

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

**ECOLE DOCTORALE PHYSIQUE, CHIMIE, SCIENCES DE LA
TERRE, DE L'UNIVERS ET DE L'INGENIEUR**

THESE DE DOCTORAT EN PHYSIQUE

SPECIALITE : MECANIQUE DES FLUIDES ET APPLICATIONS

Présentée par: Mamadou Alouma DIALLO

**METHODES NUMERIQUES EN CONTROLE ET PROBLEMES
INVERSES APPLIQUEES AUX TRANSFERTS DE CHALEUR
COMBINES RAYONNEMENT-CONDUCTION**

Soutenue publiquement le Jeudi 10 Septembre 2020 devant le jury composé de :

<i>Pr. Joseph SARR</i>	<i>Professeur Départ. Physique/UCAD</i>	<i>Président du Jury</i>
<i>Dr. Cheikh MBOW</i>	<i>Maitre de Conférences Départ. Physique/UCAD</i>	<i>Rapporteur interne</i>
<i>Pr. Abdoulaye SENE</i>	<i>Professeur Départ. Mathématiques/UCAD</i>	<i>Rapporteur externe</i>
<i>Pr. Benjamin MAMPASSI</i>	<i>Professeur Départ. Mathématiques/UCAD</i>	<i>Examineur</i>
<i>Pr. Aboubaker Chedikh BEYE</i>	<i>Professeur Départ. Physique/UCAD</i>	<i>Directeur de thèse</i>

TABLE DES MATIERES

LISTE DES TABLEAUX.....	5
LISTE DES FIGURES	6
REMERCIEMENTS :	8
RÉSUMÉ :	9
INTRODUCTION GENERALE.....	10
Position du problème :.....	10
Problématique.....	11
Objectifs de thèse	13
Contenu de la thèse	14
Publications :	15
CHAPITRE I. REVUE DE LA LITTERATURE	16
1.1 Solutions aux équations de transferts radiatifs :.....	16
1.2 Solutions aux problèmes inverses en transferts de chaleur :	24
CHAPITRE II. REVUE DES PRINCIPALES METHODES D'ANALYSE INVERSE EN TRANSFERTS DE CHALEUR	32
2.1. Types de problèmes inverses en transferts de chaleur	34
2.1.1. Problème direct et problème inverse	34
2.1.2. Classes de problèmes inverses	36
2.2. Rappel des types de transferts de chaleur.....	38
2.3. Les outils et méthodes d'analyse	49
2.3.1. Méthodes générales de résolution et notion de mal conditionnement	49
2.3.2. Méthodes de régularisation	54
2.3.2.1. La régularisation de Levenberg Marquardt.....	54
2.3.2.2. La régularisation de Tikhonov	56

2.3.2.3. La décomposition en valeur singulière avec troncature	58
2.3.3. Méthodes d'optimisation.....	59
2.3.3.1. Les méthodes de type gradient	60
2.3.3.2. L'algorithme du gradient à pas optimal (Steepest descent).....	61
2.3.3.3. Les méthodes de newton et quasi newton	63
2.3.3.4. La régularisation par gradient conjugué	64
2.3.3.5. La méthode du gradient conjugué avec problème adjoint	67
2.3.3.6. Choix d'une méthode d'optimisation	68
2.3.4. approches heuristiques.....	69
2.3.4.1. Les algorithmes génétiques.....	69
2.3.4.2. La méthode d'évolution différentielle	70
2.3.4.3. Les méthodes hybrides	71
2.3.5. Méthodes utilisables en controle	71
2.3.5.1. La méthode Newton	72
2.3.5.2. La méthode Newton modifiée.....	72
2.3.5.3. La méthode de Levenberg/Marquardt.....	73
2.3.5.4. La méthode de Landweber.....	74

CHAPITRE III : MODELISATION DES TRANSFERTS THERMIQUES DANS UN FOUR 75

3.1. Modélisation du problème	76
3.1.1. Etude du transfert de chaleur :.....	76
3.1.2. Modélisation de la variation de la conductivité thermique	81
3.1.3. Modélisation de la variation de la capacité thermique.....	82
3.1.4. Modélisation de la variation de la masse volumique.....	83
3.1.5. Calcul du flux de chaleur q_1	85
3.2. Analyse numérique du problème direct	89
3.2.1. Discrétisation numérique de l'edp.....	89
3.2.1.1. Schéma numérique 1.....	90
3.2.1.2. Schéma numérique 2.....	94
3.2.2 Solution de l'équation discrétisée de la condition aux frontières :	96
3.3. Simulations	97
3.3.1. Données d'entrée:.....	97
3.3.2. Résultats:.....	98
3.4. Analyse dimensionnelle	100

CHAPITRE IV : APPLICATION A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME INVERSE D'IDENTIFICATION DE PARAMETRE D'UN FLUX RADIATIF NET 103

4.1. Introduction :	104
4.2. Position du problème :.....	105

4.3. Algorithme de résolution du problème inverse:	107
4.3.1 Théoreme d'existence :	108
4.3.2 Algorithme :	109
4.3.3. Théoreme de convergence:	111
4.4. Application numérique :	112
4.4.1. Données d'entrée du modèle.....	112
4.4.2. Résultats :	113
4.5. Analyse et interprétations.....	117
CHAPITRE V : APPLICATION A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE CONTRÔLE DE TEMPERATURES	118
5.1. Introduction.....	119
5.2. Position du problème.....	120
5.3. Algorithme de résolution du problème inverse.....	121
5.4. Application numérique.....	123
5.4.1. Données d'entrée:.....	123
5.4.2. Résultats et interprétations:	124
5.4.2.1. Problème unidimensionnel - Temps T donné, température de source θ_0 inconnue mais constante :.....	124
5.4.2.2. Problème bidimensionnel – inconnus : Temps T et température de source constante θ_0	125
5.4.2.3. Problème bidimensionnel - Temps T donné mais température de source θ_0 inconnue et de la forme $\theta_0(t) = c_0 t + b_0$	127
CONCLUSION.....	134
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :	138

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1: Évolution de la température en fonction du courant électrique dans une résistance en Nickel-chrome 80-20 de 7mm de diamètre.....	79
Tableau 3.2: Statistiques de la régression de i vs θ_0	79
Tableau 3.3 : Coefficient de conductivité de l'acier en fonction de la température.....	81
Tableau 3.4: Statistiques de la régression de k vs u	82
Tableau 3.5: Capacité thermique de l'acier en fonction de la température.....	82
Tableau 3.6: Statistiques de la régression de c_p vs u	83
Tableau 3.7: masse volumique de l'acier en fonction de la température.....	84
Tableau 3.8: Statistiques de la régression de ρ vs u	84
Tableau 4.1: Températures moyennes mesurées sur la surface externe pour divers écarts types d'erreurs et en divers instants.....	113
Tableau 4.2: \mathcal{F}^* pour différents écarts types d'erreurs de mesures méthode heuristique.....	116
Tableau 4.3: \mathcal{F}^* pour différents écarts types d'erreurs de mesures pour la méthode CGR.....	116
Tableau 4.4: \mathcal{F}^* pour différents écarts types d'erreurs de mesures pour la méthode QN.....	116
Tableau 5.1 : détail des itérations avec LM, $\bar{u}=345$; $\bar{\sigma}=25$	126
Tableau 5.2 : détail des itérations avec LM, $\bar{u}=460$; $\bar{\sigma}=20$, $T = 7200$	128
Tableau 5.3 : détail des itérations avec LM, $\bar{u} = 400$; $\bar{\sigma} = 10$, $T = 14400$	130
Tableau 5.4 : détail des itérations avec LM, $\bar{u}=400$; $\bar{\sigma}=10$, $T = 7200$	131
Tableau 5.5 : Résultats Scilab simulation pour choix estimation initiale.....	135
Tableau 5.6 : Résultats Scilab simulation pour choix estimation initiale.....	136

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : conductivité thermique de différents métaux solides avec la en fonction de la température.....	41
Figure 2.2 : conductivité thermique de différents gaz en fonction de la température.....	42
Figure 2.3 : Puissance monochromatique en fonction de la longueur d'onde.....	45
Figure 2.4 : échange radiatif entre deux éléments de surfaces « noires ».....	47
Figure 3.1 : schématisation du four électrique et de sa charge.....	78
Figure 3.2 : conductivité thermique de l'acier en fonction de la température.....	81
Figure 3.3: chaleur spécifique de l'acier en fonction de la température u.....	83
Figure 3.4: masse volumique de l'acier en fonction de la température.....	84
Figure 3.5: grille spatiale carrée pour la méthode des différences finies.....	90
Figure 3.6 : grille spatiale carrée avec les index i et j	92
Figure 3.7 : Diffusivité de l'acier en fonction de la température.....	95
Figure 3.8 : distribution des températures dans le métal chauffé (schéma 1).....	98
Figure 3.9: courbes de niveau de la distribution des températures (schéma 1).....	98
Figure 3.10 : distribution des températures dans le métal chauffé (schéma 2).....	99
Figure 3.11: courbes de niveau de la distribution des températures (schéma 2).....	99
Figure 4.1: Schématisation du four avec sa charge.....	105
Figure 4.2: emplacements des capteurs de température sur le corps chauffé.....	105
Figure 4.3: Schématisation du point de convexité locale \mathcal{F}^*	109
Figure 4.4: representation graphique de \mathcal{F}^* vs e.....	117
Figure 5.1: Schématisation du four avec sa charge.....	120
Figure 5.2 : courbes $\theta_0(t)$, $m(t)$ et $\sigma(t)$ avec $\bar{u} = 325$; $\bar{\sigma} = 25$; $l/L=1/3$	127
Figure 5.3 : courbes $\theta_0(t)$, $m(t)$ et $\sigma(t)$ avec $\bar{u} = 460$; $\bar{\sigma} = 20$; $l/L=0.5/3$; $T=7.200s$	129
Figure 5.4 : courbes $\theta_0(t)$, $m(t)$ et $\sigma(t)$ avec $\bar{u} = 400$; $\bar{\sigma} = 10$; $l/L=1/3$; $T=14.400s$	130
Figure 5.5 : courbes $\theta_0(t)$, $m(t)$ et $\sigma(t)$ avec $\bar{u} = 400$; $\bar{\sigma} = 10$; $l/L=1/3$; $T=7.200s$	132

*Je rends un hommage appuyé à ma grand- mère Khoudia DIALLO, à ma mère adoptive
Diakhou FALL et à mon oncle El Hadji Abdoulaye FALL tous décédés.
Qu'ALLAH le tout-puissant les couvre de sa grâce et de sa miséricorde !*

Je dédie ce travail à ces êtres qui me sont chers :

- *A ma mère Fatou FALL*
- *A mon père Mamadou Alpha DIALLO.*
- *A mon oncle El Hadji Malick FALL*
- *A mon oncle Mamadou FALL (Babacar)*
- *A ma tante Ami FALL*
- *A mon fils Abdoulahi DIALLO*

REMERCIEMENTS :

Nombreux sont ceux que je voudrais remercier pour m'avoir aidé, soutenu ou accompagné durant mes années de thèse. C'est pour leur montrer toute ma reconnaissance que je leur dédie ces quelques lignes.

Ce travail a été réalisé dans le cadre du GLPSSM : Groupe de Laboratoires de Physique des Solides et de Sciences des Matériaux de la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse et encadreur, le Professeur Aboubaker Chedikh BEYE, le premier qui m'a donné la chance d'entrer dans le monde de la recherche. Je voudrais lui témoigner toute ma reconnaissance pour sa disponibilité, sa rigueur, ses conseils et surtout pour son ouverture d'esprit.

Je remercie également Pr. Joseph SARR, Doyen de la Faculté des Sciences et Techniques de l'UCAD, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Je remercie aussi Dr. Cheikh MBOW maître de conférence au département de Physique, Pr. Abdoulaye SENE et Pr. Benjamin MAMPASSI, Professeurs au département de mathématiques de l'UCAD pour leur disponibilité et pour avoir accepté de faire partie du jury, respectivement comme rapporteur interne, rapporteur externe et examinateur. Je profite de cette occasion pour magnifier et apprécier à leur juste valeur les conseils et suggestions extrêmement utiles du Dr. MBOW dans ce travail de recherche.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble des membres du laboratoire GLPSSM et en particulier aux professeurs Balla NGOM et Harouna Talla pour leur accueil et soutien.

Enfin, j'associe à ces remerciements l'ensemble des membres de l'École Doctorale « Physique, Chimie, Science de la Terre, de l'Univers et de l'Ingénieur » et en particulier le Directeur Pr. Cheikh Séne et la secrétaire Mme Diba pour leur disponibilité.

RÉSUMÉ :

Dans cette thèse, après une introduction, nous procédons à une revue de la littérature détaillée concernant les méthodes numériques appliquées aux transferts de chaleur dans les fours et les problèmes inverses associés. Cette partie est suivie d'un exposé détaillé des principales méthodes d'analyse inverse. Et dans une dernière partie, nous étudions en application deux problèmes industriels parmi les plus courants dans le domaine des fours de réchauffage de barres d'acier :

Une première application concerne un problème inverse de conduction-rayonnement combiné consistant à déterminer le flux de chaleur rayonnante sur un métal chauffé à l'intérieur d'un four électrique à l'aide de mesures de températures sur sa surface externe. La solution à ce problème inverse est obtenue en utilisant la technique de spécification de fonction en supposant un flux de la forme $q(u, \theta_0) = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4)$ où \mathcal{F} est le facteur de forme gris et σ la constante de Stephan-Boltzmann. Les températures mesurées sont simulées en utilisant la valeur exacte du facteur \mathcal{F} calculée avec la méthode zonale de Hottel, puis en ajoutant des erreurs de mesure variables modélisées par une distribution normale à moyenne nulle et divers écarts-types. Le problème inverse est résolu avec une technique heuristique d'optimisation globale non différentiable. Une analyse de convergence est fournie et montre la convergence de la suite de valeurs générées par le nouvel algorithme d'optimisation vers l'optimum de la fonction objective du problème inverse. Ensuite, une analyse statistique montre que la méthode de calcul est stable et fiable en ce qui concerne les erreurs de mesure. Enfin deux méthodes classiques différentes comme la méthode du gradient conjugué et la méthode de Newton sont testées sur les données en guise de comparaison avec la méthode heuristique développée.

Dans une seconde application, nous étudions un problème de contrôle de la moyenne et de l'écart type de la distribution des températures dans un matériau donné auquel une quantité de chaleur est transférée par rayonnement provenant d'une source à la température θ_0 , le tout placé dans une enceinte fermée et adiabatique. La question à laquelle nous allons répondre est la suivante : étant donné un profil de température inconnu $u(\cdot, T)$ au temps T (qui est la durée du processus de chauffage), de moyenne et d'écart-type donnés, comment calculer la valeur de les paramètres θ_0 et T . Trois modèles sont traités pour le problème inverse : un modèle avec uniquement la température de la source constante comme inconnue, un modèle avec température de source constante et temps final inconnus et un modèle dans lequel le temps final est connu mais la température de la source varie linéairement avec le temps. Nous précisons qu'ici, en aucun cas, la température de la source ne varie avec l'emplacement. Enfin, le problème inverse est résolu avec les méthodes de Newton et de Levenberg Marquardt selon les cas.

Pour la modélisation du transfert de chaleur, nous utilisons des propriétés thermiques dépendantes de la température pour obtenir une équation de diffusion non linéaire avec comme conditions aux limites, un rayonnement uniforme provenant d'une source de chaleur à température θ_0 . La solution du problème de transfert s'obtient par une discrétisation par différences finies en deux dimensions à l'aide de SCILAB.

INTRODUCTION GENERALE

- *Position du problème*
- *Problématique*
- *Objectifs de la thèse*
- *Contenu de la thèse*

Nomenclature :

Lettres latines:

$c_p(u)$ Capacité calorifique fonction de la température $J/kg.K$

\mathcal{F} Facteur de forme gris dans l'équation $q_1 = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4)$

$k(u)$ Coefficient de conductivité thermique de l'acier, fonction de la température, $W/m.K$

$u(x, t)$ Température à l'intérieur du matériau à chauffer à l'instant t et à l'emplacement x , $^{\circ}C$

u_0 Température initiale du matériau à chauffer, $^{\circ}C$

t Variable temporelle, s

x , *variabel spatiale et élément de Ω , m*

Lettres grecques

$\rho(u)$ Densité de l'acier en fonction de la température, kg/m^3

σ Constante de Stephan Boltzmann égale à $5,67.10^{-8}$

θ_0 Température source, $^{\circ}C$

Ω Sous-ensemble borné ouvert de R^2

POSITION DU PROBLÈME :

Les besoins croissants en énergie associés aux pénuries et à la hausse des coûts de l'énergie ont entraîné la nécessité de renforcer l'efficacité énergétique dans le secteur industriel ainsi que la gestion efficace des processus de fabrication et des procédés de chauffage.

L'utilisation optimale de l'énergie électrique pour les processus de traitement thermique peut être obtenue en utilisant des systèmes de contrôle efficaces de la température, en adoptant des technologies de conservation de l'énergie, etc.

Ces dernières années, des progrès ont été réalisés dans la mise au point de technologies énergétiques plus propres et plus efficaces, mais il subsiste encore des

lacunes, tant dans la recherche que dans les technologies. Toutes ces questions encore d'actualité posent encore avec acuité les problèmes de contrôle dans le domaine des procédés de chauffage ou de traitement thermique et de façon spécifique, le contrôle de la distribution de températures dans un matériau chauffé soumis des transferts combinés de chaleur dans un four. Ce contrôle consiste à fixer une température moyenne et un écart-type de températures à atteindre en fin de chauffage, respectant les critères de qualité imposés au produit et à ajuster les variables du problème pour obtenir la qualité désirée. Cependant, la nature simultanée des transferts de chaleur exige d'abord que le flux de chaleur net reçu par le matériau soit déterminé avec précision à l'aide de mesures de températures prises sur sa surface externe. Ce dernier problème fait partie des problèmes dits « inverses ».

PROBLÉMATIQUE

Généralement, un transfert de chaleur combiné par rayonnement et par conduction est requis dans les fours à haute température pour obtenir la qualité de matériau souhaitée. Le transfert par rayonnement a lieu de la source à la frontière du matériau tandis que le transfert par conduction se déroule dans la masse du matériau. Sur l'aspect mathématique, deux problèmes sont à considérer dans cette thèse: un problème dit « direct » qui a pour objet la résolution des équations qui gouvernent le processus étant donnés la température de la source rayonnante et le temps T de chauffage, ensuite un problème dit « inverse » qui s'occupe de la détermination de ces quantités à travers soit un état final voulu ou bien à travers des mesures de température prises à quelques endroits du matériau.

Concernant le premier type de problème dit problème « direct », le but de la résolution des problèmes de transfert de chaleur combiné par rayonnement et par conduction est le calcul de la distribution de la température dans le volume du milieu et des flux d'énergie à ses limites.

Tout d'abord, il faut choisir un modèle de transfert radiatif compatible avec les techniques de résolution et les autres équations qui régissent le processus. Le modèle devrait également être fiable et capable de prédire avec précision le flux

radiatif et la divergence des distributions de flux radiatifs dans le milieu. De plus, le modèle devrait être efficace du point de vue calcul.

L'équation de transfert radiatif est une équation de conservation de l'énergie radiative. C'est une équation intégral-différentielle complexe. Il n'existe pas de solution analytique disponible pour dans sa forme générale. Afin de le résoudre, des approximations physiques et mathématiques doivent être introduites.

Nous pouvons envisager ces possibles approximations sous deux angles différents :

1. simplification de la nature spectrale des propriétés à l'aide de propriétés radiatives moyennes spectrales ;
2. Utilisation d'un modèle de transfert de chaleur radiatif basé sur des flux ou des quantités intégrées similaires.

Ces simplifications réduiront alors considérablement la complexité mathématique requise du modèle et nous utiliserons cette approche dans la présente étude. Cependant, une telle approche mènerait à des résultats parfois loin de la réalité dans la mesure où la dépendance spectrale des propriétés optiques des matériaux doit généralement être prise en compte pour une bonne analyse. Cette remarque nous amène ainsi à envisager un calcul des transferts radiatifs nets combinant la méthode de Hottle et des techniques d'analyse inverses basées sur des mesures de températures.

En ce qui concerne les problèmes inverses en transferts de chaleur, ils sont connus pour être en général mal conditionnés ou mal posés (Tikhonov et Arsenin, 1977; Beck et al. 1985). En conséquence, l'ensemble d'équations discrétisé correspondant est mal conditionné et les techniques ordinaires (par exemple, Gauss – Seidel, élimination de Gauss ou décomposition de LU ou méthode classique de Newton) sont susceptibles d'identifier des solutions non physiques avec des fluctuations de grande amplitude et / ou des températures absolues complexes ou de ne pas trouver complètement une solution. Pour obtenir une solution précise et raisonnable, le système explicite peut être régularisé en modifiant le système d'équations mal conditionné en un ensemble presque équivalent d'équations bien conditionnées. La solution est alors sujette à des erreurs et le niveau de régularisation

doit être choisi de manière à ce que la précision de la solution réponde aux besoins du concepteur.

Sur le plan pratique, la plupart des travaux sur la résolution de problèmes de conduction thermique inverse multidimensionnels sont consacrés à l'estimation du flux thermique à travers des parois ou à l'estimation de la température de surface, en coordonnées cartésiennes (Kerov, 1984; Alifanov et Nenarokomov, 1993; Woodbury et Thakur, 1993 ; Huang et Wu, 1994). Mais, on remarque que le problème de la détermination simultanée de la température de la source rayonnante et de la durée d'un transfert combiné de chaleur par rayonnement et par conduction n'est pas beaucoup abordé. Il est à noter que la plupart des méthodes classiques utilisées pour résoudre les problèmes inverses échouent avec ce type de problème. Cette thèse propose une méthode mixte basée sur la simulation numérique et sur l'application de la méthode de régularisation de Levenberg-Marquardt.

OBJECTIFS DE THÈSE

Cette thèse s'intéresse aux méthodes numériques et les algorithmes de calcul applicables aux problèmes de contrôle et aux problèmes inverses en transferts thermiques.

Étant donné un matériau soumis à un transfert de chaleur combiné rayonnement-conduction à partir d'une source à la température θ_0 , le tout placé dans une enceinte isolée, la modélisation et le calcul du flux radiatif net reçu par le matériau est une étape cruciale pour résoudre le problème de contrôle. L'objectif de ce travail est donc dans un premier temps de calculer le flux radiatif net reçu en utilisant des mesures de températures à différentes positions sur la surface externe du matériau et ensuite d'étudier le contrôle de la moyenne et de l'écart type de la distribution des températures à l'aide de méthodes inverses.

Le système à étudier décrit l'évolution de la température à l'intérieur d'un matériau à section droite carrée. Ce phénomène peut être modélisé à l'aide de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \rho(u)c_p(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k(u)\nabla u) = 0, (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ k(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4), (x, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (0.1)$$

Mais au préalable, nous nous intéresserons à l'approximation numérique de cette équation à l'aide de discrétisations «différences finies». Ensuite, le facteur de forme gris \mathcal{F} sera calculé sur la base de mesures de températures à la surface externe du matériau en chauffage. Le contrôle consistera enfin en la détermination de la valeur des paramètres θ_0 et T (qui est la fin du processus de chauffage) qui produiront en sortie un profil de température $u(\cdot, T)$ dont la moyenne et l'écart type sont connus et fixés à l'avance.

Ces deux derniers problèmes appartiennent à une classe importante de problèmes dits « inverses » qui se posent lors de la conception et du contrôle des systèmes avec sources de chaleur rayonnante. La solution à ces problèmes aidera à mieux contrôler les processus de chauffage en leur fournissant les ressources énergétiques exactes dont ils ont besoin pour répondre aux spécifications requises, puis pour économiser de l'énergie.

CONTENU DE LA THÈSE

Nous démarrons par une introduction générale qui donne un aperçu global du travail effectué en présentant la problématique en question et déclinant les objectifs poursuivis dans cette recherche.

Le chapitre I est consacré à la revue de la littérature. Il concerne aussi bien les modèles et méthodes numériques de transferts radiatifs, les modèles de transferts combinés et les problèmes inverses. Toutefois, une part importante est consacrée aux recherches sur les problèmes inverses en transferts thermiques des origines jusqu'à nos jours.

Le chapitre II fait le tour des méthodes les plus utilisées pour l'analyse des problèmes inverses après avoir défini les notions de problèmes direct, problème inverse et problème mal posé ou mal conditionné.

Le chapitre III aborde la question de l'approximation numérique des solutions de l'équation aux dérivées partielles non linéaires décrivant le transfert thermique

dans un four électrique. Deux schémas numériques sont proposés et analysés. Des simulations sont effectués à l'aide du logiciel « Scilab » et ensuite, les résultats sont analysés et interprétés. Nous verrons que ce type de problème s'appelle « problème directe ».

Le chapitre IV est consacré à un premier type d'application des méthodes du chapitre trois qui est la détermination du flux radiatif net reçu par un matériau à chauffer à l'aide de capteurs de température placés sur sa surface externe.

Le chapitre V traite un problème de contrôle de la température de la source rayonnante et du temps de chauffage avec quelques variantes selon que la durée du chauffage est connue ou non.

La conclusion termine le manuscrit en synthétisant les principales contributions présentées, et en dénombrant de nouvelles perspectives sur la base des travaux effectués.

PUBLICATIONS :

Mamadou Alouma Diallo, Aboubaker Chedikh Bèye, Cheikh Mbow, 2019, Numerical Simulation of a Combined Radiation-Conduction Heat Transfer in An Electric Furnace, INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING RESEARCH & TECHNOLOGY (IJERT) Volume 08, Issue 06 (June 2019),

CHAPITRE I. REVUE DE LA LITTERATURE

1.1 Solutions aux équations de transferts radiatifs :

1.2 Solutions aux problèmes inverses en transferts de chaleur :

Abréviations :

BEM	Méthode des éléments frontières (Boundary Elements Method)
BFGS	Méthode de Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno
CFX	Code commercial de volumes finis
DVS	Décomposition en valeurs singulières
DVST	Décomposition en valeurs singulières tronquées
EDP	Equation aux dérivées partielles
ETR	Équation de transfert radiatif
MGCEA	Méthode du gradient conjugué avec une équation adjointe
MOD	Méthode des ordonnées discrètes
MTD	Méthode des transferts discrets
MEF	Méthode des éléments finis
MVF	Méthode des volumes finis
RGC	Régularisation par gradient conjugué
RS	Recuit simulé
RT	Régularisation de Tikhonov

Dans cette thèse, nous utilisons la méthodologie des problèmes inverses appliquée aux transferts de chaleur combinés rayonnement/conduction dans un matériau métallique chauffé dans un four pour déterminer le flux radiatif reçu à la surface externe et ensuite étudier le contrôle des températures à l'aide de fonctions bien choisies.

1.1 SOLUTIONS AUX ÉQUATIONS DE TRANSFERTS RADIATIFS :

L'équation de transfert radiatif (ETR) décrit la dépendance spatiale du rayonnement sur l'absorption, la diffusion et l'émission par un milieu environnant. Cette équation est la base de presque toutes les analyses de transfert radiatif, et toutes les techniques

standard supposent que l'équation est valide. Elle s'écrit de façon classique comme suit :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\lambda}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Omega} I_\lambda + \beta_\lambda I_\lambda = \kappa_\lambda I_{b\lambda}(T) + \frac{\sigma_\lambda}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \phi_\lambda(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I_\lambda(\vec{r}') d\vec{\Omega}' \quad (1.1)$$

Dans cette équation, I_λ qui représente l'intensité ou la densité spectrale ou parfois tout simplement l'intensité radiative du rayonnement est l'inconnu.

κ_λ et σ_λ représentent respectivement les coefficients d'absorption et de diffusion spectrales. Et les termes correspondant sont appelés absorption et de diffusion spectrales.

$$\text{absorption: } -\kappa_\lambda I_\lambda(\vec{\Omega}) \quad (1.2)$$

$$\text{diffusion: } -\sigma_\lambda I_\lambda(\vec{\Omega}) \quad (1.3)$$

Le coefficient d'atténuation spectrale (ou d'extinction) est exprimé par la somme des coefficients d'absorption et de diffusion, comme suit :

$$\beta_\lambda = \kappa_\lambda + \sigma_\lambda \quad (1.4)$$

$\vec{\Omega}$ de l'équation (1.1) est défini comme la direction de propagation, c la vitesse de la lumière. L'énergie absorbée est principalement convertie en énergie thermique, tandis que l'énergie radiante diffusée est redistribuée dans le milieu. La distribution directionnelle de l'énergie diffusée est exprimée par la fonction de phase $\phi_\lambda(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$ qui représente la fraction d'énergie incidente dans la direction $\vec{\Omega}'$ qui est diffusée dans la direction $\vec{\Omega}$. L'angle entre les directions du faisceau incident $\vec{\Omega}'$ et le faisceau diffusé $\vec{\Omega}$ est appelé angle de diffusion. Pour la plupart des applications pratiques, le comportement transitoire de l'intensité du rayonnement est négligeable et le premier terme est omis. L'opérateur $\nabla \cdot \vec{\Omega}$ désigne le changement incrémental d'intensité selon la direction $\vec{\Omega}$ et est exprimé en fonction du système de coordonnées choisi pour une géométrie spécifique.

Le plus grand intérêt ici est l'évaluation de la divergence locale du flux radiatif $-\nabla \cdot q_r$. Nous avons alors la formule suivante :

$$-\nabla \cdot q_r = \int_0^\infty \kappa_\lambda \int_{\Omega=4\pi} I_\lambda(\Omega) d\Omega - 4\pi \int_0^\infty \kappa_\lambda I_{b\lambda} d\lambda \quad (1.5)$$

Dans de nombreuses applications à haute température, lorsque le transfert de chaleur radiative est important, le milieu entre les surfaces n'est pas transparent mais «participe» au transfert de chaleur; c'est-à-dire qu'il absorbe, émet et (éventuellement) diffuse un rayonnement où l'énergie diffusée est principalement anisotrope. Cependant, parfois une approximation de transparence peut être faite pour simplifier la résolution de l'ETR. Dans cette approximation, on suppose qu'aucun milieu qui affecte le transfert entre les surfaces n'est présent ; c'est-à-dire qu'aucune diffusion, absorption ou émission ne se produit dans le milieu.

Pour la solution de l'équation de transfert radiatif il existe plusieurs modèles différents disponibles dans la littérature, par exemple les méthodes zonales, les harmoniques sphériques, les méthodes de Monte Carlo, de flux, d'ordonnées discrètes, de volume finis et de transferts discrets (DTM), la méthode des éléments finis etc.

Les techniques d'éléments finis ont été utilisées pour modéliser le transfert de chaleur par rayonnement dans des enceintes multidimensionnelles. Razzaque et al. (1983-1984) ont examiné le problème de la combinaison conduction-rayonnement dans un milieu absorbant/émetteur. Tan (1989) a introduit une méthode d'intégration de produit, similaire à la technique des éléments finis. Cette approche nécessite beaucoup moins de temps de calcul que les autres techniques de résolution par éléments finis. Burns et al. (1995) ont formulé un code de transfert radiatif par éléments finis détaillé qui utilise des grilles générées par des générateurs de grille MEF commerciaux. Le code calcule la divergence du flux radiatif local en fonction d'une distribution de température donnée dans le milieu; la divergence calculée peut ensuite être utilisée dans l'équation d'énergie dans un code commercial MEF pour le traitement.

L'approximation des ordonnées discrètes (S_N) est probablement la technique la plus largement utilisée pour représenter la dépendance angulaire de l'intensité radiative pour les applications de transfert de chaleur. Dans l'approximation S_N , l'ETR (1.1) est satisfait exactement le long d'un ensemble de directions discrètes. Dans cette approche, une technique de quadrature numérique est utilisée pour approximer toutes

les intégrales angulaires telles que celles du terme de diffusion dans l'équation (1.1) et dans la divergence de flux radiatif donnée par l'équation (1.5). On suppose ensuite que l'intensité radiative est constante dans chaque direction des ordonnées (Fiveland, 1987 ; Chai et al. 1994 ; Raithby et Chui, 1990). La solution approchera de l'exactitude à mesure que le nombre d'éléments en quadrature augmentera. En outre, ce modèle est capable de gérer la dispersion par le milieu et donne un très bon accord avec les solutions exactes.

La méthode zonale fait également référence à la méthode zonale de Hottel. La méthode zonale est l'un des modèles les plus utilisés pour calculer le transfert radiatif dans les chambres de combustion (Hottel and A. E Sarofim, 1967). L'idée de base de cette approche est similaire à celle de l'échange de chaleur par rayonnement entre des surfaces de dimensions finies d'une enceinte contenant un milieu non participant. Dans sa version la plus simple, les parois d'une enceinte sont divisées en de nombreux éléments de surface à propriétés uniformes et à température uniforme. Cette division détermine la distribution spatiale de l'intensité du rayonnement. L'échange de chaleur par rayonnement net entre ces éléments est déterminé en utilisant une approche radiositité-irradiation ainsi que des facteurs de configuration de rayonnement appropriés, les radiosités de tous les éléments de surface étant déterminées simultanément. Le facteur de configuration du rayonnement entre les surfaces arbitraires i et j est déterminé en considérant la fraction de l'énergie radiative quittant la surface i qui arrive à la surface j et constitue un paramètre purement géométrique (R. Siegel and J. R. Howell, 1992.). L'orientation relative de toutes les surfaces i par rapport à la surface j divise l'angle solide hémisphérique en plusieurs petits angles solides discrets. Cette discrétisation représente implicitement la subdivision angulaire du rayonnement pour la surface j dans le milieu. Pour un milieu participant, cette méthode consiste à décomposer le milieu et ses frontières en un grand nombre d'aires d'échange d'éléments de surface isothermes et d'éléments de volume isothermes afin de calculer le flux radiatif net échangé entre toutes ces aires d'échange. Plus spécifiquement, pour un milieu absorbant mais non émetteur, la quantité d'énergie rayonnée émanant depuis la surface i jusqu'à atteindre la surface j

est réduite en raison de l'atténuation du faisceau par le milieu le long de la ligne de visée joignant les deux surfaces. Cette perte d'énergie peut être facilement prise en compte dans le modèle. Ici, tout le volume est divisé en plusieurs éléments, chacun présumé avoir des propriétés uniformes et constantes. Ensuite, l'interaction de chaque élément de volume et de surface est écrite explicitement et transformée en une matrice, et les radiosités requises sont déterminées par calcul (Goheneche et Sacadura, 2002).

Les méthodes des harmoniques sphériques expriment la variation de densité (ou d'intensité) spectrale en fonction de la direction en termes d'une série infinie de fonctions de base orthogonale, à savoir les polynômes de Legendre en coordonnées sphériques, puis tronque la série à un moment donné définissant l'ordre de l'approximation (Modest et Yang, 2008; Howell et al., 2011; Tapimo et Kamdem, 2016). Le problème se réduit alors à déterminer les valeurs des coefficients inconnus dans l'expansion qui sont des fonctions de position et de longueur d'onde. Cette approximation entraîne un nombre moindre d'équations par rapport à la méthode des ordonnées discrètes. Par exemple, l'approximation d'ordre le plus bas, appelée méthode P1, conduit à une EDP elliptique linéaire de second ordre avec des conditions aux limites de type Robin. Il est facile de l'intégrer avec l'aide des codes CFD commerciaux, ce qui le rend populaire. On s'attend à ce qu'une approximation plus élevée, à savoir l'approximation P3, donne de meilleurs résultats, mais les équations qui en résultent sont complexes et présentent un défi formidable pour la solution numérique.

Dans la méthode de Monte Carlo, le rayonnement est supposé être composé de faisceaux d'énergie discrets ou photons. Ensuite, le chemin probable d'un nombre fini de photons, qui obéissent aux contraintes physiques imposées par le RTE est suivi jusqu'à leur absorption finale dans le système. Le trajet du photon est déterminé à chaque point d'émission, d'absorption, diffusion ou réflexion par un choix aléatoire parmi un ensemble de chemins possibles. Un échantillon suffisamment grand de photons est suivi pour obtenir des résultats statistiquement stables et l'application de la méthode de Monte Carlo résulte du moyennage statistique des résultats obtenus.

La méthode Monte Carlo est utilisée pour le calcul direct de l'échange radiatif dans des géométries complexes dans Polgar et Howell (1965, 1966), Corlett (1966), Toor et Viskanta (1968a), Howell et Durkee (1971), Blechschmidt (1974), McHugh et al.(1992). Les systèmes d'ingénierie ont été analysés par Howell et Bannerot (1976), Villaneuve et al. (1994) et Mochida et al. (1995). Les facteurs de configuration sont calculés par Yarbrough et Lee (1985), Bushinskii (1976), Modest (1978).

Lockwood et Shah (1981) ont utilisé les principes de base des techniques de Monte Carlo pour mettre au point la méthode dite du transfert discret (MTD). Au lieu de choisir de façon aléatoire la direction des intensités provenant (par émission, diffusion ou réflexion) de chaque élément de volume/surface, ils ont suggéré une approche déterministe. La méthode s'est avérée précise et efficace sur le plan numérique pour les milieux non absorbants. Steven Audrey Ndjanda Heugang, Hervé Thierry et al. (2016) ont présenté une extension de cette méthode MTD pour l'analyse du transfert de chaleur radiatif à travers un milieu de diffusion anisotrope sans utiliser de technique de normalisation de fonction de phase. Cependant, l'investigation s'est limitée à une dimension. Une approche similaire à la méthode de transfert discret a été rapportée par Taniguchi et al. (1984, 1986, 1997). Ils ont montré que la méthode produisait de très bons résultats avec des gains de temps de calcul significatifs par rapport aux techniques de Monte Carlo standard pour des milieux non absorbants. Richter (1985) a suggéré une approche semi-stochastique similaire, dans laquelle il a développé un schéma de résolution basé sur les principes de la technique de Monte Carlo, mais les directions des photons émis par chaque élément de volume/surface étaient prédéterminées. Il a appliqué cette approche à plusieurs fours à grande échelle et a montré que, si la diffusion n'est pas prise en compte, le modèle donne des résultats raisonnables, même si seulement 10 000 photons sont pris en compte.

La méthode de « région bloquée » ou « blocked-off » permet d'éviter la complexité résultant des grilles non orthogonales, en modélisant des géométries irrégulières à l'aide de la formulation en coordonnées cartésiennes. Ce comprend le dessin d'un domaine rectangulaire autour du domaine physique d'intérêt qui, à travers ce domaine de procédure, est divisé en deux sections: les régions actives et inactives

ou bloquées. Cette méthode permet d'utiliser des algorithmes qui sont implémentés dans des géométries régulières pour des géométries irrégulières incluant des frontières inclinées ou courbes. La stratégie de cette méthode de « région bloquée » est généralement basée sur le principe suivant: les calculs sont effectués dans tout le domaine simulé, mais dans la région bloquée, les résultats ne sont pas importants. Par conséquent, pour faire la distinction entre les volumes de contrôle disponibles dans le domaine réel et dans la région bloquée, un «fichier de domaine» est créé pour chaque géométrie. Les volumes de contrôle qui tombent dans le domaine réel sont caractérisés par (1) et les autres sont caractérisés par (0). Ensuite, dans le processus de résolution, un terme source supplémentaire est ajouté à droite de chaque équation gouvernante, concernant la quantité prévue. Cette méthode trouve son application dans les travaux de Amiri et al. (2010) qui ont analysé le problème de la conduction et du transfert de chaleur par rayonnement combinés dans des géométries irrégulières 2D en utilisant une méthode MOD et une méthode de blocage (« blocked-off method ») avec des conditions aux limites de température et de flux de chaleur.

