pour l'expérience présentée. Or on observe que le maximum est nettement plus faible voisin de  $1.6 \text{ m}^2/\text{s}^2$ , ce qui voudrait dire que  $R_L(\tau)$  estimé de cette façon ne décroîtrait pas vers zéro aux grands temps. Ceci est directement lié au fait que la variance de la vitesse varie en fonction de la longueur des segments. Si l'on corrige la fonction de structure en la divisant par la fonction  $v^>(\tau)^2/v^>(0)^2$ , on obtient la courbe en trait plein qui atteint des valeurs de l'ordre de  $1.9 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . On a également tracé une estimation exponentielle ajustée aux moindres carrés entre les temps  $\tau = 1.4 \text{ ms}$  et  $\tau = 92 \text{ ms}$ . On voit que l'exponentielle reproduit parfaitement l'évolution de la fonction de structure ainsi corrigée. Pour obtenir  $R_L(\tau)$ , il faut utiliser l'équation 6.6 en normalisant  $S_2^L(\tau)$  par la variance. Le problème est de savoir quelle estimation de la variance utiliser. On suggère de prendre la valeur fournie par le fit exponentiel soit  $\sigma = 0.98 \text{ m/s}$ . La figure 6.10 présente en échelle semilogarithmique la fonction  $R_L(\tau)$  ainsi obtenue. On voit que l'autocorrélation se comporte remarquablement selon une exponentielle dont le temps caractéristique est  $22.4 \text{ ms}$ . On peut donc conclure que l'utilisation de la fonction de structure pour estimer le coefficient d'autocorrélation permet effectivement de s'affranchir des problèmes d'inhomogénéité observés lorsqu'on utilise l'estimateur "non biaisé". Dans ces conditions, la décorrélation se fait de manière exponentielle comme suggéré

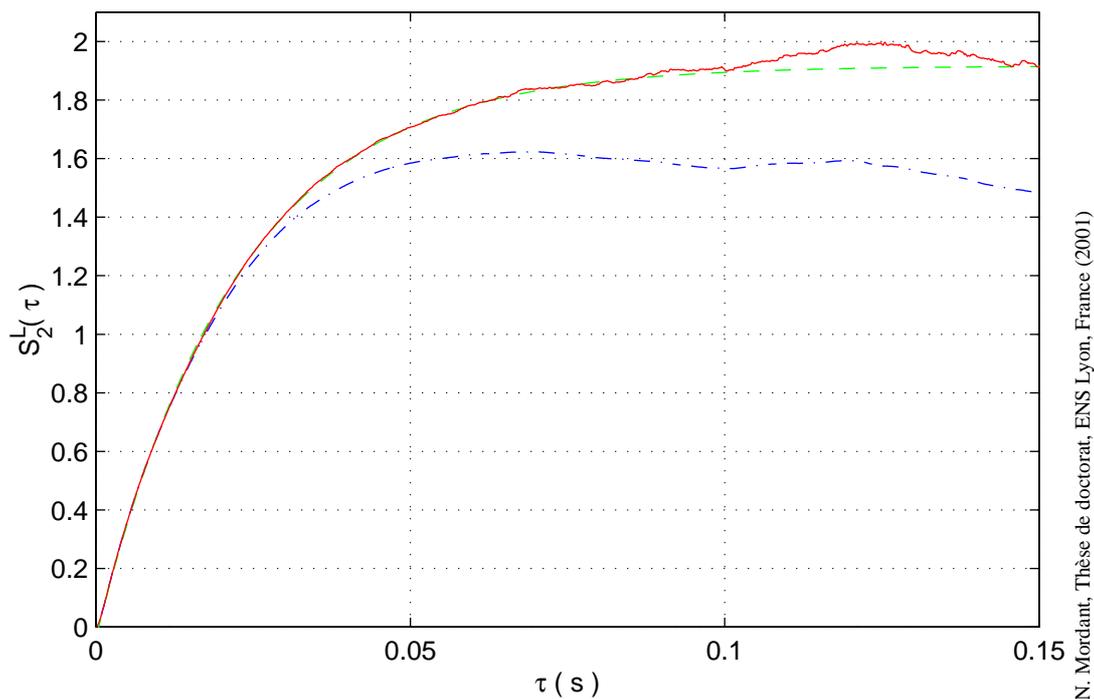


Fig. 6.9 – Fonction de structure d'ordre 2 de la vitesse pour l'expérience man290501. En traits mixtes estimation directe, en trait plein estimation après correction par  $u_r^>$ , en pointillés fit exponentiel  $1.92 - 1.95 \exp(44.7\tau)$ .

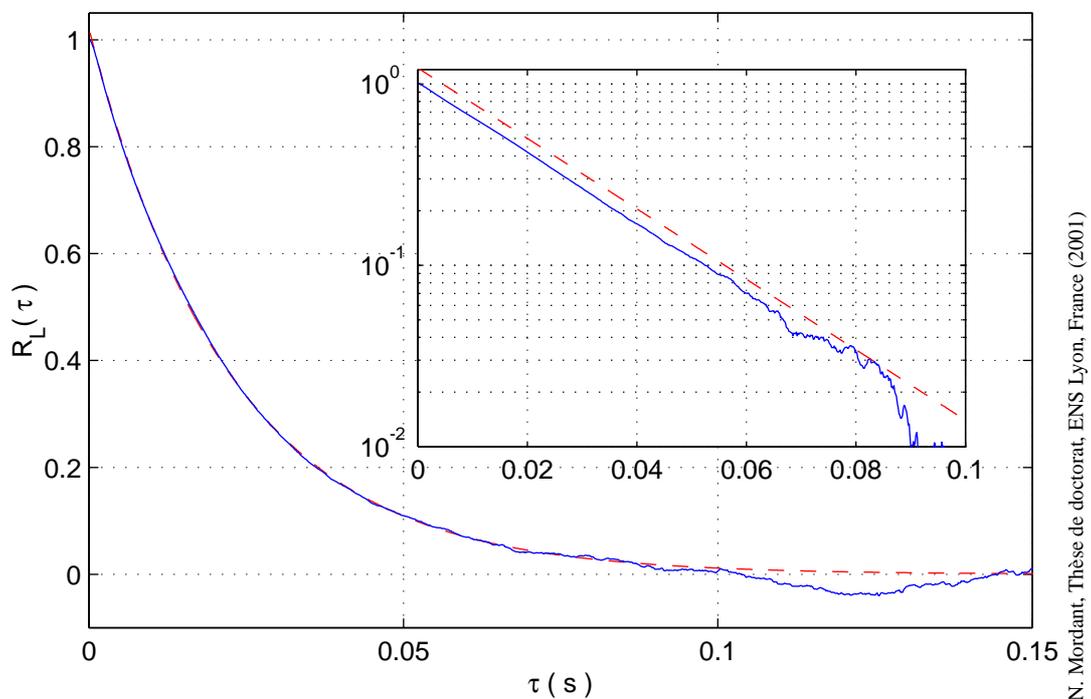


Fig. 6.10 – Coefficient d'autocorrélation de la vitesse estimé en utilisant la fonction de structure d'ordre 2. En pointillés l'ajustement par une exponentielle. Dans l'encart, le fit exponentiel est décalé pour la clarté de l'image.

dans d'autres expériences antérieures de moindre résolution et à un nombre de Reynolds plus faible.

On choisit donc de définir le temps caractéristique lagrangien  $T_L$  comme le temps caractéristique de la décroissance exponentielle. Les valeurs obtenues pour les différentes séries de mesures sont présentées dans la table 6.1. On note que lorsque l'entraînement est effectué par des disques lisses,  $T_L$  est du même ordre de grandeur que la période de rotation (légèrement inférieur) tandis que lorsque l'entraînement est causé par des pales le temps caractéristique est plutôt de l'ordre de grandeur du temps de passage des pales ( $T_L \sim 6T$  tandis qu'on a 8 pales). On note également que le temps lagrangien  $T_L$  est bien lié à l'échelle de temps de l'entraînement à grande échelle car le rapport  $T/T_L$  varie peu (dans une configuration de disque donnée, voir table 6.1) lorsqu'on varie le nombre de Reynolds.

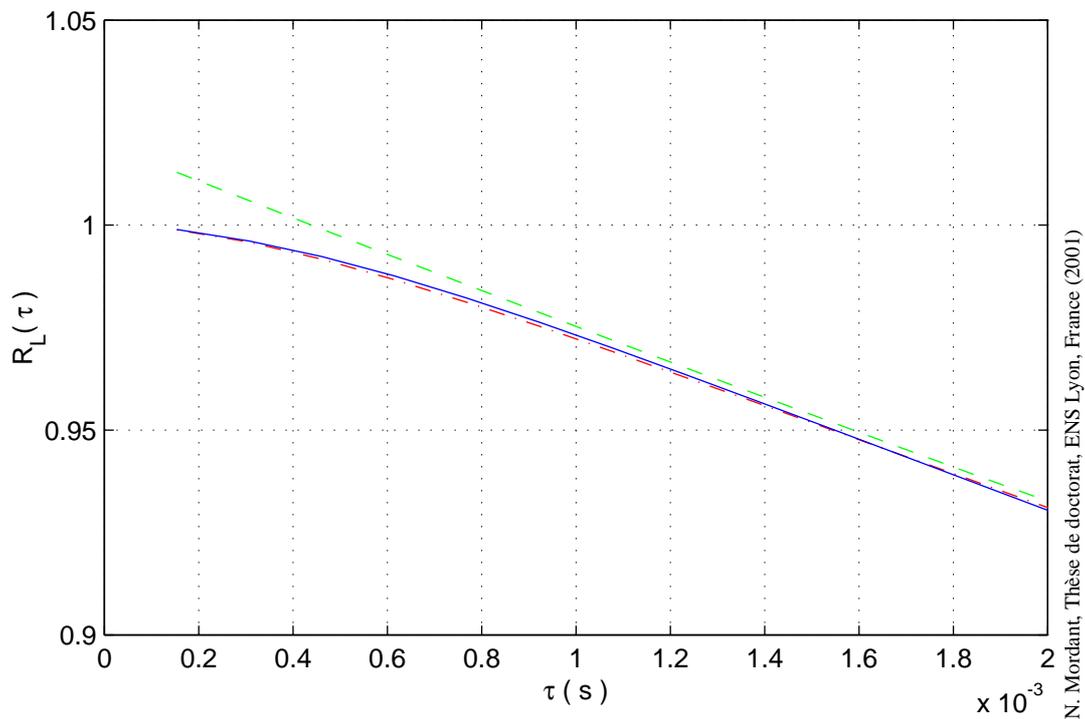


Fig. 6.11 – Coefficient d'autocorrélation de la vitesse estimé en utilisant la fonction de structure d'ordre 2 pour les temps courts. En pointillés l'ajustement exponentiel, en trait mixte l'ajustement par deux exponentielles.

On note que pour les petits temps, l'ajustement par une exponentielle ne parvient pas à décrire la courbure de  $R^L(\tau)$  due à la variance finie de l'accélération. Sawford [77] propose une modélisation d'un effet de nombre de Reynolds fini par la différence de deux exponentielles :

$$R^L(\tau) = \frac{T_L \exp(-\tau/T_L) - T_2 \exp(-\tau/T_2)}{T_L - T_2} . \quad (6.9)$$

On peut reprendre cette expression et tenter de l'ajuster à la courbe expérimentale. Un ajustement aux moindres carrés donne la valeur  $T_2 = 0.4$  ms (figure 6.11). On obtient ainsi un ordre de grandeur du temps caractéristique des petites échelles.

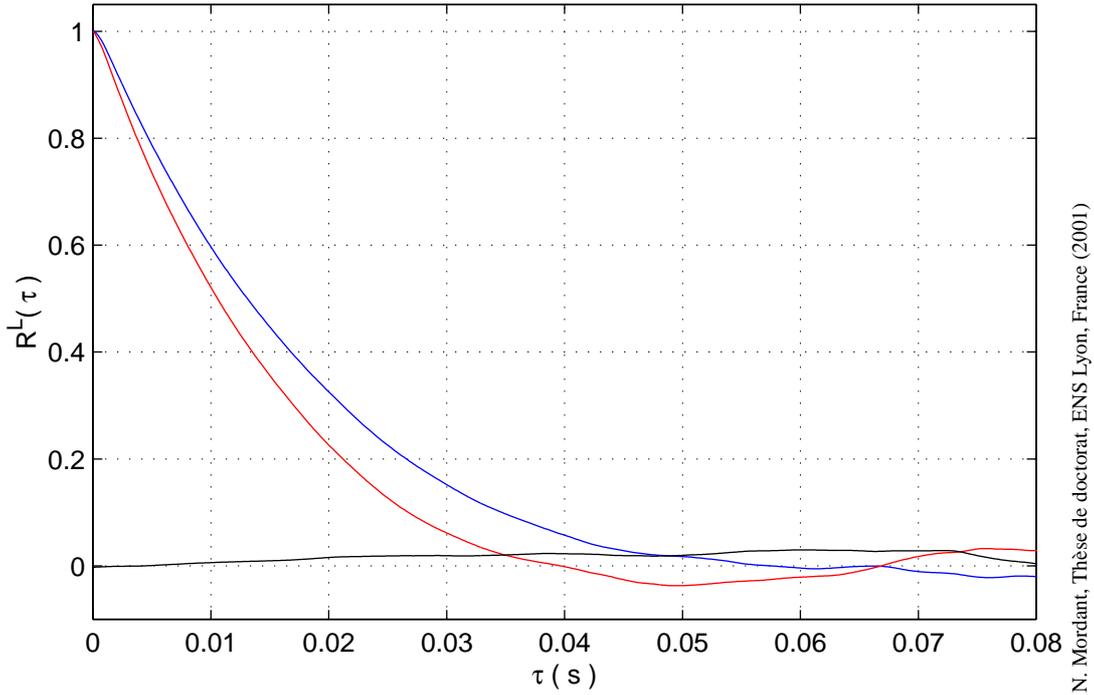


Fig. 6.12 – Autocorrélation des deux composantes  $v_a$  et  $v_b$  et intercorrélation (de haut en bas) pour l'expérience man290501.

### 6.2.3 Corrélation des composantes de vitesse

Les coefficients de corrélation des deux composantes de vitesse sont présentés sur la figure 6.12 calculés par l'estimateur "non biaisé". On a tracé les coefficients d'autocorrélation de  $v_a$  et  $v_b$  ainsi que la corrélation des deux composantes. On remarque tout d'abord que les deux composantes ne sont pas corrélées entre elles car le niveau de corrélation reste très faible et peut donc être considéré comme nul. Les coefficients d'autocorrélation sont qualitativement semblables mais diffèrent quantitativement. Tout d'abord, les temps caractéristiques de la décroissance sont différents. Si on estime le temps caractéristique d'une décroissance exponentielle qui tangente le début de la décroissance, on trouve  $T_a = 18$  ms et  $T_b = 14$  ms. Lorsque l'on calcule l'autocorrélation au moyen de la fonction de structure d'ordre 2 on trouve, de la même manière que dans le cas d'une seule composante, une forme plus proche d'une exponentielle dont les temps caractéristiques sont  $T_a^L = 26$  ms et  $T_b^L = 25$  ms. Cette méthode permet également d'estimer les variances de la vitesse et on trouve  $u_{rms}^a = 1.06$  m/s et  $u_{rms}^b = 1.03$  m/s. On voit que l'utilisation de la fonction de structure d'ordre 2 pour estimer les coefficients d'autocorrélation permet de corriger en grande partie les biais dus à la géométrie de la zone de mesure.

La PDF des deux composantes de vitesse est présentée sur la figure 6.13. Les lignes d'isovaleur de la PDF sont circulaires sauf sur deux axes pour lesquels on retrouve les problèmes dus au passage à 0 des composantes  $v_1$  et  $v_2$  comme expliqué précédemment.

On a présenté sur la figure 6.14 la corrélation de la valeur absolue des composantes de vitesse

$$\frac{\langle (|v_i| - \langle |v_i| \rangle)(|v_j| - \langle |v_j| \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (|v_i| - \langle |v_i| \rangle)^2 \rangle \langle (|v_j| - \langle |v_j| \rangle)^2 \rangle}} \quad \text{pour } i, j \in \{a, b\}. \quad (6.10)$$

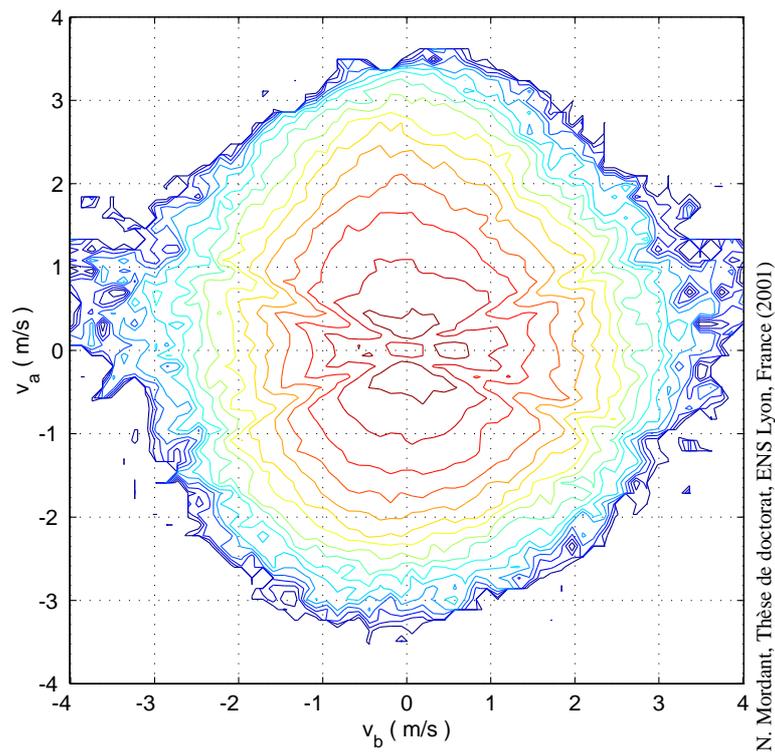


Fig. 6.13 – PDF des deux composantes de vitesse  $v_a$  et  $v_b$  pour l'expérience man290501.

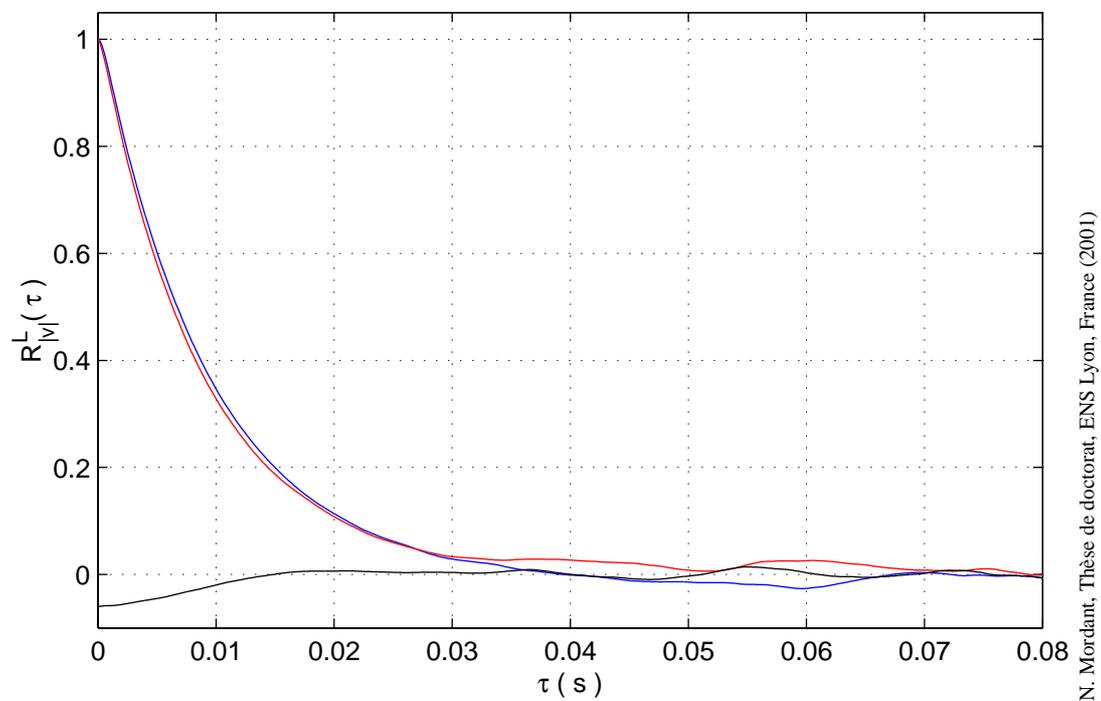


Fig. 6.14 – Autocorrélation des valeurs absolues des deux composantes  $|v_a|$  et  $|v_b|$  et inter-corrélation (de haut en bas) pour l'expérience man290501.

Le temps de décorrélation des valeurs absolues des composantes de vitesse est de l'ordre de 10 ms soit la moitié de  $T_L$ . De la même façon que précédemment, la corrélation de  $|v_a|$  et de  $|v_b|$  peut être considérée comme nulle. Il semble donc que les composantes du champ de vitesse puissent être considérées comme étant totalement non-corrélées.

## 6.3 Spectre de puissance lagrangien

### 6.3.1 Les estimateurs du spectre de puissance

De même que pour l'autocorrélation, la question de l'estimateur se pose pour le spectre de puissance. L'estimateur usuel du spectre est [65]

$$S(f) = \frac{1}{N_B} \sum_{j=0}^{N_B-1} S_{jn+1}(f) \quad (6.11)$$

avec

$$S_l(f) = \Delta t \left| \sum_{k=1}^{N_S} h(k) s(k+l-1) e^{-i2\pi f k \Delta t} \right|^2, \quad \text{pour } 1 \leq l \leq N+1-N_S. \quad (6.12)$$

$S_l$  est le périodogramme de  $N_S$  échantillons du signal commençant à l'indice  $l$  et apodisé par une fenêtre  $h$  (dans notre cas il s'agit d'une fenêtre de Hanning). L'estimateur est donc la moyenne de  $N_B$  blocs se chevauchant de  $N_S - n$  indices. On a donc

$$0 < n \leq N_S \quad \text{et} \quad n(N_B - 1) = N - N_S. \quad (6.13)$$

On doit en particulier avoir  $N_S \leq N$ . On obtient ainsi une estimation du spectre sur  $N_S$  échantillons correspondant aux fréquences entre 0 et la fréquence d'échantillonnage. Plus  $N_S$  est élevé, meilleur est l'échantillonnage de la bande-passante mais en contre-partie on diminue  $N_B$  et on augmente ainsi la variance d'estimation. Il faut donc trouver un juste équilibre.

Dans notre cas, la longueur des segments est variable. Si on se fixe une valeur de  $N_S$ , on est contraint de ne prendre en compte que les segments dont la taille est plus grande que cette valeur. On doit alors faire un nouvel arbitrage entre qualité d'échantillonnage de la bande-passante et nombre maximal de segments pris en compte. Par ailleurs, la question de la manière de moyenner les spectres entre les segments se pose. Dans le même esprit que pour  $R_L$ , on choisit de moyenner les spectres en leur affectant un poids proportionnel au nombre de blocs utilisés dans le calcul. Un inconvénient de cette méthode est que l'on risque de favoriser artificiellement les segments les plus longs (mais qui sont également les plus rares). Cela fournit donc un premier estimateur.

Une autre façon d'estimer le spectre est d'utiliser l'autocorrélation. En effet, le périodogramme est la transformée de Fourier discrète de l'estimateur biaisé de l'auto-corrélation. Dès lors, on peut se baser sur ce constat pour fabriquer un estimateur du spectre. On part de l'estimateur "non-biaisé" que l'on a utilisé dans la partie précédente. En remarquant que l'estimateur biaisé peut être retrouvé en multipliant l'estimateur non-biaisé par une fenêtre triangulaire dont le maximum correspond à un décalage nul, on peut fabriquer un estimateur "biaisé" en effectuant une opération similaire sur l'estimateur "non-biaisé". Dès lors en faisant une transformée de Fourier discrète inverse, on obtient un spectre qui est bien réel et positif.

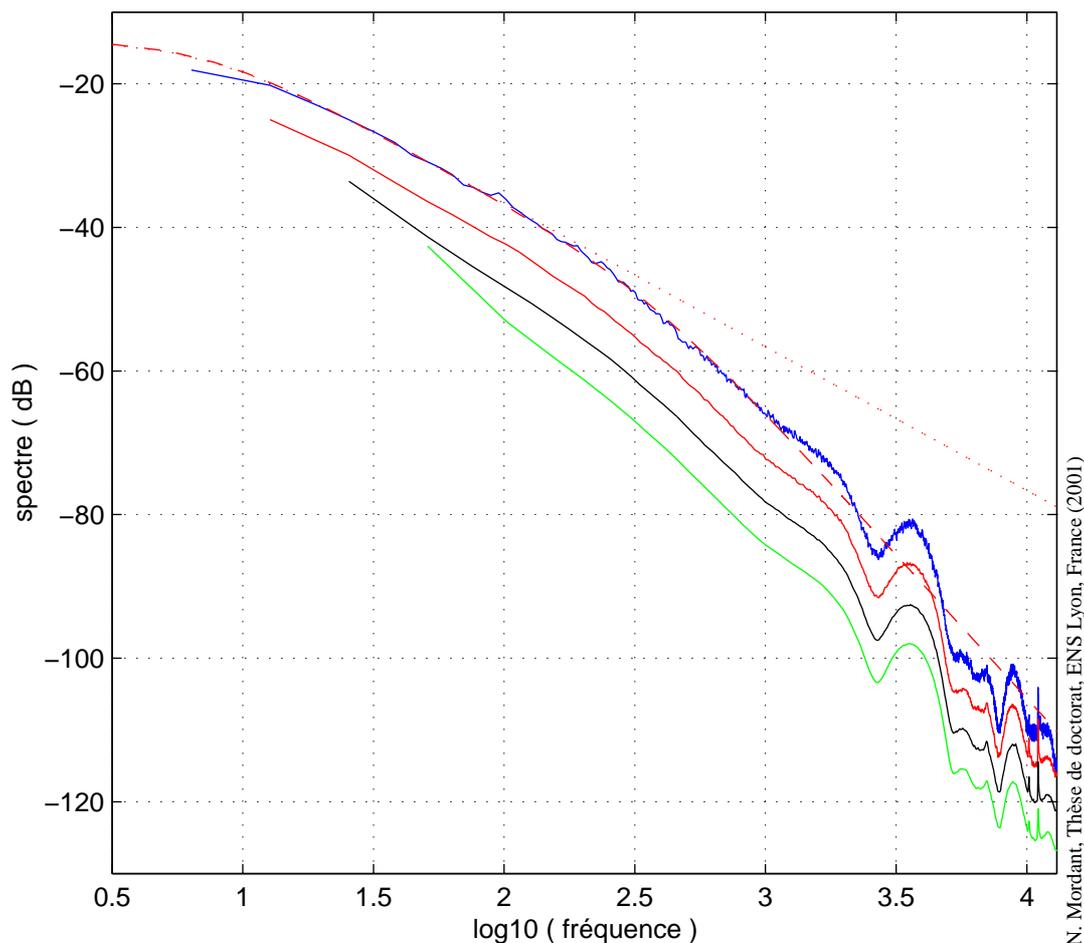


Fig. 6.15 – Spectre lagrangien pour différentes valeurs de  $N_S$  pour l'expérience man290501. Les 3 courbes du bas ont été décalées de 6 dB pour la clarté. De haut en bas  $N_S = 4096, 2048, 1024, 512$ . En pointillés, on a tracé la transformée de Fourier de la forme exponentielle et en tirets la double exponentielle estimée à partir de la fonction d'autocorrélation.

### 6.3.2 Résultat et discussion

Le spectre estimé par le périodogramme est présenté figure 6.15 pour plusieurs valeurs de  $N_S$ . Pour les valeurs  $N_S = 4096, 2048, 1024, 512$ , les valeurs de  $N_B$  sont respectivement 232, 2439, 11679 et 35712. L'influence de ces valeurs est visible sur la variance d'estimation du spectre qui est nettement plus grande pour  $N_S = 4096$ .

A basse fréquence, les spectres montrent une décroissance algébrique d'exposant proche de  $-2$ . Cependant la plage de fréquence où cette tendance est visible est restreinte. Elle est limitée à haute fréquence à 200 Hz dans ce cas et à basse fréquence par le premier point visible dont l'abscisse est déterminée par la donnée de  $N_S$ . Pour envisager d'atteindre la limite à basse fréquence, il faudrait accroître davantage  $N_S$  mais ce n'est pas possible car déjà pour  $N_S = 4096$  on a une valeur très basse de  $N_B$ . Cet estimateur ne permet donc pas d'avoir accès aux très basses fréquences.

Néanmoins l'estimation est de très bonne qualité à haute fréquence. Pour des fréquences supérieures à 200 Hz, le spectre s'éloigne de la Lorentzienne provenant de l'ajustement expo-

mentiel de la fonction d'autocorrélation dont l'expression est :

$$\frac{2\sigma^2 T_L}{1 + (\omega T_L)^2}, \quad (6.14)$$

mais reste proche de l'ajustement par deux exponentielles :

$$\frac{2\sigma^2}{T_L - T_2} \left( \frac{T_L^2}{1 + (\omega T_L)^2} - \frac{T_2^2}{1 + (\omega T_2)^2} \right) \quad (6.15)$$

jusqu'à des fréquences de l'ordre de 1 kHz. Aux fréquences les plus élevées, l'allure de l'estimation du spectre n'est pas sans rappeler la figure 4.4 provenant du décodage d'un signal synthétique à spectre en  $1/f^2$ . En particulier on remarque des creux très prononcés au voisinage de 2500 Hz ou 8000 Hz qui sont également présents dans le cas du signal synthétique. D'après les tests effectués sur les signaux synthétiques, la fréquence de coupure du filtre opéré par l'algorithme MVA vaut 1200 Hz (pour les paramètres utilisés ici). L'allure de la courbe présentée sur la figure 4.6 dans le cas d'un signal synthétique plongé dans un bruit blanc permet d'affirmer que le spectre de vitesse passe sous le niveau de bruit pour des fréquences supérieures à 1 kHz environ. Pour les fréquences supérieures, on observe de la même façon que pour les signaux synthétiques un spectre lié à l'excitation du filtre de Kalman par le bruit du signal. On peut donc affirmer que pour les fréquences inférieures à  $F_{max} = 1$  kHz, dans ce cas (expérience man290501), on observe donc bien le spectre de puissance de la vitesse des billes de polystyrène. Cette borne supérieure dépend de l'expérience considérée, les valeurs sont données dans la table 6.1.

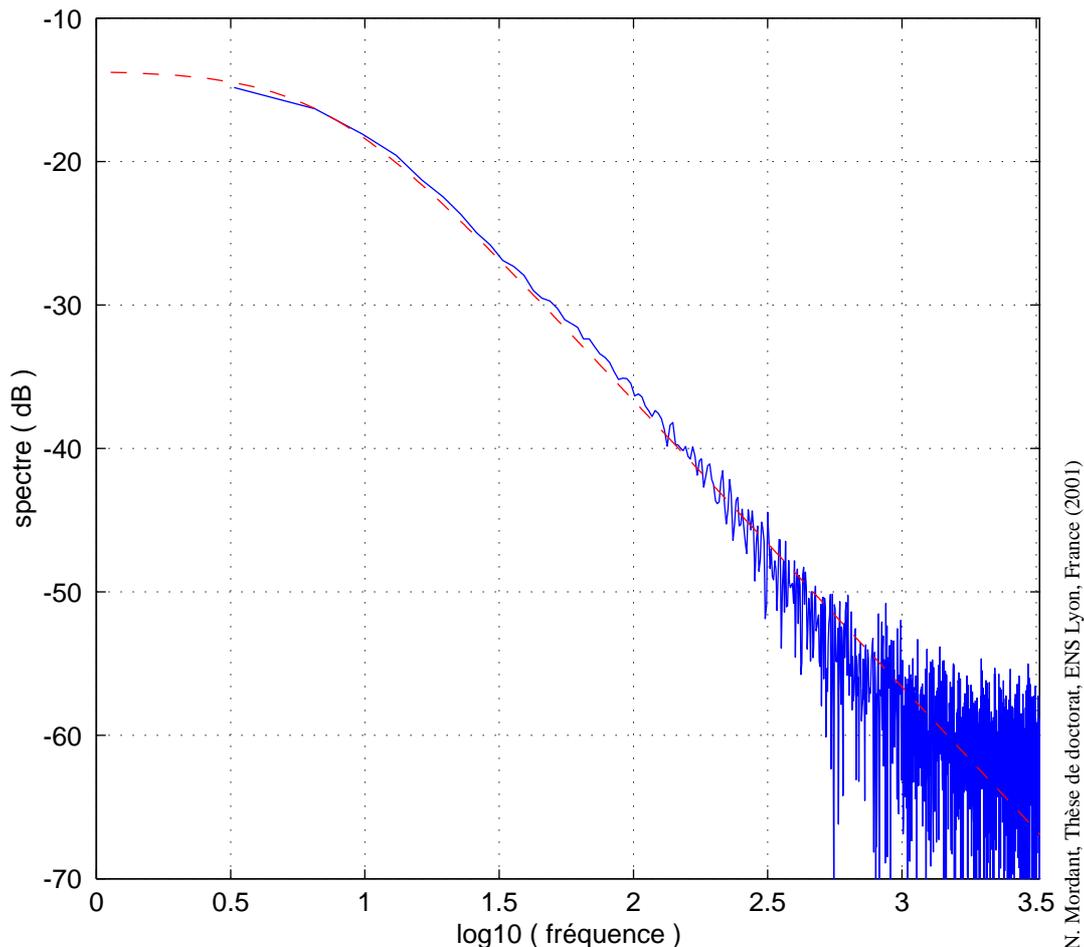
L'estimation du spectre à partir de l'auto-corrélation est présentée dans la figure 6.16. On remarque que le signal est très bruité à haute fréquence. Ceci est lié à plusieurs facteurs dont la qualité de l'estimation de  $R_L$  pour les grandes valeurs de  $\tau$  qui par transformée de Fourier induisent des fluctuations à haute fréquence mais surtout par les performances de la transformée de Fourier discrète lorsque le spectre varie rapidement [65] (en particulier si la décroissance est plus rapide que  $1/f^2$ ), ce qui est le cas à haute fréquence. On peut donc estimer que cette estimation n'est pas valable pour des fréquences supérieures à 200 Hz, pour lesquelles on a vu précédemment que le spectre décroît nettement plus rapidement que  $1/f^2$ . Par contre, on peut avoir confiance dans l'estimation pour des fréquences inférieures à 200 Hz. Dans le cas présenté, on a ainsi accès aux fréquences supérieures à 3 Hz. On voit que le spectre ainsi estimé est bien approximé par la lorentzienne issue de la transformée de Fourier du fit exponentiel.

