UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique

Laboratoire d'Algèbre, de Cryptographie, de géométrie Algébrique et Applications

THÈSE DE DOCTORAT UNIQUE ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Option : **Algèbre et Applications**

Titre :

« SUR LES S-MODULES »

Présentée et soutenue publiquement **le Samedi 06 juillet 2013 à 10h à l'amphi 7**

Par : **Alhousseynou BA**

Sous la direction du **Dr. Oumar DIANKHA**

Devant le jury composé de :

Jury	Nom et prénoms	Grade	Etablissement
Président	Mamadou SANGHARE	Professeur	Univ. C. Anta Diop de Dakar
Rapporteurs	Sidy Demba TOURE	Maitre de Conférences	Univ. C. Anta Diop de Dakar
	Youssouf DIAGANA	Maitre de Conférences	Univ. Abobo-Adjamé (Côte d'Ivoire)
Examinateurs	Djiby SOW	Professeur	Univ. C. Anta Diop de Dakar
	Ben Maouia Mohamed Ben Fraj	Docteur d'Etat, Chargé de cours	Univ. Gaston Berger de St-Louis
Directeur de Thèse	Oumar DIANKHA	Maitre de Conférences	Univ. C. Anta Diop de Dakar

ANNEE ACCADEMIQUE : 2012-2013

Table des matières

Introduction

L'Algèbre est, peut être, le secteur des mathématiques le plus fréquemment sollicité, non seulement par les diverses branches des mathématiques pures, mais aussi par les sciences techniques et naturelles. On y trouve une notion très importante qui est la théorie fondamentale des modules. Cette dernière favorise l'élargissement de cette discipline par des résultats théoriques spectaculaires.
Soit A un anneau non nécessairement commutatif possédant un élément unité $1 \neq 0$ et M un A-module à gauche.
On dit qu'un A-module N est engendré par M s'il existe un ensemble Λ et un épimorphisme $\phi : M^{(\Lambda)} \to N$.
Un A-module K est dit sous-engendré par M s'il est un sous-module d'un A-module M-engendré.
On note la catégorie $\sigma[M]$, introduite par **R. Wisbauer** dans **[28]**, la sous-catégorie pleine de A-Mod dont les objets sont les sous-modules d'un A-module M-engendré.
On dit qu'un A-module M est hopfien si tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme.
Pour un A-module à gauche M, il est bien connu que tout objet

noethérien, de type fini(si A est commutatif) ou de longueur finie de $\sigma[M]$ est hopfien. Mais la réciproque de ce résultat est en général fausse. En effet, le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ objet de $\sigma[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}$-Mod est tel que, tout endomorphisme surjectif de $\mathbb{Q}$ est un automorphisme, alors que l'ensemble $\mathbb{Q}$, considéré comme $\mathbb{Z}$-module, n'est ni noethérien ni de type fini ni de longueur finie. Par contre si l'anneau est un corps ou plus généralement un anneau semi-simple et M un module sur cet anneau alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) M est noethérien(resp. de longueur finie) ;
(2) M est hopfien.
Ainsi l'objet de notre travail est de trouver une caractérisation des A-modules M qui sont tels que tout objet hopfien de $\sigma[M]$ est noethérien (resp. de longueur finie ; de type fini). Tels modules sont appelés S-modules (resp. S_1-modules ; FGS-modules).
Ainsi pour aborder cette étude nous avons divisé ce travail en trois chapitres.
Le **chapitre 1** est constitué de définitions, de notations et de certains résultats classiques que nous allons utiliser tout au long de ce travail.
Le **chapitre 2** est consacré à l'étude des S-modules et S_1-modules qui est une généralisation des S-anneaux et S_1-anneaux étudiés dans **[19]** en utilisant la catégorie $\sigma[M]$. Dans cette partie on a montré dans le **théorème 2.1.7 (resp. théorème**

2.1.9) que la classe des S-modules(resp. S_1-modules) est équivalente à la classe des modules de type de représentation sérielle et à la classe des modules de type de représentation finie sous certaines conditions.
Et enfin dans le **chapitre 3**, nous allons donner quelques propriétés et caractérisations de FGS-modules. On a montré dans le **théorème 3.2.1 (resp. théorème 3.2.3)** que si le module est semi-simple(resp. sériel) alors, on a l'équivalence entre la classe des FGS-modules, la classe des modules de type de représentation sérielle, la classe des modules de type de représentation homo-sérielle et la classe des modules de type de représentation finie.

Chapitre 1

GENERALITES

Ce chapitre contient des définitions et notations qu'on va utiliser tout au long de ce travail. Et dans ce dernier le mot module désignera un A-module à gauche.

1.1 Les Anneaux

Définition 1.1.1

Un anneau est un groupe abélien A noté additivement muni d'une opération de multiplication $(a, b) \mapsto ab$ et d'un élément 1 tel que pour tous a, b, c dans A, on ait :
- associativité : $a(bc) = (ab)c$;
- commutativité : $ab = ba$;
- élément neutre : $1a = a$;
- distributivité : $a(b + c) = ab + ac$.

Exemples 1.1.1

$(\mathbb{Z}, +, \times); (\mathbb{Q}, +, \times); (\mathbb{R}, +, \times); (\mathbb{C}, +, \times)$ *sont des anneaux asso-*

ciatifs commutatifs.

1.1.1 Sous-anneaux

Définition 1.1.2
Soient $(A, +, \times)$ un anneau et B une partie de A. B est dit ***sous-anneau*** *de A si :*
(i) $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;
(ii) $\forall\ a, b \in B$, $a.b \in B$;
(iii) $1_A \in B$.

Exemples 1.1.2
$(\mathbb{Z}, +, .)$ est un sous anneau de $(\mathbb{Q}, +, .)$.
Soit $(A, +, .)$ un anneau.
$Z(A) = \{a \in A : a.c = c.a\ \forall\ c \in A\}$ est un sous-anneau de A.

Définition 1.1.3
Soient A et B deux anneaux. On appelle ***morphisme*** *d'anneaux de A dans B toute application $f : A \longrightarrow B$ vérifiant les axiomes suivants :*
(1) f est un morphisme de groupe : pour tout $x, y \in A$
$f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(2) f est compatible avec la multiplication : pour tout $x, y \in A$
$f(x \times y) = f(x) \times f(y)$.
(3) f est un morphisme unitaire :
$f(1_A) = 1_B$.

1.1.2 Les idéaux

Définition 1.1.4
*Soient $(A, +, .)$ un anneau et I une partie de A. On dit que I est un **idéal** à gauche (respectivement à droite) de A si :*
- $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
- $\forall\, a \in A, \forall\, x \in I$ on a $a.x \in I$ (respectivement à droite $x.a \in I$).
- I est dit idéal bilatère s'il est à la fois idéal à gauche et à droite de A.

l

Remarque 1.1.1
Tout idéal d'un anneau commutatif est bilatère.

Définition 1.1.5
Soient A un anneau commutative, unitaire et $I,\ I_1,\ I_2$ et J des idéaux de A.
*(1) On dit que I est **principal** lorsqu'il est engendré par un seul élément $a \in A$.*
(2) On dit que A est principal lorsque tout idéal de A est principal.
*(3) Un idéal $I_1 \subset A$ est dit **premier** lorsque*

$$\forall\ x, y \in A\ xy \in I_1 \Rightarrow x \in I_1 \text{ ou } y \in I_1.$$

*(4) On dit que I est un idéal **maximal** s'il n'existe pas d'idéal J distinct de A tel que $J \supset I$;*
*(5) On appelle **radical de Jacobson** de A l'intersection de tous les idéaux maximaux. On le note $J(A)$.*

1.2 Modules

Définition 1.2.1

Soient A un anneau unitaire et M un groupe additif.

1. Une opération externe à gauche de A sur M est une application notée : $(a, m) \mapsto am$ du produit cartésien $A \times M$ dans M.

*2. On dit que M est un **module** à gauche sur A (ou A-module à gauche) lorsqu'il existe une opération externe à gauche de A sur M vérifiant pour tout $m, m' \in M$ et pour tout $a, b \in A$ les axiomes suivants :*

(a) $a(m + m') = am + am'$;

(b) $(a + b)m = am + bm$;

(c) $1_A m = m$;

(d) $(ab)m = a(bm)$.

Exemples 1.2.1

1. Un anneau A est un module sur lui-même, une algèbre sur A est aussi un module ;

2. Un groupe abélien est un module sur l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$.

Remarque 1.2.1

Un module sur un corps est un espace vectoriel.

Définition 1.2.2

Soient M et N deux A-modules à gauche. On appelle application A-linéaire ou morphisme de A-modules toute application $f : M \longrightarrow N$ compatible avec les opérations de A, autrement dit *tel que, pour tout $m, m' \in M$ et pour tout $a \in A$, on ait :*

$$f(m+m') = f(m) + f(m') \text{ et } f(am) = af(m).$$

On note $Hom_A(M, N)$ l'ensemble des applications A-linéaire de M dans N.