Dans la méthode du flux, la densité (ou l'intensité) spectrale est supposée uniforme sur les parties discrètes de l'angle solide total qui vaut 4π et sa dépendance directionnelle est découplée de sa dépendance spatiale. La forme intégrale de l'équation de transfert radiatif ETR est ensuite moyennée sur chacune des régions angulaires finies, ce qui donne un ensemble d'équations de flux. En fonction du nombre de directions discrètes sur lesquelles l'angle solide est discrétisé, différentes méthodes multi-flux résultent. Si l'angle solide est divisé uniformément en deux, quatre ou six divisions, on obtient respectivement des méthodes à deux flux, quatre flux et six flux. L'approximation de Schuster-Schwarzschild ou à deux flux est un précurseur de la méthode multidimensionnelle des ordonnées discrètes discutée plus haut (Modest 1993). Au fil des années, plusieurs versions différentes des modèles multi-flux ont été développées. Cependant cette méthode n'est généralement adaptée qu'à la géométrie plane et ne peut pas être facilement appliquée à d'autres scénarios (Modest, 2013).

Il convient cependant de noter que les échanges de chaleur par rayonnement sont souvent couplés à d'autres types d'échange comme la conduction et/ou la convection. Parmi les quelques travaux antérieurs sur les problèmes de conduction-rayonnement combinés, Razzaque et al. (1984) ont analysé les problèmes de conduction-rayonnement couplés à deux dimensions avec la méthode des éléments finis limitée au seul milieu non diffusant à parois noires isothermes. Tan (1989a) a appliqué la méthode d'intégration de produit à la résolution d'un problème de conduction-rayonnement combiné dans une enceinte carrée à parois isothermes. Kim et al. (1991) ont utilisé la méthode des ordonnées discrètes (MOD) pour le transfert de chaleur par rayonnement et par conduction couplés dans des enceintes rectangulaires. Rousse (2000) et Rousse et al. (2000) ont utilisé la méthode des volumes finis de contrôle (MVF) pour la résolution du mode combiné de transfert de chaleur dans des cavités bidimensionnelles. Mahapatra et al. (2005) ont étudié une nouvelle méthode hybride dans laquelle les concepts d'approximation différentielle modifiée ont été utilisés en combinant la méthode des ordonnées discrètes et la méthode des harmoniques sphériques pour le transfert thermique combiné en géométrie plane bidimensionnelle. Les techniques de résolution numérique des problèmes de transfert de chaleur combiné en régime permanent et transitoire avec échange radiatif surface-surface sont examinées et discutées par Hogan et Gartling (2008). Pour la convection naturelle combinée au rayonnement, diverses méthodes numériques ont été utilisées pour résoudre simultanément les équations de flux de fluide et d'énergie avec échange radiatif. Dans Zhao et al. (1992), la convection naturelle et le rayonnement ont été analysés pour les cylindres chauffés dans une enceinte rectangulaire. Dans Dehghan et Behnia (1996), l'analyse de la radiation nette a été utilisée pour le transfert radiatif, et les équations de flux et d'énergie ont été mises sous forme de différences finies et résolues avec une méthode pseudo-transitoire pour analyser la convection naturelle dans une cavité avec zone sur un mur vertical. Le transfert de chaleur combiné rayonnement-convection naturelle de l'air transparent dans un canal vertical chauffé avec un ou plusieurs événements dans un mur a été analysé par Moutsoglou et al. (1992). Les équations de flux et d'énergie ont été

résolues en utilisant des méthodes de calcul par différences finies développées par Patankar et Spalding (1972) et par Van Doormall et Raithby (1983).

Cependant presque toutes les méthodes décrites précédemment présentent certains inconvénients. Néanmoins, il est parfois possible de combiner les caractéristiques de deux ou plusieurs méthodes afin de développer une technique plus efficace pour modéliser le transfert de chaleur par rayonnement dans les fours. Par exemple, si la géométrie du four est très compliquée, la méthode par zone ne peut pas être utilisée efficacement, car il est assez difficile de déterminer tous les facteurs d'échange requis. Ici, une technique de Monte Carlo peut être adoptée, comme celle de Vercammen et Froment (1984), pour calculer les facteurs d'échange entre éléments de volume et de surface, puis le transfert de chaleur radiatif entre chaque élément est calculé à l'aide de la méthode par zones. Edwards (1985) a également suggéré une approche similaire dans laquelle il obtenait les facteurs d'échange en utilisant une technique de Monte Carlo et calculait la distribution du flux radiatif en utilisant une approche radiosité-irradiosité. Avec cette approche hybride, les facteurs d'échange dans les géométries les plus complexes peuvent être calculés sans difficulté. En outre, un gain de temps significatif est obtenu en utilisant la méthode par zones au lieu d'une technique de Monte Carlo pour déterminer la distribution de flux de chaleur radiative dans un milieu. En plus de cela, les erreurs statistiques possibles dues à une technique de Monte Carlo sont évitées.

1.2 SOLUTIONS AUX PROBLÈMES INVERSES EN TRANSFERTS DE CHALEUR :

L'analyse inverse des problèmes de transfert de chaleur a récemment fait l'objet de beaucoup d'attention, avec plusieurs applications importantes en ingénierie comme la conception d'équipements thermiques, de systèmes et d'instruments. Stolz (1960) aurait été l'un des premiers à résoudre le problème de la conduction thermique inverse. Sparrow et al (1964) ont résolu le problème de la conduction thermique inverse dans des géométries unidimensionnelles. Burggraf (1964) a supposé une solution de la température de surface sous la forme d'une série infinie, dont les termes comportent des dérivées d'ordre supérieur de la température et de flux de chaleur en un point intérieur multiplié par des fonctions spatiales inconnues. Le modèle proposé

par Burggraf suppose connue la variation de la température en fonction du temps. Beck (1965, 1969, 1967, 1968, 1979, 1970 et 1980) se focalise sur le traitement efficace des données expérimentales pour une solution appropriée des problèmes inverses de conduction thermique.

La méthode de spécification de fonction, proposée à l'origine dans (Beck, 1962), est particulièrement utile lorsque le flux de chaleur en surface doit être déterminé à partir de mesures transitoires effectuées à l'intérieur du matériau. Pour ce faire, une forme fonctionnelle du flux thermique inconnu est supposée. Cette forme fonctionnelle contient un certain nombre de paramètres inconnus qui sont estimés à l'aide de la méthode des moindres carrés.

L'un des schémas de régularisation les plus répandus et les mieux connus est dû à Tikhonov (1977). L'approche de Tikhonov a été de réduire les instabilités apparaissant lors de la minimisation de la fonction « écart » $S(P)$ par l'utilisation d'une procédure appelée régularisation de Tikhonov (Tikhonov et Arsenin, 1977). Tu et Beck (1989) développa une méthode mixte de spécification de fonction et de régularisation. La méthode de programmation dynamique et son utilisation pour la formulation et la solution des problèmes inverses de conduction de la chaleur sont présentées sous forme de matrice. Nicholas et al. (1988) ont étudié les problèmes inverses linéaires de conduction de la chaleur à deux dimensions en utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM) en conjonction avec l'analyse de sensibilité de Beck.

Beck (1985) utilisa la procédure d'estimation non linéaire pour la résolution numérique du problème inverse linéaire de conduction de la chaleur. Cette procédure a l'avantage, par rapport aux autres procédures numériques, de prendre en compte les imprécisions dans la mesure de l'emplacement des thermocouples, les erreurs statistiques dans la mesure de la température et l'incertitude dans les propriétés des matériaux, Beck (1970). Alnajem et Özisik (1986) ont utilisé une approche analytique directe pour résoudre des problèmes de conduction thermique inverse linéaire bidimensionnels en combinant une procédure de splitting-up et la technique des moindres carrés.

Murio (1993) a développé la méthode de mollification. La méthode de mollification est une procédure de régularisation qui est utilisée pour stabiliser plusieurs problèmes mal posés par restauration de la continuité par rapport aux données.

Alifanov a suggéré et développé la méthode de régularisation itérative (Alifanov, 1994; Alifanov et al. 1995). Dans cette méthode, un problème d'optimisation est résolu avec la méthode du gradient conjugué avec un problème adjoint (Jarny et al., 1991). Cette approche a été appliquée avec succès à divers problèmes de transfert de chaleur inverse (Alifanov et Egorov, 1985; Huang et Özisik, 1992; Silva Neto et Özisik, 1994a; Huang et al. 1999; Colaço et Orlande, 1999; Su et Silva Neto, 2001).

Dans les méthodes de régularisation d'Alifanov, le nombre d'itérations joue le rôle du paramètre de régularisation μ et le critère d'arrêt est choisi de manière à obtenir des solutions raisonnablement stables. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de modifier la fonction objective initiale, contrairement aux approches de Tikhonov ou de Beck. L'approche de régularisation itérative est suffisamment générale et peut être appliquée à la fois aux estimations de paramètres et de fonctions, ainsi qu'aux problèmes inverses linéaires et non linéaires (Alifanov, 1994; Alifanov et al, 1995; Ozisk et Orlande, 2000).

Quelques solutions analytiques aux problèmes de conduction inverse de chaleur dans lesquelles un capteur de température est placé à un emplacement arbitraire dans le corps conducteur sont disponibles dans la littérature de Burggraf (1964).

A ce niveau il est à noter le travail de Burggraf (1964) qui étudia le problème inverse transitoire 1D avec donnée aux frontières, dans une plaque plane, une sphère et un cylindre circulaire. Burggraf obtint ainsi une solution exacte dans le cas où là la variation de la température en fonction du temps était connue en un point interne du domaine. Les solutions de problèmes inverses 1D sous forme de séries infinies ou de polynômes ont également été proposées dans (Kover'yanov, 1967) et dans d'autres documents.

Silva Neto et Özisik (1992, 1993a, 1993b, 1994b) ont appliqué avec succès la méthode de régularisation itérative d'Alifonov, appelée ici méthode du gradient conjugué avec une équation adjointe (MGCEA), à l'estimation de l'intensité des sources de chaleur.

Huang et Ozisik (1992) ont présenté la méthode du gradient conjugué régulière pour une approche simple, bien organisée, rapidement convergente, de la solution des problèmes de conduction thermique inverse, étant donné que la valeur temporelle finale de la source de chaleur est disponible. Dans ce type de situation, lorsque la source de chaleur au moment final n'est pas indiquée, la méthode du gradient conjugué modifiée peut être appliquée pour obtenir une bonne estimation afin de déterminer la valeur de l'estimation initiale pour démarrer les itérations dans la méthode du gradient conjugué normal.

J. Vogel, L. Sara et L. Krejc (1993) ont présenté une nouvelle méthode de pas de temps variable pour le problème unidimensionnel de conduction thermique inverse. Le principal avantage de cet algorithme est sa facilité d'utilisation, son efficacité de calcul et sa bonne capacité de calcul à partir de données avec une erreur de faible amplitude et de haute fréquence.

Mikhalev et Reznik (1988) ont utilisé un algorithme de gradient avec la direction de recherche donnée par la méthode de Davidson-Fletcher-Powell. Huang et Tsai (1998) ont appliqué la méthode du gradient conjugué à la méthode des éléments frontières (BEM) (la méthode des éléments frontières (BEM) est une méthode de calcul numérique permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires qui ont été formulées comme des équations intégrales) pour la solution du problème de conduction thermique inverse afin de déterminer le flux de chaleur limite transitoire inconnu dans un domaine irrégulier en appliquant les données de température. Peu de tests comprenant des erreurs de mesure et une forme de domaine différentes ont été pris en compte. Les résultats obtenus montrent que les solutions inverses obtenues par la méthode du gradient conjugué restent stables et régulières même si les erreurs de mesure augmentent et que le nombre de capteurs peut être minimisé.

Taler et Zima (1999) ont présenté la nouvelle procédure de « space marching » pour les problèmes de conduction thermique inverse à une dimension et à plusieurs dimensions. La procédure décrite est mathématiquement simple et performante en calcul. Pour obtenir une grande précision de la solution contrairement aux problèmes directs, seul un petit nombre de volumes de contrôle est pris en compte. Un autre avantage unique de la formulation actuelle est qu'elle est non itérative et non séquentielle.

L'importance de cette méthode est qu'elle n'exige aucune information sur la distribution de température initiale. La solution inverse développée dans cet article ne dépend que de la distribution de température initiale dans la région directe. La moindre précision initiale résulte de la grande distance entre le capteur de température et la surface extérieure et du changement brusque de la température du fluide, qui rend la méthode inverse imprécise. Lorsque le capteur de température est situé loin de la surface active non recouverte, comme dans ce cas, la température mesurée est sensiblement retardée et atténuée par rapport aux changements temporels se produisant sur la surface recouverte. Ainsi, il est impossible de déterminer avec précision la situation initiale dans la région inverse dans ce cas car les dérivées temporelles calculées de la température mesurée ont une précision moindre. La répartition initiale de la température dans le corps pourrait être déterminée beaucoup plus précisément si le capteur de température est situé près de la surface active.

Muniz (1999) proposa les techniques de régularisation d'ordre zéro et la technique de régularisation de Tikhonov de premier ordre pour la résolution de problèmes inverses.

Huang et Wang (1999) ont appliqué la méthode du gradient conjugué au CFX (code commercial de volumes finis) pour résoudre le problème de conduction thermique inverse en 3D afin de déterminer le flux thermique frontière transitoire inconnu dans un domaine irrégulier en utilisant des lectures de température simulées obtenues à l'aide de scanners infrarouges. Certains des cas de test impliquant différentes erreurs de mesure et flux de chaleur ont été examinés. Les résultats

obtenus montrent que les solutions inverses obtenues par la méthode du gradient conjugué restent stables et régulières au fur et à mesure de l'augmentation des erreurs de mesure. À partir des cas de test numériques de cette étude, ils ont conclu que l'utilisation de CFX comme sous-programme dans le problème inverse 3D pour estimer le flux de chaleur à la limite inconnue avec la méthode du gradient conjugué a été effectuée avec succès. En utilisant un algorithme similaire, de nombreux problèmes inverses 3D pratiques mais difficiles peuvent également être résolus.

Khalidy (1999) a proposé un algorithme permettant d'estimer la condition aux limites (température de surface et flux de chaleur en surface) d'un corps en fonction de l'historique de la température du capteur situé à l'intérieur du corps. La méthode appliquée ne nécessite aucune méthode de stabilisation lorsque des données exactes sont utilisées pour résoudre le problème. En utilisant des données bruitées, la précision et la stabilité des résultats sont augmentées en utilisant le filtre numérique de Savitzky-Golay ou en remplaçant la conduction thermique inverse parabolique par l'équation hyperbolique. Les méthodes proposées peuvent également être appliquées à la résolution de problèmes multidimensionnels.

Nous retenons que de façon générale, au cours du siècle précédent, la plupart des travaux sur les solutions de problèmes de conduction thermique inverse multidimensionnels sont consacrés à l'estimation du flux thermique des parois ou à la température de surface, en coordonnées cartésiennes (Kerov, 1984; Alifanov et Nenarokomov, 1993; Woodbury et Thakur, 1993; Huang et Wu, 1994).

Pour la conception de systèmes de transfert radiatif, les méthodes inverses couvrent le travail de nombreux contributeurs. Diverses méthodes peuvent être appliquées. La méthode de la valeur singulière tronquée (DVS) est utilisée dans França et al. (2001), França et Howell (2006), et Mossi et al. (2008); l'approche de Tikhonov dans Leduc et al. (2004a, b, 2006); La régularisation par gradient conjugué (CGR) dans Ertürk et al. (2001, 2002a – c, 2004), Hosseini-Sarvari et al. (2003a, c) et Pourshghaghy et al. (2006); les techniques d'optimisation par Federov et al. (1999), Daun et al. (2003c – e, 2005), Hosseini-Sarvari et al. (2003b) et Daun et Howell (2005);

Fan Yang, Chu-Li Fu (2008) ont examiné le problème inverse de la détermination d'une source de chaleur variant dans l'espace avec une équation de chaleur unidimensionnelle dans un domaine délimité où les données sont fournies à temps fixe.

Tanana (2009) proposa une méthode d'ordre optimal pour résoudre approximativement un problème inverse pour une équation parabolique à coefficients variables. Il donne une estimation exacte de l'ordre pour l'erreur de la méthode.

Zhou et al. (2010) ont présenté un algorithme utilisant la méthode du gradient conjugué pour obtenir une meilleure estimation du flux thermique et de la température à la surface avant (chauffée) d'un objet 3D avec des propriétés thermo-physiques dépendantes de la température, sur la base des mesures de la température et du flux thermique à la face arrière opposée à celle chauffée. Le problème inverse est formulé de manière à ce que le flux de chaleur sur la surface avant soit la fonction inconnue à déterminer, et que la température de la face avant soit calculée par l'algorithme de conduction inverse de chaleur. Les excellents résultats numériques présentés dans cette étude démontrent que l'approche proposée est un algorithme numérique robuste pour le système de conduction inverse de chaleur 3D avec des propriétés thermo-physiques dépendant de la température.

Lorsque les conceptions nécessitent une optimisation dans un ensemble de variables discrètes, que la complexité du problème exclut l'utilisation des méthodes du type gradient ou que la régularisation aboutit à des solutions infaisables, les méthodes métaheuristiques constituent une alternative fiable. Les méthodes les plus courantes sont le recuit simulé, la recherche tabou, les algorithmes de colonies de fourmis ou encore l'optimisation par essaim particulaire.

Les approches métaheuristiques comprennent le recuit simulé (RS) (Kirkpatrick et al. 1983, Corana et al. 1987, Van Laarhove et al. 1992, Goffe et al. 1994, Chiang et Russell 1996, Porter et al. 2005, 2006), la recherche Tabu (TS) dans Porter et al. (2006); les réseaux de neurones artificiels dans Ertürk et al. (2002a) et Deiveegan et al. (2006); et optimisation des essaims dans Yoon et al. (2013) et Yüksel (2013).

Les algorithmes génétiques appartiennent à la classe des algorithmes évolutifs. Ils ont été appliqués avec succès à des problèmes de transfert radiatif (Li et Yang 1997, Kim et Baek 2004, Safavinejad et al. 2005, 2009, Deiveegan et al. 2006, Darvishvand et al. 2015). Liu (2008) étudia l'analyse inverse de la fonction de source de chaleur inconnue à l'aide d'algorithmes génétiques. Un algorithme génétique modifié est introduit pour résoudre le problème du transfert de chaleur inverse avec un degré de précision raisonnable. L'algorithme génétique modifié réduit fondamentalement le temps de calcul nécessaire à la convergence avec des résultats corrects hautement qualitatifs.

La validation expérimentale par correspondance des prévisions de solutions inverses avec les résultats expérimentaux se trouve dans Gamba et al. (2002, 2003), Ertürk et al. (2007) et, à l'échelle nanométrique, Hajimirza et Howell (2014a).

Malgré cette littérature extrêmement abondante et diversifiée que nous venons de parcourir sur les solutions de l'équation de transfert radiatif et sur les problèmes inverses en transferts de chaleur nous n'avons pas trouvé des recherches sur le calcul des transferts radiatifs nets combinant la méthode de Hottle et des techniques d'analyse inverses. Or cette démarche nous semble extrêmement importante car elle permet de mesurer des flux radiatifs nets pour des configurations géométriques complexes et sans avoir besoin de prendre en compte la dépendance spectrale des émissivités. D'autre part, le contrôle de la distribution de températures dans un métal en chauffage basé seulement sur la moyenne et l'écart type avec le temps comme paramètre inconnu à déterminer est également quasi introuvable ou rare dans la littérature. Cette thèse va donc se focaliser sur cette problématique centrale afin d'y apporter des réponses.

CHAPITRE II. REVUE DES PRINCIPALES METHODES D'ANALYSE INVERSE EN TRANSFERTS DE CHALEUR

2.1 Types de problèmes inverses en transferts de chaleur

- Problèmes directs, problèmes inverses
- Classes de problèmes inverses

2.2 Type de transferts de chaleur

2.3 Les outils et méthodes d'analyse

2.3.1 Problèmes inverses et notion de mal conditionnement

2.3.2 Méthodes de régularisation

- La régularisation de Levenberg Marquardt
- La régularisation de Tikhonov
- Décomposition en valeurs singulières avec troncature

2.3.3 Les méthodes d'optimisation

- Les méthodes de type gradient
- La méthode de gradient à pas optimal
- Les méthodes de Newton et quasi Newton
- La régularisation par gradient conjugué
- La méthode du gradient conjugué avec problème adjoint
- Choix d'une méthode d'optimisation

2.3.4 Les approches heuristiques

2.3.5 Méthodes utilisables en contrôle

- La méthode de Newton
- La méthode de Newton modifiée
- La méthode de Levenberg Marquardt
- La méthode de Landweber

Nomenclature:

Lettres latines :

D Matrice diagonale

$D^{(k)}$ Matrice diagonale à l'itération k

$dQ_{1 \rightarrow 2}$ Énergie thermique élémentaire émise par l'élément de surface dS_1 et intercepté par l'élément de surface dS_2

dS_1 Élément de surface sur la surface S_1

d^k Direction de descente

$e_{\lambda b}$ Puissance émissive spectrale par unité de surface d'un corps noir, $W/m^2/\mu m$

e_b Puissance émissive par unité de surface d'un corps noir, $\frac{W}{m^2}$

e_λ Puissance émissive spectrale par unité de surface d'un corps quelconque, $W/m^2/\mu m$

e Puissance émissive par unité de surface d'un corps quelconque, $\frac{W}{m^2}$

$F_{1 \rightarrow 2}$ Facteur de forme de la surface S_2 vue de la surface S_1

I_2 Matrice d'identité à deux dimensions

$I_{\lambda b}$ Densité spectrale du corps noir, $W/m^2/\mu m$

I_λ Densité spectrale d'un corps quelconque, $W/m^2/\mu m$

$J(P)$ Matrice de sensibilité ou matrice jacobienne du paramètre vectoriel P

$J^{(k)}$ Matrice de sensibilité ou matrice jacobienne à l'itération k

k Nombre d'itérations.

n Indice de réfraction du milieu.

$P^{(k)}$ Paramètre de vecteur à l'itération k

P Variable de paramètre de vecteur à déterminer dans le modèle abstrait $P = (P_1, P_2, \dots, P_N)$

$Q_{1 \rightarrow 2}$ Puissance thermique élémentaire émise par la surface S_1 et interceptée par la surface, W

T Température, K

U_{mes} Sortie mesurée pour le modèle abstrait, $^\circ C$

Lettres grecques :

α absorptivité

β_1 Angle entre la normale à la surface S_1 et la direction du rayonnement

$\beta^{(k)}$ Taille du pas de recherche,

δ Tolérance prescrite par l'utilisateur

ϵ Erreur aléatoire de mesure

$\gamma^{(k)}$ Coefficient de conjugaison

λ Paramètre de régularisation

$\mu^{(k)}$ Scalaire positif nommé paramètre d'amortissement à l'itération k

$\eta(P)$ Sortie calculée par le modèle abstrait et fonction du paramètre vectoriel

$\nabla S(P)$ Gradient de la fonction $S(P)$

ρ Réflectivité

$\rho^{(k)}$ Longueur de descente

τ Transmissivité

$\omega^{(k)}$ Direction de descente

Abréviations :

BFGS Méthode de Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno

RGC Régularisation par gradient conjugué

DVS Décomposition en valeurs singulières

RT Régularisation de Tikhonov

DVST Valeurs singulières tronquées

2.1. TYPES DE PROBLEMES INVERSES EN TRANSFERTS DE CHALEUR

2.1.1. PROBLEME DIRECT ET PROBLEME INVERSE

- Le problème direct

Les problèmes pratiques en ingénierie sont définis par un ou plusieurs équations différentielles ou aux dérivées partielles régissant les processus à étudier, la forme et la taille du domaine, les conditions aux limites et initiales, les propriétés du milieu ainsi que par des sources internes et des forces ou apports externes. Si toutes ces informations sont connues, le problème est de type direct et généralement considéré comme bien posé et pouvant être résolu.

Les modèles mathématiques de phénomènes modélisés par des équations aux dérivées partielles peuvent être représentés sous la forme générale suivante :

$$L(u; q; p; b; x) = 0 \quad (2.1)$$

où L est un ensemble d'opérateurs différentiels partiels, u un ensemble de variables d'état, q un ensemble de variables de contrôle, p un ensemble de paramètres du modèle, b un ensemble de conditions initiales et aux limites et x un ensemble de variables spatiales et/ou temporelles. Lorsque $(q; p; b)$ est donné, le problème de la

résolution des variables d'état u de (2.1) est appelé le problème direct. La forme générale de la solution du problème direct peut être représentée par :

$$u = M(q; p; b; x) \quad (2.2)$$

Diverses méthodes analytiques ont été développées pour résoudre le problème direct.

- Le problème inverse

Pour un modèle donné par (2.2), les valeurs observées des variables d'état, des emplacements et des instants d'observation, peuvent être exprimées par l'équation d'observation suivante :

$$u_{obs} = M(q; p; b; x_{obs}) + \varepsilon \quad (2.3)$$

où ε contient des erreurs d'observation et de modèle. Il est bien connu qu'un modèle utile doit être très soigneusement calibré avec toutes les observations disponibles, $\{u_{obs}\}$. Le problème de la calibration des modèles peut être considéré, dans un certain sens, comme le problème inverse des équations aux dérivées partielles.

Le problème inverse cherche les paramètres du modèle (q, p, b) lorsque les variables d'état (u) sont mesurées, alors que le problème direct prédit les variables d'état (u) lorsque les paramètres du modèle, (q, p, b) sont fournis. Dans leur sens initial, le problème direct trouve les "résultats" de "causes", tandis que le problème inverse trouve les "causes" sur la base des "résultats".

Dans les problèmes inverses, le concepteur spécifie la sortie souhaitée du système thermique en cours de conception ; dans la plupart des cas, il s'agit d'une répartition souhaitée de la température et du flux de chaleur sur une surface donnée. Le concepteur doit ensuite prévoir les entrées d'énergie nécessaires dans le système thermique qui produiront les distributions souhaitées sur la surface de conception.

La forme mathématique de la solution inverse correspond au même ensemble d'équations intégrales que celles trouvées pour le problème direct lorsqu'une condition aux frontières est définie pour chaque domaine. Cependant, lorsque le problème inverse est formulé, certaines des équations de l'ensemble prennent la forme d'équations intégrales de Fredholm du premier type, notoirement mal conditionnées ou posées (Hansen 1998). C'est-à-dire que sa solution (les paramètres identifiés) peut être non unique et/ou dépendre de manière discontinue

de données. Ceci est également dû au fait que les mêmes «résultats» peuvent être causés par différentes «causes».

Les problèmes inverses peuvent également être considérés dans un cadre statistique comme un problème d'estimation de paramètres. Avec différentes hypothèses sur la distribution de probabilité des erreurs d'observation, différents critères d'estimation des paramètres peuvent être dérivés. La méthode statistique fournit non seulement les paramètres estimés, mais également la fiabilité de l'estimation.

2.1.2. CLASSES DE PROBLEMES INVERSES

Les problèmes de transfert de chaleur inverse peuvent être classés dans les catégories suivantes : problèmes de conduction inverse, convection inverse, rayonnement inverse et changement de phase inverse (fusion ou solidification), ainsi que leurs combinaisons (Özisik & Orlande, 2000).

En adoptant une classification basée sur le type de caractéristiques causales à estimer, nous distinguons :

- les problèmes inverses de détermination de valeurs aux frontières,
- les problèmes inverses de détermination de valeurs initiales,
- les problèmes inverses de détermination des propriétés des matériaux,
- les problèmes inverses de détermination de sources

- **Problèmes inverses de détermination de la valeur aux frontières**

Dans ce type de problème inverse, sur une partie de la frontière du domaine, la valeur de la fonction inconnue n'est pas donnée. Par contre, dans certains points internes du domaine considéré, des résultats de mesures de température ou des valeurs prévues de température ou de flux de chaleur sont prescrits. Les valeurs mesurées ou anticipées sont appelées réponses internes. Ils peuvent être connus sur une ligne ou une surface à l'intérieur du domaine considéré ou dans un ensemble discret de points de celui-ci.

Dans le cas de problèmes stationnaires, un problème inverse pour l'équation de Laplace ou de Poisson doit être résolu. Si le champ de température dépend du temps,

alors la condition initiale et les mesures prises à l'intérieur du domaine constituent un point de départ.

- **Problèmes inverses de détermination de la valeur initiale**

Dans ce cas, la condition initiale n'est pas connue. Afin de trouver la distribution de température initiale, un champ de température dans l'ensemble du domaine considéré pour $t > 0$ fixe doit être connu.

- **Problèmes inverses de détermination des propriétés des matériaux**

La détermination des propriétés des matériaux constitue une large classe de problèmes de conduction thermique inverse. Les coefficients peuvent dépendre des coordonnées spatiales ou de la température. Parfois, la dépendance au temps est considérée. Outre la conductivité ou la chaleur spécifique, la diffusivité thermique est celle qui est le plus fréquemment déterminée. Lorsque la conductivité thermique dépend de la température, la substitution de Kirchhoff est utile (Ciałkowski et Grysa, 2010a). Également dans le cas de la détermination des propriétés des matériaux, certaines informations supplémentaires concernant la température et / ou le flux de chaleur dans le domaine doivent être connues, généralement les mesures de température prises aux points intérieurs (Onyango et al. 2008; Hożejowski et al. 2009). Cependant, les observations expérimentales des profils de température ou de flux de chaleur peuvent ne pas être disponibles à l'emplacement physique où elles sont nécessaires. Ce problème implique également la détermination des distributions de propriétés radiatives dans un matériau. Ces propriétés doivent souvent être obtenues à partir de mesures à distance.

- **Problèmes inverses de détermination de source**

Dans le cas de la détermination de la source, on peut identifier l'intensité de la source, son emplacement ou les deux. Les problèmes sont considérés aussi bien pour le régime établi qu'en régime de conduction thermique transitoire. Dans de nombreux cas, en tant que condition supplémentaire, les données de température sont données à des points choisis du domaine, généralement sous la forme de résultats de mesures.

- **Problèmes inverses de détermination de forme**

Dans de tels problèmes, contrairement aux autres types de problèmes inverses, l'emplacement et la forme de la limite du domaine du problème considéré sont inconnus. Pour compenser ce manque d'informations, davantage d'informations sont fournies sur la partie connue de la frontière. En particulier, les conditions aux limites sont sur-spécifiées pour la partie connue, et la partie inconnue de la frontière est déterminée par l'imposition d'une ou de plusieurs conditions aux limites spécifiques.

Les problèmes inverses de détermination de forme peuvent être divisés en deux classes.

Le premier peut être considéré comme un problème de conception, par ex. pour trouver une telle forme d'une partie de la limite de domaine, pour laquelle la température ou le flux de chaleur atteint les valeurs souhaitées. Les problèmes deviennent alors extrêmement difficiles, en particulier dans le cas où la frontière est munie de plusieurs connexions.

La deuxième classe est appelée problème de Stefan. Le problème de Stefan consiste à déterminer la répartition de la température dans un domaine et la position de l'interface mobile entre deux phases du corps lorsque la condition initiale, les conditions aux limites et les propriétés thermo physiques du corps sont connues. Le problème de Stefan inverse consiste à déterminer la condition initiale, les conditions aux limites et les propriétés thermo physiques du corps. L'absence d'une partie des données d'entrée est compensée par certaines informations supplémentaires.

Parmi les problèmes inverses, les problèmes géométriques inverses sont les plus difficiles à résoudre numériquement, car leur discrétisation conduit à un système d'équations non linéaires. Quelques exemples de tels problèmes sont présentés dans (Cheng et Chang, 2003; Dennis et al. 2009; Ren, 2007).

2.2. RAPPEL DES TYPES DE TRANSFERTS DE CHALEUR

La diversité des opérations thermiques industrielles est considérable : traitement thermique, cuisson, séchage... Ces opérations thermiques nécessitent une source de chaleur puis le transfert de cette chaleur vers l'objet à traiter.

La transmission de la chaleur peut s'effectuer par conduction, par convection, par rayonnement ou par combinaison de plusieurs modes.

Le transfert de chaleur est la transition de l'énergie thermique d'un élément chauffé vers un élément plus froid. Lorsqu'un objet ou un fluide se trouve à une température différente de celle de son environnement ou d'un autre objet, un transfert d'énergie thermique, également appelé transfert de chaleur ou échange de chaleur, se produit de manière à ce que le corps et l'environnement puissent atteindre l'équilibre thermique. Le transfert de chaleur se produit toujours d'un corps chaud à un corps froid, résultat de la deuxième loi de la thermodynamique. Lorsqu'il y a une différence de température entre les objets à proximité, le transfert de chaleur entre eux ne peut jamais être arrêté ; il ne peut être que ralenti. Le transfert classique d'énergie thermique ne se produit que par conduction, convection, rayonnement ou toute combinaison de ceux-ci. Le transfert de chaleur associé au changement de phase d'une substance (telle que la vapeur) peut être traité fondamentalement comme une variante du transfert de chaleur par convection. Dans chaque cas, la force motrice du transfert de chaleur est une différence de température.

La conduction est le transfert d'énergie thermique d'une région de température supérieure à une région de température inférieure via une communication moléculaire directe. La chaleur est transférée par conduction lorsque des atomes adjacents vibrent les uns contre les autres ou lorsque des électrons se déplacent d'atome en atome.

Le flux de chaleur est écrit en tant que quantité ayant une direction spécifiée ainsi qu'une magnitude spécifiée. La loi de Fourier résume cette expérience physique succinctement :

$$q = -k\nabla u \quad (2.4)$$

q Densité de flux, W/m^2

k Conductivité thermique, $W/m.K$

u Température en K

La « constante » k - la conductivité thermique - dépend également de la composition et de la température dans le cas le plus général. Cependant, étant donné

que la plupart des matériaux sont presque homogènes on ne retient de façon pratique que la dépendance vis-à-vis de la température et on écrit habituellement $k = k(u)$.

La conduction est plus importante dans les solides, où les atomes sont en contact étroit constant. Les figures 2.1 et 2.2 représentent graphiquement respectivement la conductivité thermique de différents métaux et de différents gaz en fonction de la température. On remarque que la conductivité thermique peut croître, décroître ou même être peu sensible vis-à-vis des variations de température. La faible conductivité des liquides (sauf les métaux liquides) et des gaz est dû au fait que les molécules sont généralement plus éloignées, ce qui réduit les risques de collision et de transmission d'énergie thermique.

L'équation de diffusion de la chaleur en trois dimensions s'écrit comme suit :

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot k \nabla u + \dot{q} = 0 \quad (2.5)$$

c Capacité calorifique, $J/kg.K$

ρ Masse volumique, kg/m^3

\dot{q} Puissance volumique, W/m^3

t Variable temporelle, s

Les métaux sont généralement les meilleurs conducteurs de l'énergie thermique. Cela est dû à la manière dont les métaux sont liés chimiquement : les liaisons métalliques (par opposition aux liaisons covalentes ou ioniques) ont des électrons en mouvement libre et forment une structure cristalline, ce qui facilite grandement le transfert d'énergie thermique. À mesure que la densité diminue, la conduction diminue. Par conséquent, les fluides (et en particulier les gaz) sont moins conducteurs. Pour quantifier la facilité avec laquelle un milieu particulier conduit la chaleur, on utilise la conductivité thermique, également appelée constante de conductivité ou coefficient de conduction, k .