En combinant les deux estimateurs dans leur zones de validité respectives, on peut reconstituer le spectre de vitesse lagrangienne présenté figure 6.17. On a donc l'image d'un spectre qui suit une variation lorentzienne aux basses fréquences suivie d'une décroissance plus rapide avant de passer sous le niveau de bruit pour les fréquences supérieures à  $F_{max}$ .

Quelle est donc l'origine de cette coupure observée entre la Lorentzienne et une décroissance plus rapide ? Dans le cadre d'une phénoménologie classique "à la Kolmogorov", on peut à partir du diamètre  $d$  de la particule et du taux de dissipation définir un temps caractéristique

$$\tau_c \sim \varepsilon^{-1/3} d^{2/3}. \quad (6.16)$$

Dans le cas de l'expérience man290501 présentée sur les figures précédentes, on obtient  $\tau_c \approx 1.3$  ms. Cette estimation est du même ordre de grandeur que le temps  $T_2 = 0.4$  ms estimé à partir du coefficient d'autocorrélation. On peut donc intuitivement que cette coupure est causée par le filtrage spatial opéré par la bille du fait de sa taille. Cette hypothèse est confortée par une



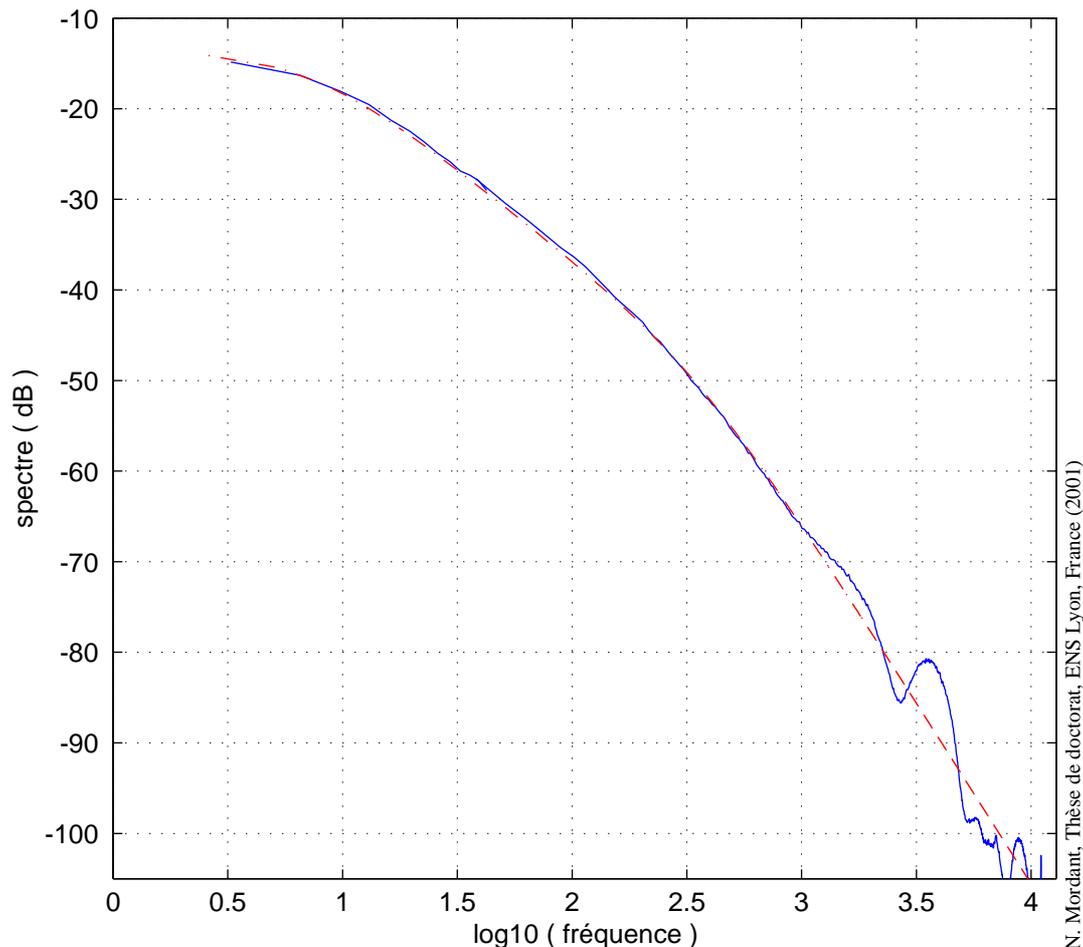
N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 6.16 – Spectre lagrangien estimé à partir de la fonction d’autocorrélation. En pointillés, on a tracé la transformée de Fourier du fit exponentiel,  $u_{rms}^2 T_L / (1 + (T_L \omega)^2)$ .

expérience menée dans les mêmes conditions mais avec des billes plus grosses. La coupure a lieu à plus basse fréquence avec une bille de diamètre 1 mm comme il est montré sur la figure 6.18.

Le temps  $T_2$  estimé avec ces billes est de l’ordre de 1.1 ms à comparer avec 0.4 ms estimé pour les billes de 250  $\mu\text{m}$ . On voit donc que l’augmentation de la taille de la bille d’un facteur 4 induit une augmentation de  $T_2$  d’un facteur 2.4 tandis que l’expression dimensionnelle prédit une augmentation de  $4^{2/3}$  soit 2.5. Il semble donc que cette approximation dimensionnelle donne un comportement raisonnable qu’il faudrait explorer davantage pour plus de certitude.

On peut donc interpréter le spectre mesuré de la façon suivante : à basse fréquence, on mesure le spectre de vitesse lagrangienne qui a une forme lorentzienne, c’est-à-dire un plateau aux fréquences les plus basses puis une décroissance en  $1/f^2$  comme prédit par un argument dimensionnel “à la Kolmogorov”. Ensuite pour des fréquences plus élevées, la sphère de polystyrène ne se comporte plus comme un traceur lagrangien (elle n’est pas sensible aux structures spatiales plus petites que sa taille) et donc le spectre est filtré et on observe une décroissance plus rapide en  $1/f^4$  si on croît l’ajustement par une différence entre deux exponentielles. Finalement, le spectre tombe sous le niveau de bruit pour des fréquences supérieures à  $F_{max}$  et on retrouve l’allure du spectre obtenu dans les signaux synthétiques dû à l’algorithme de démodulation.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 6.17 – Spectre lagrangien reconstitué. En pointillés, on a tracé la transformée de Fourier de l'ajustement par deux exponentielles.

## 6.4 Discussion sur la fonction de structure d'ordre 2

La fonction de structure d'ordre 2 joue un rôle particulièrement important dans l'étude lagrangienne de la turbulence. La prédiction dimensionnelle de type K41 prédit

$$D_2^L(\tau) = C_0 \varepsilon \tau, \quad (6.17)$$

ce qui impose un spectre en  $1/f^2$  dans le régime inertiel comme nos mesures l'ont mis en évidence. La théorie suppose que la valeur du coefficient  $C_0$  est universelle et constitue donc un renseignement précieux. Son importance est particulièrement visible lorsque l'on s'attelle à modéliser la turbulence par une équation de Langevin. Ce coefficient intervient dans la définition de  $T_L$  et dans la fonction de structure d'ordre 2. Les modèles stochastiques prédisent  $T_L = 2u_{rms}^2 / (C_0 \varepsilon)$  et la définition de  $C_0$  est donnée par l'équation 6.17 ci-dessus. On a tracé sur la figure 6.19 la fonction de structure  $D_2^L$  divisée par  $\varepsilon \tau$  pour l'expérience man290501. On a tracé en trait plein les mesures de  $D_2^L$  pour des billes de 1 mm et 250  $\mu\text{m}$ . Le maximum atteint pour ces billes est 2.6 et 2.9 respectivement. On voit que la valeur du maximum est fonction décroissante de la taille de la bille. On a tracé également la prédiction du modèle de Sawford [77]. Celui-ci prédit que la coupure à petite échelle due à la valeur finie du nombre de Reynolds a lieu pour

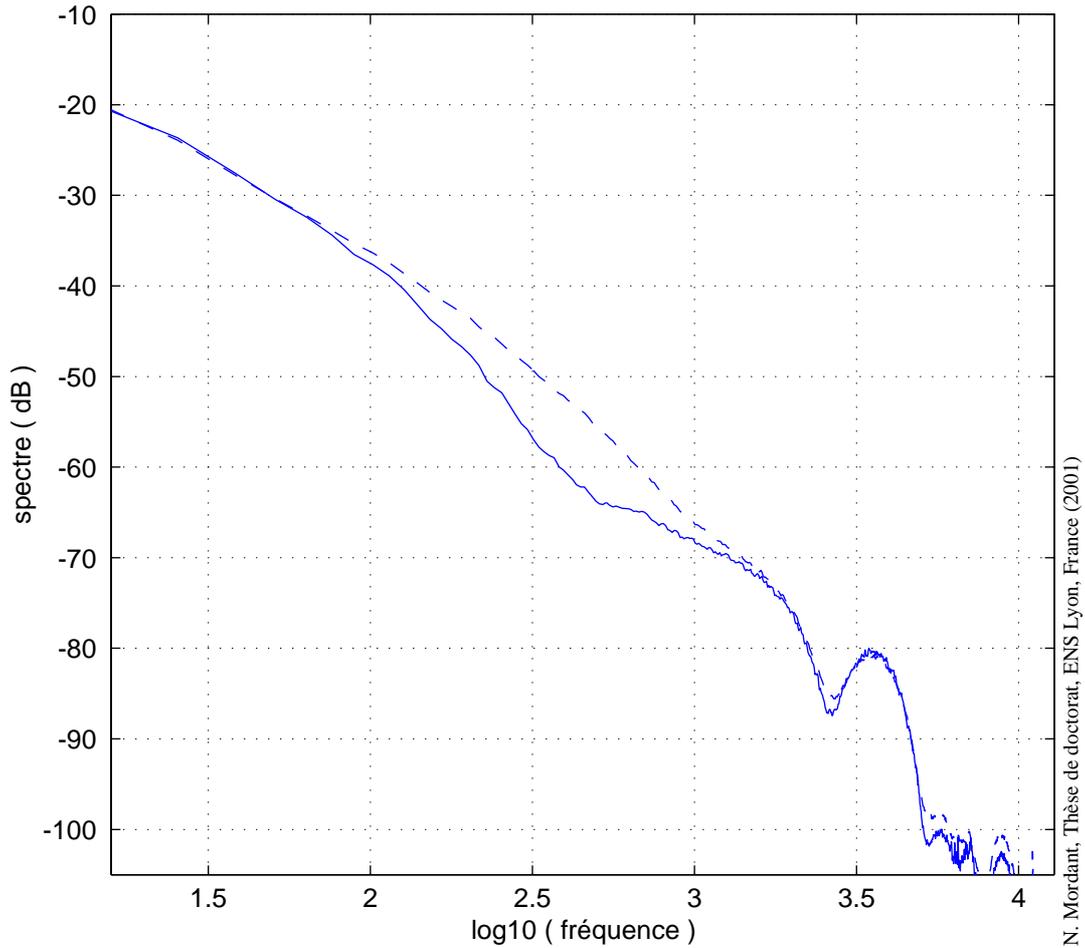


Fig. 6.18 – Spectre lagrangien à haute fréquence pour deux tailles de billes différentes. En pointillés bille de diamètre  $250 \mu\text{m}$ , en trait plein bille de diamètre  $1 \text{ mm}$ .

une valeur de  $T_2$  ayant l'expression suivante :

$$T_2 = \frac{C_0}{2a_0} \tau_\eta \quad (6.18)$$

En supposant que  $a_0$  vaut de l'ordre de 6 comme proposé par La Porta et al.[69] et  $C_0 = 3.4$  on obtient  $T_2 = 0.3\tau_\eta$  soit  $T_2 = 0.06 \text{ ms}$ . On obtient ainsi 3.2 comme valeur du maximum de  $D_2^L/\varepsilon\tau$ . Finalement, on a tracé en pointillés le cas où  $T_2 = 0$  c'est à dire une forme exponentielle pour la fonction de structure d'ordre 2,

$$D_2^L = 2\sigma^2 (1 - \exp(-t/T_L)) . \quad (6.19)$$

Dans ce cas, on observe un plateau quand  $\tau$  tend vers 0. La valeur obtenue est donc  $2\sigma^2/\varepsilon T_L = 3.4$ . On n'observe pas de plateau pour les autres courbes pour lesquelles il existe une petite échelle. Dans tous ces cas, on observe une courbe en cloche.

Par ailleurs, la valeur de  $C_0$  évolue avec le nombre de Reynolds (voir table 6.2). On mesure une augmentation de  $C_0$  avec  $Re_\lambda$ . Un argument dimensionnel donne la prédiction suivante :

$$D_2^L = C_0(Re)\varepsilon\tau \quad \text{quand } Re \rightarrow \infty \quad (6.20)$$

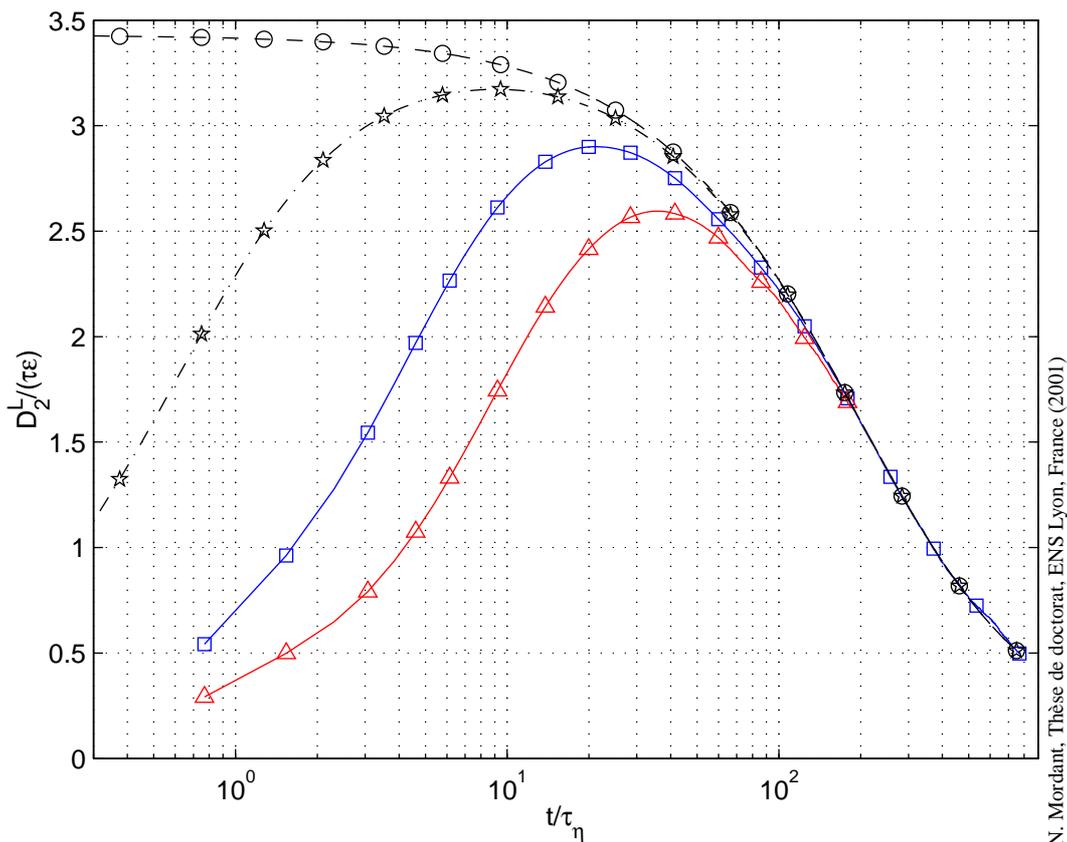


Fig. 6.19 – Fonction de structure d'ordre 2 de la vitesse adimensionnée par  $\varepsilon\tau$  pour  $R_\lambda = 740$ . De bas en haut :  $\Delta$  bille de 1 mm (man310701),  $\square$  bille de 250  $\mu\text{m}$  (man290501),  $\star$  modèle de Sawford [77] (pour  $a_0 = 6$  et  $C_0 = 3.4$ ). La courbe du haut ( $\circ$ ) correspond à  $D_2^L(\tau) = 2\sigma^2(1 - \exp(-t/T_L))$

$R_\lambda$	$C_0$	$C_0^\infty$
315	0.97	1.05
740	2.9	3.4
1100	4.0	4.7

Tab. 6.2 – Évolution de  $C_0$  avec le nombre de Reynolds. On nomme  $C_0$  le maximum de  $D_2^L/\varepsilon\tau$  et  $C_0^\infty = 2\sigma^2/\varepsilon T_L$ .

L'hypothèse de type K41 suppose que  $C_0(Re) \rightarrow \text{constante}$ ; dans ce cas, la limite serait donc supérieure à 5. On peut aussi considérer le cas  $C_0(Re) \sim Re^\alpha$ , auquel cas  $C_0$  n'aurait pas de limite finie dans la limite de nombre de Reynolds infini.



## Chapitre 7

### Accélération de la bille

On s'intéresse dans cette section à l'accélération de la bille. On notera que l'on parle de l'accélération de la bille et non pas de l'accélération des particules de fluide. En effet, on a vu que l'on pouvait considérer que la particule est lagrangienne tant qu'on ne s'intéresse qu'à des temps supérieurs à  $5\tau_\eta$  typiquement. Le spectre de vitesse décroissant rapidement, on peut considérer que l'on a capté l'essentiel de l'énergie de la vitesse des particules de fluide. En ce qui concerne l'accélération, il en est autrement. Comme le spectre de vitesse décroît comme  $1/f^2$  dans le régime inertiel, celui de l'accélération va donc être plat dans ce régime. Par conséquent, si on suppose que le régime inertiel s'étend par exemple jusqu'à  $\tau_\eta$  c'est-à-dire pour des fréquences 5 fois supérieures à la fréquence de coupure de la bille, alors on a en fait récupéré au mieux 20% de l'énergie de l'accélération des particules de fluide. On ne peut donc pas considérer que l'accélération mesurée est celle des particules de fluide. Néanmoins le problème d'une particule solide dont la taille se trouve dans le régime inertiel, est également intéressant.

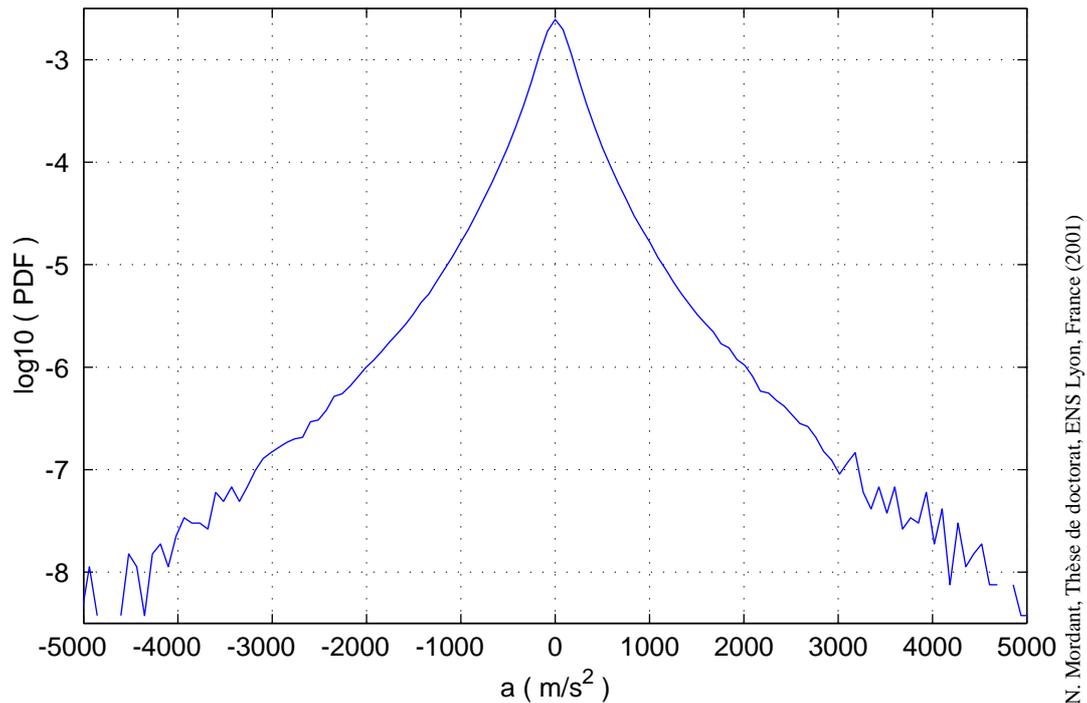
L'accélération est estimée au moyen d'un incrément dont l'écart temporel (petit) est inférieur à la coupure due à la taille de la bille.

#### 7.1 PDF de l'accélération de la particule

La figure 7.1 représente la PDF de l'accélération de la bille de polystyrène pour l'expérience man290501. On note que les accélérations mesurées sont extrêmement élevées allant jusqu'à des valeurs de l'ordre de  $4500 \text{ m/s}^2$  soit 450 fois l'accélération de la pesanteur. On notera que les valeurs mesurées par La Porta et al.[69] (par une technique optique) sont encore plus élevées (jusqu'à  $1200g$ ) car les billes utilisées sont nettement plus petites et donc les auteurs mesurent effectivement l'accélération lagrangienne. La particule subit donc des accélérations très violentes. Dans un formalisme "à la K41", on peut estimer un ordre de grandeur d'une accélération caractéristique à l'échelle  $l$  par

$$a_l \approx \frac{u_l^2}{l} \sim \varepsilon^{2/3} l^{-1/3} . \quad (7.1)$$

Pour l'expérience man290501 considérée, pour  $l = \eta$ , on obtient  $a_l$  de l'ordre de  $300 \text{ m/s}^2$ . Ceci est donc de l'ordre de grandeur de la variance de l'accélération. Mais cet argument ne prédit pas les fortes accélérations observées dans les ailes des PDFs. Par ailleurs, on observe qu'une bonne partie des instants où l'accélération est très élevée est associée à des oscillations de la vitesse de la particule (figure 7.2). Ces oscillations peuvent être liées à une rotation de la particule autour d'un axe comme dans le cas où elle serait piégée dans un vortex. On peut faire le lien avec des structures filamenteuses observées dans de tels écoulements [22, 23] dont les

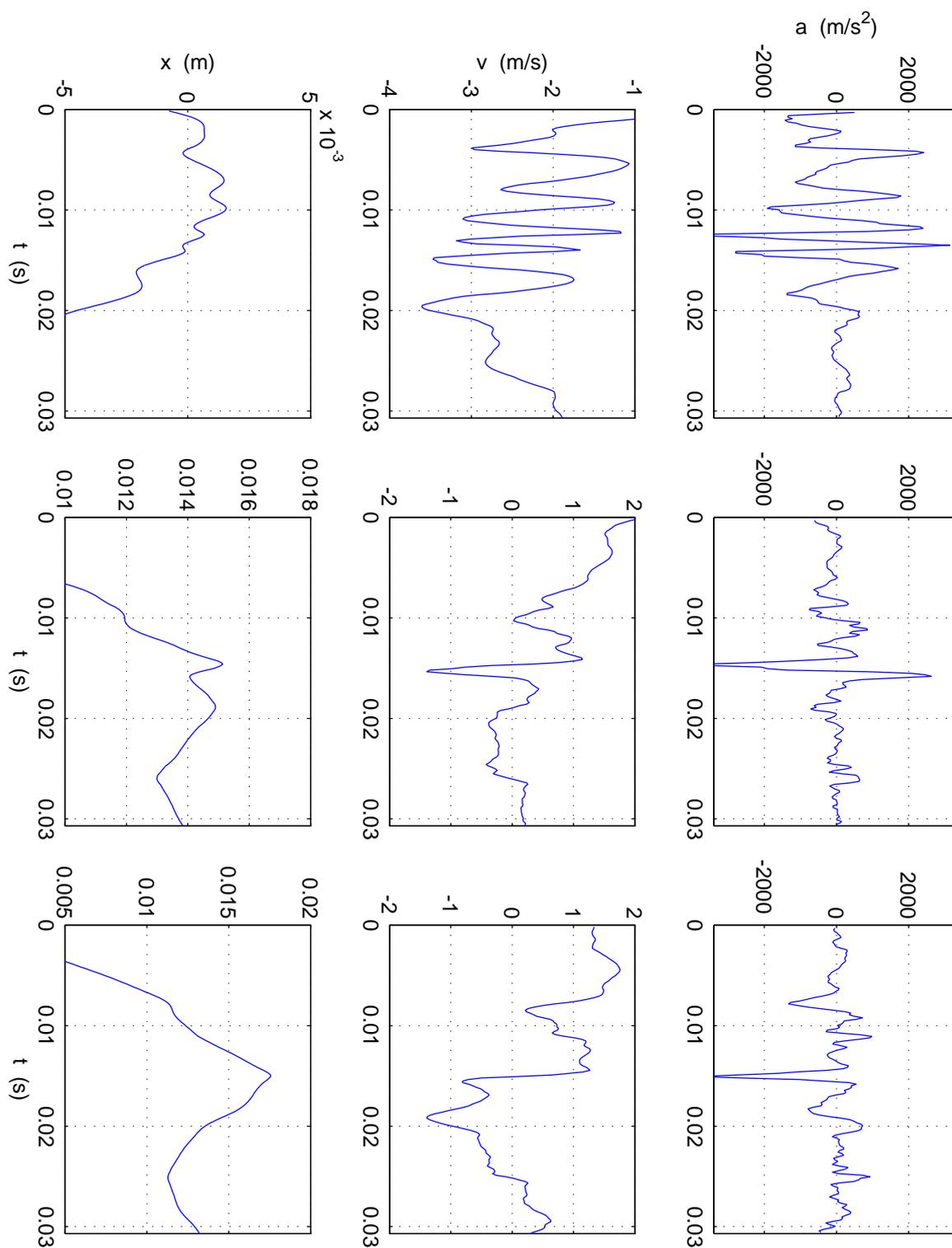


N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 7.1 – PDF d'une composante de l'accélération des particules solides pour l'expérience man220501.

tailles peuvent être de l'ordre de la longueur de Taylor  $\lambda$  avec des vitesses caractéristiques de l'ordre de  $\sigma$ . Cela conduit à des valeurs d'accélération de l'ordre de  $\sigma^2/\lambda$  qui valent environ  $1100 \text{ m/s}^2$ . La présence de telles structures permet donc effectivement d'observer de très fortes accélérations. La figure 7.2 montre trois exemples d'événements associés à des accélérations importantes. Pour le premier, l'accélération maximale est obtenue alors que la vitesse oscille. La période typique d'oscillation est de l'ordre de 2 ms soit une fréquence de 500 Hz. On notera que cette fréquence est située après la coupure par la taille de la bille, ce qui signifie que l'on pourrait obtenir des accélérations encore supérieures si la bille suivait parfaitement le fluide. Par ailleurs, les amplitudes spatiales typiques du mouvement de la bille (après soustraction de la vitesse moyenne) sont de l'ordre de 0.25 mm c'est à dire inférieures à  $\lambda$  (et égales au diamètre de la bille). On peut donc tout à fait interpréter cet événement comme le piégeage de la particule par un filament de vorticité de taille inférieure à  $\lambda$  advect  par les grandes échelles de l'écoulement. Le second type d'événements observés se présente sous la forme d'un pic du signal de vitesse. L'ensemble du pic se déroule également pendant un temps très court de l'ordre de 2 ms. L'interprétation de ce genre d' v nement n'est pas aussi claire que pour le précédent. Peut-être s'agit-il également d'un vortex autour duquel la bille ne ferait qu'un seul tour. Le troisième  v nement présenté a plutôt l'allure d'une marche dans le signal de vitesse. Celle-ci effectue un saut très brutal (ici de 2 m/s) pendant un temps extrêmement bref de l'ordre de la milliseconde. L'interprétation n'est pas non plus immédiate mais on peut imaginer le cas de la traversée d'une couche de cisaillement très intense. La particule passerait brutalement d'un côté à l'autre.

La forme de la PDF avec des ailes très larges est très voisine des PDFs de gradients de pression observées dans les simulations numériques de Vedula & Yeung [90] ainsi que dans les mesures d'accélération de La Porta et al.[69]. Cependant les ailes ne sont pas aussi développées :



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 7.2 – Trois types d'événements présentant des accélérations supérieures à  $3000 \text{ m/s}^2$  extraits de la série de mesure man290501. On a tracé l'accélération en haut, la vitesse, au milieu et la position intégrée en bas. Pour calculer cette dernière, on a soustrait la vitesse moyenne au moment de l'événement.

la flatness ne vaut que de l'ordre de 19 tandis que ces auteurs observent des valeurs allant jusqu'à 40-60. Ceci est dû au fait que l'on ne mesure pas l'accélération d'une particule de fluide mais seulement d'une particule solide de taille mésoscopique qui ne se comporte pas comme un traceur parfait.

## 7.2 La corrélation de l'accélération

### 7.2.1 Auto-corrélation de l'accélération

La figure 7.3 présente le coefficient d'autocorrélation d'une composante de l'accélération

$$R_a^L(\tau) = \frac{\langle a(t)a(t-\tau) \rangle}{\langle a(t)^2 \rangle}. \quad (7.2)$$

Il est estimé en utilisant l'estimateur "non-biaisé". Il décroît très rapidement pour s'annuler en un temps de l'ordre de  $9\tau_\eta$ . Pour des temps plus grands,  $R_a^L(\tau)$  devient faiblement négatif et rejoint la valeur nulle un temps de l'ordre de  $T_L$ . Dans l'hypothèse où le signal est stationnaire, on peut écrire

$$\sigma_a^2 R_a^L = -\sigma^2 \frac{d^2 R^L}{d\tau^2}, \quad (7.3)$$

où  $\sigma_a$  est la moyenne quadratique de la composante d'accélération de la bille. On a tracé en pointillés la dérivée seconde du fit exponentiel de l'autocorrélation de la vitesse normalisé par  $\sigma_a^2/\sigma^2$ . On voit que le lent retour vers zéro est exponentiel et est cohérent avec la forme de  $R_L$  mesurée.

On a tracé dans la figure 7.4 le coefficient d'autocorrélation de la valeur absolue de la composante d'accélération. On observe que celui-ci a un comportement en  $\log(t)^2$  jusqu'à s'annuler pour un temps de l'ordre de  $6.5T_L$ . Ceci est un temps lié aux grandes échelles de l'écoulement. Il s'agit même du temps caractéristique le plus élevé de cette expérience.

En résumé, les composantes de l'accélération de la bille ont donc une corrélation courte lorsque l'on garde l'information du signe, mais une corrélation très longue quand on ne s'intéresse qu'à leur module. Malgré le fait que l'on n'a pas accès à l'accélération des particules de fluide, on voit que l'on retrouve tout de même un certain nombre de caractéristiques décrites par Yeung & Pope [96]. Dans leurs simulations numériques, ils ont observé que la direction du vecteur accélération est à corrélation courte basée sur  $\tau_\eta$  tandis que l'information d'amplitude est corrélée à long terme. On retrouve ici exactement le même type de comportement sur l'accélération de la particule solide.