1.2.1 Sous-Module

<u>Définition</u> 1.2.3
*Soit M un A-module à gauche, et soit $N \subset M$. On dit que N est un **sous-module** à gauche de M lorsque N est un sous-groupe de M tel que pour tout $a \in A$ et pour tout $n \in N$ $an \in N$.*

<u>Définition</u> 1.2.4
Soient M et N deux A-modules.
*(1) On appelle **endomorphisme** de M toute application A-linéaire de M dans M. On note donc $End_A(M) = Hom_A(M, M)$ l'ensemble des endomorphismes de M.*
*(2) On appelle **isomorphisme** de M dans N tout morphisme bijectif de M dans N .*
*(3) On appelle **automorphisme** de M tout isomorphisme de M dans M. On note $Aut_A(M)$ l'ensemble des automorphismes de M.*

1.2.2 Quotient de modules

Relation d'équivalence
Soient A un anneau et M un A-module. On s'intéresse aux relations d'équivalence sur M qui sont compatibles avec la structure de module, c'est à dire pour tous $m,\ m',\ n,\ n'$ dans M et $a,\ b$ dans A,
si $m \sim m'$ et $n \sim n'$ alors $am + bm \sim am' + bn'$
Soit N l'ensemble des $m \in M$ tels que $m \sim 0$. Comme une relation d'équivalence est reflexive, $0 \in N$. Si m appartiennt à N, on a $m \sim 0$, et donc pour tout a dans A $am \sim a0 = 0$ c'est à dire $am \in N$. Si m et n sont deux éléments de M tels que $m \sim n$, on a $m + (-n) \sim n + (-n)$, d'où $m - n \in N$. Cela prouve que N est un sous-module de M.
Réciproquement, soit N un sous-module de M et soit $\sim$ une relation d'équivalence sur M définie $m \sim n$ si et seulement si $m - n \in N$. Notons M/N l'ensemble des classes d'équivalence et $\pi : M \to M/N$ l'application canonique. Les calculs qui précédent montrent le théorème suivant.

<u>**Théorème**</u> **1.2.2** ***([3], p.96, Théorème 6.4.3)***
Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-module de M. La relation $\sim$ sur M définie par $m \sim n$ si et seulement si $m - n \in N$ est une relation d'équivalence sur M compatible avec la structure de module. L'ensemble quotient M/N posséde une structure de A-module telle que $\pi : M \to M/N$ est un homomorphisme de A-module.

1.2.3 Trace d'un module

Définition 1.2.5
*Soit **U** une classe non vide de A-module. Un A-module à gauche N est dit finiment généré par **U** ou finiment **U**-généré, s'il existe un épimorphisme* $\varphi : \oplus_{i\leq k}U_i \to N$ *avec* $U_1, ..., U_k \in \boldsymbol{U}$.

Notations
*Gen(**U**)* est l'ensemble des classes de A-module généré par **U**, *gen(**U**)* l'ensemble des classes de A-module finiment généré par **U**. Pour un A-module M, le sous-module :

$$Tr(\boldsymbol{U}, M) = \sum \{ \ Imh \mid h \in Hom(U, M), \ U \in \boldsymbol{U} \ \} \subset M$$

est appelé ***Trace** de **U** dans M*. Si **U** est composé d'un seul module U on écrit simplement $Tr(\{U\}, M)$ et *Gen*($\{U\}$).

Propriétés 1.2.1 *(**[28], p.107, Properties 13.5**)*
*Soient **U** une classe de A-module et M un A-module.*
*(1) Tr(**U**, M) est le plus grand sous-module de M généré par **U**.*
*(2) M = Tr(**U**, M) si et seulement si M est **U**-généré.*
*(3) Tr(**U**, M) est un* $End_A(M)$*-sous-module de M (puisque pour*

*U ∈ **U**, Hom(U, M) est un* $End_A(M)$*-module à droite).*

*(4) Si **U** contient juste un module U, alors*

$$Tr(U, M) = \left\{ \sum_{1\leq i\leq k} u_i\varphi_i \mid u_i \in U, \ \varphi_i \in Hom(U, L), \ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.3 Module de type fini - Module semi-simple

1.3.1 Module de type fini

Définition 1.3.1
Soit A un anneau. On dit qu'un A-module M est de ***type fini*** *s'il existe une partie finie $S \subset M$ telle que $M =< S >$.*

Proposition 1.3.1 ***([3], p.113, proposition 7.1.2)***
Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-module de M.
(a) Si M est de type fini, alors M/N est de type finie ;
(b) Si N et M/N sont de types finis, alors M est de type fini.

1.3.2 Module semi-simple

Définition 1.3.2
Un A-module M est dit ***simple*** *si ses seuls sous-modules propres sont (0) et lui-même.*

Proposition 1.3.2 ***([3], p.215, proposition 12.1.3)***
Soient A un anneau et M un A-module simple. Alors, l'annulateur de M est un idéal maximal de A et $M \simeq A/Ann(M)$.

Définition 1.3.3
Un A-module M est dit ***semi-simple*** *s'il est somme directe de modules simples.*

Proposition 1.3.3 ***([1], p. 129, 10.16)***
Soit M un module semi-simple, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) M est artinien ;
(b) M est noethérien ;
(c) M est de type fini.

Définition 1.3.4
Soit S un sous-module simple d'un module M. On appelle ***composant isotypique*** *de type S du module M la somme N des sous-modules de M isomorphes à S.*

Proposition 1.3.4 ***([22], p.40, proposition III.20)***
Soit M un A-module semi-simple. Alors,
(a) M est la somme directe de ses composantes isotypiques ;
(b) Les composantes isotypiques de M sont stables par tout endomorphisme de M.

1.4 Module Projectif - Module Injectif

1.4.1 Module Projectif

Définition 1.4.1
Soit A un anneau. On dit qu'un A-module P est ***projectif*** *si*

tout diagramme de A-module :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr] & & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où f est surjectif, se plonge dans un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr] & & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Remarque 1.4.1
En particulier les modules libres sont projectifs.

Proposition 1.4.1 ***([3], p.177. Théorème 10.2.5)***
Soit P un A-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) *P est projectif;*
(2) *P est un facteur direct d'un A-module libre;*
(3) *pour tout homomorphisme surjectif $p : M \to N$ et tout homomorphisme $f : P \to N$, il existe un homomorphisme $g : P \to M$ tel que $f = pog$.*

1.4.2 Module Injectif

Définition 1.4.2

*Un A-module E est dit **injectif** si tout diagramme de A-module :*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

où f est injectif, se plonge dans un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & M \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Exemples 1.4.1

Les $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des modules injectifs.
Mais $\mathbb{Z}$ n'est pas un module injectif.

Proposition 1.4.2 ***([3], p.179, Théorème 10.2.8)***

Soit E un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *E est injectif ;*
(2) *Pour tout idéal I de A et tout homomorphisme injectif $f : I \to E$, il existe un homomorphisme $g : A \to E$ tel que $f = g/_I$;*
(3) *Pour tout homomorphisme injectif $i : M \to N$ et tout homomorphisme $f : M \to E$, il existe un homomorphisme $g : N \to E$ tel que $f = g \circ i$.*

1.5 Module Noethérien - Module Artinien

1.5.1 Module Noethérien

Proposition 1.5.1 ***([3], p.117, proposition 7.2.1)***
Soient A un anneau et M un A-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) *tout sous-module de M est de type fini ;*
(2) *toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire ;*
(3) *toute famille de sous-modules de M admet un élément maximal.*

Définition 1.5.1
*Un A-module qui vérifie les propriétés ci-dessus est dit **noethérien**.*

Proposition 1.5.2 ***([3], p.118, proposition 7.2.5)***
Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-module de M. Alors, M est un A-module noethérien si et seulement si N et M/N sont noethériens.

1.5.2 Module Artinien

Définition 1.5.2
*Soient A un anneau et M un A-module. On dit que M est **artinien** si toute suite décroissante de sous-module de M est stationnaire.*
On dit que A est artinien si c'est un A-module artinien.

Remarque 1.5.1
En particulier tout anneau artinien est noethérien.

Proposition 1.5.3 ***([3], p.218, proposition 12.2.3)***
Soit A un anneau.
(a) Soient M un A-module et N un sous-module de M. Alors M est un A-module artinien si et seulement si N et M/N sont des A-modules artiniens.
(b) Produits, puissances (finies) de modules artiniens sont artiniens.

Définition 1.5.3
On dit qu'un A-module M est de **longueur finie** *s'il existe une suite $(0) = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$ de sous-modules de M tels que M_{i+1}/M_i soit un A-module simple pour tout $0 \leq i \leq n-1$.*
L'entier $n = l(M)$ qui est indépendant de la suite (M_i) s'appelle la longueur de M.

Proposition 1.5.4 ***([19], p. 63)***
Pour qu'un A-module M soit de longueur finie il faut et il suffit qu'il soit noethérien et artinien.

Proposition 1.5.5 ***([19], p.02, proposition I.1)***
Soit A un anneau possédant un idéal bilatère nilpotent J tel que A/J soit artinien de radical nul (par exemple un anneau

artinien). Pour tout A-module M, les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) M est de longueur finie ;
(b) M est artinien ;
(c) M est noethérien.

Corollaire 1.5.2 ***([1], p.172, 15.21)***
Soient A un anneau artinien et M un A-module. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) M est de type fini ;
(b) M est noethérien ;
(c) M est artinien.

1.6 Module sériel - Module homo-sériel

1.6.1 Module sériel

Définition 1.6.1
*Un module N est dit **unisériel** si ses sous-modules sont linéairement ordonnés par inclusion.*
On dit que l'anneau A est unisériel à gauche (resp. à droite) si ${}_AA$ (resp. A_A) est unisériel

Exemples 1.6.1
1) $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module unisériel avec p premier et $k \in \mathbb{N}$.
2) L'enveloppe injective $\mathbb{Z}p^\infty$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier est unisériel.

Remarque 1.6.1
Des anneaux unisériels à gauche et à droite sont en particulier des anneaux locaux.

Proposition 1.6.1 *(**[26], p. 539, 55.1**)*
Soit N un A-module. Si N est unisériel alors, les sous-modules et les modules quotients de N sont aussi unisériels.