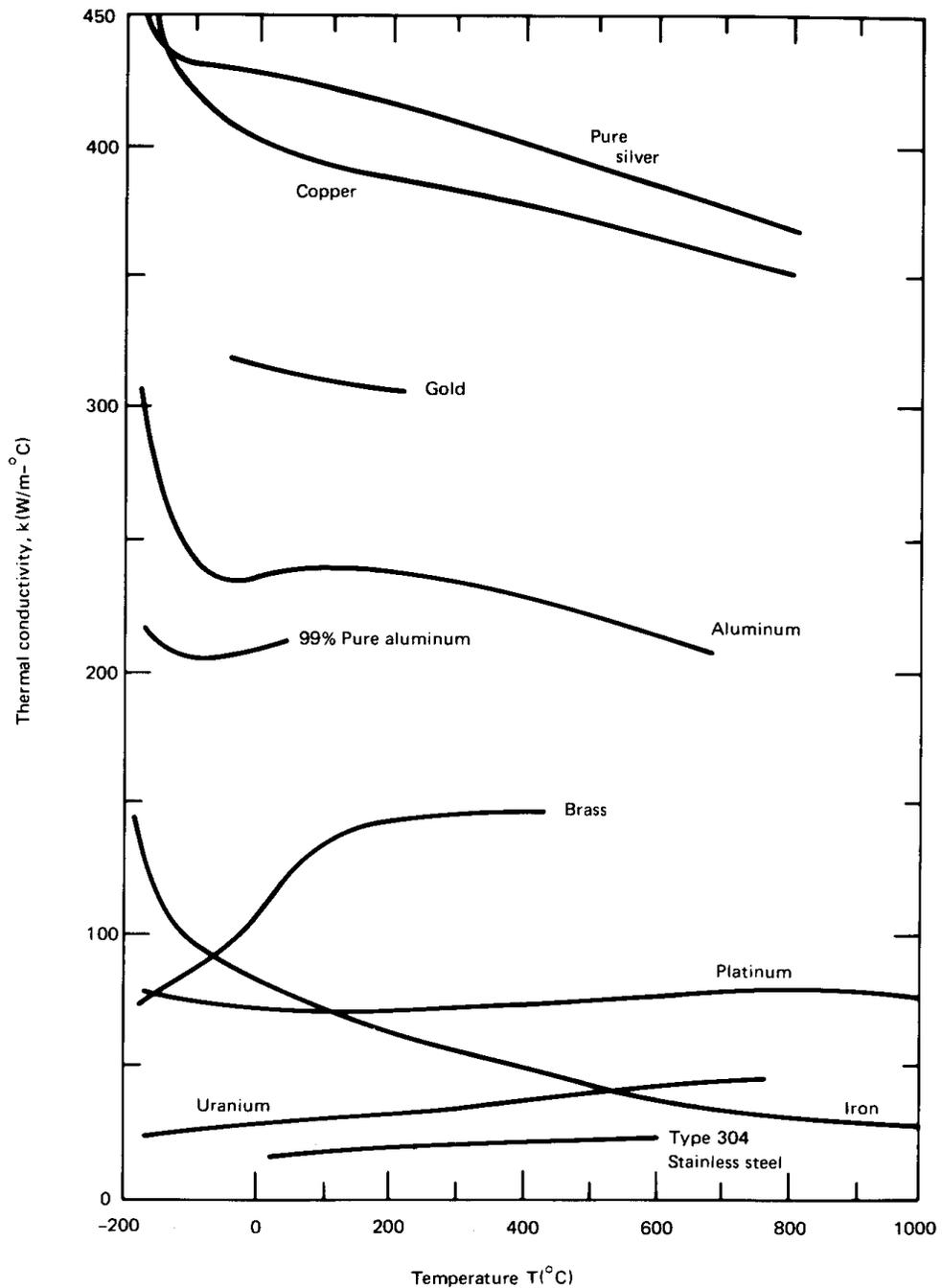


Figure 2.1 : Variation de la conductivité thermique des métaux solides avec la température (Lienhard IV and John H.Lienhar IV, 2000)

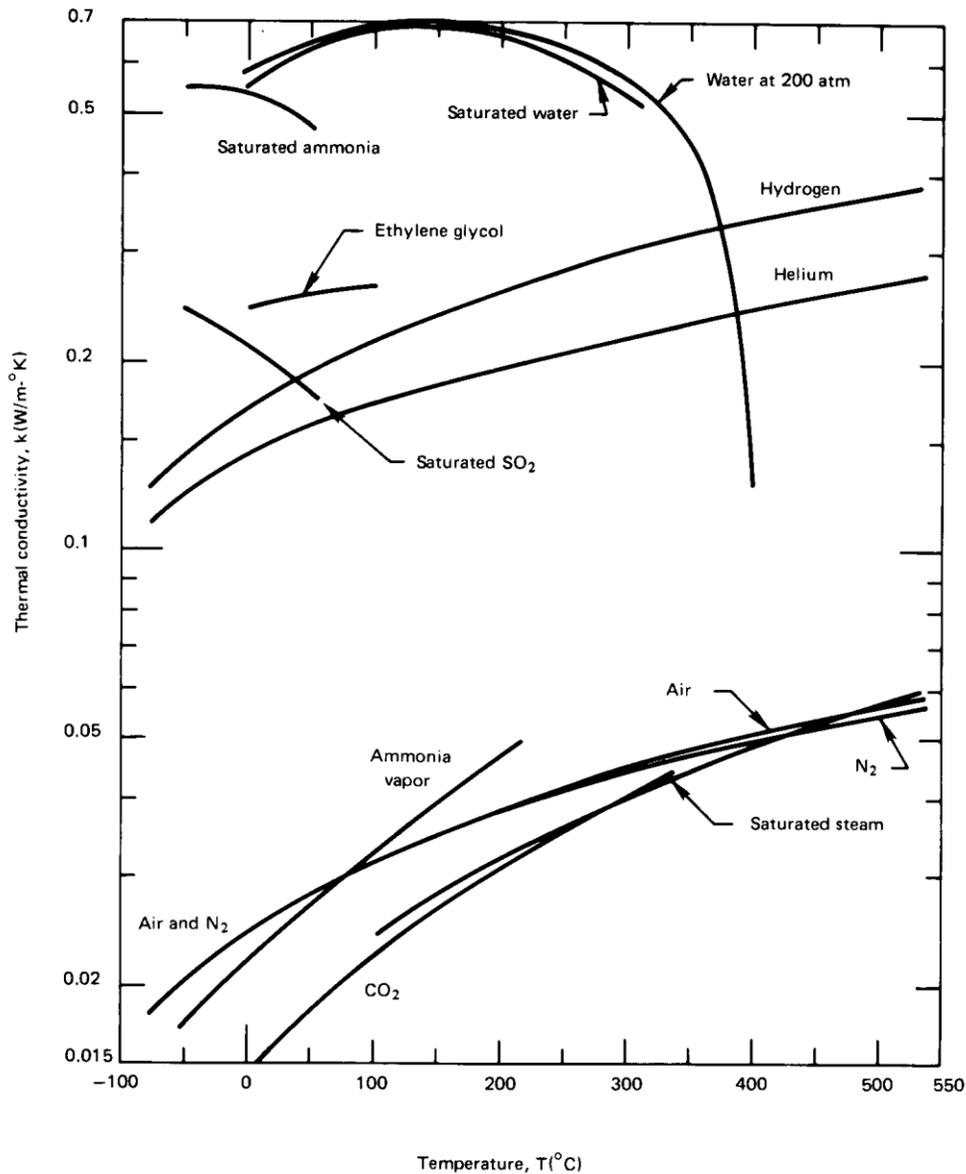


Figure 2.2 : Variation de la conductivité thermique des gaz avec la température (Lienhard IV and John H.Lienhar IV, 2000)

La convection caractérise la propagation de la chaleur dans une substance gazeuse ou liquide en mouvement. L'étude de la convection (naturelle or forcée) est liée à l'écoulement des fluides.

Le rayonnement thermique est l'un des trois principaux mécanismes de transfert de chaleur. Le rayonnement thermique est important dans de nombreuses applications techniques, en particulier à haute température.

Le transfert de chaleur par rayonnement thermique implique le transport d'énergie électromagnétique (EM) d'une source à un puits. Contrairement aux autres modes de transfert de chaleur, le rayonnement ne nécessite pas la présence d'un milieu intermédiaire. La plupart des applications industrielles importantes du transfert de chaleur par rayonnement se produisent dans la partie infrarouge proche du spectre électromagnétique (0,7 à 25 μm) et peuvent s'étendre dans la région infrarouge lointaine (25 à 1000 μm). Le rayonnement diffère de la conduction et de la convection non seulement en ce qui concerne la caractérisation mathématique, mais également en ce qui concerne dépendance de la température à la puissance quatre. Ainsi, il est généralement dominant dans les applications de combustion à haute température.

L'énergie rayonne d'un objet à un autre dans toutes les conditions et à tout moment. La source du rayonnement émis est une combinaison d'oscillations et de transitions électroniques et moléculaires dans le matériau émetteur, ainsi que de vibrations du réseau. Une fois l'énergie rayonnée, elle se propage sous la forme d'une onde électromagnétique, qu'il y ait du vide ou de la matière sur son parcours. Lorsque ces ondes atteignent un autre objet, elles perdent partiellement leur énergie et donnent lieu à des transitions électroniques ou moléculaires et / ou à des vibrations du réseau dans le corps récepteur. C'est ce qu'on appelle l'absorption, ce qui provoque l'augmentation du niveau d'énergie du deuxième objet. Les rayonnements émis et absorbés sont tous deux des fonctions des propriétés physiques et chimiques du matériau ainsi que de son niveau d'énergie (quantifié par sa température). L'interaction entre les corps émetteurs et les corps absorbants via des ondes électromagnétiques est l'essence même du transfert d'énergie radiative. Si les objets sont à des températures différentes, il y aura un transfert d'énergie net entre eux.

Un corps noir est un corps physique idéalisé qui absorbe tout rayonnement électromagnétique incident, indépendamment de la fréquence ou de l'angle d'incidence. Un corps noir en équilibre thermique (c'est-à-dire à température constante) émet un rayonnement électromagnétique appelé rayonnement du corps noir et en plus possède deux propriétés notables :

1. C'est un émetteur idéal : à chaque fréquence, il émet autant ou plus d'énergie radiative thermique que tout autre corps à la même température.
2. C'est un émetteur diffus : l'énergie est rayonnée de manière isotrope, indépendamment de la direction.

Le rayonnement du corps noir est émis conformément à la loi de Planck, ce qui signifie que son spectre est déterminé uniquement par la température (voir figure 2.3) et non par la forme ou la composition du corps.

Pour un corps noir, la densité spectrale $I_{\lambda b}$ est donnée par la distribution de Planck de l'intensité du rayonnement du corps noir :

$$I_{\lambda b} = \frac{2C_1}{n^2 \lambda^5 (e^{C_2/n\lambda T} - 1)} \quad (2.6)$$

Où T est la température absolue en K, n l'indice de réfraction du milieu, C_1 et C_2 des constantes avec comme valeurs :

$$C_1 = hc_0^2 = 0.59552 \cdot 10^8 W \mu m^4 / m^2 \quad (2.7)$$

$$C_2 = \frac{hc_0}{m} = 14.388 \mu m K \quad (2.8)$$

$$h = 6.626075 \cdot 10^{-34} J s \quad (2.9)$$

$$m = 1.380658 \cdot 10^{-23} J / K \quad (2.10)$$

$$c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8 m / s \quad (2.11)$$

Et n est l'indice de réfraction du milieu.

Pour déterminer puissance « quittant » une surface noire dans toutes les directions, $I_{\lambda b}$ est intégrée sur l'hémisphère sous l'angle solide $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ pour donner la puissance émissive spectrale d'un corps noir $e_{\lambda b}$:

$$e_{\lambda b} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_{\lambda b} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi C_1}{n^2 \lambda^5 (e^{C_2/n\lambda T} - 1)} = \pi I_{\lambda b} \quad (2.12)$$

Ensuite, en intégrant $e_{\lambda b}$ sur toutes les longueurs d'onde, on trouve l'énergie totale rayonnée par unité de surface et par unité de temps (en watts par mètre carré) d'un corps noir :

$$e_b = n^2 \sigma T^4 \quad (2.13)$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{2\pi^5 C_1}{15 C_2^4} = \frac{2\pi^5 m^4}{15 h^3 c_0^2} = 5,6705 \cdot 10^{-8} W / (m^2 K^4) \quad (2.14)$$

σ est appelé constante de Stephan-Boltzmann.

On définit l'émissivité spectrale directionnelle ε'_λ comme étant le rapport de la densité spectrale du corps à celui d'un corps noir

$$\varepsilon'_\lambda = \frac{I_\lambda}{I_{\lambda b}} \quad (2.15)$$

L'émissivité spectrale hémisphérique ε_λ se définit comme étant le rapport de la puissance émissive spectrale du corps à celui d'un corps noir.

$$\varepsilon_\lambda = \frac{e_\lambda}{e_{\lambda b}} \quad (2.16)$$

L'émissivité totale directionnelle ε' se définit comme suit :

$$\varepsilon' = \frac{\int I_\lambda d\lambda}{\int I_{\lambda b} d\lambda} \quad (2.17)$$

L'émissivité totale hémisphérique ε se définit comme suit :

$$\varepsilon = \frac{e}{e_b} = \frac{\int e_\lambda d\lambda}{\int e_{\lambda b} d\lambda} \quad (2.18)$$

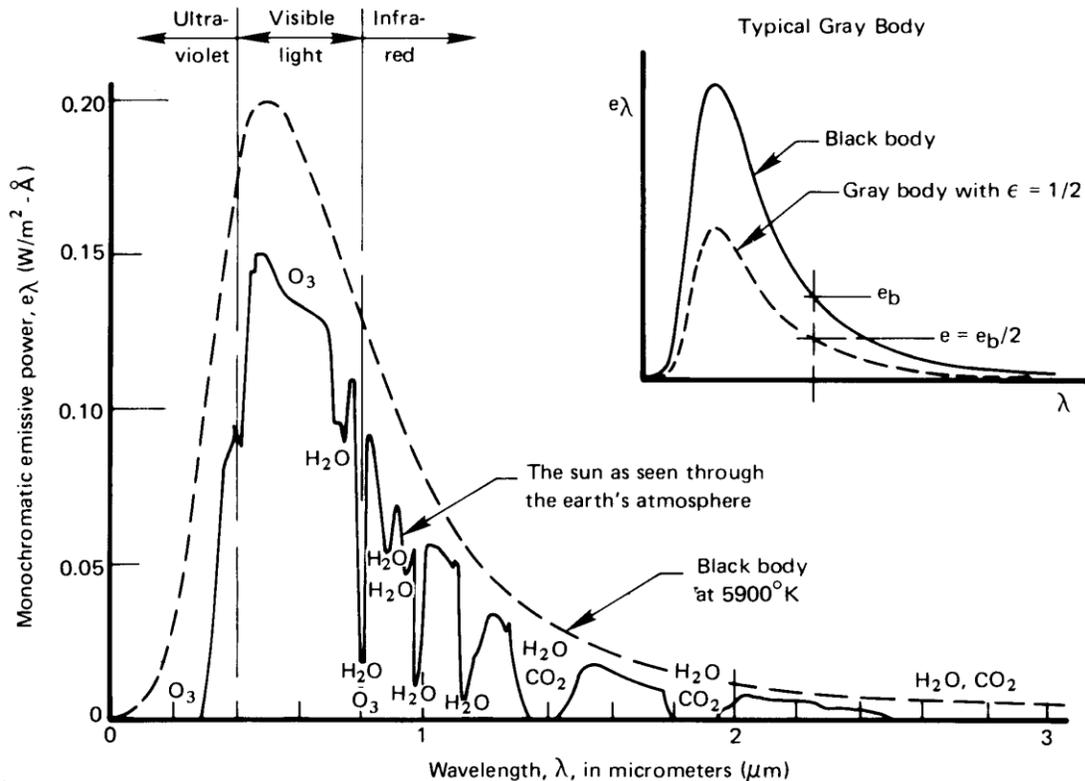


Figure 2.3 : variation de la puissance monochromatique en fonction de la longueur d'onde (Lienhard IV and John H.Lienhar IV, 2000)

Un type particulier de comportement de surface est celui pour lequel ε_λ est indépendant de λ . Nous appelons une telle surface un corps gris. La puissance émissive e_λ , pour un corps gris est une fraction constante, ε , de $e_{\lambda b}$ et en conséquence, on a $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$ comme indiqué dans l'encart de la figure 2.3. Aucun corps réel n'est gris, mais beaucoup présentent un comportement approximativement gris. Nous voyons sur la figure 2.3, par exemple, que le soleil nous apparaît sur terre comme un corps approximativement gris avec une émittance d'environ 0,6. Pourtant, l'émittance de la plupart des matériaux et revêtements courants (mais loin d'être tous) a tendance à diminuer avec la longueur d'onde dans la plage thermique.

On peut montrer que le rayonnement « quittant » une surface noire est indépendant de θ et φ c'est-à-dire que l'intensité émise par le corps noir est isotrope. Ce fait fournit un autre avantage commode pour comparer le comportement de surfaces réelles.

Le comportement d'un corps vis-à-vis du rayonnement thermique est caractérisé par sa transmission τ , son absorption α et sa réflexion ρ . Si les quantités d'énergie de rayonnement absorbées, réfléchies et transmises lorsque le rayonnement frappe une surface sont mesurées en pourcentage de l'énergie totale dans les ondes électromagnétiques incidentes, l'énergie totale sera divisée en trois groupes. Ils sont appelés absorptivité (α), réflectivité (ρ) et transmissivité (τ).

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (2.19)$$

Pour les corps opaques, l'équation (3.14) se réduit à :

$$\alpha + \rho = 1 \quad (2.20)$$

Un milieu semi-transparent est susceptible, non seulement de réfléchir à sa « surface » une fraction d'un rayonnement incident, mais aussi sur une distance appréciable, voire sur toute son épaisseur, d'absorber, de diffuser ou de transmettre l'autre fraction et simultanément d'émettre.

Le rapport entre le pouvoir rayonnant total d'une surface et celui d'une surface noire à la même température est appelé émittance ou émissivité, ε de la surface.

Selon la loi de Kirchhoff, l'émissivité et l'absorbance d'une surface exposée à sa propre température à la température ambiante sont les mêmes pour le

rayonnement monochromatique (spectral) et le rayonnement total. Lorsque les températures de la surface et de son environnement diffèrent, il est souvent constaté que l'émissivité et l'absorbance totales de la surface sont inégales ; les surfaces pour lesquels cette propriété reste encore vérifiée sont appelés « corps gris ». Et les surfaces pour lesquels cette propriété est encore vraie pour toute direction du rayonnement, s'appellent « surfaces gris, diffus ».

Considérons la figure 2.24 ci-dessous qui schématise un échange radiatif entre deux éléments de surfaces « noires » :

$$\text{Le flux total émis par la surface } S_1 \text{ est : } e_{b_1} = \sigma T_1^4 \quad (2.21)$$

$$\text{Ce flux correspond à une énergie totale } Q_{b_1} = \sigma T_1^4 S_1 \quad (2.22)$$

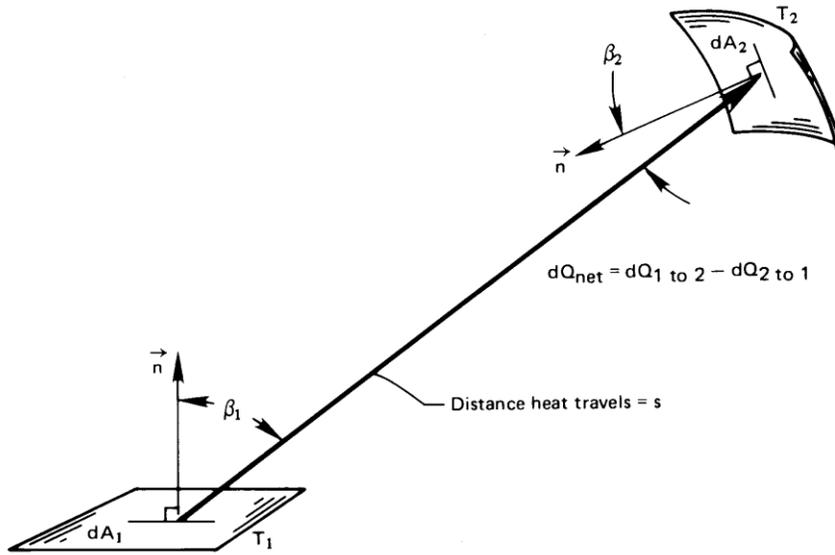


Figure 2.4 : échange radiatif entre deux éléments de surfaces « noires » (Lienhard IV and John H.Lienhard IV, 2000)

La puissance thermique élémentaire émise par l'élément de surface dS_1 et intercepté par l'élément de surface dS_2 a pour expression :

$$dQ_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma T_1^4 dS_1 dS_2 \cos(\beta_1) \cos(\beta_2)}{\pi d^2} \quad (2.23)$$

Symétriquement, la puissance thermique élémentaire émise par l'élément de surface dS_2 et intercepté par l'élément de surface dS_1 a pour expression :

$$dQ_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma T_2^4 dS_1 dS_2 \cos(\beta_1) \cos(\beta_2)}{\pi d^2} \quad (2.24)$$

Par intégration sur les surfaces S_1 et S_2 , les puissances thermiques échangées s'écrivent :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 dS_2 \cos(\beta_1) \cos(\beta_2)}{d^2} \quad (2.25)$$

$$Q_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma T_2^4}{\pi} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 dS_2 \cos(\beta_1) \cos(\beta_2)}{d^2} \quad (2.26)$$

Considérons un échange radiatif entre deux surfaces noires finies S_1 et S_2 séparées par un milieu transparent. Comme elles sont noires, les surfaces émettent de manière isotrope et absorbent totalement toute l'énergie radiante incidente. Il est souhaitable de calculer la fraction d'énergie radiante, par unité de puissance émissive E_1 quittant S_1 dans toutes les directions et qui est interceptée et absorbée par S_2 . La quantité en question est alors définie comme le facteur de forme et est notée $F_{1 \rightarrow 2}$.

On appelle facteur de forme de la surface S_2 vue de la surface S_1 la fraction de la puissance totale Q_{b_1} issue de S_1 qui atteint S_2 .

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{Q_{b_1}} = \frac{1}{A_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 dS_2 \cos(\beta_1) \cos(\beta_2)}{\pi d^2} \quad (2.27)$$

De même, on aura :

$$F_{2 \rightarrow 1} = \frac{Q_{2 \rightarrow 1}}{Q_{b_2}} = \frac{1}{A_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 dS_2 \cos(\beta_1) \cos(\beta_2)}{\pi d^2} \quad (2.28)$$

Le calcul d'un facteur de forme se ramène donc dans la plupart des cas au calcul d'une intégrale double. Néanmoins dans certains cas, en utilisant les propriétés déduites de la définition du facteur de forme on peut déterminer l'expression du facteur de forme sans procéder au calcul intégral.

Les quelques propriétés suivantes découlent de la définition des facteurs de forme :

1. Quelles que soient les surfaces S_1 et S_2

$$A_1 F_{1 \rightarrow 2} = A_2 F_{2 \rightarrow 1} \quad (2.29)$$

2. Lorsque tout rayonnement issu de la surface S_1 atteint la surface S_2 (influence totale) on obtient :

$$F_{1 \rightarrow 2} = 1 \quad (2.30)$$

3. Nous pouvons généraliser la propriété précédente :

Supposons maintenant que toute la surface i est confinée dans une enceinte subdivisée en n éléments à surface finie. Chacune des n zones de surface doit alors satisfaire certaines relations de conservation impliquant toutes les zones d'échange direct dans l'enceinte. Tout flux quittant la surface i est alors interceptée par au moins une surface j de l'enceinte. Dans ce cas, on a la formule suivante *pour toute surface i* :

$$\sum_{j=1}^{j=n} F_{i \rightarrow j} = 1 \quad (2.31)$$

2.3. LES OUTILS ET MÉTHODES D'ANALYSE

2.3.1. METHODES GENERALES DE RESOLUTION ET NOTION DE MAL CONDITIONNEMENT

Les différentes techniques permettant de résoudre les problèmes inverses peuvent être regroupées dans les trois grandes rubriques suivantes : régularisation, optimisation et métaheuristique. Vogel (2002) donne des techniques numériques pour la mise en œuvre de plusieurs de ces approches.

Les techniques de régularisation consistent à modifier légèrement les relations décrivant le système afin de réduire leur "mal conditionnement". Les techniques d'optimisation cherchent à optimiser un critère important choisi par le concepteur. Ça peut être la consommation énergétique, les pertes, le rendement etc. Très souvent une démarche itérative est adoptée. Quant aux métaheuristicques, elles sont une classe de techniques qui recherchent une solution optimale parmi un très vaste ensemble de solutions discrètes.

La solution aux problèmes de transfert de chaleur inverse peut être organisée selon les étapes fondamentales suivantes :

- Le problème direct
- Le problème inverse
- La procédure itérative
- Les critères d'arrêt
- L'algorithme de calcul

Pour formuler les problèmes inverses de détermination de paramètres de certains processus dynamiques, en utilisant la procédure des moindres carrés, on considère la situation classique suivante :

- La structure des équations du modèle est donnée.
- La variable vecteur paramètre à déterminer est notée P
- La variable de sortie est $\eta(P)$, qui est calculée en résolvant les équations du modèle (la variable en entrée est connue). Pour indiquer que la solution dépend du paramètre, la notation $\eta(P)$ sera utilisée.

La mesure en sortie est notée U_{mes} .

Pour les problèmes inverses, la fonction objective exprime généralement la différence au carré entre les variables mesurées et les variables estimées du système considéré. En conséquence, certains aspects statistiques concernant les paramètres inconnus et les erreurs mesurées doivent être examinés afin de sélectionner une fonction objective appropriée. Dans les modèles présentés ci-dessous, nous supposons que les mesures de température sont disponibles pour l'analyse inverse. Les huit hypothèses standard (Beck et Arnold, 1977) concernant la description statistique du problème sont les suivantes :

1. Les erreurs sont additives $U_{mes} = U + \epsilon$ où U_{mes} est la température mesurée, U la température réelle et ϵ l'erreur aléatoire.
2. Les erreurs ϵ_i sont de moyenne nulle $E(\epsilon_i) = 0$ ou E désigne l'opérateur "espérance mathématique".
3. Les erreurs ϵ_i ont une variance constante $\sigma_i^2 = E(\epsilon_i^2) = \sigma^2 = constante$
4. Les erreurs ne sont pas corrélées (tel est le cas si les erreurs ϵ_i et ϵ_j n'ont aucune relation entre elles),
5. Les erreurs ϵ_i ont une distribution normale (gaussienne).
6. Les seules variables contenant des erreurs aléatoires sont les températures mesurées.
7. Les temps de mesure, les positions de mesure, les dimensions du corps chauffé et toutes les autres quantités figurant dans la formulation du problème inverse sont toutes connues avec précision.

8. Il n'existe aucune information préalable concernant les quantités à estimer, qu'il s'agisse de paramètres ou de fonctions. Si de telles informations existent, elles peuvent être utilisées pour obtenir des estimations améliorées.

Si toutes ces huit hypothèses statistiques énoncées ci-dessus sont valides, la fonction objective S qui fournit les estimations de variance minimale est la norme des moindres carrés ordinaires (Beck et Arnold, 1977) (c'est-à-dire la somme des résidus au carré) définie comme suit :

$$S(P) = [U_{mes} - \eta(P)]^T [U_{mes} - \eta(P)] \quad (2.32)$$

où U_{mes} et $\eta(P)$ sont les vecteurs contenant respectivement les températures mesurées et estimées (ou des fonctions connues des températures), et l'exposant T indique la transposition du vecteur. Les températures estimées sont obtenues à partir de la solution du problème direct

$$\text{où } [U_{mes} - \eta(P)]^T = (U_{mes1} - \eta_1(P), U_{mes2} - \eta_2(P), \dots, U_{mesK} - \eta_K(P)) \quad (2.33)$$

et U_{mes} est la fonction mesurée pendant le processus de chauffage. Il peut s'agir par exemple de la moyenne, l'écart type etc.

$\eta(P)$ est la fonction calculée avec le problème direct (moyenne, l'écart type etc).

$$\text{Avec } P \text{ le vecteur de paramètres } P = (P_1, P_2, \dots, P_N) \quad (2.34)$$

$$\text{Et } \eta(P) = \begin{pmatrix} \eta_1(P) \\ \eta_2(P) \\ \vdots \\ \eta_K(P) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Le critère (2.32) utilisé pour résoudre le problème inverse est appelé *critère des moindres carrés ordinaires*.

Si les valeurs des écarts types des erreurs de mesures sont assez différentes, la méthode des moindres carrés ordinaires ne donne pas d'estimations de la variance minimale (Beck et Arnold, 1977). Dans un tel cas, la fonction objectif est donnée par le carré de la norme des moindres carrés pondérés, S_W , définie comme :

$$S_W(P) = [U_{mes} - \eta(P)]^T \cdot W \cdot [U_{mes} - \eta(P)] \quad (2.36)$$

où W est une matrice de pondération diagonale. Cette matrice est considérée comme l'inverse de la matrice de covariance des erreurs de mesure dans les cas où les autres hypothèses statistiques restent valables (Beck et Arnold, 1977).

Si nous considérons que certaines informations concernant les paramètres inconnus sont disponibles, nous pouvons utiliser la fonction objective définie dans la formule (2.37) suivante pour la procédure de minimisation (Beck et Arnold, 1977) :

$$S_W(P) = [U_{mes} - \eta(P)]^T \cdot W \cdot [U_{mes} - \eta(P)] + [\mu - P]^T \cdot V^{-1} \cdot [\mu - P] \quad (2.37)$$

où P est supposé être un vecteur aléatoire de moyenne connue μ et de matrice de covariance V . Par conséquent, la moyenne μ et la matrice de covariance V fournissent des informations a priori concernant le vecteur de paramètres P à estimer. Ces informations peuvent être disponibles à partir d'expériences antérieures avec le même appareil expérimental ou même à partir des données de la littérature. En supposant la validité des autres hypothèses statistiques décrites ci-dessus concernant les erreurs expérimentales, la matrice de pondération W est donnée par l'inverse de la matrice de covariance des erreurs de mesure (Beck et Arnold, 1977).

La formulation mathématique permettant de déterminer les paramètres inconnus à l'aide du critère des moindres carrés consiste à trouver la solution optimale, notée P^* , qui minimise le critère $S(P)$. Le critère des moindres carrés pondérés serait plus général mais aboutirait au même type de problème d'optimisation.

Si la fonction $P \mapsto \eta(P)$ est continument différentiable, il en sera de même aussi pour la fonction $P \mapsto S(P)$ et dans ce cas, les conditions nécessaires pour l'obtention d'un minimum sont les suivantes :

$$\nabla S(P) = 0 \quad (2.38)$$

En représentation matricielle, cette condition est équivalente à :

$$\nabla S(P) = 2 \left[-\frac{\partial \eta^T(P)}{\partial P} \right] \cdot [U_{mes} - \eta(P)] = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \eta^T(P)}{\partial P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \frac{\partial}{\partial P_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_N} \end{pmatrix} (\eta_1(P), \eta_2(P), \dots, \eta_K(P)) \quad (2.40)$$

Parfois, nous noterons simplement $J^T(P) = \nabla \eta^T(P) = \frac{\partial \eta^T(P)}{\partial P}$ comme représentant la matrice transposée de la jacobienne de η au point P . Ce qui fait que la condition (2.38 ou 2.39) devient :

$$\nabla S(P) = -2J^T(P) \cdot [U_{mes} - \eta(P)] = 0 \quad (2.41)$$

La matrice de sensibilité ou matrice jacobienne $J(P)$ est définie par :

$$J_{i,j}^k = \left(\frac{\partial \eta_i(P^k)}{\partial P_j} \right)_{i,j} \quad (2.42)$$

Sous forme explicite, $J(P)$ peut être écrit comme suit :

$$J(P) = \frac{\partial (\eta^T(P))^T}{\partial P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1(P)}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial \eta_1(P)}{\partial P_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \eta_K(P)}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial \eta_K(P)}{\partial P_N} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Où N est le nombre total de paramètres inconnus et K le nombre total de mesures ou de paramètres fixés.

Pour les problèmes inverses linéaires on a $\eta(P) = J \cdot P$ et J ne dépend pas de P . La condition (2.41) s'écrit alors :

$$-2J^T \cdot [U_{mes} - J \cdot P] = 0 \quad (2.44)$$

Cette équation peut être résolue de manière explicite pour déterminer le vecteur paramètres. On obtient ainsi :

$$P = (J^T J)^{-1} J^T U_{mes} \quad (2.45)$$

Pour les problèmes inverses non linéaires, il y a une dépendance de J par rapport à P et la solution de l'équation (2.41) nécessite alors une procédure itérative. Tout d'abord, il est effectué un développement en série de Taylor de $\eta(P)$ autour de la solution courante $P^{(k)}$ à l'itération k .

$$\eta(P) = \eta(P^{(k)}) + J^{(k)}(P - P^{(k)}) \quad (2.46)$$

Où $\eta(P^{(k)})$ et $J^{(k)}$ sont les estimations de $\eta(P)$ et J à l'itération k . Après substitution de $\eta(P)$ dans l'équation (2.41), on obtient :

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} + \left[(J^{(k)})^T J^{(k)} \right]^{-1} (J^{(k)})^T \cdot [U_{mes} - \eta(P^{(k)})] \quad (2.47)$$

Les problèmes pour lesquels $|J^T J| \approx 0$ sont appelés problèmes mal conditionnés. L'approche de Beck est la maximisation de $|J^T J|$ par un choix optimal de la localisation des capteurs pour l'estimation des paramètres inconnus.

Les techniques de régularisation les plus utilisées incluent la décomposition en valeurs singulières tronquées (DVST), la régularisation par gradient conjugué (RGC), la régularisation de Levenberg-Marquardt et la régularisation de Tikhonov (RT).

2.3.2. METHODES DE REGULARISATION

Les techniques de régularisation consistent à modifier les relations gouvernantes explicites afin de réduire leur «mal-conditionnement», en acceptant une perte de précision pour obtenir une solution utile.

2.3.2.1. La régularisation de Levenberg Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt consiste en une méthode itérative de résolution de problèmes d'estimation de paramètres par les moindres carrés non linéaires. L'idée principale est d'obtenir une méthode qui tendrait vers la méthode de Gauss au voisinage du minimum de la norme des moindres carrés ordinaires et tendrait vers la méthode de descente la plus raide au voisinage de la conjecture initiale utilisée pour la procédure itérative.

La solution des problèmes de transfert de chaleur inverse avec la méthode de Levenberg-Marquardt peut être arrangée de manière appropriée dans les étapes de base suivantes :

Généralement, la méthode de Levenberg-Marquardt repose sur la minimisation de la norme des moindres carrés ordinaires :

$$S(P) = [U_{mes} - \eta(P)]^T [U_{mes} - \eta(P)] \quad (2.48)$$

$$[U_{mes} - \eta(P)]^T = (U_{mes1} - \eta_1(P), U_{mes2} - \eta_2(P), \dots, U_{mesK} - \eta_K(P)) \quad (2.49)$$

Où U_{mes} est une fonction (scalaire ou bien vectorielle suivant le type de problème) de la température réelle mesurée pendant le processus de chauffage

Nous supposons que la fonction $P \mapsto \eta(P)$ est continument différentiable.

Rappelons que dans ce cas, nous aurons :

$$\nabla S(P) = -2J^T(P) \cdot [U_{mes} - \eta(P)] \quad (2.50)$$

Comme précédemment, nous obtenons :

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} + \left[(J^{(k)})^T J^{(k)} \right]^{-1} (J^{(k)})^T \cdot [U_{mes} - \eta(P^{(k)})] \quad (2.51)$$

Mais il est bien connu que ce genre de problèmes inverses est généralement mal conditionné du fait que $|J^T J| \approx 0$. La méthode de Levenberg-Marquardt résout donc cette difficulté au moyen d'une procédure itérative de la forme suivante :

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} + \left[(J^{(k)})^T J^{(k)} + \mu^{(k)} D^{(k)} \right]^{-1} (J^{(k)})^T \cdot [U_{mes} - \eta(P^{(k)})] \quad (2.52)$$

Avec $\mu^{(k)}$, un scalaire positif appelé paramètre d'amortissement. $D^{(k)}$ une matrice diagonale.

Le terme $\mu^{(k)} D^{(k)}$ est introduit pour amortir les oscillations et les instabilités dues au problème mal posé en rendant ses composantes grandes par rapport à celles de $(J^{(k)})^T J^{(k)}$ si nécessaire. Le paramètre d'amortissement $\mu^{(k)}$ est important au début des itérations car le problème est mal conditionné près de la conjecture initiale, puis il est réduit progressivement de sorte que la méthode de Levenberg-Marquardt tende vers la méthode de Gauss donnée par l'équation (2.51). On s'assure alors que la solution de la méthode de Levenberg-Marquardt tend vers celle de la méthode de Gauss, ce qui était l'objectif visé.

La procédure d'itération est la suivante :

- Choisir une estimation initiale de $P^{(0)}$ pour le vecteur P et une estimation initiale $\mu^{(0)}$ (par exemple, $\mu^{(0)} = 0,001$).
- Résoudre le problème direct avec l'estimation courant $P^{(k)}$ pour trouver $\eta(P^{(k)})$ et ensuite, calculer $S(P^{(k)})$.
- Calculer la matrice jacobienne $J^{(k)}$. Deux choix sont recommandés :

$$D^{(k)} = \text{diag} \left[(J^{(k)})^T J^{(k)} \right] \quad (2.53)$$

Ou bien

$$D^{(k)} = I \quad (I \text{ représentant la matrice unité}) \quad (2.54)$$

- Résoudre le système suivant :

$$\left[(J^{(k)})^T J^{(k)} + \mu^{(k)} D^{(k)} \right] \Delta P^{(k)} = (J^{(k)})^T \cdot [U_{mes} - \eta(P^{(k)})] \quad (2.55)$$

Et trouver $\Delta P^{(k)}$

- Calculer $P^{(k+1)} = P^{(k)} + \Delta P^{(k)}$ (2.56)
- Résoudre le problème direct avec la nouvelle estimation $P^{(k+1)}$ afin de trouver $\eta(P^{(k+1)})$, puis $S(P^{(k+1)})$ défini par l'équation (2.43).
- Si $S(P^{(k+1)}) \geq S(P^{(k)})$, remplacez $\mu^{(k)}$ par $10\mu^{(k)}$ et revenez à l'étape 4, sinon, acceptez la nouvelle estimation $P^{(k+1)}$ et remplacez $\mu^{(k)}$ par $0.1\mu^{(k)}$.
- Arrêter la procédure d'itération chaque fois que l'une des conditions suivantes est remplie :

$$\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| < \delta \quad (2.57)$$

Où δ représente un seuil de tolérance et $\| \cdot \|$ fait référence à la norme euclidienne.

La méthode de Levanberg-Marquard a été initialement conçue pour être appliquée aux problèmes d'estimation de paramètres non linéaires mais a également été appliquée avec succès à la solution de problèmes linéaires trop mal conditionnés pour permettre l'application d'algorithmes linéaires.

2.3.2.2. La régularisation de Tikhonov

Au lieu de chercher directement une solution à un problème mal posé c'est-à-dire à chercher une solution à $\min S(P)$, nous considérons le minimum d'une fonctionnelle qui modifie la norme des moindres carrés en ajoutant un terme :

$$S_\lambda(P) = \|U_{mes} - \eta(P)\|^2 + \lambda^2 \|P\|^2 \quad (2.58)$$

$\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne et λ est appelé paramètre de régularisation. Dans la régularisation de Tikhonov, λ est choisi petit. Plus précisément, il est choisi de telle sorte que la somme des carrés donnée par $\|U_{mes} - \eta(P)\|^2$ soit réduite au niveau anticipé, ce qui est appelé dans la littérature russe le principe de discordance (Alifanov, 1994; Alifanov et al., 1995 et Beck et al.1985, page 140). Dans le cas de la variance constante, des erreurs non corrélées, l'espérance de la somme des carrés est $n\sigma^2$. Le paramètre de Tikhonov λ^2 est alors choisi pour être à peu près égal à cette valeur.

Donc, comme la méthode du gradient conjugué, la régularisation de Tikhonov est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle. Dans cette méthode, la fonctionnelle est égale à la norme L^2 du vecteur résiduel plus une contrainte supplémentaire sur la forme de la solution.

Pour une dépendance linéaire de η vis-à-vis de P , c'est-à-dire $\eta(P) = AP$, la condition nécessaire de minimum de la fonction :

$$S(P) = \|U_{mes} - AP\|^2 + \lambda^2 \|P\|^2 \quad (2.59)$$

Conduit au système d'équation suivant :

$$A^T(AP - U_{mes}) + \lambda^2 P = 0$$

Et donc :
$$P = (A^T A + \lambda^2 I)^{-1} (A^T U_{mes}) \quad (2.60)$$

En utilisant l'expression DVS de la matrice A, on obtient :

$$\bar{P}_\lambda = \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{s_i^2 + \lambda^2} \mathbf{u}_i^T U_{mes} \mathbf{v}_i \quad (2.61)$$

Les s_i , sont les éléments diagonaux de la matrice S de la DVS tandis que les u_i et v_i sont les vecteurs colonnes respectifs des matrices U et V de la DVS.

$S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est ici une matrice diagonale dont les valeurs singulières satisfont :

$$S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n), s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq 0 \quad (2.62)$$

Les matrices $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ consistent en des vecteurs singuliers gauche et droit :

$$U = (u_1, \dots, u_n), V = (v_1, \dots, v_n) \quad (2.63)$$

Noter que U et V comportent tous les deux des vecteurs orthonormaux.