### 7.2.2 La fin du régime inertiel

Dans l'expérience man290501, on calcule un coefficient  $a_0$  en s'inspirant de la prédiction K41  $\sigma_a^2 = a_0 \varepsilon^{3/2} \nu^{-1/2}$ . La valeur obtenue est 0.6 pour la composante mesurée. La Porta et al.[69] obtiennent des valeurs proches de 6 à des nombres de Reynolds équivalents. On peut en conclure que l'on n'a capté que 10% de la variance de l'accélération à cause de la coupure due à la bille. On a vu que le spectre de vitesse est en  $1/f^2$  dans le régime inertiel et par conséquent le spectre d'accélération est constant dans ce même régime. On peut raisonnablement penser qu'à haute fréquence une coupure apparaisse dans le spectre d'accélération. Par conséquent, si

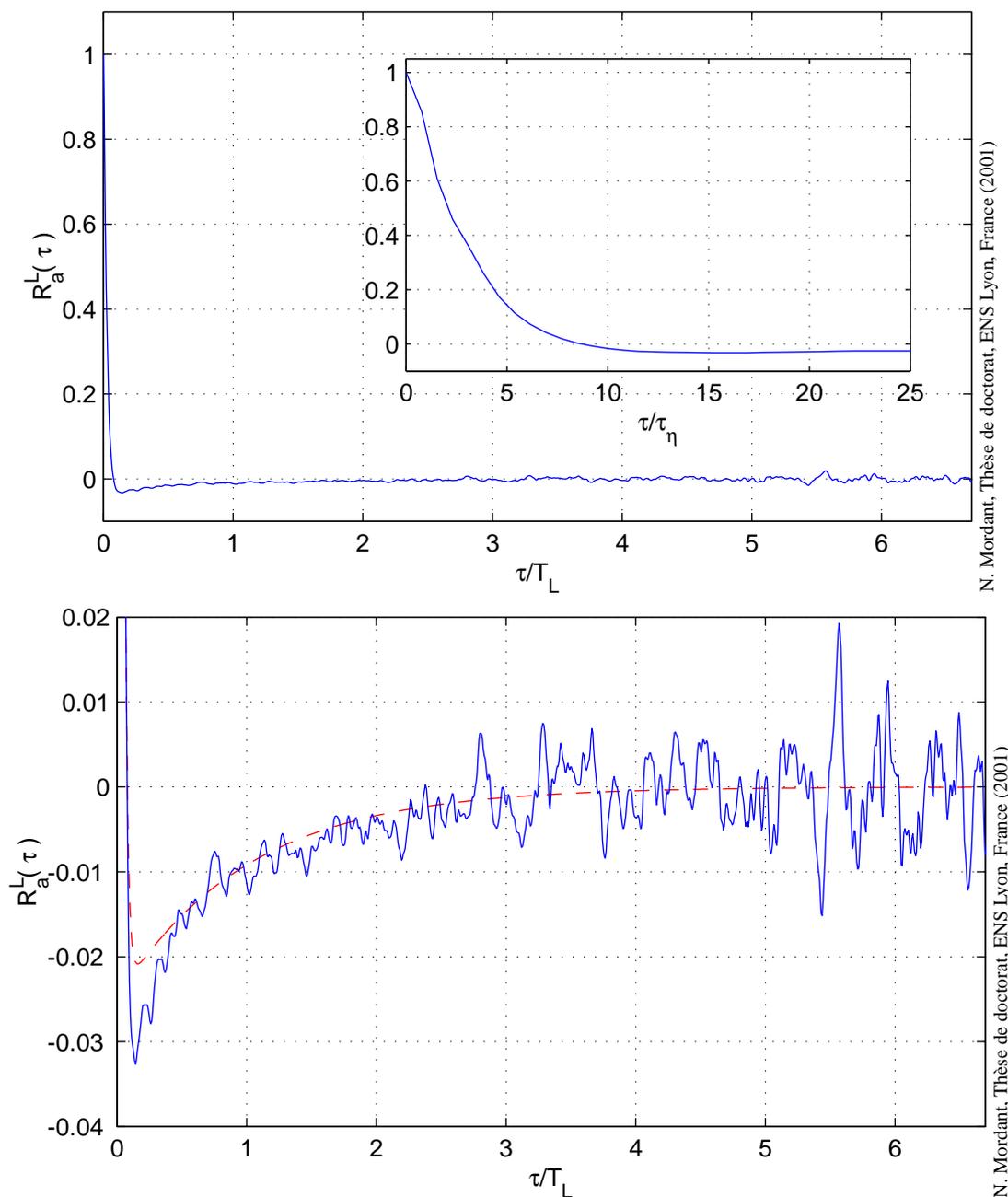
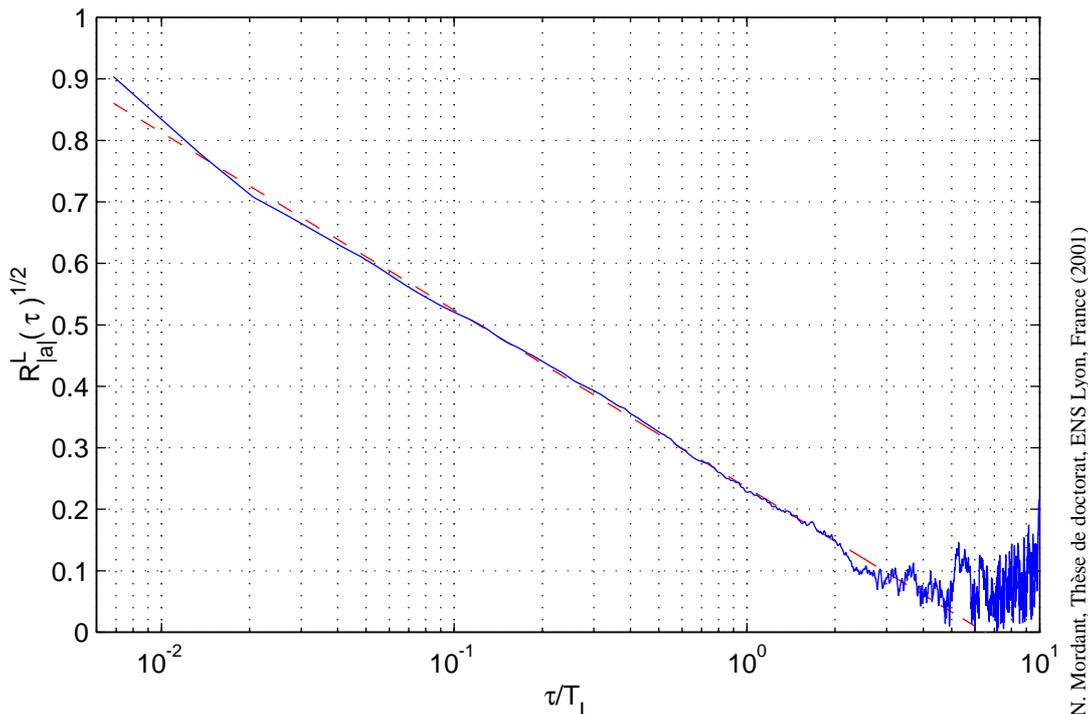


Fig. 7.3 – Coefficient d'autocorrélation de l'accélération pour l'expérience man290501. La courbe en pointillés est la dérivée seconde du fit exponentiel de l'autocorrélation de la vitesse normalisé par  $\sigma_a^2/\sigma^2$ .

on a capté 10% de la variance en s'arrêtant à la coupure due à la bille, on peut conclure qu'il faut prolonger le spectre jusqu'à des fréquences 10 fois plus grandes pour obtenir la totalité du régime inertiel. Or la coupure correspond à un temps de l'ordre de  $2.2\tau_\eta$  on s'attend donc à ce que le régime inertiel se prolonge jusqu'à  $0.2\tau_\eta$ . En supposant que l'accélération suit le spectre proposé par Sawford pour les valeurs mesurées de  $\sigma^2$  et de  $T_L$ , il faut que  $T_2$  vaille  $0.3\tau_\eta$  pour obtenir  $a_0 = 6$ . L'accélération aurait donc un spectre plat dans toute la plage de fréquences  $1/2\pi T_L \rightarrow 1/2\pi 0.2\tau_\eta$ .



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 7.4 – Coefficient d'autocorrélation de la valeur absolue de la composante d'accélération pour l'expérience man290501. La courbe en pointillés correspond à un fit linéaire.

### 7.2.3 La corrélation des composantes d'accélération

On veut maintenant comparer les deux composantes  $a_a$  et  $a_b$  de l'accélération de la bille. La figure 7.5 présente les PDFs des deux composantes. Les deux courbes sont très voisines. Celle de  $a_b$ , en pointillés est légèrement plus large au niveau de la pointe. Cela est dû au rapport signal sur bruit qui est moins bon pour la seconde composante. En effet,  $v_b$  est calculé en effectuant la différence des deux vitesses  $v_1$  et  $v_2$  puis en divisant par  $\sin 22.5^\circ$  ce qui amplifie fortement le bruit et donc dégrade le rapport signal/bruit. Ceci se retrouve sur la PDF d'accélération qui est plus large au niveau de la pointe. Par contre, les ailes sont superposables. L'accélération semble donc être moins sensible au biais géométrique.

La corrélation des composantes d'accélération est présentée figure 7.6. On retrouve le fait que l'autocorrélation décroît extrêmement rapidement. On observe également comme pour la vitesse que les composantes de l'accélération ne sont pas corrélées entre elles. Ceci est également visible sur la figure 7.7 qui présente la PDF à deux dimensions de  $(a_a, a_b)$ . Les lignes isovaleurs sont approximativement des cercles, confirmant la non-corrélation des deux composantes.

La figure 7.8 présente un extrait de signal d'accélération. On a tracé la valeur absolue des deux composantes. Le signal se présente sous la forme d'une succession de bouffées qui ont l'air de se développer de façon synchrone sur les deux voies. Cela suggère que le module des composantes d'accélération puisse être corrélé. Pour tester cette hypothèse, on a calculé les coefficients de corrélation des modules des composantes  $|a_a|$  et  $|a_b|$  (figure 7.9). On voit que l'intercorrélacion des deux composantes n'est pas nulle dans ce cas. Elle est du même ordre de grandeur que l'autocorrélation pour des temps compris entre  $3 \cdot 10^{-2} T_L$  et  $2 T_L$  (pour les temps supérieurs le signal tombe sous le niveau de bruit). Le module est donc corrélé entre compo-

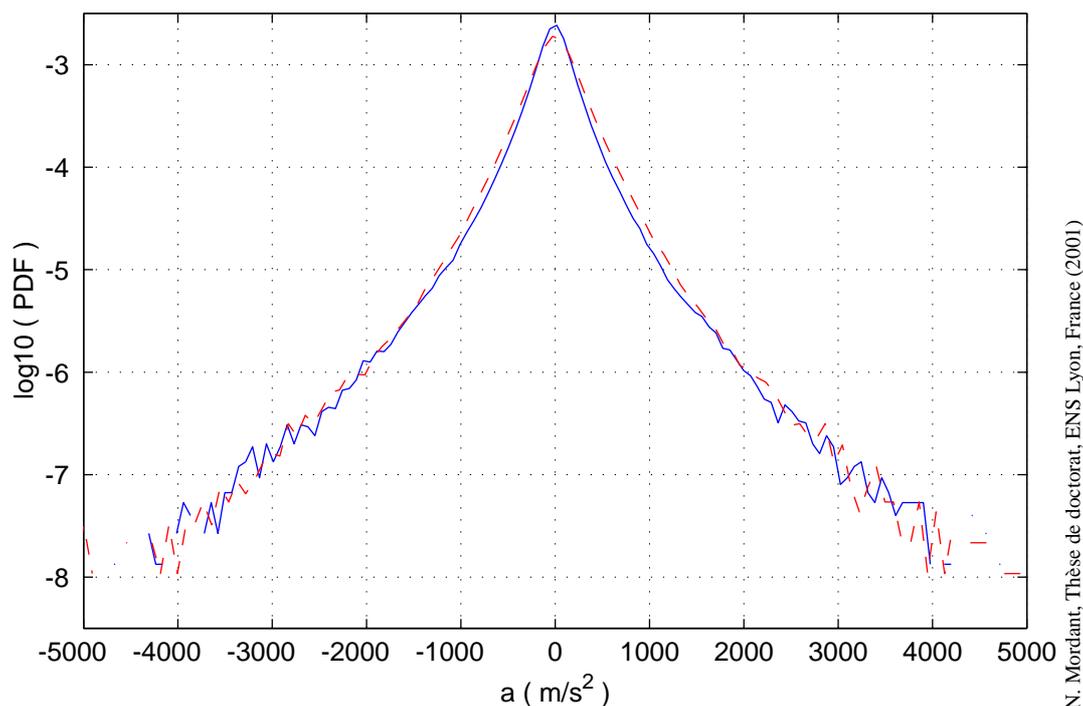


Fig. 7.5 – PDF des deux composantes d'accélération de la particule pour l'expérience man290501. Trait plein  $a_a$ , pointillés  $a_b$ .

santes avec une décroissance très lente et du même type que l'autocorrélation du module d'une composante.

Pour affiner cette analyse, on a calculé le spectre des composantes d'accélération et de leur module ainsi qu'un "spectre croisé" défini par

$$PSD_{ab}(f) = \langle |\hat{a}_a(f)\hat{a}_b(f)^*| \rangle, \quad (7.4)$$

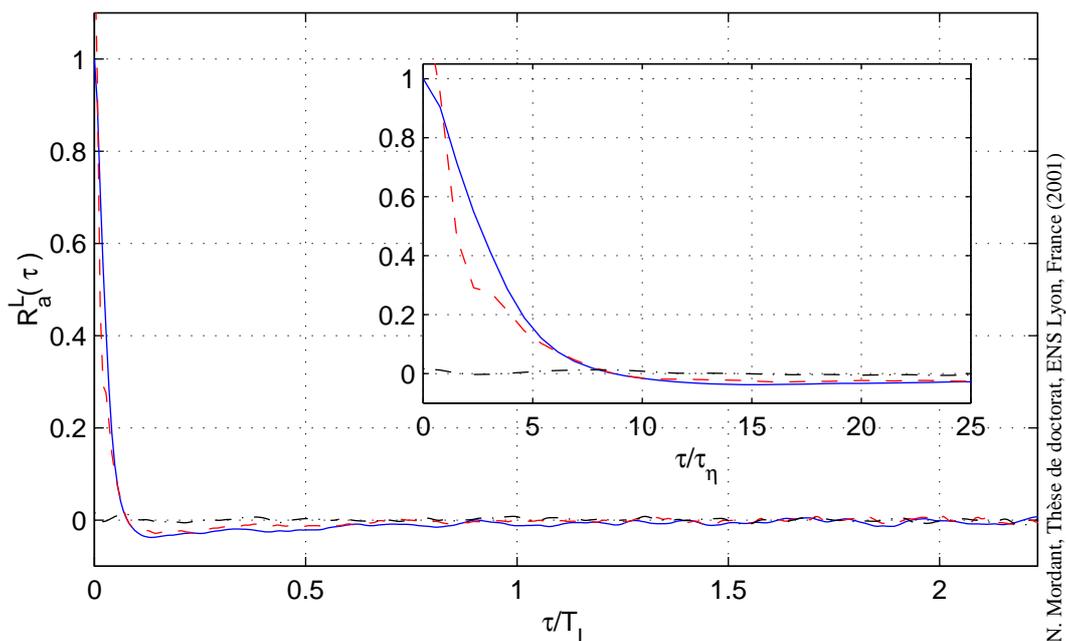
où  $\hat{a}_a$  est la transformée de Fourier et \* est la conjugaison complexe. Alors la cohérence est simplement

$$C(f) = \frac{PSD_{ab}(f)^2}{PSD_a PSD_b}. \quad (7.5)$$

Le résultat est présenté sur la figure 7.10. On voit que le spectre croisé des composantes est nettement plus faible que leur spectre. Par contre, lorsqu'on considère le module, le spectre croisé est du même ordre de grandeur que le spectre dans la bande de fréquence s'étendant jusqu'à 100-200 Hz (fréquence à laquelle la bille ne suit plus l'écoulement). Par conséquent, la cohérence des composantes est quasi nulle tandis que celle de leur module est non nulle dans la bande de fréquence dans laquelle la bille suit l'écoulement (figure 7.11).

En résumé on a donc :

- les composantes de l'accélération ne sont pas corrélées entre elles et ont une autocorrélation à décroissance très rapide.
- le module des composantes de l'accélération a une autocorrélation à décroissance lente et il est corrélé d'une composante à l'autre dans la bande de fréquence dans laquelle la bille suit l'écoulement.



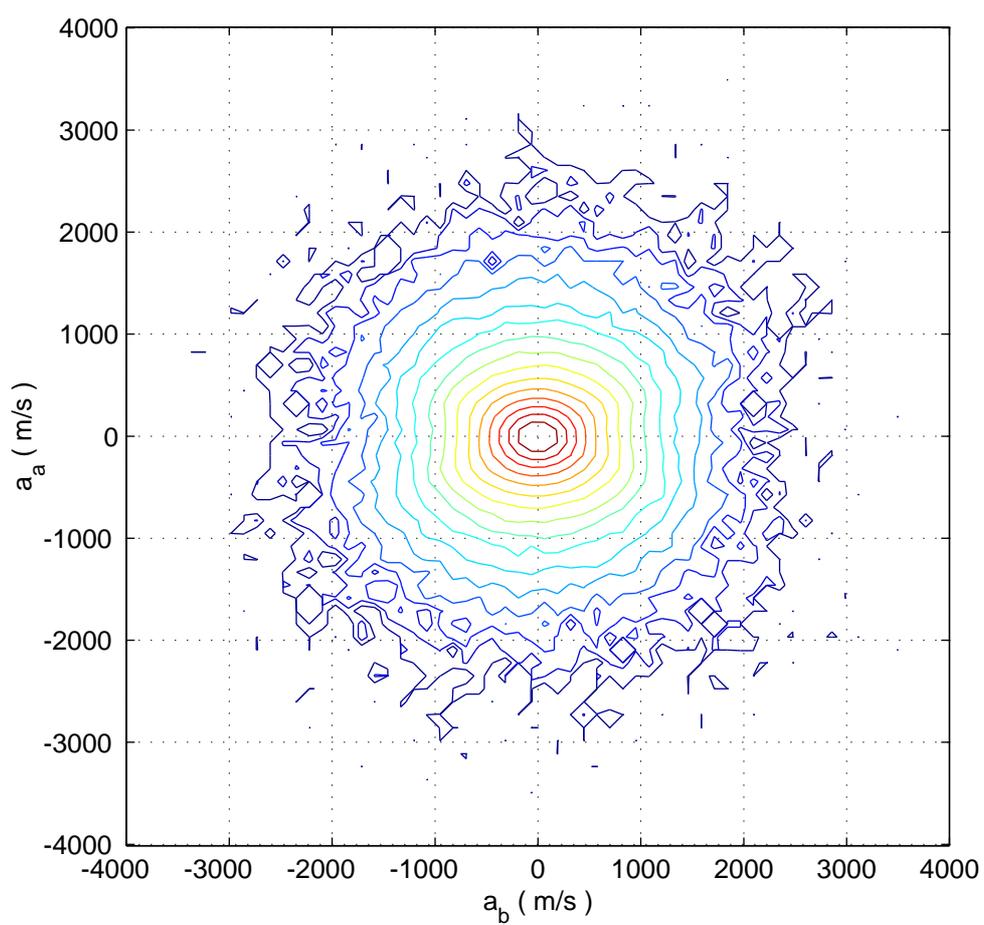
N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 7.6 – Autocorrélations des deux composantes d'accélération et intercorrélations. Trait plein :  $a_a$ , pointillés :  $a_b$ , mixte : intercorrélations. Encart : agrandissement pour les petits temps.

Ceci n'est pas sans rappeler la suggestion de Pope [66] qui propose d'écrire l'accélération sous la forme

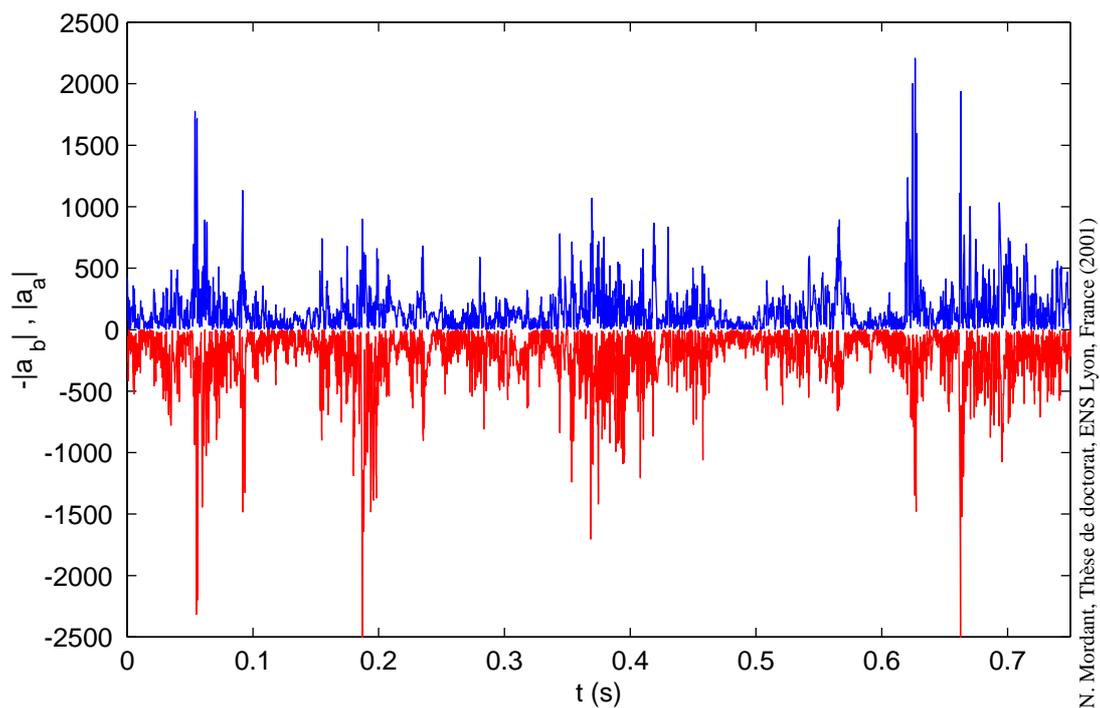
$$\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{e}(t) \quad (7.6)$$

où  $a(t)$  est la norme de l'accélération et  $\mathbf{e}(t)$  est un vecteur unitaire contenant l'information de direction de l'accélération. Il observe dans ses simulations numériques que la norme est corrélée à long terme avec un temps caractéristique de l'ordre de  $T_L$  et que le vecteur  $\mathbf{e}$  est à corrélation courte de temps caractéristique de l'ordre de  $\tau_\eta$ . On retrouve tout à fait ce comportement dans nos expériences même si on ne mesure pas l'accélération lagrangienne mais l'accélération d'une particule solide.



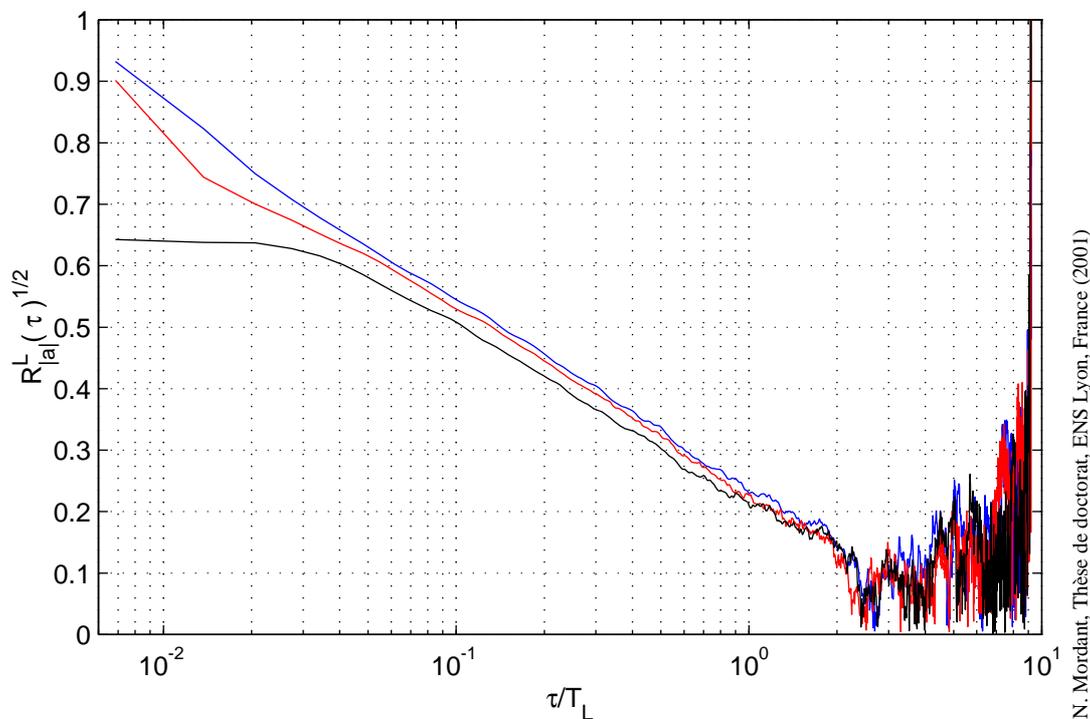
N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 7.7 – PDF bidimensionnel des deux composantes de l'accélération.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 7.8 – Exemple de signal des valeurs absolues des composantes d'accélération. En haut  $|a_a|$  ; en bas et renversé  $|a_b|$ .



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 7.9 – Corrélations des modules des composantes d'accélération. De haut en bas auto-corrélation de  $|a_a|$ , de  $|a_b|$  et intercorrélations.

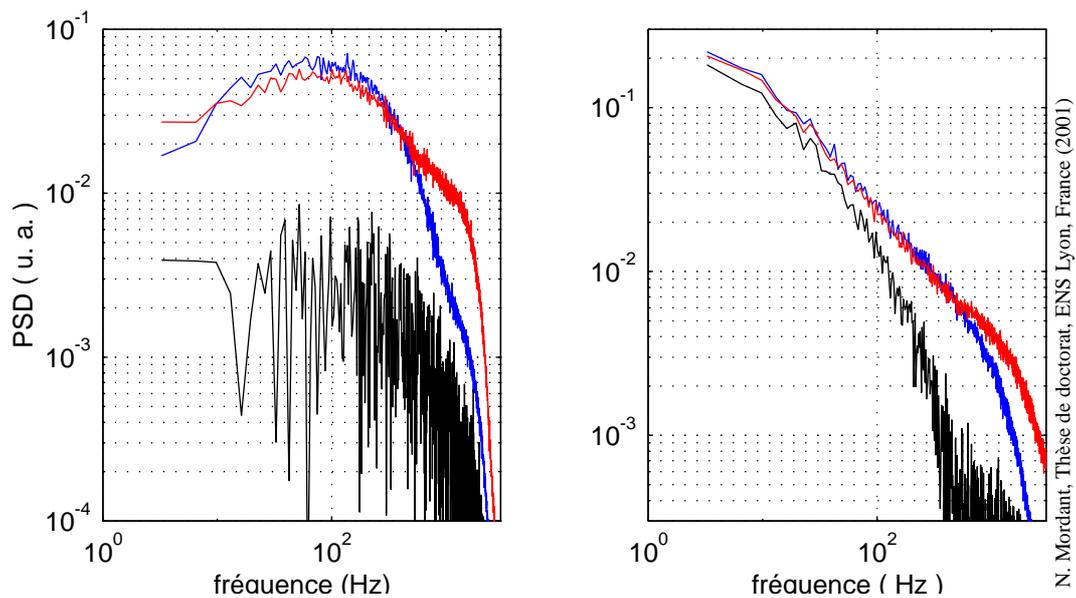


Fig. 7.10 – Spectres des composantes d'accélération à gauche et de leur module à droite.

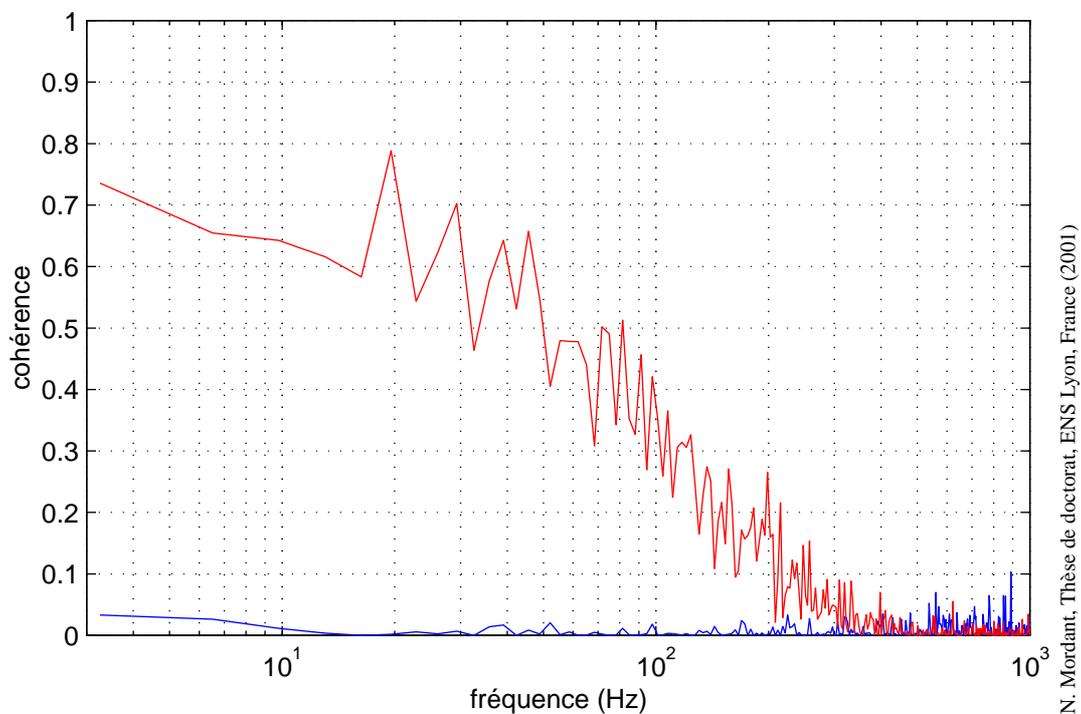


Fig. 7.11 – Cohérence des composantes d'accélération et de leur module .



## Chapitre 8

# L'intermittence lagrangienne

### 8.1 Mise en évidence de l'intermittence

Traditionnellement, on étudie l'intermittence des signaux lagrangiens en observant la déformation des PDFs des incréments de vitesse en fonction de l'échelle considérée. Dans le contexte eulérien, on observe des PDFs gaussiennes pour les grandes échelles spatiales et le développement progressif d'ailes de type exponentielles étirées lorsque l'on diminue l'échelle. On peut quantifier ce comportement en estimant les fonctions de structures et en observant leur comportement en fonction de l'échelle. Dans le formalisme K41, on s'attend à un comportement

$$S_p^E(r) \sim r^{p/3} \quad (8.1)$$

et l'intermittence apparaît sous la forme d'une correction à l'exposant  $p/3$  [27]

$$S_p^E(r) \sim r^{\zeta_p} . \quad (8.2)$$

Les mesures de ces exposants montrent qu'ils ne dépendent pas linéairement de  $p$  et qu'ils sont plus faibles que la valeur K41  $p/3$  (pour  $p > 3$ ).

Yeung & Pope [96] ont observé un comportement similaire des PDFs des incréments temporels de la vitesse lagrangienne dans un écoulement simulé à faible nombre de Reynolds. On va donc étudier les PDFs des incréments temporels de nos signaux lagrangiens ainsi que les fonctions de structure et en extraire les exposants de structures lagrangiens dans le formalisme de l'auto-similarité étendue (ESS) [57].

#### 8.1.1 La déformation des PDFs des incréments

On commence par étudier la déformation des PDFs des incréments temporels de vitesse

$$\Delta_\tau v = v(t + \tau) - v(t) \quad (8.3)$$

en fonction de l'incrément temporel  $\tau$ . Ils sont présentés figures 8.1 et 8.2. On remarque que la forme des fonctions densité de probabilité change fortement lorsqu'on varie  $\tau$ . Au plus grand écart temporel (correspondant à  $1.7 T_L$ ) la forme est gaussienne comme le montre la superposition avec la gaussienne  $1/\sqrt{2\pi} \exp(-v^2/2)$  présentée sur la figure 8.2. Lorsqu'on diminue la valeur de  $\tau$ , les ailes commencent à s'éloigner de la gaussienne pour prendre une forme exponentielle puis, en diminuant davantage  $\tau$ , une forme d'exponentielle étirée avec une décroissance plus lente que l'exponentielle. On peut donc conclure que le signal de vitesse lagrangien, de même que l'eulérien, est intermittent. De façon à quantifier la déformation des PDFs on étudie leur moyenne, variance, asymétrie et aplatissement.