Définition 1.6.2
*Un module N est dit **sériel** s'il est somme directe de modules unisériels.*

Exemples 1.6.2
Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est sériel.

1.6.2 Module homo-sériel

Définition 1.6.3
*Un module N est dit **homo-unisériel** si pour tous sous-modules non nuls de types finis K, L de N, les modules quotients $K/J(K)$, $L/J(L)$ sont simples et isomorphes où $J(K)$ et $J(L)$ sont des radicaux de jacobson.*

Définition 1.6.4
*Un module N est dit **homo-sériel** s'il est somme directe de modules homo-unisériels.*

Définition 1.6.5
*Un module M est dit de **type de représentation homo-sérielle** si tout élément de $\sigma[M]$ est homo-sériel.*

Définition 1.6.6
Un A-module P est dit ***progénérateur*** *s'il est projectif, de type fini et générateur dans $\sigma[M]$.*

Proposition 1.6.2 *([27]* ***Theorem 5.3****)*
Soit M un A-module de longueur finie. Si M est de type de représentation homo-sérielle alors, il existe un progénérateur dans $\sigma[M]$.

Proposition 1.6.3 ***[28], p.532, 54.2***
Soient A un anneau et M un A-module de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *M est de type de représentation finie ;*
(2) *M est de longueur finie ;*
(3) *Il existe un progénérateur dans $\sigma[M]$.*

1.7 Quelques modules hopfiens

Lemme 1.7.1 ***[19], p.02, Lemme I.3***
Soient A un anneau, M un A-module et f un A-endomorphisme de M.
i) Si $Imf = Imf^2$, alors $M = Imf + \ker f$;
ii) Si $\ker f = \ker f^2$, alors $Imf \cap \ker f = \{0\}$.

Proposition 1.7.1 ***[19], p.02, proposition I.4***
Soient A un anneau et M un A-module.
Si M est noethérien (resp. de longueur finie), alors tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme de M.

Définition 1.7.1
Un A-module M est dit ***indécomposable*** *s'il n'existe pas de sous-modules non nuls M_1 et M_2 de M tels que $M = M_1 \oplus M_2$*

Proposition 1.7.2 ***[19], p.14, proposition I.21***
Tout module projectif indécomposable est hopfien.

Définition 1.7.2
Un sous-module H d'un A-module M est dit ***complétement invariant*** *dans M, si pour tout A-endomorphisme f de M, on a $f(H) \subseteq H$.*

Proposition 1.7.3 ***([19], p.04, proposition)***
Soit M un A-module somme directe de sous-modules H_j, $j \in J$.
(1) *Si M est hopfien, alors, pour tout $j \in J$, H_j est hopfien ;*
(2) *Si, pour tout $j \in J$, H_j est complétement invariant dans M alors M est hopfien si et seulement si chaque H_j, $j \in J$, est hopfien.*

Proposition 1.7.4 ***[19], p.06, proposition I.8***
Soit M un A-module produit direct de modules H_j, $j \in J$.
(1) *Si M est hopfien, alors, pour tout $j \in J$, H_j est hopfien ;*
(2) *Si $Hom(H_i,\ H_j) = 0$, pour tout $(i,\ j) \in J^2$ avec $i \neq j$ alors M est hopfien si et seulement si pour tout $j \in J$, H_j est hopfien.*

Proposition 1.7.5 ***[19], p.06, proposition I.8***
Soit M un A-module. Si H est un sous-module complétement invariant de M tel que H et M/H soient hopfiens alors, M est hopfien.

Définition 1.7.3

Un module M est dit de ***type dénombrable*** *s'il peut être engendré par un sous-ensemble dénombrable.*

Proposition 1.7.6 *[19], p.15, proposition I.23*

Soit M un A-module. Si M est somme directe de modules projectifs indécomposables de type dénombrable deux à deux non isomorphes à l'anneau d'endomorphisme local de M, alors M est hopfien.

1.8 Catégorie $\sigma[M]$ et Quelques Propriétés

Définition 1.8.1

Une ***catégorie*** *est un ensemble $\mathcal{C}$, dont les éléments sont appelés objets, muni*

(a) pour tout couple (X, Y) d'objet de $\mathcal{C}$, d'un ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ou simplement $Hom(X, Y)$ appelé ensemble des ***morphismes*** *de $\mathcal{C}$ de X dans Y ;*

(b) pour tout triplet (X, Y, Z) d'objet de $\mathcal{C}$, d'une application $(f, g) \mapsto gof$ de $Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z)$ dans $Hom(X, Z)$ appelée composition, ces données étant assujetties aux conditions suivantes :

(1) $(\forall X, Y, Z, T \in \mathcal{C})$ $(\forall\ f \in Hom(X, Y))$ $(\forall\ g \in Hom(Y, Z))$ $(\forall\ h \in Hom(Z, T))$ $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;

(2) $(\forall\ X \in \mathcal{C})$ $(\exists\ e \in Hom(X, X))$ $(\forall\ Y \in \mathcal{C})$ $\Big((\forall\ f \in Hom(X, Y))\ f \circ e = f$ *et* $(\forall\ g \in Hom(Y, X))\ e \circ g = g\Big)$.

L'élément e dont l'existence est affirmée dans (2) *est unique. On l'appelle identité de* X *et on le note* 1_X.
On écrit souvent $f : X \to Y$ *pour* $f \in Hom(X, Y)$.

Exemples 1.8.1
- Catégorie des ensembles notée Ens ;
- Catégorie des groupes (resp. abéliens) notée Gr (resp. Ab ou Grab) ;
- Catégorie des anneaux (resp. commutatif) notée Ann (resp. Annc) ;
- Catégorie des A-modules à gauche (resp. à droite) notée A-Mod (resp. Mod-A).

Définition 1.8.2
On appelle ***endomorphisme*** *de* X *tout morphisme de* X *dans* X *et on pose* $End(X) = Hom(X, X)$.
Soit $f : X \to Y$ *un morphisme de* X *dans* Y, *on dit que* f *est un* ***isomorphisme*** *de* X *sur* Y *s'il existe un morphisme* $g : Y \to X$ *tel que* $g \circ f = 1_X$ *et* $f \circ g = 1_Y$. *Alors* g *est unique et on l'appelle l'inverse de* f.
On dit que f *est un* ***automorphisme*** *de* X *si* f *est un isomorphisme de* X *sur* X.

Définition 1.8.3
Soient $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux catégories, on dit que* $\mathcal{C}'$ *est une* ***sous-catégorie*** *de* $\mathcal{C}$ *si*
(1) $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$;

(2) $\forall\ X, Y \in \mathcal{C}'\ Hom_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subset Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *;*
(3) *La composition dans* $\mathcal{C}'$ *est induite par la composition dans* $\mathcal{C}$ *;*
(4) *Pour tout objet* X *de* $\mathcal{C}'$*, l'identité de* X *dans* $\mathcal{C}'$ *est l'identité de* X *dans* $\mathcal{C}$

Remarque 1.8.1
On dit que $\mathcal{C}'$ *est une* ***sous-catégorie pleine*** *de* $\mathcal{C}$ *si, pour tout couple* (X,Y) *d'objets de* $\mathcal{C}'$*, on a* $Hom_{\mathcal{C}'}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Exemples 1.8.2
- G-Ens est une sous-catégorie de Ens qui n'est pas pleine ;
- $\sigma[M]$ *est une sous-catégorie pleine de A-Mod dont nous allons voir ultérieurement.*

1.8.1 Catégorie $\sigma[M]$

Définition 1.8.4
Soient A *un anneau,* N *et* M *deux* A*-modules. On dit qu'un* A*-module* N *est* ***engendré*** *par* M *(ou* M*-engendré) s'il existe une ensemble* Λ *et un épimorphisme*

$$\varphi : M^{(\Lambda)} \longrightarrow N,$$

où $M^{(\Lambda)}$ *= somme directe de* $|\Lambda|$ *copies de* M.

Définition 1.8.5
Un A*-module* K *est dit* ***sous-engendré*** *par* M *(ou* M*-sous-engendré) si* K *est isomorphe à un sous-module d'un* A*-module*

M-engendré.
*On note $\sigma[M]$ la **sous-catégorie pleine** de A-Mod dont les objets sont les sous-modules d'un A-module M-engendré (i.e les modules sous-engendrés par M).*

Remarque 1.8.2
Pour un module M, on note les propriétés suivantes :
(1) Pour $N \in \sigma[M]$, tous les modules quotients et les sous-modules de N sont dans $\sigma[M]$;
(2) La somme directe d'une famille de modules dans $\sigma[M]$ appartient à $\sigma[M]$;
(3) Pour une famille $(N_\lambda)_\Lambda$ de modules dans $\sigma[M]$ le produit direct dans $\sigma[M]$ existe et est noté $\prod_\Lambda^M N_\lambda$ avec :

$$\prod_\Lambda^M N_\lambda = Tr(U_f, \prod_\Lambda N_\lambda)$$

où $U_f = \bigoplus\{U \subset M^{(\mathbb{N})} \text{ tel que } U \text{ est de type fini}\}$.