La détermination d'une valeur appropriée du paramètre de régularisation λ est cruciale et fait toujours l'objet de recherches intensives. Récemment, le critère de la courbe en L est fréquemment utilisé pour choisir un bon paramètre de régularisation (Hansen & O'Leary, 1993). Un paramètre de régularisation approprié λ est celui situé près du « coin » de la courbe en L (Hansen & O'Leary, 1993 ; Hansen, 2000). L'utilisation d'un petit paramètre de régularisation permet d'obtenir une solution précise en mettant l'accent sur la minimisation de la norme résiduelle, mais comme nous l'avons vu, la minimisation de la norme résiduelle s'accompagne généralement de solutions très fluctuantes. En revanche, l'utilisation d'un paramètre de régularisation volumineux permet d'obtenir une solution plus lisse.

Considérons maintenant une dépendance non linéaire de η vis-à-vis de P . Soit $S(P)$ la fonctionnelle suivante :

$$S(P) = \|U_{mes} - \eta(P)\|^2 \quad (2.64)$$

Un développement limité de la fonction η en $P = P^{(k)}$ donne :

$$\eta(P) = \eta(P^{(k)}) + \nabla\eta(P^{(k)})\Delta P^{(k)} + o[\Delta P^{(k)}] \quad (2.65)$$

$$\text{Soit } \eta(P) \approx \eta_k + \nabla\eta_k\Delta P^{(k)} \text{ avec } \eta_k = \eta(P^{(k)}) \text{ et } \Delta P^{(k)} = P^{(k+1)} - P^{(k)} \quad (2.66)$$

Avec $\Delta P^{(k)}$ comme paramètre à déterminer pour chaque k .

Par analogie au cas linéaire donné par (2.59), considérons donc la fonctionnelle suivante :

$$S_\lambda(\Delta P^{(k)}) = \|(U_{mes} - \eta_k) - \nabla\eta_k\Delta P^{(k)}\|^2 + \lambda^2\|\Delta P^{(k)}\|^2 \quad (2.67)$$

Cette fonctionnelle étant de la même forme que (2.59) en remplaçant P par $\Delta P^{(k)}$, A par $\nabla\eta_k$ et U_{mes} par $U_{mes} - \eta_k$, on peut donc appliquer les résultats du cas linéaire au cas non linéaire pour chaque itération k . L'arrêt de la procédure itérative intervient à l'atteinte du « principe de discordance ».

$$S(P^{(k)}) < \epsilon = \lambda \quad (2.68)$$

2.3.2.3. La décomposition en valeur singulière avec troncature

Le problème à résoudre est le suivant :

$$\text{Trouver } P = (P_1, P_2, \dots, P_K) \text{ tel que } AP = U_{mes} \quad (2.69)$$

Cette méthode est basée sur la modification de la DVS de A . Nous supposons que la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possède plus de lignes que de colonnes ($m \geq n$).

La DVS prend alors la forme suivante :

$$A = USV^T = \sum_{i=1}^n u_i s_i v_i^T \quad (2.70)$$

$S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est ici une matrice diagonale dont les valeurs singulières satisfont :

$$S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n), s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n \geq 0 \quad (2.71)$$

Les matrices $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ consistent en des vecteurs singuliers gauche et droit.

$U = (u_1, \dots, u_n)$, $V = (v_1, \dots, v_n)$. A noter que U et V ont les deux vecteurs orthonormaux.

Ainsi, le conditionnement de la matrice A s'écrit : $cond(A) = s_1/s_n$ (2.72)

La solution utilise la matrice pseudo-inverse qui est formée en filtrant ou en tronquant les petites valeurs singulières, réduisant ainsi le conditionnement de la matrice A . La solution à $AP = U_{mes}$ en utilisant les k plus grandes valeurs singulières devient :

$$P_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T U_{mes}}{s_i} v_i, k \leq rang(A) \quad (2.73)$$

Où k a une valeur inférieure ou égale au rang A (Hansen 2010).

2.3.3. METHODES D'OPTIMISATION

À l'instar de la conception conventionnelle par essais et erreurs, les techniques d'optimisation utilisent un processus itératif pour parvenir à la conception finale. Cependant, dans l'optimisation, la séquence de solution supposée est ajustée de manière systématique, et les performances d'une configuration particulière sont évaluées à chaque itération. S'il ne répond pas aux exigences de conception, la configuration est modifiée et vérifiée à nouveau. Ce processus est répété jusqu'à ce qu'une configuration de conception satisfaisante soit identifiée.

L'efficacité de ce processus et la qualité de la conception finale dépendent de l'amélioration des performances de la conception à chaque itération. Alors que la technique d'essai et d'erreur repose uniquement sur l'intuition et l'expérience du concepteur pour améliorer la conception, les techniques d'optimisation modifient systématiquement la configuration de la conception, en se basant sur des informations de sensibilité et des algorithmes numériques maximisant l'amélioration entre itérations successives. Par conséquent, les techniques d'optimisation requièrent beaucoup moins d'itérations que l'approche essai-erreur, et la solution finale est généralement proche de l'optimum.

Dans la méthodologie d'optimisation de la conception, le problème de conception est converti en un problème de minimisation à plusieurs variables en définissant d'abord une fonction objective, qui quantifie la «qualité» d'une conception donnée de telle sorte que le minimum corresponde à la conception souhaitée. Une

fonction objective naturelle pour les problèmes inverses d'identification de paramètres est donnée par (2.32).

2.3.3.1. Les méthodes de type gradient

Ces types de méthodes, appliqués aux problèmes de minimisation non linéaires, reposent généralement sur l'établissement d'une procédure itérative qui, après un certain nombre d'itérations, devrait converger vers le minimum de la fonction objective. La procédure itérative peut être écrite sous la forme générale suivante (Beck et Arnold, 1977; Alifanov, 1994; Alifanov et al, 1995; Jaluria, 1998; Stoecker, 1989; Belegundu et Chandrupatla, 1999; Fletcher, 2000; Bard, 1974; Dennis et Schnabel, 1983):

- Une estimation initiale $P^{(0)}$ est donnée, et
- Le vecteur $P^{(k)}$ est calculé par récurrence à partir de $P^{(0)}$ de la manière suivante:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} + \rho^{(k)} \omega^{(k)} \quad (2.74)$$

- Arrêter la procédure d'itération dès que la condition suivante est remplie :

$$\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| < \delta \quad (2.75)$$

Où P est le vecteur paramètre inconnu à trouver, $\rho^{(k)}$ est un scalaire positif et le vecteur $\omega^{(k)}$ est un vecteur à N composantes appelé direction de descente. Aussi bien $\rho^{(k)}$ et $\omega^{(k)}$ doivent être déterminés à chaque itération k . La modification $\rho^{(k)} \omega^{(k)}$ du paramètre est choisie de manière à diminuer la fonction $S(P)$.

Les méthodes itératives de calcul des valeurs du minimum de la fonction scalaire $S(P)$ basées sur le calcul des premières dérivées $\nabla_p S$, sont appelées méthodes à gradient. Nous reconduisons l'hypothèse fondamentale de la différentiabilité continue de la fonction $P \mapsto \eta(P)$ qui implique celle de $S(P)$. Une étape d'itération est acceptable si $S(P^{k+1}) < S(P^k)$. Selon Bard (1974), la direction de descente ω sera considérée acceptable si et seulement s'il existe une matrice définie positive R , telle que $\omega = -R \nabla_p S$ (2.76)

En fait, une telle exigence conduit à des directions de descente qui forment un angle supérieur à 90° avec la direction du gradient. Une méthode de minimisation dans laquelle les directions sont obtenues de cette manière s'appelle une méthode de gradient acceptable (Bard, 1974).

Un point stationnaire de la fonction objective est un point pour lequel $\nabla_p S = 0$. Tout ce que nous pouvons espérer d'une méthode de gradient est qu'elle converge vers un point stationnaire. La convergence vers le vrai minimum ne peut être garantie que s'il est possible de démontrer que la fonction objective n'a pas d'autres points stationnaires. Cependant, dans la pratique, on atteint généralement le minimum local dans la vallée où se trouvait l'estimation initiale de la procédure itérative (Bard, 1974). Soit $S(P)$ la fonction scalaire mesurant l'écart entre le vecteur « variable mesurée » U_{mes} et le vecteur « variable calculée » $\eta(P)$.

$$S(P) = [U_{mes} - \eta(P)]^T [U_{mes} - \eta(P)] \quad (2.77)$$

$$\text{où } [U_{mes} - \eta(P)]^T = (U_{mes1} - \eta_1(P), U_{mes2} - \eta_2(P), \dots, U_{mesK} - \eta_K(P)) \quad (2.78)$$

Différents choix sont disponibles pour déterminer $\rho^{(k)} \omega^{(k)}$, mais dans tous les cas, on s'attend à ce qu'on ait $S(P^{k+1}) - S(P^k) < 0$ à chaque iteration.

Il est commode de normaliser le vecteur $\omega^{(k)}$ en unité de longueur ($\|\omega^{(k)}\| = 1$) alors la longueur de descente dans le sens $\omega^{(k)}$ est égal au scalaire $\rho^{(k)} = \|P^{(k+1)} - P^{(k)}\|$. En utilisant une approximation linéaire de la fonction $S(P)$, l'itération devient :

$$S(P^{(k+1)}) - S(P^{(k)}) = \rho^{(k)} \langle \nabla S^{(k)}, \omega^{(k)} \rangle + \dots \quad (2.79)$$

En supposant que le scalaire $\rho^{(k)}$ soit positif, une condition nécessaire, appelée condition de descente, pour diminuer S est :

$$\langle \nabla S^{(k)}, \omega^{(k)} \rangle < 0. \quad (2.80)$$

Les directions données par le vecteur $\omega^{(k)}$ qui satisfont à cette condition sont appelées directions de descente.

2.3.3.2. L'algorithme du gradient à pas optimal (Steepest descent)

Clairement, la direction opposée à celle du gradient ($\omega^{(k)} = -\nabla S^{(k)}$) satisfait à la condition de descente ci-dessus et est localement la plus raide parmi tous les choix

possibles de directions de descente. Il est également connu sous le nom d'algorithme de la plus forte pente ou de la plus profonde descente.

Avec la direction de descente $\omega^{(k)}$ fixée, le scalaire $\rho^{(k)}$ doit être déterminé.

Considérons la fonction à une variable unique $\varphi(r)$ définie par :

$$\varphi(r) = S(P^{(k)} + r \omega^{(k)}) \quad (2.81)$$

La fonction $\varphi(r)$ est modifiée à chaque itération, mais l'indice k est omis pour des raisons de simplicité. Toute valeur positive $\rho^{(k)}$ qui diminue $S(P^{(k)})$ est acceptable.

Le meilleur choix local consiste à prendre la valeur de r qui minimise $\varphi(r)$.

$$\rho^{(k)} = \arg \min_{r>0} \varphi(r) \quad (2.82)$$

Explicitons $\varphi(r)$. On obtient :

$$\varphi(r) = S(P^{(k)} + r \omega^{(k)}) = \|U_{mes} - \eta(P^{(k)} - r \nabla S^{(k)})\|^2 \quad (2.83)$$

Considérant la linéarisation du terme $\eta(P^{(k)} - r \nabla S^{(k)})$, on obtient l'approximation suivante :

$$\eta(P^{(k)} - r \nabla S^{(k)}) = \eta(P^{(k)}) - r [\nabla \eta^T(P^{(k)})] \cdot \nabla S^{(k)} \quad (2.84)$$

Introduisant cette approximation de $\eta(P^{(k)} - r \nabla S^{(k)})$ dans l'expression de $\varphi(r)$ et en développant la forme quadratique, on obtient successivement après dérivation par rapport à r :

$$\varphi'(r) = -2[U_{mes} - \eta(P^{(k)}) + r [\nabla \eta^T]^{(k)} \cdot \nabla S^{(k)}] [\nabla \eta^T]^{(k)} \nabla S^{(k)} \quad (2.85)$$

Dans cette dernière formule, nous avons noté pour raisons de simplifications:

$$\nabla \eta^T(P^{(k)}) = [\nabla \eta^T]^{(k)} \quad (2.86)$$

Donc $\varphi'(r) = 0$ entraîne :

$$[U_{mes} - \eta(P^{(k)})] [\nabla \eta^T]^{(k)} \nabla S^{(k)} = r \|[\nabla \eta^T]^{(k)} \nabla S^{(k)}\|^2 \quad (2.87)$$

La racine de l'équation $\varphi'(r) = 0$ détermine ainsi la valeur optimale (positive) de la longueur de la descente.

$$\rho^{(k)} = - \frac{[U_{mes} - \eta(P^{(k)})] [\nabla \eta^T]^{(k)} \nabla S^{(k)}}{\|[\nabla \eta^T]^{(k)} \nabla S^{(k)}\|^2} \quad (2.88)$$

Or
$$\nabla S^{(k)} = -2 [\nabla \eta^T]^{(k)} * [U_{mes} - \eta(P)] \quad (2.89)$$

$$\rho^{(k)} = \frac{\|\nabla S^{(k)}\|^2}{2 \|[\nabla \eta^T]^{(k)} \nabla S^{(k)}\|^2} \quad (2.90)$$

En conclusion, la méthode de descente la plus raide pour minimiser $S(P)$ est basée sur l'algorithme itératif comprenant les quatre étapes de base suivantes :

- Pour un $P^{(k)}$ donné, calculer le gradient $\nabla S^{(k)}$ et direction de descente $\omega^{(k)} = -\nabla S^{(k)}$.
- Calculer la longueur de descente $\rho^{(k)}$ en résolvant l'équation scalaire.

$$\frac{dS}{dr}(P^{(k)} + r \omega^{(k)}) \Big|_{r=\rho^{(k)}} = 0, \text{ soit } \rho^{(k)} = \frac{\|\nabla S^{(k)}\|^2}{2\|[\nabla \eta^T]^{(k)} \nabla S^{(k)}\|^2} \quad (2.91)$$

- Calcul du nouvel estimé,

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} + \rho^{(k)} \omega^{(k)} \quad (2.92)$$

La direction de descente est donnée par le gradient de $S^{(k)}$:

$$\omega^{(k)} = -\nabla S^{(k)} = 2\nabla \eta^T(P^{(k)}) \cdot (U_{mes} - \eta(P^{(k)})) \quad (2.93)$$

- Arrêter la procédure d'itération dès que la condition suivante est remplie :

$$\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| < \delta \quad (2.94)$$

2.3.3.3. Les méthodes de newton et quasi newton

L'une des méthodes d'optimisation les plus courantes est la méthode quasi-Newton, appartenant à la classe de méthodes déterministes.

Nous étudierons d'abord la méthode de Newton.

Soit $S \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

Considérons le problème :

$$\text{Trouver } P \text{ tel que } S(P) = \inf[S(y), y \in \mathbb{R}^N] \quad (2.95)$$

Comme il n'y a aucune contrainte et que $P \in \mathbb{R}^N$ le problème (2.91) entraîne que

$$\nabla S(P) = 0 \quad (2.96)$$

Si de plus S est convexe alors on a :

$$\nabla S(P) = 0 \Rightarrow S(P) = \inf[f(y), y \in \mathbb{R}^N]. \quad (2.97)$$

Dans ce cas d'équivalence, on peut employer la méthode de Newton pour minimiser S en appliquant l'algorithme de Newton pour chercher un zéro de ∇S .

On a $D(\nabla S) = H$ où H est la matrice hessienne de S en P .

La méthode de Newton s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} \text{Initialisation } P^{(0)} \in \mathbb{R}^N, \\ \text{Itération } k: H_k * (P^{(k)} - P^{(k-1)}) = -\nabla S(P^{(k)}) \end{cases} \quad (2.98)$$

Avec
$$H_k = H(P^{(k)}) \quad (2.99)$$

Arrêter la procédure d'itération dès que la condition suivante est remplie :

$$\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| < \delta \quad (2.100)$$

La convergence de la méthode de Newton est excellente (convergence localement quadratique) mais nécessite le calcul de H_n (et de $\nabla S(P_n)$) qui peut s'avérer impossible ou trop coûteux.

La méthode quasi-Newton évite le calcul de la matrice hessienne. L'idée est de remplacer la matrice H par une matrice judicieusement choisie. De nombreuses variantes existent, qu'on ne développe pas ici. Citons en particulier l'algorithme de Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno dit « BFGS ».

2.3.3.4. La régularisation par gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué améliore le taux de convergence de la méthode de descente la plus raide en choisissant pour chaque itération une direction de descente qui est une combinaison linéaire de la direction du gradient avec la direction de descente de l'itération précédente. Nous reconduisons l'hypothèse fondamentale de la différentiabilité continue de la fonction $P \mapsto \eta(P)$.

Généralement, la méthode du gradient conjugué est basée sur la minimisation de la norme ordinaire des moindres carrés suivante:

$$S(P) = [U_{mes} - \eta(P)]^T [U_{mes} - \eta(P)] \quad (2.101)$$

Avec:

$$[U_{mes} - \eta(P)]^T = (U_{mes1} - \eta_1(P), U_{mes2} - \eta_2(P), \dots, U_{mesK} - \eta_K(P)) \quad (2.102)$$

Où U_{mes} est la fonction mesurée pendant le processus de chauffage. Il peut s'agir par exemple de la température, la moyenne ou l'écart type de la distribution des températures, ou bien d'autres fonctions de la température ou du flux de chaleur.

La procédure itérative de la méthode du gradient de conjugué pour la minimisation de la norme $S(P)$ ci-dessus est donnée par :

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \rho^{(k)} d^{(k)} \quad (2.103)$$

Où $\rho^{(k)}$ est la taille du pas de recherche, d^k la direction de descente et l'indice k est le nombre d'itérations. Il est obtenu en minimisant $\varphi(r) = S(P^{(k+1)}) = S(P^{(k)} - r d^{(k)})$.

La direction de descente courante $d^{(k)}$ est une conjugaison de la direction du gradient $\nabla S(P^k)$ et de la direction de descente de l'itération précédente $d^{(k-1)}$.

$$\text{Il est donné par : } d^{(k)} = \nabla S(P^{(k)}) + \gamma^{(k)} d^{(k-1)} \quad (2.104)$$

Pour le coefficient de conjugaison, nous avons l'expression Polak-Ribière :

$$\gamma^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{(k)})]_j \cdot [\nabla S(P^{(k)}) - \nabla S(P^{(k-1)})]_j}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{(k-1)})]_j^2} \quad (2.105)$$

Ou bien l'expression Fletcher-Reeves :

$$\gamma^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{(k)})]_j^2}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{(k-1)})]_j^2} \quad (2.106)$$

Où $[\nabla S(P^{(k)})]_j$ est la jème composante de la direction du gradient évaluée à l'itération k . L'expression de la direction du gradient est obtenue en différenciant la fonction $S(P)$ par rapport à P .

$$\nabla S(P^{(k)}) = -2 \frac{\partial \eta^T(P)}{\partial P} \cdot [U_{mes} - \eta(P^{(k)})] \quad (2.107)$$

Soit $J^{(k)}$ la matrice jacobienne définie par:

$$J^{(k)} = \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial P_j} (P^{(k)}) \right)_{i,j} \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial (\eta(P))^T}{\partial P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \frac{\partial}{\partial P_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_N} \end{pmatrix} [\eta_1(P), \eta_2(P), \dots, \eta_K(P)] \quad (2.109)$$

Calcul de $\nabla S^{(k)}$:

Le gradient de S à $P = P^{(k)}$ est donné par l'expression :

$$\nabla S^{(k)} = -2 \nabla \eta^T(P^{(k)}) \cdot (U_{mes} - \eta(P^{(k)})) \quad (2.110)$$

Calcul de $\rho^{(k)}$:

Soit

$$\varphi(r) = S(P^{(k)} - rd^{(k)}) = \|U_{mes} - \eta(P^{(k)} - rd^{(k)})\|^2 \quad (2.111)$$

La fonction $\varphi(r)$ est modifiée à chaque itération, mais l'indice k est omis pour des raisons de simplicité. Toute valeur positive $\rho^{(k)}$ qui diminue $S(P^{(k)})$ est acceptable. Le meilleur choix local consiste à prendre la valeur de r qui minimise $\varphi(r)$.

$$\rho^{(k)} = \arg \min_{r>0} \varphi(r) \quad (2.112)$$

En utilisant la même démarche que pour l'obtention de la formule (2.85), on obtient :

$$\varphi'(r) = -2[U_{mes} - \eta(P^{(k)}) + r[\nabla\eta^T]^{(k)} \cdot d^{(k)}][\nabla\eta^T]^{(k)} d^{(k)} \quad (2.113)$$

N.B: Pour des raisons de simplicité, nous avons noté $\nabla\eta^T(P^{(k)}) = [\nabla\eta^T]^{(k)}$.

$$\varphi'(r) = 0 \text{ donne } [U_{mes} - \eta(P^{(k)})][\nabla\eta^T]^{(k)} d^{(k)} = r\|[\nabla\eta^T]^{(k)} d^{(k)}\|^2 \quad (2.114)$$

La racine de l'équation $\varphi'(r) = 0$ détermine ainsi la valeur optimale (positive) de la longueur de la descente.

On obtient finalement :

$$\rho^{(k)} = \frac{[U_{mes} - \eta(P^{(k)})][\nabla\eta^T]^{(k)} d^{(k)}}{\|[\nabla\eta^T]^{(k)} d^{(k)}\|^2} \quad (2.115)$$

Les principales étapes de la méthode du gradient conjugué sont résumées dans l'algorithme ci-dessous :

- Choisir un vecteur paramètre $P^{(0)}$ comme estimation initiale de la solution et $\gamma^{(0)} = 0$.
- Pour un $P^{(k)}$ donné, calculez $\eta(P^{(k)})$, le gradient $\nabla S(P^{(k)})$, $\gamma^{(k)}$ et la direction de descente : $d^{(k)} = \nabla S(P^{(k)}) + \gamma^{(k)} d^{(k-1)}$ (2.116)
- Calculer la longueur de la descente $\rho^{(k)}$ avec l'équation (2.115).
- Calcul du nouvel estimé,

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \rho^{(k)} d^{(k)} \quad (2.117)$$

- Arrêter la procédure d'itération dès que la condition suivante est remplie :

$$\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| < \delta \quad (2.118)$$

La méthode du gradient conjugué peut devenir bien posée si le « principe de discordance » est utilisé pour arrêter la procédure itérative (Alifanov, 1994). Cette exigence est satisfaite chaque fois que

$$S(P^{(k)}) < \delta \quad (2.119)$$

Pour les problèmes inverses, chaque étape de minimisation correspond à une solution unique ayant des caractéristiques distinctes de précision et de lissage. Les faibles besoins en mémoire, l'économie de calcul, les caractéristiques de convergence robustes et la capacité de stocker et d'utiliser la matrice d'origine font souvent de la RGC la méthode de choix pour la régularisation de grands systèmes d'équations (Beckman 1960).

Lorsque la dérivée $\varphi'(r)$ est disponible, on épargne du temps calcul si la racine de l'équation algébrique $\varphi'(r) = 0$ est connue. Sinon, et plus généralement, toute méthode de recherche à une seule variable permettant de localiser le point optimal peut être utilisée (réduction de moitié des intervalles, recherche du nombre d'or, Newton-Raphson, etc.).

2.3.3.5. La méthode du gradient conjugué avec problème adjoint

Cette technique est particulièrement adaptée aux problèmes impliquant l'estimation des coefficients des fonctions utilisés pour se rapprocher d'une forme fonctionnelle inconnue.

Pour plus de commodité lors de l'analyse ultérieure, nous considérons que les données doivent être continues plutôt que discrètes. Ainsi, la norme des moindres carrés ordinaires, l'équation, est réécrite comme.

$$S(P) = \|U_{mes} - \eta(P)\|^2 \quad (2.120)$$

où U_{mes} est la sortie mesurée et $\eta(P)$ est la sortie estimée, fonction connue de la température. Les étapes de base pour la résolution des problèmes d'estimation de paramètres, en utilisant la méthode du gradient conjugué avec le problème adjoint, sont les suivantes :

- Le problème direct
- Le problème inverse

- Le problème de sensibilité
- Le problème adjoint
- L'équation du gradient
- La procédure itérative
- Le critère d'arrêt
- L'algorithme de calcul

Pour plus de détails sur l'implémentation numérique de cette méthode, se référer à Ozisik et al. (2000) et Jarny et al. (1991).

2.3.3.6. Choix d'une méthode d'optimisation

Les informations de base pour le choix d'une méthode d'optimisation sont les suivantes :

- Hypothèses sur f (différentiabilité, convexité...),
- hypothèses sur le domaine de recherche (continu, discret...),
- Existence ou non de contraintes, quels types de contraintes,
- Coût d'évaluation de la fonction (temps CPU, nombre de sous programmes nécessaire),
- Facilité de l'évaluation (accès, formule explicite de f),
- Précision dont on dispose sur les calculs,
- Type de matériel utilisé,
- Temps dont on dispose pour résoudre le problème.

Pour choisir la méthode la plus adaptée à un problème bien précis, les caractéristiques principales prises en compte sont :

- La capacité à éviter les minima locaux.
- La robustesse d'un optimum. Un optimum robuste est une solution peu sensible aux incertitudes.
- La capacité à traiter des problèmes mono ou multi - objectif
- La rapidité de convergence.

2.3.4. APPROCHES HEURISTIQUES

L'optimisation métaheuristique consiste en une famille de méthodes stochastiques qui visent la résolution des problèmes d'optimisation. Ces méthodes reconnues depuis de nombreuses années pour leur efficacité sont une alternative à l'optimisation classique ou à la régularisation des problèmes de conception de transfert de chaleur dominés par les radiations. Elles constituent une alternative crédible quand la conception exige une optimisation dans un ensemble de variables discrètes ou bien quand les méthodes de type gradient et de régularisation sont inadaptées. Elles exploitent généralement des processus aléatoires dans l'exploration de l'espace de recherche pour faire face à l'explosion combinatoire engendrée par l'utilisation de méthodes exactes. Leur particularité réside dans le fait qu'elles sont adaptables à un grand nombre de problèmes sans changements majeurs dans leurs algorithmes, d'où le qualificatif "méta". L'un des avantages de celles-ci est leur capacité à optimiser un problème à partir d'un nombre minimal d'informations, cependant elles n'offrent aucune garantie quant à l'optimalité de la meilleure solution trouvée. Seule une approximation de l'optimum global est donnée. Cependant, lorsque toutes les variables de conception sont continues, les méthodes de régularisation et d'optimisation classique sont préférées en raison du nombre réduit d'itérations nécessaires.

Les métaheuristiques sont des méthodes qui ont un comportement itératif, c'est-à-dire que le même schéma est reproduit un certain nombre de fois au cours de l'optimisation, et elles sont directes, dans le sens où elles ne font pas appel au calcul du gradient de la fonction. Les méthodes les plus courantes sont le recuit simulé, la recherche tabou, les algorithmes de colonies de fourmis ou encore l'optimisation par essaim particulaire.

2.3.4.1. Les algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont des méthodes heuristiques d'optimisation globale basées sur le processus de sélection naturelle. En partant de conceptions de populations générées de manière aléatoire, l'optimiseur cherche à produire des conceptions améliorées d'une génération à l'autre. Ceci est accompli en échangeant

des informations génétiques entre les conceptions de la population actuelle, dans le cadre de l'opération dite de croisement. L'algorithme génétique de base fonctionne avec une collection ou une population de solutions potentielles au problème de minimisation. L'algorithme fonctionne de manière itérative. À chaque itération, également appelée génération, trois opérateurs sont appliqués à l'ensemble de la population de conceptions. Ces opérateurs sont la sélection, le croisement et la mutation. Pour que les opérateurs soient efficaces, chaque solution ou conception potentielle doit être représentée par un ensemble de paramètres finis, également appelés gènes.

Un ensemble de solutions initiales distribuées de manière aléatoire est généré et un sous-ensemble de celles-ci est sélectionné à l'aide de divers processus (sélection, croisement et mutation) afin de générer un nouvel ensemble de solutions. Les nouveaux ensembles de solutions sont comparés pour déterminer celle qui approche le mieux le minimum de la fonction objective qui repose sur les critères de conception. Les ensembles de solutions les mieux adaptés sont à comparer, et ce processus est poursuivi jusqu'à ce qu'une solution satisfaisant aux critères de conception soit atteinte.

Pour plus de détails ou pour la mise en œuvre numérique d'algorithmes génétiques, se référer à (Goldberg, 1989; Deb, 2002).

2.3.4.2. La méthode d'évolution différentielle

La méthode d'évolution différentielle est une méthode évolutive basée sur la théorie de Darwin sur l'évolution des espèces. Il a été créé en 1995 par deux chercheurs de Berkeley (Storn et Price, 1997) en guise d'alternative à la méthode de l'algorithme génétique. Suivant la théorie de l'évolution des espèces, les membres les plus puissants d'une population seront plus capables de survivre dans certaines conditions environnementales. Au cours du processus de matage, les chromosomes de deux individus de la population sont combinés dans un processus appelé croisement. Au cours de ce processus, des mutations peuvent se produire, qui peuvent être bonnes (individu avec une meilleure fonction objective) ou mauvaises (individu avec une pire fonction objective). Les mutations sont utilisées pour échapper aux minima locaux.

Cependant, leur utilisation excessive peut entraîner une non-convergence de la méthode.

La méthode commence par une population générée aléatoirement dans le domaine d'intérêt. Ensuite, des combinaisons successives de chromosomes et de mutations sont effectuées, créant de nouvelles générations jusqu'à ce qu'une valeur optimale soit trouvée.

2.3.4.3. Les Méthodes hybrides

Les méthodes déterministes sont en général plus rapides en calcul que les méthodes stochastiques, bien qu'elles puissent converger vers un ou des minima locaux, au lieu du global. D'autre part, les algorithmes stochastiques peuvent idéalement converger vers des maxima ou minima globaux, même s'ils sont plus lents en calcul que les algorithmes déterministes. En effet, les algorithmes stochastiques peuvent nécessiter des milliers d'évaluations de la fonction objective et, dans certains cas, devenir non pratiques. Afin de surmonter ces difficultés, les algorithmes dits hybrides tirent parti de la robustesse des méthodes stochastiques et de la convergence rapide des méthodes déterministes. Ils sont une combinaison de méthodes déterministes et évolutionnistes / stochastiques, dans le sens où les avantages de chacune d'elles sont utilisés. Les méthodes hybrides utilisent généralement une méthode évolutive / stochastique pour localiser la région où se trouve le minimum global, puis passent à une méthode déterministe pour se rapprocher plus rapidement du point exact.

Des méthodes hybrides plus complexes, traitant de l'application d'autres méthodes déterministes et stochastiques, figurent dans les références (Colaço et al, 2003a; Colaço et al, 2004; Colaço et al, 2003b; Dulikravich et al, 2003a; Dulikravich et al, 2003b; Dulikravich et al, 2003c; Dulikravich et al, 2004; Colaço et al, 2003c).

2.3.5. MÉTHODES UTILISABLES EN CONTROLE

Position du problème : on suppose G continument différentiable au voisinage de \bar{P} .

$$\text{Trouver } \bar{P} \in \mathbb{R}^N \text{ tels que } G(\bar{P}) = 0 \quad (2.121)$$

$$\text{avec } \bar{P} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_N) \quad (2.122)$$

On cherche une méthode de construction d'une suite $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$ qui converge vers \bar{P} c'est-à-dire une approximation de \bar{P} .

2.3.5.1. La Méthode Newton

En supposant que $J(\bar{P})$ est inversible (J étant la matrice jacobienne représentant la différentielle de G), l'algorithme de Newton de construction d'une telle suite s'écrit :

- $P^{(0)} \in \mathbb{R}^N$
- Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il faut donc effectuer les opérations suivantes :
 - ✓ Calcul de $J(P^{(k)})$,

On pose $J(P^{(k)}) = J^{(k)}$

$$J_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial G_i}{\partial P_j} \right)_{P=P^{(k)}} \quad (2.123)$$

Les $J_{ij}^{(k)}$ sont des éléments de la matrice jacobienne J à l'itération k .

- ✓ Résolution du système linéaire :

$$J(P^{(k)}) * (P^{(k+1)} - P^{(k)}) = -G(P^{(k)}), \forall k \geq 0 \quad (2.124)$$

- Arrêter la procédure d'itération dès que la condition suivante est remplie :

$$\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| < \delta \quad (2.125)$$

Le principal avantage lié à l'utilisation de cette méthode est que la convergence de cette méthode est quadratique. Cependant, cette itération classique peut ne pas converger lorsque $P^{(k)}$ n'est pas une bonne estimation de la solution.

2.3.5.2. La méthode Newton modifiée

En supposant que $J(\bar{P})$ est inversible, l'algorithme de Newton modifiée pour la construction d'une telle suite s'écrit :

- $P^{(0)} \in \mathbb{R}^N$
- Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il faut donc effectuer les opérations suivantes :
 - ✓ Calcul de $J(P^{(k)})$,

On pose $J(P^{(k)}) = J^{(k)}$

$$J_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial G_i}{\partial P_j} \right)_{P=P^{(k)}} \quad (2.126)$$

Les $J_{ij}^{(k)}$ sont des éléments de la matrice jacobienne J à l'itération k .

✓ Résolution du système linéaire :

$$J(P^{(k)}) * (P^{(k+1)} - P^{(k)}) = -G(Q^{(k)}), \forall k \geq 0 \quad (2.127)$$

$$Q^{(k)} = P^{(k)} + L^{(k)} \quad (2.128)$$

avec $L^{(k)}$ solution de l'équation suivante :

$$J(P^{(k)}) * L^{(k)} = -G(P^{(k)}) \quad (2.129)$$

• Arrêter la procédure d'itération dès que la condition suivante est remplie :

$$\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| < \delta \quad (2.130)$$

Nous signalons ici que la convergence de cette méthode est cubique.

2.3.5.3. La méthode de Levenberg/Marquardt

L'algorithme de Levenberg/Marquardt de construction d'une telle suite s'écrit :

- $P^{(0)} \in \mathbb{R}^N$
- Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il faut donc effectuer les opérations suivantes :
 - ✓ Calcul de $J(P^{(k)})$,

Les éléments de la matrice $J(P^{(k)}) = J^{(k)}$ sont donnés par la formule (2.126)

✓ Résolution du système linéaire :

$$[[J(P^{(k)})]^T J(P^{(k)}) + \mu^{(k)} I] * (P^{(k+1)} - P^{(k)}) = -[J(P^{(k)})]^T G(P^{(k)}), \forall k \geq 0. \quad (2.131)$$

Où I est l'application "identité".

• Arrêter la procédure d'itération dès que la condition suivante est remplie :

$$\|P^{(k+1)} - P^{(k)}\| < \delta \quad (2.132)$$

La méthode LM a la même convergence quadratique que la méthode de Newton si le jacobien est de type Lipchitz continu et non singulier à la solution. Cependant, la condition sur la non-singularité du jacobien est trop forte. Récemment,

sous une condition de minoration de l'erreur locale qui est plus faible que la non-singularité, Yamashita et Fukushima (2001) ont montré que si le paramètre LM est choisi comme $\mu^{(k)} = \|G(P^{(k)})\|^2$, la méthode LM préserve la convergence quadratique dans la condition liée à l'erreur locale. Fan et Yuan (2005) ont choisi $\mu^{(k)} = \|G(P^{(k)})\|^\delta$ avec $\delta \in [1,2]$ et ont prouvé que la méthode LM permet toujours la convergence quadratique sous les mêmes conditions. Des choix plus généraux du paramètre LM ont été donnés dans Fan et Pan (2009). La méthode de Levenberg-Marquardt modifiée est présentée dans Fan (2012). Cet algorithme pour les équations non linéaires met à jour le paramètre $\mu^{(k)}$ et la convergence cubique de la méthode de LM modifiée est prouvée sous la condition de majoration de l'erreur locale.

2.3.5.4. La méthode de Landweber

Landweber a suggéré de réécrire l'équation:

$$AP = U_{mes} \quad (2.133)$$

sous la forme $P = (I - aA^T A)P + aA^T * U_{mes}$ avec $a > 0$ et itérant cette équation; c'est-à-dire : calculer $P^{(0)} = 0$ et $P^{(k)} = (I - aA^T A)P^{(k-1)} + aA^T U_{mes}$, $k = 0,1,2,\dots$

Il est naturel d'utiliser le critère d'arrêt suivant : arrêter l'algorithme à la première occurrence de l'entier k avec $\|AP^{(k)} - U_{mes}\| \leq \delta$. Le théorème suivant montre que ce choix est possible pour la méthode de Landweber et conduit à une stratégie de régularisation admissible, voire optimale.

Théorème : Soit $A: X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire, compact et bijectif entre les espaces de Hilbert et telle que $A(X)$ soit dense dans Y . Soit la suite $P^{(k)}$, $k = 0,1,2,\dots$, déterminée avec la méthode de Landweber :

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} + aA^T(U_{mes} - AP^{(k)}) \quad (2.134)$$

pour $0 < a < 1/\|A\|_2$. Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \|AP^{(k)} - U_{mes}\| = 0$

Preuve: Voir Kirsch (2011) ■

Nous signalons enfin que toutes les méthodes de type gradient exposées à la section 2.3.3.1 sont utilisables en contrôle.