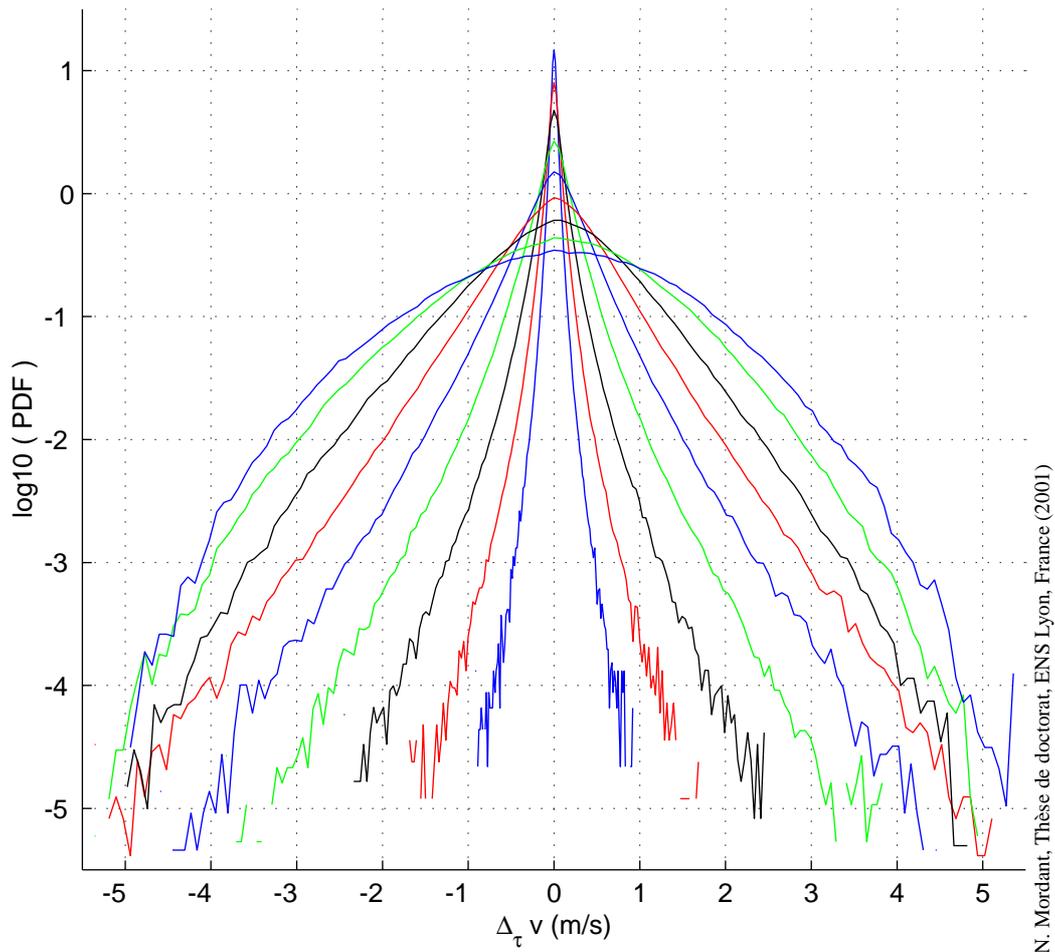
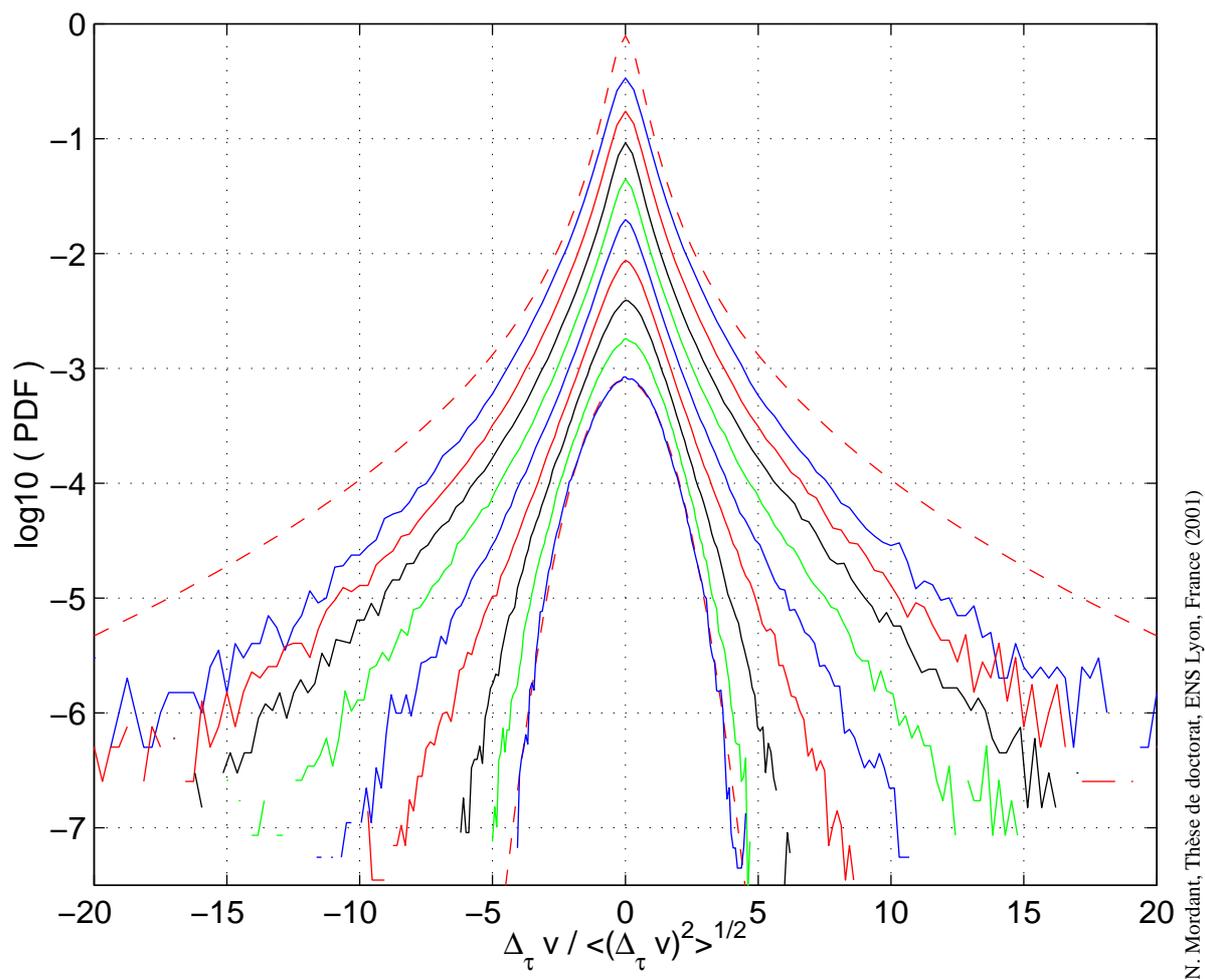


Fig. 8.1 – PDFs des incréments temporels de vitesse lagrangienne. Du centre vers l'extérieur  $\tau = 0.15, 0.31, 0.61, 1.2, 2.5, 4.9, 9.8, 20$  et  $39$  ms

### La moyenne

Dans l'hypothèse où le champ de vitesse est homogène, isotrope et stationnaire alors la moyenne des incréments de vitesse ainsi que tous les moments impairs sont nuls. On a tracé sur la figure 8.3 l'évolution de la moyenne des incréments de vitesse pour deux configurations expérimentales. La première correspond à la mesure 1D des composantes de vitesse  $v_1$  et  $v_2$ . Dans ce cas, la zone de mesure est allongée et fortement excentrée. La seconde configuration est celle de la mesure 2D pour laquelle la zone de mesure est plus petite et mieux centrée par rapport à la cuve. On voit que le signe de la moyenne a changé en passant d'une configuration à l'autre. Dans le cas 1D, la moyenne est positive, signifiant qu'en moyenne la bille a tendance à accroître sa vitesse pendant son séjour dans la zone de mesure. Cela est cohérent avec l'existence de la recirculation moyenne. En effet, la zone de mesure 1D est excentrée et donc dans la majeure partie de la zone de mesure, la recirculation concentre les lignes de courant vers l'axe de la cuve. On a donc un gradient spatial en moyenne plutôt positif dans la zone de mesure qui correspond effectivement à une valeur moyenne positive des incréments de vitesse. Le changement de signe pour la zone de mesure 2D est moins aisé à interpréter. On note donc que la moyenne est représentative de la non-homogénéité de l'écoulement moyen qui, du fait de la localisation de la zone de mesure, crée une légère instationnarité de la vitesse lagrangienne mesurée.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 8.2 – PDFs normalisés des incréments temporels de vitesse lagrangienne. En haut et en pointillés, l'ajustement de la PDF d'accélération proposé par La Porta et al.[69]. En dessous les PDFs des incréments de vitesse. Pour la clarté de l'image, les courbes ont été décalées. De haut en bas :  $\tau=0.15, 0.31, 0.61, 1.2, 2.5, 4.9, 9.8, 20$  et  $39$  ms. En bas, on a superposé en pointillés une gaussienne sur la courbe correspondant au plus grand écart temporel

### La variance

Pour quantifier l'évolution de la largeur des PDFs, on s'intéresse à la variance des incréments de vitesse (figure 8.4) :

$$\langle (\Delta_\tau v)^2 \rangle - \langle \Delta_\tau v \rangle^2. \quad (8.4)$$

On a vu dans le chapitre précédent que la moyenne valait au plus 10% de la vitesse quadratique moyenne et donc la variance ne diffère qu'au maximum d'un pour cent de la fonction de structure d'ordre 2 que l'on a étudié dans le chapitre 6. On a vu que la fonction de structure est assez bien approximée par une évolution exponentielle vers la limite  $2\sigma^2$ . On voit par ailleurs que les courbes correspondant aux différentes configurations ne diffèrent guère les unes des autres.

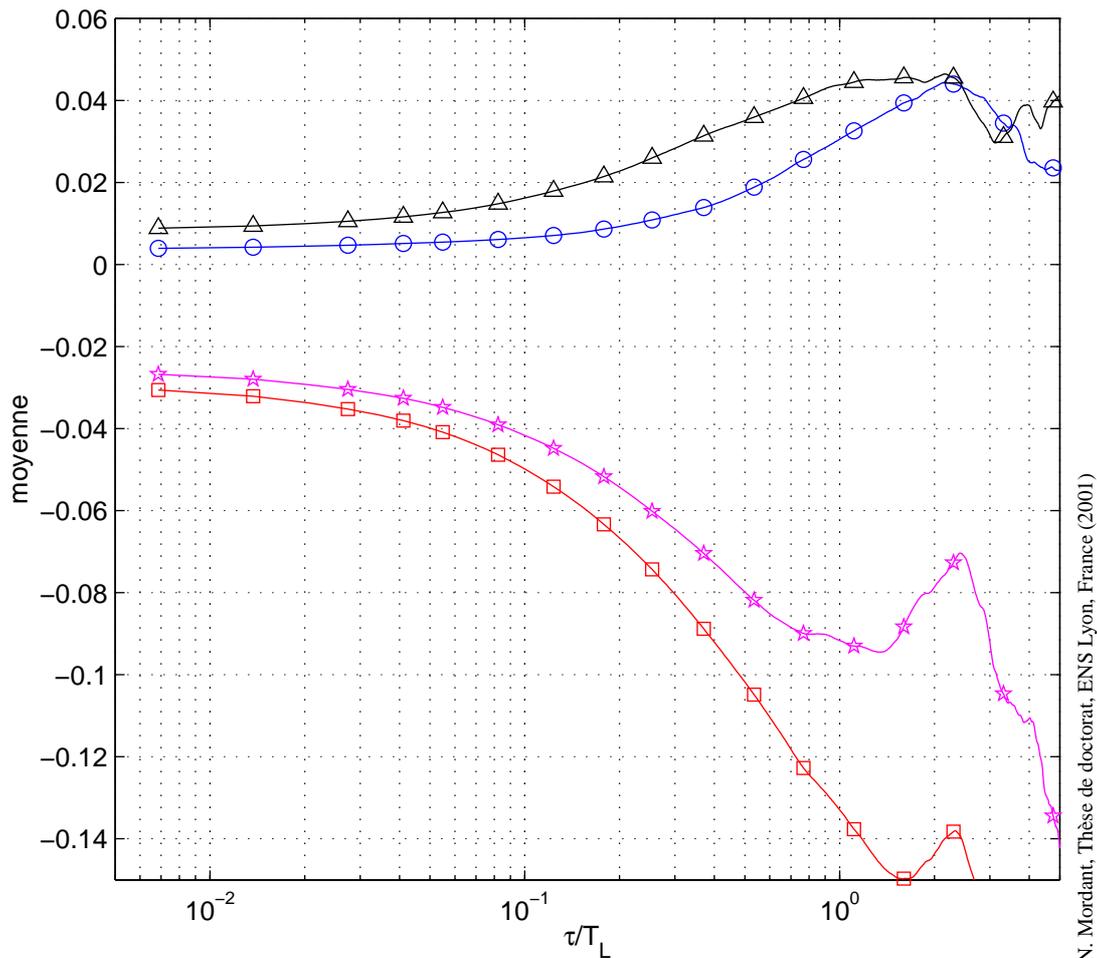


Fig. 8.3 – Évolution de la moyenne des incréments lagrangiens de vitesse (adimensionné par la vitesse quadratique moyenne) avec l'échelle  $\tau$  pour l'expérience man290501. On a tracé les incréments de  $v_1$  ( $\circ$ ) et  $v_2$  ( $\Delta$ ) pour la mesure 1D et les incréments de ces mêmes composantes dans le cas 2D (resp.  $\square$  et  $\star$ ).

### La symétrie

L'asymétrie éventuelle de la forme des PDFs, peut être mise en évidence par la skewness qui vaut par définition :

$$S(\tau) = \frac{\langle (\Delta_\tau v - \langle \Delta_\tau v \rangle)^3 \rangle}{\langle (\Delta_\tau v - \langle \Delta_\tau v \rangle)^2 \rangle^{3/2}}. \quad (8.5)$$

L'évolution de la skewness est présentée figure 8.5 dans les deux configurations expérimentales. Dans tous les cas, la skewness est négative. D'après les fluctuations et l'écart entre les composantes  $v_1$  et  $v_2$ , on peut estimer les barres d'erreurs de l'ordre de  $\pm 0.03$  au moins. On voit que dans la configuration 2D, la skewness vaut la moitié de celle estimée dans la configuration 1D. On peut en conclure que l'on mesure donc l'inhomogénéité du champ de vitesse davantage qu'une asymétrie fondamentale des PDFs des incréments de vitesse. On notera que dans la configuration 2D, la zone de mesure est restreinte et moins excentrée que dans le cas 1D et que la skewness est plus faible de l'ordre de -0.06. Cette valeur, compte tenu de la variance d'estimation n'est guère éloignée de la prédiction K41 (skewness nulle). On observe donc que

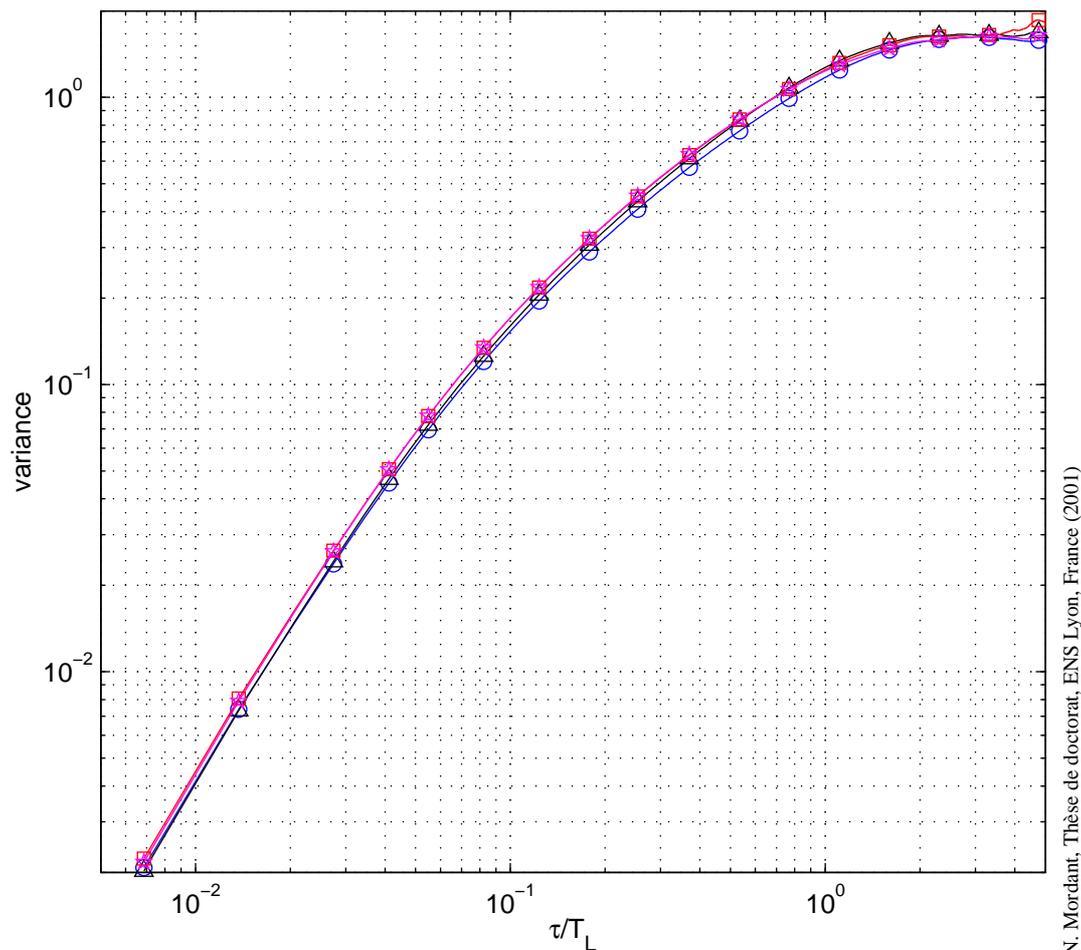


Fig. 8.4 – Évolution de la variance des incréments lagrangiens de vitesse avec l'échelle  $\tau$  pour l'expérience man290501. On a tracé les incréments de  $v_1$  ( $\circ$ ) et  $v_2$  ( $\Delta$ ) pour la mesure 1D et les incréments de ces mêmes composantes dans le cas 2D (resp.  $\square$  et  $\star$ ).

les moments d'ordre impairs sont effectivement très faibles et que leur valeur non nulle reflète surtout la non-homogénéité de l'écoulement et par conséquent la non-stationnarité de la vitesse lagrangienne. Ces effets sont très faibles et on peut considérer qu'ils n'altèrent que très peu le comportement des moments pairs.

### L'aplatissement

On a vu précédemment que l'on pouvait considérer que les PDFs des incréments de vitesse sont centrés et symétriques. Une première manière de réellement quantifier l'intermittence du signal lagrangien – c'est-à-dire le changement de forme avec l'échelle – consiste à étudier l'évolution de la flatness en fonction de l'échelle de temps :

$$\frac{\langle (\Delta_\tau v - \langle \Delta_\tau v \rangle)^4 \rangle}{\langle (\Delta_\tau v - \langle \Delta_\tau v \rangle)^2 \rangle^2}, \quad (8.6)$$

comme présenté figure 8.6. A grande échelle, la flatness vaut 3 comme pour une gaussienne et elle croît fortement jusqu'à 19 à la plus petite échelle. On notera que pour des temps inférieurs

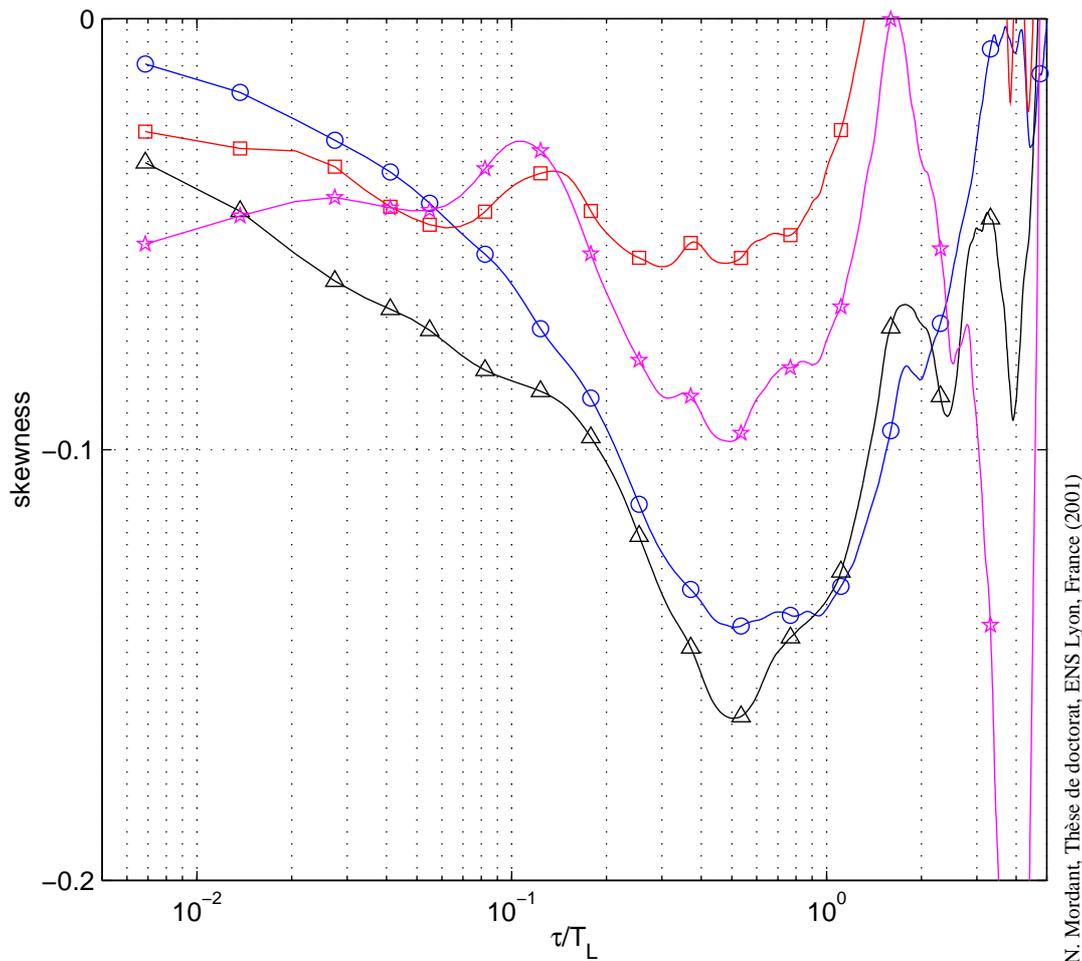
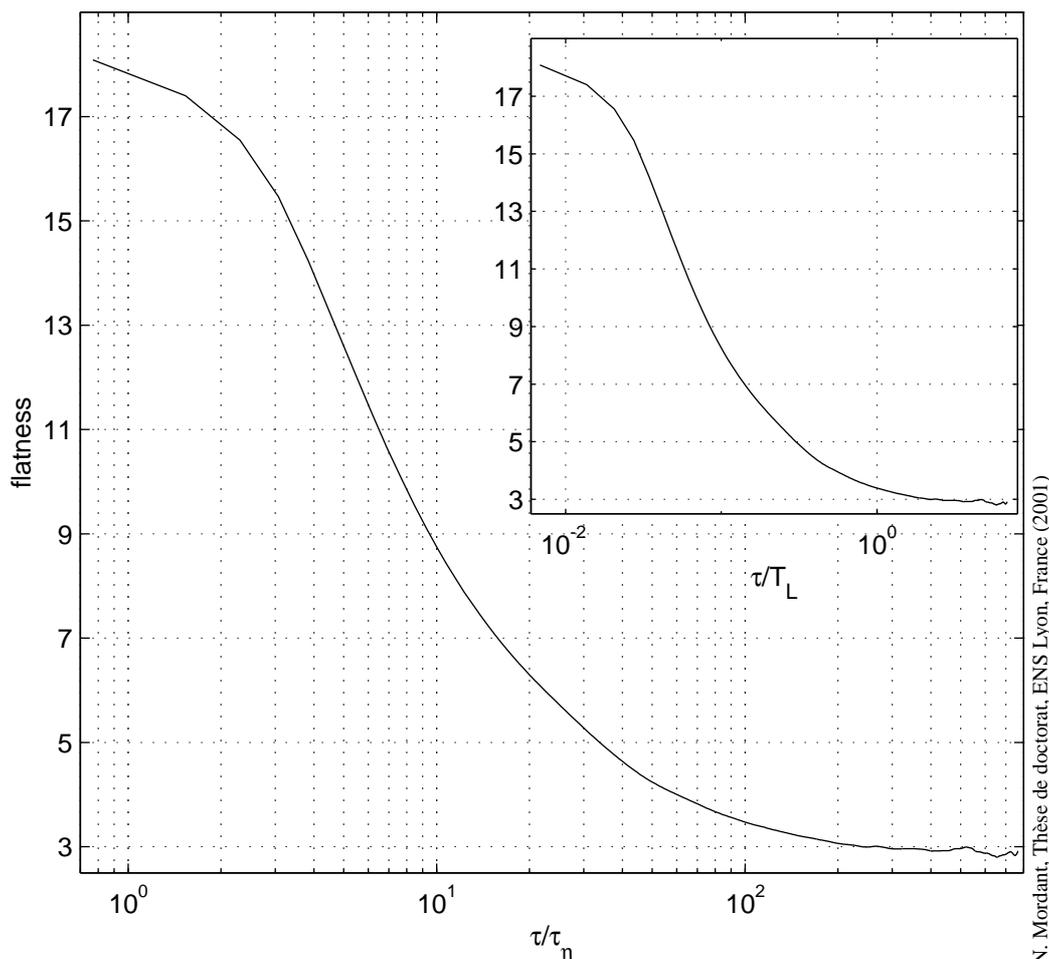


Fig. 8.5 – Évolution de la skewness des incréments lagrangiens de vitesse avec l'échelle  $\tau$  pour l'expérience man290501. On a tracé les incréments de  $v_1$  ( $\circ$ ) et  $v_2$  ( $\Delta$ ) pour la mesure 1D et les incréments de ces mêmes composantes dans le cas 2D (resp.  $\square$  et  $\star$ ).

à  $5\tau_\eta$ , la bille filtre fortement le signal lagrangien car elle n'est plus capable de suivre les variations du champ de vitesse. On peut donc penser que cela limite fortement la croissance des ailes des PDFs des incréments de vitesse et donc ralentit la croissance de la flatness lorsque  $\tau$  devient comparable à  $\tau_\eta$ . De ce fait, on n'atteint pas les valeurs proches de 50 mesurées par La Porta et al. [69]. Cependant en prolongeant la variation de la flatness observée pour les temps supérieurs à  $5\tau_\eta$ , aux temps plus petits on peut tout à fait imaginer d'avoir des valeurs du même ordre de grandeur à condition que la croissance se poursuive jusqu'à  $\tau_\eta$  au moins. On notera que les valeurs de la flatness observées sont nettement plus élevées que celles rapportées dans les mesures eulériennes. Par exemple, Kahalerras et al. donnent des valeurs maximales de l'ordre de 11 [38]. Dans ce sens, on peut affirmer que l'intermittence de la vitesse lagrangienne est plus prononcée que celle de l'eulérienne.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 8.6 – Flatness en fonction de l'incrément temporel  $\tau$  normalisé par le temps de Kolmogorov  $\tau_\eta$ . Dans l'écart même courbe en fonction de  $\tau/T_L$ . Il s'agit de la composante de vitesse  $v_1$  dans la configuration 1D de l'expérience man290501.

## 8.1.2 Fonctions de structure

### Les prédictions 41

Dans le même esprit que dans le formalisme eulérien, on étudie dans ce paragraphe les fonctions de structure de la vitesse lagrangienne

$$D_p(\tau) = \langle (|\Delta_\tau v|)^p \rangle . \quad (8.7)$$

On note que dans notre cas, la présence des valeurs absolues est justifiée par le fait que les moments d'ordre impair sont nuls (et non pas comme dans le cas eulérien par l'asymétrie des PDFs eulériens). On rappelle qu'un raisonnement "à la K41", qui dans le cas lagrangien est uniquement dimensionnel, prédit un comportement

$$D_p(\tau) \sim (\varepsilon\tau)^{p/2} . \quad (8.8)$$

Les fonctions de structure sont présentées figure 8.7 pour des valeurs de  $p$  entre 1 et 5. La fonction de structure d'ordre 2 a déjà été étudiée en détail. On a montré qu'elle est proportionnelle

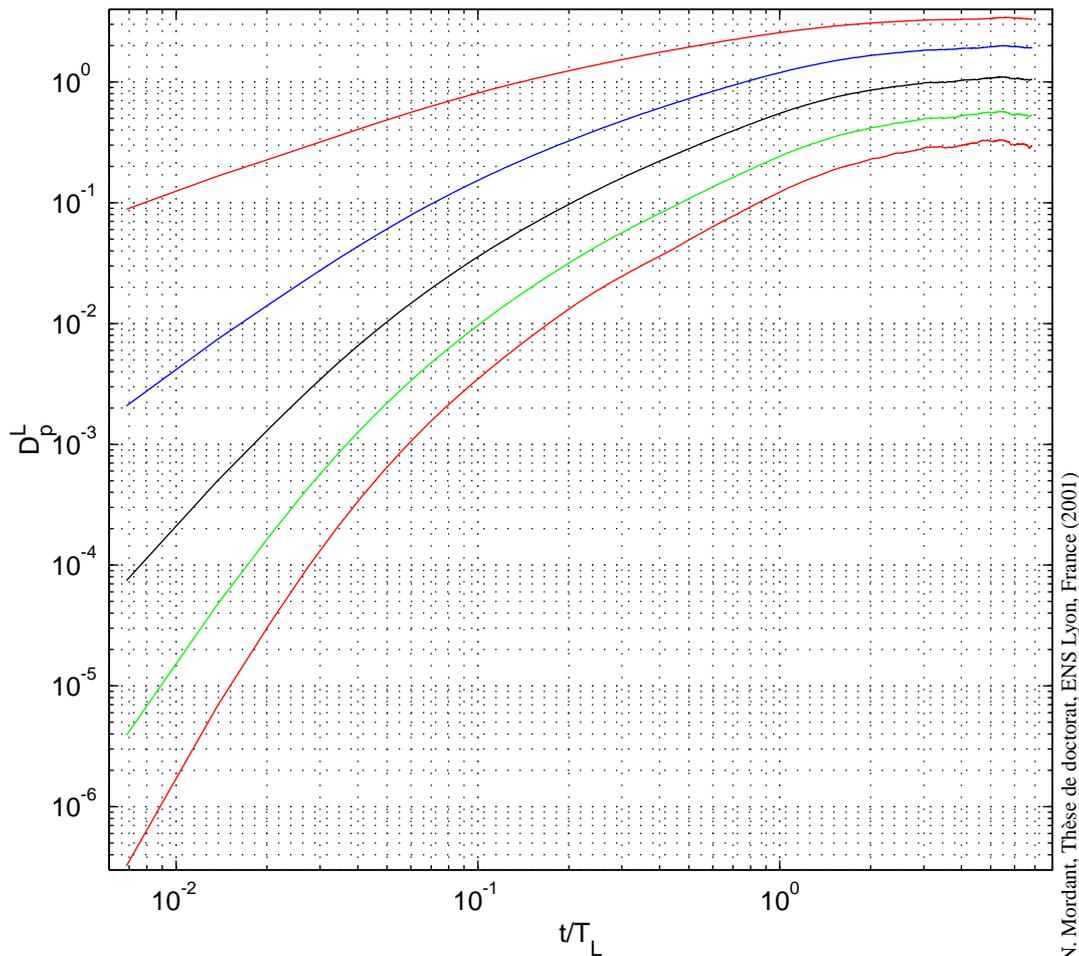
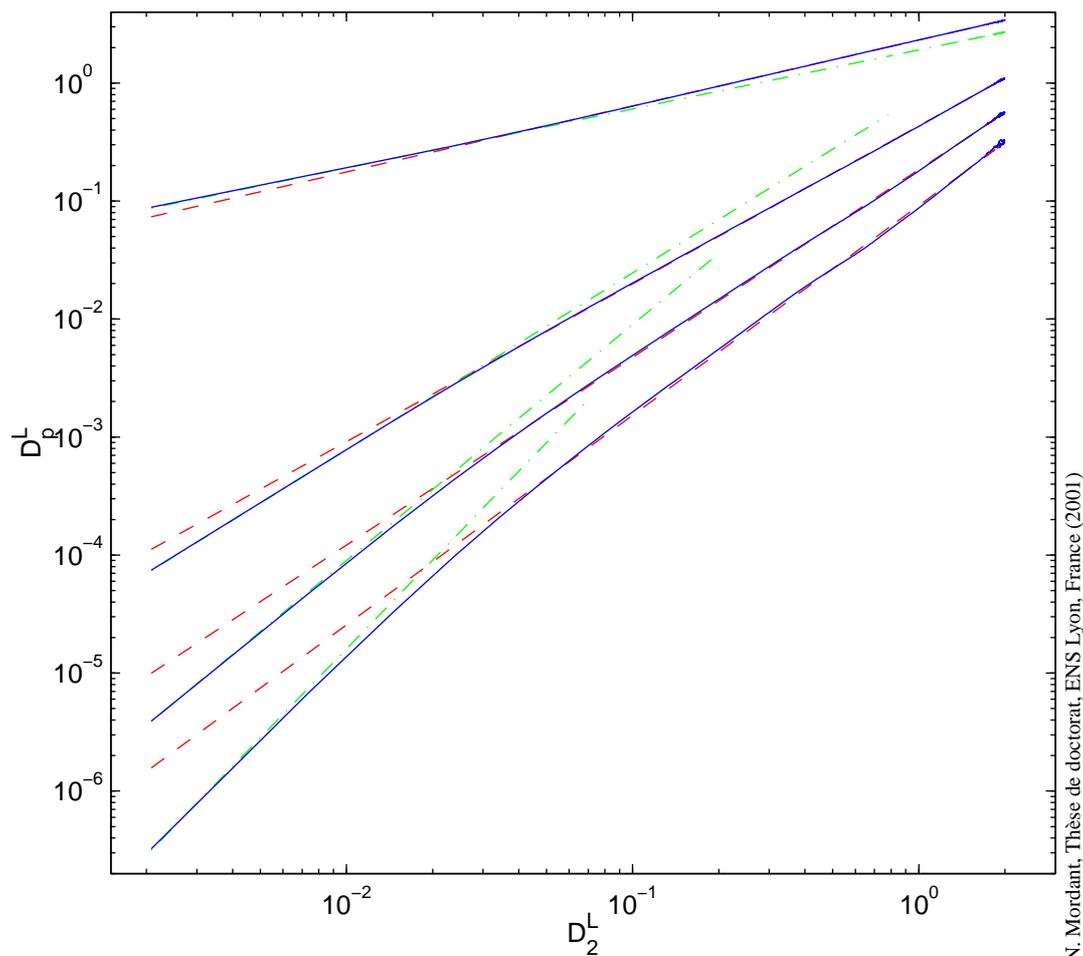


Fig. 8.7 – Fonctions de structure en fonction de l'incrément de temps pour l'expérience man290501. De haut en bas  $p = 1, 2, 3, 4, 5$ . Les courbes ont été décalées pour améliorer la clarté de l'image (respectivement d'un facteur 3, 1, 1/4, 1/20 et 1/100, la fonction de structure d'ordre 2 étant donc inchangée).

à  $1 - \exp(-\tau/T_L)$  pour des temps plus grands que  $5\tau_\eta$ . Par conséquent, si cette forme est toujours valide dans la limite  $R_\lambda \rightarrow \infty$  on a bien aux petits temps  $D_2^L(\tau) \propto \varepsilon\tau$ . Néanmoins on voit qu'à nombre de Reynolds fini, du fait de la régularisation à petite échelle, on n'observe pas de comportement linéaire de la fonction de structure d'ordre 2. On n'observe pas non plus de comportement en loi de puissance évident pour les autres fonctions de structure.

