Université Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD)

Faculté des Sciences et techniques (FST),
Département de Mathématiques et Informatique
Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique

Thèse de Doctorat Unique
Option : Géométrie Differentielle

Titre :

Isomorphismes entre groupes de cohomologie ; Plongement de structures CR de fibrés en tores sur le cercle.

Par

Mansour Sané

Jury :

Président	-	**Prof. Mamadou SANGHARE**, UCAD
Rapporteurs	-	**Prof. Chérif BADJI**, UCAD)
	-	**Prof. Philippe RUKIMBIRA**, FIU (USA)
Examinateurs	-	**Maître de Conférence Cheikh Mbacké DIOP**, UCAD
	-	**Chargé d'Enseignements Mamour SANKHE**, UCAD
Codirecteur	-	**Prof. Hamidou DATHE**, UCAD
Directeur	-	**Prof. Salomon SAMBOU**, UASZ (Ziguinchor)

Soutenue le 03 **Août** 2013

Dédicaces

A la mémoire de

mes grands-pères
et de
ma grand-mère paternelle.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à mes directeurs de thèse, Salomon Sambou et Hamidou Dathe, pour leur grande disponibilité et leur optimisme.

Je suis particulièrement reconnaissant à Cherif Badji et à Phillip Rukimbira d'avoir rapporté ce texte. Je suis très honoré qu'ils aient accepté de s'intéresser à mon travail.

Je remercie chaleureusement Mamadou Sangharé, Cheikh Mbacké Diop et Mamour Sankhé d'avoir participé au jury.

Je remercie également les enseignants du département de mathématiques et informatique, et plus particulièrement ceux du laboratoire de géométrie différentielle et applications, pour l'enseignement qu'il m'ont dispensé.

Mes remerciements vont également à tous les membres du laboratoire de mathématiques et applications de l'université de Ziguinchor où j'ai passé la quasi-totalité de mon temps de recherche.

Je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont soutenu dans la voie de la persévérance, ont cru et m'ont poussé à croire que je pouvais réussir le doctorat unique. Que le bon Dieu nous aide à réussir dans cette vie et dans l'au-delà.

Je ne peux pas finir mes remerciements, sans rendre hommage à ma mère, à mon père, à ma grand-mère maternelle et à mon épouse pour leur patience et leur soutien moral.

Résumé

Ce mémoire de thèse est constitué de deux parties.

Dans la première partie, on s'intéresse à des problèmes liés à l'équation de Cauchy-Riemann, à l'équation de Cauchy-Riemann tangentielle et à leurs applications. Plus précisément, cette partie concerne l'études des isomorphismes entre les groupes de cohomologie des formes différentielles de classe C^∞ et celles de classe C^l pour un ouvert Ω d'une variété analytique complexe. On montre que les résultats obtenus dans ce cadre sont également vrais pour les courants prolongeables. On en déduit un résultat d'isomorphisme entre le groupe $H^l_{0,r}(S)$ de cohomologie de Dolbeaut des formes différentielles de classe C^l sur une hypersurface réelle S et celui des courants sur S noté $H^{cour}_{0,r}(S)$. On en déduit aussi une résolution du problème du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse au problème de plongement des structures CR avec des applications sur les fibrés en tores sur le cercle. On voit que le plongement générique des variétés CR est lié à l'action d'un groupe de Lie transverse. On voit aussi que les variétés pseudo-hermitiennes strictement pseudoconvexes compactes sont plongeables si et seulement si la variété de contact qui leur est canoniquement associée est holomorphiquement remplissable. On applique ce résultat à l'existence et à la caractérisation, à isotopie près, des structures CR plongeables sur les fibrés T^3_A, en tores sur le cercle,dont la matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Pour le cas particulier du tore réel $\mathbb{T}^3$ de dimension trois on montre qu'elle porte une unique structure pseudo-hermitienne strictement pseudoconvexe plongeable qui cependant n'est pas génériquement plongeable. Dans le cas général on montre aussi que T^3_A ou T^3_{-A} porte une structure CR strictement pseudoconvexe plongeable. Si $|trace(A)| = 2$, on montre de plus que le nombre de structures pseudo-hermitiennes strictement pseudoconvexes plongeables sur T^3_A est compris entre 1 et 3.

Table des matières

Dédicaces **i**

Remerciements **ii**

Résumé **iii**

Introduction **1**

I Isomorphismes entre groupes de cohomologie **6**

1 Préliminaires **7**

2 Isomorphismes d'applications naturelles **11**
- 2.1 Résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre N 11
- 2.2 Quelques résultats d'isomorphismes d'applications naturelles 14

3 Application à la résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles à valeurs au bord au sens des courants **20**
- 3.1 Remarque sur l'ordre d'un courant qui prolonge un forme différentielle à croissance polynomiale 21
- 3.2 Résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles à valeur au bord au sens des courants 26

II Plongement de structures CR de fibrés en tores $\mathbb{T}^2$ sur S^1 **31**

4 Stuctures CR **32**
- 4.1 Structures CR abstraites 32
  - 4.1.1 Définition 32
  - 4.1.2 Forme de Levi d'une structure CR abstraite 35

4.2 Structure pseudo-hermitienne 36
4.2.1 Variété pseudo-hermitienne 36
4.2.2 Direction caractéristique et métrique de Webster 37
4.3 Structures CR plongeables 39

5 Structures métriques de contact 43
5.1 Remplissage des variétés de contact 43
5.1.1 variétés de contact 43
5.1.2 Variétés symplectiques 45
5.1.3 Remplissage des variétés de contact 47
5.2 Variétés métriques de contact 48
5.2.1 Variétés métriques de contact 48
5.2.2 variétés métriques de contact et variétés CR 52

6 Sur le plongement des variétés CR 56
6.1 Plongement des variétés CR et action de groupes de Lie 56
6.2 Plongement et Remplissage des Structures CR ; exemple du tore $\mathbb{T}^3$ 60
6.2.1 Plongement et remplissage 60
6.2.2 Le cas du tore $\mathbb{T}^3$ 63
6.3 Des Structures CR plongeables sur des fibrés en tores sur le cercle 65
6.3.1 Structure CR standart sur le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$ 65
6.3.2 caractérisation des structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur des fibrés en tores $\mathbb{T}^2$ sur S^1 70

Bibliographie 74

Introduction

La première partie regroupe les trois premiers chapitres et concerne l'étude d'isomorphismes entre groupes de cohomologie de Dolbeault en classe C^l et celles en classe C^∞. Soit X une variété analytique complexe et soit S une hypersurface réelle de X. Soit $H^l_{s,r}(S)$ le groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie des formes différentielles de classe C^l et $H^{\infty,cour}_{s,r}(S)$ celui des courants sur S. On se propose d'étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application naturelle $H^l_{s,r}(S) \longrightarrow H^{\infty,cour}_{s,r}(S)$. Ce genre de problème a été étudié dans [35] et dans [39], dans le cadre de la résolution de l'equation de Cauchy-Riemann tangentielle. D'après [56], si S a une hessienne ayant q valeurs propres de même signe, $q \geq \frac{n+1}{2}$, alors l'application naturelle $H^\infty_{s,r}(S) \longrightarrow H^{\infty,cour}_{s,r}(S)$ est injective si $n-q+1 \leq r \leq q$ et est surjective si $n-q \leq r \leq q-1$, où $H^\infty_{s,r}(S)$ désigne le groupe de $\overline{\partial}_b$-cohomologie des formes différentielles de classe C^∞. Il s'agit ici en fait d'obtenir la version C^l de ce résultat. Nous serons aussi, pour cela, inspiré par le résultat de [3] qui ont établit que si M est une sous-variété q-concave de codimension réelle d de X avec $1 \leq q \leq \frac{n-d}{2}$, alors l'application naturelle $H^l_{0,r}(M) \longrightarrow H^{l,cour}_{0,r}(M)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$ ou $n-d-q+2 \leq r \leq n-d$, et est surjective pour $r = n-d-q+1$. La formule d'homotopie du $\overline{\partial}$ de CHIRKA, [18] nous sera d'un très grand apport.

Dans le premier chapitre nous voyons quelques notions préliminaires sur lesquelles nous travaillons. Il s'agit de définir la cohomologie de Dolbeault sur le bord, les variétés de Stein, les variétés q-concaves, les formes différentielles à croissance polynomiale et celles admettant une valeur au bord au sens des courants.

D'après un résultat de Martineau, [47] les $(p,q)-$courants d'ordre N, prolongeables à X et définis sur un domaine Ω gros, sont les duaux topologiques des $(n-p,n-q)$-formes différentielles de classe C^N à support compact dans $\overline{\Omega}$. Ainsi en s'inspirant de la méthode de résolution, par dualité, du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables de Sambou dans [55], nous résolvons, dans le deuxième chapître, le $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre fini N dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Il s'agit exactement du Théorème 1.2 dans [58]. Nous abordons ensuite le problème dont il est question. A la proposition 2.2.1, nous montrons que, sur un domaine Ω, strictement pseudoconvexe, les groupes de cohomologie des courants prolongeables et celles prolongeables d'ordre fini sont isomorphes et à la proposition 2.2.2, nous établissons, sur $\overline{\Omega}$, l'isomorphisme entre le groupe de cohomologie des formes différentielles de classe infinie et celles de classe fini. Comme conséquence de ces deux résultats nous avons le théorème 2.2.7 qui est la version C^l du [56, Théorème IV.A.1]. Nous avons aussi la version d'ordre fini des résultats d'annulation des groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie des courants prolongeables de Sambou, [55] et [56], pour des domaines complètement strictement q-convexes et pour des domaines de Stein à extension q-convexe, et ceux de Brinkschulte, [11] pour des domaines à bord lipschitzien et $\log\delta$-pseudoconvexes des variétés de Kähler. Il en découle directement une résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre fini dans des domaines complètement strictement q-convexes plus vastes que les domaines strictement pseudoconvexes.

Au chapitre trois nous résolvons le $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles admettant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Nous montrons que si f est une forme différentielle à croissance polynomiale d'ordre N, alors il existe un courant prolongeable d'ordre N qui prolonge f. Partant de cela et de la résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables, nous montrons que dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ une forme différentielle $\overline{\partial}$ fermée à croissance polynomiale d'ordre N admet une solution du $\overline{\partial}$ qui est aussi une forme différentielle à croisssance polynomiale d'ordre $2n-1+N$. Après avoir montré qu'une forme différentielle à croissance polynomiale admet une valeur au bord au sens des courants, nous montrons, au théorème 3.0.9, que si f est une forme qui a une valeur au bord au sens des courants et $\overline{\partial}$ fermée sur un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, alors il existe une forme u à valeur au bord au sens des courants telle que $\overline{\partial}u = f$.

Cette partie a fait l'object de deux articles publiés l'une aux annales Blaise Pascal de Clermont Ferrand et l'autre aux Annales Polonici Mathematici, confère les références [58] et [57] pour plus de précision.

Dans [10] J. Brinkshulte a montré que si U est un ouvert suffisament petit d'une variété CR générique plongée M de type (n,k), alors les groupes de cohomologie $H^{p,q}(U)$ de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiels $\overline{\partial}_M$ sont de dimension nulle ou infinie. On peut envisager généraliser ce résultat aux variétés CR abstraites et aux (p,q)-ième groupes de cohomologie pour les formes différentielles de classe C^l, $l \in \mathbb{N}$ et pour les courants en partant du résultat de J. Brinkschulte, C. D. Hill et M. Nacinovich dans [12] et du récent résultat de S. Sambou et M. Sané dans [57]. Ainsi le plongement des variétés CR abstraites qui fait l'objet de la deuxième partie de cette thèse, est lié à l'opérateur de Cauchy Riemann tangentielle sur cette variété.

La deuxième partie concerne les trois derniers chapitres. Dans cette partie, nous nous intéressons à la caractérisation des structures CR plongeables sur des fibrés en tore $\mathbb{T}^2$ sur le cercle S^1. Une structure CR sur une variété différentiable M est un sous-fibré complexe $T^{10}M$ du complexifié $TM \otimes \mathbb{C}$ du fibré tangent à M tel que $T^{10}M \cap \overline{T^{10}M} = 0$ et que l'espace des sections de classe C^∞ de $T^{10}M$ soit stable par crochet de Lie. Soit $(M, T^{10}M)$ une variété CR, existe-t-il un plongement lisse $i : M \longrightarrow \mathbb{C}^N$ tel que les composantes de i vérifient les équations de Cauchy-Riemann tangentielles ? Cette question, appelée "problème de plongement" a été posée par J.J. Kohn dans [38]. Dans [52] NIRENBERG a montré qu'il existe des variétés de dimension 3 non plongeables. Pour des exemples de variétés CR non plongeables, on peut consulter [37] et [49].

Dans le chapitre quatre, nous introduisons des notions élémentaires de géométrie CR dont nous avons besoin pour aborder le "problème du plongement". Nous voyons qu'une structure CR sur M est aussi la donnée d'un sous-fibré HM de TM muni d'une structure presque complexe J_b dont le tenseur de Nijenhuis est nul. Nous voyons en particulier les structures pseudo-hermitiennes θ strictement pseudoconvexes qui sont des structures CR de type hypersurface dont la forme de Levi est définie positive. Ces variétés portent une direction caractéristique T qui est transverse à $HM = \ker\theta$, ainsi qu'une métrique riemannienne g_θ appelée métrique de webster adaptée à T et à la structure presque complexe J_b sur HM. Nous introduisont à la fin de ce chapitre les structures CR plongeables où nous définissons la notion de plongement CR.

Dans chapitre cinq nous abordons en premier lieu le remplissage des variétés de contact et en second lieu nous voyons les liens entre les variétés de contact et les variétés métriques de contact. A l'opposée des feuilletages, une structure de contact sur M de dimension $2n+1$ est la donnée d'une distribution d'hyperplans $\mathscr{D}$ non complétement intégrable. Elle est dite fortement symplectiquement remplissable s'il existe une variété symplectique (W, w) telle que M soit le bord bW de W et que si η est une équation de $\mathscr{D}$, alors $d\eta = w_{|\mathscr{D}}$. La structure de contact $\mathscr{D}$ est dite holomorphiquement remplissable si elle est contactomorphe au bord strictement pseudoconvexe d'une variété complexe compact. Les variétés de contact orientées et coorientées sont munies d'un champ de Reeb ξ qui est transverse à la distribution $\mathscr{D}$, d'un champ de tenseur φ de type $(1,1)$ sur M et d'une métrique Riemannienne g compatible avec $\mathscr{D}$ telle que (ϕ, η, ξ, g) soit une structure métrique de contact. D'après [51] toute variété métrique (M, ϕ, η, ξ, g) est une variété pseudo-hermitienne strictement pseudoconvexe si $\phi N_\phi(X, Y) = 0$, pour tout $X, Y \in \Gamma(\mathscr{D})$ où N_ϕ est le tenseur de Nijenhuis de contact de M. Les structures sasakiennes sont des structures métriques de contact qui sont normales au sens où la structure presque complexe $\mathscr{J}$ sur $M \times \mathbb{R}$, définie par $\mathscr{J}\left(X, f\dfrac{d}{dt}\right) = \left[\phi X - f\xi, \eta(X)\dfrac{d}{dt}\right]$ est une structure complexe. Elles sont aussi des structures pseudo-hermitiennes strictement pseudoconvexes dont la connexion de Tanaka-Webster a une torsion pseudo-hermitienne nulle. Notons que les structures pseudo-hermitiennes strictement pseudoconvexes sont des structures métriques de contact. Dans le cas où M est dimension trois, Blair, [7], a montré que les structures métriques de contact sont des structures CR strictement pseudoconvexes.

Au dernier chapitre nous étudions le problème de plongement des variétés CR sous deux aspects. En premier lieu nous voyons que la condition de plongement générique local est liée à la présence d'une action transverse de groupe de Lie. Dans la proposition 6.1.5, M. S. Baouendi et L. P. Rothschilde ont montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété CR soit localement génériquement plongeable est que sa structure CR soit localement invariante sous l'action d'un groupe de Lie transverse. Dans la proposition 6.1.6 L. Lempert a globalisé ce résultat, il a montré qu'une variété CR de type hypersurface qui admet une action CR lisse de $\mathbb{R}$ qui est transverse, est le bord d'une surface strictement pseudoconvexe. Z.M. Balogh et C. Leuenberger dans [4] se sont intéréssés sur les questions de plongement local pour des variétés CR admettant une action de groupe qui n'est pas necessairement CR. Ils ont montré que si une variété CR de type (n,k) admet une action locale extensible sur $\mathbb{R}^k$ alors M est localement génériquement plongeable (voir proposition 6.1.10). A la proposition 6.1.13, ils ont montré que pour le cas des variétés CR strictement pseudoconvexes, il y'a équivalence entre plongemement local générique et présence d'une action réelle semi-extensible. En deuxième lieu, nous nous consacrons au remplissage des variétés CR compactes strictement pseudoconvexes de type hypersurface qui sont aussi appelées variétés pseudo-hermitiennes strictement pseudoconvexes compactes. En effet ce type de variété CR est plongeable si et seulement si elle est remplissable. Ceci resulte de la combinaison des théorèmes 6.2.2, 6.2.3, et 6.2.4, établis respectivement par Harvey et Lawson ([34]), Grauert ([32]), et Eliashberg et Gromov ([27]). Cependant le plongement n'est pas générique. Une structure CR strictement pseudoconvexe de type hypersurface fournit une structure de contact orientée et coorientée et l'inverse est vrai en dimension trois. En dimension trois, les variétés pseudo-hermitiennes strictement pseudoconvexes compactes sont plongeables si et seulement si la variété de contact qui leur est canoniquement associée est holomorphiquement remplissable, voir proposition 6.2.13. Nous avons appliqué ces résultats à l'existence et à la Caractérisation des structures CR remplissables sur des fibrés $\mathbb{T}^2$ sur S^1. Remarquons que cette Caractérisation s'éffectue à isotopie près. Pour le cas du tore réel $\mathbb{T}^3$ de dimension trois, nous nous basons sur les résultats de Eliashberg [25] pour montrer que la structure CR standart définie en 6.2.1 est la seule qui soit plongeable. D'après [21], cette dernière n'est pas normale. Pour le cas des fibrés T_A^3 en tore sur le cercle, de matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, le résultat de F. Ding et H. Geiges [23] montre que pour la famille complète à difféomorphisme près de structures de contact $\mathscr{D}_n$, $n \in \mathbb{N}$, deux à deux non difféomorphiques, il existe un entier à partir duquel les $\mathscr{D}_n$ ne sont pas fortement symplectiquement remplissables, donc ne sont pas holomorphiquement remplissables. Partant du théorème d'existence de structures de contacts holomorphiquement remplissables sur T_A^3 de J. Van Horn-Morris dans [62] et en utilisant l'équivalence entre remplissage holomorphe et plongement CR , On montre le théorème suivant :

Théorème 0.0.1 *(Existence de structure CR strictement pseudoconvexe plongeable sur T_A^3 ou T_{-A}^3)*
Soit T_A^3 un fibré en tore $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors on a au moins une des conditions suivantes :

1. *T_A^3 porte une structure CR strictement pseudoconvexe plongeable ;*
2. *T_{-A}^3 porte une structure CR strictement pseudoconvexe plongeable.*

Si la monodromie A vérifie $|\mathrm{trace}(A)| = 2$, on utilise la normalité de la structure CR standart sur le groupe de Heisenberg H_1, qui est aussi le groupe Nil^3, et des résultats de C. P. Boyer ([13]), P. Lisca [43] et H. Geiges et J. Gonzalo ([30]), pour obtenir le théorème de Caractérisation des structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur T_A^3.

Théorème 0.0.2 *(Caractérisation des structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur T_A^3 avec $|trace(A)| = 2$)*
Soit T_A^3 un fibré $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ non périodique satisfaisant $|trace(A)| = 2$ et $\mathscr{CRP}$ le nombre de structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur T_A^3 à isotopie près. Alors on a $1 \leq \mathscr{CRP} \leq 3$.

Première partie

Isomorphismes entre groupes de cohomologie

Chapitre 1

Préliminaires

Ici X désigne une variété analytique complexe de dimension n et Ω un ouvert de X.

Définition 1.0.3
Soit X une variété complexe et soit $\mathscr{X}$ la variété différentiable réelle sous-jacente. Soit J la structure presque complexe (intégrable) sur $T\mathscr{X}$. On définit l'opérateur d^c pour toute fonction lisse sur X par $d^c f = (J^* \circ d)(f) = df \circ J$. L'opérateur d^c est réel et associé de manière intinsèque à la structure complexe de X. On a $d^c = i(\partial - \overline{\partial})$ où $\partial = \sum_j \frac{\partial}{\partial z^j}$ et $\overline{\partial} = \sum_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}^j}$.

Soit f une fonction lisse définie sur X à valeur réelle. On associe à f les tenseurs suivants :

$\alpha_f := -d^c f; \quad w_f := d\alpha_f = -dd^c f; \quad g_f(u,v) := w_f(u, Jv),\ \forall u, v \in TX;$
$h_f := g_f + i w_f.$

Le noyau de la restriction de α_f à tout niveau régulier $X_a := f^{-1}(a)$ de f est un fibré tangent complexe $TX_a \cup J(TX_a)$ de X_a. La forme extérieure w_f est réelle et de type $(1,1)$ et est appelée forme de Levi extérieure associée à f. La forme hermitienne h_f ($\mathbb{C}-$antilinéaire à gauche et $\mathbb{C}$-linéaire à droite) associée à f est appelée forme hermitienne de Levi de f.

Définition 1.0.4 *(Fonction plurisousharmonique)*
Une fonction lisse $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite plurisousharmonique (psh) si g_f est semi-définie positive. Elle est dite strictement plurisousharmonique (spsh) si g_f est définie positive c'est à dire si g_f définie une structure Riemannienne sur la variété différentiable $\mathscr{X}$.

f est spsh si et seulement si sa forme de levi h_f est Kählerienne c'est à dire qu'elle est fermée.

Une fonction réelle f lisse sur X est dite d'exhaustion si pour tout $a \in \mathbb{R}$, le sous-ensemble $X_{<a} := \{x \in X \mid f(x) < a\}$ est relativement compact dans X et si $X = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} X_{<a}$.

Définition 1.0.5
L'espace Analytique complexe X est dit strictement pseudoconvexe s'il porte une fonction d'exhaustion f qui est spsh en dehors d'un compact. Si f est spsh partout sur X, alors X est dit de Stein.

Définition 1.0.6
Soit (X,ω) une variété kählerienne de dimension n, i.e une variété complexe X munie d'une forme hermitienne w fermée. Soit $\Omega \subset\subset X$ un ouvert et soit $\delta(z)$ la distance de $z \in \Omega$ au bord $b\Omega$ de Ω relativement à ω ($\delta(z) = \delta_\omega(z, b\Omega)$).

a) On dit que Ω est $\log\delta$-pseudoconvexe s'il existe une fonction ψ lisse bornée sur Ω telle que

$$g_{-\log\delta+\psi} \geq \omega \quad dans\,\Omega$$

En particulier tout domaine $\log\delta$-pseudoconvexe admet une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique ; ainsi il est de Stein.

b) On dit que Ω est pseudoconvexe si la fonction $-\log\delta$ est plurisousharmonique continue.

Considérons toujours l'ouvert Ω de la variété analytique complexe X de dimension n.

On note $C^l_{p,r}(\Omega)$ l'espace des (p,r)-formes différentielles de classe C^l sur Ω et

$$Z^l_{0,r}(\Omega) = \{f \in C^l_{0,r}(\Omega) \mid \overline{\partial} f = 0\},$$

$$B^l_{0,r}(\Omega) = \{f \in C^l_{0,r}(\Omega) \mid \exists g \in C^l_{0,r-1}(\Omega),\ \overline{\partial} g = f\}.$$

Naturellement $B^l_{0,r}(\Omega) \subset Z^l_{0,r}(\Omega)$. Nous avons donc le groupe quotient

$$H^l_{0,r}(\Omega) := \frac{Z^l_{0,r}(\Omega)}{B^l_{0,r}(\Omega)}$$

appelé $(0,r)$-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des formes de classe C^l sur Ω.

On peut par dualité étendre le $\overline{\partial}$ aux courants. Notons

$$H^{l,cour}_{0,r}(\Omega) := \frac{Z^{l,cour}_{0,r}(\Omega)}{B^{l,cour}_{0,r}(\Omega)}$$

le $(0,r)$-ième groupe de $\overline{\partial}$ cohomologie pour les courants d'ordre l sur Ω.

Il est connu d'après [3] que l'application naturelle
$H^{l}_{0,r}(\Omega) \longrightarrow H^{l,cour}_{0,r}(\Omega)$ est un isomorphisme appelé isomorphisme de Dolbeault.