CHAPITRE III : MODELISATION DES TRANSFERTS THERMIQUES DANS UN FOUR

3.1 Modélisation du problème de transfert thermique

3.1.1 Etude du transfert thermique

3.1.2 Modélisation de la variation de la conductivité thermique

3.1.3 Modélisation de la variation de la chaleur spécifique

3.1.4 Modélisation de la variation de la masse volumique

3.1.5 Calcul du facteur \bar{F}

3.2 Analyse numérique du problème direct

3.2.1 Discrétisation de l'EDP

3.2.1.1 Schéma numérique 1

3.2.1.2 Schéma numérique 2

3.2.2 Solution de l'équation discrétisée de la condition aux frontières

3.3 Simulations

3.4 Analyse dimensionnelle

Nomenclature :

Lettres latines :

A_k Surface, m^2

$c_p(u)$ Capacité calorifique fonction de la température $J/kg.K$

\mathcal{F} Facteur pour la chaleur nette rayonnée étant donné l'équation $q_1 = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4)$

\bar{F} Valeur exacte du facteur \mathcal{F} donnée par le modèle de Hottel (équation (3.42))

F_{12} Facteur de forme géométrique

H Longueur du four, m

h Pas d'espace pour les directions x et y, m

I_2 Matrice d'identité à deux dimensions

$k(u)$ Coefficient de conductivité thermique de l'acier, fonction de la température, $W/m.K$

$k'(u)$ Dérivé de $k(u)$ en fonction de la température

L Largeur du four (de section carrée), m

l Largeur de la charge (de section carrée), m

$m_u(\theta_0, t)$ Température moyenne dans le métal en chauffage au temps t pour une source à la température θ_0 , $^{\circ}C$

n Nombre de pas de temps correspondant au temps t et tel que $n \cdot \Delta t = t$

N_t Nombre de pas de temps tels que $N_t \cdot \Delta t = T$

$q_1(\theta_0, u)$ Flux de chaleur émise par la source et reçue par le matériau chauffé, fonction de la température de la source θ_0 et de la température de surface externe du matériau, W/m^2

q_k Flux d'énergie fourni à A_k par un autre moyen que le rayonnement à l'intérieur de l'enceinte

$q_{o,k}$ Radiosité de la surface ou flux radiatif quittant la surface A_k , W/m^2

$q_{i,k}$ Irradiance de la surface ou flux radiatif reçu par la surface A_k , W/m^2

t Temps, s

$u(x, t)$ Température à l'intérieur du matériau à chauffer à l'instant t et à l'emplacement x , °C

u_0 Température initiale du matériau à chauffer, °C

$u_{i,j}^n$ Solution fournie par le modèle sur la grille i, j incluant la limite à l'instant $t = n. \Delta t$ et à la température de source θ_0 , °C

$u_{i,j}^T$ Solution fournie par le modèle sur les points $\{i, j\}$ de la grille au temps final T et pour la température de source θ_0 , en utilisant un schéma de différences finies, °C

x , Variable spatiale et élément de Ω , m

Lettres grecques

$\varepsilon_\lambda, \alpha_\lambda$, et ρ_λ Émissivité, absorptivité et réflectivité spectrales

ε, α , et ρ Émissivité, absorptivité et réflectivité totales hémisphériques

ε_1 Émissivité du matériau (charge)

ε_2 Émissivité de la source

$$\lambda = \frac{l}{L}$$

ψ Coefficient de diffusivité de l'acier qui est fonction de la température u , m^2/s

$\rho(u)$ Densité de l'acier en fonction de la température, kg/m^3

σ Constante de Stephan Boltzmann égale à $5.67.10^{-8}$

$\sigma_u(\theta_0, t)$ Ecart type de températures dans le métal en chauffage au temps t pour une source à la température θ_0 , °C

θ_0 Température source, °C

Ω Sous-ensemble borné ouvert de \mathbf{R}^2

Abréviations

EDP Equation aux dérivées partielles

3.1. MODÉLISATION DU PROBLEME

3.1.1. ETUDE DU TRANSFERT DE CHALEUR :

Les fours électriques consistent en une enceinte de chauffage avec l'électricité comme source de chaleur permettant d'atteindre des températures élevées pour les métaux en fusion, les alliages, les céramiques, les matériaux réfractaires etc. Pour le travail des métaux, l'électricité n'a généralement pas d'effet électrochimique sur le métal mais le chauffe simplement.

Bien que les fours électriques modernes soient généralement des fours à arc ou des fours à induction, nous traiterons dans cette application d'un four de forme parallélépipédique, de section droite carrée dans lequel la chaleur est produite par des éléments de résistance en nichrome 80-20 tapissant l'intérieur du four. Le

matériau à chauffer est placé à l'intérieur de celui-ci aux moyens de supports de sorte que tout flux de chaleur émis par le four est capté par le four lui-même et par la charge à chauffer et que tout flux de chaleur émis par cette dernière est entièrement capté par les parois du four.

Dans le domaine des basses températures, la convection et la conduction jouent un rôle important. Le flux transmis par rayonnement devient prépondérant aux températures supérieures à 400 °C. Pour cette raison, nous supposons le transfert de chaleur par convection négligeable par rapport aux deux autres modes de transferts thermiques. D'autre part, nous supposons que les propriétés thermo physiques du matériau (conductivité thermiques, chaleur spécifique et masse volumique) varient de façon linéaire par rapport à la température. L'étude statistique réalisée dans chacune des sections 3.1.2, 3.1.3 et 3.1.4 confirmera cette hypothèse. Concernant le rayonnement, la limite de l'enceinte est subdivisée en zones afin que les restrictions suivantes soient respectées pour chacune d'elles :

1. Toutes les surfaces sont opaques.
2. La température est uniforme.
3. Les propriétés de surface sont uniformes.
4. Les ε_λ , α_λ , et ρ_λ sont indépendants de la longueur d'onde et de la direction. Ainsi, quelle que soit la température de surface, l'absorptivité et l'émissivité totales hémisphériques sont égales et dépendent uniquement de la température : $\varepsilon = \alpha = 1 - \rho$, où ρ est la réflectivité. Cette approximation est appelée « approximation de surfaces diffuses grises ».
5. Toute l'énergie est émise et réfléchi de manière diffuse.
6. Le flux d'énergie incident et donc réfléchi est uniforme sur chaque zone individuelle.
7. Le milieu entre les deux surfaces en échange thermique est transparent c'est-à-dire non participant à l'échange de chaleur. Cela signifie en d'autres termes qu'il n'émet, ni n'absorbe, ni ne réfléchit aucune partie du rayonnement reçu. Cette approximation se justifie par le fait qu'un four électrique destiné au réchauffage de pièces métalliques n'est le siège d'aucun produit ou particule issu d'une quelconque combustion, ni de vapeur d'eau.

8. La dimension transversale H du four (qui est égale à celle de la charge) est supposée infinie de sorte que les effets de bord peuvent être négligés.

Bien qu'aucune surface réelle ne soit réellement grise, notons que l'approximation de « surfaces diffuses grises » est due à l'absence de propriétés radiatives précises et au fait que souvent ε_λ est relativement constante sur cette partie du spectre où le pouvoir émissif du corps noir $e_{\lambda b}$ est important (Voir Bejan Adrian, Kraus Allan D., 2003).

La figure 3.1 schématise le four électrique avec sa charge placée en son centre et sur supports.

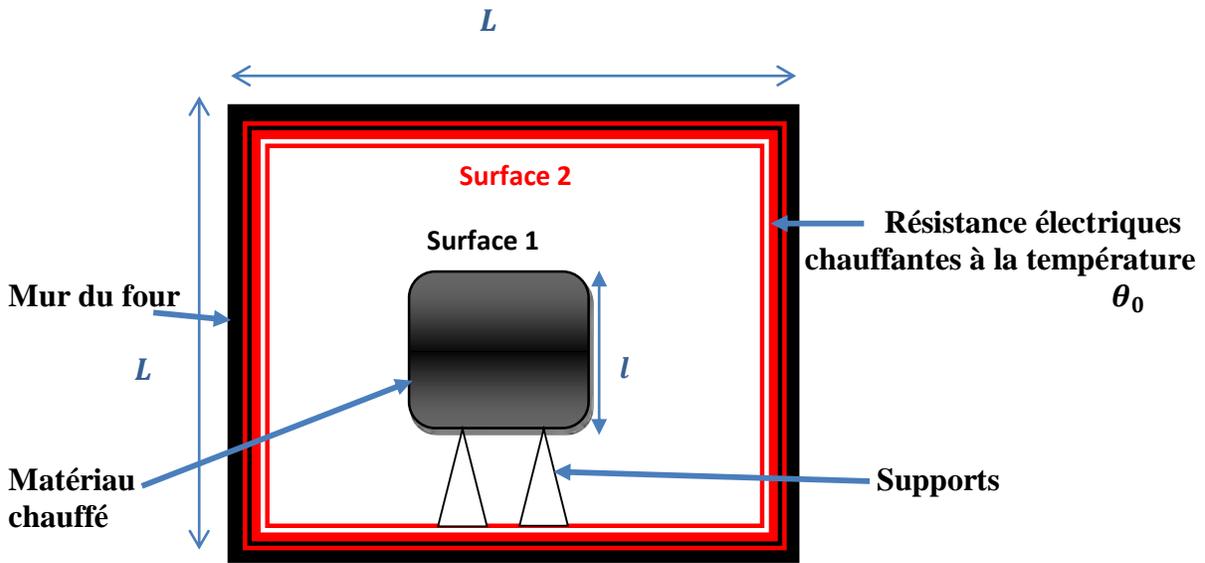


Figure 3.1 : Schématisation du four électrique et de sa charge

Dans cette étude nous considérons de l'acier 99.2% Fe, 0.2% C comme métal à traiter. Pour la modélisation du problème de transfert de chaleur, définissons d'abord un certain nombre de paramètres.

$\theta_0(t)$ Température de la source rayonnante (résistances) à l'instant t

$R[\theta_0(t)]$ Résistance correspondant à la température $\theta_0(t)$

$i(t)$ Courant électrique traversant les résistances électriques à l'instant t .

On a la formule suivante :

$$R[\theta_0(t)] = \frac{\rho_{ref} * L}{s} (1 + \alpha [\theta_0(t) - \theta_{ref}]) \quad (3.1)$$

Avec :

θ_{ref} Température de référence en °C.

ρ_{ref} Résistivité en (ohm.m) du nichrome 80-20 à la température de référence

α – Coefficient de température du nichrome 80-20

L Longueur du circuit, m

s Section, m^2

On prendra dans cette étude $\theta_{ref} = 20^\circ\text{C}$; $R_{ref} = 1.08 \cdot 10^{-6} \text{ Ohm.m}$; $\alpha = 58 \cdot 10^{-6}$

On va exprimer $\theta_0(t)$ en fonction du courant i à l'aide d'une régression linéaire avec l'aide des données du tableau 3.1 que nous avons tirées d'un catalogue de fournisseur :

Tableau 3.1 : Variation de la température en fonction du courant électrique dans une résistance en Nickel-chrome 80-20 de 7mm de diamètre (catalogue fournisseur).

NICHROME 80-20 Diamètre 7mm						
Température (°C) (θ_0)	200	400	600	800	1000	1200
Courant i (A)	54,7	116	184	270	365	473

Le tableau 3.2 donne les résultats de l'analyse de régression effectuée avec l'aide du logiciel Eviews.

Tableau 3.2 : Statistiques de la régression de i vs θ_0

Dependent Variable: **Courant i (A)**

Method: Least Squares

Date: 12/09/18 Time: 00:50

Sample: 1 6

Included observations: 6

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-48,66667	17,38394	-2,799518	0,0488
$\theta_0(^\circ\text{C})$	0,417786	0,022319	18,71890	0,0000
R-squared	0,988713	Mean dependent var	243,7833	
Adjusted R-squared	0,985892	S.D. dependent var	157,2108	
S.E. of regression	18,67335	Akaike info criterion	8,953273	
Sum squared resid	1394,776	Schwarz criterion	8,883860	
Log likelihood	-24,85982	F-statistic	350,3972	
Durbin-Watson stat	1,055198	Prob(F-statistic)	0,000048	

On obtient ainsi la formule suivante, liant le courant i parcourant les résistances et la température θ_0 du four :

$$i(t) = 0,41779 \cdot \theta_0(t) - 48,667 \quad (3.2)$$

Et le coefficient est de corrélation $R = 0.99$.

La puissance par unité de longueur de résistance émettrice du four $p^*(t)$ s'exprime comme suit :

$$p^*(t) = \frac{\rho_{ref}}{s} (1 + \alpha[\theta_0(t) - \theta_{ref}]) \cdot i^2(t) \quad (3.3)$$

La puissance instantanée générée par le four s'écrit alors : $P(t) = p^*(t) \cdot L$ (3.4)

Avec $L = L_g \cdot N_g$ pour un four comme celui représenté à la figure 3.1.

Avec

L_g Longueur d'une rainure

N_g Nombre de rainures à l'intérieur du four

L'énergie électrique J consommée pendant le chauffage s'écrit :

$$J = \frac{\rho_{ref} \cdot L}{s} \int_0^T (1 + \alpha[\theta_0(t) - \theta_{ref}]) \cdot i^2(t) \cdot dt \quad (3.5)$$

Cette énergie électrique se dissipant à travers les résistances par effet Joule, une quantité de chaleur Q_1 (correspondant à un flux de chaleur q_1) est transmise par la source de chaleur à la température θ_0 à la surface externe du métal par rayonnement. Ensuite, cette chaleur se diffuse dans la masse du métal par conduction. Cette transmission de la chaleur obéît à la relation suivante :

$$-k(u) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = q_1(\theta_0, u) \quad (3.6)$$

Cette relation traduit le fait que la chaleur rayonnée est transmise au métal par conduction au niveau de la surface externe. Avec :

n Normale unitaire extérieure à la frontière du domaine ;

$k(u)$ Coefficient de conductivité thermique, fonction de la température.

La conduction ou diffusion de la chaleur dans le métal est modélisée par l'équation suivante :

$$\rho(u)c_p(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k(u)\nabla u) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times]0, T[\quad (3.7)$$

Les fonctions $k(u)$, $c_p(u)$ et $\rho(u)$ seront déterminées par régression avec les valeurs expérimentales fournies par les tables (3.3, 3.5 et 3.7).

3.1.2. MODELISATION DE LA VARIATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

Pour obtenir une fonction continue en u , on procède à une régression entre la température u et la conductivité thermique k . On obtient ainsi le tableau 3.3 suivant :

**Tableau 3.3 : Conductivité thermique de l'acier en fonction de la température
(Warren M. R. et al. 1998)**

ACIER					
Température (°C)	0	100	300	500	800
Coefficient de conductivité thermique (W/m.K)	45,357	45,357	43,031	37,216	29,075

La figure 3.2 ci-dessous schématise les variations de la conductivité thermique k en fonction de la température u .

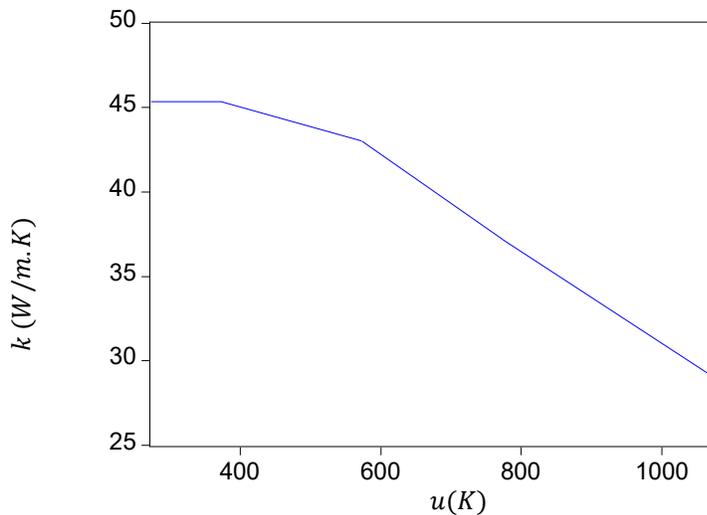


Figure 3.2 : variation de la conductivité thermique de l'acier en fonction de la température

Et le tableau 3.4 ci-dessous donne les paramètres de la régression faite avec le logiciel Eviews.

Tableau 3.4 : Statistiques de la régression de k vs u

Dependent Variable : *k*
 Method: Least Squares
 Date : 10/29/18 Time : 21:03
 Sample: 1 5
 Included observations: 5

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	52,95365	1,926324	27,48948	0,0001
<i>u</i>	-0,021115	0,002845	-7,420869	0,0051
R-squared	0,948338	Mean dependent var		40,00720
Adjusted R-squared	0,931117	S.D. dependent var		6,958590
S.E. of regression	1,826325	Akaike info criterion		4,331662
Sum squared resid	10,00638	Schwarz criterion		4,175438
Log likelihood	-8,829156	F-statistic		55,06929
Durbin-Watson stat	1,384629	Prob(F-statistic)		0,005063

On obtient ainsi les relations suivantes entre la conductivité thermique et la température :

$$k = 52,9536539 - 0,02111466019 \cdot u \quad (u \text{ en K}) \quad (3.8)$$

$$k = 47,18618447 - 0,02111466019 \cdot u \quad (u \text{ en } ^\circ\text{C}) \quad (3.9)$$

3.1.3. MODELISATION DE LA VARIATION DE LA CAPACITÉ THERMIQUE

Pour obtenir une fonction « capacité thermique » continue en la température *u*, on procède à une régression utilisant les données du tableau 3.5 suivant :

**Tableau 3.5: Capacité thermique de l'acier en fonction de la température
(Warren M. R. et al. 1998)**

Temp (K)	300	400	500	600	800	1000
Capacité thermique (J/Kg.K)	450	491	524	555	692	1034

La figure 3.3 ci-dessous schématise les variations de la capacité thermique c_p en fonction de la température *u*.

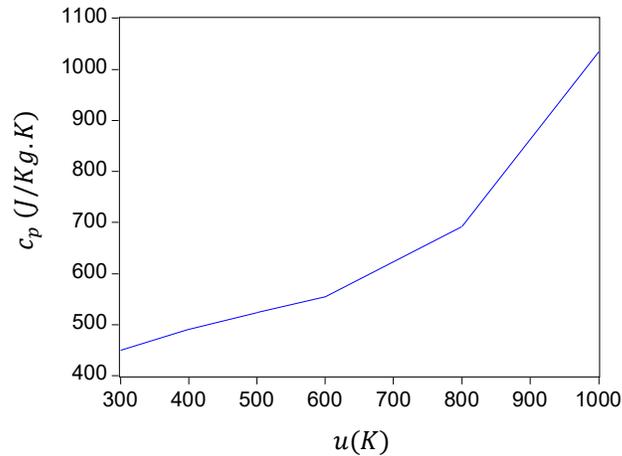


Figure 3.3 : graphique de la variation de c_p de l'acier en fonction de la température u

Le tableau 3.6 ci-dessous donne les paramètres de la régression faite avec le logiciel Eviews.

Tableau 3.6: Statistiques de la régression de c_p vs u

Dependent Variable: c_p
 Method: Least Squares
 Date: 10/29/18 Time: 21:18
 Sample: 1 5
 Included observations: 5

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	297,2973	28,18531	10,54795	0,0018
u	0,471351	0,051459	9,159726	0,0028
R-squared	0,965478	Mean dependent var		542,4000
Adjusted R-squared	0,953970	S.D. dependent var		92,27296
S.E. of regression	19,79671	Akaike info criterion		9,098083
Sum squared resid	1175,730	Schwarz criterion		8,941859
Log likelihood	-20,74521	F-statistic		83,90058
Durbin-Watson stat	1,976317	Prob(F-statistic)		0,002751

Nous obtenons ainsi l'équation suivante :

$$c_p = 297,2972973 + 0,4713513514.u \quad (3.10)$$

3.1.4. MODELISATION DE LA VARIATION DE LA MASSE VOLUMIQUE

Comme précédemment on procède à une régression entre la masse volumique et la température u à l'aide du tableau 3.7 suivant :

Tableau 3.7 : masse volumique de l'acier en fonction de la température (Warren M. R. et al. 1998)

Temp (K)	300	400	500	600	800
Masse volumique (Kg/m3)	7860	7830	7800	7760	7690

La figure 3.4 ci-dessous schématise les variations de la masse volumique de l'acier en fonction de la température u .

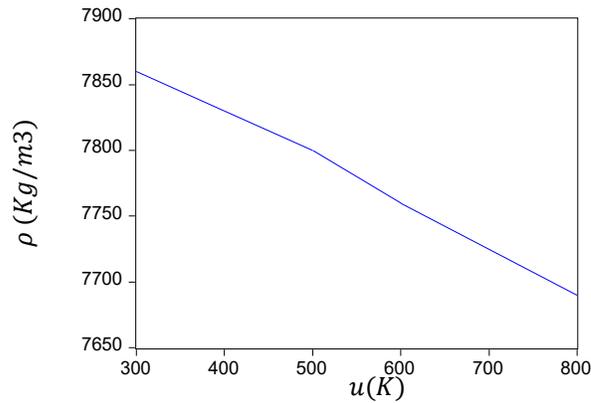


Figure 3.4 : variation de la masse volumique de l'acier en fonction de la température

Le tableau 3.8 ci-dessous donne les paramètres de la régression faite avec le logiciel Eviews.

Tableau 3.8 : Statistiques de la régression de ρ vs u

Dependent Variable: ρ
 Method: Least Squares
 Date: 10/29/18 Time: 21:12
 Sample: 1 5
 Included observations: 5

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	7966,486	5,405405	1473,800	0,0000
u	-0,343243	0,009869	-34,78038	0,0001
R-squared	0,997526	Mean dependent var		7788,000
Adjusted R-squared	0,996702	S.D. dependent var		66,10598
S.E. of regression	3,796632	Akaike info criterion		5,795280
Sum squared resid	43,24324	Schwarz criterion		5,639055
Log likelihood	-12,48820	F-statistic		1209,675
Durbin-Watson stat	1,652027	Prob(F-statistic)		0,000052

On obtient ainsi la formule suivante :

$$\rho = 7966,486486 - 0,3432432432.u \quad (3.11)$$

Nous pouvons maintenant écrire les équations qui régissent le processus de transfert de chaleur combiné dans le métal en chauffage dans le four. Il suffit simplement de combiner les équations (3.6), (3.7) et la condition initiale.

$$\begin{cases} \rho(u)c_p(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k(u)\nabla u) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ -k(u) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = q_1, & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

3.1.5. CALCUL DU FLUX DE CHALEUR q_1

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, par souci de simplification, les surfaces de l'enceinte sont supposées être diffuses et grises ; l'émissivité spectrale directionnelle et l'absorptivité de chaque surface ne dépendent donc ni de la direction ni de la longueur d'onde, mais peuvent dépendre de la température de la surface. Quelle que soit la température de surface T , l'absorbance et l'émissivité totales hémisphériques sont égales et ne dépendent que de T , $\alpha(T) = \varepsilon(T)$. La présente analyse nécessite que chaque surface considérée soit à une température uniforme. Si les conditions de chauffage sont telles que la température varierait de manière marquée sur une zone donnée, il conviendrait de subdiviser la zone en parties plus petites et plus proches de l'isotherme. À partir de cette exigence de zone isothermique, l'énergie émise est uniforme sur toutes les surfaces.

Un échange radiatif complexe se produit à l'intérieur de l'enceinte lorsque le rayonnement « quitte » une surface vers d'autres surfaces, est partiellement réfléchi et est ensuite renvoyé à plusieurs reprises dans l'enceinte avec absorption partielle à chaque contact avec une surface. Il est compliqué de suivre le rayonnement lorsqu'il subit ce processus ; heureusement, ce n'est pas toujours nécessaire. Une analyse pratique peut être formulée en utilisant la méthode du rayonnement net. Dans cette méthode, des bilans d'énergie radiative sont construits pour chaque surface, puis l'ensemble des équations résultantes est alors résolu. D'abord conçu par Hottel puis développé différemment par Poljak (1935), Gebhart (1961, 1971) a proposé une autre approche.

Considérons la k ème surface intérieure A_k d'une enceinte. Les $q_{i,k}$ et $q_{o,k}$ sont les flux d'énergie rayonnante entrante et sortante par unité de surface de A_k .

Le flux d'énergie rayonnante sortant d'un emplacement donné sur la surface k , $q_{o,k}$ est constitué du flux émis et réfléchi provenant de cette surface :

$$q_{o,k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + \rho_k q_{i,k} \quad (3.13)$$

où toutes les quantités sont évaluées à un emplacement particulier sur la surface k . La quantité $q_{i,k}$ est le flux de rayonnement incident à l'emplacement donné à partir de toutes les autres surfaces de l'enceinte, y compris la surface k elle-même, si elle est concave. La quantité $q_{o,k}$ est souvent appelée radiosité de la surface et $q_{i,k}$, l'irradiance.

Le flux thermique radiatif net sortant de la surface k q_k est la différence entre la radiosité et l'éclairement énergétique :

$$Q_k = q_k A_k = (q_{o,k} - q_{i,k}) A_k \quad (3.14)$$

Ce flux correspond au concept habituel utilisé dans le transfert de chaleur, car le flux d'énergie net est pris comme positif s'il est parallèle à la normale à la surface de la position sur k .

La quantité q_k est le flux d'énergie fourni à A_k par un autre moyen que le rayonnement à l'intérieur de l'enceinte, afin de compenser le gain ou la perte radiative nette et de maintenir ainsi la température de surface interne spécifiée. Par exemple, si A_k est la surface intérieure d'un mur d'épaisseur finie, Q_k pourrait être la chaleur transmise par conduction à travers le mur de l'extérieur vers A_k .

L'équation finale du transfert d'énergie quantifie l'irradiance en tant que somme des énergies rayonnantes atteignant un emplacement sur la surface k à partir de toutes les autres zones de la surface de l'enceinte. Cette relation peut prendre diverses formes en fonction du degré d'approximation utilisé dans l'analyse.

L'équation (3.13) peut être réécrite comme suit (en notant $\alpha_k = \varepsilon_k$ pour une surface grise) :

$$q_{o,k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + \rho_k q_{i,k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + (1 - \alpha_k) q_{i,k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + (1 - \varepsilon_k) q_{i,k} \quad (3.15)$$

où $\rho_k = 1 - \alpha_k = 1 - \varepsilon_k$ a été utilisé pour les surfaces grises opaques. Le terme radiosité est souvent utilisé pour $q_{o,k}$. Le flux incident ou irradiation $q_{i,k}$ est dérivé des

parties d'énergie radiante quittant les surfaces à l'intérieur de l'enceinte qui arrivent à la k-surface. Si la k-surface peut se voir (est concave), une partie de son flux sortant contribuera directement à son flux incident. L'énergie incidente est alors égale à :

$$A_k q_{i,k} = A_1 q_{o,1} F_{1k} + A_2 q_{o,2} F_{2k} + \dots + A_j q_{o,j} F_{jk} + \dots + A_k q_{o,k} F_{kk} + \dots + A_N q_{o,N} F_{Nk} \quad (3.16)$$

Utilisant la propriété de réciprocité des facteurs de forme, nous avons :

$$A_1 F_{1k} = A_k F_{k1}; A_2 F_{2k} = A_k F_{k2}; \dots; A_j F_{jk} = A_k F_{kj}; \dots; A_N F_{Nk} = A_k F_{kN} \quad (3.17)$$

Ensuite, l'équation (4.16) peut être réécrite de sorte que la seule surface qui apparaît est A_k :

$$A_k q_{i,k} = A_k q_{o,1} F_{k1} + A_k q_{o,2} F_{k2} + \dots + A_k q_{o,j} F_{kj} + \dots + A_k q_{o,k} F_{kk} + \dots + A_k q_{o,N} F_{kN} \quad (3.18)$$

Si bien que le flux incident s'exprime finalement comme suit :

$$q_{i,k} = \sum_{j=1}^N q_{o,j} F_{kj} \quad (3.19)$$

Substituant $q_{i,k}$ de l'équation (3.19) dans (3.14) et $q_{i,k}$ de l'équation (3.15) dans (3.14) pour éliminer $q_{i,k}$ nous donnera deux équations de bilan d'énergie pour q_k en fonction de T_k et de $q_{o,k}$. Par conséquent, nous obtenons:

$$\frac{Q_k}{A_k} = q_k = \frac{\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k} (\sigma T_k^4 - q_{o,k}) \quad (3.20)$$

$$\frac{Q_k}{A_k} = q_k = q_{o,k} - \sum_{j=1}^N q_{o,j} F_{kj} = \sum_{j=1}^N (q_{o,k} - q_{o,j}) F_{kj} \quad (3.21)$$

Application : $N = 2$; $k = 1, k = 2$ (voire figure 3.1)

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} (\sigma T_1^4 - q_{o,1}) \quad (3.22)$$

$$q_2 = \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} (\sigma T_2^4 - q_{o,2}) \quad (3.23)$$

$$q_1 = q_{o,1} - q_{o,1} F_{11} - q_{o,2} F_{12} \quad (3.24)$$

$$q_2 = q_{o,2} - q_{o,1} F_{21} - q_{o,2} F_{22} \quad (3.25)$$

Les facteurs de forme géométriques sont les suivantes :

$$F_{11} = 0, F_{12} = 1 \quad (3.26)$$

Introduisant les valeurs de F_{11} et F_{12} dans l'équation (3.24), on obtient :

$$q_1 = q_{o,1} - q_{o,2} \quad (3.27)$$

D'autre part,

$$F_{22} = 1 - F_{21} \text{ et } A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (3.28)$$

Ce qui donne la valeur de F_{21} :
$$F_{21} = \frac{A_1}{A_2} F_{12} = \frac{A_1}{A_2} \quad (3.29)$$

Donc le facteur de forme géométrique F_{22} pourra s'exprimer comme suit :

$$F_{22} = 1 - \frac{A_1}{A_2} \quad (3.30)$$

En remplaçant les facteurs de forme géométrique par leurs expressions, l'équation (3.25) pourra donc s'écrire :

$$q_2 = q_{o,2} - q_{o,1} \frac{A_1}{A_2} - q_{o,2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) = \frac{A_1}{A_2} (q_{o,2} - q_{o,1}) \quad (3.31)$$

D'une part, en éliminant $q_{o,1}$ et $q_{o,2}$ entre les équations (3.22), (3.23) et (3.27),

$$q_1 = \sigma T_1^4 - \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} q_1 - \sigma T_2^4 + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} q_2 \quad (3.32)$$

D'une part, en éliminant $q_{o,1}$ et $q_{o,2}$ entre les équations (3.31) et (3.27), nous obtenons :

$$q_2 = -\frac{A_1}{A_2} q_1 \quad (3.33)$$

En combinant (3.32) et (3.33) on obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} q_2 = \sigma T_2^4 - \sigma T_1^4 + \frac{1}{\epsilon_1} q_1 \\ q_2 = -\frac{A_1}{A_2} q_1 \end{cases} \quad (3.34)$$

L'élimination de q_2 entre ces deux équations conduit à l'équation suivante :

$$\frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \left(-\frac{A_1}{A_2} q_1\right) = \sigma T_2^4 - \sigma T_1^4 + \frac{1}{\epsilon_1} q_1 \quad (3.35)$$

Et cette relation conduira à la suivante :

$$q_1 = -\frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \frac{A_1}{A_2}} \quad (3.36)$$

Le signe moins signifie que le flux est dans la direction de $-\mathbf{n}$ (\mathbf{n} étant la normale unitaire externe à la frontière).

Note: $\epsilon_2 \rightarrow 1$ donne
$$q_1 \rightarrow -\epsilon_1 \sigma (T_2^4 - T_1^4) \quad (3.37)$$

Soit L la largeur du four (qui est de forme carrée) et l celle de la charge.

$$A_1 = lH \quad (3.38)$$

$$A_2 = LH \quad (3.39)$$

H étant la dimension transversale du four que nous prenons égale à celle de la charge. C'est en fait la dimension perpendiculaire au plan de la feuille.

$$q_1 = -\frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)\frac{l}{L}} \quad (3.40)$$

Dans notre présent cas, on a $T_2 = \theta_0$, $T_1 = u$

$$q_1 = -\frac{\sigma(\theta_0^4 - u^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)\frac{l}{L}} \quad (3.41)$$

Et on obtient finalement (avec $\lambda = \frac{l}{L}$) :

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)\lambda} \quad (3.42)$$

3.2. ANALYSE NUMÉRIQUE DU PROBLEME DIRECT

3.2.1. DISCRETISATION NUMERIQUE DE L'EDP

Il existe différentes techniques numériques par lesquelles les algorithmes informatiques sont dérivés des équations qui régissent le modèle. Pour obtenir un modèle numérique, la formulation mathématique (par exemple différentielle) pour les variables continues doit être transformée en une forme discrète. La méthode des différences finies (FD) est dérivée à titre d'approximation de l'équation différentielle. Les dérivés (quotients différentiels) sont remplacés par des quotients de différence. Dans le procédé de discrétisation, les variables discrètes (par exemple, les modèles de débit hydraulique, de concentration ou de température dans le transport) du modèle sont déterminées au niveau des nœuds dans le domaine du modèle, déterminés par un réseau.

Nous allons utiliser une méthode de différences finies en deux dimensions d'espace (2D).

Les grilles DF sont généralement rectangulaires et peuvent être irrégulières, c'est-à-dire que chaque colonne, ligne ou couche peut posséder un espacement de grille individuel. Les valeurs de la variable dépendante sont calculées aux nœuds, tandis que les paramètres sont spécifiés pour des volumes centrés sur les nœuds (grille centrée sur les nœuds). Dans cette présente étude, on utilisera des grilles DF carrées (voir figure 3.5). Cela signifie que nous utiliserons le même pas de discrétisation h pour la direction des x que pour celle des y . Enfin, nous supposons que la solution u

est deux fois différentiable par rapport aux variables d'espace et une fois par rapport à la variable temps.

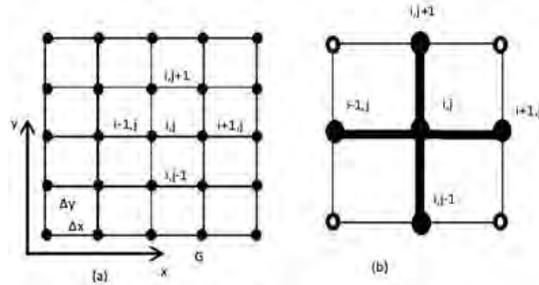


Figure 3.5 : grille spatiale carrée pour la méthode des différences finies

3.2.1.1. Schéma numérique 1

Nous partons du système d'équations (3.12).

En considérant la première équation de ce système, et en utilisant la propriété suivante :

$$\nabla \cdot (k(u)\nabla u) = \nabla k(u)\nabla u + k(u)\Delta u = k'(u)\|\nabla u\|^2 + k(u)\Delta u \quad (3.43)$$

on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \psi(u)\Delta u - \mu(u)\|\nabla u\|^2 = 0 \quad (3.44)$$

u étant la température dans le métal à chauffer,

On obtient ainsi une EDP parabolique de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \psi(u)\Delta u = \mu(u)\|\nabla u\|^2, & (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ k(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4), & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Avec
$$\psi(u) = \frac{k(u)}{\rho(u).c_p(u)} \quad (3.46)$$

ψ – le coefficient de diffusivité de l'acier qui est fonction de la température u .

On a
$$\mu(u) = \frac{k'(u)}{\rho(u).c_p(u)} \quad (3.47)$$

Soit $u = u_{\theta_0}(x, T)$ la solution de l'EDP (3.45) correspondant au contrôle θ_0 au temps

T. Pour la suite, nous noterons $u(t_n, x_i, y_j) = u_{i,j}^n \quad (3.48)$

Discrétisons les différents éléments de la première équation de (3.45), on obtient :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(t_n, x_i, y_j)} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + o(\Delta t) \quad (3.49)$$

Supposons que la solution u soit deux fois différentiable par rapport aux variables d'espace et une fois par rapport à la variable de temps. On obtient :

$$\Delta u = \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n}{h^2} + o(h^2) \quad (3.50)$$

$$\|\nabla u(t_n, x_i, y_j)\|^2 = \left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h}\right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h}\right)^2 + o(h^2) \quad (3.51)$$

À partir de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \psi(u)\Delta u = \mu(u)\|\nabla u\|^2 \quad (3.52)$$

Nous dérivons la discrétisation en différences finies ci-dessus :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{h^2} \psi(u_{i,j}^n) [-4 * u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n] + \frac{\Delta t}{4h^2} \mu(u_{i,j}^n) [(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n)^2 + (u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)^2] \quad (3.53)$$

Si bien qu'on obtient le schéma suivant :

$$(3.54) \left\{ \begin{array}{l} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{h^2} \psi(u_{i,j}^n) [-4 * u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n] + \frac{\Delta t}{4h^2} \mu(u_{i,j}^n) [(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n)^2 + (u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)^2], (i, j) \in \Omega \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma([\theta_0^n]^4 - [u_{i,j}^n]^4)}{k(u_{0,j}^n)}, i = 0; \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma([\theta_0^n]^4 - [u_{i,j}^n]^4)}{k(u_{0,j}^n)}, i = I + 1; \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j+1}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma([\theta_0^n]^4 - [u_{i,j}^n]^4)}{k(u_{0,j}^n)}, j = 0; \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma([\theta_0^n]^4 - [u_{i,j}^n]^4)}{k(u_{0,j}^n)}, j = J + 1; \\ u_{i,j}^0 = u_0 \end{array} \right.$$

La figure 3.6 ci-dessous schématise la grille avec les indices :

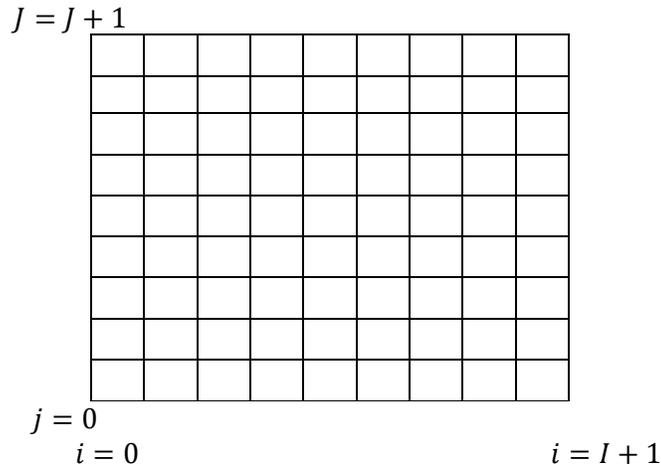


Figure 3.6 : grille spatiale carrée avec les index i et j du schéma (3.54)

NB : les indices de la frontière sont $i = 0$ pour la frontière verticale gauche et $i = I + 1$ pour celle de droite. Pour la frontière horizontale basse on a $j = 0$ et $j = J + 1$ pour celle du haut.

Supposons maintenant que :

- $u(x, t) \leq \theta_0(t), \forall x \text{ et } \forall t \in [0, T]$
- les fonctions $\psi(u)$ et $\mu(u)$ sont continus par rapport à u dans le domaine $[u_0, \theta_0]$.

Grâce à la première hypothèse et au principe du maximum, nous concluons que $u_0 \leq u(x, t) \leq \theta_0(t)$

La deuxième hypothèse implique que $\psi(u)$ et $\mu(u)$ sont bornées sur $[u_0, \theta_0]$ et donc $\psi(u(x, t))$ et $\mu(u(x, t))$ sont bornées sur $\Omega \times [0, T]$.

Soit r le module de l'erreur de troncature. Une façon simple est de considérer r comme la différence en valeur absolue entre les équations (3.45) et (3.54).