Il faut aussi noter que la définition d'un module noethérien (resp. artinien, semi-simple, de type fini, injectif, sériel, homo-sériel) telle que définie dans A-Mod est la même dans $\sigma[M]$.
Par contre celle d'un module projective dans $\sigma[M]$ est donnée par la définition suivante :

Définition 1.8.6
*Un module dans $\sigma[M]$ est dit **projectif** dans $\sigma[M]$ s'il est N-projectif pour tout $N \in \sigma[M]$.*

Définition 1.8.7
*Soient A un anneau et M un A-module. On appelle **annulateur** de M l'ensemble défini :*

$$Ann(M) = \{a \in A \ \text{ tel que } am = 0 \ \forall m \in M\}$$

Proposition 1.8.1 ***([28] p. 120, 15.4)***
Soient A un anneau et M un A-module.
(1) *Si le A-module M est de type fini sur $S = End_A(M)$, alors $\sigma[M] = A/Ann(M)$-Mod.*
(2) *Si A est commutatif alors, pour tout module de type fini M, on a*
$\sigma[M] = A/Ann(M)$-Mod.

Proposition 1.8.2 ***([27])***
Soit M un A-module de longueur finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *Il existe un progénérateur P dans $\sigma[M]$ et $End({}_AP)$ est un anneau artinien et sériel ;*
(2) *M est de type de représentation sérielle.*

1.8.2 Sous-générateurs dans $\sigma[M]$

Proposition 1.8.3 ***([28] p. 119, 15.2)***
Pour tous A-modules M et N les conditions suivantes sont équivalentes :
(*a*) *N est un sous-générateur dans $\sigma[M]$;*
(*b*) *$\sigma[M] = \sigma[N]$;*

(c) $N \in \sigma[M]$ et $M \in \sigma[N]$;
(d) $N \in \sigma[M]$ et les sous-modules (cycliques) de $N^{(\mathbb{N})}$ fournissent un ensemble de générateurs pour $\sigma[M]$.

Proposition 1.8.4 ***([28], p.120, 15.3)***
Pour tout A-modules M les assertions suivantes sont équivalentes :
(a) A est sous-engendré par M (c-à-d $A \in \sigma[M]$) ;
(b) $\sigma[M] = A$-Mod ;
(c) $A \subset M^k$ pour queleque $k \in \mathbb{N}$;
(d) $\{U \subset M^{(\mathbb{N})},\ U \text{ cyclique}\}$ est un ensemble de générateurs dans A-Mod.

Chapitre 2

S-MODULES et S_1-MODULES SUR UN DUO-ANNEAU

INTRODUCTION

L'étude de ce chapitre porte essentiellement sur notre premier article intitulé S_1-modules. Ceci a fait l'objet de publication dans Afrika Mathematics (voir [**9**]) .
On rappelle qu'un A-module M est **hopfien** si tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme de M.
Il est bien connu que tout A-module noethérien (resp. de longueur finie) est hopfien mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
Dans [**19**] le **Pr. SANGHARE** a prouvé l'égalité entre la classe des A-modules hopfiens et la classe des A-modules noethériens (resp. de longueur finies). Ainsi en partant de cette idée nous allons essayer de faire de même en montrant l'égalité entre ces

deux classes mais cette fois ci en utilisant la catégorie $\sigma[M]$, introduite par **Robert WISBAUER** dans **[28]**, qui est la sous-catégorie pleine de A-Mod.

De ce fait, dans ce chapitre, nous allons fixer l'anneau A et étudier les A-modules M pour lesquels tout objet hopfien de $\sigma[M]$ est noethérien (resp. de longueur finie). Tels modules sont appelés S-modules (resp. S_1-modules).

2.1 Caractérisation des S-modules et S_1-modules

2.1.1 Caractérisation des S_1-groupes abéliens

Pour aborder cette partie on rappelle les définitions suivantes.

Définition 2.1.1
*Soit M un A-module. Un élément $x \in M$ est dit **divisible** si pour tout élément $a \in A$ non diviseur de zéro à droite, il existe un élément $x' \in M$ tel que $x = ax'$. M est divisible si tout élément de M est divisible.*

Remarque 2.1.1
Un groupe G est divisible si G considéré comme $\mathbb{Z}$-module est divisible.

Définition 2.1.2
*Un sous-groupe H d'un groupe G est dit **pur** si pour tout entier naturel n, $nG \cap H = nH$.*

Définition 2.1.3
*Un sous-groupe B d'un p-groupe G est appelé **sous-groupe de base** de G si et seulement si :*
(i) B est somme directe de groupes cycliques ;
(ii) B est un sous-groupe pur de G ;
(iii) G/B est divisible.

Définition 2.1.4
*Soit G un groupe abélien. On dit que G est un S_1**-groupe** si tout élément hopfien de $\sigma[G]$ est de longueur finie.*

<u>Théorème</u> 2.1.2
Soit G un groupe abélien. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *G est un S_1-groupe abélien ;*
(2) *Pour tout groupe abélien $M \in \sigma[G]$ il existe un nombre fini d'entiers premiers positifs $p_1 < p_2 < ... < p_n$ tels que M s'écrit sous la forme $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_{p_i}$ où pour tout i $(1 \leq i \leq n)$ M_{p_i} est somme directe de P_i-groupes cycliques.*

<u>Preuve</u>
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $x \in G$. Posons $< x >$ le sous-groupe de G engendré par x, alors $\sigma[< x >]$ est une sous-catégorie pleine de $\sigma[G]$ et par conséquent $< x >$ est un S_1-groupe.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $< x > \cong \mathbb{Z}_n$ alors $\sigma[< x >] = \sigma[\mathbb{Z}_n] = \mathbb{Z}_n$-Mod. Si $n = 0$ alors $\sigma[< x >] = \mathbb{Z}$-Mod ce qui est absurde car car $\mathbb{Z}$ n'est pas un S_1-anneau. En effet le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ est hopfien mais il n'est pas noethérien par suite il n'est pas de longueur finie. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ il en résulte que x est un élément de torsion ce qui montre que G est un groupe de torsion.
Soit $G = \oplus_{p \in P} G_p$ où P est un ensemble d'entiers premiers positifs et $G_p \neq \{0\}$ la composante p-primaire de G.
Pour $p \in P$, soit x_p un élément de G_p tel que $< x_p >= \mathbb{Z}_p$. Alors le groupe $H = \oplus_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ est un élément hopfien de $\sigma[G]$ donc H est de longueur finie, par suite P est fini.
Soit M un élément de $\sigma[G]$. Comme $\sigma[M]$ est une sous-catégorie pleine de $\sigma[G]$, M est alors un S_1-groupe. Donc d'après ce qui

précéde M est un groupe de torsion.
Soient $p_1 < p_2 < ... < p_n$ les éléments de P et soit pour tout entier naturel $i(1 \leq i \leq n)$ M_{p_i} la composante p_i-primaire de M alors

$$M = \oplus_{i=1}^{n} M_{p_i}$$

Pour $i \in \{1, ..., n\}$ posons B_i le sous-groupe de base de M_{p_i}. Comme le groupe quotient divisible M_{p_i}/B_i est un élément hopfien de $\sigma[M]$ donc M_{p_i}/B_i est réduit à l'élément neutre par conséquent $M_{p_i} = B_i$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $N = \oplus_{i=1}^{n} N_{p_i}$ un élément hopfien de $\sigma[G]$. Alors pour $i \in \{1, ..., n\}$ N_{p_i} qui est somme directe de p_i-groupes cycliques est nécessairement de longueur finie. Il en résulte que N est de longueur finie. Par suite G est un S_1-groupe.

2.1.2 Caractérisation des S-modules et S_1-modules

Définition 2.1.5
*On dit qu'un A-module M est un S-**module**(resp. S_1-**module**) si tout objet hopfien de $\sigma[M]$ est noethérien(resp. de longueur finie).*

Exemples 2.1.1
Tout module simple est un S-module (resp. S_1-module).

Proposition 2.1.1
Soient A un anneau et M un A-module. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) *Tout sous-module d'un S-module est un S-module ;*
(2) *L'image homomorphe d'un S-module est un S-module ;*
(3) *Soit $M = \prod_{i \in I} M_i$ un produit direct de modules M_i avec $\sigma[M_i] \cap \sigma[M_j] = 0$ $\forall$ $i \neq j$ alors, M est un S-module si et seulement si I est fini et M_i est un S-module $\forall$ $i \in I$.*

<u>Preuve</u>
(1) Soient M un S-module et N un sous-module de M. Alors $N \in \sigma[M]$ ce qui entraine que $\sigma[N]$ est une sous catégorie pleine de $\sigma[M]$. Soit K un élément hopfien de $\sigma[N]$. Alors K est aussi un élément de $\sigma[M]$. Par conséquent K est noethérien.
(2) Soit $f : M \to M'$ un épimorphisme. Comme M' est engendré par M, alors $M' \in \sigma[M]$. D'aprés (1) M' est un S-module.
(3) Soit $M = \prod_{i \in I} M_i$ un S-module.
Posons $\forall$ $j \in I$ $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \to M_j$, π_j homomorphisme surjectif. Alors d'aprés (2) M_j est un S-module $\forall$ $j \in I$.
Réciproquement Soit $N \in \sigma[\prod_{i \in I} M_i]$ un élément hopfien , puisque I est fini il existe un isomorphisme $\phi : \prod_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ d'où $N \in \sigma[\bigoplus_{i=1}^{n} M_i]$. D'aprés [24] $N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ avec $N_i \in \sigma[M_i]$ $\forall$ $i \in \{1, ..., n\}$. Comme N est hopfien donc selon la **proposition 1.7.3** chacun des N_i est hopfien. Par suite N_i est de noethérien $\forall$ $i \in \{1, ..., n\}$. Il en résulte que N est noethérien.