Considérons une sous-variété M de X définie, pour un ouvert local $U \subset X$, par :

$$M \cap U = \{z \in U,\ \rho_1(z) = \cdots = \rho_d(z) = 0\},\ 1 \leq d < 2n$$

avec ρ_j des fonctions réelles de classe C^∞ sur U, $1 \leq j \leq d$ et $\overline{\partial}\rho_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\rho_d \neq 0$ sur U. M est dite sous-variété CR de codimension réelle d et de fonctions définissantes $\rho_1, \cdots, \rho_d$. L'opérateur $\overline{\partial}$ induit sur M un opérateur $\overline{\partial}_b$ qui vérifie aussi $\overline{\partial}_b^2 = 0$; On peut l'étendre aussi par dualité aux courants. Ce qui donne le $(0,r)$-ième groupe $H^l_{0,r}(M)$ de $\overline{\partial}_b$ cohomologie des formes différentielles de classe C^l sur M et le groupe $H^{l,cour}_{0,r}(M)$ pour les courants d'ordre l sur M. On note $T^{\mathbb{C}}_z M$ l'espace tangent compexe à M au point z.

Définition 1.0.7
Nous dirons que M est q-concave au point $z_0 \in M$, $1 \leq q \leq n-d$ si la forme de Levi

$$\mathscr{L}^M \rho_x(z_0).\xi := \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \rho_x(z_0)}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta$$

restreinte à $T^{\mathbb{C}}_{z_0} M$ admet au moins q valeurs propres strictement négatives, où
$\rho_x = x_1\rho_1 + \cdots + x_d\rho_d$ avec $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $\xi \in T^{\mathbb{C}}_{z_0} M$.
Nous dirons que M est q-concave si elle l'est en tout point.

Définition 1.0.8
1. *Une fonction ρ de classe C^∞ sur X est dite q-convexe, $1 \leq q \leq n$, si sa forme de Lévi possède au moins q valeurs propres strictement positives ; ρ est dite q-concave si $-\rho$ est q-convexe.*
2. *Soient X une variété analytique complexe de dimension n et $\Omega \subset\subset X$ un domaine relativement compact de X. Ω est dite complètement strictement q-convexe, $0 \leq q \leq n-1$, s'il existe une fonction $(q+1)$-convexe φ définie dans un voisinage $U_{\overline{\Omega}}$ de Ω telle que $\Omega = \{z \in U_{\overline{\Omega}} | \varphi(z) < 0\}$. S'il existe une fonction φ $(q+1)$-convexe dans un voisinage $U_{b\Omega}$ du bord $b\Omega$ de Ω, telle que $\Omega \cap U_{b\Omega} = \{z \in U_{b\Omega} | \varphi(z) < 0\}$, alors on dit que Ω est strictement q-convexe.*

3. *X est une extension q-convexe respectivement q-concave de Ω, $0 \leq q \leq n-1$, si :*
   - *(i) Ω rencontre toutes les composantes connexes de X.*
   - *(ii) Il existe une fonction $(q+1)$-convexe, respectivement $(q+1)$-concave, φ définie sur un voisinage U de $X \setminus \Omega$ telle que : $\Omega \cap U = \left\{z \in U | \varphi(z) < 0\right\}$ et pour tout réel α, $0 < \alpha < \sup\limits_{z \in U} \varphi(z)$ l'ensemble $\left\{z \in U | 0 \leq \varphi(z) \leq \alpha\right\}$ est compact.*

Remarque 1.0.9
Puisque si U est un voisinage de $X \setminus \Omega$, alors U est aussi un voisinage du bord de Ω, donc si X est une extension q-convexe de Ω, Ω est strictement q-convexe.

Définition 1.0.10
Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse de classe C^∞ de fonction définissante ρ. Posons $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega \mid \rho(z) < -\varepsilon\}$ et $b\Omega_\varepsilon$ désigne le bord de Ω_ε.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur Ω. On dit que f admet une valeur au bord au sens des distributions, s'il existe une distribution T définie sur le bord $b\Omega$ de Ω telle que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(b\Omega)$, on ait :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b\Omega_\varepsilon} f \varphi_\varepsilon d\sigma = \langle T, \varphi \rangle$$

où si $\tilde{\varphi}$ est une extension de φ à Ω et

$i_\varepsilon : b\Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{C}^n$ l'injection canonique, $\varphi_\varepsilon = i_\varepsilon^* \tilde{\varphi}$; $d\sigma$ désigne l'élément de surface.

Une forme différentielle de classe C^∞ sur Ω admet une valeur au bord au sens des courants si ses coefficients ont une valeur au bord au sens des distributions.

Définition 1.0.11
On dit qu'une fonction f de classe C^∞ définie sur Ω est à croissance polynomiale d'ordre $N \geq 0$, s'il existe une constante C telle que pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$|f(z)| \leq \frac{C}{d(z)^N}$$

où $d(z)$ désigne la distance de z au bord de Ω.

Chapitre 2

Isomorphismes d'applications naturelles

Dans ce chapitre nous allons voir que certains résultats d'isomorphisme entre groupes de cohomologie de Dolbeault permettent de résoudre directement certains problèmes comme celui du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables.

2.1 Résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeables d'ordre N

Nous allons nous intéresser, exactement comme dans [58], à la résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants de bidegré (p,q) d'ordre l sur Ω et prolongeables, où Ω est un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Par le théorème suivant nous obtenons l'annulation du groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables de bidegré (p,r) et d'ordre l dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ pour $1 \leq r \leq n$.

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.1.1
Soit $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞. Si T est un courant de bidegré $(0,r)$, d'ordre l, prolongeable et $\overline{\partial}$ fermé sur Ω, alors il existe un courant S de bidegré $(0,r-1)$, d'ordre l, sur Ω, prolongeable, et tel que $\overline{\partial}S = T$ sur Ω pour $1 \leq r \leq n$.

D'après [47] les courants prolongeables de bidegré (p,q) d'ordre l sur Ω sont les duaux topologiques des $(n-p,n-q)$ formes différentielles de classe C^l à support compact sur $\overline{\Omega}$. La technique de résolution est identique à celle de [55], dans lequel S. Sambou a résolu le $\overline{\partial}$, pour les courants prolongeables. Il montre qu'il existe une solution du $\overline{\partial}$ pour un courant prolongeable. Ici nous montrons que si le courant est prolongeable d'ordre l, alors il admet une solution du $\overline{\partial}$ qui est aussi un courant prolongeable d'ordre l.

Notation 2.1.2
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$, on note $H^{0,l}_{p,q}(\Omega)$ le (p,q)-ième groupe de $\overline{\partial}$ cohomologie des formes différentielles de classe C^l et à support compact dans Ω et $H^{0,l,cour}_{p,q}(\Omega)$ le (p,q)-ième groupe de $\overline{\partial}$ cohomologie des courants d'ordre l à support compact dans Ω. Les (p,q) formes différentielles de classe C^l et à support compact sur $\overline{\Omega}$ sont notées $D^l_{p,q}(\overline{\Omega})$.

Nous avons d'abord la proposition suivante ; il s'agit de la résolution du $\overline{\partial}$ avec condition de support :

Proposition 2.1.3
Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞. Si $f \in D^l_{p,r}(\overline{\Omega}) \cap \ker\overline{\partial}$, alors il existe $g \in D^l_{p,r-1}(\overline{\Omega})$ telle que $\overline{\partial}g = f$ sur $\mathbb{C}^n$, pour $1 \leq r \leq n-1$.

Preuve. Soit $f \in D^l_{p,r}(\overline{\Omega}) \cap \ker\overline{\partial}$, puisque

$$H^{0,l}_{p,r}(\mathbb{C}^n) \approx H^{0,\infty}_{p,r}(\mathbb{C}^n) = 0,$$

il existe $h \in D^l_{p,r-1}(\mathbb{C}^n)$ telle que $\overline{\partial}h = f$. Puisque h est une $(p,r-1)$ forme sur $\mathbb{C}^n$ à support compact, on a $\overline{\partial}h_{|\mathbb{C}^n\setminus\overline{\Omega}} = 0$. Si $r = 1$, alors $h_{|\mathbb{C}^n\setminus\overline{\Omega}}$ est une $(p,0)$ forme holomorphe à support compact. Le principe du prolongement analytique entraîne $h = 0$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$. Si $r \geq 1$ alors $h_{|\mathbb{C}^n\setminus\overline{\Omega}}$ est une $(p,r-1)$ forme différentielle à support compact et de classe C^l. D'après le théorème (3-1) de [41], il existe $\theta \in C^l_{p,r-2}(\mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ telle que $\overline{\partial}\theta = h_{|\mathbb{C}^n\setminus\overline{\Omega}}$. Soit $\tilde{\theta}$ une extension de θ à $\overline{\Omega}$ posons $u = h - \overline{\partial}\tilde{\theta}$, alors $\overline{\partial}u = \overline{\partial}h = f$ et u est à support compact sur $\overline{\Omega}$. ■

Preuve du théorème 2.1.1.
Considérons l'application

$$L_T : \overline{\partial}D^l_{n,n-r}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{C}$$

qui à $\overline{\partial}\varphi$ associe $\langle T, \varphi\rangle$.

Lemme 2.1.4 *L_T est bien définie.*

Preuve du Lemme 2.1.4.
Si $\overline{\partial}\varphi = \overline{\partial}\varphi'$ alors $\varphi - \varphi'$ est une $(n, n-r)$ forme différentielle de classe C^N, à support compact sur $\overline{\Omega}$ et $\overline{\partial}$ fermée.

Si $n-r=0$, alors $\varphi-\varphi'$ est une $(n,0)$ forme holomorphe à support compact. Donc $\varphi-\varphi'=0$ grâce au principe du prolongement analytique. On a $\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\varphi'\rangle$.

Si $n-r \geq 1$, alors $\varphi-\varphi'$ est une $(n,n-r)$ forme différentielle de classe C^N à support compact sur $\overline{\Omega}$. D'après la proposition 2.1.3 $\varphi-\varphi' = \overline{\partial}\theta$ où $\theta \in D^l_{n,n-r-1}(\overline{\Omega})$ qui est un espace de Banach. Puisque $D^l_{n,n-r-1}(\Omega)$ est dense dans $D^l_{n,n-r-1}(\overline{\Omega})$, il existe $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $D^l_{n,n-r-1}(\Omega)$ telle que
$\lim\limits_{j\to+\infty} \theta_j = \theta$ dans $D^l_{n,n-r-1}(\overline{\Omega})$. On a alors

$$\langle T,\overline{\partial}\theta\rangle = \lim_{j\to+\infty}\langle T,\overline{\partial}\theta_j\rangle = 0.$$

Ce qui entraîne $\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\varphi'\rangle$. Donc L_T est bien définie. ■

Lemme 2.1.5 *L_T est continue.*

Preuve du Lemme 2.1.5.
Pour $1 \leq r \leq n-1$, l'opérateur

$$\overline{\partial} : D^l_{n,n-r}(\overline{\Omega}) \longrightarrow D^l_{n,n-r+1}(\overline{\Omega}) \cap \ker\overline{\partial}$$

est linéaire continu et surjectif entre espaces de Banach, donc ouvert. Pour montrer que L_T est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque de tout ouvert U de $\mathbb{C}$ par L_T est un ouvert de $D^l_{n,n-r}(\overline{\Omega})$. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, puisque $L_T \circ \overline{\partial} = T$, on a $L_T^{-1}(U) = \overline{\partial}(T^{-1}(U))$. $T^{-1}(U)$ est ouvert et $\overline{\partial}$ est une application ouverte d'où $L_T^{-1}(U)$ est un ouvert. ■

Suite de la preuve du théorème.
D'après le lemme 2.1.4 et le lemme 2.1.5 l'application L_T est bien définie et continue. Il est évident qu'elle est aussi linéaire. De plus

$$\overline{\partial}D^l_{n,n-r}(\overline{\Omega}) = D^l_{n,n-r+1}(\overline{\Omega}) \cap \ker\overline{\partial} \subset D^l_{n,n-r+1}(\overline{\Omega}).$$

Donc

$$L_T : \overline{\partial}D^l_{n,n-r}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est définie linéaire et continue. D'après le théorème de Hahn-Banach L_T se prolonge en une forme $\tilde{L}_T$ linéaire et continue sur $D^l_{n,n-r+1}(\overline{\Omega})$. $\tilde{L}_T$ est un courant prolongeable d'ordre l et $\overline{\partial}\tilde{L}_T = (-1)^r T$. ■

2.2 Quelques résultats d'isomorphismes d'applications naturelles

Soit X une variété analytique complexe et soit M une sous variété réelle de X de codimension d.

Nous savons d'après [3] que si M est q-concave avec $1 \leq q \leq \frac{n-d}{2}$, alors l'application naturelle $H^l_{0,r}(M) \longrightarrow H^{l,cour}_{0,r}(M)$ est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq q-1$ ou $n-d-q+2 \leq r \leq n-d$, et est surjective pour $r = n-d-q+1$.

Considérons maintenant une hypersurface réelle S de X. C'est une sous-variété CR de codimension réelle 1.

Nous savons d'après [56, Théorème IV.A.1] que si S a une hessienne ayant q valeurs propres de même signe, $q \geq \frac{n+1}{2}$, alors l'application naturelle $H^{\infty}_{0,r}(S) \longrightarrow H^{\infty,cour}_{0,r}(S)$ est injective si $n-q+1 \leq r \leq q$ et est surjective si $n-q \leq r \leq q-1$.

Nous voulons obtenir la version C^l de ce résultat. Notons que S n'est pas q-concave au sens de la définition 1.0.7.

Notons par $\check{H}^l_{0,r}(\Omega)$ (respectivement $H^l_{0,r}(\overline{\Omega})$), $l = 0, 1 \cdots, \infty$, le $(0,r)$-ième groupe de cohomologie de Dolbeault des courants prolongeables d'ordre l (respectivement celui des formes différentielles de classe C^l sur $\overline{\Omega}$), où Ω est un ouvert de X. Nous avons d'abord les propositions suivantes :

Proposition 2.2.1
L'application naturelle de

$$\check{H}^l_{0,r}(\Omega) \longrightarrow \check{H}^{\infty}_{0,r}(\Omega)$$

est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq n$.

Preuve.

(a) Injectivité : Soit $[T] \in \check{H}^l_{0,r}(\Omega)$ tel que $[T] = 0$ dans $\check{H}^{\infty}_{0,r}(\Omega)$, il existe un courants S prolongeable tel que $T = \overline{\partial} S$. On a d'après [46], $\hat{T} = \overline{\partial}\hat{S}$ où $\hat{T}$ et $\hat{S}$ sont des prolongements de T et S à support sur $\overline{\Omega}$. D'après [18], pour $\varepsilon > 0$,

$$\hat{S} = R_\varepsilon \hat{S} + \overline{\partial} A_\varepsilon \hat{S} + A_\varepsilon \hat{T}$$

$$\hat{T} = \overline{\partial}\hat{S} = \overline{\partial} R_\varepsilon \hat{S} + \overline{\partial} A_\varepsilon \hat{T}$$

$$\hat{T}_{|\Omega} = T = \overline{\partial} R_\varepsilon \hat{S}_{|\Omega} + \overline{\partial} A_\varepsilon \hat{T}_{|\Omega}$$

$A_\varepsilon \hat{T}$ a une régularité sur Ω meilleure que celle de $\hat{T}$ sur un ε-voisinage de Ω, donc $A_\varepsilon \hat{T}_{|\Omega}$ est d'ordre l. $R_\varepsilon \hat{S}_{|\Omega}$ est de classe C^∞. Donc T est d'ordre l, d'où l'injectivité de l'application naturelle.

(b) Surjectivité : Soit $[T] \in \check{H}^{\infty}_{0,r}(\Omega)$ et $\hat{T}$ une extension de T à support sur $\overline{\Omega}$ de T,

$$\hat{T} = R_\varepsilon \hat{T} + \overline{\partial} A_\varepsilon \hat{T} + A_\varepsilon \overline{\partial} \hat{T} \text{ avec } \overline{\partial} \hat{T} = 0 \text{ sur } \Omega.$$

$$T = \hat{T}_{|\Omega} = (R_\varepsilon \hat{T} + A_\varepsilon \overline{\partial} \hat{T}) + \overline{\partial} A_\varepsilon \hat{T}_{|\Omega}.$$

$A_\varepsilon \overline{\partial} \hat{T}$ est à support sur un ε-voisinage de $\overline{\Omega}$; donc $A_\varepsilon \overline{\partial} \hat{T}_{|\Omega}$ est un courant prolongeable. La régularité de $A_\varepsilon \overline{\partial} \hat{T}_{|\Omega}$ est meilleure que celle de $\overline{\partial} T$ sur tout ouvert de X ; donc $A_\varepsilon \overline{\partial} \hat{T}_{|\Omega}$ est un courant d'ordre.
$R_\varepsilon \hat{T}$ est de classe C^∞.
Donc $[T] = [(R_\varepsilon \hat{T} + A_\varepsilon \overline{\partial} \hat{T})_{|\Omega}]$ qui appartient à $\check{H}^{l}_{0,r}(\Omega)$, d'où la surjectivité de l'application naturelle.

■

Proposition 2.2.2
L'application naturelle de

$$H^{\infty}_{0,r}(\overline{\Omega}) \longrightarrow H^{l}_{0,r}(\overline{\Omega})$$

est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq n$.

Preuve.
Soit $[f] \in H^{\infty}_{0,r}(\overline{\Omega})$ telle que $[f] = 0$ dans $H^{l}_{0,r}(\overline{\Omega})$. Il existe $g \in C^{l}_{o,r-1}(\overline{\Omega})$ telle que $\overline{\partial} g = f$ dans Ω. Soit $\tilde{g}$ une extension de classe C^l de g à X. On a :

$$\tilde{g} = R_\varepsilon \tilde{g} + \overline{\partial} A_\varepsilon \tilde{g} + A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{g}.$$

Ceci entraine que :

$$\overline{\partial} g = \overline{\partial} (R_\varepsilon \tilde{g} + A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{g})_{|\overline{\Omega}}.$$

Puisque la régularité de $A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{g}$ est de (1-0) meilleure que celle de f sur un ε-voisinage de $\overline{\Omega}$ donc $A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{g}$ est de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$. Alors :

$$h = (R_\varepsilon \tilde{g} + A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{g})_{|\Omega}$$

est de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$ et on a $\overline{\partial} h = f$ sur Ω. Donc l'application naturelle est injective.
Soit $f \in H^{l}_{0,r}(\overline{\Omega})$, alors :

$$\tilde{f} = R_\varepsilon \tilde{f} + \overline{\partial} A_\varepsilon \tilde{f} + A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{f}$$

où $\tilde{f}$ est une extension de classe C^l de f à X avec $\overline{\partial} \tilde{f} = 0$ sur Ω.

$$f = (R_\varepsilon \tilde{f} + A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{f})_{|\Omega} + \overline{\partial} A_\varepsilon \tilde{f}_{|\Omega}$$

sur Ω. $(R_\varepsilon \tilde{f} + A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{f})$ est de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$; Donc $[f] = [(R_\varepsilon \tilde{f} + A_\varepsilon \overline{\partial} \tilde{f})_{|\Omega}]$. Ainsi l'application naturelle de

$$H^\infty_{0,r}(\bar{\Omega}) \longrightarrow H^l_{0,r}(\bar{\Omega})$$

est un isomorphisme. ■

Comme conséquense des propositions 2.2.1 et 2.2.2 nous avons la version C^l des annulations des groupes de $\overline{\partial}$-cohomologie des courants prolongeables de [55], [56] et [11], ainsi que les annulations des groupes de cohomologie des formes différentielles de classe C^l sur $\bar{\Omega}$ obtenus également dans ces travaux. Il s'agit du théorème suivant :

Théorème 2.2.3
Soit X une variété analytique complexe de dimension n, $\Omega \subset\subset X$ un domaine à bord lisse de classe C^∞, alors :

(a) Si Ω est complètement strictement $(q+1)$-convexe, $0 \leq q \leq n-2$ on a :

$$H^l_{0,r}(\bar{\Omega}) = 0 \textit{ pour } 1 \leq r \leq q+1$$

(b) Si X est une variété de Stein et si elle est une extension q-convexe de Ω, $1 \leq q \leq n-1$, on a :

$$H^l_{0,r}(X \setminus \Omega) = 0 \textit{ pour } n-q+1 \leq r \leq n-1$$

(c) Si Ω est complètement strictement q-convexe, $0 \leq q \leq n-1$, on a :

$$\check{H}^l_{0,r}(\Omega) = 0 \textit{ pour } 1 \leq n-q \leq r \leq n$$

(d) Si X est une variété de Stein et si elle est une extension q-convexe de Ω, $1 \leq q \leq n-1$, on a :

$$\check{H}^l_{0,r}(X \setminus \overline{\Omega}) = 0 \textit{ pour } 1 \leq r \leq q \textit{ et } r \leq n-2$$

(e) Si X est une variété de Kähler et si Ω est à bord lipschitzien et est $\log\delta$-pseudoconvexe, alors pour tout fibré holomorphe hermitien E sur X, on a :

$$H^l_{0,r}(X, \overline{\Omega}, E) = 0 \textit{ pour } 1 \leq r \leq n-1$$

(f) Si X est une variété de Kähler et si Ω est à bord lipschitzien et est $\log\delta$-pseudoconvexe on a :

$$\check{H}^l_{0,r}(\Omega) = 0 \textit{ pour } 1 \leq r \leq n-1$$

Remarque 2.2.4
Puisqu'un domaine strictement pseudoconvexe est complètement strictement $n-1$-convexe, donc en appliquant le point (c) du théorème 2.2.3 on obtient directement le théorème 2.1.1 de résolution du $\overline{\partial}$ pour les courants prolongeable d'ordre N dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$.

Proposition 2.2.5
Soit X une variété analytique complexe et S une hypersurface lisse de X de classe C^∞. Alors l'application

$$H^\infty_{0,r}(S) \longrightarrow H^l_{0,r}(S)$$

est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq n-1$.

Preuve.
Quitte à restreindre X, on peut supposer que S partage X en deux composantes connexes X^+ et X^-. Notons par $C^l_{0,r}(A)$ l'espace des (0,r)-formes de classe C^l sur A dont le $\overline{\partial}$ ou le $\overline{\partial}_b$ est aussi de classe C^l sur A où A peut désigner X, $\overline{X}^+$, $\overline{X}^-$ ou S. Des suites courtes

$$0 \longrightarrow C^l_{0,r}(X) \longrightarrow C^l_{0,r}(\overline{X}^+) \oplus C^l_{0,r}(\overline{X}^-) \longrightarrow C^l_{0,r}(S) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow C^\infty_{0,r}(X) \longrightarrow C^\infty_{0,r}(\overline{X}^+) \oplus C^\infty_{0,r}(\overline{X}^-) \longrightarrow C^\infty_{0,r}(S) \longrightarrow 0$$

on a les suites longues

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^l_{0,0}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & H^l_{0,0}(\overline{X}^+) \oplus H^l_{0,0}(\overline{X}^-) \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & {} \\
0 \arrow[r] & H^\infty_{0,0}(X) \arrow[r] & H^\infty_{0,0}(\overline{X}^+) \oplus H^\infty_{0,0}(\overline{X}^-) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^l_{0,0}(S) \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & H^l_{0,1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & \cdots \\
{} \arrow[r] & H^\infty_{0,0}(S) \arrow[r] & H^\infty_{0,1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les applications naturelles f_0, g_0, $f_1, \cdots$ sont des isomorphismes. Donc l'application naturelle

$$h_r : H^l_{0,r}(S) \longrightarrow H^\infty_{0,r}(S)$$

est un isomorphisme pour $0 \leq r \leq n-1$ ■

Théorème 2.2.6
Soit Ω un ouvert à bord C^∞ d'une variété analytique complexe X de dimension n. Soit $b\Omega$ le bord de Ω ; Alors :

(a) *Si $b\Omega$ est strictement q-concave, $q \geq \frac{n+1}{2}$, alors l'application naturelle $H^l_{0,r}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \check{H}^l_{0,r}(\Omega)$, $l = 0, 1 \cdots, \infty$, est un isomorphisme si $0 \leq r \leq q-1$ et est injective si $r = q$.*

(b) *Si $b\Omega$ est strictement q-convexe, $q \geq \frac{n+1}{2}$, alors l'application naturelle $H^l_{0,r}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \check{H}^l_{0,r}(\Omega)$, $l = 0, 1 \cdots, \infty$, est un isomorphisme si $r \geq n-q+1$ et est surjective si $r = n-q$.*

Preuve.
Ce résultat découle immédiatement des propositions 2.2.1 et 2.2.2 et de [56, corollaire III.10]. ■

Comme application des résultats précédents, on a :

Théorème 2.2.7
Soit X une variété analytique complexe de dimension n et S une hypersurface réelle de X. Si S a une hessienne ayant q valeurs propres de même signe, $q \geq \frac{n+1}{2}$, alors l'application naturelle de

$$H^l_{0,r}(S) \longrightarrow H^{\infty,cour}_{0,r}(S),\ l = 0, 1 \cdots, \infty,$$

est injective si $n-q+1 \leq r \leq q$ et est surjective si $n-q \leq r \leq q-1$.