Alors r peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned}
 r &= \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \psi(u)\Delta u - \mu(u)\|\nabla u\|^2 \right)_{t_n, x_i, y_j} \right. \\
 &\quad - \left(\frac{u(t_{n+1}, x_i, y_j) - u(t_n, x_i, y_j)}{\Delta t} \right. \\
 &\quad \left. - \psi(u(t_n, x_i, y_j)) \left(\frac{u(t_n, x_{i-1}, y_j) + u(t_n, x_{i+1}, y_j) - 4 * u(t_n, x_i, y_j) + u(t_n, x_i, y_{j-1}) + u(t_n, x_i, y_{j+1})}{h^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \mu(u(t_n, x_i, y_j)) \left[\frac{(u(t_n, x_{i+1}, y_j) - u(t_n, x_{i-1}, y_j))^2 + (u(t_n, x_i, y_{j+1}) - u(t_n, x_i, y_{j-1}))^2}{4h^2} \right] \right| \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à la relation suivante (après réarrangement des différents termes) :

$$\begin{aligned}
 r &= \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u(t_{n+1}, x_i, y_j) - u(t_n, x_i, y_j)}{\Delta t} \right) \right. \\
 &\quad - \left[\psi(u)\Delta u \right. \\
 &\quad \left. - \psi(u(t_n, x_i, y_j)) \left(\frac{u(t_n, x_{i-1}, y_j) + u(t_n, x_{i+1}, y_j) - 4 * u(t_n, x_i, y_j) + u(t_n, x_i, y_{j-1}) + u(t_n, x_i, y_{j+1})}{h^2} \right) \right] \\
 &\quad \left. - \left[\mu(u)\|\nabla u\|^2 - \mu(u(t_n, x_i, y_j)) \left[\frac{(u(t_n, x_{i+1}, y_j) - u(t_n, x_{i-1}, y_j))^2 + (u(t_n, x_i, y_{j+1}) - u(t_n, x_i, y_{j-1}))^2}{4h^2} \right] \right] \right| \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à l'inégalité ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 r &\leq \left| \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(t_n, x_i, y_j)} - \frac{u(t_{n+1}, x_i, y_j) - u(t_n, x_i, y_j)}{\Delta t} \right| \\
 &\quad + \left| \psi(u(t_n, x_i, y_j)) \Delta u(x_i, y_j)_{(t_n)} \right. \\
 &\quad \left. - \psi(u(t_n, x_i, y_j)) \left(\frac{u(t_n, x_{i-1}, y_j) + u(t_n, x_{i+1}, y_j) - 4 * u(t_n, x_i, y_j) + u(t_n, x_i, y_{j-1}) + u(t_n, x_i, y_{j+1})}{h^2} \right) \right| \\
 &\quad + \left| \mu(u(t_n, x_i, y_j)) \|\nabla u(x_i, y_j)\|_{t_n}^2 \right. \\
 &\quad \left. - \mu(u(t_n, x_i, y_j)) \left[\frac{(u(t_n, x_{i+1}, y_j) - u(t_n, x_{i-1}, y_j))^2 + (u(t_n, x_i, y_{j+1}) - u(t_n, x_i, y_{j-1}))^2}{4h^2} \right] \right| \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

Et comme $\psi(u(x, t))$ et $\mu(u(x, t))$ sont bornés sur $\Omega \times [0, T]$, cela signifie qu'il existe deux constantes B_1 et B_2 telles que $|\psi(u(t_n, x_i, y_j))| \leq B_1$ et $|\mu(u(t_n, x_i, y_j))| \leq B_2$.

Ce qui prouve grâce à (3.49), (3.50) et (3.51) que $r \leq o[(\Delta t) + h^2]$ et que le schéma est consistant.

A la frontière du domaine, l'erreur de consistance qu'on note encore r pour simplifier est telle que $r \leq o[(\Delta t) + h]$ et par conséquent, le schéma est consistant.

3.2.1.2. Schéma numérique 2

Pour ce schéma, nous utiliserons directement le système d'équations (3.12) sans transformations préalables. Dans ce cas, la fonction $k(u)$ à l'intérieur du symbole « divergence » est discrétisée.

Cette discrétisation nous permet ainsi d'obtenir des fonctions ψ de la forme suivante :

$$\psi(t_n, x_{i+1}, y_j) = \frac{k(u_{i+1,j}^n)}{\rho(u_{i,j}^n) \cdot c_p(u_{i,j}^n)} \quad (3.58)$$

On obtient ainsi le schéma numérique ci-dessous :

$$(3.59) \left\{ \begin{array}{l} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{h^2} [\psi_{i+1/2,j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) + \psi_{i-1/2,j}^n (u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n) + \psi_{i,j+1/2}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) + \psi_{i,j-1/2}^n (u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n)], (i, j) \in \Omega \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma([\theta_0^n]^4 - [u_{i,j}^n]^4)}{k(u_{i,j}^n)}, \quad i = 0; \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma([\theta_0^n]^4 - [u_{i,j}^n]^4)}{k(u_{i,j}^n)}, \quad i = I + 1; \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j+1}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma([\theta_0^n]^4 - [u_{i,j}^n]^4)}{k(u_{i,j}^n)}, \quad j = 0; \\ \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma([\theta_0^n]^4 - [u_{i,j}^n]^4)}{k(u_{i,j}^n)}, \quad j = J + 1; \\ u_{i,j}^0 = u_0 \end{array} \right.$$

Avec :

$$\psi_{i+1/2,j} = \frac{\psi(t_n, x_{i+1}, y_j) + \psi(t_n, x_i, y_j)}{2} \quad (3.60)$$

$$\psi_{i-1/2,j} = \frac{\psi(t_n, x_{i-1}, y_j) + \psi(t_n, x_i, y_j)}{2} \quad (3.61)$$

$$\psi_{i,j+1/2} = \frac{\psi(t_n, x_i, y_{j+1}) + \psi(t_n, x_i, y_j)}{2} \quad (3.62)$$

$$\psi_{i,j-1/2} = \frac{\psi(t_n, x_i, y_{j-1}) + \psi(t_n, x_i, y_j)}{2} \quad (3.63)$$

En utilisant une démarche analogue à celle utilisée pour le schéma numérique 1, il est relativement facile de vérifier que l'erreur de consistance associée au schéma numérique 2 (3.59) est telle que $r \leq o[(\Delta t) + h^2]$ à l'exception de la frontière où on a $r \leq o[(\Delta t) + h]$ sous la condition que la fonction $\psi(u) = \frac{k(u)}{\rho(u) \cdot c_p(u)}$ soit de classe C^1 sur $\Omega \times [0, T]$ et par conséquent, le schéma est globalement consistant.

Pour la stabilité dans L^∞ , la condition nécessaire et suffisante pour le schéma 2 est :

$$\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{4\psi_{max}} \quad (3.64)$$

Par contre pour le schéma 1 cette condition est seulement nécessaire.

Une approche simple consiste à étudier la monotonie de la fonction ψ à l'aide d'une représentation graphique.

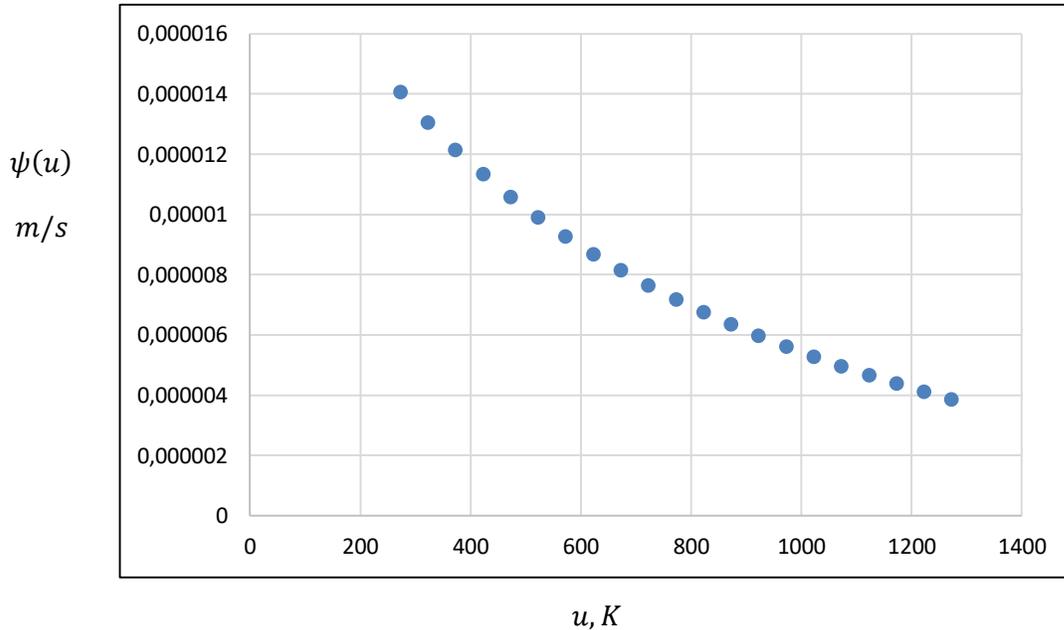


Figure 3.7 : diffusivité de l'acier en fonction de la température

Donc $\psi_{max} = \text{Max}_{u \geq u_0} \psi(u) = \psi(u_0)$ car ψ est une fonction décroissante de u (voir figure 3.8).

Donc les schémas numériques 1 et 2 sont convergents et peuvent par conséquent être utilisés pour des fins d'approximations des solutions de (3.12) si les conditions de stabilité (3.63) sont vérifiées.

L'objectif avec les deux schémas numériques 1 et 2 est de calculer $u_{i,j}^n$, la solution approximative de l'EDP (3.12) ou de façon équivalente (3.45) à l'emplacement (ih, jh) et aux temps $t_n = n\Delta t$, correspondant au contrôle θ_0 .

**3.2.2 SOLUTION DE L'ÉQUATION DISCRÉTISÉE DE LA CONDITION AUX
FRONTIERES :**

Considérons la deuxième équation du système (3.54) ou (3.59) :

$$\frac{u_{i,j}^n - u_{i+1,j}^n}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma(q^4 - x^4)}{k(u_{i,j}^n)}, \quad i = 0 \quad (3.65)$$

Posons dans cette équation $\alpha = u_{i+1,j}^n$, $q = \theta_0^n$ and $x = u_{i,j}^n$ (3.66)

Puisque $k(u_{i,j}^n) = a + bu_{i,j}^n$, on obtient en remplaçant ces valeurs dans l'équation (4.64) :

$$\frac{x - \alpha}{h} = \frac{\mathcal{F}\sigma(q^4 - x^4)}{a + bx} \quad (3.67)$$

Et on obtient ainsi l'équation suivante en x (x représentant la température inconnue à la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω à déterminer) pour chaque temps t :

$$\mathcal{F}\sigma hx^4 + (a + bx)x - \alpha(a + bx) - \mathcal{F}\sigma hq^4 = 0 \quad (3.68)$$

Supposons qu'à l'instant n , toutes les températures à l'intérieur du domaine Ω sont connues grâce à la première équation du système (3.54) ou (3.59), et nous recherchons $x = u_{i,j}^n$ qui est sur la frontière $\partial\Omega$. Notons juste que la valeur $\alpha = u_{i+1,j}^n$ dans (3.68) est connue lors du calcul de x car appartenant à Ω .

Maintenant, (3.68) peut être résolu avec la méthode Newton – Raphson pour fournir les températures inconnues x à la frontière. La valeur initiale requise pour le calcul des températures inconnues à la frontière à l'instant $n\Delta t$ peut être choisie égale à la température de source θ_0^n .

Étape 0 : A $t = 0$, juste après la mise en marche du four, nous avons $\alpha = u_{i+1,j}^0 = u_0$.

On peut alors résoudre l'équation (3.68) et trouver $x = u_{i,j}^0$ pour les points de la frontière. Ce qui signifie que la solution approchée en 2D au temps $t = 0$ est représentée par une matrice dont tous les éléments sont nuls exceptés ceux des premières et dernières lignes et colonnes.

Étape 1 : À $t = \Delta t$ ($n = 1$), les valeurs $u_{i,j}^1$ situées à l'intérieur du domaine (hors frontière) seront calculées à l'aide du schéma numérique (première équation du

système (3.54) ou (3.59)) à partir des valeurs $u_{i,j}^0$ des points de la frontière pour l'étape 0.

Ensuite, puisque tous les points du domaine sont connus, nous calculons $x = u_{i,j}^1$ pour les points de la frontière de l'étape 1 en résolvant l'équation (3.68).

Et ainsi de suite ...

Étape n : correspondant au temps $t = n \cdot \Delta t$, les valeurs $u_{i,j}^n$ qui sont à l'intérieur du domaine (hors frontière) seront calculées avec le schéma numérique (la première équation du système (3.54) ou (3.59)) à partir des valeurs $u_{i,j}^{n-1}$ des points de la frontière pour l'étape $n - 1$. Puis, après avoir connu tous les points du domaine, on calcule $x = u_{i,j}^n$ pour les points de la frontière en résolvant l'équation (3.68).

3.3. SIMULATIONS

3.3.1. DONNÉES D'ENTRÉE:

$u_0 = 20^\circ\text{C}$ (température initiale de la charge) ;

$\theta_0 = 1000^\circ\text{C}$; $T = 7200 \text{ s}$

$\epsilon_1 = 0,85$; $\epsilon_2 = 0,87$

σ Constante de Stephan Boltzmann dont la valeur est $5.67 \cdot 10^{-8}$

Pour les fonctions $k(u)$, $c_p(u)$ et $\rho(u)$ se référer aux formules (3.8), (3.10) and (3.11).

$L = 3$; $l = 1$

$m + 1 = 10$ Nombre de pas d'espace

$h = l/(l + 1)$ (pas d'espace);

$dt = 30\text{s}$ (pas de temps);

3.3.2. RÉSULTATS:

Schéma 1

$$m_u(\theta_0, T) = 682,4; \sigma_u(\theta_0, T) = 172,1$$

Profil($u_{i,j}^T$) =

922.	922.	886.	862.	848.	843.	848.	862.	886.	922.	922.
922.	819.	744.	694.	666.	657.	666.	694.	744.	819.	922.
886.	744.	643.	576.	539.	527.	539.	576.	643.	744.	886.
862.	694.	576.	500.	457.	443.	457.	500.	576.	694.	862.
848.	666.	539.	457.	411.	396.	411.	457.	539.	666.	848.
843.	657.	527.	443.	396.	381.	396.	443.	527.	657.	843.
848.	666.	539.	457.	411.	396.	411.	457.	539.	666.	848.
862.	694.	576.	500.	457.	443.	457.	500.	576.	694.	862.
886.	744.	643.	576.	539.	527.	539.	576.	643.	744.	886.
922.	819.	744.	694.	666.	657.	666.	694.	744.	819.	922.
922.	922.	886.	862.	848.	843.	848.	862.	886.	922.	922.

Figure 3.8 : distribution des températures dans le métal chauffé (schéma 1)

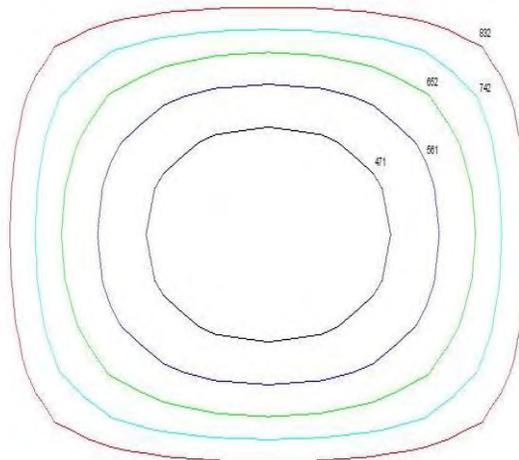


Figure 3.9 : courbes de niveau de la distribution des températures (schéma 1)

Valeur des courbes de niveau en °C: 832; 742; 651; 561; 471

Schéma 2

$$m_u(\theta_0, T) = 680,1; \sigma_u(\theta_0, T) = 172,9$$

Profil($u_{i,j}^T$) =

921.	921.	885.	861.	846.	842.	846.	861.	885.	921.	921.
921.	817.	741.	692.	663.	654.	663.	692.	741.	817.	921.
885.	741.	640.	573.	536.	524.	536.	573.	640.	741.	885.
861.	692.	573.	496.	453.	440.	453.	496.	573.	692.	861.
846.	663.	536.	453.	407.	393.	407.	453.	536.	663.	846.
842.	654.	524.	440.	393.	377.	393.	440.	524.	654.	842.
846.	663.	536.	453.	407.	393.	407.	453.	536.	663.	846.
861.	692.	573.	496.	453.	440.	453.	496.	573.	692.	861.
885.	741.	640.	573.	536.	524.	536.	573.	640.	741.	885.
921.	817.	741.	692.	663.	654.	663.	692.	741.	817.	921.
921.	921.	885.	861.	846.	842.	846.	861.	885.	921.	921.

Figure 3.10 : distribution des températures dans le métal chauffé (schéma 2)

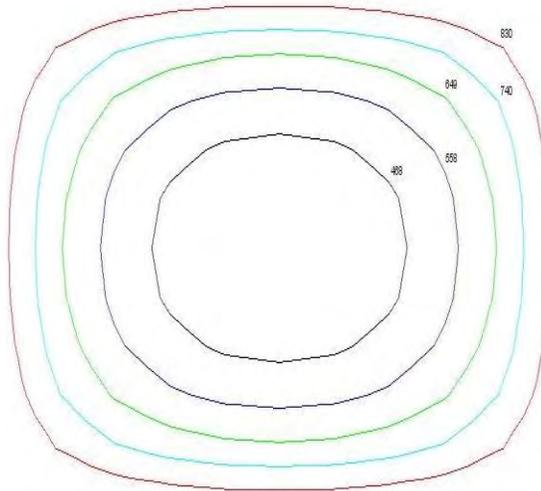


Figure 3.11 : courbes de niveau de la distribution des températures (schéma 2)

Valeur des courbes de niveau en °C: 830; 740; 649; 558; 468

Les courbes de niveau sont des carrés concentriques dont le centre correspond à celui du métal. Les températures diminuent à mesure que l'on s'éloigne de la frontière (surface externe). A la frontière, les températures deviennent plus grandes à mesure que l'on se rapproche des coins. Donc, la physique du problème est respectée.

NB : les faibles écarts observés dans les distributions de températures entre les deux schémas s'expliquent par l'erreur de discrétisation de $\nabla \cdot (k(u)\nabla u)$ dans l'EDP (3.45) qui est composée de l'erreur de discrétisation de $\|\nabla u\|^2$ et de l'erreur de discrétisation de Δu pour le schéma numérique 1. Par contre dans le schéma numérique 2, le terme $\nabla \cdot (k(u)\nabla u)$ est discrétisé directement sans transformation préalable.

3.4. ANALYSE DIMENSIONNELLE

La détermination des paramètres ou groupes adimensionnels pertinents fournit un outil puissant pour relier les données expérimentales (c'est-à-dire les données obtenues sur le modèle considéré) au système réel (généralement plus grand) (prototype).

Considérons l'équation aux dérivées partielles ci-dessous :

$$(3.68) \begin{cases} \rho(u)c_p(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k(u)\nabla u) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ k(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4), & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases}$$

Posons :

$$v = \frac{u}{\theta_0}, \quad v_0 = \frac{u_0}{\theta_0}, \quad t = \frac{l^2}{\psi(\theta_0)} t', \quad x = lx' \quad (3.69)$$

On obtient alors :

$$\rho(\theta_0)c_p(\theta_0) \frac{\rho(u)c_p(u)}{\rho(\theta_0)c_p(\theta_0)} \theta_0 \frac{\psi(\theta_0)}{l^2} \frac{\partial v}{\partial t'} - \frac{k(\theta_0)}{l^2} \theta_0 \nabla \cdot \left(\frac{k(u)}{k(\theta_0)} \nabla v \right) = 0$$

En divisant par $\rho(\theta_0)c_p(\theta_0)$ obtient :

$$\frac{\rho(u)c_p(u)}{\rho(\theta_0)c_p(\theta_0)} \theta_0 \frac{\psi(\theta_0)}{l^2} \frac{\partial v}{\partial t'} - \frac{\psi(\theta_0)}{l^2} \theta_0 \nabla \cdot \left(\frac{k(u)}{k(\theta_0)} \nabla v \right) = 0$$

En divisant par $\frac{\psi(\theta_0)}{l^2}$ obtient :

$$\frac{\rho(u)c_p(u)}{\rho(\theta_0)c_p(\theta_0)} \frac{\partial v}{\partial t'} - \nabla \cdot \left(\frac{k(u)}{k(\theta_0)} \nabla v \right) = 0$$

On pose $\rho_r(v) = \frac{\rho(u)}{\rho(\theta_0)}$; $c_{p_r}(v) = \frac{c_p(u)}{c_p(\theta_0)}$ et $k_r(v) = \frac{k(u)}{k(\theta_0)}$

On obtient ainsi :

$$\rho_r(v)c_{p_r}(v) \frac{\partial v}{\partial t'} - \nabla \cdot (k_r(v)\nabla v) = 0$$

Et on vérifie que :

$$\psi_r(v) = \frac{k_r(v)}{\rho_r(v)c_{p_r}(v)} = \frac{\frac{k(u)}{k(\theta_0)}}{\frac{\rho(u)c_p(u)}{\rho(\theta_0)c_p(\theta_0)}} = \frac{k(u)}{k(\theta_0)} * \frac{\rho(\theta_0)c_p(\theta_0)}{\rho(u)c_p(u)} = \frac{k(u)}{\rho(u)c_p(u)} * \frac{\rho(\theta_0)c_p(\theta_0)}{k(\theta_0)} = \frac{\frac{k(u)}{\rho(u)c_p(u)}}{\frac{k(\theta_0)}{\rho(\theta_0)c_p(\theta_0)}} = \frac{\psi(u)}{\psi(\theta_0)}$$

Conditions aux frontières :

$$k(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4)$$

En adimensionnalisant on obtient après transformations successives :

$$k_r(v)k(\theta_0) \frac{\theta_0}{l} \frac{\partial v(x, t)}{\partial n} = \mathcal{F}\sigma\theta_0^4(1 - v^4)$$

$$k_r(v) \frac{\partial v(x, t')}{\partial n} = \frac{\mathcal{F}\sigma l\theta_0^3}{k(\theta_0)} * (1 - v^4)$$

Soit \mathcal{G} le nombre adimensionnel suivant :

$$\mathcal{G} = \frac{\mathcal{F}\sigma l\theta_0^3}{k_r(v)k(\theta_0)} = \frac{\mathcal{F}\sigma l\theta_0^3}{k(u)} \quad (3.70)$$

$$(3.71) \begin{cases} \rho_r(v)c_{p_r}(v) \frac{\partial v}{\partial t'} - \nabla \cdot (k_r(v)\nabla v) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial v(x, t')}{\partial n} = \mathcal{G}(1 - v^4), & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ v(x, 0) = v_0 \end{cases}$$

NB : La grandeur adimensionnelle \mathcal{G} mesure le rapport entre la quantité de chaleur radiative émise par la source et la quantité de chaleur transférée par conduction à la surface de la charge. Il est appelé nombre de Stark, voir dans Rousse, D. R. (2000).

$$\mathcal{G} = \frac{\text{rayonnement émis par la source}}{\text{chaleur transférée par conduction dans la charge}}$$

\mathcal{G} est une grandeur caractéristique de l'échange de chaleur dans le four.

Théorème de Vaschy-Buckingham : si une équation physique met en jeu n variables physiques, celles-ci dépendant de k unités fondamentales, alors il existe une équation équivalente mettant en jeu $n-k$ variables sans dimension construites à partir des variables originelles.

Dans ce problème, nous avons 7 variables : $u, \rho, c_p, k, \theta_0, \mathcal{F}, \sigma$

Et 4 unités fondamentales : masse, longueur, temps, température

Donc d'après le théorème de Vaschy-Buckingham, il existe une équation équivalente mettant en jeu $7 - 4 = 3$ variables sans dimension construites à partir des variables originelles.

Comme on a déjà deux variables sans dimension qui sont v et \mathcal{G} , la seule variable sans dimension restante est la diffusité thermique réduite $\psi_r(v) = \frac{\psi(u)}{\psi(\theta_0)}$

Nous pouvons donc poser la relation suivante : $v = H(\mathcal{G}, \psi_r)$ pour une certaine fonction H .

Dans ce problème, la fonction H n'est disponible que par ses valeurs discrètes sur la grille spatiale et temporelle. Par conséquent on pourra par exemple prendre le schéma numérique 2 (3.58) adimensionnalisé comme représentant ces valeurs discrètes.

Nous pouvons donc en définitive dire que le profil de températures dans le métal en chauffage dépend uniquement de deux nombres adimensionnels : \mathcal{G} et ψ_r et que le temps de chauffage est en première approximation proportionnel à largeur de la charge au carré.

CHAPITRE IV : APPLICATION A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME INVERSE D'IDENTIFICATION DE PARAMETRE D'UN FLUX RADIATIF NET

4.1 Introduction

4.2 Position du problème

4.3 Algorithme de résolution du problème inverse

4.4 Théorème de convergence

4.5 Application numérique

4.5 Analyse et interprétations

Nomenclature :

Lettres latines :

e Écart type des erreurs de mesure (en valeur relative par rapport à température θ_0 , °C du four)

\mathcal{F} Facteur pour la chaleur nette rayonnée étant donné l'équation $q_1 = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4)$

\mathcal{F}^* Solution théorique du problème inverse $G(\mathcal{F}) = 0$

\mathcal{F}_n^* Approximation de la valeur de \mathcal{F}^* calculée à l'itération n .

$\bar{\mathcal{F}}$ Valeur exacte du facteur \mathcal{F} donnée par le modèle de Hottel (équation (3.42))

\mathcal{F}_{heur} Courbe représentant les variations de \mathcal{F}^* de la méthode heuristique vs e

\mathcal{F}_{CGR} Courbe représentant les variations de \mathcal{F}^* de la méthode CGR vs e

\mathcal{F}_{QN} Courbe représentant les variations de \mathcal{F}^* de la méthode QN vs e

G Fonction « écart »

iter Nombre d'itérations pour obtenir la solution numérique

$m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes}$ - Températures moyennes mesurées à la frontière (bord), en °C

$m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod}$ - Températures moyennes calculées par le modèle à la frontière (bord), °C

N_s Nombre de mesures temporelles pour chacun des capteurs.

n_s Nombre de capteurs à la surface externe du corps chauffé.

n Nombre d'itérations

q_1 Flux de chaleur radiatif net sortant de la surface 1, W/m^2

R^2 Coefficient de détermination

Simul Nombre de fois ou la fonction G est évaluée pour obtenir la solution numérique

T Durée du processus de chauffage, s

T_1 Température de la surface 1, °C

T_2 Température de surface 2, °C

$(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod}$ Températures de sortie calculées par le modèle aux points $\{i, j\}$ de la grille appartenant à la surface externe (frontière) du matériau à chauffer à l'instant T_k et pour une température de source θ_0 , °C

$(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes}$ Températures mesurées aux points $\{i, j\}$ de la grille appartenant à la surface externe (frontière) du matériau à chauffer à l'instant T_k et pour une température source θ_0 , °C

Lettres grecques :

$B(\mathcal{F}_{n-1}^*, 2h_{n-1})$ Boule de centre \mathcal{F}_{n-1}^* , de rayon $2h_{n-1}$

δ Tolérances prescrites par l'utilisateur contrôlant l'écart entre les valeurs approximatives \mathcal{F}_n^* et \mathcal{F}_{n-1}^* de \mathcal{F} .

Abréviations :

RGC Régularisation par gradient conjugué

QN Méthode de Quasi-Newton

4.1. INTRODUCTION :

Nous présentons dans cette section un problème inverse de conduction-rayonnement combiné consistant à déterminer le flux de chaleur rayonnante net reçu par un métal chauffé à l'intérieur d'un four électrique avec des mesures de température à sa surface externe. La solution à ce problème est obtenue avec une méthode de problème inverse utilisant la technique de spécification de fonction en supposant un flux de la forme $q = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4)$

Où \mathcal{F} est une constante à déterminer. Les températures « mesurées » sont simulées.

Nous utilisons trois méthodes pour la résolution numérique du problème inverse :

- une méthode heuristique que nous avons mise au point et dont nous démontrons la convergence,
- la méthode du gradient conjugué,
- la méthode de quasi-Newton.

4.2. POSITION DU PROBLÈME :

Comme dans les sections précédentes, le processus de chauffage se produit à l'intérieur d'un four électrique dans lequel la chaleur est produite par des éléments de résistance tapissant l'intérieur du four. La figure suivante schématise le four avec sa charge à l'intérieur de celui-ci.

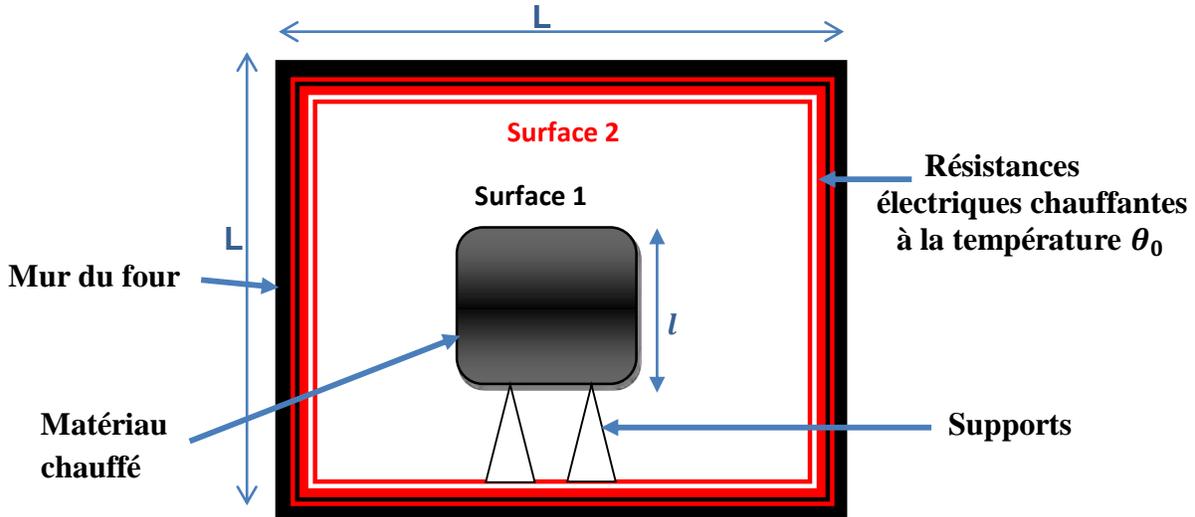


Figure 4.1 : Schématisation du four avec sa charge

La chaleur est transmise au matériau par rayonnement. Les équations qui régissent le modèle sont les suivantes :

$$\begin{cases} \rho(u)c_p(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k(u)\nabla u) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ k(u) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = q_1(u, \theta_0), & (x, t) \in \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

\$n_s\$ capteurs de température sont placés de manière équidistante sur la surface externe du matériau à chauffer.

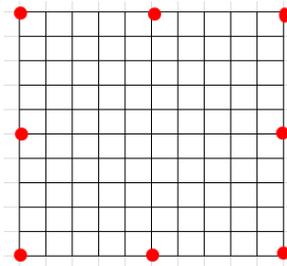


Figure 4.2 : emplacements des capteurs de température sur le corps chauffé

C'est à ces mêmes endroits que les températures seront calculées pour la fonction « écart » $G(\mathcal{F})$.

$$G(\mathcal{F}) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^N \left(m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} - m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes} \right)^2 \quad (4.2)$$

Où pour n_s capteurs de températures, nous avons :

$$; \quad m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} = \frac{\sum_{i,j} u_{i,j}^{T_k, \theta_0}}{n_s} \quad (4.3)$$

$$m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes} = \frac{\sum_{i,j} u_{i,j}^{T_k, \theta_0}}{n_s} \quad (4.4)$$

La notation " m_B " signifie que la température moyenne est calculée uniquement pour les points situés à la surface externe du matériau chauffé.

Toutes les 30 minutes, l'indication de chaque capteur est notée jusqu'à la fin des mesures soit une durée totale de 3 heures. Nous aurons donc 6 groupes de mesures correspondant aux différents instants de prise de mesures et chaque groupe comprenant 8 mesures correspondant aux emplacements des capteurs de température. Par conséquent, $n_s = 8$ et $N_s = 6$.

L'objectif de ce travail est de calculer q_1 dans l'équation (4.1) en utilisant des techniques d'analyse inverse. Les méthodes d'analyse inverse cherchent à partir de mesures, de calculer les paramètres ou les fonctions inconnues du modèle. Malheureusement, les relations décrivant les solutions inverses ne sont pas mathématiquement bien posés, ce qui impose des techniques de résolution plus difficiles que pour les problèmes dits « directs ». Ici, nous exposons une technique qui aidera à surmonter cette difficulté en résolvant des suites de problèmes « directs » convenablement choisis.

En utilisant la méthode de spécification de fonction de Beck, le flux de chaleur limite sera supposé de la forme suivante :

$$\text{Dans notre cas, } q_1(u, \theta_0) = \mathcal{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4) \quad (4.5)$$

Par conséquent, le problème inverse auquel nous sommes confrontés est formulé de la manière suivante : étant donné un ensemble de températures mesurées $(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes}$

à la surface externe du corps chauffé pendant les temps T_k , $k = 1$ à N_s , et la fonction écart $G(\mathcal{F})$, trouver \mathcal{F}^* au sens des moindres carrés. Cela implique de trouver $\mathcal{F}^* \in \text{Argmin}\{G(\mathcal{F}), \mathcal{F} \in [0,1]\}$ c'est-à-dire trouver \mathcal{F}^* tel que $G(\mathcal{F}^*) = \min\{G(\mathcal{F}), \mathcal{F} \in [0,1]\}$. Les températures mesurées $\left(u_{i,j}^{T_k, \theta_0}\right)_{mes}$ sont simulées en utilisant la valeur exacte du facteur \mathcal{F} calculée avec la méthode de zonage de Hottel, puis en ajoutant des erreurs de mesure modélisées par une distribution normale à moyenne nulle et divers écarts types. L'écart type des erreurs de mesure e est pris en valeur relative par rapport à température θ_0 , °C du four.

Puisque les valeurs de \mathcal{F} se trouvent dans un ensemble compact (l'intervalle $[0,1]$) et que la fonction G est continue, le problème d'optimisation admet une solution grâce à un théorème fondamental et bien connu de l'optimisation. Ainsi, on sélectionne des sous-ensembles discrets de cet ensemble, puis on évalue la fonction « écart » sur ces sous-ensembles pour vérifier la distance qui nous sépare de l'optimum. Ces sous-ensembles sont sélectionnés de la manière suivante : Soit \mathcal{F}_{n-1}^* la valeur optimale obtenue à l'étape $n - 1$. Le sous-ensemble discret S_n pour l'étape n est choisi de telle sorte que \mathcal{F}_{n-1}^* appartient à S_n et soit le centre d'une boule de rayon décroissant contenant S_n .

Dans la section suivante, la valeur exacte de \mathcal{F} sera calculée en utilisant la méthode du rayonnement net de Hottel. Cette valeur servira à «générer» les températures mesurées à la frontière aux emplacements des capteurs et à servir de base de comparaison avec les valeurs \mathcal{F}^* calculées avec la technique d'analyse inverse.

4.3. ALGORITHME DE RÉOLUTION DU PROBLÈME INVERSE:

Le problème inverse est formulé de la manière suivante : étant donné un ensemble de températures mesurées $\left(u_{i,j}^{T_k, \theta_0}\right)_{mes}$ à la surface externe du corps chauffé pendant les instants T_k , $k = 1$ à N_s , et la fonction « écart » $G(\mathcal{F})$ exprimée par :

$$G(\mathcal{F}) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^N \left(m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} - m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes} \right)^2 \quad (4.6)$$

Problème (P): trouver \mathcal{F}^* tel que $\mathcal{F}^* \in \text{Argmin}\{G(\mathcal{F}), \mathcal{F} \in K\}$. Ce problème est appelé.

Notons d'abord que G est continu par rapport à \mathcal{F} en tant que composition de fonctions continues.

Pour le calcul, nous considérons le problème approché suivant (\bar{P}):

Trouver une suite minimisante $(\mathcal{F}_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ pour G convergeant vers \mathcal{F}^* . Rappelons qu'une suite minimisante pour G est une suite $(\mathcal{F}_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $G(\mathcal{F}_n^*)$ converge vers $\min\{G(\mathcal{F}), \mathcal{F} \in K\}$. Dans la suite de l'exposé et compte tenu de la physique du problème, on supposera que $K = [0,1]$

Suivant la formule (3.11) $\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{\epsilon_1 + (\frac{1}{\epsilon_2} - 1)\frac{1}{L}}$. Nous voyons que $\mathcal{F}^* = 0$ est impossible et

d'autre part, $\mathcal{F}^* = 1$ si et seulement si $l = 0$ (ce qui signifie qu'il n'y a aucune charge dans le four) et $\epsilon_1 = 1$. Donc, nous pouvons considérer que la solution $\mathcal{F}^* \in]0,1[$

Rappelons aussi que $m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod}$ et $m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes}$ dans (4.6) sont définis dans les formules (4.3) et (4.4).

4.3.1 THÉOREME D'EXISTENCE :

Théorème 1 :

Il existe au moins une unique solution au problème d'optimisation (P) et en plus, la fonction G est convexe.

Preuve :

D'abord comme $K = [0,1]$ est un sous ensemble compact de \mathbf{R} et G est une fonction continue sur K , le problème d'optimisation (P) admet au moins une solution que nous noterons \mathcal{F}^* .

Calculons maintenant les dérivées première et seconde de la fonction G par rapport à \mathcal{F} . On obtient :

$$G'(\mathcal{F}) = \frac{2}{N_s} \sum_{k=1}^N m_B(v_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} \cdot (m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} - m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes}) \quad (4.7)$$

$$G''(\mathcal{F}) = \frac{2}{N_s} \sum_{k=1}^N m_B(w_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} \cdot (m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} - m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes}) +$$

$$\frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \left[m_B(v_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} \right]^2 \quad (4.8)$$

Avec:

$$v_{i,j}^{T_k, \theta_0} = \frac{du_{i,j}^{T_k, \theta_0}}{d\mathcal{F}} \text{ et } w_{i,j}^{T_k, \theta_0} = \frac{d^2 u_{i,j}^{T_k, \theta_0}}{d\mathcal{F}^2} \quad (4.9)$$

Comme $\mathcal{F}^* \in]0,1[$ est solution au problème d'optimisation (P) on a forcément $G'(\mathcal{F}^*) = 0$ et donc, grâce à (4.7) on obtient (en utilisant la propriété (S) de sommation finie : $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_I a_i \sum_J b_j$ pour des ensembles finis I et J et des réels a_i et b_j):

$$\sum_{k=1}^N m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} = \sum_{k=1}^N m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes} \quad (4.10)$$

Maintenant appliquant à nouveau la propriété (S) pour l'équation (4.8) et utilisant la relation (4.10), on obtient :

$$G''(\mathcal{F}^*) = \frac{2}{N_s} \sum_{k=1}^N \left[m_B(v_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mod} \right]^2 \geq 0 \quad (4.11)$$

Et, par conséquent, la fonction $\mathcal{F} \mapsto G(\mathcal{F})$ est localement convexe en $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$.

Mais puisque tout point critique de G vérifie (4.11), on en déduit G ne peut admettre de maximum local dans $int(K)$ et par conséquent, G est convexe sur K . ■

4.3.2 ALGORITHME :

L'algorithme que nous allons mettre au point sera donc basé sur la recherche d'un point \mathcal{F}^* utilisant l'information de convexité de G sur $]0,1[$.

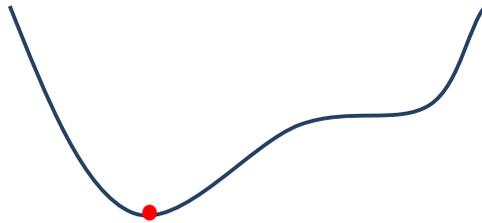


Figure 4.3: Schématisation du point \mathcal{F}^*

L'arrêt de l'algorithme survient lorsque l'une des conditions suivantes est remplie :

$$\|\mathcal{F}_n^* - \mathcal{F}_{n-1}^*\| \leq \delta \quad (4.12)$$

$\|\cdot\|$ représentant la norme Euclidienne la formule (4.12) ci-dessus.