### Autosimilarité étendue

Dans le contexte eulérien, la recherche de lois de puissances pour les fonctions de structure est fondamentalement basée sur l'équation de Karman-Howarth-Monin qui prédit un comportement linéaire de la fonction de structure d'ordre 3. Il n'existe pas de loi équivalente dans le formalisme lagrangien. De plus, la mesure de la fonction de structure d'ordre 2 conduit à une forme exponentielle. Dans ces conditions, un comportement  $D_2^L \propto \tau$  ne sera valide que dans la limite  $\tau \rightarrow 0$ . Du fait de la régularisation à petite échelle, on n'observera un régime inertiel que dans la limite des nombres de Reynolds infinis. De façon à étendre le domaine dans



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 8.8 – Fonctions de structure en fonction de la fonction de structure d'ordre 2 pour l'expérience man290501. De haut en bas  $p = 1, 3, 4, 5$ . Les valeurs correspondantes des exposants sont  $\xi_1^L = 0.56 \pm 0.01$ ,  $\xi_3^L = 1.34 \pm 0.02$ ,  $\xi_4^L = 1.56 \pm 0.06$ ,  $\xi_5^L = 1.8 \pm 0.1$ . En trait pointillé, on a tracé l'asymptote  $D_2^{L \xi_p}$ . En trait mixte, on a tracé le comportement trivial attendu pour les petites valeurs de  $D_2^L$ , c'est-à-dire  $D_2^{L p/2}$ .

lequel les lois de puissance sont observables, il est favorable de se placer dans le formalisme d'auto-similarité étendue (ESS) développé dans les années 90 par Benzi et al. [10, 9, 8]. Dans cet esprit, plutôt que de rechercher une dépendance des fonctions de structures en loi de puissance de la variable  $\tau$ , on cherche une dépendance des fonctions de structures entre elles, ou plus exactement sous la forme

$$D_p^L(\tau) \propto D_2^L(\tau)^{\xi_p^L}. \quad (8.9)$$

On a donc tracé en échelles logarithmiques les fonctions de structures en fonction de  $D_2^L$  dans la figure 8.8. On observe un comportement en loi de puissance très net pour toutes les fonctions de structures présentées excepté aux temps très courts pour lesquels on obtient des comportements réguliers. On note que comme observé dans le cas eulérien, le comportement en loi de puissance s'étend sur une large plage d'échelle, dans notre cas sur toute la gamme accessible sauf les très petites échelles ( $\tau/T_L < 3.5 \cdot 10^{-2}$  soit  $\tau/\tau_\eta < 4$ ). Les exposants mesurés de cette façon valent  $\xi_1^L = 0.56 \pm 0.01$ ,  $\xi_2^L = 1$  (par convention),  $\xi_3^L = 1.34 \pm 0.02$ ,  $\xi_4^L = 1.56 \pm 0.06$ ,  $\xi_5^L =$

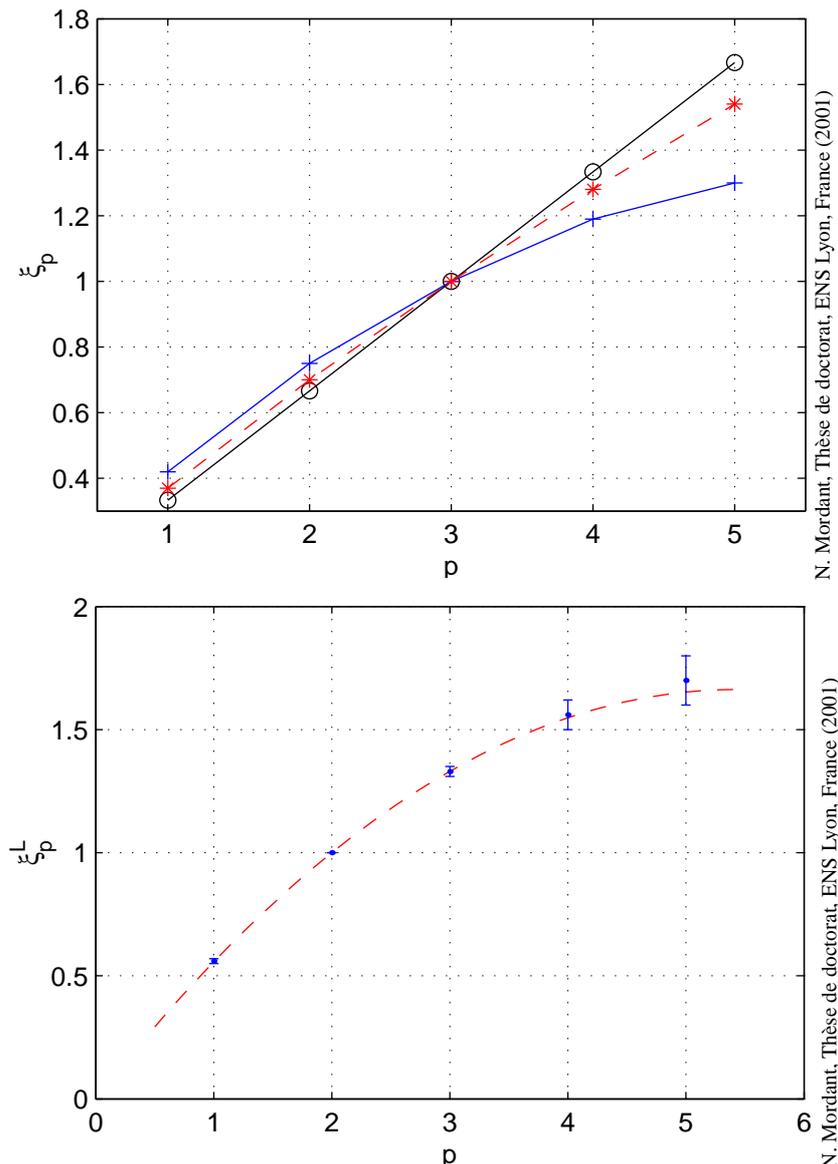


Fig. 8.9 – En haut : exposants de structure  $\xi_p$  lagrangiens (+) et eulériens (\*) normalisés pour avoir  $\xi_3 = 1$  comparés à la prédiction K41  $\xi_p = p/3$  (o). En bas : exposants de structure  $\xi_p$  lagrangiens comparés avec un ajustement polynomial de la forme donnée par l'équation 8.10 avec  $\lambda = 0.113$ . Les barres d'erreur sont estimées par les fluctuations de la pente locale.

$1.8 \pm 0.1$  (voir table 8.1). Pour comparer avec les exposants mesurés sur les signaux eulériens, il faut normaliser par rapport à l'exposant d'ordre 3. On obtient alors  $\xi_1^L/\xi_3^L = 0.42$ ,  $\xi_2^L/\xi_3^L = 0.75$ ,  $\xi_4^L/\xi_3^L = 1.19$ ,  $\xi_5^L/\xi_3^L = 1.3$ . Les exposants correspondants mesurés à partir des signaux eulériens donnent  $\xi_1^E = 0.37$ ,  $\xi_2^E = 0.70$ ,  $\xi_4^E = 1.28$ ,  $\xi_5^E = 1.54$  [8]. Les deux séries sont tracées sur la figure 8.9. La courbure des exposants lagrangiens est nettement plus forte que celle des exposants eulériens. Si on tente de décrire l'évolution des exposants sous la forme

$$\xi_p^L = (p - p(p - 2)\lambda^2)/2 \tag{8.10}$$

on obtient une valeur de l'exposant d'intermittence  $\lambda^2 = 0.113$  (figure 8.9). Les valeurs compatibles avec les barres d'erreur se situent entre  $\lambda = 0.102$  et  $\lambda = 0.120$ .

	man030401	man020801	man290501	man220501	man310701	
$R_\lambda$	155 ?	310	740	1100	740	
diam. ( $\mu\text{m}$ )	250	250	250	250	1000	
pales	non	oui	oui	oui	oui	
$\xi_1$	0.57	0.56	0.56	0.56	0.56	$\pm 0.01$
$\xi_3$	1.33	1.32	1.33	1.34	1.33	$\pm 0.02$
$\xi_4$	1.57	1.54	1.56	1.58	1.57	$\pm 0.06$
$\xi_5$	1.75	1.68	1.73	1.76	1.74	$\pm 0.1$
$\xi_6$	1.9	1.8	1.8	1.9		$\pm 0.2$

Tab. 8.1 – Valeurs des exposants  $\xi_p$  pour les différentes expériences. (Les valeurs de  $\xi_6$  sont indicatives car le nombre d'échantillons disponibles n'est pas suffisant pour une estimation raisonnable de cet exposant.) Les incertitudes sont estimées en mesurant les variations de la pente locale.

### Le passage de l'eulérien au lagrangien

De nombreux modèles de turbulence sont basés sur une analyse multifractale de la dissipation en rapport avec la théorie de Kolmogorov-Obukhov 62. Cela conduit à un comportement en loi de puissance des moments de  $\varepsilon_r$ , dissipation moyennée sur une boule de rayon  $r$  :

$$\langle \varepsilon_r^q \rangle \sim \bar{\varepsilon}^q \left( \frac{r}{L} \right)^{\mu_q^E} \quad (8.11)$$

où  $\mu_q^E$  est une fonction de  $q$  dépendant du modèle choisi. Borgas [11] propose une méthode pour exprimer les exposants de structure lagrangiens à partir des exposants eulériens. Il analyse la structure multifractale du champ de dissipation à la frontière entre le régime inertiel et le régime dissipatif. Dans chaque domaine, on peut décrire la structure du champ de dissipation et exprimer le raccordement des deux régimes. En notant que la limite de  $\langle \varepsilon_r^q \rangle$  quand  $r$  passe sous la longueur de Kolmogorov vaut  $\langle \varepsilon(\mathbf{x})^q \rangle$  (moyenne effectuée sur l'espace), on obtient que les moments de la dissipation doivent s'exprimer sous la forme

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x})^q \rangle \sim \bar{\varepsilon}^q R e^{-3(q-\hat{q})} \quad (8.12)$$

où  $\hat{q}$  est une fonction de  $q$  qui doit vérifier

$$4(q - \hat{q}) = \mu_{\hat{q}}^E . \quad (8.13)$$

On peut effectuer un raisonnement tout à fait similaire dans un formalisme lagrangien. On définit  $\varepsilon_\tau$  comme la moyenne de la dissipation sur un intervalle temporel  $\tau$  le long de la trajectoire d'une particule. Le signal est également multifractal et vérifie

$$\langle \varepsilon_\tau^q \rangle \sim \bar{\varepsilon}^q \left( \frac{\tau}{T_L} \right)^{\mu_q^L} . \quad (8.14)$$

On obtient alors que les moments de la dissipation (moyenne temporelle cette fois) s'expriment :

$$\langle \varepsilon(t)^q \rangle \sim \bar{\varepsilon}^q R e^{-3(q-\hat{q})} \quad (8.15)$$

où  $\tilde{q}$  est une fonction de  $q$  qui doit vérifier

$$2(q - \tilde{q}) = \mu_{\tilde{q}}^L. \quad (8.16)$$

On invoque alors une hypothèse ergodique pour signifier que les moments de la dissipation sont identiques que l'on opère une moyenne spatiale ou une moyenne temporelle. Cela impose donc que

$$(q - \tilde{q}) = 3(q - \hat{q}). \quad (8.17)$$

Si on suppose connu (par un modèle) l'expression de  $\mu_q^E$  alors on déduit de l'équation 8.13 la valeur de  $\hat{q}$ , puis de l'équation 8.17 celle de  $q(\tilde{q})$ , ce qui permet d'accéder à  $\mu_{\tilde{q}}^L$ .

Les exposants de  $\varepsilon_r$  et  $\varepsilon_\tau$  sont reliés à ceux des fonctions de structures de la vitesse via l'hypothèse de Kolmogorov-Obukhov 62. On a ainsi

$$\zeta_q^E = \frac{1}{3}q + \mu_{q/3}^E \quad (8.18)$$

$$\zeta_q^L = \frac{1}{2}q + \mu_{q/2}^L \quad (8.19)$$

Si l'on suppose que les exposants eulériens sont bien décrits par un modèle log-normal alors on a

$$\mu_q^E = \frac{\mu}{2}(q - q^2), \quad (8.20)$$

où  $\mu = 0.22$  est une valeur raisonnable correspondant aux exposants mesurés habituellement. Dans ces conditions, on obtient

$$\mu_q^L = \frac{6}{\mu} \left( \frac{\mu}{4} - 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)^2 + \mu q} \right) - 3q \quad (8.21)$$

ce qui conduit à

$$\zeta_q^L = \frac{6}{\mu} \left( \frac{\mu}{4} - 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)^2 + \frac{\mu q}{2}} \right) - q. \quad (8.22)$$

On notera que dans le cadre du modèle lognormal de la dissipation, le signal de vitesse eulérienne a également une structure log-normale, il n'en n'est pas de même en ce qui concerne le signal lagrangien car les exposants ne varient plus en fonction de  $q$  comme un polynôme du second ordre. Avec cette expression de  $\zeta_q^L$ , on obtient ainsi les valeurs des exposants fournies dans la table 8.2.

On voit que le modèle log-normal estimé à partir des exposants eulériens donne des exposants, certes plus intermittents que les exposants eulériens mais qui le sont moins que les exposants mesurés. On peut jouer sur le paramètre  $\mu$  de façon à ajuster les valeurs des exposants lagrangiens mesurés avec ceux du modèle log-normal. On y parvient assez bien à condition de prendre  $\mu = 0.37$  qui est une valeur très différente de la valeur eulérienne. Il semble donc que le passage proposé par Borgas entre eulérien et lagrangien pose problème. Quelle hypothèse peut ne pas être valide ? La réponse est évidemment délicate. On peut incriminer tout d'abord l'identification  $\xi_p^L = \zeta_p^L$ . Cependant l'identification est généralement acceptée en eulérien. Le manque de mesures lagrangiennes à très haut  $R_\lambda$  ne permet pas d'estimer réellement les exposants  $\zeta^L$ . En ce qui concerne le raisonnement de Borgas, l'auteur souligne une possible faiblesse dans l'hypothèse qui consiste à estimer que la structure multifractale du régime inertiel se prolonge jusqu'à des échelles de l'ordre de  $\eta$ . Par ailleurs, on notera que la dissipation est une grandeur définie de manière fondamentalement eulérienne par les gradients spatiaux du champ de vitesse. Cette variable n'est peut-être pas la variable naturelle à observer dans le formalisme lagrangien.

	lognormal $\mu = 0.22$	mesure	lognormal $\mu = 0.37$
$\zeta_1^L$	0.54	0.56	0.57
$\zeta_2^L$	1	1	1
$\zeta_3^L$	1.39	1.33	1.33
$\zeta_4^L$	1.71	1.57	1.57
$\zeta_5^L$	1.98	1.73	1.74
$\zeta_6^L$	2.20	1.8	1.85

Tab. 8.2 – Valeurs des exposants  $\zeta_p^L$  estimées pour le modèle multifractal lognormal “usuel” avec  $\mu = 0.22$ , pour nos mesures (en identifiant  $\xi_p^L$  à  $\zeta_p^L$ ) ainsi que pour le modèle multifractal lognormal avec  $\mu = 0.37$ .

### 8.1.3 Les cumulants

#### Pourquoi les cumulants du logarithme des incréments ?

Les quantités classiquement étudiées lors d'une modélisation dans un cadre multifractal sont les cumulants du logarithme des incréments de vitesse. En effet, on peut écrire les fonctions de structure sous la forme

$$\langle |\Delta_\tau v|^p \rangle = \langle \exp(p \ln |\Delta_\tau v|) \rangle \quad (8.23)$$

et les interpréter comme la fonction génératrice de la variable aléatoire  $\ln |\Delta_\tau v|$ . Il est donc équivalent d'étudier les cumulants du logarithme des incréments de vitesse que d'étudier les fonctions de structure.

Si on suppose que le formalisme de l'ESS est valide alors on peut écrire

$$\langle |\Delta_\tau v|^p \rangle = K_p D_2^L(\tau)^{\xi_p}, \quad (8.24)$$

où  $K_p$  est une constante et on a

$$\langle |\Delta_\tau v|^p \rangle = \exp(\xi_p \ln D_2^L(\tau) + \ln K_p). \quad (8.25)$$

Si on écrit un développement de  $\xi_p$  en série de puissance

$$\xi_p = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \frac{p^n}{n!}, \quad (8.26)$$

alors les cumulants s'écrivent

$$C_k(\tau) = q_k \ln D_2^L(\tau) + \text{constante}. \quad (8.27)$$

Cela signifie donc que tous les cumulants sont une fonction affine de  $\ln D_2^L$  et fonction affine l'un de l'autre. Dans le cadre d'un modèle multifractal lognormal (pour la vitesse lagrangienne et non pour la dissipation<sup>1</sup>), on doit avoir  $C_k(\tau)$  constant pour  $k > 2$ .

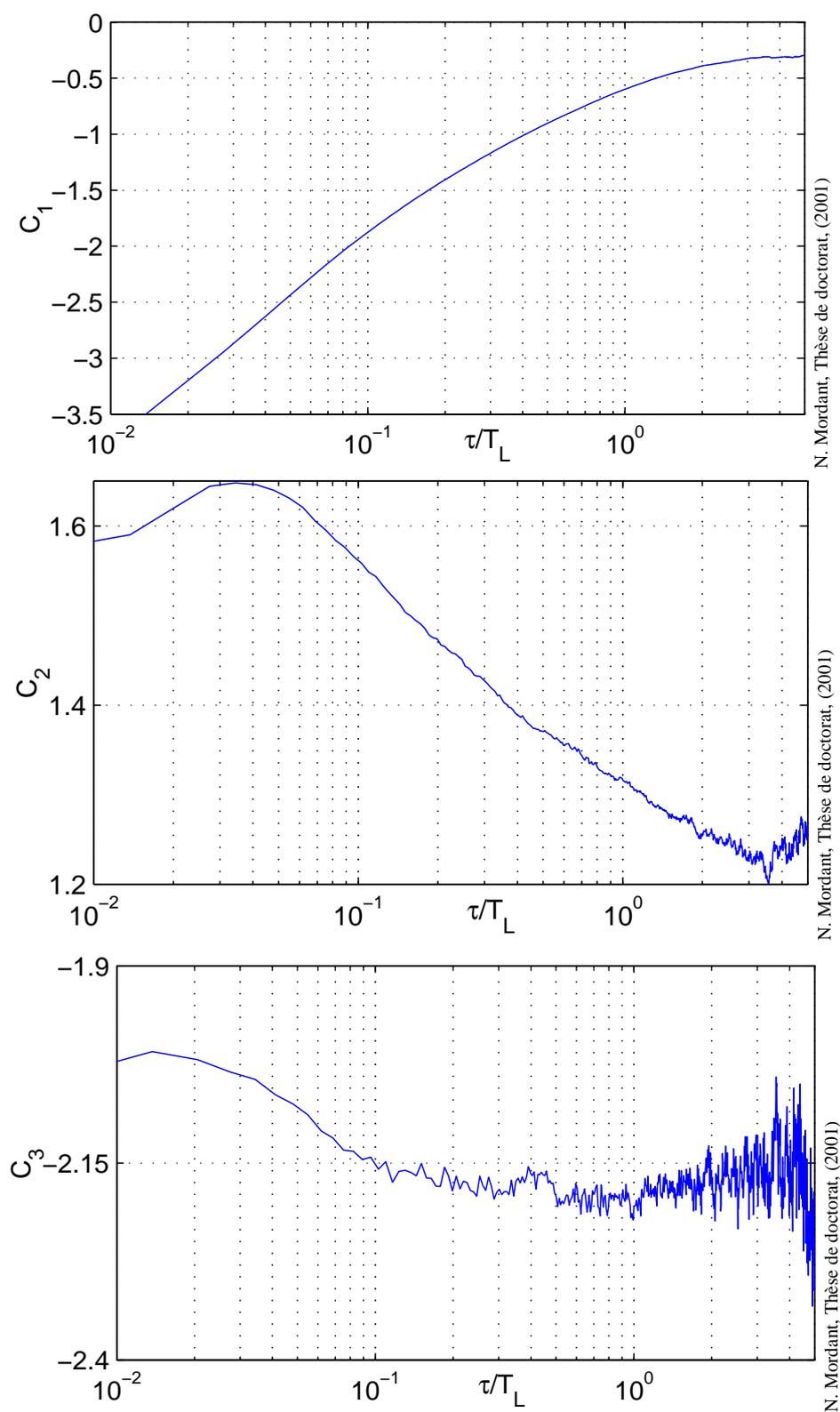


Fig. 8.10 – Cumulants du logarithme de la valeur absolue des incréments de vitesse pour l'expérience man290501. De haut en bas,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .

## Résultats expérimentaux

L'allure des cumulants est présentée sur la figure 8.10 pour  $k = 1, 2, 3$ . Il est évident au vu des figures que la qualité de l'estimation se dégrade lorsque  $k$  augmente et que le nombre de points est insuffisant pour estimer correctement  $C_3$  (surtout pour les grandes valeurs de  $t/T_l$ ). Si les fonctions de structure avaient un comportement en loi de puissance, les cumulants devraient avoir un comportement linéaire dans cette représentation semilogarithmique. Ce n'est objectivement pas le cas. Le cumulant  $C_3$  varie peu avec  $\tau$  sauf pour les petites valeurs de  $\tau$ , à cause de la coupure due à la bille. Néanmoins il semble varier légèrement, tendant à infirmer l'hypothèse d'un modèle log-normal.

Pour vérifier l'hypothèse d'ESS, on a tracé sur la figure 8.11 les cumulants en fonction de  $\ln D_2^L$ . On voit que les cumulants  $C_1$  et  $C_2$  se comportent effectivement de façon affine en fonction de  $\ln D_2^L$ . On a tracé en tirets les droites obtenues par ajustement linéaire. Les pentes sont respectivement 0.620 et -0.122. Dans l'hypothèse d'un modèle log-normal, les exposants s'écrivent

$$\xi_p = (p - p(p-2)\lambda^2)/2, \quad (8.28)$$

ce qui conduit à l'expression suivante des cumulants

$$C_1(\tau) = (1/2 + \lambda^2) \ln \tau + \text{constante} \quad (8.29)$$

$$C_2(\tau) = -\lambda^2 \ln \tau + \text{constante} \quad (8.30)$$

$$C_k(\tau) = \text{constante} \quad \text{pour } k > 2. \quad (8.31)$$

Dans ces hypothèses, les valeurs des pentes obtenues conduisent à  $\lambda^2 = 0.12$ , valeur qui n'est pas si éloignée de la valeur estimée par les exposants  $\xi_p$  qui est 0.113 et qui est compatible avec les barres d'erreur (même si elle se situe plutôt en limite des valeurs acceptables). En ce qui concerne  $C_3$ , la qualité de l'estimation n'est pas suffisante pour tirer des conclusions définitives. On observe un légère tendance décroissante comme suggéré par la droite en pointillés mais les fluctuations de l'estimation sont très importantes. On remarquera que le domaine, dans lequel le comportement affine est valide (pour  $C_1$  et  $C_2$ ) s'étend des plus petites échelles accessibles du domaine inertiel jusqu'aux grandes échelles de l'écoulement ainsi qu'il est courant dans le cadre de l'ESS. Aux plus petites échelles, la régularisation due à la taille de la bille interrompt ce comportement. Les cumulants s'écartent de la droite pour des valeurs de  $\tau$  inférieures à  $0.1 T_L$ . Cette limite semble être plus élevée que celle relevée pour les fonctions de structure. Les cumulants sont donc plus sensibles à la coupure de la bille.

On a également tracé  $C_2$  en fonction de  $C_1$  sur la figure 8.12. On retrouve clairement le régime affine qui tend à confirmer la validité de l'hypothèse d'autosimilarité étendue dans le cadre de la turbulence lagrangienne.

## Évolution avec le nombre de Reynolds

Grâce aux trois expériences man030801, man290501 et man220501, on dispose de données à trois nombres de Reynolds valant respectivement 310, 740 et 1100. On a tracé sur la figure 8.13 les cumulants  $C_1$  et  $C_2$  pour les trois expériences. Les courbes du cumulant  $C_1$  ont été décalées

<sup>1</sup> On notera que pour des valeurs de  $p$  entre 1 et 5 et avec un nombre de points assez réduit on ne peut guère espérer discriminer différents modèles. Un modèle log-normal pour la vitesse n'est donc pas plus mauvais qu'un autre dans ces conditions.

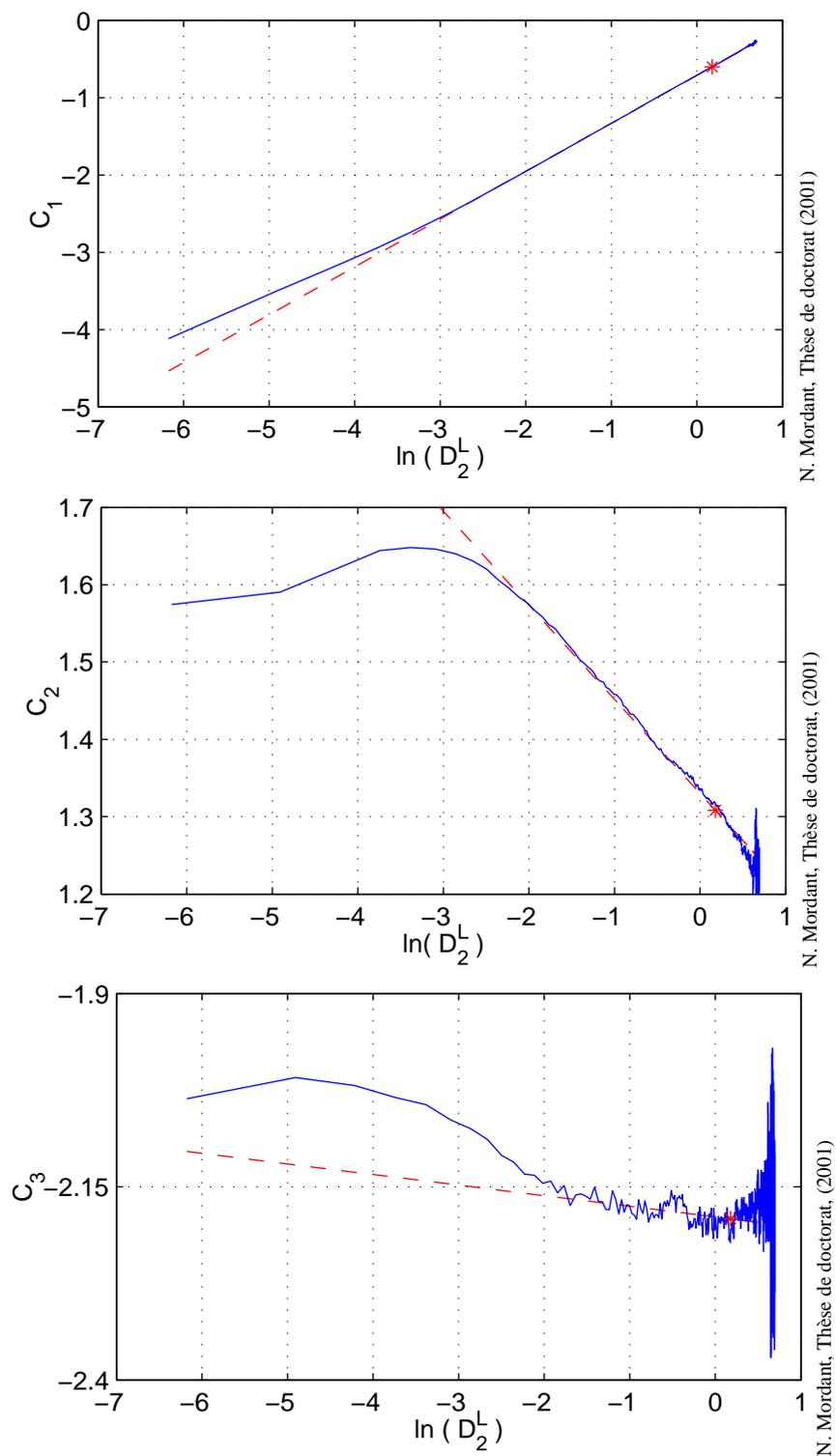


Fig. 8.11 – Cumulants du logarithme de la valeur absolue des incréments de vitesse pour l'expérience man290501 en fonction du logarithme de la fonction de structure  $D_2^L$ . Les droites en tirets sont les ajustements linéaires. L'étoile indique le point correspondant à  $\tau = T_L$ .

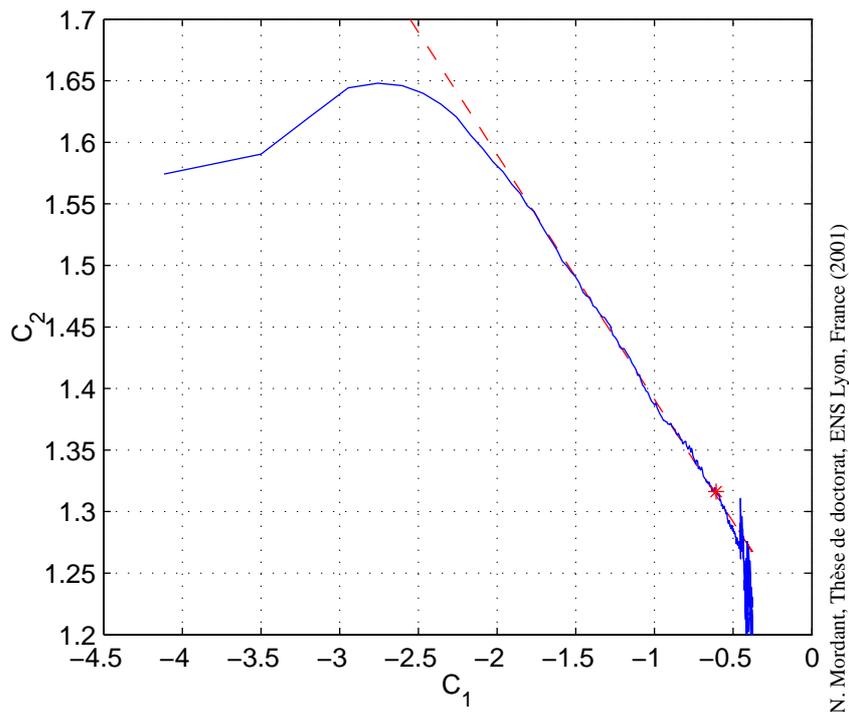


Fig. 8.12 – Cumulants du logarithme de la valeur absolue des incréments de vitesse pour l'expérience man290501. Les droites en tirets sont les ajustements linéaires. L'étoile indique le point correspondant à  $\tau = T_L$ .

verticalement de façon à être normalisées à 1 à grande échelle. L'opération est licite car elle revient à normaliser la variance de la vitesse à grande échelle à la même valeur pour les trois expériences.

Lorsque l'on trace la valeur de  $C_1$  pour les trois nombres de Reynolds, les trois courbes se superposent parfaitement. La chose n'est pas surprenante car la fonction d'autocorrélation étant exponentielle aux trois nombres de Reynolds et supposant que l'hypothèse d'ESS est valide, alors la forme de  $C_1$  ne doit pas varier avec le nombre de Reynolds, sauf éventuellement pour les petits temps proches de la fin du régime inertiel qui évolue avec le nombre de Reynolds (mais qui nous sont inaccessibles).

En ce qui concerne le cumulant  $C_2$ , on observe globalement le même comportement. La conclusion est néanmoins moins définitive car la courbe correspondant au nombre de Reynolds le plus faible ( $R_\lambda = 310$ ) s'écarte des deux autres aux petits temps. Par ailleurs, le nombre de points utilisés pour le calcul du cumulant pour les nombres de Reynolds 310 et 1100 est deux fois plus faible que pour  $R_\lambda = 740$ , ce qui ne garantit pas une convergence optimale de l'estimation. On peut tout de même raisonnablement conclure que dans le régime inertiel et à grande échelle, la forme des cumulants  $C_1$  et  $C_2$  ne dépend pas du nombre de Reynolds.

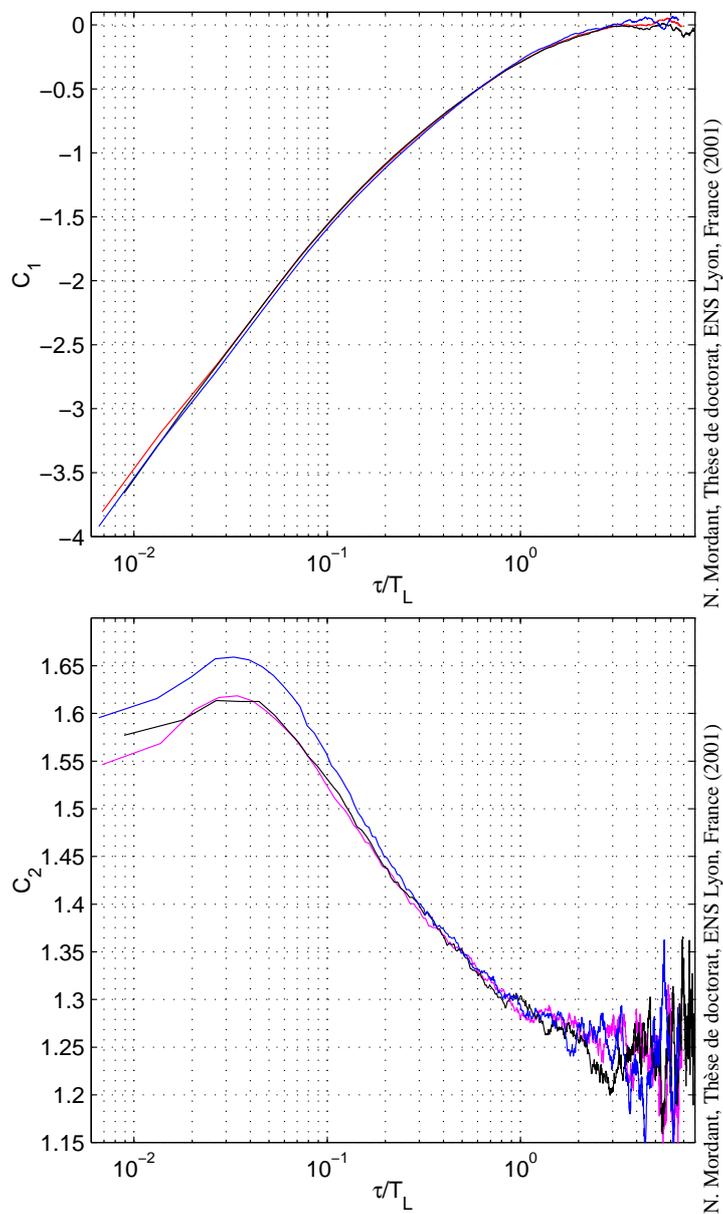


Fig. 8.13 – En haut :  $C_1$  pour trois valeurs du nombre de Reynolds :  $R_\lambda = 310, 740$  et  $1100$ . On a décalé les courbes en hauteur de façon à avoir  $C_1 = 0$  à grande échelle. En bas :  $C_2$  pour trois valeurs du nombre de Reynolds :  $R_\lambda = 310, 740$  et  $1100$ . La courbe du haut correspond à  $R_\lambda = 310$ .

## 8.2 De l'origine de l'intermittence lagrangienne ?

La synthèse de séries temporelles multifractales est un problème délicat. Les ingrédients nécessaires à l'observation de l'intermittence ne sont pas totalement maîtrisés. Une méthode classique de synthèse est la cascade multiplicative sur base d'ondelettes [1]. On dispose d'un arbre diadique dans le plan temps-échelle contenant les différents coefficients d'ondelettes nécessaires à la synthèse de la série complète. Un choix judicieux de ces coefficients (loi log-normale par exemple et signe aléatoire) permet effectivement d'obtenir des signaux intermittents mais qui présentent un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord, on n'observe qu'une invariance d'échelle discrète. Les incréments ne sont pas stationnaires et la construction n'est pas causale. On observe que les séries obtenues présentent une corrélation à longue portée de forme logarithmique lorsque l'on considère les valeurs absolues des incréments. Cette corrélation est issue de la structure de l'arbre choisi. Delour et al.[21, 61, 5] suggèrent qu'une telle structure de corrélation des incréments élémentaires de la série temporelle est un ingrédient suffisant pour générer de l'intermittence. Ils proposent donc une autre synthèse d'un processus multifractal à caractère causal, continu et stationnaire : les marches aléatoires multifractales (MRW en anglais). On synthétise l'incrément élémentaire entre deux échantillons successifs avec une corrélation d'amplitude logarithmique et un signe aléatoire. On le somme ensuite pour obtenir la série multifractale.