Preuve.
Quitte à restreindre X, on peut supposer que S partage X en deux composantes connexes X^+ et X^-. Puisque
$H^l_{0,r}(\overline{X}^+) \simeq H^\infty_{0,r}(\overline{X}^+)$ et $H^l_{0,r}(\overline{X}^-) \simeq H^\infty_{0,r}(\overline{X}^-)$ pour $0 \leq r \leq n$, on remplace, grâce à la proposition 2.2.5, les données de classe C^∞ par des données de classe C^l, dans la suite longue de la preuve de [56, théorème IV.A.1]. On obtient alors le diagrame commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^l_{0,r}(X) \arrow[r] \arrow[d, "c_r"'] & H^l_{0,r}(\overline{X}^+) \oplus H^l_{0,r}(\overline{X}^-) \arrow[r] \arrow[d, "a_r"'] & H^l_{0,r}(S) \arrow[r] \arrow[d, "b_r"'] & {} \\
{} \arrow[r] & H^{l,cour}_{0,r}(X) \arrow[r] & \check{H}^l_{0,r}(X^+) \oplus \check{H}^l_{0,r}(X^-) \arrow[r] & H^{\infty,cour}_{0,r}(S) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^l_{0,r+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "c_{r+1}"'] & H^l_{0,r+1}(\overline{X}^+) \oplus H^l_{0,r+1}(\overline{X}^-) \arrow[r] \arrow[d, "a_{r+1}"'] & \cdots \\
{} \arrow[r] & H^{l,cour}_{0,r+1}(X) \arrow[r] & \check{H}^l_{0,r+1}(X^+) \oplus \check{H}^l_{0,r+1}(X^-) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les applications naturelles.

On peut supposer sans perte de généralité que X^+ se situe du coté convexe de S. D'après le théorème 2.2.6, a_r et a_{r+1} sont injectives si
$n-q+1 \leq r \leq q$ et sont surjectives si $n-q \leq r \leq q-1$. Puisque c_r et c_{r+1} sont des isomorphismes, on a le résultat grâce au lemme des 5. ■

Nous avons aussi la proposition suivante comme autre application

Proposition 2.2.8
Soit X une variété de Stein de dimension $n \geq 1$ et $\Omega \subset X$ un domaine relativement compact à bord $b\Omega$ lisse de classe C^∞ tel que X soit une extension q-convexe de Ω. Alors :

$$H^l_{0,r}(b\Omega) = 0 \textit{ pour } l = 0, \cdots, \infty \textit{ et } n-q \leq r \leq q-1.$$

Chapitre 3

Application à la résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles à valeurs au bord au sens des courants

Dans ce chapitre, nous montrons que si f est une forme qui a une valeur au bord au sens des courants et $\overline{\partial}$ fermée sur un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, alors il existe une forme u à valeur au bord au sens des courants telle que $\overline{\partial}u = f$. Il s'agit donc de prouver le théorème suivant :

Théorème 3.0.9 (Théorème Principal)
Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞ et soit f une $(0,r)$ forme différentielle de classe C^∞ $\overline{\partial}$ fermée admettant une valeur au bord au sens des courants, $1 \leq r \leq n$. Il existe une $(0,r-1)$ forme différentielle g de classe C^∞ ayant une valeur au bord au sens des courants, telle que $\overline{\partial}g = f$.

Selon Lojaciewicz et Tomassini [44], si une forme f admet une valeur au bord au sens des courants sur $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$, alors il existe un courant F à support compact sur $\overline{\Omega}$ telle que $F_{|\Omega} = f$. Ceci entraîne que f est un courant prolongeable et donc d'ordre fini l.

Nous savons d'après [55] que si f est un courant prolongeable $\overline{\partial}$ fermé, alors il existe un courant prolongeable U sur Ω tel que $\overline{\partial}U = f$. Cependant [55] ne nous permet pas de dire qu'il existe une forme de classe C^∞ U avec valeur au bord au sens des courants telle que $\overline{\partial}U = f$.

Pour établir ce théorème nous montrons que pour un courant prolongeable f sur Ω, d'ordre l et $\overline{\partial}$ fermé, il existe une solution U du $\overline{\partial}$ qui est aussi un courant prolongeable d'ordre l. Soit S une extension, d'ordre l à support compact sur $\overline{\partial}$, de U ; et posons

$F = \overline{\partial} S$. D'après la formule de $\overline{\partial}$-homotopie de [18], on a $S = R_\epsilon S + A_\epsilon F + \overline{\partial} A_\epsilon S$, où R_ϵ est un opérateur régularisant et A_ϵ un opérateur qui augmente la régularité de $1-\epsilon$ (confère [18]). Ainsi $S_\epsilon = R_\epsilon S + A_\epsilon F$ est une autre solution du $\overline{\partial}$ de F. Nous montrons qu'elle a une valeur au bord au sens des courants en partant d'un résultat préliminaire où nous montrons qu'une forme différentielle à croissance polynomiale sur Ω admet une valeur au bord au sens des courants.

Dans la première section de ce chapitre nous avons montrer qu'une forme à croissance polynomiale est un courant prolongeable de même ordre. La preuve du théorème principal du chapitre est abordée en dernière section en utilisant le résultat précédent et après avoir montré qu'une forme à croissance polynomiale admet une valeur au bord au sens des courants.

3.1 Remarque sur l'ordre d'un courant qui prolonge un forme différentielle à croissance polynomiale

Nous nous intéressons ici à l'étude de l'ordre d'un courant qui prolonge une forme différentielle à croissance polynomiale d'ordre N. Nous montrons qu'il existe un courant qui prolonge la forme à croissance polynomiale dont l'ordre est le même que celui de cette forme. Un tel courant d'ordre N est un courant prolongeable.

Nous allons d'abord établir le résultat suivant :

Proposition 3.1.1
Soit $u :]0, t_0[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une application vérifiant*

$$|u(t,x)| \leq \frac{K}{t^N}, \quad \forall\, t \in]0, t_0[\quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

pour un certain $K > 0$ *et un certain* $N > 0$. *Alors une primitive d'ordre* $[N]$ *par rapport à* t *de* u *est intégrable sur* $[0, t_0]$ *;* $[N]$ *désignant la partie entière de* N.

Preuve.
On a

$$|u(t,x)| \leq \frac{K}{t^N}$$

Si $0 < N < 1$

$$\int_0^{t_0} \frac{K}{t^N} dt = \Big[(1-N)K t^{1-N}\Big]_0^{t_0} < +\infty,$$

donc $u(t,x)$ est intégrable par rapport à t sur $[0, t_0]$.

Si $N \geq 1$;

On construit une suite de primitives d'ordre $k \leq [N]$ de u comme suit : pour tout $t \in]0, t_0[$,On pose

$$u_k(t,x) = \int_t^{t_0} u_{k-1}(y,x)\, dy \qquad \forall k = 1, \cdots, [N] \quad ,$$

avec $u_0(y,x) := u(y,x)$.

Montrons par recurrence que pour tout $k \leq [N]$, on a

$$|u_k(t,x)| \leq \alpha_k \int_t^{t_0} y^{k-N-1}\, dy \qquad (R_k).$$

α_k étant une constante qui ne dépend que de k.

Pour $k = 1$ on a

$$|u_1(t,x)| = \Big| \int_t^{t_0} u(y,x) dy \Big| \leq \int_t^{t_0} |u(y,x)| dy \leq K \int_t^{t_0} y^{-N}\, dy.$$

Supposons qu'on a la relation (R_k) jusqu'à l'ordre $[N]-1$ et montrons qu'on a aussi (R_{k+1}). On a

$$\begin{aligned}
|u_{k+1}(t,x)| &= \Big| \int_t^{t_0} u_k(y,x)\, dy \Big| \leq \int_t^{t_0} |u_k(y,x)| dy \\
&\leq \int_t^{t_0} \alpha_k \Big(\int_y^{t_0} u^{k-N-1}\, du \Big)\, dy \\
&\leq \frac{\alpha_k}{N-k} \int_t^{t_0} (y^{k-N} - t_0^{k-N})\, dy \\
&\leq \alpha_{k+1} \int_t^{t_0} y^{k-N}\, dy \quad .
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien la relation (R_k) pour tout $k = 1, \cdots, [N]$. En particulier

$$|u_{[N]}(t,x)| \leq \alpha_{[N]} \int_t^{t_0} y^{[N]-N-1}\, dy \quad .$$

Et puisque

$$\int_t^{t_0} y^{[N]-N-1}\, dy = \begin{cases} \ln(t_0 t^{-1}) \quad \text{si} \quad N \in \mathbb{N} \\ \\ (N-[N])^{-1}(t^{[N]-N} - t_0^{[N]-N}) \quad \text{sinon} \end{cases} \quad ,$$

donc $u_{[N]}(t,x)$ est intégrable par rapport à t sur $[0, t_0]$

■

Comme conséquence de la proposition précédente on a donc

Proposition 3.1.2
Soient $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse de classe C^∞ et f une fonction à croissance polynomiale d'ordre N sur Ω. Alors il existe une distribution d'ordre N, à support compact qui prolonge f au sens des courants

Preuve.
D'après [46] une distribution G définie sur Ω est prolongeable si et seulement si, il existe des constantes C et m telles que $|\langle G, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{m,\overline{\Omega}}$ où $\|\cdot\|_{m,\overline{\Omega}}$ est la norme de $C^m(\overline{\Omega})$. Il suffit de montrer que

$$\left|\int_\Omega f\varphi\right| \leq C\|\varphi\|_{m,\overline{\Omega}} \quad .$$

pour toute (n,n)-forme différentielle φ de classe C^∞ à support compact sur $\bar{\Omega}$. Pour $z \in \Omega$ suffisamment proche du bord $b\Omega$ de Ω, on peut prendre $d(z)$ comme la première composante d'un changement de coordonnées $(t_1, \ldots, t_{2n})$ dans un ouvert local contenant z et il existe alors un $K > 0$ tel que $|f(z)| \leq \frac{K}{t_1^N}$. Puisque $b\Omega$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $(U_i)_{i=1,\ldots,p}$ où chaque U_i est un ouvert de coordonnées $(t, x_1, \ldots, x_{2n-1})$ pour lequel on a $|f(z)| \leq \frac{K}{t^N}$ pour tout $z \in U_i$. D'après la proposition précédente, pour tout $i = 1, \ldots, p$, une primitive d'ordre $[N]$ de $f_{|U_i}$, notée $u^i_{[N]}(t,x)$, est intégrable par rapport à t sur U_i. Posons $U = \cup_{i=1}^p U_i$. On a

$$\int_\Omega f\cdot\varphi = \int_{\Omega\setminus U} f\cdot\varphi + \int_U f\cdot\varphi \quad .$$

Soit $(\theta_i)_{i=1,\ldots,p}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i=1,\ldots,p}$.

$$\begin{aligned}\int_U f\cdot\varphi &= \sum_{i=1}^p \int_{U_i} f\cdot\theta_i\varphi \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{U_i} D^{[N]} u^i_{[N]}\cdot\theta_i\varphi \quad .\end{aligned}$$

D'après le théorème de Stokes

$$\int_U f\cdot\varphi = \sum_{i=1}^p \pm\int_{U_i} u^i_{[N]}\cdot D^{[N]}\theta_i\varphi \quad .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\int_U f\cdot\varphi\right| &\leq \sum_{i=1}^p \int_{U_i} |u^i_{[N]}|\cdot|D^{[N]}\theta_i\varphi| \\ &\leq C_1\|\varphi\|_{N,\overline{\Omega}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Omega\setminus U} f\cdot\varphi\Big| &\le \int_{\Omega\setminus U}|f|\cdot|\varphi|\mathrm{d}V\\ &\le \Big(\int_{\Omega\setminus U}|f|\mathrm{d}V\Big)\|\varphi\|_{0,\overline{\Omega}}\\ &\le C_2\|\varphi\|_{0,\overline{\Omega}} \quad ,\end{aligned}$$

où dV eet l'élément de volume.

D'où

$$\Big|\int_{\Omega} f\varphi\Big| \le C\|\varphi\|_{N,\overline{\Omega}} \quad .$$

L'application

$$\begin{aligned}[f] : D^N(\overline{\Omega}) \subset C^N(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \varphi &\longmapsto \int_{\Omega} f\varphi\end{aligned}$$

est linéaire continue. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $F : C^N(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire et continue qui prolonge $[f]$. F est un prolongement de $[f]$ d'ordre N et à support compact dans $\overline{\Omega}$. ∎

En utilisant la proposition 3.1.2 et le théorème 2.1.1 nous allons aborder le problème du $\bar\partial$ pour les formes à croissance polynomiale. Ce problème n'est pas résolu. La solution obtenue n'est pas intéressante car il y'a perte de régularité.

Théorème 3.1.3

Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe à bord lisse de classe C^∞ et soit f une $(0,r)$ forme différentielle de classe C^∞ à croissance polynomiale d'ordre $N \ge 1$ et $\overline{\partial}$ fermée, $1 \le r \le n$. Il existe une $(0,r-1)$ forme différentielle g de classe C^∞ à croissance polynomiale d'ordre $2n-1+N$ sur Ω, telle que $\overline{\partial}g = f$.

Notons que le cas $0 < N < 1$ est traité dans [40] avec une solution d'ordre $N-\epsilon$ avec $0 < \epsilon < 1$.

Preuve.

f est un courant prolongeable d'ordre N, il existe un courant F d'ordre N à support compact sur $\overline{\Omega}$ qui prolonge f. D'après le théorème précédent $F = \overline{\partial}S$ où $S = R_\epsilon S + A_\epsilon F + \overline{\partial}A_\epsilon S$ est un courant prolongeable sur Ω de même ordre que F. Ainsi $R_\epsilon S + A_\epsilon F$ est une autre solution du $\overline{\partial}$ de F. Or $R_\epsilon S$ est une forme de classe C^∞ à support compact dans un ϵ voisinage du support de $\overline{\Omega}$, donc bornée sur $\overline{\Omega}$. La régularité de $A_\epsilon F$ est meilleure que celle de F dans un ϵ voisinage du support de F. Puisque F est C^∞ sur Ω, $A_\epsilon F$ est donc C^∞ sur Ω. Il nous suffit pour avoir le théorème de montrer que $A_\epsilon F$ restreinte à Ω est à croissance polynomiale d'ordre $2n-1+N$. Or $A_\epsilon F$ est de même nature que $\langle F, K(z,\xi)\rangle$ où $K(z,\xi)$ est le noyau de Bochner Martinelli Koppelmann. Nous allons donc montrer que $\langle F, K(z,\xi)\rangle$ est à croissance polynomiale d'ordre $2n-1+N$. Soit $z \in \Omega$, on a $d(z) > 0$. Considérons $B(z, r(z))$ la boule ouverte de centre z et de rayon $r(z) = \frac{d(z)}{4}$. Choisissons une fonction δ comprise entre 0 et 1 de sorte que $\delta = 1$ sur $\bar{B}(z, r(z))$ et $\delta = 0$ à l'extérieur de $B(z, 2r(z))$. On a alors

$$\langle F, \delta K(z,\xi)\rangle = \int_\Omega f(\xi) \wedge \delta K(z,\xi) \quad ,$$

car F étend f au sens des courants.

$$\int_\Omega f(\xi) \wedge \delta K(z,\xi) = \int_{supp(\delta)} f(\xi) \wedge \delta K(z,\xi) \quad .$$

Pour $\xi \in supp(\delta)$, $d(\xi) \geq distance(supp(\delta), b\Omega)$. Donc

$$|f(\xi)| \leq \frac{C}{distance(supp(\delta), b\Omega)^N}$$

et

$$distance(supp(\delta), b\Omega) \geq \frac{1}{2} d(z) \quad .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega f(\xi) \wedge \delta K(z,\xi)\Big| &\leq \int_\Omega |f(\xi)|.|\delta K(z,\xi)| dV(\xi) \\
&\leq \int_\Omega \frac{2^N}{d(z)^N} |\delta K(z,\xi)| dV(\xi) \\
&\leq \frac{2^N}{d(z)^N} M \int_\Omega \frac{dV(\xi)}{|\xi - z|^{2n-1}}
\end{aligned}$$

où M est une constante. On a donc

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega f(\xi) \wedge \delta K(z,\xi)\Big| &\leq \frac{2^N}{d(z)^N} M \int_\Omega \frac{dV(\xi)}{|\xi - z|^{2n-1+\epsilon} |\xi - z|^{-\epsilon}} \\
&\leq \frac{2^N}{d(z)^{N-\epsilon}} M \int_\Omega \frac{dV(\xi)}{|\xi - z|^{2n-1+\epsilon}} \\
&\leq \frac{C}{d(z)^{N-\epsilon}} \quad ,
\end{aligned}$$

pour $0 < \epsilon < 1$.

Ainsi $\langle F, \delta K(z,\xi)\rangle$ est à croissance polynomiale d'ordre $N-\epsilon$.

On a

$$\begin{aligned}
\langle F,(1-\delta)K(z,\xi)\rangle &\le C\|(1-\delta)K(z,\xi)\|_{N,\overline{\Omega}} \\
&\le C\|(1-\delta)K(z,\xi)\|_{N,\overline{\Omega}\setminus\overline{B}(z,r(z))} \\
&\le \sup_{\xi\in\overline{\Omega}\setminus\overline{B}(z,r(z))} \frac{C'}{|\xi-z|^{2n-1+N}} + \text{des termes moins} \\
&\quad \text{mauvais} \\
&\le \sup_{\xi\in\overline{\Omega}\setminus\bar{B}(z,r(z))} \frac{C''}{|\xi-z|^{2n-1+N}} \\
&\le \sup_{\xi\in\overline{\Omega}\setminus B(z,r(z))} \frac{C''}{|\xi-z|^{2n-1+N}} \\
&\le \frac{C''}{d(z)^{2n-1+N}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\langle F,(1-\delta)K(z,\xi)\rangle$ est à croissance polynomiale d'ordre $2n-1+N$. D'où $\langle F, K(z,\xi)\rangle$ est à croissance polynomiale d'ordre $2n-1+N$. ■

La solution obtenue n'est pas satisfaisante car on a une perte de régularité par rapport à la donnée innitiale. Cependant, il va nous permettre de résoudre le $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants.

3.2 Résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles à valeur au bord au sens des courants

Proposition 3.2.1
Soit Ω un domaine à bord lisse de classe C^∞ et soit f une fonction à croissance polynomiale sur Ω ; Alors f admet une valeur au bord au sens des distributions.

Preuve.
Elle est en trois parties.

Considérons φ, φ_ε et $\tilde{\varphi}$ comme dans la définition 1.0.10.

1. On montre dans la première partie que si $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma$ existe, alors elle ne dépend pas de l'extension $\tilde{\varphi}$ de φ choisie.

2. Dans la deuxième partie on montre que $\left(\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma\right)_{\varepsilon>0}$ est une famille de Cauchy.
3. Enfin dans la troisième partie on montre que l'application qui à $\varphi \in C^\infty(b\Omega) \longrightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma$ définit une distribution sur $b\Omega$.

1. Démonstration de la première partie :
   Soit $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\varphi}'$ deux extensions C^∞ de φ ; Donc $\tilde{\varphi}-\tilde{\varphi}'=0$ à l'ordre infini sur $b\Omega$. Posons $\psi=\tilde{\varphi}-\tilde{\varphi}'$. Soit $x\in b\Omega_\varepsilon$ et soit x_0 le point le plus proche de x dans $b\Omega$, d'après la formule de Taylor
   $$\begin{aligned}\psi(x)-\psi(x_0) &= o(\|x-x_o\|^k), \quad \forall k>0\\ &= o(\varepsilon^k), \quad \forall k>0.\end{aligned}$$
   Ceci entraîne que $\psi(x)=o(\varepsilon^k), \quad \forall k>0$.
   Soit N l'ordre de f ; on a :
   $$\left|\int_{b\Omega_\varepsilon} f\psi d\sigma\right| \le \int_{b\Omega_\varepsilon}\left|f\psi\right| d\sigma \le C\int_{b\Omega_\varepsilon}\frac{o(\varepsilon^k)}{\varepsilon^N} \quad \forall k>0.$$
   Il suffit de choisir $k>N$ pour que
   $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma=0;$$
   d'où le résultat
2. Démonstration de la deuxième partie :
   Puisque f est prolongeable en une distribution F à support compact, donc F est d'ordre fini m, et on a :
   $$\langle F,\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dV$$
   où dV désigne l'élément de volume.
   En plus, si F prolonge f, alors $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ prolonge $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ au sens des distributions, $\forall j=1,2,\cdots,n$.
   $$\begin{aligned}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma &= \int_{\Omega_\varepsilon} d(f\tilde{\varphi}d\sigma)\\ &= \sum_{j=1}^{2n}\Big(\int_{\Omega_\varepsilon} dx_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma)+\int_{\Omega_\varepsilon} f dx_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}d\sigma)\Big)\Big).\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} dx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\varphi} d\sigma) = \langle \frac{\partial F}{\partial x_j}, \tilde{\varphi}\rangle,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} f dx_j\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\varphi} d\sigma)\Big) = \langle F, \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\varphi}\rangle.$$

D'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma \text{ existe;}$$

d'où le résultat

3. Démonstration de la troisième partie.
   L'application

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(b\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longrightarrow & \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma \end{array}$$

   est une application linéaire.
   Il suffit de montrer qu'elle est continue pour qu'elle définisse une distribution.
   Puisque $\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma$ a une limite qui ne dépend pas de l'extension choisie, choisissons $\tilde{\varphi}$ telle que :

$$\|\tilde{\varphi}\|_{m,\bar{\Omega}} \leq C\|\varphi\|_{m,b\Omega}\text{ , où } m \text{ est l'ordre de } F.$$

$$\begin{aligned} \Big|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{b\Omega_\varepsilon} f\varphi_\varepsilon d\sigma\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^{2n}\Big(\langle\frac{\partial F}{\partial x_j}, \tilde{\varphi}\rangle \pm \langle F, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\rangle\Big)\Big| \\ &\leq C'\|\tilde{\varphi}\|_{m+1,\bar{\Omega}} \\ &\leq C'\|\varphi\|_{m+1,b\Omega}\,; \end{aligned}$$

   d'où le résultat.

■

Preuve du Théorème Principal (Théorème 3.0.9).
D'après [44], f est un courant prolongeable d'ordre l, il existe un courant F d'ordre l à support compact sur $\overline{\Omega}$ qui prolonge f. D'après le théorème précédent $f = \overline{\partial}U$ où U est un courant prolongeable sur Ω de même ordre que f. Soit S une extension, d'ordre l à support compact sur $\overline{\Omega}$, de U, avec $F = \overline{\partial}S$. D'après la formule de $\overline{\partial}$-homotopie de [18],

on a $S = R_\epsilon S + A_\epsilon F + \overline{\partial} A_\epsilon S$, où R_ϵ est un opérateur régularisant et A_ϵ un opérateur qui augmente la régularité de $1-\epsilon$. Ainsi $R_\epsilon S + A_\epsilon F$ est une autre solution du $\overline{\partial}$ de F. Or $R_\epsilon S$ est une forme de classe C^∞ à support compact dans un ϵ voisinage du support de S, donc bornée sur $\overline{\Omega}$. Donc $A_\epsilon F$ est le mauvais terme de la solution $R_\epsilon S + A_\epsilon F$, au sens où il n'admet pas immédiatement de valeur au bord. Sa régularité est meilleure que celle de F dans un ϵ voisinage du support de F. Puisque F est C^∞ sur Ω, $A_\epsilon F$ est donc C^∞ sur Ω. Montrons qu'il a une valeur au bord au sens des courants. Il nous suffit pour avoir le théorème de montrer que $A_\epsilon F$ restreinte à Ω admet une valeur au bord au sens des courants. Or $A_\epsilon F$ est de même nature que $\langle F, K(z,\xi)\rangle$ où $K(z,\xi)$ est le noyau de Bochner Martinelli Koppelmann. Nous allons donc montrer que $\langle F, K(z,\xi)\rangle$ admet une valeur au bord au sens des courants.

$u(z) := \langle F, K(z,\xi)\rangle$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$, ρ une fonction à support compact sur $B(z, \frac{d(z)}{2})$ comprise entre 0 et 1 qui vaut 1 sur $B(z, r(z) = \frac{d(z)}{4})$, où $d(z)$ est la distance de z au bord de Ω. On a :

$$u(z) = \langle F, \rho K(z,\xi)\rangle + \langle F, (1-\rho)K(z,\xi)\rangle.$$

Puisque F étend f au sens des courants, posons $u_1(z) = \langle F, \rho K(z,\xi)\rangle = \int_{z\in\Omega} \rho f \wedge K(z,\xi)$.

u_1 est une forme de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$; donc admet une valeur au bord au sens des courants.