<u>Corollaire</u> 2.1.3
Soient A un anneau et M un A-module. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées :
(1) *Tout sous-module d'un S_1-module est un S_1-module ;*

(2) *L'image homomorphe d'un S_1-module est S_1-module ;*
(3) *Soit $M = \prod_{i\in I} M_i$ un produit direct de modules M_i avec $\sigma[M_i] \cap \sigma[M_j] = 0$ $\forall$ $i \neq j$ alors, M est un S-module (resp. S_1-module) si et seulement si I est fini et M_i est un S_1-module $\forall$ $i \in I$.*

<u>Preuve</u>
La preuve est analogue à la démonstration de la **proposition 2.1.1**.

<u>Proposition</u> 2.1.2
Soit M un A-module. Si M est un S-module (resp. S_1-module) alors il existe dans $\sigma[M]$ un nombre fini de modules simples non isomorphes deux à deux.

<u>Preuve</u>
Soit $(N_i)_{i\in I}$ un système complet de représentants de classes d'isomorphisme de modules simples dans $\sigma[M]$.
Posons $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ alors, $N \in \sigma[M]$ car $\sigma[M]$ est stable par somme directe. Comme N est hopfien alors, il est noethérien (resp. de longueur finie). Par conséquent I est fini.

<u>Définition</u> 2.1.6
Un sous-module N d'un A-module M est dit ***superflu*** *dans M si, pour tout sous-module $L \neq N$ de M, la relation $N + L = M$ implique que $L = M$.*

<u>Définition</u> 2.1.7
Soient M un A-module et P un A-module projectif. On dit que

P est une ***enveloppe projective*** *de M s'il existe un homomorphisme surjectif f de P sur M tel que $Kerf$ soit superflu dans P.*

Définition 2.1.8
On dit qu'un A-module M est ***local*** *s'il contient un seul sous-module propre maximum N. N est le radical de jacobson de M.*

Proposition 2.1.3
Soient A un anneau et M un S-module alors, les conditions suivantes sont vérifiées :
(a) Tout module projectif indécomposable dans $\sigma[M]$ est noethérien ;
(b) L'enveloppe projective de tout module simple dans $\sigma[M]$, s'il existe, est noethérienne.

Preuve
(a) Résulte de la **proposition 1.7.2**.
(b) Soit P un module simple de $\sigma[M]$ qui admet une enveloppe projective. Pour montrer que son enveloppe M-projective $\widehat{P}$ est noethérienne il suffit de montrer que $\widehat{P}$ est indécomposable. Posons $\widehat{P} = P_1 \oplus P_2$ et f un homomorphisme surjectif de $\widehat{P}$ dans P tel que $\ker f$ soit superflu dans $\widehat{P}$. Soit f_1 la restriction de f à P_1. On suppose que $f_1 \neq 0$. Comme P est simple alors f_1 est surjectif. Donc $P_2 \subset Kerf$ qui est superflu dans $\widehat{P}$ donc $P_2 = 0$ et $\widehat{P} = P_1$. Ainsi $\widehat{P}$ est indécomposable. Par analogie on montre que si f est restreint à P_2 alors $P_1 = 0$ et $\widehat{P} = P_2$. Par

conséquent $\widehat{P}$ est indécomposable. D'après **proposition 1.7.2**, il en résulte que l'enveloppe projective de tout module simple est noethérienne.

Corollaire 2.1.4

Soit A un anneau et M est S_1-module. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées :
(a) Tout module projectif indécomposable dans $\sigma[M]$ est de longueur finie ;
(b) L'enveloppe projective de tout module simple dans $\sigma[M]$, s'il existe, est de longueur finie.

Preuve

La démonstration est analogue à la **proposition 2.1.3**

Proposition 2.1.4

Soient A un anneau commutatif et M un S-module. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées :
(1) Tout module de type fini de $\sigma[M]$ est noethérien ;
(2) Tout module local dans $\sigma[M]$ est noethérien.

Preuve

(1) Résulte du fait que dans un anneau commutatif tout module de type fini est hopfien.
(2) Si M est local, on pose N le radical jacobson de M. Si $x \in M/N$, alors $M = Ax$. Donc il est noethérien.

Corollaire 2.1.5

Soient A un anneau commutatif et M un S_1-module. Alors, les

conditions suivantes sont vérifiées :
(1) Tout module de type fini de $\sigma[M]$ est de longueur finie ;
(2) Tout module local dans $\sigma[M]$ est de longueur finie.

Preuve
La démonstration est analogue à la **proposition 2.1.4**

Définition 2.1.9
*Un A-module M est **localement de longueur finie** si tout sous-module de type fini de M est de longueur finie.*

Définition 2.1.10
*On dit qu'un anneau est un π_1**-anneau** si tout homomorphisme surjectif d'un A-module de type fini M sur un sous-module H de M est un isomorphisme de M sur H.*

Remarque 2.1.6
*Il est clair que sur un π_1**-anneau** tout module de type fini est hopfien.*

Proposition 2.1.5
Soient A un π_1-anneau et M un A-module.
Si M est un S_1-module alors M est localement de longueur finie.

Preuve
Soit N un sous-module de M de type fini. Alors $N \in \sigma[M]$. D'aprés la remarque précédente N est hopfien. Par conséquent N est de longueur finie.

Définition 2.1.11
Un A-module est dit ***type de représentation finie*** *s'il est de longueur finie et s'il existe seulement un nombre fini de modules indécomposables non isomorphes deux à deux dans $\sigma[M]$.*

Théorème 2.1.7 *Soient A un duo anneau et M un A-module tel que $\sigma[M]$ admet un progénérateur. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) *M est un S-module ;*
(2) *M est de type de représentation sérielle ;*
(3) *M est de type de représentation finie.*

Preuve
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit Q un progénérateur de $\sigma[M]$. Comme Q est de type fini alors, on a $\sigma[Q] = A/I$-Mod où $I = Ann(x)$. Comme M est un S-module alors l'anneau quotient A/I est un S-anneau qui est aussi un anneau artinien à idéaux principaux. Q étant de type fini alors il est de longueur finie. Ce ceci implique que M est de longueur finie. Par suite M est de type de représentation sérielle selon la **proposition 1.6.2**.
(2) $\Rightarrow$ (3) Soit N un objet de $\sigma[M]$ alors $N = \oplus_{i\in I} N_i$ avec N_i unisériel. Ainsi en se reférant au (**[28], p.560**) N_i est homo-unisériel $\forall\ i \in I$. Alors $N = \oplus_{i\in I} N_i$ est homo-sériel. Ce qui implique que M est de type de représentation homo-sérielle. D'aprés **([28] p.568)** le progénérateur est de longueur finie. Par conséquent $\sigma[M] = \sigma[Q]$ et M est de type de représentation finie

selon le ([**10**] **Theorem 4.3**).
(3) $\Rightarrow$ (1) Résulte de [**22**]**, p.38, Théorème III-17**.

Remarque 2.1.8
Tout module simple est unisériel, cyclique et de longueur finie.

Théorème 2.1.9
Soient A un duo-anneau et M un A-module semi-simple. On suppose que $\sigma[M]$ admet seulement un nombre fini de modules unisériels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *M est un S_1-module ;*
(2) *M est de type de représentation sérielle ;*
(3) *M est de type de représentation finie.*

Preuve
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit N un objet de $\sigma[M]$. Puisque M est semi-simple alors N est aussi semi-simple. D'aprés la **proposition 1.3.4**, N est somme directe de ses composants isotypiques c'est à dire $N = \bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{j\in J_i} N_j^i)$ avec $\bigoplus_{i\in J_i} N_j^i$ la composante isotypique de type N^i. Par conséquent N sériel.
(2) $\Rightarrow$ (3) M semi-simple donc somme directe de modules simples. D'aprés la remarque précédente M est somme directe de modules unisériels. Or $\sigma[M]$ n'en admet qu'un nombre fini. Par suite M est de longueur finie. En se reférant à la **proposition 1.6.2** $\sigma[M]$ admet un progénérateur. A étant un duo-anneau donc d'aprés ([**10**] **Theorem 4.3**) M est de type de représentation finie.
(3) $\Rightarrow$ (1) Soit N un objet hopfien de $\sigma[M]$. Comme M est semi-simple alors N est semi-simple. Posons $N = \oplus_{i\in I} N_i$ où les N_i

sont simples. Ceci implique que pour tout $i \in I$ N_i est unisériel et de longueur finie. Par conséquent N est de longueur finie.

Un module M est dit de **type sériel** si tout objet de $\sigma[M]$ est somme directe de modules unisériels de longueur finie.

Corollaire 2.1.10
Soient A un anneau et M un A-module semi-simple. On suppose que $\sigma[M]$ n'admet qu'un nombre fini de modules unisériels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *M est un S_1-module ;*
(2) *M est de type sériel.*

Preuve
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $N \in \sigma[M]$. Puisque M est semi-simple alors N est aussi semi-simple donc somme directe de ses composants isotypiques c'est à dire $N = \bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{j\in J_i} N_j^i)$ avec $\bigoplus_{i\in J_i} N_j^i$ la composante isotypique de type N^i. M S_1-module donc $\sigma[M]$ admet un nombre fini de modules simples. Donc I est fini. Par conséquent M est de type sériel.
(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $K \in \sigma[M]$ un élément hopfien. Comme M est de type sériel donc d'après la définition $K = \bigoplus_{i=1}^n K_i$ avec K_i unisériel et de longueur fini $\forall i$. Par suite K est de longueur finie.