### 8.2.1 Le modèle MRW[21]

#### Les ingrédients du modèle

Pour synthétiser une marche aléatoire multifractale, on synthétise un processus discret  $\delta X_\theta$  ayant de bonnes propriétés puis on l'agglomère de façon à obtenir un processus multifractal  $X_\theta$ .  $\theta$  est le pas de temps élémentaire de l'échantillonnage numérique. Le processus de base est choisi avec la structure suivante

$$\delta X_\theta[k] = \varepsilon_\theta[k] \exp(\omega_\theta[k]) , \quad (8.32)$$

où  $\varepsilon_\theta$  est un bruit blanc gaussien et  $\omega_\theta$  est un processus dont la covariance connexe vérifie

$$\text{Cov}(\omega_\theta[k_1], \omega_\theta[k_2]) = \lambda^2 \ln(\rho_\theta[|k_1 - k_2|]) \quad (8.33)$$

avec

$$\rho_\theta[k] = \begin{cases} \frac{L}{(|k|+1)^\theta} & \text{pour } |k| \leq L/\theta - 1 \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (8.34)$$

c'est-à-dire une décroissance logarithmique vers 0 (atteint à l'échelle  $L$ ) puis une corrélation nulle aux grandes échelles. Cette forme de corrélation est observée dans la synthèse par des cascade sur base d'ondelettes.

Avec un tel processus de base et en construisant

$$X_\theta(t) = \sum_{k=1}^{t/\theta} \delta X_\theta(n\theta) \quad (8.35)$$

il est possible de dériver un certain nombre de résultats analytiques dans la limite  $\theta \rightarrow 0$  c'est à dire la limite continue (en admettant qu'elle existe).

## Les prédictions

Tout d'abord le processus  $X$  n'est pas stationnaire (on n'a pas mis de terme de frottement pour stationnariser sous la forme d'une équation de Langevin), sa variance croît comme  $t$ , mais les incréments le sont. Le processus aggloméré est multifractal et les exposants de structure  $\xi_p$  vérifient

$$\xi_p = (p - p(p-2)\lambda^2)/2. \quad (8.36)$$

Les moments des incréments s'écrivent donc

$$\langle |\Delta_\tau v|^p \rangle = K_p \tau^{\xi_p}. \quad (8.37)$$

On peut donc en déduire l'expression des cumulants  $C_k$  de  $\ln |\Delta_\tau v|$  :

$$C_1(\tau) = (1/2 + \lambda^2) \ln \tau + \text{constante} \quad (8.38)$$

$$C_2(\tau) = -\lambda^2 \ln \tau + \text{constante} \quad (8.39)$$

et que les cumulants d'ordre supérieur ne dépendent pas de  $\tau$ .

Par ailleurs, la covariance  $C^{(ln)}(l, \tau)$  du logarithme de la valeur absolue des incréments  $\Delta_\tau X$  vérifie, pour  $\tau \ll l$

$$C^{(ln)}(l, \tau) = \langle (\ln |\Delta_\tau v(t)| - \langle \ln |\Delta_\tau v| \rangle) (\ln |\Delta_\tau v(t+l)| - \langle \ln |\Delta_\tau v| \rangle) \rangle \sim -\lambda^2 \ln \left( \frac{l}{L} \right). \quad (8.40)$$

Ici  $l$  est donc l'écart temporel utilisé pour la corrélation et  $\tau$  l'échelle de l'incrément considéré. Le logarithme des incréments a donc également une corrélation qui décroît logarithmiquement.

On a donc un processus invariant d'échelle et multifractal dont la multifractalité découle des deux hypothèses de départ, log-normalité et corrélation longue de la valeur absolue.

Le problème de ces résultats est que le processus n'est pas aggloméré selon une équation de Langevin. On peut cependant penser que l'ajout d'un terme de frottement à une échelle comparable à  $L$  ne perturbe pas ces prédictions du moins en ce qui concerne le régime inertiel.

## 8.2.2 Les observations expérimentales

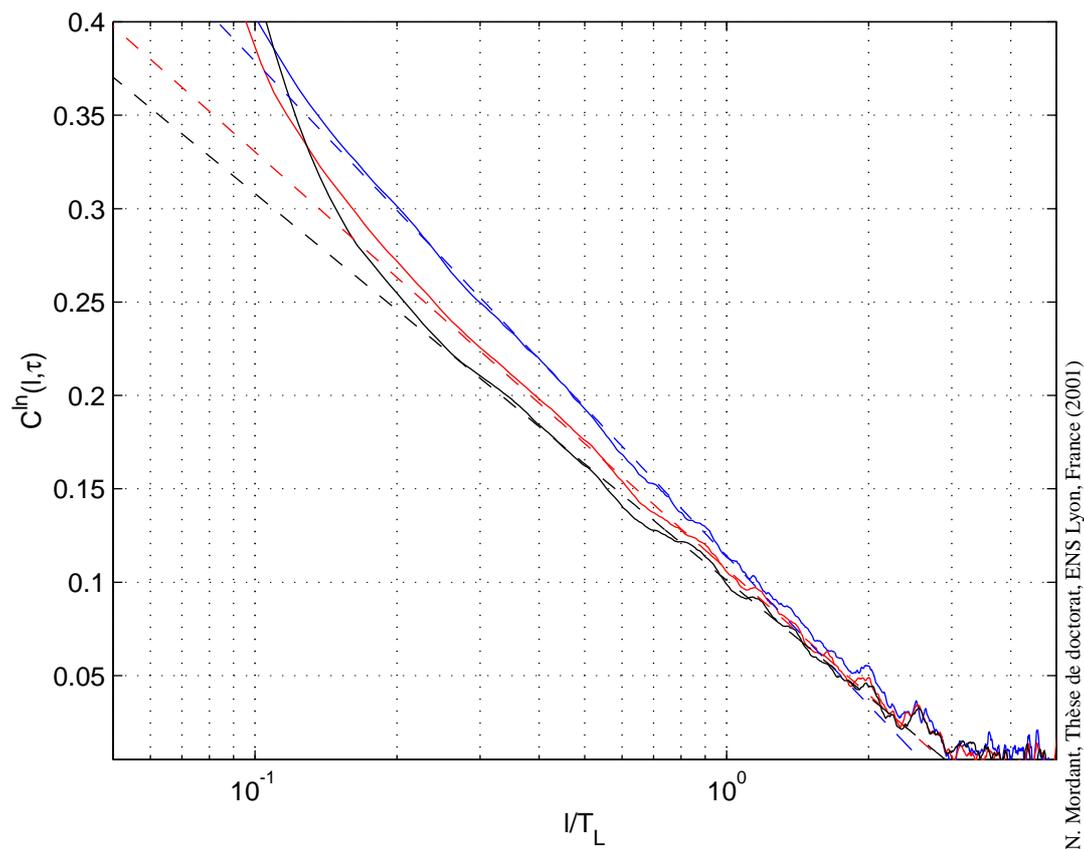
### La corrélation du log des incréments

La figure 8.14 présente l'autocovariance du logarithme de la valeur absolue des incréments de vitesse pour différentes valeurs de l'incrément de temps  $\tau$ . On observe une décroissance linéaire dans cette représentation semilogarithmique qui correspond à une décroissance logarithmique de l'autocovariance pour les valeurs de  $l$  supérieures à  $\tau$ . On peut donc écrire

$$C^{(ln)}(l, \tau) = -p \ln \left( \frac{l}{L} \right). \quad (8.41)$$

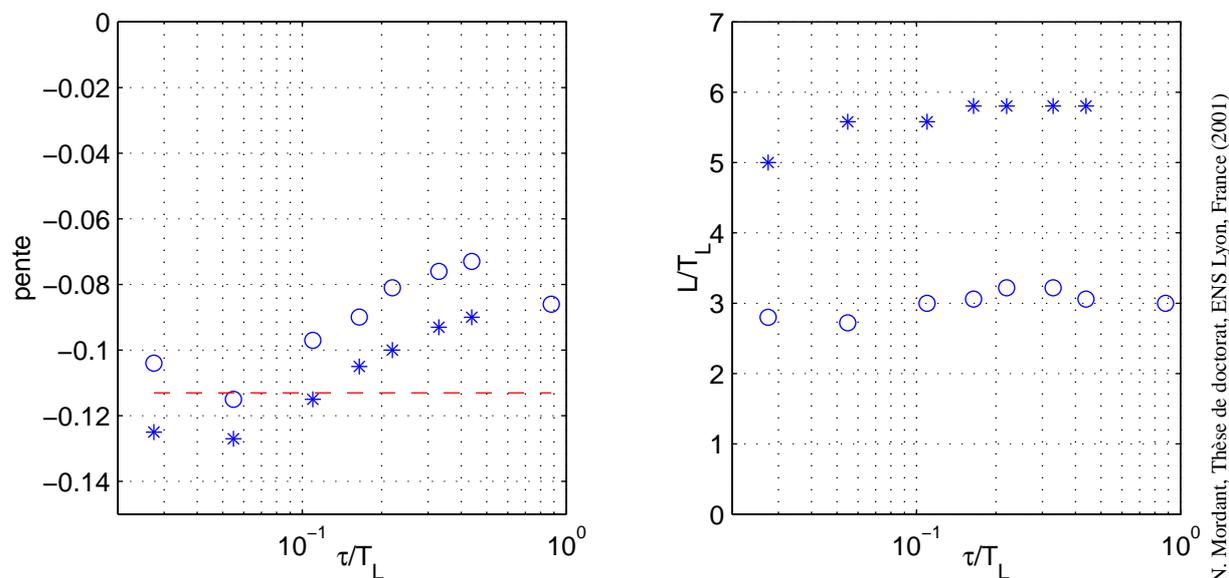
La valeur du préfacteur  $p$  du logarithme est présentée sur la figure 8.15 avec la valeur  $L$ . On voit que  $p$  est effectivement de l'ordre de  $-\lambda^2$  mais on remarque une variation systématique de  $p$  qui augmente avec  $\tau$ . Par contre,  $L$  ne montre pas de variation notable et est de l'ordre de  $3 T_L$  pour ces expériences avec pales.

La figure 8.16 effectue une comparaison entre la covariance des logarithmes des incréments pour les expériences man290501 et man030401, respectivement avec pales et avec disques



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 8.14 – Autocovariance du logarithme des incréments pour l'expérience man290501. De haut en bas les valeurs de  $\tau$  sont 1.2, 2.5, 3.7 ms. En pointillés les ajustements logarithmiques pour chacune des courbes expérimentales.



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 8.15 – Paramètres des ajustements des comportements logarithmiques (o) et de l'expression 8.42. A gauche coefficient  $\lambda^2$  estimé pour différentes valeurs de  $\tau$ . En pointillés la valeur de  $\lambda^2 = -0.113$  estimée par les exposants de structure. A droite, valeur de l'abscisse à l'origine  $L$ .

lisses. On observe que la valeur de  $L$  varie considérablement lorsqu'on change la géométrie expérimentale. Avec les pales,  $L$  vaut  $3T_L$  environ (indépendamment du nombre de Reynolds), tandis que dans le cas des disques lisses, on estime une valeur de  $L = 10T_L$  ce qui est un temps extrêmement long. On observe donc de façon très claire la corrélation longue du logarithme des incréments de vitesse, ingrédient essentiel du modèle MRW et responsable de la multifractalité du processus. L'évolution de  $p$  avec  $\tau$  peut être une conséquence de la présence de la grande échelle  $T_L$  originaire du terme de frottement d'une modélisation de type équation de Langevin.

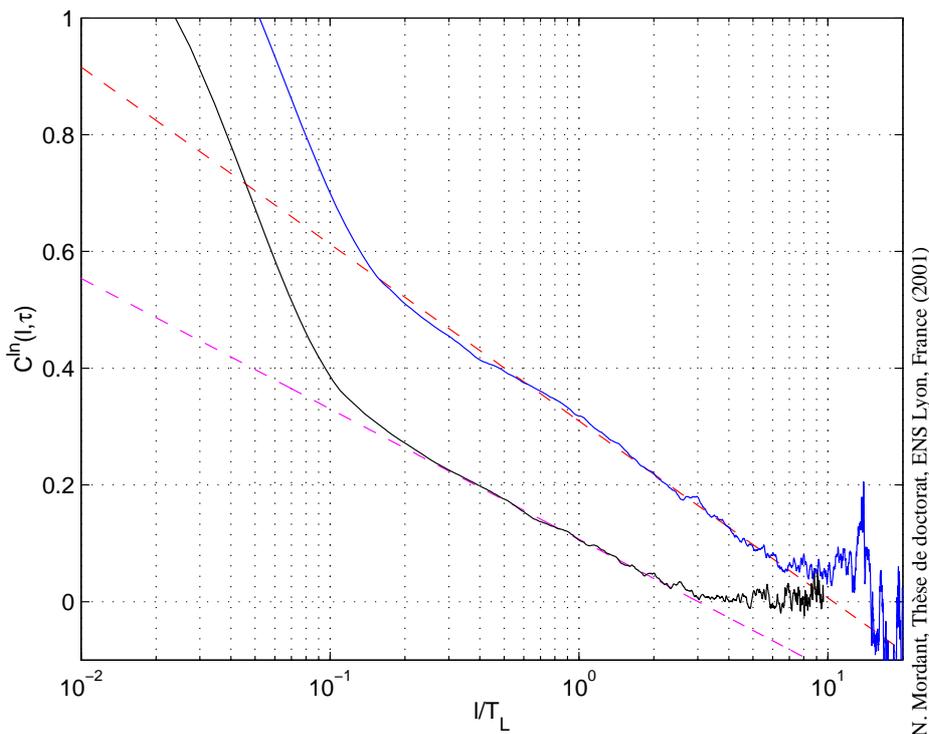


Fig. 8.16 – Autocovariance du logarithme des incréments pour l’expérience man290501 –avec pales– (courbe de gauche) et man030401 –disques lisses– (à droite). En pointillés les ajustements logarithmiques pour chacune des courbes expérimentales.

On peut chercher à affiner l’estimation de la forme de la covariance. Les cascades densifiées ou celles sur arbre “continu” [15] conduisent à une structure de corrélation des incréments de la forme

$$C^{ln}(l, \tau) = \begin{cases} \lambda^2 (\ln \frac{l}{\tau} + \frac{l}{L} - 1) & \text{pour } \tau < l < L \\ 0 & \text{pour } l > L. \end{cases} \tag{8.42}$$

On voit que le premier terme du développement asymptotique est le même que celui prédit par le modèle MRW. Cette dernière expression a l’avantage de prendre en compte la présence d’une grande échelle susceptible de perturber le comportement asymptotique. On a tracé sur la figure 8.17 les deux comportements comparés à l’expérience. On distingue difficilement les deux courbes dans la zone inertielle mais on observe que cette dernière expression suit mieux le comportement de la courbe expérimentale aux temps longs. Les valeurs des paramètres obtenus sont présentés sur la figure 8.15. A cause de la forme différente des deux expressions proposées, les valeurs de  $L$  sont différentes. On note que l’influence de la grande échelle se fait fortement

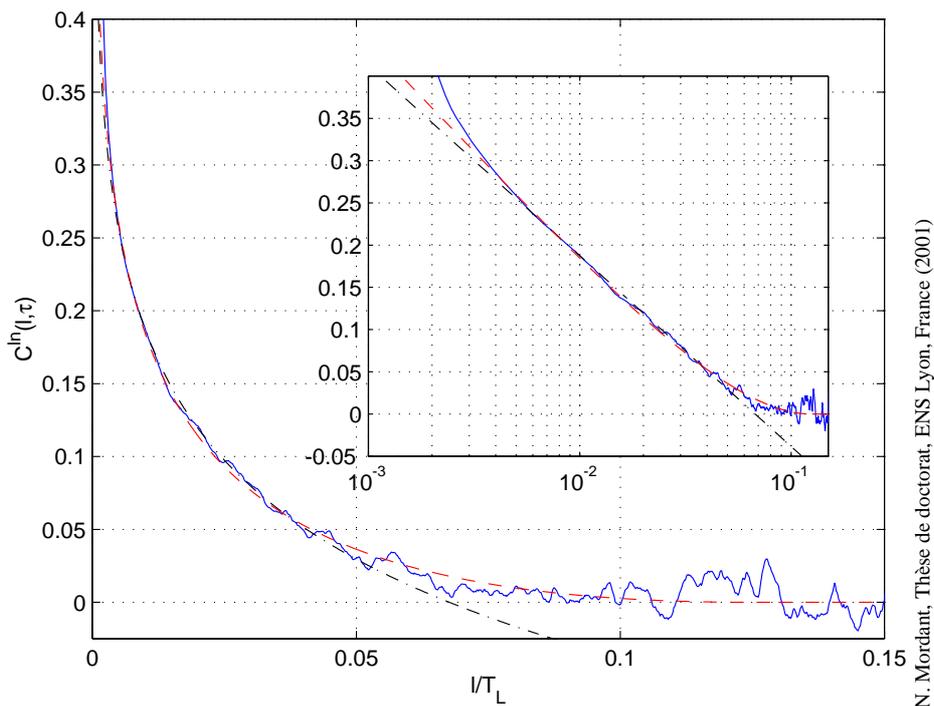


Fig. 8.17 – Autocovariance du logarithme des incréments pour l'expérience man290501. On a tracé uniquement  $\tau = 2.5$  ms. En trait mixte une décroissance logarithmique pure, en trait pointillé la décroissance de l'équation 8.42.

sentir car avec la seconde expression, on obtient des valeurs de la pente inférieures de 0.02 à peu près et qui sont plus proches de la valeur estimée de  $\lambda^2$ . Il semble donc qu'un MRW avec une corrélation de la forme 8.42 fournirait un meilleur comportement. On note néanmoins que la pente montre également une variation systématique avec  $\tau$ .

### Les cumulants du log des incréments

En haut de la figure 8.18, on a tracé l'évolution de  $C_1$  comparé avec une variation logarithmique de pente  $\lambda^2 + 1/2$ . On voit que  $C_1$  tend vers ce comportement dans le régime inertiel. Néanmoins à cause de la coupure à haute fréquence due à la taille de la bille, ce comportement n'est plus observé aux plus petites échelles. Néanmoins si on suppose que la fonction de structure peut être approximée (dans la limite de nombre de Reynolds infini) par une exponentielle alors on s'attend à avoir

$$C_1(\tau) = (\lambda^2 + 1/2) \ln(1 - \exp(-\tau/T_L)) + \text{cste} \sim (\lambda^2 + 1/2) \ln \tau \quad (8.43)$$

pour  $\tau \ll T_L$ . Ceci est bien le comportement prévu par le modèle MRW (qui ne contient pas de force de frottement pour le stationnariser).

La figure 8.18 montre également la variation du cumulant  $C_2$  comparé à la covariance du log. des incréments et à une variation logarithmique de pente  $-\lambda^2$ . On a le même problème de mesure que pour  $C_1$ . A cause de la coupure due à la taille de la bille, on ne dispose que d'une partie du régime inertiel. Néanmoins dans la partie dont nous disposons, on observe que les deux courbes mesurées tendent vers le comportement asymptotique  $-\lambda^2 \ln \tau$ .

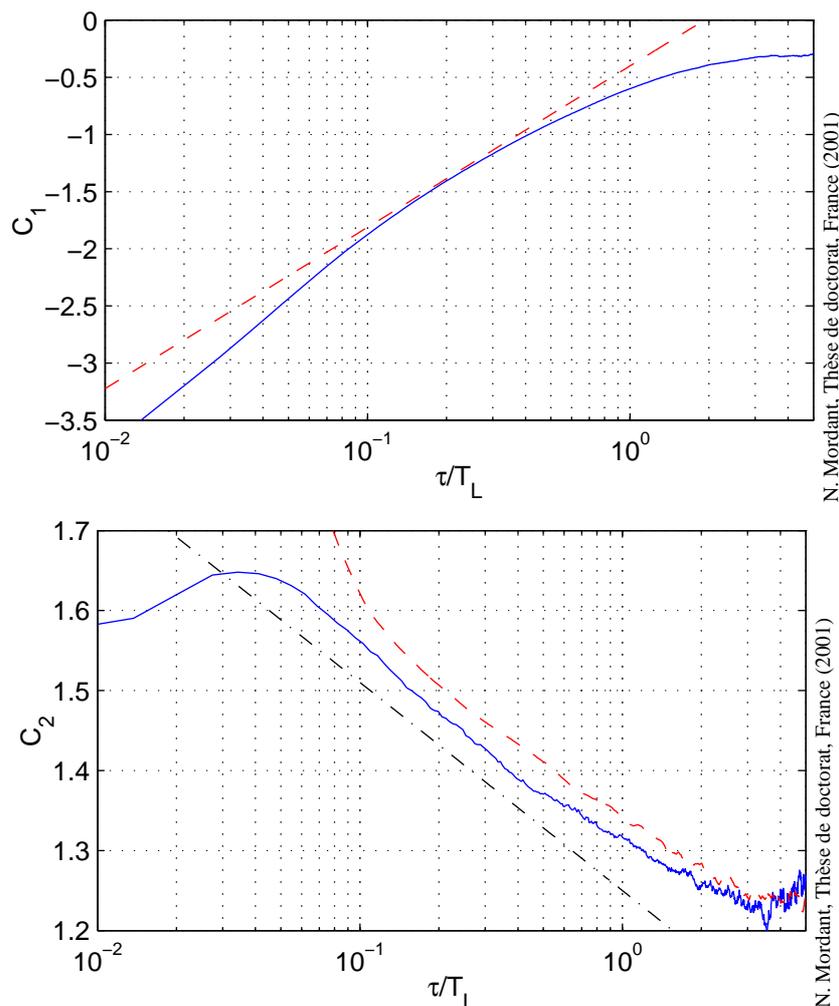


Fig. 8.18 – Cumulants du logarithme de la valeur absolue des incréments de vitesse pour l'expérience man290501. En haut :  $C_1$  ; on a tracé en tirets la variation logarithmique de pente  $\lambda^2 + 1/2$ . En bas :  $C_2$  ; on a tracé en tirets la covariance du log. des incréments et en trait mixte, la variation logarithmique de pente  $-\lambda^2$ .

### 8.2.3 Discussion

Il semble donc que l'ingrédient principal du modèle MRW, la corrélation longue de valeurs absolues des incréments soit présent dans nos mesures. La forme mesurée n'est pas reproduite parfaitement par le modèle qui ne prend pas en compte de terme de frottement comme dans une équation de Langevin. La grande échelle  $T_L$  peut donc tout à fait perturber ces comportements. Néanmoins on observe une décroissance logarithmique de la covariance du logarithme des incréments et ceci jusqu'à des temps extrêmement longs pouvant aller jusqu'à 10 fois le temps caractéristique lagrangien  $T_L$  dans le cas des disques lisses. D'où peuvent provenir de telles corrélations ? L'accélération d'une particule de fluide résulte, d'après l'équation de Navier-Stokes, essentiellement du gradient de pression. Les gradients de pression possèdent-ils une corrélation temporelle longue (en module) ? On notera que les particules se déplacent au cours du temps, donc il s'agit d'une corrélation de l'amplitude de la force de pression le long de la trajectoire d'une particule. Cela ne nécessite donc pas une corrélation temporelle du champ eulérien de pression. Il existe un exemple pour lequel les forces de pression peuvent

présenter de telles corrélations. Dans le cas d'une particule de fluide en rotation autour d'un vortex, l'accélération oscille, mais en module elle est constante dirigée vers l'axe du vortex. Le module de l'accélération est donc fortement corrélé. On note que dans l'exemple de signal d'accélération présenté sur la figure 7.2, l'oscillation se prolonge pendant un temps de l'ordre de 1 à 2 fois  $T_L$ . La valeur de  $L$  pourrait être liée au temps de piégeage d'une particule de fluide dans une telle structure ou bien au temps de vie d'un tel tourbillon. Si cet exemple montre une possibilité, elle doit être loin d'être suffisante car de tels exemples d'oscillations de l'accélération pendant une longue durée sont relativement rares. L'outil informatique, au moyen des DNS, peut certainement fournir des pistes de réponse à ces interrogations.

## 8.3 Une équation de Langevin ?

### 8.3.1 Un modèle stochastique

On a vu dans la section 1.3.2 que si l'on recherche une équation de type équation différentielle stochastique pour la turbulence lagrangienne à haut nombre de Reynolds, alors nécessairement elle doit s'écrire sous la forme d'une équation de Langevin :

$$d\mathbf{v} = -\frac{C_0\varepsilon}{2\sigma^2}\mathbf{v} + \sqrt{C_0\varepsilon}d\mathbf{W} . \quad (8.44)$$

Comme nous avons accès à l'accélération de la particule, on peut tester la pertinence d'une modélisation de ce type en estimant le terme de rappel.

### 8.3.2 Le terme de rappel

Le terme de frottement d'une équation de type équation différentielle stochastique de la forme

$$dv(t) = A(v(t), t)dt + B(v(t), t)dW(t) , \quad (8.45)$$

peut être estimé via la formule suivante [28] :

$$A(v, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle v(t + \Delta t) - v(t) | v, t \rangle}{\Delta t} \quad (8.46)$$

On notera que la validité de cette formule est intimement liée au fait que le processus de Wiener  $dW$  est  $\delta$ -corrélé. Dans notre cas, comme le signal de vitesse mesuré est régulier, cela signifie qu'un tel bruit n'existe pas en toute rigueur. On observera un bruit à corrélation très courte  $\tau_c$ . On peut contourner cette objection en estimant  $A$  de la façon suivante en supposant que le processus est stationnaire :

$$A(v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle v(t + \Delta t + \tau_c) - v(t + \tau_c) | v(t) = v \rangle}{\Delta t} . \quad (8.47)$$

En pratique, on prend pour  $\Delta t$  le plus petit écart temporel possible et  $\tau_c = 6\tau_\eta$ .

Le résultat de cette estimation est présenté figure 8.19. Pour comparaison, on a tracé la droite correspondant au terme de frottement de l'équation de Langevin  $A(v) = -v/T_L$ . On voit que la valeur estimée ne suit pas exactement cette prédiction tout en en restant proche. A quoi

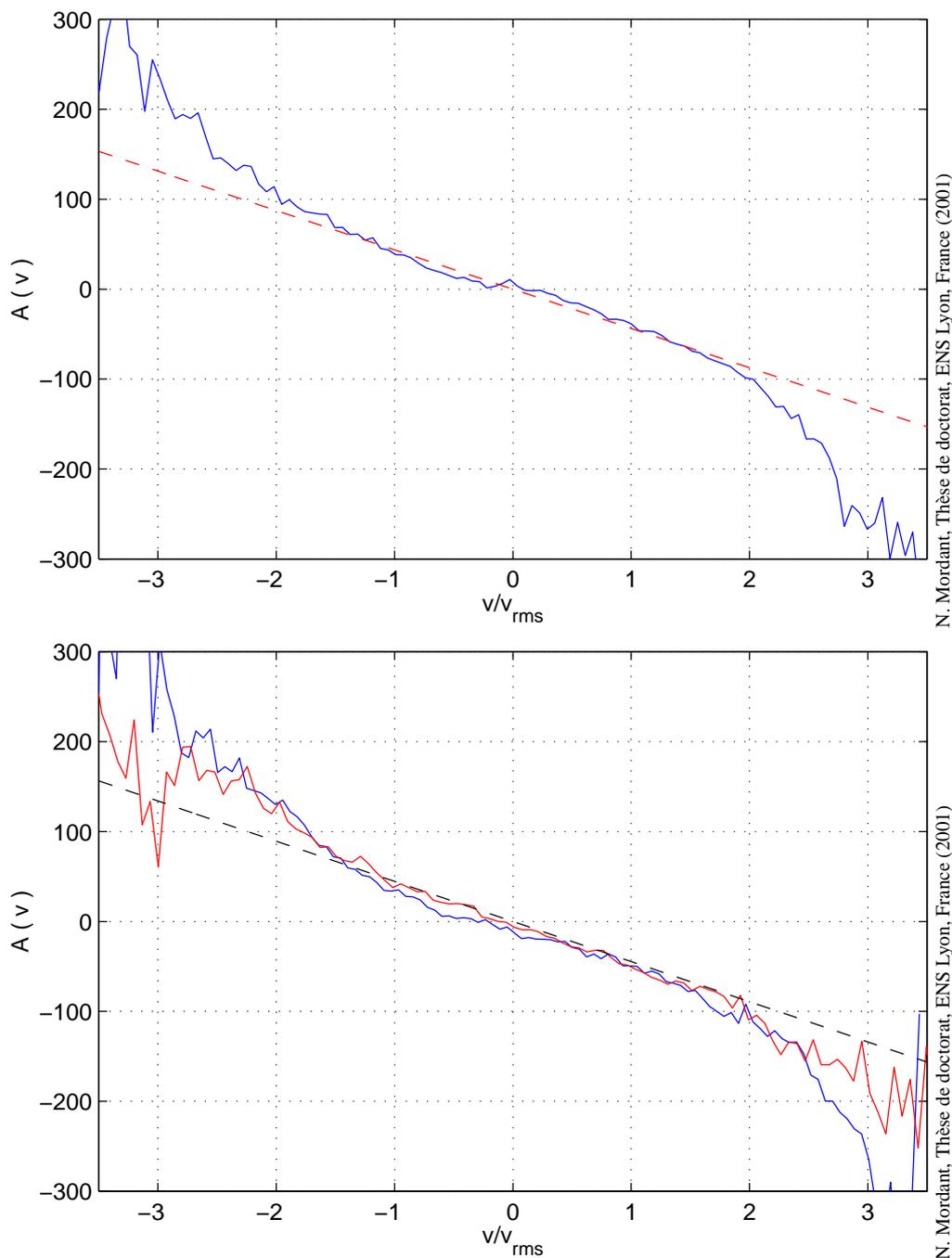


Fig. 8.19 – Terme de frottement de l'équation de Langevin estimé pour l'expérience man290501. On a tracé en pointillé la droite correspondant à  $A(v) = -v/T_L$  En haut : mesure 1D, estimation selon l'axe O1. En bas : mesure 2D, estimations selon l'axe Oa et Ob.

peut être dû cet écart ? Tout d'abord, on se rappelle que pour les valeurs de la vitesse proche de 0, l'algorithme de démodulation est mis en difficulté et que cela se retrouve sur la PDF de la vitesse. Ce problème réapparaît ici. En effet, on remarque de fortes fluctuations au voisinage de 0. On observe également que pour de fortes valeurs de la vitesse, l'estimée de  $a$  s'écarte très nettement de la droite. Cependant on avait mesuré une autocorrélation exponentielle comme on s'attendrait à obtenir avec une variation linéaire de  $A$  avec la vitesse. Mais il faut se rappeler que

l'on avait dû faire un certain nombre de corrections pour obtenir cette exponentielle, corrections qu'il est délicat d'effectuer ici. Il est possible que l'inhomogénéité de l'écoulement que l'on avait réussi à filtrer pour estimer l'auto-corrélation soit responsable de la non-linéarité de  $A$ . La figure 8.19 présente également l'estimation du terme de frottement dans le cas de la mesure 2D. On voit que les deux composantes orthogonales étudiées conduisent à la même estimation du terme de frottement.

### 8.3.3 Vers une modélisation tridimensionnelle du terme stochastique

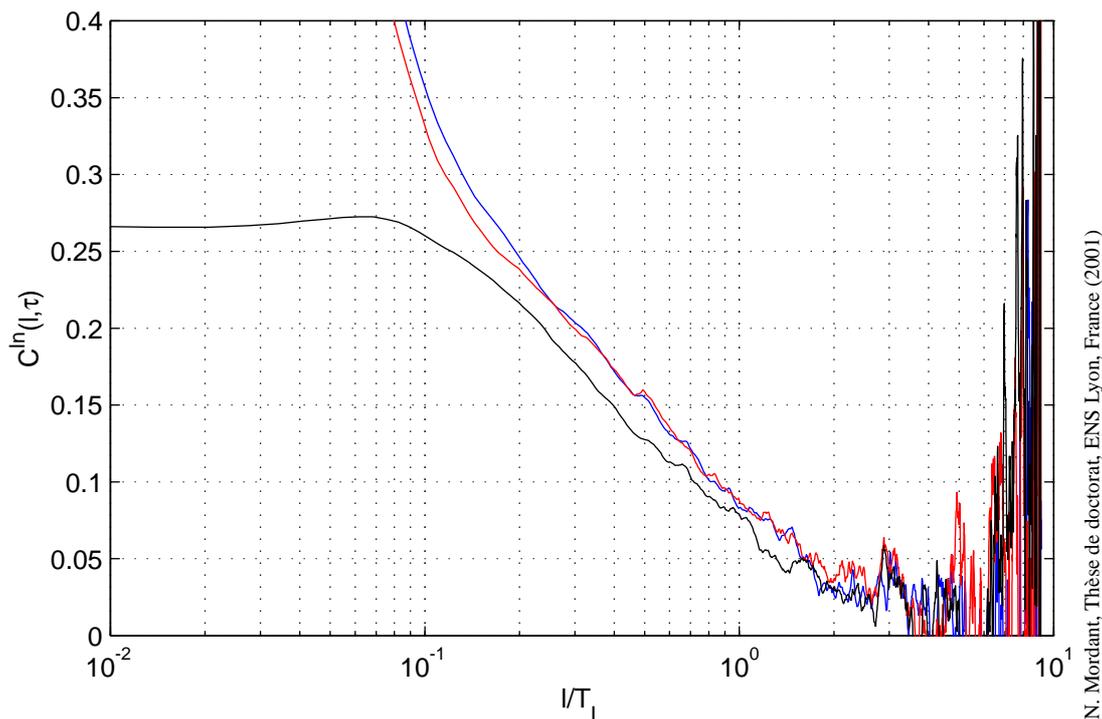


Fig. 8.20 – Corrélation de la valeur absolue du logarithme des composantes de l'incrément de vitesse  $\Delta_\tau \mathbf{v}$  pour  $\tau = 2.5$  ms. De haut en bas, autocorrélation de  $\Delta_\tau v_a$ , de  $\Delta_\tau v_b$  et corrélation croisée des deux composantes de l'incrément.

On peut effectuer des tests semblables à ceux opérés sur les composantes d'accélération mais en considérant cette fois-ci les incréments de vitesse. On a tracé sur la figure 8.20 la corrélation du logarithme des composantes de l'incrément de vitesse  $\Delta_\tau \mathbf{v}$  pour  $\tau = 2.5$  ms (c'est à dire  $T_L/10$ ). On voit que la corrélation croisée est du même ordre de grandeur que l'auto-corrélation pour les temps supérieurs à  $\tau$  et qu'elle décroît également de façon logarithmique.