Posons $u_2(z) = \langle F, (1-\rho)K(z,\xi)\rangle$. Puisque l est l'ordre du courant F qui prolonge f, on a :

$$\begin{aligned}
u_2(z) &\leq C\|(1-\rho)K(z,\xi)\|_{l,\overline{\Omega}}\\
&\leq C\|(1-\rho)K(z,\xi)\|_{l,\overline{\Omega}\setminus\overline{B}(z,r(z))}\\
&\leq \sup_{\xi\in\overline{\Omega}\setminus\overline{B}(z,r(z))} \frac{C'}{|\xi - z|^{2n-1+l}} + \text{des termes moins}\\
&\quad \text{mauvais}\\
&\leq \sup_{\xi\in\overline{\Omega}\setminus\overline{B}(z,r(z))} \frac{C''}{|\xi - z|^{2n-1+l}}\\
&\leq \sup_{\xi\in\overline{\Omega}\setminus B(z,r(z))} \frac{C''}{|\xi - z|^{2n-1+l}}\\
&\leq \frac{C'''}{d(z)^{2n-1+l}}.
\end{aligned}$$

Donc u_2 est une forme à croissance polynomiale sur Ω ; elle admet alors une valeur au bord au sens des courants d'après la proposition 3.2.1. ■

Deuxième partie

Plongement de structures CR de fibrés en tores $\mathbb{T}^2$ sur S^1

Chapitre 4

Stuctures CR

4.1 Structures CR abstraites

4.1.1 Définition

Soit M une variété différentiable réelle de classe C^∞ et de dimension m. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq n \leq [m/2]$ où $[m/2]$ désigne la partie entière de $m/2$. Soit $TM \otimes \mathbb{C}$ le complexifié du fibré tangent à M i.e

$TM \otimes \mathbb{C} = \left\{u \otimes 1 + v \otimes \sqrt{-1},\ u, v \in TM\right\}$.

Par abus d'écriture on met $u + \sqrt{-1}v$ à la place de $u \otimes 1 + v \otimes \sqrt{-1}$.

Définition 4.1.1
Une structure presque CR complexe abstraite de type (n, d) sur M est la donnée d'un sous-fibré complexe $T^{10}M$ de rang n du fibré tangent complexe $TM \otimes \mathbb{C}$ à M, tel que l'on ait $T^{10}M \cap T^{01}M = 0$ où $T^{01}M$ désigne le conjugué complexe $T^{10}M$. Les entiers n et $d = m - 2n$ sont respectivement la dimension et la codimention CR de la structure presque CR et (n, d) est son type. Ainsi $(M, T^{10}M)$ est appelée variété presque CR de type (n, d).

Remarque 4.1.2
Une variété presque CR de type $(n, 0)$ (i.e $m = 2n$) est une variété presque complexe.

Soit $E \longrightarrow M$ un fibré vectoriel, notons par $\Gamma(U, E)$ l'espace des sections transversales dans E de classe C^∞ définies sur l'ouvert $U \subset M$, et par $\Gamma(E)$ pour $\Gamma(M, E)$ (l'espace des sections lisses globalement définies). Ainsi E_x est la fibre au dessus de $x \in M$.

Définition 4.1.3
Une structure presque CR abstraite complexe $T^{10}M$ sur M de type donné est dite (formel-

lement) intégrable si pour tout sous-ensemble $U \subset M$,

$$[\Gamma(U, T^{10}M); \Gamma(U, T^{10}M)] \subset \Gamma(U, T^{10}M); \tag{4.1.1}$$

c'est à dire pour tout $Z, W \in \Gamma(U, T^{10}M)$,

$[Z, W]_x \in T^{10}M_x$, pour tout $x \in U$.

Une structure presque CR complexe abstraite (formellement) intégrable de type (n, d) est appelée structure CR complexe abstraite de type (n, d) et dans ce cas $(M, T^{10}M)$ est appelée variété CR abstraite de type (n, d). Les structure CR de type $(n, 0)$ sont exactement les structures complexes.

Définition 4.1.4
La distribution de Levis d'une variété presque CR abstraite $(M, T^{10}M)$ de type (n, d) est le sous fibré $HM \subset TM$ de rang réel $2n$ défini par :

$$HM = \mathscr{R}e(T^{10}M \oplus T^{01}M).$$

HM est aussi appelée distribution complexe maximale ; elle porte l'application stucture complexe $J_b : HM \longrightarrow HM$ donnée par $J_b(V + \overline{V}) = i(V - \overline{V})$ pour tout $V \in T^{10}M$ avec $i = \sqrt{-1}$.

Proposition 4.1.5 ([33])
Une structure presque CR complexe $T^{10}M$ est intégrable si et seulement si

$$[J_bX, Y] + [X, J_bY] \in \Gamma(U, HM) \tag{4.1.2}$$

$$[J_bX, J_bY] - [X, Y] = J_b([J_bX, Y] + [X, J_bY]) \tag{4.1.3}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(U, HM)$.

Remarque 4.1.6
Dans le cas d'une structure presque complexe (i.e $2n = m$) J_b est définie sur TM et la condition 4.1.2 précédente est réalisée ; ce qui n'est pas le cas si $2n < m$.

Définition 4.1.7 *(Structure presque CR réelle)*
Une structure presque CR réelle abstraite de type (n, d) sur M est la donnée d'un sous-fibré $H \subset TM$ de rang $2n$ et d'une structure presque complexe J sur H. On la note (H, J).

Définition 4.1.8
Une structure CR réelle abstraite de type (n, d) sur M est une structure presque CR (H, J) qui est formellement intégrable ; c'est à dire qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$[J_bX, Y] + [X, J_bY] \in \Gamma(U, H) \tag{4.1.4}$$

$$[J_bX, J_bY] - [X, Y] = J_b([J_bX, Y] + [X, J_bY]) \tag{4.1.5}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(U, H)$.

Proposition 4.1.9
La variété M supporte une structure CR complexe abstraite $T^{10}M$ si et seulement si elle supporte une structure CR réelle abstraite (H, J).

Preuve.
Si $T^{10}M$ est une srtucture CR complexe abstraite alors d'après la proposition 4.1.5 sa distribution de Levi HM munie de sa structure presque complexe J_b est une structure CR réelle abstraite.

Supposons maintenant que (H, J) est une structure CR réelle abstraite et soit $H^{10} = \{X - iJX : X \in H\}$ le sous espace correspondant à la valeur propre $i = \sqrt{-1}$ de l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de J à $H \otimes \mathbb{C}$. Soient $W_1, W_2 \in H^{10}$, alors $W_1 = X + iJX,\ W_2 = Y + iJY$ et on a :

$[W_1, W_2] = [X, Y] - [JX, JY] - i([JX, Y] + [X, JY])$,

Puisque d'après les relations 4.1.4 et 4.1.5 on a :

$[JX, Y] + [X, JY] = J([X, Y] - [JX, JY])$; Donc

$[W_1, W_2] = [X, Y] - [JX, JY] - iJ([X, Y] - [JX, JY]) \in H^{10}$. ∎

Ainsi si (H, J) est une structure CR réelle abstraite sur M, alors la distribution de Levi de la variété presque CR (M, H, J) est $HM = H$ et sa structure complexe est $J_b = J$.

Remarque 4.1.10
Soit $(M, T^{10}M)$ une structure CR et soit $U \subset M$. Donc $\Gamma(U, T^{10}M)$ et $\Gamma(U, T^{01}M)$ sont stables par crochet de Lie mais ce n'est pas le cas pour $\Gamma(U, HM \otimes \mathbb{C})$.
En effet soient $V, W \in \Gamma(U, HM \otimes \mathbb{C})$; puisque
$HM \otimes \mathbb{C} = T^{10}M \oplus T^{01}M$, donc
$V = V_1 + V_2$ et $W = W_1 + W_2$, $V_1, W_1 \in \Gamma(U, T^{10}M)$, $V_2, W_2 \in \Gamma(U, T^{01}M)$. On a :

$[V, W] = [V_1, W_1] + [V_2, W_2] + [V_1, W_2] + [V_2, W_1]$

$[V_1, W_1] \in \Gamma(U, T^{10}M)$ et $[V_2, W_2] \in \Gamma(U, T_{01}M)$ d'après la condition d'intégrabilité formelle 4.1.1, donc

$$[V_1, W_1],\ [V_2, W_2] \in \Gamma(U, HM \otimes \mathbb{C}).$$

Cependant $[V_1, W_2]$ et $[V_2, W_1]$ n'appartiennent pas toujours à $\Gamma(U, HM \otimes \mathbb{C})$. Ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 4.1.11
Une structure CR $(M, T^{10}M)$ est dite Levi-plâte si une quelconque des deux sections $\Gamma(U, HM \otimes \mathbb{C})$ et $\Gamma(U, HM)$ est stable par Crochet de Lie.

4.1.2 Forme de Levi d'une structure CR abstraite

Soit $(M, T^{10}M)$ une variété CR de type (n, d), $1 \leq d \leq m-2$.

Considérons l'annulateur E de HM dans le fibré cotangent T^*M de M. E est un sous fibré réel de rang d de T^*M. On a :

$E = \{\alpha \in T^*M : \ \alpha(X) = 0, \forall X \in \Gamma(M, HM)\}$

$E_x = \{\alpha \in T^*_x M : \ \ker(\alpha) \supseteq H_x M\}$ est la fibre de E au dessus de $x \in M$. Ici $T^*_x M$ est la fibre de T^*M au dessus de x. On a $E = \dfrac{TM^*}{HM^*} \simeq \left(\dfrac{TM}{HM}\right)^* \simeq \dfrac{TM}{HM}$

Définition 4.1.12
Soit $(M, T^{10}M)$ une structure CR et soit $\alpha_x \in E_x$. Soient L_{α_x} et G_{α_x} définies respectivement sur $\Gamma(M, T^{10}_x M)^2$ et $\Gamma(M, H_x M)^2$ par :

$$L_{\alpha_x}(z, w) = i\alpha_x([Z, \overline{W}]_x) = -i d\alpha(Z, \overline{W}) \tag{4.1.6}$$

où Z, W et α sont des extensions quelconques de z, w et α_x. Ici α_x est étendue à $T_x M \otimes \mathbb{C}$.

$$G_{\alpha_x}(u, v) = d\alpha_x(u, J_b v) = -\alpha([U, J_b V]) \tag{4.1.7}$$

où U, V et α sont des extensions quelconques de u, v et α_x.

L_{α_x} et G_{α_x} sont appelées forme de Levi dans la codirection α_x respectivement de la structure CR complexe et de sa structure réelle associée.

Remarque 4.1.13
L_{α_x} et l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de G_{α_x} à $H_x M \otimes \mathbb{C}$ coincident sur $T^{10}_x M \otimes T^{01}_x M$.

$G_{\alpha_x}(J_b v, J_b v) = G_{\alpha_x}(v, v)$; Ainsi la forme quadratique associée à G_{α_x} est une forme hermitienne pour la structure complexe de $H_x M$ définie par J_b.

Un calcul simple nous donne la proposition suivante :

Proposition 4.1.14
Une structure CR est Levi-plâte si et seulement si pour tout α_x, $L_{\alpha_x} \equiv 0$ (ou de manière équivalente $G_{\alpha_x} \equiv 0$).

Rappel 4.1.15 *(Quelques résultats d'Algèbre Bilinéaire)*
Soit (p^+, p^-) la signature de la forme quadratique associée à la forme de Levi L_{α_x}.

- *On dit que L_{α_x} est non dégénérée si $p^+ + p^- = n$. De ce fait la variété CR M est non dégénérée si et seulement si L_{α_x} l'est pour tout $x \in M$.*
- *On dit que L_{α_x} est positive (respect. négative) si $p^- = 0$ (respect. $p^+ = 0$).*

– *On dit que* L_{α_x} *est définie positive si elle est positive et non dégénérée (i.e* $p^+ = n$*).*
– *On dit que* L_{α_x} *est définie négative si elle est négative et non dégénérée (i.e* $p^- = n$*).*
Ces notions sont aussi valables avec la forme quadratique associée à G_{α_x}*.*

Définition 4.1.16 *(Pseudoconvexité)*

1. *On dit qu'une variété CR est strictement pseudoconvexe (respect. strictement pseudoconcave) en* x *si pour tout* $\alpha_x \in E_x$, L_{α_x} *est définie positive (respect. définie négative). Si la variété CR* M *est strictement pseudoconvexe en tout point* $x \in M$*, alors on dit que* M *est strictement pseudoconvexe.*
2. *On dit qu'une variété CR* M *est* q*-convexe (respect.* q*-concave) en* $x \in M$, $0 \leq q \leq n$ *si pour tout* $\alpha_x \in E_x$*, la signature de* L_{α_x} *est* (p^+, p^-) *avec* $p^+ \geq q$ *(respect.* $p^- \geq q$*).*

Remarque 4.1.17

1. *Si une variété CR dégénérée de type hypersurface est* q*-convexe (ou* q*-concave) pour* $q > 0$ *, alors sa distribution de Levi est une distribution d'hyperplans appelée feuilletact.*
2. *Si la variété CR* M *est non dégénérée, alors elle est* q*-convexe si et seulement si elle est* $(n-q)$*-concave.*

4.2 Structure pseudo-hermitienne

Ici nous supposons que la structure CR $(M, T^{10}M)$ est de type hypersurface.

4.2.1 Variété pseudo-hermitienne

Considérons toujours l'annulateur E de HM dans le fibré cotangent T^*M de M. Puisque M est orientable et HM est orientée par sa structure complexe J_b, donc E est un fibré en droite orientable sur une variété connexe, donc il est trivial. Ainsi il existe une section $\theta \in \Gamma(E)$ globalement définie qui ne s'annule nulle part. θ est appelée structure pseudohermitienne sur M et on a $\ker\theta = HM$. En se référant à la définition 4.1.12, on définit la forme de Levi L_θ de θ par :

$$L_\theta(Z, \overline{W}) = -i d\theta(Z, \overline{W}) \quad Z, W \in \Gamma(M, T^{10}M) \tag{4.2.1}$$

De même on définit G_θ sur $\Gamma(M, HM)$ par $G_\theta(X, Y) = d\theta(X, J_bY) = -\theta[X, J_bY]$, pour tout $X, Y \in \Gamma(M, HM)$. G_θ est la forme de Levi associée à la structure CR réelle sur M. Ainsi L_θ et l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de G_θ à $HM \otimes \mathbb{C}$ coincident sur $T^{10}M \otimes T^{01}M$. Donc pour tout $X, Y \in HM$,

$$\begin{aligned} G_\theta(J_bX, J_bY) - G_\theta(X,Y) &= -d\theta(J_bX, Y) - d\theta(X, J_bY) \\ &= \theta([J_bX, Y]) + \theta([X, J_bY]) \\ &= \theta(J_b[X,Y] - [J_bX, J_bY]) \quad \text{d'après 4.1.3.} \end{aligned}$$

Puisque $\theta \circ J_b = 0$, donc $G_\theta(J_bX, J_bY) = G_\theta(X,Y)$ pour tout $X, Y \in HM$. Ainsi G_θ est symétrique.

Remarque 4.2.1
Si θ et $\hat{\theta} = \lambda\theta$ (avec λ une fonction de classe C^∞ sur M) sont deux structures pseudo-hermitiennes, alors $d\hat{\theta} = d\lambda \wedge \theta + \lambda d\theta$. Puisque $\ker\theta = HM$, alors l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de θ s'annule sur $T^{10}M$ et $T^{01}M$. Ainsi, $L_{\hat{\theta}} = \lambda L_\theta$. De ce fait $L_{\hat{\theta}}$ est nondégénérée si et seulement si $L_{\hat{\theta}}$ est non dégénérée. Ainsi la non dégénéréscence est une propriété d'invariance CR ; c'est à dire qu'elle est invariante par la transformation $\hat{\theta} = \lambda\theta$. Ce qui n'est pas le cas pour la stricte pseudoconvexité car si L_θ est définie positive, alors $L_{-\theta}$ est définie négative.

Définition 4.2.2
Soit M une variété CR non dégénérée et θ une structure pseudo-hermitienne fixée sur M. Le couple (M,θ) est appelé variété pseudo-hermitienne.

Définition 4.2.3
Soit $f : M \longrightarrow N$ une application CR et θ et θ_N deux structures pseudo-hermitiennes sur M et N respectivement. Alors $f^*\theta_N = \lambda\theta$, pour un certain $\lambda \in C^\infty(M)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors f est dite pseudo-hermitienne. Si $\lambda = 1$ alors f est dite isopseudo-hermitienne.

4.2.2 Direction caractéristique et métrique de Webster

Soit $(M, T^{10}M)$ une variété CR et soit θ une structure pseudo-hermitienne sur M fixée. Puisque $(M, T^{10}M)$ est intégrable, on a d'après la linéarité de L par rapport à θ (qui provient de la relation $L_{\hat{\theta}} = \lambda L_\theta$ de la remarque 4.2.1) :

$d\theta(Z,W) = -\theta([Z,W]) = 0$ pour tout $Z, W \in \Gamma(M, T^{10}M)$; où $d\theta$ et θ sont étendues $\mathbb{C}$-linéairement à $TM \otimes \mathbb{C}$. Nous avons aussi $d\theta(\overline{Z}, \overline{W}) = 0$, pour tout $Z, W \in \Gamma(M, T^{10}M)$. Cette dernière égalité peut aussi s'obtenir par conjugaison complexe.

Proposition 4.2.4
Si $(M, T^{10}M)$ est non dégénérée, alors $d\theta$ est non dégénérée sur HM.

Preuve. Soit $X \in \Gamma(M, HM)$ et soit $\imath_X$ le produit intérieur avec X. On a : $X = Z + \overline{Z}$, avec $Z \in \Gamma(M, T^{10}M)$ et $(\imath_X d\theta)(\cdot) = d\theta(X, \cdot)$.

supposons que $d\theta(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in HM$. Pour tout champ de vecteurs Y sur M, $Y \in \chi(M)$, on a $(\imath_X d\theta)(Y) = d\theta(X, Y)$. Soit $\imath_X d\theta$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de $\imath_X d\theta$; donc on a $d\theta(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in \Gamma(M, HM \otimes \mathbb{C}) = \Gamma(M, T^{10}M \oplus T^{01}M)$. En particulier :

$$\begin{aligned} 0 = d\theta(X, \overline{W}) &= d\theta(Z + \overline{Z}, \overline{W}) \\ &= d\theta(Z, \overline{W}) + d\theta(\overline{Z}, \overline{W}) \\ &= d\theta(Z, \overline{W}) \\ &= -iL_\theta(Z, \overline{W}), \quad \forall W \in \Gamma(M, T^{10}M). \end{aligned}$$

Donc on a $Z = 0$. Ce qui entraine que $X = 0$. ■

Proposition 4.2.5 ([24], Prop. 1.2)
Il existe un champ de vecteurs T tangent sur M, globalement défini, qui ne s'annule nulle part tel que : $\theta(T) = 1$ et $\imath_T d\theta = 0$. T est transverse à la distribution de Levi HM et est appelé direction caractéristique de la variété pseudo-hermitienne (M, θ).

Preuve.
On montre par le lemme suivant qu'il existe T tel que $\imath_T d\theta = 0$ puis en utilisant le fait que E est orientable, on en déduit qu'il existe un unique T tel que $\theta(T) = 1$. ■

Lemme 4.2.6 ([24], Proposition 1.3) *(Résultat d'algèbre linéaire)*
Soit V un espace vectoriel réel de dimension $(n+1)$ et $H \subset V$ un sous-espace vectoriel de dimension n. Soit ω une forme bilinéaire antisymétrique sur V. Supposons que w est non dégénérée sur H. Alors il existe $v_0 \in V$, $v_0 \neq 0$, tel que $\omega(v_0, v)$=0, pour tout $v \in V$.

Soit $X \in TM$ et posons $Y = X - \theta(X)T$, alors $\theta(Y) = 0$ c'est à dire $Y \in \ker\theta$. Ce qui entraine :

Proposition 4.2.7 ([24], Prop. 1.4)
Soit $(M, T_{10}M)$ une variété CR non dégénérée, θ une structure pseudo-hermitienne sur M et T la direction caractéristique correspondante. Alors $TM = HM \oplus \mathbb{R}T$.

En utilisant la relation $TM = HM \oplus \mathbb{R}T$, on peut étendre G_θ en une métrique semi-riemannienne g_θ sur M appelée métrique de Webster.

Définition 4.2.8
Soit (M,θ) *une variété pseudo-hermitienne,* $G_\theta : HM^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*, telle que* $G_\theta(\cdot,\cdot) = d\theta(\cdot, J_b\cdot)$ *et* T *la direction caractéristique correspondante. On appelle métrique de Webster de* (M,θ)*, la métrique semi-riemannienne* g_θ *sur* M*,* $g_\theta : TM = HM \oplus \mathbb{R}T \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec :*

$$g_\theta(X,Y) = G_\theta(X,Y),\ \ g_\theta(X,T) = 0\ \ \text{et}\ \ g_\theta(T,T) = 1\ \ \text{pour tout}\ X,Y \in HM.$$

Remarque 4.2.9

1. g_θ *est une extension à* M *de* G_θ.
2. *Si* $(M, T_{10}M)$ *est non dégénérée, alors la signature* (r,s) *de* L_{θ_x} *ne dépend pas de* $x \in M$*. Ainsi puisque* L_{θ_x} *et* $L_{(\lambda\theta)_x}$ *ont même signature,* $\lambda \in \mathbb{R}^*$*, alors* (r,s) *est un invariant CR. De plus puisque* $\dim M = 2(r+s)+1$*, donc la signature de la métrique de Webster* g_θ *est* $(2r+1, 2s)$.
3. *Si* $(M, T_{10}M)$ *est une structure CR strictement pseudo-convexe (i.e* θ *est telle que* L_θ *est définie positive), alors* g_θ *est une métrique riemannienne.*

Proposition 4.2.10
Soit $\pi_H : TM = HM \oplus \mathbb{R}T \longrightarrow HM$*, la projection sur* HM*. Soit* $\pi_H G_\theta$ *le tenseur de type* $(0,2)$ *défini par* $(\pi_H G_\theta)(X,Y) = G_\theta(\pi_H X, \pi_H Y)$*, pour tout* $X, Y \in TM$*. Alors la métrique de Webster peut s'écrire :* $g_\theta = \pi_H G_\theta + \theta \otimes \theta$.

Preuve.
$g_\theta(X,Y) = (\pi_H G_\theta)(X,Y) + \theta \otimes \theta(X,Y) = (\pi_H G_\theta)(X,Y) + \theta(X)\theta(Y)$.

- Si $X, Y \in HM$, alors $\theta(X) = \theta(Y) = 0$ et $g_\theta(X,Y) = (\pi_H G_\theta)(X,Y) = G_\theta(\pi_H X, \pi_H Y) = G_\theta(X,Y)$.
- Si $X \in HM$ et $Y = T$, $\theta(X)\theta(T) = 0$ et $g_\theta(X,Y) = G_\theta(\pi_H X, \pi_H T) = G_\theta(X,0) = 0$.
- Si $X = T = Y$, alors $(\pi_H G_\theta)(T,T) = G_\theta(\pi_H T, \pi_H T) = G_\theta(0,0) = 0$ et $g_\theta(T,T) = \theta(T)\theta(T) = 1 \times 1 = 1$.

■

Remarque 4.2.11
g_θ *n'est pas un invariant CR. En effet si* $\hat\theta = \lambda\theta$ *est une structure pseudo-hermitienne, on a :* $G_{\hat\theta} = \lambda G_\theta$ *;* $\hat\theta \otimes \hat\theta = \lambda^2 \theta \otimes \theta$ *et* $\pi_H G_{\hat\theta} = \lambda \pi_H G_\theta$.

4.3 Structures CR plongeables

Soit X une variété complexe de dimension complexe N et $M \subset X$ une sous-variété de dimension réelle m. Posons $T^{10}M = T^{10}X \cap (TM \otimes \mathbb{C})$ où $T^{10}X$ est le fibré tangent holomorphe à X. C'est à dire que localement $T^{10}X$ est engendré par $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^j};\ 1 \le j \le N\right\}$, où $(z^1, \cdots, z^N)$ sont des coordonnées complexes locales sur X. Les vecteurs de $T_x^{10}M$ sont appelés vecteurs tangents holomorphes à M en $x \in M$. Ce sont les vecteurs de $T_x^{10}X$ qui sont tangents à M en x.