Théorème 2.1.11
Soient A un duo anneau et $M = \oplus_{i=1}^n M_i$ un module sériel de

longueur finie avec
$\sigma[M_i] \cap \sigma[M_j] = 0\ \forall i \neq j$*.On suppose que* $\sigma[M]$ *admet un progénérateur. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) M *est un* S_1*-module ;*
(2) M *est de type de représentation sérielle ;*
(3) M *est de type de représentation finie.*

Preuve
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit N un objet de $\sigma[M]$. Comme M est sériel alors, $N \in \sigma[\oplus_{i \in I} M_i]$ où M_i est unisériel pour tout $i \in I$. D'après **[24]**, $N = \oplus_{i \in I} N_i$ avec $N_i \in \sigma[M_i]$ pour tout $i \in I$. Donc N_i est M_i-sous-engendré pour tout $i \in I$ d'où il existe un épimorphisme $\phi_i : M_i^{(\Lambda)} \rightarrow K_i$ avec N_i sous-module de K_i pour tout $i \in I$. D'après le premier théorème de l'isomorphisme $M_i^{(\Lambda)}/Ker\phi_i \simeq K_i$. Comme $M_i^{(\Lambda)}$ est unisériel alors $M_i^{(\Lambda)}/Ker\phi_i$ est aussi unisériel. Donc K_i est unisériel. Or tout sous-module d'un module unisériel est unisériel et par suite N_i unisériel pour tout $i \in I$. Par conséquent N est sériel.
(2) $\Rightarrow$ (3) D'aprés **[27]** $\sigma[M]$ admet un progénérateur Q. Puisque Q est de type fini, il est de longueur finie. Par suite d'après (**[10] Theorem 4.3**) $\sigma[Q] = \sigma[M]$ et M est de type de représentation finie.
(3) $\Rightarrow$ (1) Résulte de **[22], p.38, Théorème III-17**.

Chapitre 3

FGS-MODULES

INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré uniquement à l'étude des FGS-modules qui a fait l'objet de publication dans "Journal of Mathematics Research" (voir [**2**]).

Soient A un anneau et M un A-module. On rappelle qu'un A-module M est hopfien si tout A-endomorphisme surjectif de M est un automorphisme.

En 1969 **W. V. Vasconcelos** a démontré que pour un anneau commutatif A la classe des A-modules de type fini est inclue ou égale à la classe des A-modules hopfiens. En général cette inclusion est stricte. En effet dans [**12**] **Kaidi A. M. et Sangharé M.** ont donné l'exemple d'un module hopfien sur un anneau commutatif et qui n'est pas de type fini. Ainsi c'est partant de cette lancée que dans [**21**] **M. Barry, M. Sangharé and S. D. Touré** ont démontré que la classe des duo-anneaux A pour lesquels tout A-module hopfien est de type fini(les FGS-

duo-anneaux) est identique à la classe des anneaux artiniens à idéaux principaux. De ce fait en utilisant $\sigma[M]$ la sous-catégorie pleine de la catégorie A-Mod introduite par **Wisbauer R.**, nous avons introduit pour la première fois dans [**2**] la notion de FGS-module pour généraliser celle des FGS-anneaux. Nous allons donner la caractérisation compléte de ces FGS-modules en montrant que leur classe est identique à celle des A-modules de type de représentation finie ou de type de représentation sérielle.

3.1 Définitions et Propriétés

Définition 3.1.1
*On dit qu'un anneau A est un FGS**-anneau** si tout A-module hopfien est de type fini.*

Définition 3.1.2
*Un A-module M est dit FGS**-module** si tout objet hopfien de $\sigma[M]$ est de type fini.*

Définition 3.1.3
*Soit A un anneau commutatif, un élément $a \in A$ est dit **régulier** s'il existe un élément $b \in A$ tel $aba = a$.*

Définition 3.1.4
*Soient A un anneau commutatif et I un idéal. On dit que A est I**-reflectif** s'il satisfait à la condition suivante :*
$a \in A$ est régulier si et seulement si $\bar{a}$ est régulier dans A/I.

Lemme 3.1.1 *([23] p.284, Proposition 2.1)*
Soient A un anneau et I un idéal bilatère. Si $Q_{cl}(A)$ existe et A est I-reflectif alors $Q_{cl}(A/I)$ existe.
Ici on note $Q_{cl}(A)$ pour dire l'anneau quotient de A.

Proposition 3.1.1
Soient A un anneau commutatif intègre et $Ann(M)$ l'annulateur de M alors A est $Ann(M)$-reflectif.

Preuve
Supposons a un élément régulier de A, ceci implique qu'il existe $b \in A$ tel que $aba = a$. On a alors, $\overline{aba} = \bar{a}$ d'où $\bar{a}\bar{b}\bar{a} = \bar{a}$ donc $\bar{a}$ il est régulier dans $A/Ann(M)$.
Reciproquement supposons que $\bar{a}$ soit régulier dans $A/Ann(M)$ alors, $\bar{a}\bar{b}\bar{a} = \bar{a}$. Ce qui implique que $aba - a \in Ann(M)$. Comme A est intègre alors, $aba - a = 0$ d'où $aba = a$. Par conséquent a est régulier dans A.

Proposition 3.1.2 *Soient A un anneau commutatif et M un FGS-module de type fini, alors M est un corps.*

Preuve
D'après la **proposition 1.6.1**, $\sigma[M] = A/Ann(M)$-Mod et on a $M \simeq A/Ann(M)$. Comme M est un FGS-module alors $A/Ann(M)$ est aussi un FGS-anneau qui est intégre.
Posons $A' = A/Ann(M)$ et soit K le corps des fractions de A' alors $K = S^{-1}A'$ existe car A est $Ann(M)$-réflectif. Considérons le A'-module K qui est un groupe abélien et l'application

$$\begin{aligned} A' \times K &\to K \\ (a', k) &\mapsto a'k \end{aligned}$$

Montrons que le A'-module K est hopfien. Soit $f \in End_{A'}(K)$ tel que $f(s^{-1}a') = 0$.
On a $f(s^{-1}a') = s^{-1}sf(s^{-1}a') = s^{-1}f(ss^{-1}a') = s^{-1}f(a') = s^{-1}a'f(1) = 0 \Rightarrow s^{-1}a' = 0$ car $f(1) \neq 0$ d'où f est injective. Par conséquent K est de type fini et $K = A' = A/Ann(M) \simeq M$.

Proposition 3.1.3

Soient A un anneau commutatif et M un FGS-module de type fini. Tout module premier de $\sigma[M]$ est un module maximal.

Preuve

Soit P un module premier de $\sigma[M]$ contenant $Ann(M)$. Comme $\sigma[M] = A/Ann(M)$-Mod alors $P/Ann(M)$ est un idéal premier du FGS-anneau $A/Ann(M)$. On sait que l'image homomorphe d'un FGS-anneau est un FGS-anneau donc $(A/Ann(M))/(P/ann(M))$ est un FGS-anneau intégre. D'après ce qui précéde $(A/Ann(M))/(P/ann(M))$ est un corps d'où P est maximal.

Proposition 3.1.4

Soient A un anneau commutatif et M un FGS-module de type fini. Alors il existe un nombre fini de module maximal dans $\sigma[M]$.

Preuve

Soit L l'ensemble des modules premiers de $\sigma[M]$.
Posons $A/Ann(M) = A'$. On a pour tout $P \in L$, A'/P est simple. Soit $P_1, P_2 \in L$ avec $P_1 \neq P_2$ alors on a $Hom(A'/P_1, A'/P_2) = 0$. Soit $Q = \bigoplus_{P \in L} A'/P$. Comme pour tout $P \in L$, A'/P est hopfien. Alors Q est hopfien. Par conséquent Q est de type fini et L est fini.

Proposition 3.1.5

Soient A un anneau commutatif et M un FGS-module de type fini et $J(M)$ son radical de jacobson. Alors, $M/J(M)$ est semi-simple.

Preuve

On a $\sigma[M] = A/Ann(M)$-Mod et on a $M \simeq A/Ann(M)$.
Posons $A' = A/Ann(M)$, A est un FGS-anneau. D'après ce qui précéde il existe un nombre fini de module maximal tel que :

$$J(M) = P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$$

D'où l'isomorphisme $\bigoplus_{i=1}^{n} A'/P_i \simeq A'/J(M) \simeq M$

Définition 3.1.5

Un anneau A est dit ***semi-local*** *si A/J est semi-simple.*

Proposition 3.1.6

Soient A un anneau commutatif et M un FGS-module de type fini. Alors M est semi-local.

Preuve

Elle résulte de la **définition 3.1.5** et de la **proposition 3.1.5**.

Proposition 3.1.7

Soient A un anneau commutatif et M un FGS-module local, alors M est noethérien.

Pour démontrer cette proposition nous allons utiliser les lemmes suivants :

Lemme 3.1.2 ***([28] p.221, 27.1)***

Pour un A-module M les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *M est noethérien ;*
(2) *Tout sous-module de M est de type fini.*

<u>Lemme</u> 3.1.3 *[15]*
Soit A un anneau commutatif. Si A est un FGS-anneau local alors, son radical jacobson est un idéal principal.

<u>Preuve</u> de la **proposition 3.1.7**
Soit $J(M)$ le radical jacobson de M. D'après le **lemme 3.1.3** $J(M)$ est nilpotent implique $J(M)$ est hopfien. Comme M est un FGS-module, alors $J(M)$ est de type fini. Soit N un sous-module de M, Alors $N \subset J(M)$ car M est local. Ce qui montre que N est nilpotent. Par conséquent N est hopfien donc il est de type fini. Alors tout sous-module de M est de type fini et il résulte du **lemme 3.1.2** que M est noethérien.