On est amené à modéliser le terme stochastique de l'équation de Langevin par une marche aléatoire multifractale tridimensionnelle

$$d\xi = \varepsilon \exp \omega, \quad (8.48)$$

où  $\varepsilon$  est un vecteur normalisé dont les composantes sont des bruits blancs et  $\omega$  est un processus gaussien à corrélation logarithmique commun aux trois coordonnées. Cela rejoint la proposition de Pope qui tend à dire que l'information d'amplitude (en ce qui concerne les corrélations) est identique d'une coordonnée à l'autre mais que le signe est indépendant pour chacune des

directions de l'espace. Cela pose néanmoins des questions sur la forme à donner au terme de frottement. Borgas & Sawford [13] soulignent que l'utilisation d'un terme de dérive simple de la forme  $-\mathbf{v}/T_L$  conduit à une vitesse dont la PDF n'est pas gaussienne. Ils proposent dans leur modèle de choisir plutôt une forme  $-C_0\varepsilon(t)/2\sigma^2 \mathbf{v}$  où  $\varepsilon(t)$  est la série temporelle multifractale. On note que cette expression conduit également à

$$A(v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle v(t + \Delta t + \tau_c) - v(t + \tau_c) | v(t) = v \rangle}{\Delta t} = -\frac{C_0 \langle \varepsilon \rangle}{2\sigma^2}. \quad (8.49)$$

## Chapitre 9

### Considérations énergétiques

Il est intéressant d'étudier l'évolution temporelle de l'énergie cinétique de la particule. Cette énergie cinétique comprend deux parts : l'énergie cinétique de translation liée au carré de la vitesse et l'énergie cinétique de rotation liée au taux de rotation de la particule sur elle-même. L'énergie cinétique totale s'exprime pour une sphère solide de rayon  $r$  :

$$\mathcal{E}_c = \frac{2}{3}\pi\rho r^3 \mathbf{v}_p^2 + \frac{1}{5}\pi\rho r^5 \Omega_p^2 \quad (9.1)$$

où  $\Omega_p$  est le vecteur rotation de la particule. Si on suppose que la particule se comporte comme un traceur parfait alors sa vitesse égale celle du fluide et son vecteur rotation vaut la moitié de la vorticité. Dans le cadre de la turbulence homogène et isotrope, on a

$$\langle \omega^2 \rangle = 15 \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \quad (9.2)$$

où  $\langle \omega^2 \rangle$  est la variance du vecteur vorticité. Le rapport de l'énergie de rotation sur l'énergie de translation est donc  $3r^2/8\lambda^2$ . Dans nos expériences,  $\lambda$  vaut typiquement  $800 \mu\text{m}$  et  $r = 125 \mu\text{m}$ , ce qui conduit à un rapport de l'ordre de 1 %. On peut donc négliger l'énergie cinétique de rotation et considérer que l'énergie cinétique de translation de la particule solide représente l'énergie d'une particule de fluide pour les échelles de temps pour lesquelles la particule se comporte comme un traceur.

La variation de l'énergie cinétique d'une particule de fluide est due au travail des forces de pression et de viscosité le long de la trajectoire lagrangienne

$$\Delta_\tau v^2 = \int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_{\text{pression}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_{\text{viscosite}} \cdot \mathbf{v} \, ds \quad (9.3)$$

où  $\Delta_\tau v^2$  est l'incrément temporel du carré de la vitesse. Si on effectue une moyenne temporelle de cet incrément et sous l'hypothèse ergodique, on peut voir la moyenne de l'incrément comme la différence entre l'énergie injectée pendant le temps  $\tau$  et l'énergie dissipée pendant la même durée. La différence est nulle si on suppose l'écoulement stationnaire. On notera que les ordres de grandeur des forces de pression et de dissipation sont très différents [90] mais qu'en moyenne les travaux de ces deux forces s'annulent. On peut donc voir la force de pression comme une grandeur très fluctuante mais peu efficace en terme de transfert d'énergie aux particules de fluide. L'énergie dissipée est négative en moyenne et donc le travail de pression doit être positif en moyenne. Du fait de la différence d'ordre de grandeur entre le gradient de pression et le terme dissipatif, on peut donc s'attendre à une légère asymétrie de la distribution des incréments de l'énergie cinétique. Cette rupture de symétrie (que l'on n'observe pas sur le signal de vitesse) pourrait donc être la trace du sens de l'écoulement du temps et de la non-symétrie de l'équation de Navier-Stokes par retournement du temps.

On se propose donc d'étudier quelques propriétés statistiques du carré de la vitesse. Comme on ne dispose pas du vecteur vitesse entier, on considérera les incréments du carré d'une seule composante. On verra par la suite que les incréments ne sont pas corrélés d'une composante à l'autre (avec ou sans le signe) et donc on peut espérer que les comportements observés avec une seule composante correspondent à ceux du champ de vitesse complet.

## 9.1 Corrélations

### 9.1.1 Corrélations du carré de la vitesse

On présente sur la figure 9.1 les corrélations du carré des composantes de la vitesse pour l'expérience man290501 2D. La décroissance de l'autocorrélation est exponentielle avec un temps caractéristique 2.5 fois plus petit que  $T_L$ . Par contre, la corrélation croisée est très faible et l'on peut considérer que les carrés des composantes de vitesse sont décorrélés.

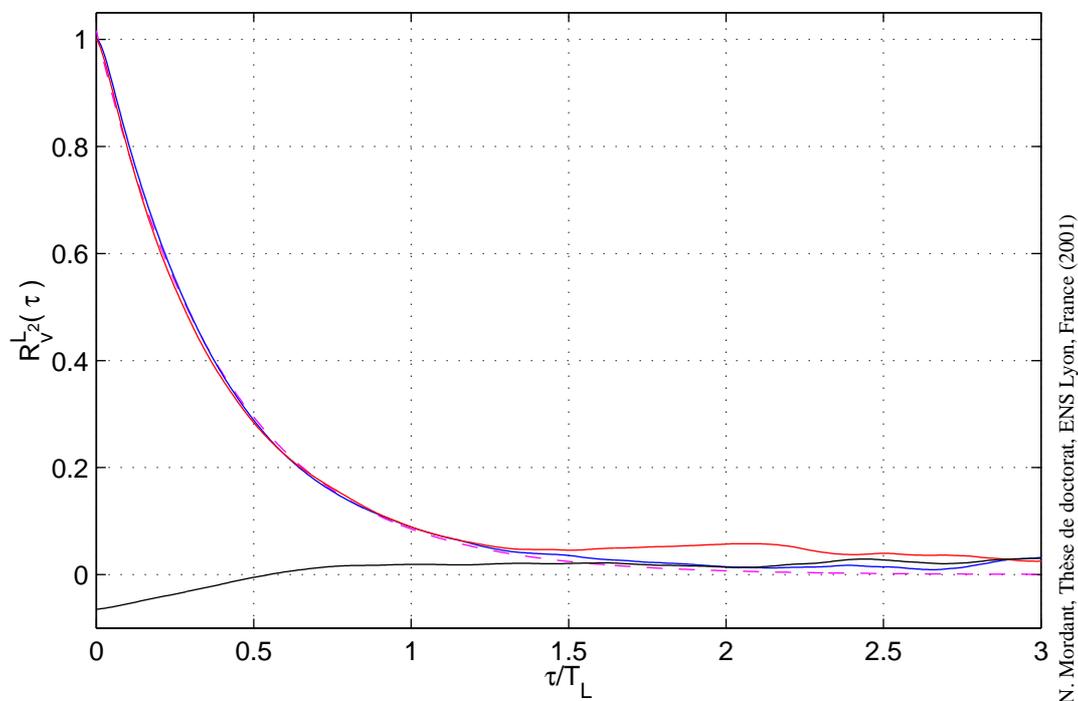


Fig. 9.1 – Corrélations des carrés des composantes  $v_a$  et  $v_b$ . La courbe du bas est la corrélation croisée des deux composantes. En tirets, on a tracé une décroissance exponentielle. Il s'agit de l'expérience man290501 2D.

### 9.1.2 Corrélations des incréments du carré de la vitesse

On a tracé sur la figure 9.2 la corrélation des incréments du carré des composantes de la vitesse. Du fait de la présence d'une grande échelle temporelle, l'autocorrélation chute en un temps voisin de  $\tau$  et devient légèrement négative. La corrélation croisée des incréments est nulle.

La figure 9.3 présente la corrélation des valeurs absolues des incréments des carrés des composantes de vitesse. On remarque que, de même que pour les incréments de vitesse, les valeurs absolues des incréments du carré de la vitesse se décorrélent en un temps beaucoup plus

long que celui de l'autocorrélation des incréments. Ce long temps de décorrélation est dans ce cas voisin de  $T_L$  et est donc plus grand que le temps de décorrélation du carré de la vitesse. On retrouve donc pour le carré de la vitesse un grand nombre de caractéristiques observées pour le signal de vitesse. Une différence réside dans le fait que les valeurs absolues des incréments des différentes composantes de vitesse sont décorrélées dans le cas du carré alors qu'elles étaient fortement corrélées pour le signal de vitesse.

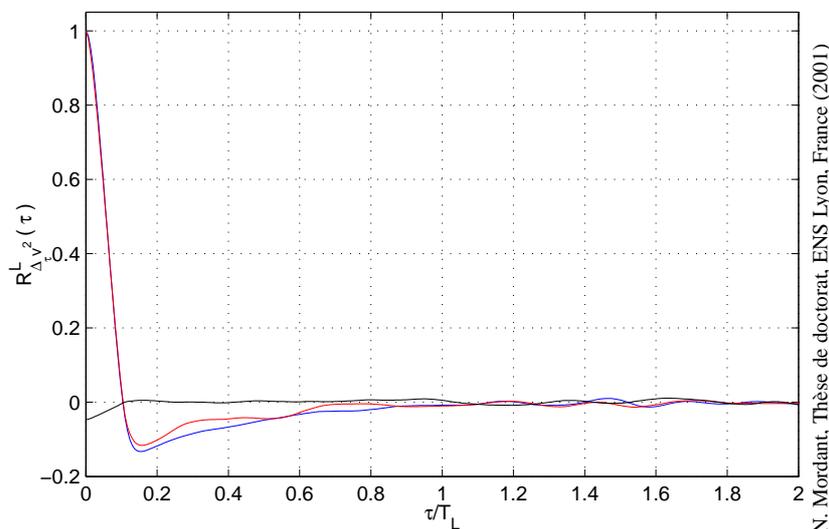


Fig. 9.2 – Corrélations des incréments du carré des composantes  $v_a$  et  $v_b$ . La corrélation croisée est la courbe demeurant au voisinage de zéro. Il s'agit de l'expérience man290501 2D pour  $\tau = 0.1T_L$ .

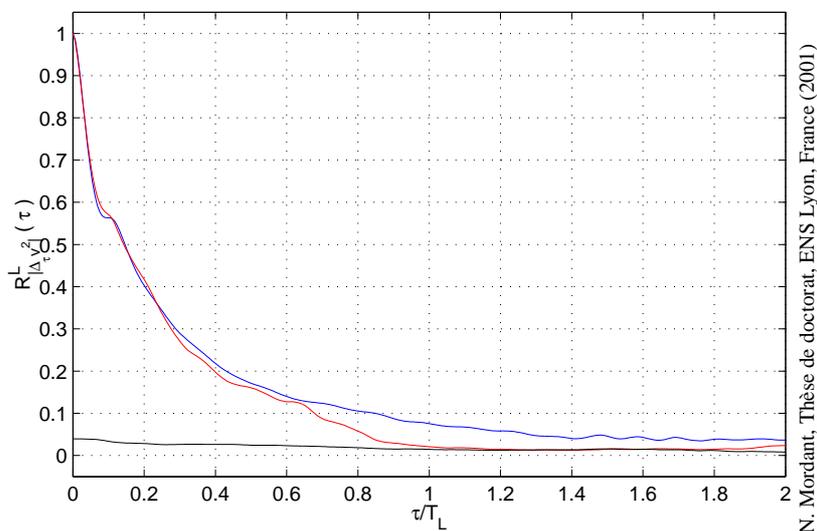


Fig. 9.3 – Corrélations des valeurs absolues des incréments du carré des composantes  $v_a$  et  $v_b$ . La corrélation croisée est la courbe demeurant au voisinage de zéro. Il s'agit de l'expérience man290501 2D pour  $\tau = 0.1T_L$ .

## 9.2 Intermittence du carré de la vitesse

### 9.2.1 La déformation des PDFs

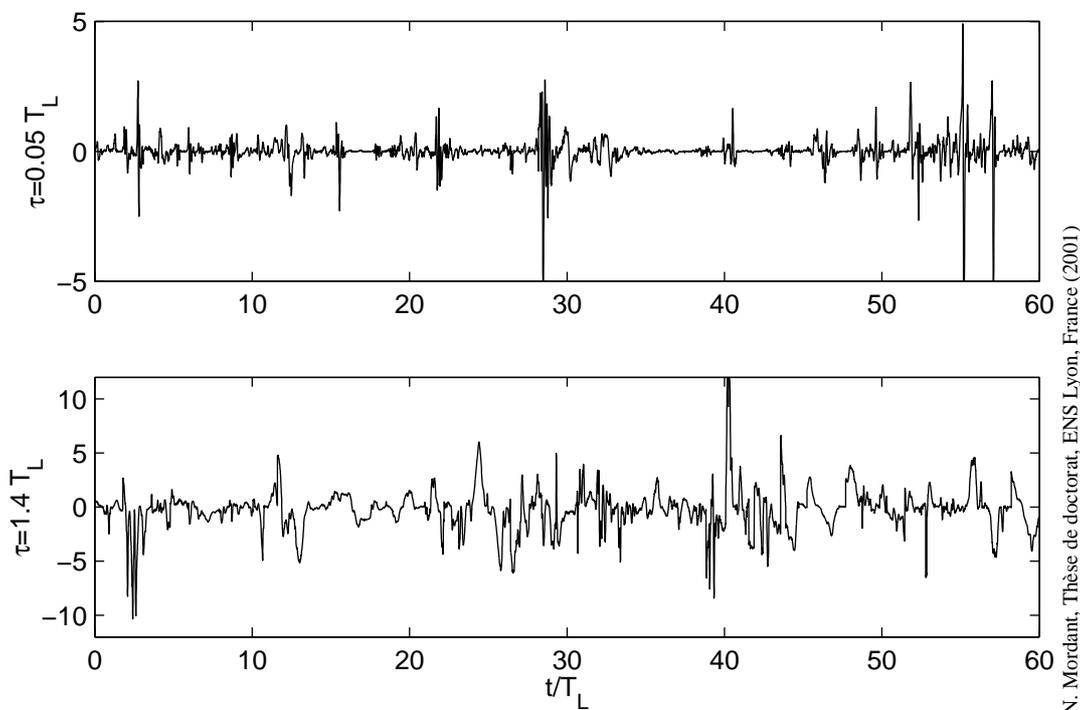
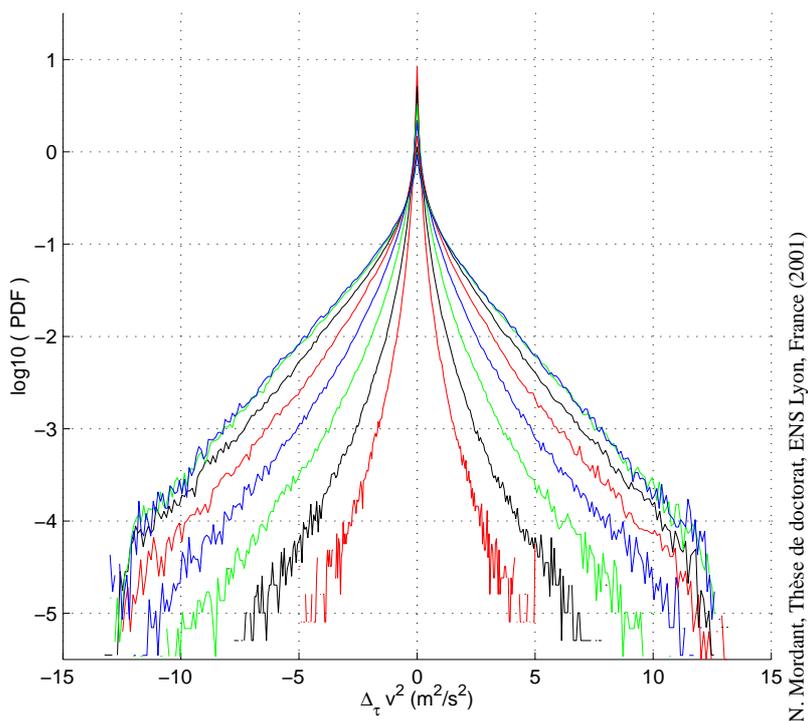


Fig. 9.4 – Exemple de signal d’incrément du carré de la vitesse. En haut  $\tau = 0.05 T_L$ , en bas  $\tau = 1.4 T_L$ .

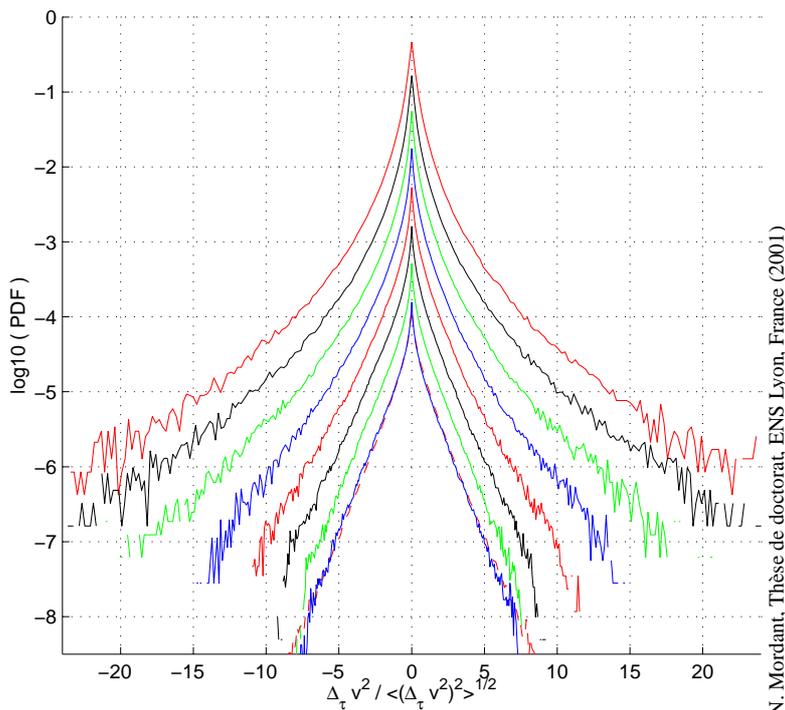
Pour visualiser l’intermittence du carré de la vitesse lagrangienne, on a tracé sur la figure 9.4 deux exemples de signal de  $\Delta_\tau v^2$  pour une valeur de  $\tau$  dans le régime inertiel et une valeur de  $\tau$  correspondant à une échelle supérieure à  $T_L$ . On voit que l’allure du signal change considérablement lorsque l’on varie la valeur de  $\tau$ . Dans le régime inertiel, le signal est très intermittent dans le sens où l’on observe des bouffées d’activité suivies de périodes plus calmes. L’évolution à travers les échelles des PDFs des incréments est présentée sur les figures 9.5 et 9.6). On observe que les ailes des PDFs sont très larges, même pour les échelles de temps les plus longues pour lesquelles les ailes sont exponentielles comme dans le cas d’un bruit blanc gaussien. Pour des échelles supérieures au temps de décorrélation, on observe des valeurs de flatness de l’ordre de 9. Aux plus petites échelles de temps, la valeur de la flatness est tellement élevée que l’estimation par le moment d’ordre 4 n’est plus possible avec le nombre de points disponibles (3.5 millions). La flatness prend des valeurs supérieures à 30 à l’échelle où la taille de la bille commence à se faire sentir et continue à croître fortement lorsqu’on explore des échelles encore plus faibles.

On observe une asymétrie des PDFs que l’on peut tenter de quantifier en utilisant la skewness. La figure 9.7 montre l’évolution de la skewness pour différentes composantes de vitesse pour l’expérience man290501 dans les conditions 1D ou 2D. On observe de très fortes fluctuations dues à la grande largeur des ailes des PDFs. On remarque également que la composante  $v_b$  présente une skewness anormalement négative comparativement aux autres. Néanmoins, il semble que l’on puisse considérer que la skewness est négative de l’ordre de -0.2 ou -0.3 dans le



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 9.5 – PDFs des incréments temporels du carré de la vitesse lagrangienne. Du centre vers l’extérieur  $\tau= 0.31, 0.61, 1.2, 2.5, 4.9, 9.8, 20$  et  $39$  ms



N. Mordant, Thèse de doctorat, ENS Lyon, France (2001)

Fig. 9.6 – PDFs normalisés des incréments temporels du carré de la vitesse lagrangienne. Pour la clarté de l’image, les courbes ont été décalées. De haut en bas :  $\tau= 0.31, 0.61, 1.2, 2.5, 4.9, 9.8, 20$  et  $39$  ms. En bas, on a superposé en pointillés le cas d’un bruit blanc gaussien sur la courbe correspondant au plus grand écart temporel

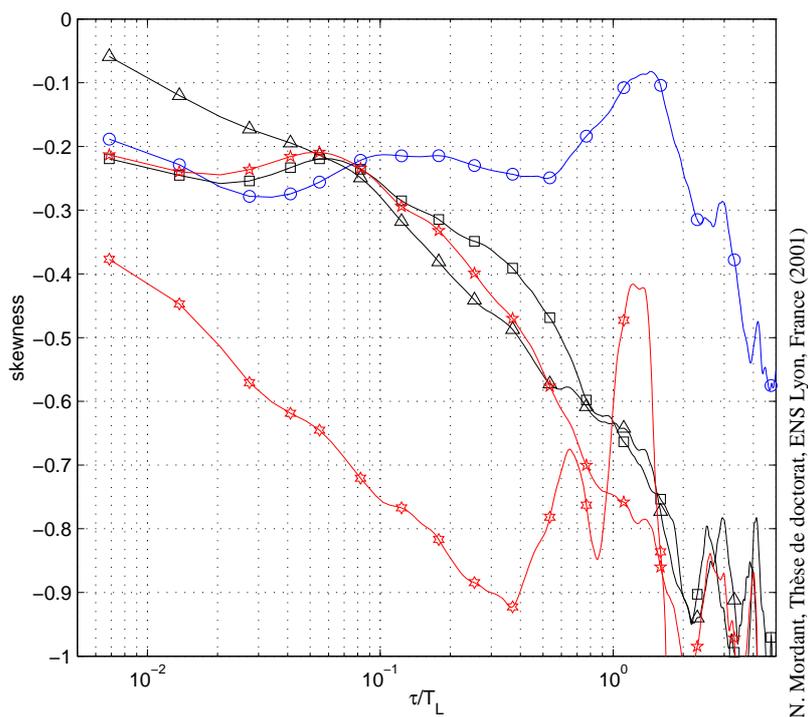


Fig. 9.7 – Skewness des incréments temporels du carré de la vitesse lagrangienne. Les cercles marquent la composante  $v_1$  de la mesure 1D. Les triangles et les carrés marquent les composantes  $v_1$  et  $v_2$  de la mesure 2D et les étoiles marquent les composantes  $v_a$  et  $v_b$ .

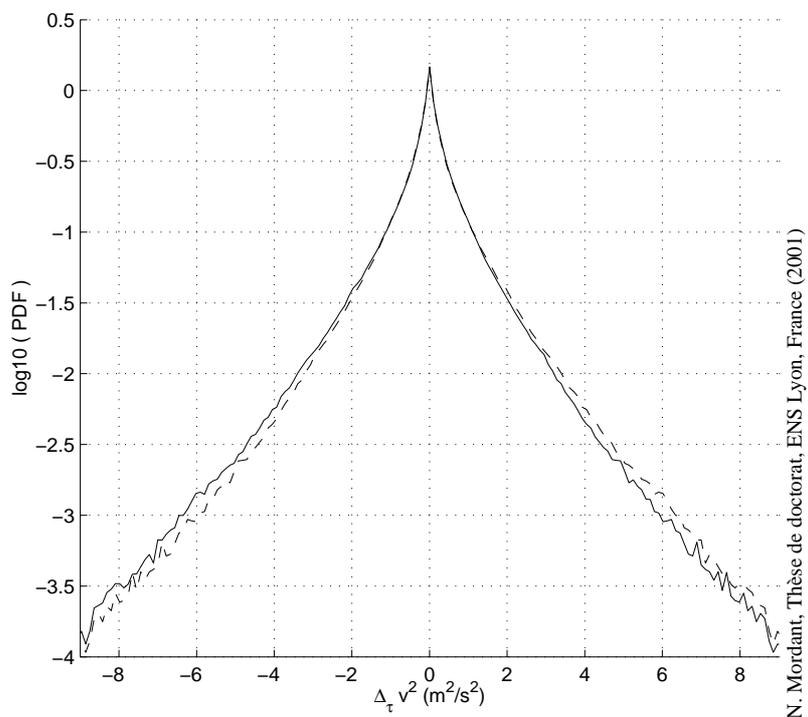


Fig. 9.8 – PDF de l'incrément du carré de vitesse pour  $\tau = 5$  ms soit  $\tau = 0.2T_L$ . On a tracé en pointillé le symétrique  $\Delta_\tau v^2 \rightarrow -\Delta_\tau v^2$ .

régime inertiel. Cette valeur est relativement faible mais du même ordre de grandeur que ce qui est mesuré sur les fonctions de structure d'ordre 3 de la vitesse en eulérien. On peut visualiser cette asymétrie sur la figure 9.8.

### 9.2.2 Fonctions de structure

On peut définir des fonctions de structure pour le carré de la vitesse de la même façon que pour la vitesse. L'incrément  $\Delta_\tau v^2$  est l'intégrale de la dérivée de  $v^2$  pendant un temps  $\tau$ . Cette dérivée caractérise la puissance des forces appliquées sur la particule (de fluide dans le cas idéal) par l'écoulement. Cette grandeur peut être positive si l'écoulement fournit de l'énergie à la particule ou négative si la particule fournit du travail à l'écoulement. Cette approche est très différente de l'utilisation de la dissipation dans le contexte eulérien. La dissipation est alors une quantité positive.

La fonction de structure d'ordre 2 a une forme exponentielle (comme la fonction d'auto-corrélation). On n'observe donc pas de comportement en loi de puissance dans le régime inertiel. Nous sommes donc réduits une fois de plus à utiliser l'outil de l'autosimilarité étendue. Dans le cas de la vitesse, on avait choisi la fonction de structure d'ordre 2 comme référence par un argument dimensionnel. Dans le cas du carré de la vitesse, le même argument dimensionnel conduit à prendre la fonction de structure d'ordre 1 comme référence. La figure 9.9 montre les fonctions de structures de  $v^2$  tracées en fonction de la fonction de structure d'ordre 1. On observe des lois de puissance sauf pour les plus petites échelles de temps pour lesquelles la régularisation due à la taille de la bille conduit à un comportement trivial. Les exposants sont présentés dans la table 9.1. Si on les normalise par l'exposant d'ordre 2, on observe que la courbure des exposants est encore plus élevée que pour le signal de vitesse.

$\xi_1$	1		0.58
$\xi_2$	1.71	$\pm 0.02$	1
$\xi_3$	2.18	$\pm 0.04$	1.27
$\xi_4$	2.48	$\pm 0.08$	1.45
$\xi_5$	2.68	$\pm 0.15$	1.57
$\xi_6$	2.83	$\pm 0.25$	1.65

Tab. 9.1 – Valeurs des exposants  $\xi_p$  pour l'expérience. Les incertitudes sont estimées en mesurant les variations de la pente locale. La dernière colonne donne les exposants normalisés par l'exposant d'ordre 2.

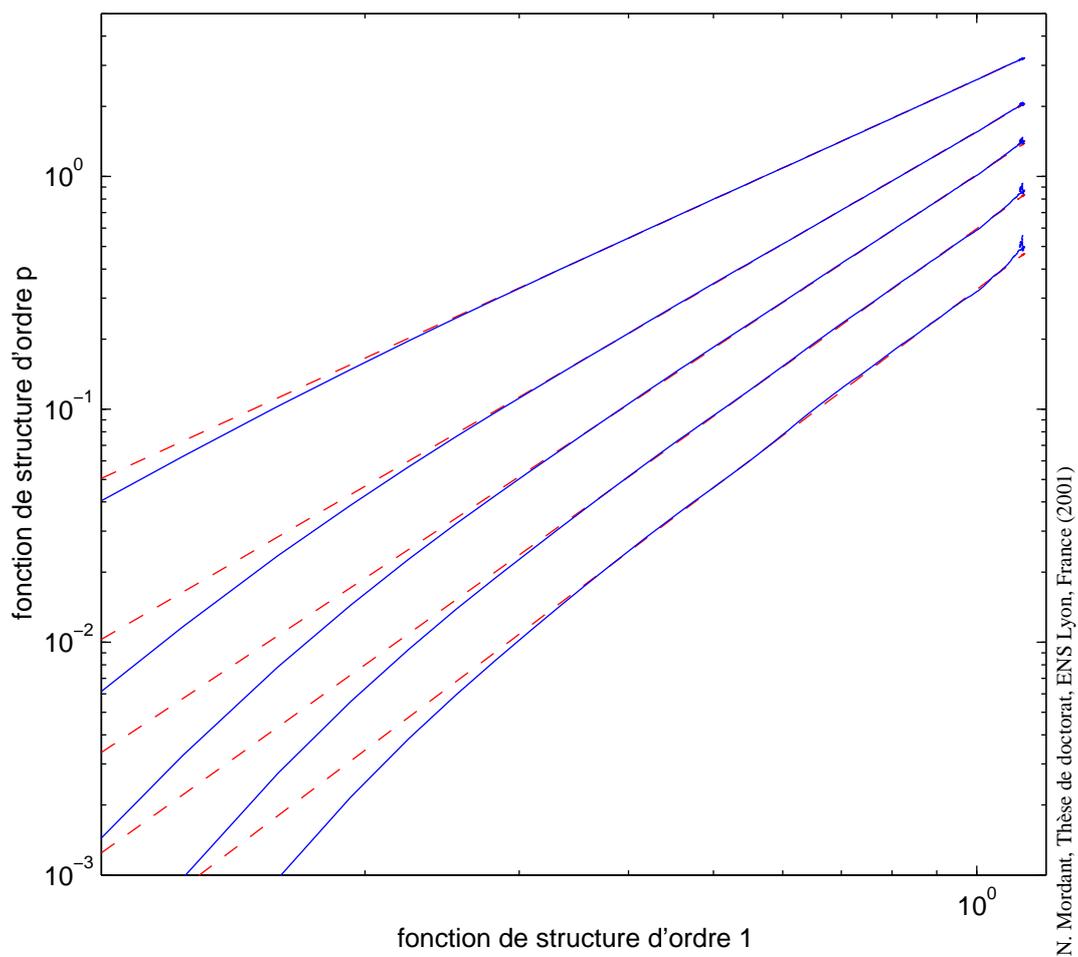


Fig. 9.9 – Fonctions de structures du carré de la vitesse en fonction de la fonction de structure d'ordre 1. On a tracé en pointillés les ajustements par des lois de puissance dont les exposants sont fournis dans la table 9.1.

## 9.3 Cumulants

On a tracé sur la figure 9.10 l'évolution des cumulants du carré de la vitesse lagrangienne. L'estimation des cumulants  $C_2$  et  $C_3$  est assez bruitée mais on observe que le cumulant d'ordre 3 évolue fortement dans les échelles, passant de -2.5 à -3.7 environ aux plus grandes échelles, montrant ainsi la non-lognormalité du carré de la vitesse. Lorsque l'on trace les cumulants  $C_2$  et  $C_3$  en fonction de  $C_1$ , on relève un comportement linéaire (dans la mesure où la qualité de l'estimation le permet), justifiant l'approche de type ESS.

On observe donc que le signal du carré de la vitesse est extrêmement intermittent. Les échanges d'énergie entre une particule de fluide et le reste de l'écoulement ont donc une structure très complexe. On a mesuré une légère asymétrie de la distribution des incréments du carré de la vitesse. L'origine de cette rupture de symétrie n'est pas encore précisée. Pour le signal de vitesse, on a mesuré une skewness dont le signe change lorsque l'on change de configuration expérimentale. Elle est donc liée à une non-homogénéité de l'écoulement. Pour le carré de la vitesse, la skewness varie avec la configuration expérimentale mais reste de même signe et du même ordre de grandeur. On peut donc soupçonner que cette non-symétrie puisse être caractéristique de la turbulence homogène et isotrope. Elle pourrait alors refléter la non-invariance pas symétrie temporelle de l'équation de Navier-Stokes.

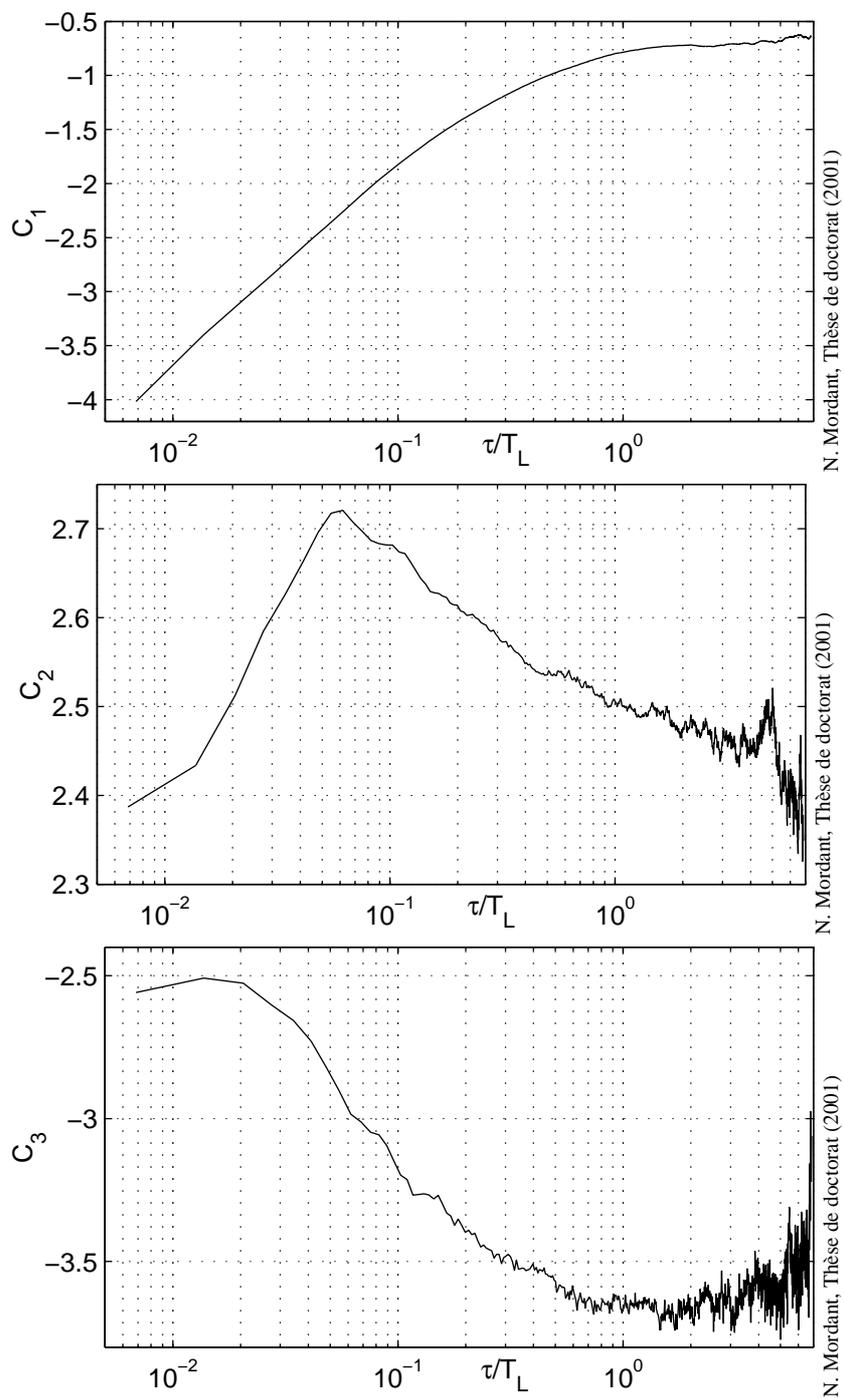


Fig. 9.10 – Cumulants du logarithme de la valeur absolue des incréments du carré de la vitesse pour l'expérience man290501. De haut en bas,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .

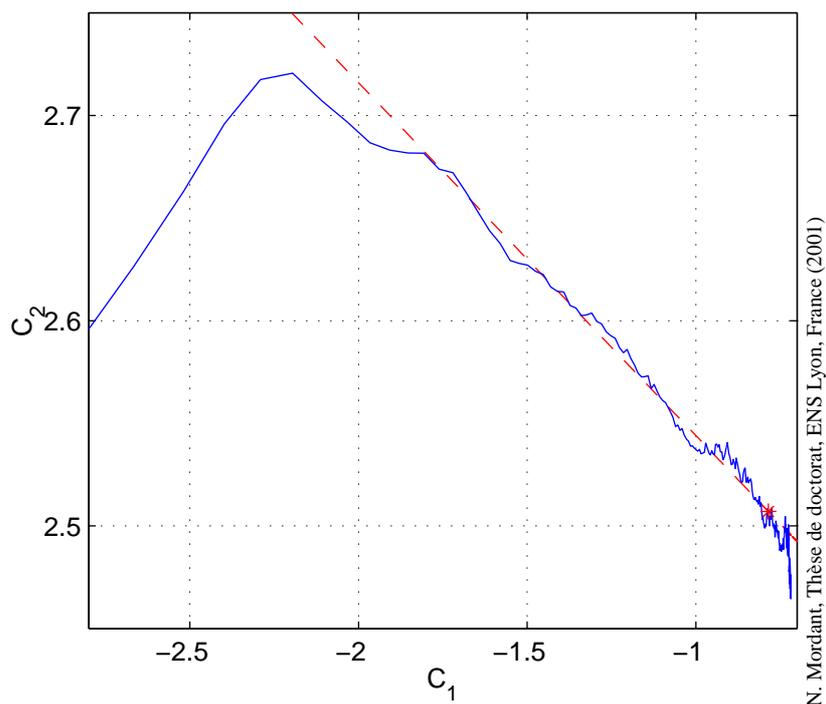


Fig. 9.11 – Cumulants du logarithme de la valeur absolue des incréments du carré de la vitesse pour l'expérience man290501. On a tracé le cumulants d'ordre 2 en fonction du cumulants d'ordre 1. La droite en tirets est un ajustement linéaire. L'étoile indique le point correspondant à  $\tau = T_L$ .

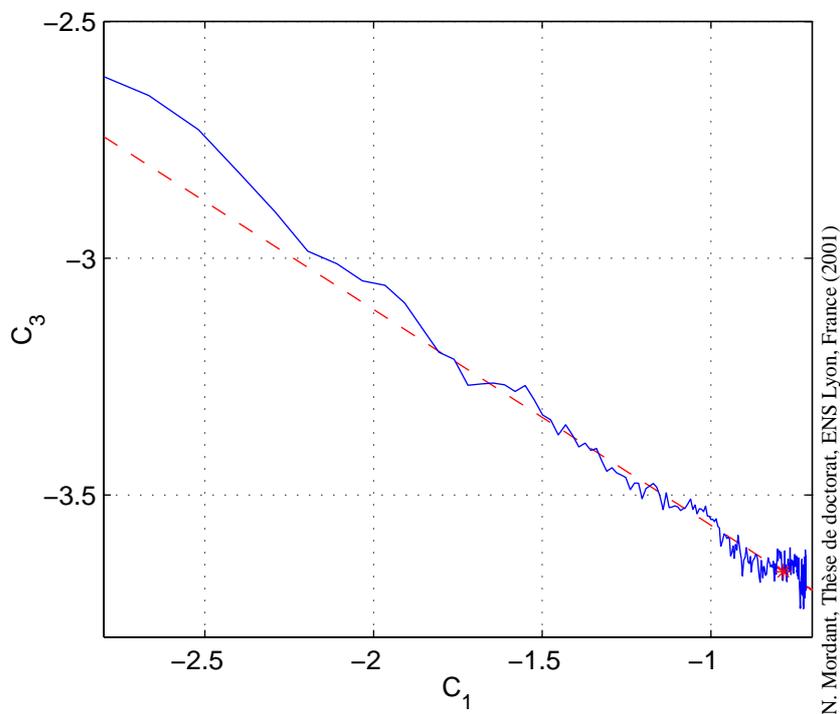


Fig. 9.12 – Cumulants du logarithme de la valeur absolue des incréments du carré de la vitesse pour l'expérience man290501. On a tracé le cumulants d'ordre 3 en fonction du cumulants d'ordre 1. La droite en tirets est un ajustement linéaire. L'étoile indique le point correspondant à  $\tau = T_L$ .



# Conclusions

Une grande et parfois fastidieuse part de ce travail de thèse a consisté à mettre au point un nouvel outil de mesure permettant d'avoir accès à la vitesse lagrangienne dans des échelles de temps comprenant le régime inertiel et les grandes échelles jusqu'à quelques fois le temps de décorrélation de la vitesse. L'énoncé de ce but a constitué les premières minutes de ces trois années, la réalisation a nécessité deux ans et demi. L'obtention des mesures et leur analyse a eu lieu au cours des six derniers mois de travail.

Le principe de la mesure est l'effet Doppler ultrasonore dont l'avantage déterminant est de fournir "directement" la vitesse sans étape de dérivation de la position. De plus, on a facilement accès à une vaste zone de mesure dans laquelle la particule demeure un temps suffisamment long pour observer la décorrélation de la vitesse.

Ce principe de mesure a été appliqué à la chute de billes pesantes dans un fluide au repos, permettant à la fois de tester la qualité de la mesure et la dynamique d'une particule solide en mouvement dans un fluide. On a ainsi mis en évidence l'existence d'un temps caractéristique dans cette dynamique.

La mise au point de l'outil de mesure comprend la réalisation d'un circuit électronique permettant la mise en forme du signal avant l'acquisition numérique. Le signal acoustique diffusé par la particule est reçu par 9 récepteurs. Le signal capté par chacun des transducteurs est hétérodyné dans une bande de fréquence distincte puis sommé avec les autres voies permettant l'acquisition par un seul échantillonneur. Avec deux dispositifs d'acquisition, on obtient deux composantes de vitesse. On a ainsi accès à une mesure de vitesse avec une dynamique spectrale de 50 dB.

L'extraction de l'information de vitesse du signal acoustique est effectuée par un algorithme original basé sur le principe de maximisation de vraisemblance. Il permet de caractériser des composantes spectrales non-stationnaires par leur amplitude et leur fréquence ainsi que la variance d'estimation de ces paramètres.

L'analyse des signaux lagrangiens a mis en évidence la gaussianité du signal de vitesse et sa décorrélation exponentielle. Le spectre lagrangien est donc de forme lorentzienne vérifiant ainsi la prédiction K41 d'un spectre en  $\omega^{-2}$ . La particule se comporte comme un traceur lagrangien sur une gamme d'échelles de temps comportant au moins une décade dans le régime inertiel. Les plus hautes fréquences sont filtrées par la taille de la bille, tronquant ainsi la fin du régime inertiel. L'étude de l'accélération de la bille comparée aux mesures de La Porta et al. porte à croire que ce régime se prolonge jusqu'à des échelles inférieures au temps de Kolmogorov. On ne s'attend pas à observer l'influence d'une "échelle de temps de Taylor" intermédiaire entre  $T_L$  et  $\tau_\eta$ . On notera que du point de vue expérimental, il est nécessaire d'effectuer un certain nombre de corrections pour prendre en compte une légère inhomogénéité du champ de vitesse. L'écoulement de Von Kármán, malgré ses avantages dont la facilité d'obtention de hauts nombres de Reynolds, n'est peut-être pas le meilleur candidat pour un écoulement homogène et isotrope.

L'analyse du signal de vitesse a mis en évidence une intense intermittence. Le modèle

eulérien usuel basé sur l'intermittence de la dissipation prédit des valeurs des exposants lagrangiens qui sont "plus intermittents" que les exposants eulériens mais pas suffisamment pour reproduire les mesures. L'intermittence a été reliée à une forte corrélation des valeurs absolues des incréments de vitesse sur des temps supérieurs au temps caractéristique lagrangien. Ce lien entre intermittence et corrélations à longue portée a été inspiré par un modèle de marche aléatoire multifractale. Cette observation soulève la question de la nature de ces corrélations longues. La distribution de l'accélération dont la PDF présente des ailes très larges est conforme aux observations de la distribution des gradients de pression qui sont le moteur du mouvement des particules de fluide. L'existence de telles corrélations doit également être liée à la structure du champ de pression mais leur origine n'a pas encore été précisée. Un certain nombre de modèles de dispersion traitent la turbulence par une équation de Langevin pour la vitesse. Ce type d'équation ne permet pas de reproduire l'intermittence observée. On peut tenter de généraliser ces modèles en introduisant un bruit stochastique de structure plus complexe contenant en particulier ces corrélations à longue portée. Mais cette extension du modèle nécessite également de modifier le terme déterministe sous une forme encore inconnue.

Les mesures à deux composantes permettent de préciser la structure tridimensionnelle du champ de vitesse. Les composantes de vitesse ne sont pas corrélées d'un axe à l'autre. Si les incréments ne le sont pas lorsque l'on conserve leur signe, les valeurs absolues des incréments sont fortement corrélées entre composantes. Cela conduit à décrire l'accélération des particules de fluide sous la forme

$$\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{e}(t)$$

où  $a(t)$  est l'amplitude qui est donc corrélée temporellement sur des temps très longs. Le vecteur unitaire  $\mathbf{e}(t)$  contient toute l'information de direction et présente une corrélation temporelle très courte.

Se pose également la question des échanges d'énergie entre la particule de fluide considérée et le reste du fluide. L'échange d'énergie cinétique de translation correspond à la dérivée temporelle du carré de la vitesse. Ce signal est également hautement intermittent. Il peut se séparer en deux parties : un terme provenant de la pression et un terme d'origine visqueuse. Si ces deux termes s'équilibrent en moyenne, ils sont de nature très différente. L'observation du carré de la vitesse met-elle en évidence une rupture de symétrie liée au sens du mouvement ? On a relevé une valeur négative de la skewness des incréments du carré de la vitesse. Cette valeur correspond-elle à cette rupture de symétrie ou bien n'est-elle due qu'à la légère non-homogénéité de l'écoulement ?

Cette étude expérimentale permet donc de préciser la structure spatiale et temporelle du champ de vitesse lagrangienne. On a ainsi observé de fortes corrélations temporelles ou entre composantes dont l'origine demeure mystérieuse. Un éclaircissement pourra certainement provenir d'une étude de l'équation de Navier-Stokes dans le système de coordonnées lagrangiennes.

La méthode de mesure peut être étendue pour mesurer simultanément la vitesse de deux particules. Néanmoins, cela nécessite d'augmenter le nombre de capteurs (typiquement le doubler) pour pouvoir, d'une part, mieux résoudre les composantes spectrales et ainsi mieux séparer les deux particules et d'autre part, de mesurer leur position avec une précision raisonnable. En effet, la mesure de la vitesse relative de deux particules est particulièrement fructueuse si l'on connaît également leur position relative. Il faudra également adapter les algorithmes d'analyse spectrale pour permettre d'affecter à chacune des particules la composante spectrale qui lui correspond.

Cela sera encore plus aisé si l'on dispose de trois voies de réception. On peut imaginer d'augmenter drastiquement le nombre de transducteurs et de paver une part importante de l'intérieur de la cuve. Une modélisation adéquate du signal reçu par la matrice de transducteurs permettrait de mesurer le champ de vitesse 3D et la position avec une bonne précision. On pourrait ainsi envisager la mesure simultanée de la position et la vitesse d'un plus grand nombre de particules. Pumir et al. sont particulièrement attachés à l'étude simultanée du mouvement de quatre particules.



# Bibliographie

- [1] A. ARNEODO, E. BACRY et J. MUZY. “Random cascade on wavelet dyadic trees.” *J. Math. Phys.*, **39**(8), pp. 4142–4164 (1998).
- [2] F. AUGER et P. FLANDRIN. “Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method.” *IEEE Trans. on Signal Processing*, **43**, pp. 1068–1089 (1995).
- [3] T. R. AUTON. “The lift force on a spherical body in rotationnal flow.” *J. Fluid Mech.*, **183**, pp. 199–218 (1987).
- [4] T. R. AUTON, J. C. R. HUNT et M. PRUD’HOMME. “The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow.” *J. Fluid Mech.*, **197**, pp. 241–257 (1988).
- [5] E. BACRY, J. DELOUR et J.-F. MUZY. “Multifractal random walk.” *Phys. Rev. E*, **64**, p. 026103 (2001).
- [6] G. K. BATCHELOR. “Diffusion in a field of homogeneous turbulence. II the relative motion of particles.” *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**, pp. 345–363 (1952).
- [7] F. BELIN, J. MAURER, P. TABELING et H. WILLAIME. “Velocity gradient distributions in fully developed turbulence : an experimental study.” *Phys. Fluids*, **9**(12), pp. 3843–3850 (1997).
- [8] R. BENZI, S. CILIBERTO, C. BAUDET et G. R. CHAVARRIA. “On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence.” *Physica D*, **80**, pp. 385–398 (1995).
- [9] R. BENZI, S. CILIBERTO, C. BAUDET, G. R. CHAVARRIA et R. TRIPICCIONE. “Extended self-similarity in the dissipation range of fully developed turbulence.” *Europhys. Lett.*, **24**(4), pp. 275–279 (1993).
- [10] R. BENZI, S. CILIBERTO, R. TRIPICCIONE, C. BAUDET, F. MASSAIOLI et S. SUCCI. “Extended self-similarity in turbulent flows.” *Phys. Rev. E.*, **48**(1), pp. R29–R32 (1993).
- [11] M. S. BORGAS. “The multifractal lagrangian nature of turbulence.” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **342**, pp. 379–411 (1993).
- [12] M. S. BORGAS et B. L. SAWFORD. “A family of stochastic models for two-particle dispersion in isotropic homogeneous stationary turbulence.” *J. Fluid Mech.*, **279**, pp. 69–99 (1994).
- [13] M. S. BORGAS et B. L. SAWFORD. “Stochastic equations with multifractal random increments for modeling turbulent dispersion.” *Phys. Fluids*, **6**(2), pp. 618–633 (1994).
- [14] O. CADOT, S. DOUADY et Y. COUDER. “Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow.” *Phys. Fluids*, **7**(3), pp. 630–646 (1995).
- [15] P. CHAINAIS. *Cascades infiniment divisibles et analyse multirésolution. Application à l’étude des intermittences en turbulence*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon (2001).

- [16] E. J. CHANG et M. R. MAXEY. “Unsteady flow about a sphere at low to moderate Reynolds number. part 2. accelerated motion.” *J. Fluid Mech.*, **303**, pp. 133–153 (1995).
- [17] M. CHERTKOV, A. PUMIR et B. I. SHRAIMAN. “Lagrangian tetrad dynamics and the phenomenology of turbulence.” *Phys. Fluids*, **11**(8), pp. 2394–2410 (1999).
- [18] P. CHERUKAT et J. B. MCCLAUGHLIN. “The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall.” *J. Fluid Mech.*, **263**, pp. 1–18 (1994).
- [19] H. CLERGEOT et S. TRESSENS. “Comparaison of two efficient algorithms for HR source tracking : time recursive implementation.” Dans “ICASSP’90, Albuquerque, USA,” 1990.
- [20] D. S. DANDY et H. A. DWYER. “A sphere in shear flow at finite Reynolds number : effect of shear on particle lift, drag and heat transfert.” *J. Fluid Mech.*, **216**, pp. 381–410 (1990).
- [21] J. DELOUR. *Processus aleatoires auto-similaires : applications en turbulence et finance*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I (2001).
- [22] B. DERNONCOURT, J.-F. PINTON et S. FAUVE. “Experimental study of vorticity filaments in a turbulent swirling flow.” *Physica D*, **117**, pp. 181–190 (1998).
- [23] S. DOUADY, Y. COUDER et M.-E. BRACHET. “Direct observation of intense vorticity filaments in turbulence.” *Phys. Rev. Lett.*, **67**(8), pp. 983–986 (1991).
- [24] G. FALKOVICH, K. GAWEDZKI et M. VERGASSOLA. “Particles and fields in fluid turbulence.” *Rev. Mod. Phys.*, **73**(4) (2001).
- [25] S. FAUVE, C. LAROCHE et B. CASTAING. “Pressure fluctuations in swirling turbulent flows.” *J. Phys. II*, **3**(3), pp. 271–278 (1993).
- [26] P. FLANDRIN. *Time-Frequency / Time Scale analysis*, tome 10 de *Wavelet analysis and its application*. Academic Press, 1998.
- [27] U. FRISCH. *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [28] C. W. GARDINER. *Handbook of stochastic methods*. Springer, 1997.
- [29] G. GAUNARD et H. UBERALL. “RST analysis of monostatic and bistatic acoustic echoes from an elastic sphere.” *J. Acous. Soc. Am.*, **73**(1), pp. 1–12 (1983).
- [30] P. GONDRET, E. HALLOUIN, M. LANCE et L. PETIT. “Experiments on the motion of a sphere toward a wall : from viscous dissipation to elastohydrodynamic bouncing.” *Phys. Fluids*, **11**, pp. 2803–2805 (1999).
- [31] T. GOTOH, R. S. RO GALLO, J. R. HERRING et R. H. KRAICHNAN. “Lagrangian velocity correlations in homogeneous isotropic turbulence.” *Phys. Fluids A*, **5**(11), pp. 2846–2864 (1993).
- [32] D. E. GRAY (éd.). *American institute of Physics Handbook*. McGraw-Hill Book Company, 1972, 3<sup>e</sup> édition.
- [33] S. R. HANNA. “Lagrangian and eulerian time-scale relations in the daytime boundary layer.” *J. App. Meteor.*, **20**, pp. 242–249 (1981).
- [34] B. T. HEFNER et P. L. MARSTON. “Backscattering enhancements associated with subsonic Rayleigh waves on polymer spheres in water : observation and modeling for acrylic spheres.” *J. Acoust. Soc. Am.*, **107**(4), pp. 1930–1936 (2000).
- [35] B. M. O. HEPPE. “Generalized langevin equation for relative turbulent dispersion.” *J. Fluid Mech.*, **357**, pp. 167–198 (1998).

- [36] R. HERNANDEZ-PELLICER. *Comportements dynamiques et contrôle de la vorticité dans les sillages*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon (1999).
- [37] M.-C. JULLIEN, J. PARET et P. TABELING. “Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence.” *Phys. Rev. Lett.*, **82**(14), pp. 2872–2875 (1999).
- [38] H. KAHALERRAS, Y. MALÉCOT, Y. GAGNE et B. CASTAING. “Intermittency and Reynolds number.” *Phys. Fluids*, **10**(4), pp. 910–921 (1998).
- [39] U. KARNIK et S. TAVOULARIS. “Lagrangian correlations and scales in uniformly sheared turbulence.” *Phys. Fluids A*, **2**(4), pp. 587–591 (1990).
- [40] S. KAY. *Modern Spectral Estimation, Theory and Application*. Prentice Hall Signal Processing Series. A. V. Oppenheim Ed., Prentice Hall, 1988.
- [41] I. KIM, S. ELGHOBASHI et W. A. SIRIGNANO. “On the equation for spherical-particle motion : effect of Reynolds and acceleration numbers.” *J. Fluid Mech.*, **367**, pp. 221–253 (1998).
- [42] KUNT. *Traitement numérique des signaux*. Dunod, 1998.
- [43] C. J. LAWRENCE et R. MEI. “Long-time behaviour of the drag on a body in impulsive motion.” *J. Fluid Mech.*, **283**, pp. 307–327 (1995).
- [44] D. LEGENDRE et L. MAGNAUDET. “A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow.” *Phys. Fluid*, **9**, pp. 3572–3574 (1997).
- [45] R.-C. LIEN, E. A. D’ASARO et G. T. DAIRIKI. “Lagrangian frequency spectra of vertical velocity and vorticity in high-Reynolds-number oceanic turbulence.” *J. Fluid Mech.*, **362**, pp. 177–198 (1998).
- [46] P. M. LOVALENTI et J. F. BRADY. “The hydrodynamic force on a rigid particle undergoing arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number.” *J. Fluid Mech.*, **256**, pp. 561–605 (1993).
- [47] P. M. LOVALENTI et J. F. BRADY. “The temporal behaviour of the hydrodynamic force on a body in response to an abrupt change in velocity at small but finite Reynolds number.” *J. Fluid Mech.*, **293**, pp. 35–46 (1995).
- [48] F. LUND et C. ROJAS. “Ultrasound as a probe of vorticity.” *Physica D*, **37**, pp. 508–514 (1987).
- [49] M. R. MAXEY et J. J. RILEY. “Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow.” *Phys. Fluids*, **26**, pp. 883–889 (1983).
- [50] R. MEI et R. J. ADRIAN. “Flow past a sphere with an oscillation in the free stream velocity and unsteady drag at finite Reynolds numbers.” *J. Fluid Mech.*, **237**, pp. 323–341 (1992).
- [51] O. MICHEL. *Application des méthodes haute résolution à la localisation et la poursuite de sources sonores*. Thèse de doctorat, Universit  Paris XI, Orsay (1991).
- [52] O. MICHEL et H. CLERGEOT. “Multiple source tracking using a high resolution method.” Dans “ICASSP’91, Toronto, Canada,” pp. 1277–1280. 1991.
- [53] W. R. MICKELSEN. “An experimental comparison of the Lagrangian and Eulerian correlation coefficients in homogeneous isotropic turbulence.” *N.A.C.A. Tech. Note 3570* (1955).
- [54] L. M. MILLNE-THOMSON. *Theoretical hydrodynamics*. MacMillan Education London, 1968.

- [55] J.-P. MINIER et J. POZORSKI. “Derivation of a PDF model for turbulent flows based on principles from statistical physics.” *Phys. Fluids*, **9**(6), pp. 1748–1753 (1997).
- [56] A. S. MONIN et A. M. YAGLOM. *Statistical fluid dynamics : Mechanics of turbulence*. MIT Press, 1987.
- [57] N. MORDANT, P. METZ, O. MICHEL et J.-F. PINTON. “Measurement of lagrangian velocity in fully developed turbulence.” *to be published by Phys. Rev. Lett.* (2001).
- [58] N. MORDANT et J.-F. PINTON. “Velocity measurement of a settling sphere.” *Eur. Phys. J. B*, **18**, pp. 343–352 (2000).
- [59] N. MORDANT, J.-F. PINTON et F. CHILLÀ. “Characterization of turbulence in a closed flow.” *J. Phys. II*, **7**, pp. 1729–1742 (1997).
- [60] N. MORDANT, J.-F. PINTON et O. MICHEL. “Time resolved tracking of a sound scatterer in a complex flow : non-stationary signal analysis and applications.” *J. Acoust. Soc. Am.* (submitted).
- [61] J.-F. MUZY, J. DELOUR et E. BACRY. “Modelling fluctuation of financial time series : from cascade process to stochastic volatility model.” *Eur. Phys. J. B*, **17**, pp. 537–548 (2000).
- [62] R. NATARAJAN et A. ACRIVOS. “The instability of the steady flow past spheres and disks.” *J. Fluid Mech.*, **254**, pp. 323–344 (1993).
- [63] S. OTT et J. MANN. “An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow.” *J. Fluid Mech.*, **422**, pp. 207–223 (2000).
- [64] A. OUAMRI. *Etude des performances des méthodes d’identification à haute résolution et application à l’identification des échos par une antenne linéaire multicapteurs*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Orsay (1986).
- [65] D. B. PERCIVAL et A. T. WALDEN. *Spectral analysis for physical applications*. Cambridge University Press, 1992.
- [66] S. B. POPE. “Lagrangian microscales in turbulence.” *Phil. trans. R. Soc. Lond. A*, **333**, pp. 309–319 (1990).
- [67] S. B. POPE et Y. L. CHEN. “The velocity-dissipation probability density function model for turbulent flows.” *Phys. Fluids*, **2**(8), pp. 1437–1449 (1990).
- [68] S. P. POPE. “Lagrangian PDF methods for turbulent flows.” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **26**, pp. 23–63 (1994).
- [69] A. L. PORTA, G. A. VOTH, A. M. CRAWFORD, J. ALEXANDER et E. BODENSCHATZ. “Fluid particle accelerations in fully developed turbulence.” *Nature*, **409**, pp. 1017–1019 (2001).
- [70] A. PUMIR, B. I. SHRAIMAN et M. CHERTKOV. “Geometry of lagrangian dispersion in turbulence.” *Phys. Rev. Lett.*, **85**(25), pp. 5324–5327 (2000).
- [71] L. F. RICHARDSON. “Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph.” *Proc. R. Soc. Lond. A*, **110**, pp. 709–737 (1926).
- [72] M. RIVERO, J. MAGNAUDET et J. FABRE. “Quelques résultats nouveaux concernant les forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré.” *C. R. Acad. Sci. Paris II*, **312**, pp. 1499–1506 (1991).
- [73] F. W. ROOS et W. W. WILLMARTH. *AIAA Journal*, **9**, p. 285 (1971).

- [74] P. G. SAFFMAN. “The lift on a small sphere in a slow shear flow.” *J. Fluid Mech.*, **22**, pp. 385–400 (1965).
- [75] H. SAKAMOTO et H. HANIU. “The formation mechanism and shedding frequency of vortices from a sphere in uniform shear flow.” *J. Fluid Mech.*, **287**, pp. 151–171 (1995).
- [76] Y. SATO et K. YAMAMOTO. “Lagrangian measurement of fluid-particle motion in an isotropic turbulent field.” *J. Fluid Mech.*, **175**, pp. 183–199 (1987).
- [77] B. L. SAWFORD. “Reynolds number effects in lagrangian stochastic models of turbulent dispersion.” *Phys. Fluids A*, **3**(6), pp. 1577–1586 (1991).
- [78] D. J. SHLIEN et S. CORRISIN. “A measurement of lagrangian velocity autocorrelation in approximately isotropic turbulence.” *J. Fluid Mech.*, **62**(2), pp. 255–271 (1974).
- [79] C. SIMAND, F. CHILLA et J.-F. PINTON. “Inhomogeneous turbulence in the vicinity of a large scale coherent vortex.” *Europhys. Lett.*, **49**(3), pp. 336–342 (2000).
- [80] W. H. SNYDER et J. L. LUMLEY. “Some measurements of particle velocity autocorrelation functions in a turbulent flow.” *J. Fluid Mech.*, **48**(1), pp. 41–71 (1971).
- [81] K. D. SQUIRES et J. K. EATON. “Lagrangian and eulerian statistics obtained from direct numerical simulation of homogeneous turbulence.” *Phys. Fluids*, **A3**, pp. 130–143 (1991).
- [82] G. SRIDHAR et J. KATZ. “Drag and lift forces on microscopic bubbles entrained by a vortex.” *Phys. fluids*, **7**, pp. 389–399 (1995).
- [83] P. J. SULLIVAN. “Longitudinal dispersion within a two-dimensional turbulent shear flow.” *J. Fluid Mech.*, **49**(3), pp. 551–576 (1971).
- [84] G. I. TAYLOR. “Diffusion by continuous movements.” *Proc. London Math. Soc.* 2, **20**, pp. 196–211 (1921).
- [85] G. I. TAYLOR. “Statistical theory of turbulence parts i-iv.” *Proc. Roy. Soc. A*, **151**, pp. 421–478 (1935).
- [86] D. J. THOMSON. “Criteria for the selection of stochastic models of particle trajectories in turbulent flows.” *J. Fluid Mech.*, **342**, p. 379 (1987).
- [87] A. A. TOWNSEND. “Diffusion of heat from a line source in homogeneous turbulence.” *Proc. Roy. Soc. A*, **224**, pp. 487–512 (1954).
- [88] B. D. TRI, B. OSTERLE et F. DENEU. “Premiers résultats sur la portance d’une sphère en rotation aux nombres de Reynolds intermédiaires.” *C. R. Acad. Sci. Paris II*, **311**, pp. 27–31 (1990).
- [89] M. S. UBEROI et S. CORRISIN. “Diffusion of heat from a line source in isotropic turbulence.” *N.A.C.A. Rep. 1142* (1953).
- [90] P. VEDULA et P. K. YEUNG. “Similarity scaling of acceleration and pressure statistics in numerical simulations of isotropic turbulence.” *Phys. Fluids*, **11**(5), pp. 1208–1220 (1999).
- [91] M. VIRANT et T. DRACOS. “3D PTV and its application on lagrangian motion.” *Meas. Sci. Technol.*, **8**, pp. 1539–1552 (1997).
- [92] G. A. VOTH, K. SATYANARAYAN et E. BODENSCHATZ. “Lagrangian acceleration measurements at large Reynolds numbers.” *Phys. Fluids*, **10**(9), pp. 2268–2280 (1998).
- [93] R. C. WEAST. *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, 1981, 60<sup>e</sup> édition.

- 
- [94] P. K. YEUNG. “One- and two-particle lagrangian acceleration correlations in numerically simulated homogeneous turbulence.” *Phys. Fluids*, **9**(10), pp. 2981–2990 (1997).
- [95] P. K. YEUNG. “Lagrangian characteristics of turbulence and scalar transport in direct numerical simulations.” *J. Fluid Mech.*, **427**, pp. 241–274 (2001).
- [96] P. K. YEUNG et S. B. POPE. “Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence.” *J. Fluid Mech.*, **207**, pp. 531–586 (1989).
- [97] P. J. ZANDBERGEN et D. DIJKSTRA. “Von Karman swirling flows.” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **19**, pp. 465–491 (1987).



---

**Résumé :** Le but de cette thèse est l'étude expérimentale de la turbulence du point de vue lagrangien. On cherche donc à suivre une particule de fluide pendant un temps supérieur au temps caractéristique des grandes échelles. Pour ce faire, nous avons mis au point une nouvelle technique de mesure de vitesse lagrangienne dans un écoulement turbulent à haut nombre de Reynolds. Le principe choisi est basé sur l'utilisation de l'effet Doppler d'une onde ultrasonore monochromatique diffusée par une petite particule solide. Le signal diffusé est reçu par un réseau de récepteurs et mis en forme par une électronique rapide et ultrafaible bruit conçue spécialement au cours de ce travail. Pour extraire la modulation de fréquence due à la vitesse, nous avons développé un algorithme d'estimation spectrale basé sur une méthode de maximum de vraisemblance approché couplé à un filtre de Kalman. Nous avons ainsi accès à la vitesse lagrangienne sur des échelles temporelles englobant le régime inertiel et les grandes échelles de l'écoulement. Le champ de vitesse est gaussien à décroissance temporelle exponentielle. On obtient ainsi un spectre temporel à décroissance conforme à la prédiction de la théorie de Kolmogorov 41. Le régime inertiel lagrangien se prolonge jusqu'à des échelles temporelles inférieures au temps de Kolmogorov. On observe une intermittence lagrangienne plus intense (en termes de courbure des exposants de structure) que pour le champ eulérien et dont l'intensité ne peut être reproduite par le modèle usuel basé sur la dissipation. Cette intermittence est liée à l'existence de corrélations temporelles très longues de la valeur absolue des incréments temporels de vitesse.

**Mots-clés :** Mesure, Acoustique, Ultrasons, Traitement du signal, Analyse spectrale, Turbulence, Lagrangien, Intermittence

---

### **Lagrangian velocity measurement and statistical analysis**

---

**Abstract :** The aim of this PhD thesis is to study experimentally turbulence from a lagrangian point of view. We wish to track a particle of fluid during a time greater than the characteristic time of large scale motion. To achieve this requirement, we have produced a new measurement technique of the lagrangian velocity in a high Reynolds number turbulent flow. The method is based on the measurement of the Doppler shift of the sound scattered by a moving particle, when insonified by a continuous monochromatic ultrasonic. The scattered sound is received by an array of transducers and sent to fast and ultralow noise acquisition device build during this thesis. To extract the frequency of modulation due to the velocity, we developed a spectral analysis algorithm based on approximate maximum likelihood principle coupled with a Kalman filter. It gives access to the inertial and large time scales of the lagrangian velocity. The lagrangian velocity field is shown to be gaussian with an exponential autocorrelation. The lagrangian spectrum is then in agreement with a Kolmogorov scaling prediction in the inertial range. We also observe an intermittency that is stronger (in terms of structure exponents) than the eulorian one. It cannot be explained by the usual model based on dissipation. We propose that this intermittency is linked with the persistence of correlations of the absolute value of velocity increments over very long times.

**Key words :** Measurement, Acoustics, Ultrasound, Signal processing, Spectral analysis, Turbulence, Lagrangian, Intermittency

---

**Discipline :** Sciences physiques

---

Laboratoire de Physique–UMR 5672  
Ecole Normale Supérieure de Lyon  
46 allée d'Italie, F-69364 Lyon cedex 07, France