Posons $H_xM = T_xM \cap J(T_xM)$ où J est la structure complexe naturelle sur T_xX. L'application φ qui à tout $z \in T_x^{10}M$ associe sa partie réelle réalise un isomorphisme de $T_x^{10}M$ dans H_xM. Soit J_1 la structure complexe naturelle sur $T_x^{10}M$, alors on a $J_{bx} = \varphi \circ J_1 \circ \varphi^{-1}$ où $J_{bx} : H_xM \longrightarrow H_xM$ avec $J_{bx}(v + \bar{v}) = i(v - \bar{v})$. Donc φ transforme la structure complexe J_1 en la structure complexe J_{bx} (qui est la structure complexe naturelle sur H_xM induite par J).

En générale la dimension complexe de $T_x^{10}M$ dépend de $x \in M$. Cependant si $\dim_{\mathbb{C}} T_x^{10} = n$ est constante, puisque $T^{10}X$ est une structure complexe sur X (donc CR de type $(N, 0)$), alors $(M, T^{10}M)$ est une variété CR de type $(n, d = m - 2n)$.

Définition 4.3.1
On appelle sous-variété CR de type (n, d) de X toute sous-variété différentiable M, $\dim M = 2n + d$*, telle que* $\dim_{\mathbb{C}} T_x^{10}M = n$ *est constante pour tout $x \in M$. Si de plus $d = 2N - m$, avec $m =$* $\dim M$ *et $N =$* $\dim X$ *alors on dit que la sous-variété CR M de X est générique.*

Exemple 4.3.2
Toute hypersurface réelle de X est une sous-variété CR générique.

Soit M une sous-variété CR de type (n, d) d'une variété complexe X, alors pour tout ouvert local $U \subset X$, on a : $M \cap U = \{z \in U \mid \rho_1(z) = \cdots = \rho_d = 0\}$ où $\rho_1, \cdots \rho_k$ sont des fonctions différentiables telles que : $d\rho_1 \wedge \cdots \wedge d\rho_d \neq 0$ sur M. Le fibré $T^{10}M$ est alors $\bigcap\limits_{1 \le j \le d} \ker(\partial\rho_j)$ où $\partial\rho_j$ est considérée comme une forme linéaire sur $T^{10}X$. Soit NM le fibré normal de M; si $x \in M$ alors N_xM est l'orthogonal de T_xM dans l'espace réel T_xX, c'est à dire l'espace vectoriel réel engendré par les $\nabla\rho_j(z)$, $1 \le j \le l$ où $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}; \cdots; \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_N}\right)$.

La forme de Levi $\mathscr{L}_M(x)$ de M en x est la forme hermitienne définie sur $T_x^{10}M$ et à valeurs dans N_xM qui est donnée par :

$\mathscr{L}_M(x) \cdot t = i\pi_x\, (J[L; \bar{L}]_z)$ pour tout $t \in T_x^{10}M$

où π_x est la projection orthogonale de T_xX sur N_zM, où L est n'importe quel champ de vecteurs holomorphes tangent vérifiant $L_z = t$ et où J est la structure complexe naturelle sur X. Si $\nu \in N_zM$, on définit sur $T_z^{10}M$, la forme de Levi de M dans la direction ν par la formule :

$\mathscr{L}_{M,v}(z)\cdot t =< v, \mathscr{L}_M(z)\cdot t >$, où $<\cdot,\cdot>$ désigne la forme hermitienne usuelle sur X. On remarquera que $\mathscr{L}_{M,v}$ joue le même rôle que la forme de Levi dans une codirection qu'on définirait si M était considérée comme variété CR abstraite.

Lorsqu'en un point z de M, le système $(\nabla\rho_1;\cdots;\nabla\rho_k)$ est orthonormé, on vérifie que pour tout $t\in T^{10}_z M$:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{M,v}(z)\cdot t &= \sum_{1\le j\le d} < v;\nabla\rho_j(z) > \mathscr{L}_{\rho_j}\cdot t\\ &:= \mathscr{L}_{\rho,v}(z)\cdot t \text{ où } \rho=(\rho_1;\cdots;\rho_d);\end{aligned}$$

ici $\mathscr{L}_{\rho_j}(z)\cdot t = \sum_{1\le a,b\le n}\dfrac{\partial^2\rho_j}{\partial z^a\partial\bar z^b}(z)\,t_a\bar t_b$ est appelée forme de Levi de ρ_j en z.

Notons que ces expressions sont intrinsèques.

Remarque 4.3.3
Si M est CR, alors la condition $d\rho_1\wedge\cdots\wedge d\rho_d\neq 0$ sur M est équivalente à la condition $\overline{\partial}\rho_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\rho_d\neq 0$ sur M qui est équivalente à la condition $\partial\rho_1\wedge\cdots\wedge\partial\rho_d\neq 0$ sur M.

Définition 4.3.4
Soient $(M,T^{10}M)$ et $(N,T^{10}N)$ deux variétés CR abstraites de types donnés. Une application $f: M\to N$ de classe C^∞ est dite CR si on a : $(d_x f)(T^{10}_x M)\subset T^{10}_{f(x)}N$, pour tout $x\in M$ où $d_x f$ est l'extension $\mathbb{C}$-linéaire à $T_xM\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ de la différentielle de f en x.

En particulier une application $f: M\to\mathbb{C}^N$ est CR si $f_*(T^{01}M)$ est un sous-fibré du fibré complexe engendré par les champs $\dfrac{\partial}{\partial\bar z_1};\cdots;\dfrac{\partial}{\partial\bar z_N}$. Ceci équivaut à $\overline{Z}f=0$ pour tout $Z\in T^{10}M$; ces équations sont dites de Cauchy-Riemmann tangentielles et sont notées par $\bar\partial_b f=0$

Exemple 4.3.5 *Les applications holomorphes sont des applications CR.*

Proposition 4.3.6
Soit $(M,T^{10}M)$ et $(N,T^{10}N)$ deux variétés CR de types donnés. Si $f: M\longrightarrow N$ est une application de classe C^∞, alors f est CR si et seulement si

$(d_xf)(H_xM)\subset H_{f(x)}N$ et $(d_xf)\circ(J_{b,x})=(J^N_{b,f(x)})\circ(d_xf)$ pour tout $x\in M$.

Ici H_xM désigne la fibre au dessus de x et J^N_b l'application structure complexe sur la distribution de Levi HN de N.

Définition 4.3.7
Soit $(M,T^{10}M)$ et $(N,T^{10}N)$ deux variétés CR de types donnés. On dit qu'une application $f: M\longrightarrow N$ est un isomorphisme CR (ou une équivalence CR) si f est un CR difféomorphisme de classe C^∞.

On dit qu'un CR isomorphisme est une isotopie si elle est homotope à l'identité.

Définition 4.3.8
Soit (M, T_{10}) *une variété CR abstraite.*

1. *On dit que* $(M, T^{10}M)$ *est CR plongée si* M *est une sous-variété CR de* $\mathbb{C}^N$.
2. *On dit que* $(M, T^{10}M)$ *est localement plongeable si tout point* $x \in M$ *possède un voisinage pour lequel* $(M, T^{10}M)$ *est CR isomorphe à une variété CR plongée. Si le CR isomorphisme est global alors on dit que* $(M, T^{10}M)$ *est plongeable.*

Définition 4.3.9
Un plongement CR est un plongement qui est une application CR. Un plongement CR de M *dans* X *est dit générique si la dimension complexe de la variété complexe* X *est* $n+d$*, où* (n,d) *est le type de la structure CR de M. Dans ce cas* X *est dit voisinage tibulaire de* M.

Remarque 4.3.10
$i : M \longrightarrow \mathbb{C}^N$ *est un plongement CR si et seulement si la structure CR de M est induite par la structure complexe sur* $\mathbb{C}^N$.

Théorème 4.3.11
Soit $(M, T^{10}M)$ *une structure CR de type* (n,d)*. Alors* $(M, T^{10}M)$ *est plongeable si et seulement si il existe un plongement lisse* $i : M \to \mathbb{C}^N$ *satisfaisant l'une des trois conditions équivalentes suivantes :*

(i) i *est un plongement CR ;*

(ii) les composantes de i *sont des fonctions CR ;*

(iii) $i_*(T^{01}M)$ *est un sous-fibré de rang* n *du fibré complexe engendré par les champs* $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}; \cdots ; \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_N}$.

Si de plus le plongement i *est générique, alors* $(M, T^{10}M)$ *est dite génériquement plongeable.*

Preuve. Si M est plongeable, alors M est CR isomorphe à une sous-variété CR de $\mathbb{C}^N$. Donc il existe un CR isomorphisme $i : M \to i(M) \subset \mathbb{C}^N$. Ce qui implique que : $di(x)(T^{10}_x M) = T^{10}_{i(x)}(i(M)) \subset T^{10}_{i(x)}\mathbb{C}^N$. Donc $i : M \to \mathbb{C}^N$ est un plongement tel que $i_*(T^{01}M)$ est un sous-fibré du fibré complexe engendré par les champs $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1}; \cdots ; \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_N}$. D'où i est un plongement CR. Réciproquement si $i : M \to \mathbb{C}^N$ est un plongement CR, alors $di(x) : T_x M \to T_{i(x)}(i(M))$ est un isomorphisme et $i(M)$ est une sous-variété CR de $\mathbb{C}^N$. D'où M est plongeable. ∎

Chapitre 5

Structures métriques de contact

5.1 Remplissage des variétés de contact

5.1.1 variétés de contact

Définition 5.1.1
Soit M^{2n+1} *une variété différentiable réelle de dimension* $2n+1$ *et* $\mathscr{D}$ *une distribution d'hyperplans sur* M*. On dit que* $\mathscr{D}$ *est une structure de contact si pour toute forme locale* η *telle que* $\ker\eta = \mathscr{D}$*, on a* $\eta \wedge (d\eta^n) \neq 0$*. Le couple* $(M,\mathscr{D})$ *est alors appelé variété de contact.*

Si $(M,\mathscr{D})$ est une variété de contact alors M est (localement) orientée par la forme volume $\eta \wedge (d\eta^n)$, où $\ker\eta = \mathscr{D}$.

Proposition 5.1.2
$(M,\mathscr{D})$ *est une variété de contact si et seulement si pour toute forme locale* η *définissant* $\mathscr{D}$*, la restriction de* $d\eta(x)$ *à* $\mathscr{D}(x)$ *est non dégénérée pour tout* $x \in M$*.*

Preuve.
En tout point $x \in M$, on a $T_xM = \ker\eta(x) \oplus d\eta(x)$. Si on note e un vecteur générateur de $\ker d\eta(x)$ et $\mathscr{B}$ une base de $\mathscr{D} = \ker\eta(x)$, alors $\eta(x) \wedge (d\eta(x))^n(e,\mathscr{B}) = \eta(x)(e)(d\eta)^n(\mathscr{B})$. Le résultat découle du fait que $\eta(x)(e) \neq 0$. ■

Ainsi par opposition au théorème de frobénius on obtient qu'une structure de contact $\mathscr{D}$ est une distribution non completement intégrable d'hyperplans c'est à dire que pour toutes sections X et Y de $\mathscr{D}$, le crochet de Lie $[X, Y]$ n'est pas une section de $\mathscr{D}$. Notons qu'un champ X est une section de $\mathscr{D}$ si et seulement si $\eta(X) = 0$.

Définition 5.1.3
Soit $(M,\mathscr{D})$ *une variété de contact et soit* η *une forme locale définissant* $\mathscr{D}$.

1. *On dit que* η *est une forme de contact si* η *est globalement définie ; et dans ce cas* $\mathscr{D}$ *sera appelée distribution de contact.*
2. *On dit que* $(M,\mathscr{D})$ *est coorientable si le fibré en ligne* $\bigcup_{x\in M} \dfrac{T_xM}{\mathscr{D}(x)} = \dfrac{TM}{\mathscr{D}}$ *est orientable.*

Proposition 5.1.4
Une variété de contact $(M,\mathscr{D})$ *est coorientable si et seulement si* $\mathscr{D}$ *est une distribution de contact.*

Si η est une forme de contact de structure de contact $\mathscr{D} = \ker\eta$ alors la variété de contact $(M,\mathscr{D})$ sera encore notée (M,η).

Remarque 5.1.5
Si η *est une forme de contact et si* n *est impaire, alors le signe de* $\eta \wedge d\eta^n$*, par rapport à une orientation de* M *ne dépend pas du choix de* α*. Nous dirons que la structure de contact est positive (respect. négative) si ce signe est + (respect. -).*

Définition 5.1.6

1. *On dit que deux variétés de contact* (M,η_M) *et* (N,η_N) *sont contactomorphes (on écrit* $(M,\eta_M) \simeq (N,\eta_N)$*) s'il existe un difféomorphisme* $f : M \longrightarrow N$ *tel que* $\eta_N = f_*\eta_M$.
2. *On dit que deux structures de contact* η *et* η' *sur* M *sont isotopes ou équivalentes, s'il existe une famille* (η_t) *de structures de contact sur* M *telle que* $\eta_0 = \eta$ *et* $\eta_1 = \eta'$.

Un théorème de Gray donne que les isotopies de contact sur les variétés fermées peuvent être réalisées sous forme d'isotopies ambiantes c'est à dire que si η et η' sont isotopes, alors il existe une famille lisse f_t de difféomorphismes tels que $(f_t)_*\eta = \eta_t$.

Exemple 5.1.7
Dans $\mathbb{R}^{2n+1}$*, muni des coordonnées locales* $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n,z)$*, on a la forme de contact* $\eta_S := dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$*. On pose* $\mathscr{D}_{\mathscr{S}} = \ker\eta_S$

Théorème 5.1.8 *(Théorème de Darboux)*
Les structures de contact n'ont pas d'invariants locaux, c'est à dire que si $(M,\mathscr{D})$ *est une variété de contact, alors pour tout point* p *de* M*, il existe un ouvert* U *contenant* p *tel que* $(U,\mathscr{D}_{|U}) \simeq (\mathbb{R}^{2n+1},\mathscr{D}_{\mathscr{S}})$.

Ainsi le problème de déterminer si deux structures de contact sont les mêmes ou pas vient des propriétés globales de leurs distributions d'hyperplans.

Dans la suite on suppose que les variétés sont orientées et que les structures de contact coorientées.

Définition 5.1.9 *(Champ de Reeb)*
Soit η une forme de contact sur une variété M. On appelle champ de Reeb associé à η, l'unique champ de vecteurs ξ vérifiant : $\eta(\xi) = 1$ et $\xi \imath d\eta := d\eta(\xi, \cdot) = 0$.

Remarque 5.1.10

1. *De la définition du champ de Reeb et de la relation $T_xM = \ker\eta(x) \oplus d\eta(x)$, on obtient la relation $TM = \mathscr{D} \oplus \mathbb{R}\xi$ où $\mathbb{R}\xi = \{\lambda\xi : \lambda \in \mathbb{R}\}$.*
2. *La distribution de contact $\mathscr{D}$ est ξ-invariante au sens où si un champ de vecteurs X est une section de $\mathscr{D}$ alors le crochet de Lie $[\xi, X]$ est aussi une section de $\mathscr{D}$.*

Exemple 5.1.11

1. $(\mathbb{R}^3, \mathscr{D}_{\mathscr{S}})$, $\eta_S = dz - y dx$ *et* $\xi = \partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$.
2. *Toute variété pseudo-hermitienne (M, θ) strictement pseudoconvexe est une variété de contact de forme de contact $\eta = \theta$, de distribution de contact $\mathscr{D} = HM$ et de champ de Reeb la direction caractéristique T de (M, θ).*

5.1.2 Variétés symplectiques

Définition 5.1.12
Une variété W lisse est dite symplectique si elle est munie d'une 2-forme différentielle fermée et non dégénérée w appelée forme symplectique.

La condition w non dégénérée force la dimension de W à être paire car une forme différentielle est antisymétrique.

Dire que w est non dégénérée équivaut à dire que l'application $\overline{w} : TM \longrightarrow T^*M$, qui à X associe $\overline{w}(X) = \imath_X w = w(X, \cdot)$ est un isomorphisme.

Définition 5.1.13
Soit X un champ de vecteurs sur une variété symplectique (W, w). On dit que X est un champ de Liouville si $L_X w = w$.

Remarque 5.1.14
D'après la formule de Lie-Cartan on a $L_X w = d(\imath_X w) + \imath_X(dw)$. Puisque $dw = 0$ donc X est de Liouville si et seulement si $d(\imath_X w) = w$.

Soit (W, w) une variété symplectique à bord avec $\dim W = 2N$; Alors le bord ∂W est orienté par la forme volume $\imath_Y w^N$ où Y est n'importe quel champ de vecteurs défini le long du bord ∂W et dirigé vers l'extérieur (ici W est orientée par la forme volume w^N positive).

On généralise cela par le fait que $\imath_X w^N$ oriente toute hypersurface transverse au champ X. Si X est le champ de Liouville ($d(\imath_X w) = w$), alors on a :

$\imath_X w \wedge [d(\imath_X w)]^{N-1} = \imath_X w \wedge w^{N-1} = \imath_X w^N$.

Or $\imath_X w^2$ est une forme volume sur toute hypersurface transverse à X. Donc $\imath_X w$ est une forme de contact sur toute hypersurface M transverse à X (X n'est nulle part tangent à M). Une tel hypersurface est dite de type contact.

Définition 5.1.15
Soit (W, w) une variété symplectique et soit J la structure presque complexe naturelle sur W. On dit que J est w-compatible si pour tout champ de vecteurs X_1 et X_2 sur W, on a : $w(JX_1, JX_2) = w(X_1, X_2)$ *et* $w(X_1, JX_1) > 0$ *si* $X_1 \neq 0$.

Proposition 5.1.16
L'espace $\mathscr{J}(w)$ des structures presque complexes w-compatibles sur une variété symplectique (W, w) est non vide et contractile lorsqu'on le munit de la topologie induite par celle de l'espace des endomorphismes de TW.

Preuve. Elle découle de [[29],Proposition 1.3.10] où H. Geiges a montré que l'espace des structures presque complexes w-compatibles sur un espace vectoriel symplectique (V, w) est non vide et contractile lorsqu'on le munit de la topologie induite par celle des endomorphismes de V. ■

Définition 5.1.17
Etant donné $J \in \mathscr{J}(w)$, on définit un produit hermitien h sur W en posant :

$h(X_1, X_2) = w(X_1, X_2) + \sqrt{-1}\, w(X_1, JX_2)$,

pour tout $X_1, X_2 \in TW_{\mathbb{C}} = \{(a + \sqrt{-1}b)X = aX + bJX \mid a, b \in \mathbb{R},\ X \in TW\}$.

(W, h) *est appelée variété presque kählerienne. On verifie que* $dh = 0$.

Si J est intégrable alors (W, h) est une Kählerienne, i.e une variété complexe munie d'une forme hermitienne fermée.

Définition 5.1.18
Soit (W, w) une variété symplectique, on appelle forme de Liouville de (W, w), la forme de Liouville du fibré cotangent T^*W, c'est à dire la forme $\lambda : T(T^*W) \longrightarrow C^\infty(W)$ telle que $\lambda_\alpha(X_\alpha) = \alpha(\pi'(X_\alpha))$, $X_\alpha \in T_\alpha T^*W$, $\alpha \in T^*W$, où $\pi : T^*W \longrightarrow W$, la projection naturelle et $\pi' = \pi_* = d\pi : T(T^*W) \longrightarrow TW$. Sa dérivée extérieure $d\lambda$ est non dégénérée et définit donc une forme symplectique sur T^*W.

Dans un système de coordonnées adaptées, c'est à dire compatible avec la trivialisation locale du fibré, cette forme de Liouville s'écrit $\sum_i p_i dq_i$ et on a $d\lambda = \sum_i dp_i \wedge dq_i$.

5.1.3 Remplissage des variétés de contact

Définition 5.1.19 ([45])
Une variété complexe X à bord bX strictement pseudoconvexe est une variété réelle à bord de dimension $2n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. *L'interieur Int(X)=X \ bX a une structure complexe intégrable ;*
2. *Pour chaque $x \in bX$, il existe un voisinage U dans X, un domaine strictement pseudoconvexe $D \subset \mathbb{C}^n$ à bord lisse et un difféomorphisme h de U vers un sous-ouvert $h(U) \subset D$ relativement compact tel que $h(\partial U) \subset \partial D$ et h est biholomorphe de U vers Int(D).*

De cette définition, on déduit

Conséquence 5.1.20
La structure complexe induit une structure CR intégrable sur le bord bX. De plus si bX est compact, il existe une fonction définissante $\varphi : X \longrightarrow (-\infty; c]$ telle que $bX = \{\varphi = c\}$, avec les propriétés suivantes :

1. *La forme de Levi de φ est définie positive sur l'espace tangent holomorphe de bX ;*
2. *φ est strictement plurisousharmonique sur $\{c_0 < \varphi < c\}$.*

On peut supposer que $c_0 < 0 < c$ et que 0 est une valeur régulière de φ et considérer un domaine strictement pseudoconvexe $\Omega = \{\varphi < 0\}$.

Exemple 5.1.21
Soit X une variété complexe strictement pseudoconvexe et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'exhaustion spsh. Si X_a est un niveau régulier de f, alors X_a est une hypersurface strictement pseudoconvexe de X et le sous-ensemble compact $X_{\leq a} := \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ est une variété complexe compacte strictement pseudoconvexe à bord $bX_{\leq a} = X_a$. D'après [53], Proposition 2.4 le fibré tangent complexe $TX_a \cup J(TX_a)$ de X_a est la distribution de contact d'une structure de contact naturellement orientée sur X_a. Si X est de stein alors $X_{\leq a}$ est dite variété de Stein compact à bord X_a.

Définition 5.1.22
Une variété de contact (M, η) est dite holomorphiquement remplissable si elle est contactomorphe au bord bX d'une variété compact complexe strictement pseudoconvexe X. Si X est de Stein, (M, η) est dite Stein remplissable.

Proposition 5.1.23 ([15])
Toute variété de dimension 3 holomorphiquement remplissable est necessairement Stein remplissable

Définition 5.1.24 ([25])
Soit $(M, \mathscr{D} = \ker(\eta))$ *une variété de contact.*

1. *M est dite faiblement symplectiquement remplissable s'il existe une variété symplectique* (W, w) *à bord* $bW = M$ *et* $w_{|\mathscr{D}} > 0$.
2. *M est dite fortement symplectiquement remplissable s'il existe une variété symplectique* (W, w) *à bord* $bW = M$ *et* $d\eta = w_{|\mathscr{D}}$. *La relation* $d\eta = w_{|\mathscr{D}}$ *signifie que M est du type de contact c'est à dire que* (W, w) *admet un champ de Liouville X au voisinage de M pointé vers l'extérieur le long de M et tel que* $\mathscr{D} = \ker(\imath_X w_{|M})$.

Définition 5.1.25
Une structure de contact $\mathscr{D} = \ker\eta$ *sur M est dite tendue si il n'existe aucun disque plongé* $D \subset M$ *tel que sa frontière* ∂D *est tangente à* $\mathscr{D}$ *cependant que D est transverse à* $\mathscr{D}$ *le long du bord.*

Proposition 5.1.26
remplissage holomorphe $\Longrightarrow$ *remplissage symplectique fort* $\Longrightarrow$ *Remplissage symplectique faible* $\Longrightarrow$ *tendue.*

Preuve. Par définition on a remplissage symplectique fort $\Longrightarrow$ remplissage symplectique faible. D'après un théorème d'Eliashberg et Gromov, dans [26], on a remplissage symplectique faible $\Longrightarrow$ tendue. Soit $(M, \mathscr{D})$ une variété de contact holomorphiquement remplissable. Alors M peut être réalisée comme bord strictement pseudoconvexe d'une variété complexe compacte X. Donc il existe une fonction d'exhaustion spsh $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $M = X_a$ est un niveau régulier de f. Soit, comme dans le chapitre 1, $w_f = d\alpha_f$ avec $\alpha_f = -d^c f$; Alors w_f est une forme symplectique sur X et $\alpha_{f_{|M}} = 0$ est une équation de $\mathscr{D}$ avec ici $\mathscr{D} = TM \cap J(TM)$, où J est la structure complexe naturelle sur X. Donc $(X_{\leq a}, w_f)$ est une variété symplectique à bord $bX_{\leq a} = M$. Ainsi $(M, \mathscr{D})$ est fortement symplectiquement remplissable. ■

5.2 Variétés métriques de contact

5.2.1 Variétés métriques de contact

Définition 5.2.1
Soit M une variété de classe C^∞ *et de dimension* $2n+1$. *Une structure presque de contact*

sur M est la donnée (ϕ, ξ, η) où $\phi : TM \longrightarrow TM$ est un champ de tenseur de type $(1,1)$, $\xi \in \chi(M)$ est un champ de vecteurs sur M et η une 1-forme sur M avec

$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \phi\xi = 0, \quad \eta\xi = 1$ *et* $\eta \circ \phi = 0.$

Remarque 5.2.2

La relation $\phi\xi = 0$ découle directement des relations $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ et $\eta\xi = 1$. En effet on a : $\phi^2\xi = -\xi + \eta(\xi)\xi = -\xi + \xi = 0$.