<u>Proposition</u> 3.1.8
Soient A un anneau commutatif et M un FGS-module local. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées :
(1) *M est noethérien ;*
(2) *M est de longueur finie ;*
(3) *M est artinien.*

<u>Preuve</u>
(1) Résulte de la **proposition 3.1.7**.
(2) Comme M est noethérien alors il est hopfien. Donc il est de type fini. On sait que $\sigma[M] = A/Ann(M)$-Mod donc $A/Ann(M)$ est un FGS-anneau qui est aussi un anneau artinien à idéaux principaux en se reférant au [15]. On en déduit que M est de longueur finie d'après le **corollaire 1.5.2**.
(3) C'est la même démonstration que (2).

Proposition 3.1.9
Soient A un anneau commutatif et M un FGS-module local. Si N est un objet de $\sigma[M]$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *N est de type fini ;*
(2) *N est noethérien ;*
(3) *N est artinien.*

Preuve
D'après la **proposition 3.1.7** M est noethérien. Alors il est hopfien. Comme M est un FGS-module alors il est de type fini on a donc $\sigma[M] = A/Ann(M)$-Mod et il résulte de la **proposition 3.1.7** que $A/Ann(M)$ est un anneau artinien à idéaux principaux. Comme tout élément de $\sigma[M]$ est un $A/Ann(M)$-module, alors d'après le **corollaire 1.5.2** les conditions sont équivalentes.

Proposition 3.1.10 ***[3], p.224, Théorème 12.3.11***
Soient A un anneau commutatif noethérien et M un A-module de type fini. Il existe alors une suite finie

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$$

de sous-modules de M et pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ un idéal premier $\wp_i \subset A$ tel que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\wp_i$.

Corollaire 3.1.4
Soient A un FGS-anneau commutatif et M un A-module de type fini. Alors, M est de longueur finie.

Preuve
Comme A est un FGS-anneau d'après **[15] theorem 3.3** A est un anneau artinien à ideaux principaux. D'où A est noethérien. D'après la proposition précédente Il existe alors une suite finie

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$$

de sous-modules de M et pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ un idéal premier $\wp_i \subset A$ tel que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\wp_i$. Ainsi Comme A est un FGS-anneau alors tout idéal premier de A est maximal. Donc $M_i/M_{i-1} \simeq A/\wp_i$ est simple pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. D'où M est longueur finie.

Remarque 3.1.5
Les démonstrations des résultats suivants se font de la même façon que celles des résultats correspondants sur les S-modules (resp. S_1-modules).

Proposition 3.1.11
Soient A un anneau et M un A-module. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées :
(1) *Tout sous-module d'un FGS-module est un FGS-module ;*
(2) *L'image homomorphe d'un FGS-module est un FGS-module ;*
(3) *Soit $M = \prod_{i\in I} M_i$ un produit direct de modules M_i avec $\sigma[M_i] \cap \sigma[M_j] = 0$ pour tout $i \neq j$, alors M est un FGS-module si et seulement si I est fini et M_i est un FGS-module pour tout $i \in I$;*
(4) *Si M est un FGS-module, alors il existe seulement dans*

$\sigma[M]$ un nombre fini de modules simples non isomorphes deux à deux.
(5) *Si M est un FGS-module, alors tout module projectif indécomposable dans $\sigma[M]$ est de type fini ;*
(6) *Si M est un FGS-module, alors l'enveloppe projective de tout module simple dans $\sigma[M]$, s'il existe, est de type fini.*

3.2 Caractérisations des FGS-modules

Dans **[28], Wisbauer** a montré que tout module unisériel est homo-unisériel. Par contre la réciproque de cette affirmation est vraie si le module est de type fini.
Ainsi en supposant que M est un FGS-module, nous allons montrer par la proposition suivante l'équivalence entre la classe des modules homo-unisériels et celle des modules sériels. De plus nous allons en déduire l'équivalence entre M de type de représentation sérielle et M de type de représenttation homo-sérielle.

Proposition 3.2.1
Soient A un duo anneau et M un FGS-module tel que $\sigma[M]$ admet un progénérateur. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *M est de type de représentation sérielle ;*
(2) *M est de type de représentation homo-sérielle.*

Preuve
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit N un object de $\sigma[M]$. Comme M est de type

de représentation sérielle alors $N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ est sériel avec N_i unisériel pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Ceci implique que N_i est homo-unisériel pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Donc $N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ est homo-sériel. Par conséquent M est de type de représentation homo-sérielle.
(2) $\Rightarrow$ (1) Soit N un object de $\sigma[M]$ et Q un progénérateur de $\sigma[M]$. Soit $x \in Q$. On a $\sigma[Ax] = A/I$-Mod où $I = Ann(x)$. Comme Ax est un FGS-module alors le module quotient A/I est un FGS-anneau. Ainsi en se reférant au **théorème 3.4 de [21]** A/I est un anneau artinien à idéaux principaux. Comme $\sigma[Q] = \sigma[M]$, alors d'aprés le **corollaire 3.5 de [21]**, tout module de A/I-Mod c'est à dire de $\sigma[M]$ est somme directe de modules cycliques. On sait que N est homo-sériel alors, il peut s'écrire sous la forme $N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ avec N_i homo-unisériel. D'après ce qui précéde N_i est cyclique $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Ce qui implique N_i est unisériel $\forall\ 1 \leq i \leq n$. D'où N est sériel. Par conséquent M est de type de représentation sériel.

On sait que si A est un FGS-anneau alors tout A-module est un FGS-module. Mais la réciproque de cette affirmation n'est pas toujours vraie. Donc dans ce qui suit nous allons montrer la réciproque en ajoutant certaines conditions dans l'hypothèse.

Proposition 3.2.2

Soient A un anneau et M un module. On suppose que A est sous-engengré par M. Alors, les conditions suivantes sont équi-

valentes :
(1) *A est un FGS-anneau ;*
(2) *M est FGS-module.*

<u>Preuve</u>
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit N un objet hopfien de $\sigma[M]$. Comme A est FGS-anneau alors N est de type fini. Par conséquent M est un FGS-module.
(2) $\Rightarrow$ (1) D'après **la proposition 1.8.4.**

<u>Théorème</u> 3.2.1
Soient A un duo-anneau et M un A-module semi-simple. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *M est FGS-module ;*
(2) *M est de type de représentation sérielle et de longueur finie ;*
(3) *M est de type de représentation homo-sérielle et de longueur finie ;*
(4) *M est de type de représentation finie.*

<u>Preuve</u>
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit N objet de $\sigma[M]$. Puisque M est semi-simple, alors N est aussi semisimple. De ce fait N peut s'écrire sous la forme $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ avec N_i simple $\forall\ i \in I$. D'après la **remarque 2.1.8**, N_i est unisériel $\forall\ i \in I$. Donc $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$ est sériel. D'où M est de type de représentation sérielle.
Maintenant montrons que M est de longueur finie. Posons $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ avec M_i simple $\forall\ i \in I$. Comme pour tout $i \in I$ M_i est

complétement invariant et hopfien donc d'après la **proposition 1.7.3** M est hopfien. Il s'en suit que M est de type fini. En se fondant sur le **corollaire 10.16 de [1]** M est de longueur finie.
(2) $\Rightarrow$ (3) Résulte de la **proposition 3.2.1**.
(3) $\Rightarrow$ (4) Comme M est de longueur finie et de type de représentation homo-sérielle d'après la **proposition 1.6.2**, il existe un progénérateur P dans $\sigma[M]$ qui est de longueur finie. Il en résulte selon (**[10], Theorem 4.3**) que $\sigma[M] = \sigma[P]$ et M est de type de représentation finie.
(4) $\Rightarrow$ (1) Soit N un module hopfien de $\sigma[M]$. Comme M est de type de représentation finie, alors d'après le **théorème 2.2.10** M est un S_1-module. D'où N est de longueur finie. Or N est semisimple ce qui implique que N est de type fini selon le **corollaire 10.16 de [1]**.

Un module M est dit **localement noethérien** si tout sous-module de type fini de M est noethérien.

Proposition 3.2.3
Soient A un anneau et M un module semi-simple. Si M est un FGS-module, alors les conditions suivantes sont vérifiées :
(1) *Tout élément de $\sigma[M]$ est de longueur finie ;*
(2) *M est localement de longueur finie ;*
(3) *M est de type sériel ;*
(4) *M est localement noethérien.*

Preuve

(1) Soit N un objet de $\sigma[M]$ tel que $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ avec N_i simple. On a pour tout $i \in I$ N_i est hopfien. Ceci implique aussi que N est hopfien selon la **proposition 1.7.3**. Comme M est un FGS-module, alors N est de type fini. D'après le **corollaire 10.16 de [1]**, N est de longueur finie. Par conséquent M est locallement de longueur fini.
(2) Soit N un élément de $\sigma[M]$ de type fini. En se reférant au **corollaire 10.16 de [1]**, N est de longueur finie. D'où M est locallement de longueur finie.
(3) Soit $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ avec N_i simple. Ce qui implique N_i est unisériel et de longueur finie pour tout $i \in I$. Ce qui montre directement M est de type sériel.
(4) Résulte de (2).

Proposition 3.2.4

Soient A un anneau et M un module semi-simple. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *Il existe seulement un nombre fini de modules simples dans $\sigma[M]$;*
(2) *M est un FGS-Module.*

Preuve

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit N un object de $\sigma[M]$. Comme M est semi-simple alors, N est semi-simple aussi. Donc $N = \oplus_{i \in I} N_i$ où N_i est simple et I fini. Puisque, pour tout $i \in I$, N_i(cyclique) est complétement invariant alors, d'aprés la **proposition 1.7.3**

$N = \oplus_{i\in I} N_i$(de type fini) est hopfien. Par conséquent M est un FGS-module.
(2) $\Rightarrow$ (1) Résulte de la **proposition 3.1.10**.