Maintenant, étant donné l'existence de solution \mathcal{F}^* au problème (P) et la convexité de G , la démarche algorithmique suivante sera suivie pour le calcul d'une approximation numérique de \mathcal{F}^* .

Étape0:

Puisque les valeurs de \mathcal{F} se trouvent dans le segment $[0, 1]$, on discrétise cet intervalle avec un pas h_0 donné. Par conséquent, les nœuds sont également répartis dans cet intervalle et sont les suivants: $1h_0, 2h_0, 3h_0, \dots$ de telle sorte qu'ils se situent tous dans $[0, 1]$. Ensuite, on évalue G en ces points. On sélectionne ensuite le point avec la valeur minimale de G qui est le point le plus proche de \mathcal{F}^* et notons \mathcal{F}_0^* la valeur correspondante de \mathcal{F} . Si le critère d'arrêt (4.12) est satisfait, alors on arrête les itérations et on pose $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_0^*$, sinon on passe à l'étape 1.

Étape1:

On discrétise l'intervalle $\left[\mathcal{F}_0^* - \frac{h_0}{2}, \mathcal{F}_0^* + \frac{h_0}{2} \right]$ centré à \mathcal{F}_0^* avec un pas h_1 . Par conséquent, les nœuds sont répartis de manière égale dans l'intervalle et la distance entre deux nœuds consécutifs est exactement h_1 . De plus, on peut les choisir de telle manière que la moitié des points se trouve à gauche de \mathcal{F}_0^* et l'autre à droite. Ensuite, on évalue G en ces points et sélectionne le point avec la valeur minimale pour G qui est le point le plus proche de \mathcal{F}^* . Si ce point n'est pas atteint par exemple dans le cas où la valeur minimale est atteinte à l'un des deux points extrêmes, on ajoute d'autres points soit à gauche, soit à droite du point considéré pour que ce point soit atteint comme dans figure (4.3). Notons \mathcal{F}_1^* la valeur de \mathcal{F} pour laquelle G est minimum. Par construction, la valeur de G à ce stade sera inférieure à celle de l'étape précédente. Si le critère d'arrêt (4.12) est satisfait, alors on arrête les itérations et on pose $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_1^*$, sinon on passe à l'étape 2.

Étapen:

On discrétise l'intervalle $\left[\mathcal{F}_{n-1}^* - \frac{h_{n-1}}{2}, \mathcal{F}_{n-1}^* + \frac{h_{n-1}}{2} \right]$ centré à \mathcal{F}_{n-1}^* avec un pas de longueur h_n . Par conséquent, les nœuds sont répartis de manière égale dans l'intervalle et la distance entre deux nœuds consécutifs est exactement h_n . De plus, on peut les choisir de telle sorte que la moitié des points se trouve à gauche de \mathcal{F}_{n-1}^* et l'autre à droite. Ensuite, on évalue G en ces points et on sélectionne le point de valeur minimale pour G qui est le point le plus proche de \mathcal{F}^* . Si ce point n'est pas atteint par exemple dans le cas où la valeur minimale est atteinte à l'un des deux

points extrêmes, on ajoute d'autres points soit à gauche, soit à droite du point considéré pour que ce point soit atteint comme dans figure (4.3). Notons \mathcal{F}_n^* la valeur de \mathcal{F} pour laquelle G est minimum. Par construction, la valeur de G à cette étape sera inférieure à celle de l'étape précédente ($n + 1$).

Si le critère d'arrêt (4.12) est satisfait, alors on arrête les itérations et on pose $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_n^*$, sinon on passe à l'étape $n + 1$.

4.3.3. THEOREME DE CONVERGENCE:

Dans le cas d'un sous ensemble compact K de \mathbf{R}^N et en s'inspirant de l'algorithme que nous avons développée dans [0,1], on peut énoncer le théorème de convergence suivant :

Théorème 2 :

Soit K sous ensemble compact de \mathbf{R}^N , G une fonction continue sur K et $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite géométrique strictement décroissante qui converge vers zéro. Soit \mathcal{F}^* l'unique solution du problème (P) et $(\mathcal{F}_n^*)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite construite comme dans l'algorithme. Si pour tout entier naturel non nul n , $\mathcal{F}_n^* \in B(\mathcal{F}_{n-1}^*, 2h_{n-1})$, alors $(\mathcal{F}_n^*)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers \mathcal{F}^* .

Preuve :

D'abord comme K est un sous ensemble compact de \mathbf{R}^N et G une fonction continue sur K , le problème d'optimisation (P) admet au moins une solution. Supposons que cette solution est unique.

Maintenant, montrons que $(\mathcal{F}_n^*)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy.

Puisque $\mathcal{F}_n^* \in B(\mathcal{F}_{n-1}^*, 2h_{n-1})$ on a $d(\mathcal{F}_{n-1}^*, \mathcal{F}_n^*) \leq 2h_{n-1}$

$$\begin{aligned} d(\mathcal{F}_{p+r}^*, \mathcal{F}_p^*) &\leq d(\mathcal{F}_{p+1}^*, \mathcal{F}_p^*) + d(\mathcal{F}_{p+2}^*, \mathcal{F}_{p+1}^*) + \dots + d(\mathcal{F}_{p+r}^*, \mathcal{F}_{p+r-1}^*) \\ &\leq 2(h_p + h_{p+1} \dots + h_{p+r-1}) \end{aligned}$$

Comme $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite géométrique qui converge vers zéro, on peut prendre $h_n = s^n$ ($0 < s < 1$).

Et puisque $0 < s < 1$, donc on a :

$$d(\mathcal{F}_{p+r}^*, \mathcal{F}_p^*) \leq 2s^p (s + s^2 + \dots + s^{r-1}) \leq \frac{2s^p}{1-s}$$

$(\mathcal{F}_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy et par conséquent converge vers une limite que nous appelons F .

Montrons maintenant que $(\mathcal{F}_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \mathcal{F}^* .

En effet puisque $(\mathcal{F}_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minimisante pour G , on a $G(\mathcal{F}_n^*) \rightarrow \min\{G(\mathcal{F}), \mathcal{F} \in E\}$

Et par continuité de G , unicité de la limite et unicité de la solution au problème (P), on a donc nécessairement :

$$F = \mathcal{F}^* \blacksquare$$

Remarque :

Notons qu'une condition suffisante pour l'exigence $\mathcal{F}_n^* \in B(\mathcal{F}_{n-1}^*, 2h_{n-1})$ du théorème est que G soit strictement convexe.

Preuve :

Si G est strictement convexe, il est clair que $\mathcal{F}_n^* \in B(\mathcal{F}^*, h_n)$ pour tout n .

Par conséquent,

$$d(\mathcal{F}_{n-1}^*, \mathcal{F}_n^*) \leq d(\mathcal{F}_{n-1}^*, \mathcal{F}^*) + d(\mathcal{F}_n^*, \mathcal{F}^*) \leq 2h_{n-1}$$

Et dans ce cas, l'erreur d'approximation de \mathcal{F}^* par \mathcal{F}_n^* est au plus égal à h_n ■

À partir de maintenant, à la fin des itérations pour chaque niveau d'erreur, nous allons confondre \mathcal{F}^* et \mathcal{F}_n^* .

4.4. APPLICATION NUMÉRIQUE :

4.4.1. DONNÉES D'ENTRÉE DU MODÈLE

$u_0 = 20^\circ\text{C}$ (Température initiale de la charge) ;

$\epsilon_1 = 0.85$; $\epsilon_2 = 0.87$

Pour les fonctions $k(u)$, $c_p(u)$ et $\rho(u)$ se référer aux formules (3.8), (3.10) and (3.11).

$L = 3$; $l = 1$

$T_k, k = 1; 2; 3; 4; 5$ et 6

NB : Les unités de temps sont les «secondes» et les unités de température sont les «degrés Celsius».

4.4.2. RÉSULTATS :

Dans le tableau ci-dessous, nous calculons $m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes}$ en suivant la procédure ci-dessous :

- Pour chaque T_k , la valeur exacte $\bar{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} est calculée avec la formule (3.42)
- La valeur résultante de $\bar{\mathcal{F}}$ est utilisée dans les équations (3.58) pour calculer les températures limites aux emplacements des capteurs, comme indiqué à la figure (4.2).
- Les températures résultantes sont ajoutées à une variable distribuée normalement de moyenne zéro et d'écart type e simulant les erreurs de mesure.
- Ensuite, la valeur moyenne des mesures pour le temps T_k est calculée comme

$$\text{suit : } m_B(u_{i,j}^{T_k, \theta_0})_{mes} = \frac{\sum_{i,j} u_{i,j}^{T_k, \theta_0}}{n_s}$$

Tableau 4.1: Températures moyennes mesurées sur la surface externe pour divers écarts types d'erreurs et en divers instants

T_k	$e = 0$	$e = 0.001$	$e = 0.003$	$e = 0.005$	$e = 0.007$	$e = 0.01$
30 min	672.94214	672.73834	672.76348	671.79673	675.7879	672.35582
1h00	777.64277	778.12963	777.365	776.11914	776.35003	774.67305
1h30min	833.56531	833.6618	832.46909	833.41146	836.98522	828.77977
2h00	869.2542	869.12382	869.86982	873.54303	862.40316	862.60923
2h30min	894.1979	893.85417	893.37132	892.37499	889.13949	888.53997
3h00	912.63555	913.09766	913.85033	914.87673	913.08373	908.60909

Dans les tableaux ci-dessous, l'algorithme est appliqué pour chaque écart type des erreurs de mesure en calculant $G(\mathcal{F})$ pour des sous-ensembles discrets sélectionnés de $[0, 1]$. Noter que nous prenons la racine carrée de G et que pour simplifier, nous la désignons toujours par G . On choisit une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec terme général $h_n = (0,1)^n$ et, $\delta = 0,005$.

$e = 0$

Pas1: $h_1 = 0.1$

G(0,1)	G(0,2)	G(0,3)	G(0,4)	G(0,5)	G(0,6)	G(0,7)	G(0,8)	G(0,9)
625,059	458,343	321,345	217,029	139,524	81,679	37,961	4,460	21,579

**METHODES NUMERIQUES EN CONTROLE ET PROBLEMES INVERSES APPLIQUEES AUX
TRANSFERTS DE CHALEUR COMBINES RAYONNEMENT-CONDUCTION**

Pas2: $h_2 = 0.01$

G(0,75)	G(0,76)	G(0,77)	G(0,78)	G(0,79)	G(0,80)	G(0,81)	G(0,82)	G(0,83)	G(0,84)	G(0,85)
20,128	16,832	13,620	10,489	7,436	4,460	1,558	1,272	4,033	6,726	9,354

Pas3: $h_3 = 0,001$

G(0,815)	G(0,816)	G(0,817)	G(0,818)	G(0,819)	G(0,820)	G(0,821)	G(0,822)	G(0,823)	G(0,824)	G(0,825)
0,134	0,148	0,430	0,711	0,992	1,272	1,551	1,829	2,107	2,384	2,661

$\mathcal{F}^* = 0,815$

$e = 0.001$

Pas1: $h_1 = 0.1$

G(0,1)	G(0,2)	G(0,3)	G(0,4)	G(0,5)	G(0,6)	G(0,7)	G(0,8)	G(0,9)
625,123	458,404	321,405	217,087	139,579	81,731	38,012	4,519	21,537

Pas2: $h_2 = 0.01$

G(0,75)	G(0,76)	G(0,77)	G(0,78)	G(0,79)	G(0,80)	G(0,81)	G(0,82)	G(0,83)	G(0,84)	G(0,85)
20,179	16,883	13,671	10,541	7,491	4,519	1,637	1,267	3,999	6,688	9,314

Pas3: $h_3 = 0,001$

G(0,815)	G(0,816)	G(0,817)	G(0,818)	G(0,819)	G(0,820)	G(0,821)	G(0,822)	G(0,823)	G(0,824)	G(0,825)
0.369	0,338	0,501	0,739	0,999	1,267	1,539	1,812	2,086	2,360	2,634

$\mathcal{F}^* = 0,816$

$e = 0.003$

Pas1: $h_1 = 0.1$

G(0,1)	G(0,2)	G(0,3)	G(0,4)	G(0,5)	G(0,6)	G(0,7)	G(0,8)	G(0,9)
624,968	458,224	321,201	216,868	139,356	81,507	37,792	4,354	21,771

Pas2: $h_2 = 0.01$

G(0,75)	G(0,76)	G(0,77)	G(0,78)	G(0,79)	G(0,80)	G(0,81)	G(0,82)	G(0,83)	G(0,84)	G(0,85)
19,966	16,673	13,465	10,341	7,301	4,354	1,586	1,646	4,282	6,948	9,564

Pas3: $h_3 = 0,001$

G(0,805)	G(0,806)	G(0,807)	G(0,808)	G(0,809)	G(0,810)	G(0,811)	G(0,812)	G(0,813)	G(0,814)	G(0,815)
2,929	2,651	2,376	2,106	1,842	1,586	1,345	1,124	0,941	0,817	0,782

$\mathcal{F}^* = 0,815$

$e = 0.005$

Pas1: $h_1 = 0.1$

G(0,1)	G(0,2)	G(0,3)	G(0,4)	G(0,5)	G(0,6)	G(0,7)	G(0,8)	G(0,9)
625,419	458,623	321,532	217,199	139,561	81,678	37,961	4,914	21,803

**METHODES NUMERIQUES EN CONTROLE ET PROBLEMES INVERSES APPLIQUEES AUX
TRANSFERTS DE CHALEUR COMBINES RAYONNEMENT-CONDUCTION**

Pas2: $h_2 = 0.01$

G(0,75)	G(0,76)	G(0,77)	G(0,78)	G(0,79)	G(0,80)	G(0,81)	G(0,82)	G(0,83)	G(0,84)	G(0,85)
20,174	16,900	13,721	10,642	7,684	4,914	2,684	2,631	4,702	7,185	9,718

Pas3: $h_3 = 0,001$

G(0,815)	G(0,816)	G(0,817)	G(0,818)	G(0,819)	G(0,820)	G(0,821)	G(0,822)	G(0,823)	G(0,824)	G(0,825)
2,249	2,262	2,309	2,389	2,497	2,631	2,787	2,959	3,148	3,348	3,557

G(0,814)=2,272

$\mathcal{F}^* = 0,815$

$e = 0.007$

Pas1: $h_1 = 0.1$

G(0,1)	G(0,2)	G(0,3)	G(0,4)	G(0,5)	G(0,6)	G(0,7)	G(0,8)	G(0,9)
623,892	457,316	320,499	216,369	139,029	81,332	37,803	5,729	22,206

Pas2: $h_2 = 0.01$

G(0,75)	G(0,76)	G(0,77)	G(0,78)	G(0,79)	G(0,80)	G(0,81)	G(0,82)	G(0,83)	G(0,84)	G(0,85)
20,183	16,968	13,869	10,909	8,144	5,729	4,144	4,252	5,862	8,055	10,422

Pas3: $h_3 = 0,001$

G(0,805)	G(0,806)	G(0,807)	G(0,808)	G(0,809)	G(0,810)	G(0,811)	G(0,812)	G(0,813)	G(0,814)	G(0,815)
4,780	4,624	4,480	4,352	4,239	4,144	4,067	4,009	3,970	3,952	3,954

$\mathcal{F}^* = 0,814$

$e = 0.01$

Pas1: $h_1 = 0.1$

G(0,1)	G(0,2)	G(0,3)	G(0,4)	G(0,5)	G(0,6)	G(0,7)	G(0,8)	G(0,9)
620,865	454,260	317,433	213,312	135,993	78,314	34,783	3,422	24,981

Pas2: $h_2 = 0.01$

G(0,75)	G(0,76)	G(0,77)	G(0,78)	G(0,79)	G(0,80)	G(0,81)	G(0,82)	G(0,83)	G(0,84)	G(0,85)
17,145	13,928	10,834	7,903	5,265	3,422	3,617	5,529	7,938	10,454	12,975

Pas3: $h_3 = 0,001$

G(0,795)	G(0,796)	G(0,797)	G(0,798)	G(0,799)	G(0,800)	G(0,801)	G(0,802)	G(0,803)	G(0,804)	G(0,805)
4,178	3,994	3,825	3,671	3,537	3,422	3,329	3,261	3,218	3,201	3,210

$\mathcal{F}^* = 0,804$

La table suivante résume les résultats obtenus en donnant la valeur optimale \mathcal{F}^* pour chaque niveau d'erreur.

Tableau 4.2: \mathcal{F}^* pour différents écarts types d'erreurs de mesures pour la méthode heuristique

<i>e</i>	0	0,001	0,003	0,005	0,007	0,01
\mathcal{F}^*	0,815	0,816	0,815	0,815	0,814	0,804
G	0,134	0,338	0,782	2,249	3,952	3,201
iter	2	2	2	2	2	2
Simul	22	22	22	22	22	22

Dans les tables ci-dessous, le problème (P) est résolu numériquement respectivement et pour différents écarts types d'erreurs, avec la méthode du gradient conjugué et la méthode de quasi-Newton.

Méthode du Gradient Conjugué :

Tableau 4.3 : \mathcal{F}^* pour différents écarts types d'erreurs de mesures pour la méthode CGR

<i>e</i>	0	0,001	0,003	0,005	0,007	0,01
\mathcal{F}^*	0,81567398	0,81567193	0,81464096	0,81525450	0,81414851	0,80392582
G	0,056208136	0,32250036	0,78318170	2,2490839	3,9511096	3,2013025
iter	4	4	4	4	5	3
Simul	8	8	8	6	9	7

Méthode de Quasi-Newton :

Tableau 4.4 : \mathcal{F}^* pour différents écarts types d'erreurs de mesures pour la méthode QN

<i>e</i>	0	0,001	0,003	0,005	0,007	0,01
\mathcal{F}^*	0,8155998	0,8157646	0,8149725	0,8152688	0,8145253	0,8042837
G	0,0352467	0,3242932	0,7817874	2,2491438	3,9506223	3,2008637
iter	4	4	4	4	4	2
Simul	6	6	6	6	6	5

Dans la figure suivante on y représente graphiquement \mathcal{F}^* vs e pour les trois méthodes: heuristique, CGR et QN en guise de comparaison visuelle.

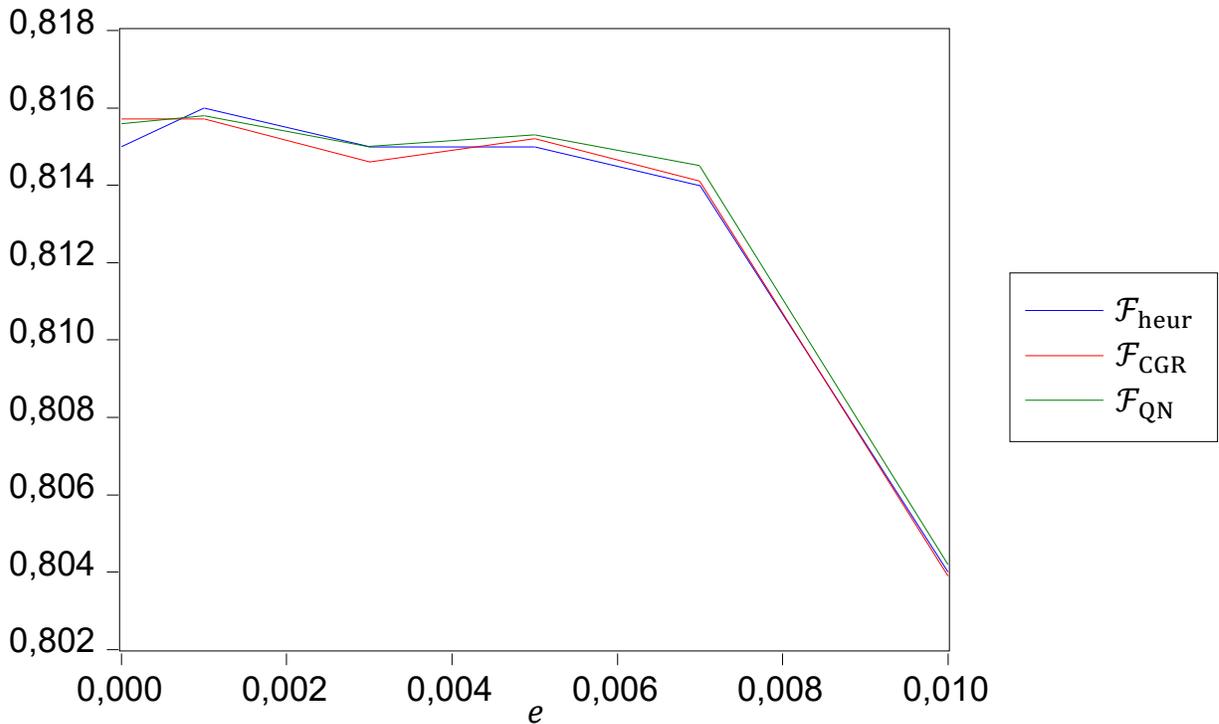


Figure 4.4: representation graphique de \mathcal{F}^* vs e

4.5. ANALYSE ET INTERPRÉTATIONS

Les tableaux et la figure ci-dessus montrent que la méthode heuristique donne des résultats sensiblement égaux aux autres méthodes. Ensuite, pour des erreurs d'écart-type inférieures ou égales à $0,005\theta_0$, toutes les valeurs de \mathcal{F}^* sont proches de la valeur sans bruit (0,8150) obtenue avec la méthode heuristique et de la valeur exacte calculée avec la méthode de Hottel qui est $\bar{\mathcal{F}} = 0,8154751$, avec un écart maximal de 0,001. Donc, la méthode de calcul est stable et fiable.

Ces observations montrent aussi que notre approche de calcul de \mathcal{F}^* n'est pas sensible aux erreurs de mesure.

Donc raisonnablement, on peut définir $\mathcal{F}^* = 0,815$ comme étant la valeur obtenue par mesure expérimentale du facteur \mathcal{F} .

CHAPITRE V : APPLICATION A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE CONTRÔLE DE TEMPERATURES

5.1 Introduction

5.2 Position du problème

5.3 Algorithme de résolution du problème inverse

5.4 Application numérique

- Données d'entrée
- Analyse et interprétations

Nomenclature:

Lettres latines

$c_p(u)$ Capacité calorifique fonction de la température $J/kg.K$

D Matrice diagonale

$D^{(k)}$ Matrice diagonale à l'itération k

\bar{F} Facteur pour la chaleur nette rayonnée étant donné l'équation $q_1 = \bar{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4)$

$G(\theta_0, T) = \eta(\theta_0, T) - \left(\frac{u}{\sigma}\right)$ Fonction « écart » pour l'algorithme de Levenberg Marquardt

G Fonction « écart »

H Longueur du four. H est la dimension transversale du four que nous prenons égale à celle de la charge, m.

h Pas d'espace pour les directions x et y , m

I_2 Matrice d'ordre deux

iter nombre d'itérations (variable Scilab)

$J(P)$ Matrice de sensibilité ou matrice jacobienne

$k(u)$ Coefficient de conductivité thermique de l'acier, fonction de la température, $W/m.K$

$k'(u)$ Dérivé de $k(u)$ par rapport à la température

L Largeur du four (de section carrée), m

l Largeur de la charge (de section carrée), m

$m_u(\theta_0, t)$ Température moyenne dans le métal en chauffage au temps t et température de source θ_0 .

N Nombre total de nœuds du maillage incluant la frontière

n Numéro du pas de temps correspondant au temps t et tel que $n \cdot \Delta t = t$

n_T Nombre de pas de temps tels que $n_T \cdot \Delta t = T$

$T^{(k)}$ Temps final estimé par l'algorithme de Levenberg Marquardt à l'itération k , °C

t Temps, s

\bar{u} Temperature température moyenne requise au temps final T , °C

$u(x, t)$ Température à l'intérieur du matériau à chauffer à l'instant t et à l'emplacement x , °C

u_0 Température initiale du matériau à chauffer, °C

$u_{i,j}^n$ Solution donnée par le modèle sur la grille i, j incluant la limite à l'instant $t = n \cdot \Delta t$ et la température de source θ_0 , °C

$u_{i,j}^{T,\theta_0}$ solution calculée par le modèle sur les points $\{i, j\}$ de la grille au temps final inconnu T et pour la température de source θ_0 , en utilisant un schéma de différences finies $\{i, j\}$, °C

Lettres grecques

δ Écart admissible entre deux solutions approximatives successives

ΔT Pas de temps pour le calcul de la matrice jacobienne, °C

$\Delta\theta_0$ Pas de température pour le calcul de la matrice jacobienne, °C

$\eta(\theta_0, t) = \begin{pmatrix} m_u(\theta_0, t) \\ \sigma_u(\theta_0, t) \end{pmatrix}$, sortie calculée par le modèle et fonction du temps t et de la température de source θ_0 .

$\mu^{(k)}$ Scalaire positif nommé paramètre d'amortissement à l'itération k

σ Stephane Boltzmann constante égale à $5,67 \cdot 10^{-8}$

$\sigma_u(\theta_0, t)$ Ecart type de la distribution de températures dans le métal en chauffage au temps t et température de source θ_0 , °C

$\bar{\sigma}$ Écart type requis à l'instant final T , °C

ψ Coefficient de diffusivité de l'acier qui est fonction de la température u

$\theta_0^{(k)}$ Température estimée par l'algorithme de Levenberg Marquardt à l'itération k , °C

$\theta_0(t)$ la source de chaleur, fonction du temps t , °C.

Ω Sous-ensemble borné ouvert de \mathbf{R}^2 : dans cet exemple, nous avons pris Ω comme un carré arrondi aux angles

Abréviations :

DF Différences finies

LM Algorithme de *Levenberg/Marquardt*

5.1. INTRODUCTION

Dans cette présente application, on traite un problème de contrôle de la moyenne et de l'écart type de la distribution des températures dans un matériau donné auquel une quantité de chaleur est transférée par rayonnement provenant d'une source à la température θ_0 , le tout placé dans une enceinte fermée isolée. La question à laquelle nous allons répondre est la suivante : étant donné un profil de température inconnu $u(., T)$ à l'instant T (qui est la durée du processus de chauffage), de moyenne et d'écart-type donnés, comment calculer la valeur des paramètres θ_0 et T . Trois modèles sont traités pour le problème inverse : un model avec uniquement la température de la source constante comme inconnue, un model avec température de source constante et temps final inconnus et un modèle dans lequel la durée du processus est connue mais la température de la source varie linéairement avec le temps. En aucun cas, la température de la source ne varie pas avec l'emplacement.

5.2. POSITION DU PROBLEME

Le processus de transmission de la chaleur modélisé obéît à la relation suivante :

$$\begin{cases} \rho(u)c_p(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k(u)\nabla u) = 0, & (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ k(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \bar{F}\sigma(\theta_0^4 - u^4), & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Ces équations modélisent le processus schématisé à la figure 5.1 suivante:

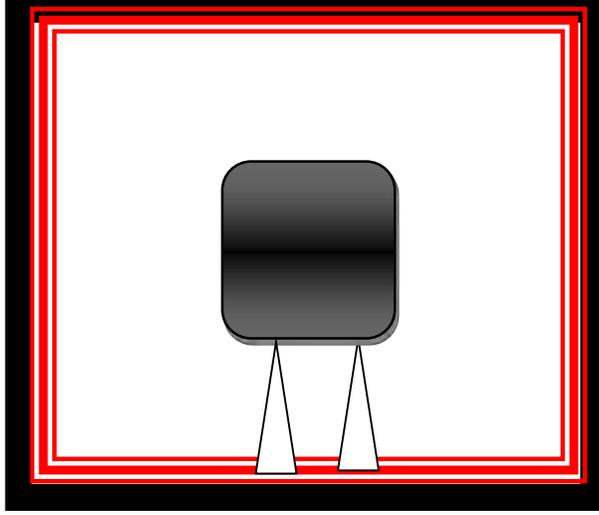


Figure 5.1: Schématisation du four avec sa charge

Le schéma numérique 1 sera utilisé pour le calcul des températures:

Le modèle produit en sortie la fonction $\eta(\theta_0, T) = \begin{pmatrix} m_u(\theta_0, T) \\ \sigma_u(\theta_0, T) \end{pmatrix}$, (5.2)

Soit $u_{i,j}^{T,\theta_0}$ les températures de sortie calculées par le modèle (5.1) aux points $\{i, j\}$ de la grille au temps final inconnu T en utilisant le schéma numérique 1 (DF). Notons que les éléments $u_{i,j}^{T,\theta_0}$ dépendent à la fois de T et de θ_0 et que les points de la frontière sont pris en compte pour l'évaluation des composantes du vecteur $\eta(\theta_0, T)$.

Dans le cas de N points (noeuds) de la grille spatiale, nous aurons:

$$m_u(\theta_0, T) = \frac{\sum_{i,j} u_{i,j}^{T,\theta_0}}{N} \quad (5.3)$$

$$\sigma_u(\theta_0, T) = \frac{\left(\sum_{i,j} [u_{i,j}^{T,\theta_0} - m_u(T)]^2\right)^{1/2}}{N-1} \quad (5.4)$$

Notons que dans le cas d'une charge de section carrée et avec des mailles carrées également, on a $N = (m + 2)^2$ ou m est le nombre de subdivisions spatiales.

Le problème de contrôle est formulé de la manière suivante: Etant donnés une température moyenne \bar{u} et un écart type $\bar{\sigma}$ fixés à l'instant final T , trouver la température constante de la source θ_0 et la durée du chauffage T telles que:

$$\eta(\theta_0, T) = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Ou de manière équivalente trouver θ_0 et T telles que:

$$G(\theta_0, T) = \begin{pmatrix} m_u(\theta_0, T) - \bar{u} \\ \sigma_u(\theta_0, T) - \bar{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

5.3. ALGORITHME DE RÉOLUTION DU PROBLEME INVERSE

La solution du problème de transfert de chaleur inverse peut être organisée selon les étapes fondamentales suivantes :

- **Procédure itérative**

L'algorithme itératif comprend les trois étapes de base suivantes :

- Tout d'abord, on choisit une estimation initiale de la solution $(\theta_0^{(0)}, T^{(0)})$ à l'aide des tableaux 5.5 et 5.6 et ensuite, on choisissit une tolérance δ pour la norme $\|(\theta_0^{(k)}, T^{(k)}) - (\theta_0^{(k-1)}, T^{(k-1)})\|$.
- Ensuite, on applique la méthode de Levenberg/Marquardt à la fonction $G(\theta_0, T)$ pour obtenir les estimations $(\theta_0^{(k)}, T^{(k)})$ à l'étape k .
- Répéter ce processus jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit respecté pour obtenir la température de la source θ_0 et le temps T solutions du problème de contrôle.

- **Critère d'arrêt**

L'arrêt des itérations se produit lorsque l'algorithme estime que la norme de variation entre la valeur courante de θ_0 et la précédente est inférieure à δ .

$$\|(\theta_0^{(k)}, T^{(k)}) - (\theta_0^{(k-1)}, T^{(k-1)})\| \leq \delta \quad (5.7)$$

ϵ_1 et ϵ_2 étant des seuils de tolerance choisis d'avance et où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne.

• **Algorithme:**

L'algorithme de calcul utilisé ici sera basé sur la méthode de Levenberg/Marquardt appliquée à la fonction G suivante pour trouver les inconnues θ_0 et T :

$$G(\theta_0, T) = \begin{pmatrix} m_u(\theta_0, T) - \bar{u} \\ \sigma_u(\theta_0, T) - \bar{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

1. Choisir une estimation initiale $\begin{pmatrix} \theta_0^{(0)} \\ T^{(0)} \end{pmatrix}$ du vecteur inconnu $\begin{pmatrix} \theta_0 \\ T \end{pmatrix}$ à l'aide des tableaux 5.5 et 5.6, un seuil δ pour le critère d'arrêt, un pas de temps ΔT et un pas de température $\Delta\theta_0$ (pour le calcul numérique du jacobien à chaque itération)

2. Calculer la matrice jacobienne $J^{(k)}$: $J^{(k)} = J(\theta_0^{(k)}, T^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \theta_0} & \frac{\partial G_1}{\partial T} \\ \frac{\partial G_2}{\partial \theta_0} & \frac{\partial G_2}{\partial T} \end{pmatrix} \quad (5.9)$

Avec $G_1(\theta_0, T) = m_u(t) - \bar{u}$ et $G_2(\theta_0, T) = \sigma_u(t) - \bar{\sigma} \quad (5.10)$

Pour cela,

- a. Evaluer $G(\theta_0^{(k)} + \Delta\theta_0, T^{(k)})$, $G(\theta_0^{(k)} - \Delta\theta_0, T^{(k)})$, $G(\theta_0^{(k)}, T^{(k)} + \Delta T)$ et $G(\theta_0^{(k)}, T^{(k)} - \Delta T)$ en résolvant d'abord le problème direct (5.1) *respectivement* par rapport aux données $(\theta_0^{(k)} + \Delta\theta_0, T^{(k)})$, $(\theta_0^{(k)} - \Delta\theta_0, T^{(k)})$, $(\theta_0^{(k)}, T^{(k)} + \Delta T)$ et $(\theta_0^{(k)}, T^{(k)} - \Delta T)$ pour obtenir les températures correspondantes $u_{i,j}^{T^{(k)}, \theta_0^{(k)}}$ sur la grille d'espace (en utilisant le schéma numérique 1).
- b. Calculer les différentes composantes de la matrice $J^{(k)}$

$$\frac{\partial G_1}{\partial \theta_0} = \frac{G_1(\theta_0^{(k)} + \Delta\theta_0, T^{(k)}) - G_1(\theta_0^{(k)} - \Delta\theta_0, T^{(k)})}{2\Delta\theta_0} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial T} = \frac{G_1(\theta_0^{(k)}, T^{(k)} + \Delta T) - G_1(\theta_0^{(k)}, T^{(k)} - \Delta T)}{2\Delta T} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial \theta_0} = \frac{G_2(\theta_0^{(k)} + \Delta\theta_0, T^{(k)}) - G_2(\theta_0^{(k)} - \Delta\theta_0, T^{(k)})}{2\Delta\theta_0} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial T} = \frac{G_2(\theta_0^{(k)}, T^{(k)} + \Delta T) - G_2(\theta_0^{(k)}, T^{(k)} - \Delta T)}{2\Delta T} \quad (5.14)$$

3. Résoudre le système suivant avec comme inconnues $\Delta\theta_0^{(k)}$ et $\Delta T^{(k)}$

$$\left[(J^{(k)})^T J^{(k)} + \mu^{(k)} D^{(k)} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Delta\theta_0^{(k)} \\ \Delta T^{(k)} \end{pmatrix} = -(J^{(k)})^T \cdot G(\theta_0, T) \quad (5.15)$$

Avec :

$$D^{(k)} = \text{diag} \left((J^{(k)})^T J^{(k)} \right) \quad \text{ou bien} \quad D^{(k)} = I_2 \quad (\text{avec } I_2 \text{ matrice d'ordre deux}) \quad (5.16)$$

4. Calculer
$$\begin{pmatrix} \theta_0^{(k)} \\ T^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0^{(k-1)} \\ T^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\theta_0^{(k-1)} \\ \Delta T^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

5. Arrêter la procédure d'itération dès que la condition d'arrêt (5.7) est satisfaite:

6. Dans le cas contraire, retourner à l'étape 2 et remplacer k par $k + 1$.

Dans le cas du problème à deux dimensions dans lequel le temps T est donné mais la température de source inconnue $\theta_0(t)$ est de la forme $\theta_0(t) = c_0 \cdot t + b_0$, les mêmes étapes que ci-dessus seront suivies. Pour l'estimation initiale, on peut choisir un vecteur $\begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ b_0^{(0)} \end{pmatrix}$ où $b_0^{(0)}$ est la température source constante la plus proche de \bar{u} dans les tables 5.5 ou 5.6 et $c_0^{(0)} = 0$.

5.4. APPLICATION NUMERIQUE

5.4.1. DONNÉES D'ENTRÉE:

$u_0 = 20^\circ\text{C}$ (température initiale de la charge);

$\epsilon_1 = 0,85; \epsilon_2 = 0,87$

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$

Pour les fonctions $k(u)$, $c_p(u)$ et $\rho(u)$ se référer aux formules (3.8), (3.10) and (3.11).

$L = 3; l = 1;$

$\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \frac{l}{L}}$ (dans équation 5.1)

m nombre de subdivisions spatiales ($m = 9$)

$h = l/(m + 1)$ (pas d'espace);

$\Delta t = 30s$ (pas de temps);

5.4.2. RÉSULTATS ET INTERPRÉTATIONS:

5.4.2.1. Problème unidimensionnel - Temps T donné, température de source θ_0 inconnue mais constante :

$\theta_0^{(0)}$ estimation initiale pour le paramètre θ_0

T Temps de chauffage (donné pour chaque cas)

$\delta = 0,05$ donné

G écart entre la solution et l'objectif

J Matrice jacobienne (calculée numériquement pour chaque itération à partir de la fonction G)

iter - nombre d'itérations

Ce problème à une seule inconnue sera résolu numériquement à l'aide de la méthode de Newton. Pour cela, on programme avec Scilab une fonction qu'on va appeler « Newton » et qui aura comme arguments d'entrée l'estimation initiale $\theta_0^{(0)}$, la fonction écart G , la matrice jacobienne J et le seuil d'arrêt δ .

1. $\bar{u}=525$; $T=3600$; $\theta_0^{(0)}=1000$; $l/L = 0,5/3$

$$[\theta_0, iter] = \text{Newton}(\theta_0^{(0)}, G, J, \delta)$$

iter = 4.

$$\theta_0 = 813$$

$$G(\theta_0) = 0.0009934$$

2. $\bar{u}=800$; $T=9000$; $\theta_0^{(0)}=1000$; $l/L = 1/3$

$$[\theta_0, iter] = \text{Newton}(\theta_0^{(0)}, G, J, \delta)$$

iter = 4.

$$\theta_0 = 1089$$

$$G(\theta_0) = -0,0000057$$

3. $\bar{u}=525$; $T=14400$; $\theta_0^{(0)}=625$; $l/L = 2/3$

$$[\theta_0, iter] = \text{Newton}(\theta_0^{(0)}, G, J, \delta)$$

iter = 4.

$$\theta_0 = 907$$

$$G(\theta_0) = -0,0000002$$

5.4.2.2. Problème bidimensionnel – inconnus : Temps T et température de source constante θ_0

$\theta_0^{(0)}$ Estimation initiale du paramètre constant θ_0

$T^{(0)}$ Estimation initiale du paramètre T

μ Paramètre de régularisation μ à fournir ($\mu = 0,01$ a été choisi ici)

θ_0 Température inconnue de la source à trouver

T Durée inconnue du processus de chauffage à calculer

G Ecart entre le vecteur solution et le vecteur cible

iter - Nombre d'itérations pour trouver la solution

$$\delta = 0,01$$

Pour le calcul de la matrice jacobienne, nous choisirons : $\Delta\theta_0 = 5^\circ\text{C}$ et $\Delta T = 30$ s.