Définition 5.2.3

Une structure presque de contact (ϕ, ξ, η) sur une variété M de classe C^∞ et de dimension $2n+1$ est dite normale si la structure presque complexe naturelle $\mathscr{J}$ sur $M \times \mathbb{R}$, définie par $\mathscr{J}\left(X, f\dfrac{d}{dt}\right) = \left[\phi X - f\xi, \eta(X)\dfrac{d}{dt}\right]$ est intégrable.

En annulant le tenseur de Nijenhuis de $\mathscr{J}$, la condition d'intégrabilité de $\mathscr{J}$ équivaut à :

$$N_\phi + 2(d\eta) \otimes \xi = 0 \tag{5.2.1}$$

où N_ϕ est la torsion de Nijenhuis de ϕ ; c'est à dire

$N_\phi(X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi([\phi X, Y] - [X, \phi Y])$;

Ici $2(d\eta) \otimes \xi(X, Y) = 2d\eta(X, Y) \otimes \xi$.

Définition 5.2.4

Une métrique g sur M est dite compatible avec une structure presque de contact (ϕ, ξ, η) si : $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$, pour tout $X, Y \in TM$. Dans ce cas on dit que (ϕ, ξ, η, g) est une structure métrique presque de contact.

Proposition 5.2.5 ([14])

Toute variété presque de contact admet une métrique compatible.

Définition 5.2.6

Soit $(M; \eta)$ une variété de contact, $\mathscr{D}$ sa distribution de contact. On dit qu'une structure presque de contact (ϕ, ξ, η') sur M est compatible avec la structure de contact si $\eta' = \eta$, si ξ est le champ de Reeb de η et si l'endomorphisme ϕ de TM satisfait les relations suivantes :

$$d\eta(\phi X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \quad \text{pour tout } X, Y \in \Gamma(TM),$$

et

$$d\eta(\phi X_0, X_0) > 0 \quad \text{pour tout } X_0 \in \Gamma(\mathscr{D}).$$

Notons par $\mathscr{AC}(\eta)$ l'espace des structures presque de contact compatible avec (M, η).

Proposition 5.2.7 ([14], Prop. 6.4.3)
Soit (M,η) une variété de contact. Alors l'espace des métriques riemanniennes associées est en correspondance biunivoque avec l'espace des structures presque de contact compatibles $\mathscr{AC}(\eta)$, sur (M,η).

Ainsi si (ϕ,ξ,η) est une structure presque de contact compatible avec (M,η) associée à une métrique riemannienne g sur M, alors (ϕ,ξ,η,g) est appelée structure métrique presque de contact compatible avec (M,η).

Définition 5.2.8
Une structure métrique presque de contact compatible (ϕ,ξ,η,g) sur une variété de contact (M,η) est dite structure métrique de contact si on a :

$$g(X,\phi Y) = d\eta(X,Y) \quad X,Y \in \Gamma(TM);$$

Et dans ce cas (M,ϕ,ξ,η,g) sera appelée variété métrique de contact et g sera appelée métrique de contact.

Remarque 5.2.9
Dans une structure métrique de contact (ϕ,ξ,η,g) , la métrique de contact g est entièrement déterminée par ϕ et η en posant $g = \eta\otimes\eta + d\eta(\phi\cdot,\cdot)$.

Ainsi on a proposition suivante :

Proposition 5.2.10 ([19])
Toute variété de contact est une variété métrique de contact et réciproquement.

Preuve.
Soit (M,η,ξ) est une variété de contact, alors la restriction de $d\alpha$ à la distribution de Contact $\mathscr{D}$ est une forme symplectique. Soit J_c une structure presque complexe compatible avec la forme symplectique $d\alpha$. Considérons le tenseur ϕ_η de type $(1,1)$ sur M défini par :

$\phi_\eta = J_c$ sur $\mathscr{D}$ et $\phi_\eta(\xi) = 0$.

On a bien $\phi_\eta^2 = -I_{\mathscr{D}} + \eta\otimes\xi$.

On définit une métrique g sur M compatible avec η par :

$g_\eta(X,Y) = d\eta(\phi_c X,Y)$, $g_\eta(X,\xi) = 0$ et $g_\eta(\xi,\xi) = 1$ pour tout $X,Y \in \mathscr{D}$.

On a bien $g_\eta = \eta\otimes\eta + d\eta(\phi_c\cdot,\cdot)$.

Réciproquement soit (M,ϕ,η,ξ,g) une variété métrique de contact, alors ϕ est une structure presque complexe sur $\ker\eta$ car $\phi^2 = -I + \eta\otimes\xi$. Puisque sur $\ker\eta$, $d\eta(\phi X,Y) = g(X,Y)$ et $d\eta(\phi X,\phi Y) = d\eta(X,Y)$ donc $d\eta$ y est une forme symplectique compatible avec ϕ. Le résultat découle alors de la proposition 5.1.2. ∎

Définition 5.2.11
Une structure métrique de contact (ϕ, ξ, η, g) *est dite K-contact lorsque* ξ *est Killing ; i.e* $L_\xi g = 0$.

Notons que ξ est killing si et seulement si $\xi \cdot g(Y,Z) = g([\xi,Y],Z) + g(Y,[\xi,Z])$; et dans ce cas, le flot ϕ_t de ξ est alors une isométrie de la variété Riemannienne (M,g).

Soit h le champ de tenseur défini par $h = \frac{1}{2}L_\xi\phi$, alors h est symétrique, verifie les relations $h\phi = -\phi h$, $h\xi = 0$ et on a la proposition suivante :

Proposition 5.2.12
(ϕ, ξ, η, g) *est K-contact si et seulement si* $h = 0$.

Preuve.
Il faut montrer que $L_\xi g = 0$ si et seulement si $h = 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
L_\xi g(X,\phi Y) &= \xi g(X,\phi Y) - g([\xi,X],\phi Y) - g(X,[\xi,\phi Y]) \\
&= \frac{1}{2}\xi d\eta(X,Y) - g([\xi,X],\phi Y) - g(X, L_\xi\phi Y) - g(X,\phi[\xi,Y]) \\
&= \frac{1}{2}d\eta([\xi,X],Y) + \frac{1}{2}d\eta(X,[\xi,Y]) - \frac{1}{2}d\eta([\xi,X],Y) \\
&= -\frac{1}{2}d\eta(X,[\xi,Y]) \\
&= -g(X,(L_\xi\phi)Y).
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$L_\xi g(X,\phi Y) = -g(X,(L_\xi\phi)Y). \tag{5.2.2}$$

Si $L_\xi g = 0$, alors d'après 5.2.2 $L_\xi\phi = 0$.

Inversément si $L_\xi\phi = 0$, alors on a d'abord d'après 5.2.2 $L_\xi g(X,\phi Y) = 0$. On a besoin de montrer que $L_\xi g(X,\xi) = 0$, pour tout X.

On a :

$$\begin{aligned}
L_\xi g(X,\xi) &= \xi g(X,\xi) - g([\xi,X],\xi) - g(X,[\xi,\xi]) \\
&= \xi\eta(X) - g([\xi,X],Z) \\
&= L_\xi\eta(X) + \eta([\xi,X]) - \eta([\xi,X]) \\
&= L_\xi\eta(X) \\
&= \imath_\xi d\eta(X) + d\imath_\xi\eta(X) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Définition 5.2.13
Une structure Sasakienne est une structure métrique de contact (ϕ, ξ, η, g) *qui est normale. Si* (ϕ, ξ, η, g) *est une structure Sasakienne, alors g est dite métrique Sasakienne.*

Toute variété Sasakienne est $K-$contact et la réciproque est vraie en dimension 3

Proposition 5.2.14 ([7], Corollaire 6.3)
Toute variété K*-contact de dimension trois est sasakienne.*

5.2.2 variétés métriques de contact et variétés CR

Proposition 5.2.15
Soit (M, ϕ, ξ, η) *une variété presque de contact, alors* M *est naturellement munie d'une structure presque CR.*

Preuve.
Posons $HM = \ker \eta$ et J_b la restriction de ϕ à H. Soit $J_b^{\mathbb{C}}$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de J_b à $HM \otimes \mathbb{C}$. $J_b^{\mathbb{C}}$ possède deux valeurs propres i et $-i$. Ainsi si $T_{10}M$ est le sous-fibré correspondant à la valeur propre i, alors $(M, T^{10}M)$ est une structure presque CR. ■

Définition 5.2.16
Une connexion linéaire sur une variété différentiable M *est un champ de tenseur* ∇ *de type* $(1,2)$ *sur* M*, tel que* $\nabla(X,Y) = \nabla_X(Y)$*, qui est* $C^\infty(M)$*-linéaire par rapport à la première variable,* $\mathbb{R}$*-linéaire par rapport à la deuxième et vérifiant la règle de Leibniz :*

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f(\nabla_X(Y)) \quad \forall X, Y \in \Gamma(M),\ \forall f \in C^\infty(M). \tag{5.2.3}$$

On appelle torsion de la connection ∇*, le champ de* $(1,2)$*-tenseur* T *sur* M *tel que :*
$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$*, pour tous champs de vecteurs* X *et* Y *sur* M*.*
La courbure de ∇ *sur* M *est le champ de* $(1,3)$*-tenseur* R *sur* M *tel que :*
$R(X,Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(M).$

Définition 5.2.17
Soit (M,g) *une variété riemannienne. On appelle connexion de Levi-Civita, l'unique connexion* ∇ *qui soit métrique (i.e* $\nabla_X g = 0$*) et sans torsion (i.e de torsion* T *nulle).*

La question de caractériser les variétés presque de contact dont la structure presque CR est intégrable a été posée par S. Tano qui a construit un champ de tenseur Q en fonction de (ϕ,ξ,η) tel que $Q=0$ si et seulement si $T^{10}M$ est intégrable.

Proposition 5.2.18 ([61] Proposition 2.1) *Soit (M,ϕ,ξ,η,g) une variété métrique presque de contact. Soit Q le champ de tenseur défini par :*

$Q(X;Y)=(\nabla_X\phi)Y-g(X+hX;Y)\xi+\eta(Y)(X+hX)$, pour tout champ de vecteurs X, Y sur M ; où $h=\frac{1}{2}L_\xi\phi$ et où ∇ est la connexion de Levi-Civita. Soit $T^{10}M$ la structure presque CR provenant de la structure presque de contact (ϕ,ξ,η). Alors $T^{10}M$ est intégrable si et seulement si $Q=0$.

Proposition 5.2.19 ([36])
Soit $(M,(\phi,\xi,\eta))$ une variété presque de contact. Si M est normale, alors M est munie d'une structure CR

Lemme 5.2.20 ([51], section 3.1)
Une variété métrique de contact (M,ϕ,ξ,η,g) est CR si et seulement si la condition suivante est satisfaite : $\phi N_\phi(X,Y)=0$, pour tout $X,Y\in\Gamma(\mathscr{D})$ où N_ϕ est le tenseur de Nijenhuis de contact de M. Dans ce cas la variété CR est strictement pseudoconvexe.

Preuve.
Soit $\mathscr{D}$ la distribution de contact de la variété métrique de contact (M,ϕ,ξ,η,g) et soit $X,Y\in\Gamma(\mathscr{D})$. On a :

$d\eta(X,Y)=X(\eta(Y))-Y(\eta(X))-\eta([X,Y])=-\eta([X,Y])$. Ainsi on a :

$\eta([\phi X,Y]+[X,\phi Y])=-d\eta(\phi X,Y)-d\eta(X,\phi Y)=0$. Ce qui entraine que :

$[\phi X,Y]+[X,\phi Y]\in\Gamma(\mathscr{D})$.

Montrons maintenant que :

$[\phi X,\phi Y]-[X,Y]-\phi([\phi X,Y]+[X,\phi Y])=0 \iff \phi N_\phi(X,Y)=0$.

On a :

$$\begin{aligned}
&[\phi X,\phi Y]-[X,Y]-\\
&\phi([\phi X,Y]+[X,\phi Y]) &=\;& N_\phi(X,Y)-(\phi^2[X,Y]+[X,Y])=0\\
&&=\;& N_\phi(X,Y)-\eta[X,Y]\xi\\
&&=\;& N_\phi(X,Y)-d\eta(X,Y)\xi\\
&&=\;& N_\phi(X,Y)-d\eta(JX,JY)\xi\\
&&=\;& N_\phi(X,Y)-\eta([JX,JY])\xi\\
&&=\;& N_\phi(X,Y)-\eta(N_\phi(X,Y)-\phi^2[X,Y]-\\
&&& \phi([\phi X,Y]+[X,\phi Y]))\xi\\
&&=\;& N_\phi(X,Y)-\eta(N_\phi(X,Y))\xi \quad \text{car } \eta\circ\phi=0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
[\phi X, \phi Y] - [X,Y] - & \\
\phi([\phi X, Y] + [X, \phi Y]) = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad N_\phi(X,Y) - \eta(N_\phi(X,Y))\xi = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \phi(N_\phi(X,Y) - \eta(N_\phi(X,Y))\xi) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \phi N_\phi(X,Y) = 0 \quad \text{car } \phi(\xi) = 0.
\end{aligned}$$

■

En dimension trois on a la proposition suivante :

Proposition 5.2.21 ([7])
Toute variété métrique de contact de dimension trois est une variété CR strictement pseudoconvexe. Plus précisément, la structure presque CR naturellle sur une variété métrique de contact de dimension trois, est une structure CR.

Soit maintenant (M,θ) une variété pseudo-hermitienne de direction caractéristique T. Soit J_b la structure presque complexe sur la distribution de Levi HM. Soit encore J_b l'extension de J_b à TM par $J_bT = 0$ et soit g_θ la métrique de webster sur M. $(M, J_b, T, \theta, g_\theta)$ est dite variété CR strictement pseudoconvexe si la forme de Levi L_θ est définie positive. On a la proposition suivante :

Proposition 5.2.22
Soit $(M, J_b, T, \theta, g_\theta)$ une variété pseudo-hermitienne strictement pseudoconvexe, alors $(J_b, -T, -\theta, g_\theta)$ est une structure métrique de contact sur M.

Preuve.
D'après la proposition 4.2.4, $d\theta$ est non dégénérée sur HM. Donc c'est une forme symplectique sur HM, ce qui entraine que θ est une forme de contact sur M. Donc $(M, -\theta)$ est une variété de contact. On vérifie facilement que son champ de Reeb est $-T$. D'après la preuve de la proposition 5.2.10, $(M, J_b, -T, -\theta, g_\theta)$ est une variété métrique de contact.
■

Ainsi toute variété CR strictement pseudoconvexe est une variété Riemannienne de contact. Cependant la normalité fait défaut Ce qui nous ammène à introduire une connexion partculière sur la variété pseudo-hermitienne appelée connexion de Tanaka-Webster.

Définition 5.2.23
Soit $(M, J_b, T, \theta, g_\theta)$ une variété CR non dégénérée de type hypersurface. Alors l'unique connexion métrique ∇^{TW} de torsion T^{TW} déterminée par :

1. $T^{TW}(X,Y) = d_\theta(J_b X, Y)T = G_\theta(X,Y)T$, *pour tout* $X, Y \in \Gamma(HM)$.
2. $T^{TW}(X,T) = -\frac{1}{2}([T,X] + J_b[T, J_b X])$.

est appelée connexion de Tanaka-Webster. Sa torsion pseudohermitienne est le $(1,1)$-*tenseur* τ *défini par :* $\tau(X) = T^{TW}(X,T)$.

Ainsi on a la proposition suivante :

Proposition 5.2.24 ([24])
Soit M *une variété CR strictement pseudoconvexe et soit* (J_b, T, θ) *la structure presque de contact associée. Alors* (J_b, T, θ) *est normale si et seulement si la connexion de Tanaka-Webster de* (M,θ) *a une torsion pseudo-hermitienne* τ *qui est nulle.*

Soit (M, HM, J_b) une variété CR et $\mathscr{CR}(HM, J_b)$ le groupe des transformations CR de M (i.e le groupe des difféomorphismes CR de M). D'après [13] son algèbre de Lie $cr(HM, J_b)$ peut être caractérisé par :

$$cr(HM, J_b) = \left\{X \in \chi(M) : [X, HM] \subset HM,\ L_X J_b = 0\right\}. \tag{5.2.4}$$

Si la variété CR M est strictement pseudoconvexe, alors le groupe $\mathscr{CR}(HM, J_b)$ est un groupe de Lie.

Proposition 5.2.25
Soit (M,θ) *une variété CR strictement pseudoconvexe de direction caractéristique* T. *Si la structure métrique de contact provenant naturellement de* (M,θ) *est* K*-contact, alors l'algèbre de Lie* $cr(HM, J_b)$ *du groupe des transformations CR de* M *est égale à* $\mathbb{R}T$.

Preuve.
Soit $(J_b, -T, -\theta, g_\theta)$ la structure métrique de contact sur M qui provient naturellement de (M,θ) .

Soit $X \in HM$, puisque G_θ est non dégénérée donc on a $\theta([X,Y]) \neq$, pour tout $Y \in HM$. Puisque $HM = \ker\theta$, donc $[X,Y]$ n'appartient pas à HM ; par suite X n'appartient pas à $cr(HM, J_b)$.

Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque HM est $(-T)$-invariant, donc on a $[\alpha T, HM] \subset HM$. Si $(J_b, -T, -\theta, g_\theta)$ est K-contact, alors $L_{\alpha T} J_b = 0$. Le résultat découle alors de la caractérisation 5.2.4 de $cr(HM, J_b)$. ■

Chapitre 6

Sur le plongement des variétés CR

6.1 Plongement des variétés CR et action de groupes de Lie

Selon un théorème de Kuranishi, étendu par Akahori et Webster, voir [63], toute variété CR M de type hypersurface avec $\dim M \geq 7$ est localement génériquement plongeable.

Cela s'avère que la condition géométrique qui implique la plongeabilité (qui ne fait pas référence à la forme de Levi de M) est donnée par la présence d'une action de groupe transversale. Historiquement les groupes à un paramètre d'action CR ont été introduits par TANAKA [60].

Soit F une action C^∞ d'un groupe de Lie G d'élément neutre 0 sur une variété CR M de type (n,d) (i.e $F(x,0) = x$ et $F(F(x;g_1),g_2) = F(x;g_1+g_2)$ pour $x \in M$ et pour tout $g_1, g_2 \in G$).

A tout vecteur $X_0 \in T_0G$, on associe un champ de vecteurs X qui agit sur toute fonction lisse f sur M par :

$$Xf(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(F(x, \exp tX_0)) \text{ avec } \exp tX_0 = \phi_{X_0}(t) \tag{6.1.1}$$

où ϕ_{X_0} est le sous-groupe à un paramètre engendré par le champ de vecteurs invariant i.e $\phi_{X_0} : \mathbb{R} \longrightarrow G$ avec $\phi_{X_0}(0) = 0$ et $\phi_{X_0}(t)\phi_{X_0}(s) = \phi_{X_0}(s+t)$.

Si $f = Id$, alors $Xf = X$ est le champ de vecteurs induit par X_0.

Posons $\mathscr{E} = \{X : X_0 \in T_0G\}$.

Pour tout $v \in G$ Notons par F_v l'application qui à $x \in M$ associe $F_v(x) = F(x,v) \in M$.

Définition 6.1.1 *1. L'action C^∞ $(F_v)_{v\in G}$ de G sur M est dite CR si F_v est CR pour tout*

$v \in G$; c'est à dite que la différentielle $(F_v)_*$ préserve la distribution de Levi HM ainsi que l'action de J_b sur HM.

2. *L'action lisse $(F_v)_{v\in G}$ de G sur M est dite transverse si $\mathscr{E}$ est partout transverse à HM ; ce qui se traduit par $H_xM \oplus \mathscr{E}_x = T_xM$ ou de manière équivalente $T_x^{10}M \oplus \overline{T_x^{10}M} \oplus (\mathscr{E}_x \otimes \mathbb{C}) = T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ pour tout $x \in M$.*

Remarque 6.1.2
Dans le cas d'une action réelle $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$, son générateur infinitésimal est égal à $\mathscr{E} = \left(\frac{dF_t}{dt}\right)_{t=0}$. On dit que l'action réelle transverse $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur M est positive si on a : $\frac{1}{2i}[Z,\overline{Z}] = c(\overline{Z})\mathscr{E}$ modulo HM pour $c(\overline{Z}) > 0$, pour tout $Z \in T^{10}M$.

Définition 6.1.3 ([17])
Soit G un Groupe de Lie qui opère de manière lisse sur une variété CR M dont la structure CR $T^{10}M$ est G-invariante sur M (i.e l'action de G sur M est CR). On dira que $T^{10}M$ (ou que M) est invariant par la G-action transverse d'un groupe de Lie, s'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{p}$, de dimension finie, de l'algèbre de Lie $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs C^∞ sur M qui est G-invariante et qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$[\mathfrak{p};\Gamma(T^{10}M)] \subset \Gamma(T^{10}M), \quad T_x^{10}M \oplus \overline{T_x^{10}M} \oplus \mathbb{C}\mathfrak{p}(x) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_xM \tag{6.1.2}$$

où $x \in M$. Si de plus $\mathfrak{p}$ est une algèbre commutative, alors la structure CR $T^{10}M$ sera dite G-rigide.

Remarque 6.1.4
Les conditions 6.1.2 de la définition 6.1.3 sont équivalentes aux conditions suivantes :

$$[\mathfrak{p};\Gamma(HM)] \subset \Gamma HM), \quad H_xM \oplus \mathfrak{p}(x) = T_xM. \tag{6.1.3}$$

En générale les variétés CR ne permettent pas d'actions de groupes de Lie même non triviales qui préservent le fibré réel HM qui donne la structure CR réelle. Baouendi, Rothschild et Treves ont établi le résultat suivant

Proposition 6.1.5 ([6], [5])
Une variété CR est localement génériquement plongeable si et seulement si sa structure CR est localement invariante sous l'action d'un groupe de Lie transverse.

L. Lempert a globalisé ce résultat pour les variétés CR de dimension trois et dype hypersurface comme suit :

Proposition 6.1.6 ([42], théorème 2.1)
Si M est une variété CR de dimension 3 et de type hypersurface, qui admet une action CR lisse de $\mathbb{R}$ qui est transverse, alors M est le bord d'une surface stritement pseudoconvexe (c'est à dire qu'elle est plongeable).

Remarque 6.1.7 *Soit (M,θ) une variété CR strictement pseudoconvexe et soit $(J_b,-T,-\theta,g_\theta)$ la structure métrique de contact qui provient de (M,θ). D'après [13] le champ de Reeb $-T$ est un champ de Killing si et seulement si $-T$ est une transformation CR infinitésimale, c'est à dire que le groupe à un paramètre local généré par $-T$ est un groupe local de transformations CR. Donc d'après la proposition 5.2.25, la structure CR canoniquement associée à une structure K-contact est localement génériquement plongeable.*

Plus récemment on a des résultats qui donnent des conditions suffisantes et nécessaires de plongement local (générique) en termes d'actions de groupes plus générales qui ne préservent pas nécessairement la structure CR.

Considérons l'action $(F_v)_{v\in G}$ du groupe de Lie G dans la variété CR M.

Pour tout $v\in V$, Posons $T^{10}(v)=F(\cdot,v)^*(T^{10}M)\subset TM\otimes\mathbb{C}$. Le sous-fibré $T^{10}(v)$ peut être vu comme un point $[T^{10}(v)]$ dans la grassmannienne $G_{r_x}=G(T_xM\otimes\mathbb{C},n)$ des n plans dans $T_xM\otimes\mathbb{C}$. Soit G_r le fibré

$G_r=\bigcup_{x\in M} x\times G_{r_x}$.

Considérons l'application $\mu_G : M\times V\longrightarrow G_r$ telle que $\mu(x,v)=[T_x^{10}(v)]$ où V est un voisinage ouvert de 0 dans G.

Si $G=\mathbb{R}^d$, alors G_{r_x} est une variété complexe de dimension $n(n+d)$.