Corollaire 3.2.2
Soient A un anneau et M un module semi-simple. S'il existe seulement un nombre fini de modules simples dans $\sigma[M]$ alors, les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) *M est un FGS-module ;*
(2) *Tout élément de $\sigma[M]$ est localement de longueur finie ;*
(3) *M est localement de longueur finie ;*
(4) *M est de type sériel ;*
(5) *M est localement noethérien.*

Preuve
(1) $\Rightarrow$ (2) Résulte de la **proposition 3.2.3** .
(2) $\Rightarrow$ (3) Soit N un objet de $\sigma[M]$ de type fini. Il est donc de longueur finie. D'où M est localement de longueur finie.
(3) $\Rightarrow$ (4) Soit N un objet de $\sigma[M]$ alors $N = \oplus_{i\in I} N_i$ avec N_i simple pour tout $i \in I$. Alors, pour tout $i \in I$, N_i est unisériel et de longueur finie. D'où M est de type sériel.
(4) $\Rightarrow$ (5) Soit N un objet de $\sigma[M]$ de type fini. Comme M est semi-simple alors tout élément de $\sigma[M]$ est semi-simple. Ainsi d'après le **corollaire 10.16 de [1]** N est noethérien.
(5) $\Rightarrow$ (1) Résulte de la **proposition 3.2.4** .

Théorème 3.2.3
Soient A un duo anneau et $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ un module sériel. On

suppose que $\sigma[M]$ *admet un progénérateur et* $\sigma[M_i] \cap \sigma[M_j] = 0$ $\forall\ i \neq j$. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) M *est un* FGS*-module ;*
(2) M *est de type de représentation sérielle ;*
(3) M *est de type de représentation homo-sérielle ;*
(4) M *est de type de représentation finie.*

Preuve
(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $N \in \sigma[M]$ alors, $N \in \sigma[\oplus_{i\in I} M_i]$. Il en résulte de **[24]** que $N = \oplus_{i\in I} N_i$ avec $N_i \in \sigma[M_i]\ \forall\ i \in I$. Donc il existe un épimorphisme $\phi_i : M_i^{(\Lambda)} \to K_i$ avec N_i sous-module de $K_i\ \forall\ i \in I$. D'après le premier théorème de l'isomorphisme $M_i^{(\Lambda)}/Ker\phi_i \simeq K_i$. Comme $M_i^{(\Lambda)}$ est unisériel alors $M_i^{(\Lambda)}/Ker\phi_i$ est aussi unisériel or $M_i^{(\Lambda)}/Ker\phi_i \simeq K_i$ implique que K_i est unisériel. Or tout sous-module d'un module unisériel est unisériel par suite N_i unisériel $\forall\ i \in I$. Donc N est sériel. Par conséquent M est de type de représentation sérielle.
(2) $\Rightarrow$ (3) Selon la **proposition 3.2.1**.
(3) $\Rightarrow$ (4) D'après **[28]** le progénérateur de $\sigma[M]$ est de longueur finie. Ainsi en se reférant au **[10] theorem 4.3** $\sigma[M] = \sigma[Q]$ et M est de type de représentation finie.
(4) $\Rightarrow$ (1) Soit N un élément hopfien de $\sigma[M]$. Comme M est de type de représentation finie, il résulte du **théorème 2.2.10** que M est un S_1-module qui est aussi un S-module. Ce qui implique que N est noethérien. Soit $x \in Q$ un progénérateur de $\sigma[M]$ tel que $Q = Ax$. On a $\sigma[Ax] = A/Ann(x)$-Mod. Puisque Ax est un

S-module, alors $A/Ann(x)$ est un S-anneau. Donc $A/Ann(x)$ est un anneau artinien à idéaux principaux. Il résulte du **corollaire 1.5.2** que N est de type fini.

3.3 Bibliographie

[**1**] Anderson, F.W. and Fuller, K.R : *Rings and Category of modules*. Spinger-verlag (1992).

[**2**] Alhousseynou BA, Oumar DIANKHA :*FGS-Modules*, Journal of Mathematics Research ; Vol. 5, No. 1 ; 2013 ISSN 1916-9795 E-ISSN 1916-9809.

[**3**] A. Chambert-Loir :*Algèbre commutative*, Centre de Mathématique, Ecole polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, Paris 6,2001.

[**4**] Barry M, Diankha O. and Sangharé M. *Characterization of commutative FGI-ring* MATH. SCI. RES. J., 9(4) (2005), 87-91.

[**5**] Barry M, Guéye C.T and M. Sangharé : *On commutative FGI-Rings*, Extracta Mathematicae vol. 12, Num. 3, 255-259, (1997).

[**6**] Bourbaki, N : *Algèbre homologique*, Chapitre 10, Masson, Paris, 1980.

[**7**] Bourbaki, N : *Algèbre* , Chapitre 4 *à* 7, Paris, 1981.

[8] Cohen, I.S. and Kaplanski, I : *Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules*. Math Z, 54(1951)97-101.

[9] Diankha O., Diompy M. A. et Ba, A. : S_1-*modules*. A paraitre dans les Annales Mathématiques Africaines (2013).

[10] Diankha O., Sanghare M. and Sokhna M. *Sur les* I_1-*modules*, Annales de l'université de Ouagadougou series B 2 25-30, (1999).

[11] Fall A.L. and Sanghare M. *On* I-*duo-ring*. Pub. Math. UFR. Sci. Tech. Besancon (2002).

[12] Godement, R. : *Cours d'Algèbre*, Herman, Paris 1966.

[13] Goblot, R. :*Algèbre commutative*, Masson, Paris, 1996.

[14] Gras, G. et Gras, M. N. :*Algèbre Fondamentale Arithmétique*, Ellipses, paris, 2004.

[15] Gueye C. T., Sangharé M. :*On commutative* FGS-*rings* Communications in Algebra volume 32, Issue 5, 2004, p.1715-1727.

[16] Orzech, M. :*On to endomorphism are isomorphismes*

Amer. Maths. Montly 78(1971), 357-362.

[**17**] Renault, G. : *Algèbre non commutative*. Gauthier Villars(1975).

[**18**] Sangharé, M : *Subrings of I-rings and S-ring* Internat J. Math and Math Sci vol. 20N 4(1997) 825-827.

[**19**] Sangharé, M : *Thèse de troisième cycle*, Université de Mohamed 5 Rabat(Maroc)1981.

[**20**] Sangharé, M : *Sur quelques classes d'anneaux liées au lemme de Fitting* Thèse d'Etat, Faculté des Sciences et Techniques, UCAD 1993.

[**21**] Sangharé M. Barry M. Touré S. D. :*FGS-Duo Rings* Global Journal of Pure and Applied Mathematics ISSN 0973-1768 vol. 3, Number 2(2007), pp. 125-137.

[**22**] Sokhna, M. : *Caractérisations des S-modules. Thèse de troisième cycle*. Faculté des sciences et techniques. Université Cheikh Anta Diop (1999).

[**23**] Stenströ Bo :*Rings of Quotients* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1975.

[24] Vanaja N. *All finitely generated M-subgenerated modules are extending*. Comm. Algebra 24(2), 543-572 (1996)

[25] Vasconcelos W.V. : *On finitely generated flat modules* Trans. Amer. Math. Soc.138(1969).505-512

[26] Vasconcelos W.V. : *Injective of finitely generated modules* Proc.Amer. Maths. Soc. 25(1970) 900-901

[27] Wisbauer R. *Decomposition properties in module categories.* Acta. Univ. Carolinae Math. Physica l26(26), 57-68 (1985).

[28] Wisbauer R. *Foundation of Module and Ring theory.*Gordon and Breach Science Publishers (1991)

RESUME

Soit A un anneau non nécessairement commutatif possédant un élément unité $1 \neq 0$ et M un A-module à gauche.
On dit qu'un A-module N est engendré par M s'il existe un ensemble Λ et un épimorphisme $\phi : M^{(\Lambda)} \to N$.
Un A-module K est dit sous-engendré par M s'il est un sous-module d'un A-module M-engendré.
On note la catégorie $\sigma[M]$, introduite par **R. Wisbauer** dans, la sous-catégorie pleine de A-Mod dont les objets sont les sous-modules d'un A-module M-engendré.
On dit qu'un A-module M est hopfien si tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme.
Pour un A-module à gauche M il est bien connu que tout objet noethérien, de type fini(si A est commutatif) ou de longueur finie de $\sigma[M]$ est hopfien. Mais la réciproque de ce résultat est en général fausse. En effet, le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ est tel que, tout endomorphisme de $\mathbb{Q}$ est un automorphisme, alors que l'ensemble $\mathbb{Q}$, considéré comme $\mathbb{Z}$-module, n'est ni noethérien ni de type fini ni de longueur finie. L'objet de notre travail est de trouver une caractérisation des A-modules M qui sont tels que tout objet hopfien de $\sigma[M]$ est noethérien (resp. de longueur finie, de type fini). Tels modules sont appelés S-modules (resp. S_1-modules, FGS-modules). De ce fait on a pu caractériser ces différents modules et on a obtenu des résultats spectaculaires dont les principaux sont les suivants :
- la classe d'un S-module(resp. S_1-module) est équivalente à la classe des modules de type de représentation'finie, de type de représenation sérielle sous certaines conditions ;
- la classe d'un FGS-module est équivalente à la classe des modules de type de représentation'finie, de type de représentation sérielle, de type de représentation homo-sérielle sous certaines conditions.