Définition 6.1.8
1. *On dit que l'action $(F_v)_{v\in\mathbb{R}^d}$ est extensible en $x\in M$, s'il existe un voisinage $\widetilde{V}$ de $0\in\mathbb{C}^d$ et une application lisse $\widetilde{\mu} : U\times\widetilde{V}\longrightarrow G_r$ telle que $\widetilde{\mu}_{|U\times(\widetilde{V}\cap V)}=\mu_G$ et $\widetilde{\mu}(y,\cdot):\widetilde{V}\longrightarrow G_{r_y}$ est holomorphe pour chaque $y\in U$.*
2. *Soit pour $\varepsilon>0$ le demi-disque $B_\varepsilon=\{|z|<\varepsilon : Im(z)<0\}$ du bas demi-plan de $\mathbb{C}$. On dit que l'action $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est semi-extensible dans un voisinage U d'un point $x\in M$, s'il existe un $\varepsilon>0$ telle que l'application $\mu_{\mathbb{R}} : U\times]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow G_r$ s'étend en une application lisse sur $U\times\overline{B}_\varepsilon$ qui est holomorphe de B_ε vers G_{r_y} pour chaque $y\in U$.*

Exemple 6.1.9
Soit M une hypersurface réelle de dimension $2n+1$ plongée dans $\mathbb{C}^{n+1}$ qui est non dégénérée au point $p\in M$. Alors d'après Z.M. Balogh and C. Leuenberger, [4], Théorème 4, M admet une action semi-extensible dans un voisinage de p. Si de plus M est strictement pseudoconvexe en ce point p, alors d'après [4] Proposition 4, M admet une action CR (local) réelle semi-extensible positive dans un voisinage de p.

Ainsi Z.M. Balogh et C. Leuenberger ont montré que :

Proposition 6.1.10 ([4] théorème 1)
Si une variété CR M de type (n,d) admet une $\mathbb{R}^d$-action locale extensible alors M est localement génériquement plongeable.

Si M est de type hypersurface, ils ont établi les résultats suivants :

Proposition 6.1.11 ([4] théorème 2)
Si la variété CR M est de Type hypersurface et admet une $\mathbb{R}$-action local "semi-extensible", alors M est réalisable comme bord d'une variété complexe.

Proposition 6.1.12 ([4] théorème 3)
Si M est strictement pseudoconvexe et admet une action locale réelle semi-extensible positive, alors M peut être localement réalisée comme une hypersurface strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Proposition 6.1.13 ([4] corrolaire 1)
Une varité CR strictement pseudoconvexe de type hypersurface est localement plongeable si et seulement si elle admet une action réelle semi-extensible.

Définition 6.1.14
Une variété CR (M, T^{10}) est dite analytique réelle si M est une variété analytique réelle et si $T^{10}M$ est un sous-fibré analytique réel de $TM \otimes \mathbb{C}$ (c'est à dire $T^{10}M$ est localement généré par des champs de vecteurs analytiques réels).

D'après A. Andreotti and C.D. Hill [2], toute variété analytique réelle de type (n,d), $d \geq 1$, est localement (generiquement) plongeable. Plus précisément pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans M tel que $(U, T^{10}M_{|U})$ est CR isomorphe à une variété CR analytique réelle plongée dans $\mathbb{C}^{n+d}$. Ici $T^{10}M_{|U}$ est le tiré en arrière de $T^{10}M$ via l'inclusion $i : U \longrightarrow M$. A. Andreotti et G.A. Fredricks ont globalisé cela

Proposition 6.1.15 ([1])
Toute variété CR analytique réelle est aussi globalement plongeable ; elle est CR isomorphe à une sous-variété CR générique d'une variété complexe.

Ces résultats découlent aussi de la Proposition 1 de [4] par laquelle toute variété CR analytique admet une action locale extensible

Exemple 6.1.16
L'hypersurface $M = \{\rho = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$ *où* $\rho(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = x_1^4 + y_1^4 + x_2^2 + (y_2 - 1)^2 - 1$ *est analytique ; Donc elle admet une action réelle extensible d'après ce qui précède. cependant* M *n'est pas rigide puisque n'admettant pas d'action réelle transverse qui préserve HM dans un voisinage de 0. Une manière équivalente de voir cela est que les champs de vecteurs dans* HM *et leurs commutateurs de premier ordre engendrent l'espace tangent total en un point* $p \in M$, $p \neq 0$, *mais que cette propriété n'est pas vérifiée en* $O \in M$.

6.2 Plongement et Remplissage des Structures CR ; exemple du tore $\mathbb{T}^3$

Dans cette section nous nous intéressons aux variétés CR compactes strictement pseudoconvexes de type hypersurface.

6.2.1 Plongement et remplissage

Définition 6.2.1 *Soit* $(M, T^{10}M)$ *une variété CR (compacte) strictement pseudoconvexe de type hypersurface. Nous dirons que* M *est une variété CR remplissable s'il existe une variété compacte complexe et connexe* X *à bord strictement pseudoconvexe* $(M, T^{10}M)$. *La variété* X *est alors appelée remplissage CR de* M.

D'après un travail récent d'Eliashberg, toute variété de dimension 3 a une infinité de structures de contact non équivalentes. La plupart de ces structures de contact ne supportent aucune structure CR remplissable. Une question naturelle est donc de caractériser les structures de contact qui supportent une structure CR remplissable.

Théorème 6.2.2 (de Harvey-Lawson [34])
Si une variété CR M *(compact) est plongeable, alors elle est remplissable.*

Théorème 6.2.3 ([32])
Soit M *une variété CR remplissable et soit* X *un remplissage CR de* M, *alors* X *peut être pris comme un espace de Stein à singularités isolée.*

On a le théorème suivant de Y. Eliashberg et M. Gromov qui est une version du théorème de plongement de Remmert-Bishop-Narasimhan [50]

Théorème 6.2.4 ([27])
Il existe un plongement propre d'une vatiété de Stein de dimension n *dans* $\mathbb{C}^q$ *où* q *est le plus petit entier strictement supérieur à* $(3n + 1)/2$.

En combinant les théorèmes 6.2.2, 6.2.3 et 6.2.4 on obtient directement la proposition suivante :

Proposition 6.2.5
Une variété CR M (compact) est remplissage si et seulement si elle est plongeable.

D'après Boutet de Monvel

Proposition 6.2.6 ([8])
Toute variété CR strictement pseudoconvexe compact de type $(n,1)$ est plongeable si $n \geq 2$.

Pour $n = 1$, on a un exemple classique de H. Rossi [54] (voir aussi [16] et [28]) qui a montré qu'une petite perturbation analytique réelle quelconque de la sphère de dimension 3 n'est pas plongeable.

Dans [45] théorème 1.1, G. Marinescu et N. Yeganefar ont obtenu un théorème de plongement pour des variétés CR strictement pseudoconvexes compactes qui sont le bord d'une variété complexe strictement pseudoconvexe non compacte. Il en ont déduit que toute variété sasakienne de dimension au moins 3 est plongeable ([45], théorème 1.4). Pour cela, ils ont utilisé une métrique kâhlerienne sur le produit $(0,\infty) \times X$, où X est une variété sasakienne. Cette métrique ,appelée métrique assymptotique hyperbolique complexe, est construite par O. Biquard et M. Herzlich dans [9] et permet de voir X comme le bord strictement pseudoconvexe d'une variété de Kahler

Proposition 6.2.7
Si une variété CR strictement pseudoconvexe $(M, J_b, T, \theta, g_\theta)$ est remplissable, alors la variété de contact (M,θ) (de distribution de contact HM) est holomorphiquement remplissable.

Preuve. Soit $(M, J_b, T, \theta, g_\theta)$ une variété CR strictement pseudoconvexe remplissable. Il existe une variété compacte complexe et connexe X à bord strictement pseudoconvexe M. Ainsi la variété de contact (M,θ) est le bord strictement pseudoconvexe de X. Donc (M,θ) est holomorphiquement remplissable. ■

En combinant les propositions 6.2.5 et 6.2.7 on obtient la proposition suivante :

Proposition 6.2.8
Si une variété CR (M, HM, J_b) strictement pseudoconvexe de type hypersurface est plongeable alors la variété de contact $(M,\mathscr{D} = HM)$ est holomorphiquement remplissable.

Cette proposition et le théorème 1.4 [45] donnent le corrolaire suivant :

Corollaire 6.2.9
Toute variété Sasakienne de dimension au moins trois est holomorphiquement remplissable.

En dimension 3 les propositions 5.2.10, 5.2.21 et 5.2.22 nous donnent :

Proposition 6.2.10
Sur une variété de dimension 3, il existe une correspondance biunivoque naturelle entre les structures CR strictement pseudoconvexes et les structures de contact.

On a aussi :

Proposition 6.2.11
Une structure CR de type $(1,1)$ *est remplissable si et seulement si elle sa structure de contact correspondante est holomorphiquement remplissable.*

Preuve.
Soit M une variété CR remplissable de type $(1,1)$ et soit θ sa structure pseudohermitienne. D'après la proposition 6.2.7, la variété de contact (M,θ) est holomorphiquement remplissable.

Soit maintenant une variété de contact (M,η,ξ) de dimension 3, holomorphiquement remplissable. Soit f un contactomorphisme de (M,θ,ξ) vers le bord bX strictement pseudoconvexe d'une variété complexe compacte X. Soit (M,θ,T) la variété pseudohermitienne strictement pseudoconvexe associée. On a $\theta=\eta$ et $T=\xi$. f est aussi un CR-isomorphisme de (M,θ,T) vers bX muni de la structure CR associée à la structure de contact naturellle sur bX (voir 5.1.21). En effet soient (HM,J_1,T_1) et (HbX,J_2,T_2) les structures CR réelles sur M et sur bX. D'une part on a $f_*H_xM=H_{f(x)}bX$, pour tout $x\in M$. D'autre part $df(J_1(T_1))=0=J_2(T_2)=J_2(df(T_1))$ et pour tout $Z\in T^{10}M$, on a $df(J_1(Z+\overline{Z}))=df(i(z-\overline{Z}))=idf(Z)-idf(\overline{Z})$ et $J_2(df(Z+\overline{Z}))=J_2(df(Z)+df(\overline{Z}))=idf(Z)-idf(\overline{Z})$; par suite $df\circ J_1=J_2\circ df$. D'où (M,θ,T) est une structure CR remplissable. ∎

Remarque 6.2.12
La deuxième partie de la preuve de la proposition précédente nous montre qu'en dimension trois, un contactomorphisme entre variétés de contact est une application CR entre variétés CR associées.

Il est manifeste qu'une application CR entre variétés CR est un contactomorphisme entre variétés de contact associées.

En combinant la proposition 6.2.11 et la proposition 6.2.5, on obtient en dimension 3 la proposition suivante :

Proposition 6.2.13
Soit (M,θ,J_b,T) *une variété pseudohermitienne (compact) et strictement pseudoconvexe de dimension trois. Alors* M *est plongeable si et seulement si la variété de contact* $(M,\eta=\theta,\xi=T)$ *qui lui correspond est holomorphiquement remplissable.*

6.2.2 Le cas du tore $\mathbb{T}^3$

Considérons le tore réel $\mathbb{T}^3$ de dimension 3 muni du système de coordonnées $(x,y,\theta)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,2\pi]$. Soit la structure CR sur $\mathbb{T}^3$ définie par le sous-fibré $T^{10}\mathbb{T}^3$ de $TM\otimes\mathbb{C}$:

$$T^{10}\mathbb{T}^3=\text{vect}\left\{\partial_x+\cot(\theta)\partial_y+i(\partial_x+\cot(\theta)\partial_y);\,\partial_\theta+i\partial_\theta\right\}. \tag{6.2.1}$$

c'est la structure CR standard sur $\mathbb{T}^3$ dont la distribution de Levi est le sous-fibré HM de TM défini par :

$$HM=\text{vect}\left\{\partial_x+\cot(\theta)\partial_y;\,\partial_\theta\right\}. \tag{6.2.2}$$

Nous allons établir le résultat suivant :

Proposition 6.2.14
La structure CR standart $T^{10}\mathbb{T}^3$ *sur* $\mathbb{T}^3$ *définie en 6.2.1 est l'unique structure CR plongeable.*

Soit $\eta_n=\cos(n\theta)dx+\sin(n\theta)dy$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$; c'est une suite de formes de contact sur $\mathbb{T}^3$. En effet on a : $d\eta_n=n\sin(n\theta)d\theta\wedge dx+n\cos(n\theta)d\theta\wedge dy$ et un calcul simple donne $\eta_n\wedge d\eta_n=-n\,dx\wedge dy\wedge d\theta\neq0$.
Déterminons maintenant le champ de Reeb ξ_n de η_n. Posons $\xi_n=f_n(x,y,\theta)\partial_x+g_n(x,y,\theta)\partial_y$. Puisque $\eta_n(\xi_n)=1$, donc on a :

$$f_n(x,y,\theta)\cos(n\theta)+g_n(x,y,\theta)\sin(n\theta)=1 \tag{6.2.3}$$

Puisque $d\eta_n(\xi_n,X)=0$, pour tout champ de vecteurs X, donc on a :
$n\sin(n\theta)dx\wedge d\theta(\xi_n,X)-n\cos(n\theta)dy\wedge d\theta(\xi_n,X)=0$.
Si on prend $X=\partial_\theta$, et si on remplace ξ_n par $f_n(x,y,\theta)\partial_x+g_n(x,y,\theta)\partial_y$, on obtient :

$$\sin(n\theta)f_n(x,y\theta)-\cos(n\theta)g_n(x,y,\theta)=0 \tag{6.2.4}$$

En résolvant le système à inconnues f_n et g_n formé par les équations 6.2.3 et 6.2.4, on obtient : $f_n = \cos(n\theta)$ et $g_n = \sin(n\theta)$. D'où finalement

$$\xi_n = \cos(n\theta)\partial_x + \sin(n\theta\partial_y). \tag{6.2.5}$$

Soit $X_n = f_n^x \partial_x + f_n^y \partial_y + f_n^\theta \partial_\theta \in \mathscr{D}_n = \ker \eta_n$.
$\eta_n(X_n) = \cos(n\theta) f_x^n + \sin(n\theta) f_y^n = 0$ donne $f_y^n = -\cot(n\theta) f_n^x$.
Ce qui entraine que $X_n = f_n^x(\partial_x + \cot(n\theta)\partial_y) + f_n^\theta \partial_\theta$. Par suite

$$\mathscr{D}_n = \operatorname{vect}\left\{\partial_x + \cot(n\theta)\partial_y; \partial_\theta\right\}. \tag{6.2.6}$$

Remarque 6.2.15
$\mathscr{D}_1$ est la structure de contact standart sur $\mathbb{T}^3$ et on a $\eta_n = p_n^* \eta_1$ où $p_n : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$, $n = 1, 2, \cdots$, avec $p_n(x, y, \theta) = (x, y, n\theta)$.

D'après Eliashberg, [25] théorème 2.1, les structures de contact $\mathscr{D}_n$ sont deux à deux non difféomorphiques et fournissent à difféomorphisme près une liste complète de structures de contacts positives tendues sur $\mathbb{T}^3$.

Proposition 6.2.16 ([25] théorème 2.2)
Les structures de contact $(\mathscr{D}_n)$ sur $\mathbb{T}^3$ ne sont pas fortement symplectiquement remplissables pour $n > 1$.

Pour $n = 1$ on a la proposition suivante :

Proposition 6.2.17 ([25], corollaire 2.3 :)
La structure de contact standart $\mathscr{D}_1$ sur $\mathbb{T}^3$ est la seule qui soit holomorphiquement remplissable.

Preuve. En effet, comme tout espace cotangent, $T^*\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ est équipé d'une forme symplectique naturelle $w_0 = d\lambda$, où λ est la 1-forme de Liouville : $\lambda = z_1 dx + z_2 dy$, où $(x, y) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(r, \theta) \in]0; +\infty[\times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ les coordonnées polaires définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ par $z_1 = r\cos\theta$ et $z_2 = r\sin\theta$, la restriction de la 1-forme de Liouville λ sur $W_0 = \mathbb{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus 0)$, est la 1-forme $\alpha_r = r(\cos\theta dx + \sin\theta dy)$. α_r induit sur chaque hypersurface $r = f(x, y, \theta)$, où f est une fonction positive, une forme de contact. Toutes les formes de contact α_r définissent la même structure de contact $\mathscr{D}_1$ sur $\mathbb{T}^3 = \left\{(x, y, \theta)\right\}$. la symplectisation de $(\mathbb{T}^3, \mathscr{D}_1)$ est symplectomorphe à $(W_0, w_0 = dz_1 \wedge dx + dz_2 \wedge dy)$. De plus le champ de vecteurs de Liouville $X_0 = z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2}$ est w_0-dual à λ et peut être pris comme étant une fonction spsh sur W_0. Ce qui entraine que $(\mathbb{T}^3, \mathscr{D}_1)$ est holomorphiquement remplissable. D'après la proposition 6.2.16 $\mathscr{D}_1$ est la seule structure holomorphiquement remplissable sur $\mathbb{T}^3$. ■

Preuve de la proposition 6.2.14.
D'après la proposition 6.2.17 la structure de contact $\mathbb{D}_1$ est l'unique qui soit holomorphiquement remplissable sur $\mathbb{T}^3$. Donc d'après la proposition 6.2.13 sa structure CR qui lui est canoniquement associée est la seule qui soit plongeable et d'après la relation 6.2.2 cette structure CR est exactement la structure CR standart sur $\mathbb{T}^3$. ■

Remarque 6.2.18 *D'après la Proposition 1.3. de [21],* $\mathbb{T}^3$ *ne porte aucune structure de* $K-$*contact. Donc la structure CR strictement pseudoconvexe standart sur* $\mathbb{T}^3$ *n'est pas normale.*

6.3 Des Structures CR plongeables sur des fibrés en tores sur le cercle

6.3.1 Structure CR standart sur le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$

Soit $H_n = \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ muni des coordonnées $(z,t) = (z^1,\cdots,z^n,t)$. H_n est un groupe lorsqu'on le muni de la loi

$$(z,t)\bullet(w,s) = (z+w, t+s+2\mathrm{Im}<z,w>) \text{ où } <z,w>= \delta_{jk} z^j \overline{w_k}. \tag{6.3.1}$$

De plus H_n est un groupe de Lie appelé groupe de Heisenberg.
Considérons les champs de vecteurs complexes

$$T_j = \partial_{z^j} + i\overline{z}^j\partial_t \text{ où } z^j = x^j + iy^j,\ 1\le j\le n, \tag{6.3.2}$$

où $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial_t}$ et $\partial_{z^j} = \dfrac{\partial}{\partial z^j} = \dfrac{1}{2}(\partial_{x^j} - i\partial_{y^j})$.
On a :

$$T_j = \frac{1}{2}\partial_{x^j} + y^j\partial_t + i\Big(-\frac{1}{2}\partial_{y^j} + x^j\partial_t\Big). \tag{6.3.3}$$

Soit $T^{10}_{(z,t)}H_n$ l'espace engendré par $T_{j,(z,t)}$, $1\le j\le n$;

$$T^{10}_{(z,t)}H_n = \sum_{j=1}^{n}\mathbb{C}T_{j,(z,t)}, \text{ pour tout } (z,t)\in H_n. \tag{6.3.4}$$

Puisque $[T_j, T_k] = 0$, $1 \leq j, k \leq n$, alors $(H_n, T^{10}H_n)$ est une variété CR de type $(n, 1)$.

Considérons la 1-forme réelle θ_0 sur H_n définie par :

$$\theta_0 = dt + i\sum_{j=1}^{n}(z^j d\overline{z}^j - \overline{z}^j dz^j). \tag{6.3.5}$$

Alors θ_0 est une structure pseudo-hermitienne sur $(H_n, T^{10}H_n)$. En dérivant, on obtient

$$d\theta_0 = 2i\sum_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\bar{z}^j. \tag{6.3.6}$$

Puisque $L_{\theta_0}(T_j, \overline{T}_k) = i d\theta_0(T_j, \overline{T}_k)$, donc on a :

$$L_{\theta_0}(T_j, \overline{T}_k) = \delta_{jk}. \tag{6.3.7}$$

La direction caractéristique de θ_0 est donnée par $T = \partial_t$

Le choix de θ_0 montre que $(H_n, T^{10}H_n)$ est une variété CR strictement pseudoconvexe. Sa forme de Levi est engendrée par les champs de vecteurs (invariants à gauche) $\{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n\}$ où $X_j = \partial_{x^j} + 2y^j\partial_t$, $Y_j = \partial_{y^j} - 2x^j\partial t$, $1 \leq j \leq n$. La direction caractéristique de la variété pseudo-hermitienne est ∂_t.

Pour $n = 1$, on a :

$$\theta_0 = dt + i(zd\bar{z} - \overline{z}dz) = dt + 2(xdy - ydx). \tag{6.3.8}$$

$$d\theta_0 = 4dx \wedge dy + 2i[(dx)^2 + (dy)^2]. \tag{6.3.9}$$

$$H(H_1) = \mathrm{vect}\{X_1, Y_1\} = \mathrm{vect}\left\{\partial_x + 2y\partial_t, \partial_y - 2x\partial_t\right\} \tag{6.3.10}$$

Considérons le tenseur J_b de type $(1, 1)$ sur H_1 défini par :

$$J_b = (2x\partial_t - \partial_y) \otimes dx + (\partial_x + 2y\partial_t) \otimes dy. \tag{6.3.11}$$

On a $J_b(T) = J_b(\partial_t) = 0$.

Soit $X \in H(H_1)$, alors $X = f^x(\partial_x + 2y\partial_t) + f^y(\partial_y - 2x\partial_t)$ où f^x et f^y sont des fonctions de classe C^∞ sur H_1. Un calcul simple donne :

$J_b(X) = f^y\partial_x - f^x\partial_y + 2(xf^x + yf^y)\partial_t$ et $J_b^2(X) = -X$.

Définition 6.3.1

L'application $D_\delta : H_n \longrightarrow H_n$ donnée par $D_\delta(z, t) = (\delta z, \delta^2 t)$ pour tout $(z, t) \in H_n$ est appelée dilatation de facteur $\delta > 0$.

Proposition 6.3.2 ([24], Proposition 1.5)
Chaque dilatation est un homomorphisme de groupe et un CR isomorphisme.

Soit maintenant Ω_{n+1} un domaine de Siegel

$$\Omega_{n+1} = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \; v > \|z\|^2\right\} \tag{6.3.12}$$

où $z = (z^1, \cdots, z^n), \; w = u + iv, \; u, v \in \mathbb{R}$ et $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |z^j|^2$.

Proposition 6.3.3
Considérons l'application

$f : H_n \longrightarrow b\Omega_{n+1}, \; f(z,t) = (z, t + i\|z\|^2)$ *pour tout* $(z,t) \in H_n$,

où $b\Omega_{n+1} = \left\{(z, w = u + iv) : \; \|z\|^2 = v\right\}$ *est le bord du domaine* Ω_{n+1} *de Siegel. Alors* f *est un CR isomorphisme. Ici* $b\Omega_{n+1}$ *est muni d'une structure CR de type hypersurface induite par* $\mathbb{C}^{n+1}$.

Preuve.
df est un isomorphisme puisque sa matrice au point $(z,t) \in H_n$, avec $z = (z_1, \cdots, z_n)$ est :

$$M_{df_{(z,t)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ i\frac{\overline{z}_1}{2|z_1|} & i\frac{\overline{z}_2}{2|z_2|} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $L = \sum_{j=1}^n c_j T_{j,(z,t)} = \sum_{j=1}^n c_j \Big(\partial_{z^j}(z,t) + i\overline{z}_j \partial_t(z,t)\Big) \in T^{10}_{(z,t)} H_n$, avec $c_j \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} df_{(z,t)}(L) &= M_{df_{(z,t)}} \times \begin{pmatrix} c_1 \partial_{z^1}(z,t) \\ \vdots \\ c_n \partial_{z^n}(z,t) \\ i\Big(\sum_{j=1}^n c_j \overline{z}_j\Big)\partial_t(z,t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \partial_{z^1}(z,t) \\ \vdots \\ c_n \partial_{z^n}(z,t) \\ i\sum_{j=1}^n c_j \frac{\overline{z}_j}{2|z_j|} \partial_{z^j}(z,t) + i\Big(\sum_{j=1}^n c_j \overline{z}_j\Big)\partial_t(z,t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi $df_{(z,t)}(L) \in T^{10}_{(z,t)}H_n$. ■

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord lisse $b\Omega$ i.e il existe un voisinage ouvert U de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}^n$ et une fonction de classe C^∞ $\rho : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Omega = \left\{x \in U : \rho(x) > 0\right\}$ et $b\Omega = \left\{x \in U : \rho(x) = 0\right\}$ et $d\rho(x) \neq 0$, pour tout $x \in b\Omega$. Soit $T^{10}b\Omega$ la structure CR induite sur $b\Omega$, comme hypersurface réelle de $\mathbb{C}^N$. Soit θ le tiré en arrière vers de la 1-forme réelle $i(\overline{\partial} - \partial)\rho$ sur U. Alors θ est une structure pseudo-hermitienne sur $(b\Omega, T^{10}(b\Omega))$. Comme nous venions juste de le voir, la frontière d'un domaine de Siegel est une variété CR strictement pseudoconvexe.

Aussi la sphère $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est une variété CR strictement pseudoconvexe, puisque c'est le bord de la boule unité $B_{n+1} = \left\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\right\}$ et la restriction à $S^{2n+1} \setminus \{e_1\}$ de la transformation de Cayley $\phi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_1 = 1\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $\phi(z) = i\dfrac{e_1 + z}{1 - z_1}$, $z_1 \neq 1$, $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, donne un CR isomorphisme
$S^{n+1} \setminus \{e_1\} \simeq b\Omega_{n+1}$ et ainsi un CR isomorphisme $S^{n+1} \setminus \{e_1\} \simeq H_n$.

Puisque la structure CR standart sur H_n est plongeable, alors d'après la proposition 6.2.7, la structure de contact qui lui est cononiquement associée est holomorphiquement remplissable. De plus en dimension trois on a la proposition suivante :

Proposition 6.3.4
La structure CR sur H_1 est normale.

Preuve.
D'après la proposition 5.2.24 nous allons montrer que la torsion pseudo-hermitienne τ de la connexion ∇^{TW} de Tanaka-Webster de θ_0 est nulle.

Soit $X \in H(H_1)$ et soit T la direction caractéristique de θ_0. On a $T = \partial_t$, $X = f^x(\partial_x + 2y\partial_t) + f^y(\partial_y - 2x\partial_t)$ et $J_b(X) = f^y\partial_x - f^x\partial_y + 2(xf^x + yf^y)\partial_t$.

$$[T; X] = [\partial_t; f^x\partial_x] + [\partial_t; f^y\partial_y] + [\partial_t; 2(yf^x - xf^y)\partial_t]. \tag{6.3.13}$$

$$[T; J_bX] = [\partial_t; f^y\partial_x] - [\partial_t; f^x\partial_y] + [\partial_t; 2(xf^x - yf^y)\partial_t]. \tag{6.3.14}$$

Dans la suite nous convenons que la somme est faite sur toutes indices répétés. Soit $(x^1; \cdots; x^n)$ un système de coordonnées sur une variété M. Si $Y = Y^i\partial_{x^i}$ et $Z = Z^i\partial_{x^i}$ Et si $f \in C^\infty(M)$, alors :

$[Y; Z] = (Y^i\partial_{x^i}(Z^j) - Z^i\partial_{x^i}(Y^j))\partial_{x^j}$ et $[Y; fZ] = f[Y; Z] + Y^iZ^j\partial_{x^i}(f)\partial_{x^j}$.
En particulier si $Y = \partial_{x^k}$ et $Z = \partial_{x^l}$, alors, puisque $[\partial_{x^k}; \partial_{x^l}] = 0$, on a :

$[\partial_{x^k}; f\partial_{x^l}] = \partial_{x^k}(f)\partial_{x^l}$.
En appliquant cela aux relations 6.3.13 et 6.3.13, on obtient :

$[T;X] = \partial_t(f^x)\partial_x + \partial_t(f^y)\partial_y + 2\partial_t(yf^x - xf^y)\partial_t$ et
$[T;J_bX] = \partial_t(f^y)\partial_x - \partial_t(f^x)\partial_y + 2\partial_t(xf^x - yf^y)\partial_t$.
En appliquant J_b à $[T;J_bX]$, on a :

$$\begin{aligned} J_b[T;J_bX] &= \partial_t(f_y)(2x\partial_t - \partial_y) - \partial_t(f^x)(\partial_x + 2y\partial_t) \\ &= -(\partial_t(f^y)\partial_y + \partial_t(f^x)\partial_x) - 2\partial_t(yf^x - xf^y)\partial_t \\ &= -[T;X]. \end{aligned}$$

Ainsi $T^{TW}(T,X) = 0$, d'où $\tau(X) = 0$.
■

Définition 6.3.5
Soit G un groupe de Lie de dimension réelle $(2n+k)$ et $T^{10}G$ une structure CR de type hypersurface sur G La paire $(G, T^{10}G)$ est dite groupe de Lie CR si $T^{10}G$ est invariant à gauche i.e $(d_gL_h)T^{10}_gG = T^{10}_{hg}G$

En effet chaque translation à gauche est une application CR.

Le groupe de Heisenberg H_n est un groupe de Lie CR (avec la structure CR $T^{10}H_n$ définie plus haut). En effet les composantes L^j, L^0 de la translation $L_{(z,t)} : H_n \longrightarrow H_n$ sont données par :
$L^j(w,s) = z^j + w^j$, $L^0(w,s) = t + s + 2\mathrm{Im} < z, w >$; avec
$\partial_{w^k}(L^j) = \delta^j_k;\quad \partial_{\bar{w}^k}(L^j) = 0;\quad \partial_s(L^j) = 0$
$\partial_{w^k}(L^0) = i\bar{z}^k;\quad \partial_{\bar{w}^k}(L^0) = -i\bar{z}^k;\quad \partial_s(L^0) = 1.$

Soit maintenant le groupe de Heisenberg Nil^3, le groupe de Lie nilpotent des matrices de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nil^3 peut être regardé comme $\mathbb{R}^3$ avec la multiplication : $(x_0, y_0, t_0)(x, y, t) = (x_0 + x, y_0 + y, t_0 + t + x_0y_0)$. Ainsi, Nil^3 est exacterment le groupe de Heisenberg $H_1 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ avec la loi définie en 6.3.1. Donc θ_0 est une structure pseudo-hermitienne sur Nil^3 et $(Nil^3, H(H_1), J_b)$ est une variété CR strictement pseudoconvexe de type $(1,1)$.

D'après la proposition 6.3.4, la structure métrique de contact associée à la structure CR $(Nil^3, H(H_1), J_b)$ est sasakienne. Cette structure est invariante par les translations à gauche puisque H_1 est un groupe de Lie CR.

Nous avons les propositions suivantes :

Proposition 6.3.6 ([13])
Soit M une variété compacte de dimension 3 qui est difféomorphique à un quotient à gauche du groupe de Heisenberg Nil^3 de dimension 3, alors l'unique structure Sasakienne qui descend au quotient est la structure Sasakienne standart.

Proposition 6.3.7 ([30])
Les quotients à gauche du groupe de Heisenberg Nil^3 sont exactement les fibrés T^2 sur S^1 à monodromie $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où la projection de fibre est induite par l'application $(x, y, t) \longrightarrow y$.

6.3.2 caractérisation des structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur des fibrés en tores $\mathbb{T}^2$ sur S^1

Pour tout $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, soit T_A le quotient de $T^2 \times \mathbb{R} = (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \times \mathbb{R}$ avec les coordonnées $(X, t) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right)$, par la transformation $(X, t) \longrightarrow (AX, t+1)$. On oriente T_A par la 3-forme $dx \wedge dy \wedge dt$. Le fibré en tore T_A sur le cercle S^1 dépend à difféomorphisme près, seulement de la classe de conjugaison de $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ (i.e la classe d'équivalence de A par la relation $A' \sim A$ si et seulement si il existe $B \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $A' = BAB^{-1}$). A est la monodromie de T_A , c'est un homomorphisme du groupe fondamental de la base de T_A vers le groupe des homomorphismes d'une fibre type de la projection. Si A est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$, alors la variété T_A sera notée par $T(k)$. On a $T(0) = \mathbb{T}^3$,

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction lisse à dérivée strictement positive ; l'équation

$$\cos[\varphi(t)]dx - \sin[\varphi(t)]dy = 0, \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \tag{6.3.15}$$

définit une structure de contact $\tilde{\mathscr{D}}(\varphi)$ sur $\mathbb{R}^3$. Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, soit Δ_θ le rai

$$\Delta_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} : \ r \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2. \tag{6.3.16}$$

Si $A(\Delta_{\varphi(t)}) = \Delta_{\varphi(t+1)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors la structure de contact $\tilde{\mathscr{D}}(\varphi)$ sur $\mathbb{R}^3$ est invariante sous l'action du groupe de transformation des morphismes de T_A (i.e le groupe des homeomorphismes h tels que $\pi \circ h = \pi$ où $\pi : T_A \longrightarrow Base$ est la projection naturelle) et induit ainsi une structure de contact $\mathscr{D}(\varphi)$ sur T_A.

D'après E. Giroux [31], pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction lisse $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ à dérivée strictement positive satisfaisant $A(\Delta_{\varphi(t)}) = \Delta_{\varphi(t+1)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $2n\pi < \sup_{t\in\mathbb{R}}[\varphi(t+1)-\varphi(t)] \leq 2(n+1)\pi$. A fibre préservant l'isotopie, la structure de contact $\mathscr{D}(\varphi)$ sur T_A dépend seulement de n.

Ainsi nous noterons simplement la structure de contact $\mathscr{D}(\varphi)$ par $\mathscr{D}_n$. Giroux a montré, dans [31], que les $\mathscr{D}_n$ sont tendues et deux à deux non difféomorphes. On a aussi les résultats suivants

Théorème 6.3.8 ([23], Theorem 1)
Pour tout $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la structure de contact $(T_A, \mathscr{D}_n)$ est faiblement simplectiquement remplissable. Il existe $n(A) \in \mathbb{N}$ tel que $(T_A, \mathscr{D}_n)$ n'est pas fortement simplectiquement remplissable pour $n \geq n(A)$.

Ainsi d'après la proposition 5.1.26, on peut se demander s'il existe des structures de contacts holomorphiquement remplissables sur $(T_A, \mathscr{D}_n)$. Une réponse affirmative est donnée par H. DATHE et C. KHOULE dans [20] pour certaines valeurs de la trace de la matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Théorème 6.3.9 ([20]) *Soit M un fibré $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Si une des trois conditions suivantes est satisfaite :*

1. *trace$(A) \geq 2$,*
2. *A est non périodique et satisfait $|\text{trace}(A)| = 2$,*
3. *A est la matrice unité d'ordre 2,*

alors il existe une structure de contact holomorphiquement remplissable sur M.

On a une généralisation de ce théorème par J. Van Horn Morris dans [62] :

Théorème 6.3.10 ([62], Theorem 4.3.2) *Soit T_A^3 un fibré en tore $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors on a au moins une des conditions suivantes :*

1. *T_A^3 porte une structure de contact Stein remplissable ;*
2. *T_{-A}^3 porte une structure de contact Stein remplissable.*

La proposition 6.2.13 donne directement le théorème suivant d'existence, sur T_A ou sur T_{-A}, d'une structure CR strictement pseudoconvexe plongeable. C'est aussi la version CR suivante du théorème précédent :

Théorème 6.3.11 *Soit T_A^3 un fibré en tore $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à matrice de monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors on a au moins une des conditions suivantes :*

1. *T_A^3 porte une structure CR strictement pseudoconvexe plongeable ;*
2. *T_{-A}^3 porte une structure CR strictement pseudoconvexe plongeable.*

Soit maintenant $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $|\text{trace}(A)| = 2$, on a $T_A = T(k)$.

Corollaire 6.3.12 ([23], Corollary 12)
La variété de contact $(T(k), \mathscr{D}_n)$ n'est pas fortement symplectiquement remplissable pour $k \leq 0$ et pour $n \geq 2$.

Proposition 6.3.13 ([23], Proposition 13)
La vatiété de contact $(T(k),\mathscr{D}_0)$ est fortement simplectiquement remplissable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

D'après les propositions 6.3.12 et 5.1.26, la variété de contact $(T(k),\mathscr{D}_n)$ n'est pas fortement symplectiquement remplissable pour $k \leq 0$ et pour $n \geq 2$. Donc d'après la proposition 6.3.13, il est une question naturelle de caractériser les structures de contact holomorphiquement remplissables sur T_A où $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $|\text{trace}(A)| = 2$.

Proposition 6.3.14 ([43])
Soit M une variété orientée fermée de dimension trois qui porte une métrique à courbure scalaire strictement positive. Soit $\mathscr{F}_M$ l'espace des structures de contact symplectiquement remplissables. Alors, $|\mathscr{F}_M| \leq |Tor(H_1(M;\mathbb{Z}))|$, où $Tor(H_1(M;\mathbb{Z}))$ est le sous-groupe de torsion de $H_1(M;\mathbb{Z})$ et $|\cdot|$ désigne le cardinal.

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la proposition 6.3.14 et de la proposition 5.1.26

Corollaire 6.3.15
Soit M une variété orientée fermée de dimension trois qui porte une métrique à courbure scalaire strictement positive. Alors, $\mathscr{HF}_M \leq |Tor(H_1(M;\mathbb{Z}))|$, où $\mathscr{HF}_M$ désigne le nombre de structures de contact holomorphiquement remplissables sur M à isotopie près.

Théorème 6.3.16 *(Caractérisation des structures de contact holomorphiquement remplissables sur T^3_A avec $|trace(A)| = 2$)*
Soit T^3_A un fibré $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ non périodique satisfaisant $|trace(A)|=2$ et $\mathscr{HF}$ le nombre de structures de contact holomorphiquement remplissables sur T^3_A à isotopie près. Alors on a $1 \leq \mathscr{HF} \leq 3$.

Preuve.
D'après la proposition 6.3.7 M est un quotient à gauche de Nil^3. Selon P. Scott [59], Tout quotient à gauche compact de Nil^3 est difféomorphique à l'une des quotients de la forme Nil^3/Γ_k, $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$, où le sous groupe discret Γ_k de Nil^3 est le treillis engendré par les éléments $(k,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Selon [13], Γ_k est obtenu en restreignant les coordonnées (x,y,t) de Nil^3 à prendre valeurs dans l'ensemble des entiers divisibles par k et $H_1(M, Nil^3/\Gamma_k) = \mathbb{Z}^{2n} + \mathbb{Z}_k$. On a donc $H_1(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}_k$, $k = 1,2,3$. Par suite $|Tor(H_1(M;\mathbb{Z}))| \in \{1,2,3\}$. Puisque M est une variété sasakienne alors d'après [7], M porte une métrique à courbure scalaire positive. Alors d'après le corollaire 6.3.15, on a

$0 \leq \mathscr{HF}_M \leq 3$. En combinant cela avec la proposition 6.3.6, et le corollaire 6.2.9, on a $1 \leq \mathscr{HF}_M \leq 3$. ■

La version CR de ce théorème est le théorème de caractérisation des structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur T_A^3 avec $|\text{trace}(A)| = 2$. Il s'agit du théorème suivant :

Théorème 6.3.17
Soit T_A^3 un fibré $\mathbb{T}^2$ sur S^1 à monodromie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ non périodique satisfaisant $|trace(A)| = 2$ et $\mathscr{CRP}$ le nombre de structures CR strictement pseudoconvexes plongeables sur T_A^3 à isotopie près. Alors on a $1 \leq \mathscr{CRP} \leq 3$.

Preuve. Elle s'obtient directement en combinant le théorème 6.3.16, la proposition 6.2.13, la remarque 6.2.12 et la définition 4.3.7. ■

Bibliographie

[1] A. ANDREOTTI AND G.A. FREDRICKS : *Embeddability of real analytic Cauchy-Riemann manifolds*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, (4)6(1979),), 285-304.

[2] A. ANDREOTTI AND C.D. HILL : *Complex characteristic coordinates and the tangential Cauchy-Riemann equations*, Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, 26(1972), 299-324.

[3] M. BALDÉ, S. SAMBOU, B. TOURÉ : *Sur les groupes de $\bar{\partial}_b$ cohomologie des courants d'ordre l*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci Canada Vol. 28(3) 2006, pp 85-90.

[4] Z.M. BALOGH AND C. LEUENBERGER : *Transversal group actions on CR manifolds and embedability*, Tohoku Math. J., 55(2003), 507-527.

[5] M. S. BAOUENDI AND L. P. ROTHSCHILD : *Transversal Lie group actions on abstract CR manifolds*, Math. Ann. 287 (1990), 19-33.

[6] M.S. BAOUENDI, L.P. ROTHSCHILD, AND F. TREVES : *CR structures with group action and extendability of CR functions*, Invent. MAth., 82(1985), 359-396.

[7] DAVID E. BLAIR : *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Lecture notes in mathematics, vol. 509, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[8] L. BOUTET DE MONVEL : *Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles*, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974-1975 ; Équations aux derivées partielles linéaires et non linéaires, Centre Math., École Polytech., Paris, 1975, pp. Exp. No. 9, 14.

[9] O. BIQUARD AND M. HERZLICH : *A Burns-Epstein invariant for ACHE 4-manifolds*, Pre-print, arXiv :math.DG/0111218, to appear in Duke Math. J., 2002.

[10] J. BRINKSHULTE : *Laufer's Vanishing Theorem for Embedded CR Manifolds*, Math. Z., 239 (2002), 863-866.

[11] J. BRINKSCHULTE : *the $\overline{\partial}$-problem with support conditions on some weakly pseudo-convex domains,* Ark. Mat., 42 (2004), 259-282.

[12] J. BRINKSCHULTE, C. D. HILL AND M. NACINOVICH : *Obstructions to Generic Embeddings,* Tome 52, n 6 (2002), p. 1785-1792.

[13] C. P. BOYER : *Sasakian Geometry of the Heisenberg Group,* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 52(100) No. 3(2009), 251-262.

[14] CHARLES P. BOYER AND KRZYSZTOF GALICKI : *Sasakian geometry,* Oxford University Press, 2008.

[15] BOGOMOLOV, F.A., DE OLIVEIRA, B. : *Stein Small Deformations of Strictly Pseudo-convex Surfaces.* Contemporary Mathematics 207 (1997), 25-41.

[16] D. M. BURNS : *Global behavior of some tangential Cauchy-Riemann equations* , Partial differential equations and geometry (Proc. Conf., Park City, Utah, 1977), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 48, Dekker, New York, 1979, pp. 51-56.

[17] J-Y. CHARBONNEL ET H. O. KHALGUI : *Classification des structures CR invariantes pour les groupes de Lie compacts.* Journal of Lie Theory Volume 14 (2004) 165-198.

[18] E. M. CHIRKA : *Régularization and $\bar{\partial}$-Homotopie on a Complex Manifold,* Soviet Math. Dolk. 20 (1979) 73-76.

[19] H. DATHE : *Feuilletages des variétés fibrées et structures de contact.* Editions Universitaires Européennes, Sudwestdentschw, Verlag (Allemagne) (2012).

[20] H. DATHE AND C. KHOULÉ : *Existence of holomorphically fillable contact structures on some T2 bundles over S1.* Journal of Mathematical Sciences : Advances and Applications, Volume 18, Number 1-2, 2012, Pages 29-45.

[21] H. DATHE AND P. RUKIMBIRA : *Contact deformation of closed 1-forms on T2 bundles over S1* ArXiv :0812.3389v1 [math.DG] 17 Dec 2008.

[22] H. DATHE AND M. SANE : *Sur le plongement des structures CR.* Journal des Sciences et technologies, FST UCAD Vol. 10, no 1(2013).

[23] F. DING AND H. GEIGES : *Symplectic fillability of tight contact structures on torus bundles,* Alg. and Geom. Topol. 1 (2001), 153-172.

[24] SORIN DRAGOMIR AND GIUSEPPE TOMASSINI : *2006. Differential geometry and analysis on CR manifolds,* Progress in Mathematics, vol. 246, Birkhauser, Basel.

[25] YA. ELIASHBERG : *Unique holomorphically fillable contact structure on the* $3-$*torus*, Internat. Math. Res. Notices 1996, 77-82.

[26] Y. ELIASHBERG, *"Filling by holomorphic disc and its applications" in Geometry of Low-Dimensional Manifolds 2*, London. Math. Soc. Lecture Note Ser. 151,Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1990), 45-67.

[27] Y. ELIASHBERG AND M. GROMOV : *Embedding of Stein Manifolds of dimension n into the affine space of dimension* $\frac{3n}{2}+1$, Ann. Math, 136 (1992), 123-135.

[28] E. FALBEL : *Nonembeddable CR-manifolds and surface singularities*, Invent.Math. 108 (1992), no. 1, 49-65.

[29] H. GEIGES : *An Introduction to contact topology*, CAMBRIDGE STUDIES IN ADVANCED MATHEMATICS 109.

[30] H. GEIGES AND J. GONZALO : *Contact circles on 3-manifolds*, J. Diff. Geom. 46(1997), 236-286.

[31] E. GIROUX : *Une infinité de structures de contact tendues sur une infinité de variétés*, Invent. Math. 135 (1999), 789-802.

[32] H. GRAUERT : *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. 146 (1962), 331-368.

[33] S. GREENFIELD : *Cauchy-Riemann equations in several variables*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 22(1968), 275-314.

[34] R. HARVEY AND H.B. LAWSON : *On the boundaries of complex analytic varieties, I*, Ann. of Math. 102(1975), 223-290.

[35] HILL C. D., NACINOVICH M. : *On the Cauchy problem in complex analysis*, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLXXI (1996), 159-179.

[36] S. IANUS : *Sulle varietà di Cauchy-Riemann*, Rend. dellŠAccad. Sci. Fis. Mat., Napoli, 39(1972), 191-195.

[37] H. JACOBOWITZ AND F. TREVES : *Non-realizable CR structures*, Invent. Math. 66 (1982), 231-249.

[38] J.J. KOHN : *Boundaries of complex manifolds*, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis, 1964, Springer-Verlag, New York, 1965, pp. 81-94.

[39] C. Laurent-Thiebault, J. Leiterer : *Dolbeault Isomorphisme for CR Manifolds*, Prépublication de l'institut Fourrier n 521, Grenoble (2000).

[40] C. Laurent-Thiebault, J. Leiterer : *Uniforms esstimates for the Cauchy-Riemann equation on q-convex wedges*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), 383-436.

[41] C. Laurent-Thiebault, J. Leiterer : *Andreoti-Vesentini separation theorem with C^k estimates and extension of CR forms*, Mathematical Notes, 38 Princeton University (1993), p. 416-436.

[42] L. Lempert : *On three-dimensional Cauchy-Riemann manifolds*, J. Amer. Math. Soc., (4)5(1992), 923-969.

[43] P. Lisca : *On fillable contact structures up to homotopy*, Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol. 129, Number 11(2001) 3437-3444.

[44] Lojaciewiecz, S. and Tomassini, G. : *Valeurs au bord des formes holomorphes*, in Several Complex Variables (P. Scuola. Norm. Sup. Pisa, Ed,) Cortona, 1976 77, 1978, p. 222-246.

[45] G. MARINESCU AND N. YEGANEFAR : *Embeddibility of some strongly pseudo-convex CR manifolds.* ArXiv :math/0403044v1 [math.CV] 02 Mars 2004.

[46] A. Martineau : *Distribution et valeurs au bord des formes holomorphes*, Strasbourg RCP 25(1966).

[47] A. Martineau : *Distribution et valeurs au bord des fontions holomorphes*, in Theory of distributions (Proc. Internat. Summer Inst., Lisbon, 1964), Inst. Gulbenkian Ci., Lisbon, 1964, p. 193-326.

[48] J. Martinet : *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Springer Lecture Notes in Math, vol. 209, Springer-Verlag, 1971.

[49] A. MEZIANI : *Perturbation of a class of CR structures of codimension larger than one*, J. Funct. Anal. 116 (1993), 225-244.

[50] R. Narasimhan : *Imbedding of holomorphically complete complex spaces*, Amer. J. Math. 82 (1960), 917-934.

[51] Liviu Nicolaescu. : *Geometric connections and geometric Dirac operators on contact manifolds.* Différential Geometry and its Applications, 22 :355378, 2005.

[52] L. NIRENBERG : *On a question of Hans Lewy*, Russian Math. Surveys 29 (1974), 251-262.

[53] P. POPESCU-PAMPU : *Topologie de contact et singularités complexe*. Mémoire d'habilitation de l'université de Paris 7 Denis Diderot soutenu le 09 décembre 2008.

[54] H. ROSSI65 : *Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary*, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis 1964, (Aeppli, Calabi and RÍohrl eds.), Springer-Verlag, (1965), 242-256.

[55] S. SAMBOU : *Résolution du $\bar{\partial}$ pour les courants prolongeables*, Math. Nachrichten 235, (2002), 179-190.

[56] S. SAMBOU : *Equation de Cauchy-Riemann pour les courants prolongeables*, Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, 2001.

[57] S. SAMBOU, M. SANÉ : *Quelques résultats d'isomorphisme entre groupes de cohomologie*, Ann. Polon. Math. 104 (2012), 97-103.

[58] S. SAMBOU, M. SANÉ : *Résolution du $\overline{\partial}$ pour les formes différentielles ayant une valeur au bord au sens des courants dans un domaine strictement pseudoconvexe*, Annales mathématiques Blaise Pascal, 18 no. 2 (2011), p. 323-331.

[59] P. SCOTT : *The geometry of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. 15(1983), 401-487.

[60] N. TANAKA : *On the pseudoconformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables*, J.Math. Soc. Japan 14 (1962), 397-429.

[61] S. TANNO : *Variational problems on contact Riemannian manifolds*, Trans. A.M.S., (1)314(1989), 349-379.

[62] J. VAN HORN-MORRISConstruictions of open book decompositions DISSERTATION Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of DOCTOR OF PHILOSOPHY, August 2007

[63] S. M. WEBSTER : *On the proof of KuranishiŠs embedding theorem*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 6 (1989), 183-207.