Ce problème à deux inconnues θ_0 et T sera résolu numériquement à l'aide de la méthode de Levenberg/Marquardt. Pour cela, on programme avec Scilab une fonction qu'on va appeler « LM » et qui aura comme arguments d'entrée l'estimation initiale $(\theta_0^{(0)}, T^{(0)})$, la fonction écart G , la matrice jacobienne J , le paramètre initial de régularisation μ et le seuil d'arrêt δ .

$$\underline{l/L} = \underline{1/3}$$

$$\underline{\bar{u}} = \underline{345} ; \underline{\bar{\sigma}} = \underline{25} ;$$

$$\theta_0^{(0)} = 600 ; T^{(0)} = 14400$$

N.B: Ce problème est connu comme étant très mal conditionné. Même les méthodes de type gradient comme la méthode du gradient conjugué ne peuvent pas le résoudre. En fait, ils renvoient simplement la valeur initiale fournie. Par exemple, un calcul de $|J^T J|$ à la première estimation $(\theta_0^{(0)} = 600; T^{(0)} = 14400)$ donnent $2.71.10^{-5}$ confirmant nos attentes de « mal conditionnement ».

L'exécution de l'algorithme donne les résultats suivants en fonction de la matrice D :

$$[(\theta_0, T), iter] = LM((\theta_0^{(0)}, T^{(0)}), G, J, \mu, \delta)$$

- $D = \text{Diag}(J^T J)$

iter=6.

$$\theta_0=500 ; T =22063,599$$

- $D = I_2$ (avec I_2 matrice d'ordre deux)

iter=10.

$$\theta_0=500 ; T =22074$$

Tableau 5.1 : détail des itérations avec LM, $\bar{u}=345$; $\bar{\sigma}=25$, et $D = \text{Diag}(J^T J)$

Niter	θ_0	T	$\ G(\theta_0, T)\ _2$	step	μ
1	600	14400	48,034663	39,213899	0,01
2	561,34288	14406,585	18,218439	56,729302	0,001
3	559,65858	14463,289	17,957521	510,58691	0,0001
4	553,93049	14973,844	16,080443	2538,4454	0,00001
5	527,7288	17512,154	9,4315934	1633,9719	0,000001
6	523,08188	19146,119	6,9840672	2378,2889	0,0000001
7	501,56544	21524,311	1,8449811	542,57511	1,000D-08
8	499,66787	22066,882	0,1309808	10,983667	1,000D-09
9	499,62161	22055,899	0,128743	18,314947	1,000D-10
10	499,62083	22074,214	0,0825567	11,676841	

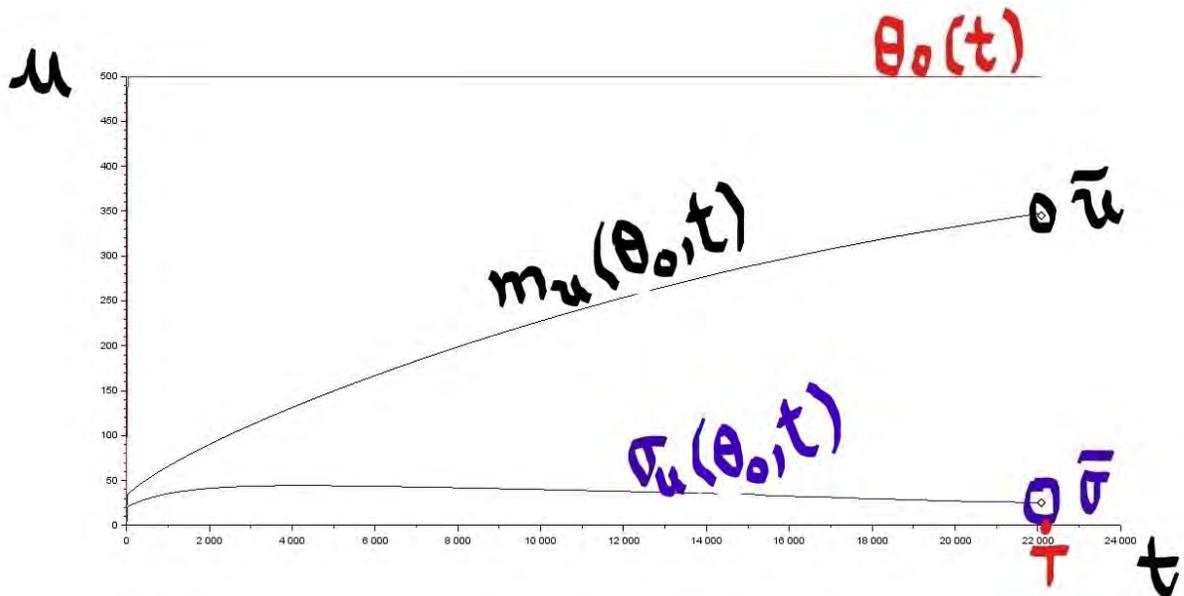


Figure 5.2 : courbes $\theta_0(t)$, $m_u(\theta_0, t)$ et $\sigma_u(\theta_0, t)$ avec $\bar{u} = 325$; $\bar{\sigma} = 25$; $l/L=1/3$

Dans la figure ci-dessus, nous voyons que pour une température source $\theta_0(t) = 500^\circ\text{C}$ au temps $T = 22074$ s, la température moyenne finale requise et l'écart type final requis précédemment fixés sont atteints.

5.4.2.3. Problème bidimensionnel - Temps T donné mais température de source $\theta_0(t)$ inconnue et de la forme $\theta_0(t) = c_0t + b_0$

$a_0^{(0)}$ Estimation initiale du paramètre a_0

$b_0^{(0)}$ Estimation initiale du paramètre b_0

μ Paramètre de régularisation μ à fournir ($\mu = 0,01$ a été choisi ici)

T donné pour chaque cas

a_0 Paramètre solution du problème

b_0 Paramètre solution du problème

iter - Nombre d'itérations pour trouver la solution

G Écart entre le vecteur solution et le vecteur cible

$\delta = 0,01$

Ce problème à deux inconnues c_0 et b_0 sera résolu numériquement d'une façon analogue au précédent.

Pour le calcul de Δa_0 et Δb_0 pour la matrice jacobienne, nous utiliserons la démarche suivante :

$$\text{On pose d'abord } \theta_0(t) = c_0 \cdot t + b_0 \quad (5.18)$$

Avec :

$$c_0 = \frac{a_0}{\Delta t} \quad (5.19)$$

Soit n le numéro du pas de temps correspondant au temps courant t , posons

$$n = \frac{t}{\Delta t} \text{ (rappelons que } \Delta t = 30 \text{ s)}. \text{ On obtient alors :}$$

$$\theta_0(t) = \theta_0(n) = a_0 \cdot n + b_0 \quad (5.20)$$

Soit $\theta_{0,max}$ la température maximale limite du four exprimée en Kelvin. Dans le cas du Nichrome 80-20, $\theta_{0,max} = 1473 \text{ K}$ (voir tableau 3.1). On peut alors choisir les valeurs suivantes de Δa_0 et Δb_0 pour le calcul de la matrice jacobienne :

$$\Delta a_0 = \frac{\theta_{0,max}}{100 \cdot n_T} \quad (5.21)$$

$$\Delta b_0 = \frac{\theta_{0,max}}{100 \cdot n_T} \quad (5.22)$$

$l/L = 0.5/3$

$\bar{u}=460 ; \bar{\sigma}=20 ; T = 7200$

$$a_0^{(0)} = 0 ; b_0^{(0)} = 600,$$

$$[(a_0, b_0), iter] = LM((a_0^{(0)}, b_0^{(0)}), G, J, \mu, \delta)$$

- $D = \text{Diag}(J^T J)$

iter=6.

$$a_0 = 0,3480049 ; b_0 = 510,62254$$

- $D = I_2$

iter=5.

$$a_0 = 0,3478191 ; b_0 = 510,67104$$

Tableau 5.2 : détail des itérations avec LM, $\bar{u}=460$; $\bar{\sigma}=20$, $T = 7200$ et $D = \text{Diag}(J^T J)$

Niter	a_0	b_0	$\ G(a_0, b_0)\ _2$	step	μ
1	0	327	248,51839	4,2044256	0,01
2	1,6634272	323,13863	47,398922	150,79444	0,001
3	0,6198188	473,92945	9,0182947	35,869594	0,0001
4	0,3583598	509,79809	0,9195407	0,8730112	0,00001
5	0,3478191	510,67104	0,0217635	0,0471831	0,000001

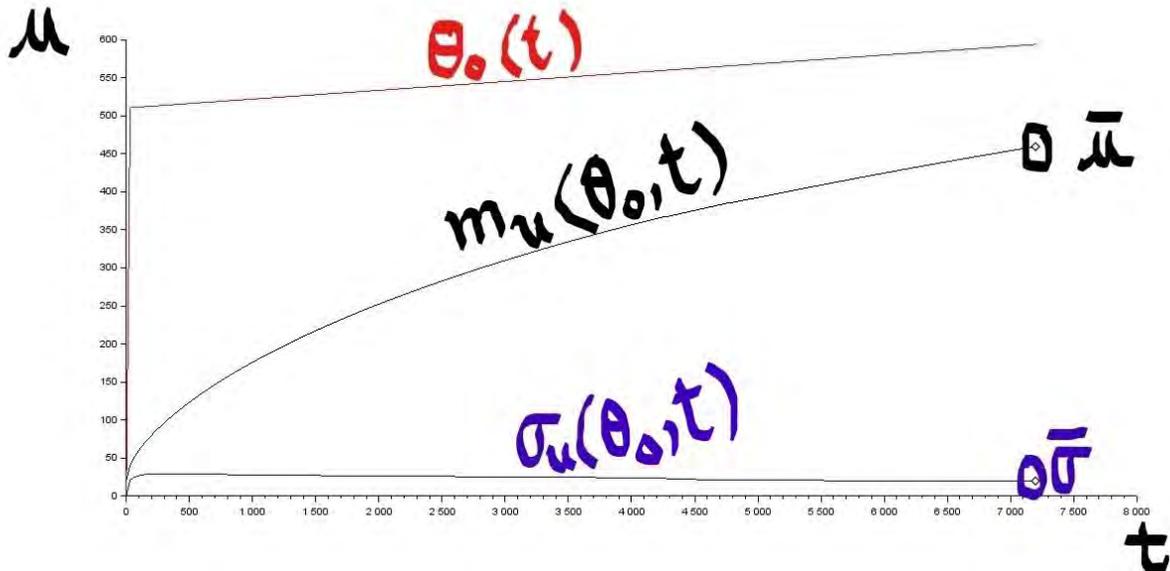


Figure 5.3 : courbes $\theta_0(t)$, $m_u(\theta_0, t)$ et $\sigma_u(\theta_0, t)$ avec $\bar{u} = 460$; $\bar{\sigma} = 20$; $l/L=0.5/3$; $T=7.200s$

Dans la figure ci-dessus, nous voyons que, pour une température source de la forme $\theta_0(t) = \frac{0,3478191}{\Delta t}t + 510,67104$ au temps $T = 7.200s$, la température moyenne finale requise et l'écart type final préalablement fixés sont atteints.

$l/L = 1/3$

$\bar{u}=400 ; \bar{\sigma}=10 ; T = 14.400$

$a_0^{(0)} = 0 ; b_0^{(0)} = 600 ;$

$[(a_0, b_0), iter] = LM((a_0^{(0)}, b_0^{(0)}), G, J, \mu, \delta)$

- $D = \text{Diag}(J^T J)$

Niter=6.

$a_0 = -0,420605 ; b_0 = 645,14041$

- $D = I_2$

Niter=5.

$a_0 = -0,4205531 ; b_0 = 645,12716$

Tableau 5.3 : détail des itérations avec LM, $\bar{u} = 400 ; \bar{\sigma} = 10, T = 14400$ et $D = \text{Diag}(J^T J)$

Niter	a_0	b_0	$\ G(a_0, b_0)\ _2$	step	μ
1	0	327	195,32656	124,32881	0,01
2	0,2986973	451,32845	90,116658	178,81324	0,001
3	-0,3074582	630,14066	33,987047	13,627464	0,0001
4	-0,412706	643,76772	0,7424023	1,3594608	0,00001
5	-0,4205531	645,12716	0,0017858	0,0134103	0,000001

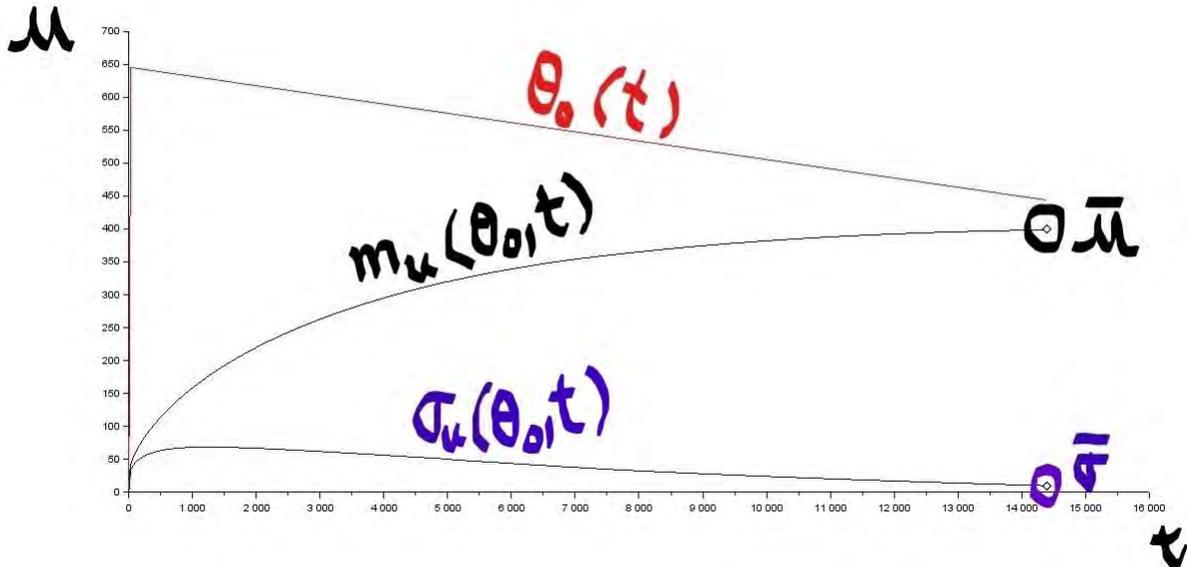


Figure 5.4 : courbes $\theta_0(t), m_u(\theta_0, t)$ et $\sigma_u(\theta_0, t)$ avec $\bar{u} = 400$; $\bar{\sigma} = 10$; $l/L=1/3$; $T=14.400s$

Dans la figure ci-dessus, nous voyons que, pour une température source de la forme $\theta_0(t) = -\frac{0,4205531645}{\Delta t}t + 645,12716$ au temps $T = 14.400$ secondes, la température moyenne finale requise et l'écart-type final requis précédemment fixés sont atteints.

$\bar{u}=400$; $\bar{\sigma}=10$; $T = 7200$

$$a_0^{(0)} = 0 ; b_0^{(0)} = 600,$$

$$[x, iter] = LM(x_0, G, DG, \mu, \delta)$$

- $D = \text{Diag}(J^T J)$

Iter=7.

$$a_0 = -2.4606247 ; b_0 = 937.4662$$

- $D = I_2$

iter=6.

$$a_0 = -2.4602748 ; b_0 = 937.4368$$

Tableau 5.4 : détail des itérations avec LM, $\bar{u}=400$; $\bar{\sigma}=10$, $T = 7200$ et $D = \text{Diag}(J^T J)$

Niter	a_0	b_0	$\ G(a_0, b_0)\ _2$	step	μ
1	0	327	248,47326	295,73975	0,01
2	0,4354785	622,73943	90,116658	254,77218	0,001
3	-1,6087445	877,5034	33,987047	43,390162	0,0001
4	-2,2531886	920,8888	5,2811258	14,443724	0,00001
5	-2,437431	935,3313	0,3487943	2,1056278	0,000001
6	-2,4602748	937,4368	0,0073234	0,7295078	0,0000001

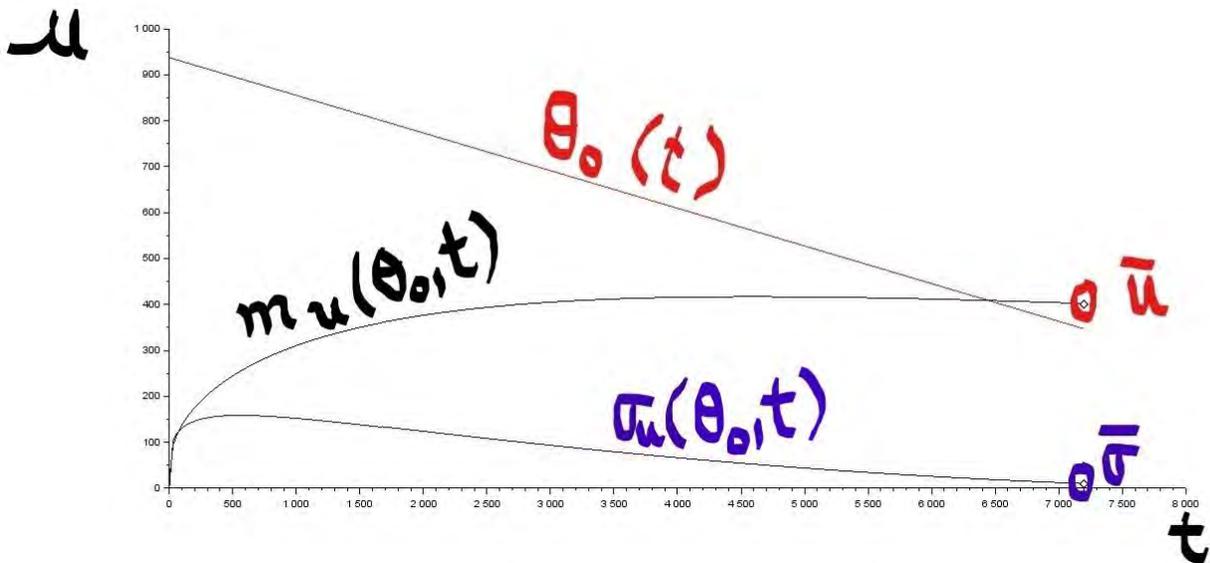


Figure 5.5 : courbes $\theta_0(t), m_u(\theta_0, t)$ et $\sigma_u(\theta_0, t)$ avec $\bar{u} = 400$; $\bar{\sigma} = 10$; $l/L=1/3$; $T=7.200s$

Dans la figure ci-dessus, nous voyons que pour une température source de la forme

$$\theta_0(t) = -\frac{2,4602748}{\Delta t}t + 937,4368 \text{ à l'instant } T = 14.400 \text{ s, la température moyenne}$$

finale requise et l'écart-type final requis préalablement fixés sont atteints.

Dans tous les cas étudiés, l'objectif de contrôle est atteint car on est très proche de zéro aussi bien pour l'écart par rapport à la moyenne que par rapport à l'écart type. Les itérations tournent autour de 4, 5, 6 et 7, ce qui veut dire que la méthode LM converge assez rapidement et ce, même si les estimations initiales sont quelques fois choisies assez éloignées de la solution finale.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons fait une revue assez large des méthodes utilisables pour traiter numériquement les problèmes de transferts radiatifs, les transferts combinés rayonnement-conduction mais aussi, et dans une grande partie, les problèmes inverses associés à ces types de transferts thermiques. Notre approche pour l'analyse inverse des problèmes, bien que s'appuyant sur des méthodes classiques comme les méthodes du gradient conjugué, de Newton/Quasi Newton, de Levenberg/Marquardt, trouve son originalité dans les démarches systématiques que nous avons proposées pour la résolution de problèmes très peu abordés dans la littérature scientifique mais dont les applications industrielles sont très nombreuses. C'est précisément la raison pour laquelle nous avons choisi de traiter trois applications industrielles de toute première importance: une première application de modélisation « directe » du transfert de chaleur combiné rayonnement-conduction, une deuxième application de modélisation inverse pour la mesure du flux de chaleur radiatif net reçu par la charge d'un four et enfin une dernière application consistant à déterminer les paramètres d'exploitation d'un four (température source et/ou temps de chauffage) permettant de contrôler la distribution des températures dans la masse du métal en chauffage.

Pour la modélisation du problème dit «direct», nous avons établi au préalable un lien entre le courant électrique absorbé par les résistances du four et la température de la source, ce qui permet un contrôle des températures au moyen du courant. Cette partie est très importante car sans elle, la modélisation inverse et le contrôle des températures, objets des deux parties suivantes ne sera pas possible. De plus, nous avons montré dans cette partie que la discrétisation par différences finies fournit une approche simple pour calculer toutes les températures requises dans le matériau chauffé grâce à l'utilisation de l'algorithme de Newton pour les points situés sur la frontière.

La deuxième application développée est une modélisation inverse pour la mesure du flux de chaleur radiatif net reçu par un métal en chauffage dans un four. Nous avons démontré que l'approche que nous avons conçue, couplée à l'algorithme

heuristique que nous avons proposé génère une suite de solutions convergeant vers la solution du problème inverse, stable vis-à-vis des erreurs de mesure et fiable. Cependant, on remarquera que le nombre de capteurs n_s a une influence sur \mathcal{F}^* , en raison d'un résultat de convergence en statistique/probabilité nommé loi des grands nombres et qui décrit le résultat de la réalisation d'une même expérience d'un grand nombre de fois. Selon cette loi, la moyenne des résultats obtenus avec un grand nombre d'essais devrait être proche de la valeur attendue et tendra à se rapprocher à mesure que davantage d'essais sont effectués. Ainsi, en augmentant n_s , on se rapproche de la valeur exacte $\bar{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} et en la diminuant, le résultat inverse se produira.

La dernière application concerne le contrôle de la distribution des températures dans la masse d'un métal en chauffage en essayant soit d'avoir une maîtrise sur le couple (température de la source, temps de chauffage) soit sur la courbe de température de la source à temps fixe. Nous avons vu que les problèmes inverses découlant de ces applications de contrôle sont extrêmement mal posés de sorte que l'utilisation de la régularisation de Levenberg/Marquardt s'impose à l'exclusion des autres méthodes d'analyse traditionnelle pour obtenir des résultats satisfaisants.

Nous retenons globalement, que les modèles exposées dans ce travail concourent toutes à l'utilisation optimale de l'énergie électrique dans les processus de traitement thermique, évitant soit un gaspillage soit une mauvaise qualité des produits traités. Elles participent de ce fait à améliorer la productivité dans l'industrie.

D'autre part, ces modèles peuvent être utilisés dans des domaines variés comme par exemple en hydrogéologie pour calculer des recharges moyennes pendant un certain temps ou bien pour calculer l'origine temporelle d'un phénomène de contamination etc.

On pourrait à l'avenir envisager l'utilisation des méthodes développées dans cette thèse pour calculer les paramètres de réchauffement climatique de la terre.

ANNEXES AU CHAPITRE V :

Tableau 5.5 : Résultats Scilab simulation pour choix estimation initiale

<i>I/L=0.5/3</i>				<i>I/L=1/3</i>			
T	θ_0	mean	stdev	T	θ_0	mean	stdev
1800.	400.	92.	16.7	1800.	400.	59.	24.3
1800.	600.	194.	42.5	1800.	600.	118.	61.4
1800.	800.	357.	89.	1800.	800.	213.	125.2
1800.	1000.	594.	159.2	1800.	1000.	369.	228.1
1800.	1200.	839.	218.9	1800.	1200.	551.	340.9
3600.	400.	137.	14.8	3600.	400.	83.	26.7
3600.	600.	293.	37.5	3600.	600.	174.	66.8
3600.	800.	516.	73.9	3600.	800.	316.	133.6
3600.	1000.	771.	108.	3600.	1000.	509.	220.3
3600.	1200.	990.	137.1	3600.	1200.	694.	296.
5400.	400.	175.	13.3	5400.	400.	104.	26.5
5400.	600.	368.	32.4	5400.	600.	221.	66.2
5400.	800.	615.	55.8	5400.	800.	395.	128.8
5400.	1000.	857.	71.8	5400.	1000.	605.	197.1
5400.	1200.	1065.	91.	5400.	1200.	785.	254.7
7200.	400.	207.	12.	7200.	400.	123.	25.7
7200.	600.	422.	25.1	7200.	600.	262.	63.6
7200.	800.	676.	40.3	7200.	800.	458.	119.1
7200.	1000.	906.	48.6	7200.	1000.	672.	171.8
7200.	1200.	1110.	62.3	7200.	1200.	852.	220.5
9000.	400.	236.	10.9	9000.	400.	141.	24.7
9000.	600.	464.	21.4	9000.	600.	299.	60.3
9000.	800.	715.	28.8	9000.	800.	510.	108.6
9000.	1000.	937.	33.2	9000.	1000.	724.	149.8
9000.	1200.	1138.	43.5	9000.	1200.	903.	192.4
10800.	400.	258.	7.9	10800.	400.	157.	23.7
10800.	600.	496.	17.6	10800.	600.	331.	56.1
10800.	800.	742.	20.4	10800.	800.	552.	97.4
10800.	1000.	957.	22.9	10800.	1000.	764.	130.9
10800.	1200.	1157.	30.7	10800.	1200.	943.	169.
12600.	400.	271.	5.6	12600.	400.	173.	22.8
12600.	600.	522.	14.1	12600.	600.	359.	52.2
12600.	800.	759.	14.5	12600.	800.	586.	86.8
12600.	1000.	971.	15.9	12600.	1000.	797.	114.8
12600.	1200.	1169.	21.9	12600.	1200.	976.	149.3
14400.	400.	284.	5.6	14400.	400.	187.	21.9
14400.	600.	541.	11.1	14400.	600.	384.	47.9
14400.	800.	772.	10.3	14400.	800.	615.	77.2
14400.	1000.	980.	11.	14400.	1000.	824.	101.
14400.	1200.	1178.	15.6	14400.	1200.	1004.	132.5

Tableau 5.6 : Résultats Scilab simulation pour choix estimation initiale

<i>l/L=0.5/3</i>				<i>l/L=1/3</i>			
<i>θ_0</i>	<i>T</i>	<i>mean</i>	<i>stdev</i>	<i>θ_0</i>	<i>T</i>	<i>mean</i>	<i>stdev</i>
400.	1800.	92.	16.7	400.	1800.	59.	24.3
400.	3600.	137.	14.8	400.	3600.	83.	26.7
400.	5400.	175.	13.3	400.	5400.	104.	26.5
400.	7200.	207.	12.	400.	7200.	123.	25.7
400.	9000.	236.	10.9	400.	9000.	141.	24.7
400.	10800.	258.	7.9	400.	10800.	157.	23.7
400.	12600.	271.	5.6	400.	12600.	173.	22.8
400.	14400.	284.	5.6	400.	14400.	187.	21.9
600.	1800.	194.	42.5	600.	1800.	118.	61.4
600.	3600.	293.	37.5	600.	3600.	174.	66.8
600.	5400.	368.	32.4	600.	5400.	221.	66.2
600.	7200.	422.	25.1	600.	7200.	262.	63.6
600.	9000.	464.	21.4	600.	9000.	299.	60.3
600.	10800.	496.	17.6	600.	10800.	331.	56.1
600.	12600.	522.	14.1	600.	12600.	359.	52.2
600.	14400.	541.	11.1	600.	14400.	384.	47.9
800.	1800.	357.	89.	800.	1800.	213.	125.2
800.	3600.	516.	73.9	800.	3600.	316.	133.6
800.	5400.	615.	55.8	800.	5400.	395.	128.8
800.	7200.	676.	40.3	800.	7200.	458.	119.1
800.	9000.	715.	28.8	800.	9000.	510.	108.6
800.	10800.	742.	20.4	800.	10800.	552.	97.4
800.	12600.	759.	14.5	800.	12600.	586.	86.8
800.	14400.	772.	10.3	800.	14400.	615.	77.2
1000.	1800.	594.	159.2	1000.	1800.	369.	228.1
1000.	3600.	771.	108.	1000.	3600.	509.	220.3
1000.	5400.	857.	71.8	1000.	5400.	605.	197.1
1000.	7200.	906.	48.6	1000.	7200.	672.	171.8
1000.	9000.	937.	33.2	1000.	9000.	724.	149.8
1000.	10800.	957.	22.9	1000.	10800.	764.	130.9
1000.	12600.	971.	15.9	1000.	12600.	797.	114.8
1000.	14400.	980.	11.	1000.	14400.	824.	101.
1200.	1800.	839.	218.9	1200.	1800.	551.	340.9
1200.	3600.	990.	137.1	1200.	3600.	694.	296.
1200.	5400.	1065.	91.	1200.	5400.	785.	254.7
1200.	7200.	1110.	62.3	1200.	7200.	852.	220.5
1200.	9000.	1138.	43.5	1200.	9000.	903.	192.4
1200.	10800.	1157.	30.7	1200.	10800.	943.	169.
1200.	12600.	1169.	21.9	1200.	12600.	976.	149.3
1200.	14400.	1178.	15.6	1200.	14400.	1004.	132.5

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

Rayonnement et transferts de chaleur combinés :

- Amiri, H., Mansouri, S. H. & Safavinejad, A. (2010). Combined conductive and radiative heat transfer in an anisotropic scattering participating medium with irregular geometries. *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 49, pp. 492-503.
- Bejan Adrian, Kraus Allan D., (2003) *Heat transfer handbook*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey
- Blechsmidt, D.. Monte Carlo study of light transmission through a cylindrical tube, *J. Vac. Sci. Technol.*, 11(3), 570–574, 1974.
- Bushinskii, A. V.: Determination of the geometric-optics coefficients of thermal radiation by the Monte Carlo method, *Inzhenerno-Fizicheskii Zh.*, 30(1), 160–166, 1976.
- Chai, J. C., Lee, H. S., and Patankar, S. V.: Improved treatment of scattering using the discrete ordinates method, *JHT*, 116(1), 260–263, 1994.
- Corlett, R. C.: Direct Monte Carlo calculation of radiative heat transfer in vacuum, *JHT*, 88(4), 376–382, 1966.
- Dehghan, A. A. and Behnia, M: Combined natural convection-conduction and radiation heat transfer in a Discretely heated open cavity, *JHT*, 118(1), 56–64, 1996.
- Edwards D. K., "Hybrid Monte Carlo Matrix-Inversion Formulation of Radiation Heat Transfer with Volume Scattering" in C. K. Law, Y. Jaluria, W. W. Yuen, and K. Miyasaka (eds.), *Heat Transfer in Fire and Combustion Systems*, ASME, New York, pp. 273-278, 1985.
- Fiveland, W. A.: Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media, *JHT*, 109(3), 809–812, 1987.
- John H.Lienhard IV and John H.Lienhar IV, *A heat transfer textbook 3rd ed.*— Cambridge, MA : J.H. Lienhard V, c2000
- Gebhart, B.: *Heat Transfer*, 2nd edn., McGraw-Hill, New York, pp. 150–163, 1971.
- Gebhart, B.: Surface temperature calculations in radiant surroundings of arbitrary complexity—For gray, Diffuse radiation, *IJHMT*, 3(4), 341–346, 1961.
- Goheneche, J.-M., & Sacadura, J.-F. (2002). The Zone Method: A New Explicit Relation to Calculate the Total Exchange Areas in Anisotropically Scattering Medium Bounded by Anisotropically Reflecting Walls. *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 124, pp. 696-703.
- Hogan, R. E. and Gartling, D. K.: Solution strategies for coupled conduction/radiation problems, *Commun. Numer. Methods Eng.*, 24(6), 523–542, June 2008.
- Hottel, H. C. and Sarofim, A. F.: *Radiative Transfer*, McGraw–Hill, New York, 1967.
- Howell, J. R. and Bannerot, R. B.: Trapezoidal grooves as moderately concentrating solar energy collectors, in A. E. Smith (ed.), *Radiative Transfer and Thermal Control*, vol. 49, pp. 277–289, AIAA Progress in Aeronautics and Astronautics Series, New York, 1976.
- Howell, J. R. and Durkee, R. E.: Radiative transfer between surfaces in a cavity with collimated incident radiation: A comparison of analysis and experiment, *JHT*, 93(2), 129–135, 1971.
- Howell, J.R., Siegel, R., & Mengüç, M.P.(2011). *Thermal Radiation Heat Transfer*, 5th edition, CRC Press Inc, New York, Taylor and Francis.

- Kim, T. Y. and Baek, S. W.: Analysis of combined conductive and radiative heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure using the discrete ordinates method, *IJHMT*, 34(9), 2265–2273, 1991.
- Lockwood E C. and Shah N. G. (1981), "A New Radiation Solution Method for Incorporation in General Combustion Prediction Procedures," Eighteenth Symposium (International) on Combustion, pp. 1105-1414, The Combustion Institute, Pittsburgh.
- Mahapatra, S. K., Nanda, P. & Sarkar, A. (2005). Analysis of coupled conduction and radiation heat transfer in presence of participating medium using a hybrid method. *Heat Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 890-898.
- McHugh, J., Burns, P. J., Hittle, D., and Miller, B.: Daylighting design via Monte Carlo, in S. T. Thynell et al. (eds.), *Developments in Radiative Heat Transfer*, ASME HTD-203, pp. 129–136, ASME, New York, 1992.
- Mochida, A., Kudo, K., Mizutani, Y., Hattori, M., and Nakamura, Y.: Transient heat transfer analysis in vacuum furnace by radiant tube burners, *Proceedings of the RAN 95: International Symposium on Advanced Energy Conversion Systems*, Society of Chemical Engineers, Nagoya, Japan, December 1995.
- Modest, F.M. (2013). *Radiative heat transfer*, 3rd edition, New York, academic Press.
- Modest, M. F., & Yang, J. (2008). Elliptic PDE formulation and boundary conditions of the spherical harmonics method of arbitrary order for general three-dimensional geometries. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol.109, pp 1641–1666.
- Modest, M. F.: Three-dimensional radiative exchange factors for nongray, nondiffuse surfaces, *Numer. Heat Transfer B*, 1, 403–416, 1978.
- Moutsoglou, A., Rhee, J. H., and Won, J. K.: Natural convection-radiation cooling of a vented channel, *IJHMT*, 35(11), 2855–2863, 1992.
- Patankar, S. V. and Spalding, D. B.: A calculation procedure for heat, mass, and momentum transfer in threedimensional parabolic flows, *IJHMT*, 15, 1787–1806, 1972.
- Polgar, L. G. and Howell, J. R.: Directional radiative characteristics of conical cavities and their relation to lunar phenomena, in G. B. Heller (ed.), *Thermophysics and Temperature Control of Spacecraft and Entry Vehicles*, pp. 311–323, Academic, New York, 1966.
- Polgar, Wal L. G. and Howell, J. R.: *Directional Thermal-Radiative Properties of Conical Cavities*, NASA TN D-2904, Washington, DC, 1965.
- Poljak, G.: Analysis of heat interchange by radiation between diffuse surfaces, *Tech. Phys. USSR* 1(5–6), 555–590,(1935).
- Raithby, G.D. and Chui, E.H., "A finite-volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosures with participating media," *J Heat Transfer*, 112, 415-423, 1990.
- Razzaque M M, Howell J R, Klein D E (1984) Coupled radiative and conductive heat transfer in a two-dimensional enclosure with gray participating media using finite elements. *Trans. ASME J. Heat Transfer* 106:613-619.
- Razzaque M M, Klein D E, Howell J R (1983) Finite element solution of radiative heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosures with gray participating media. *Trans. ASME J. Heat Transfer* 105:933-936.
- Razzaque, M. M., Howell, J. R., and Klein, D. E.: Coupled radiative and conductive heat transfer in a twodimensional rectangular enclosure with gray participating media using finite elements, *JHT*, 106(3), 613–619, 1984.

- Rousse, D. R. (2000). Numerical predictions of two-dimensional conduction, convection, and radiation heat transfer— I. Formulation, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 39, pp. 315-331.
- Rousse, D. R., Gautier, G. & Sacadura, J. F. (2000). Numerical predictions of two-dimensional conduction, convection and radiation heat transfer – II. Validation, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 39, pp. 332-353.
- Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 3d ed., Hemisphere/Taylor and Francis, Washington, D.C., 1992.
- Siegel, R.: Boundary fluxes for spectral radiation from a uniform temperature rectangular medium, *JTHT*, 6(3), 543–546, 1992a.
- Steven Audrey Ndjanda Heugang, Hervé Thierry Tagne Kamdem, and François Beceau Pelap / *American Journal of Heat and Mass Transfer* (2016) Vol. 3 No. 6 pp. 396-411
- Talukdar, P. & Mishra, S. C. (2001). Transient conduction and radiation heat transfer with heat generation in a participating medium using the collapsed dimension method. *Numerical Heat Transfer—Part A*, Vol. 39, No. 1, pp. 79-100.
- Tan Z. *Radiative Heat Transfer in Multidimensional Emitting, Absorbing, and Anisotropic Scattering Media—Mathematical Formulation and Numerical Method*. ASME. *J. Heat Transfer*. 1989;111(1):141-147. doi:10.1115/1.3250636.
- Tan, Z.: Combined radiative and conductive heat transfer in two-dimensional emitting, absorbing, and anisotropically scattering square media, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 16, 391–401, 1989a.
- Taniguchi H., Kudo K., Hayasaka H., Yang W.-J, and Tashiro H., "Thermal Behavior in Furnaces of Complex Geometry," in T. C. Min and J. L. S. Chen (ed.), *Fundamentals in Thermal Radiation Heat Transfer*, ASME, New York, 1984, pp. 29-36, 1984.
- Taniguchi H., Yang W.-J, Kudo K., Hayasaka H., Oguma M., Kusama A., Nakamachi I., and Okigami N., "Radiant Transfer in Gas Filled Enclosures by Radiant Energy Absorption Distribution Method," in C. L. Tien, V. E Carey, and J. K. Ferrell (eds.), *Heat Transfer--1986*, vol. 2, pp. 757-762, 1986.
- Tapimo, R., & Kamdem, H.T .T. (2016). A Spherical Harmonic Formulation for Radiative Heat Transfer Analysis, *American Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 3 No. 4, pp. 280-295.
- Toor, J. S. and Viskanta, R.: A numerical experiment of radiant heat exchange by the Monte Carlo method, *IJHMT*, 11(5), 883–897, 1968a.
- Van Doormall, J. P. and Raithby, G. D.: Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows, *Numer. Heat Transfer*, 7, 147–163, 1983.
- Vercammen H. A. J. and Fromment G. E, "An Improved Zone Method Using Monte Carlo Techniques for the Simulation of Radiation in Industrial Furnaces," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 23, pp. 329-337, 1984.
- Villeneuve, P. V., Chapman, D. D., and Mahan, J. R.: Use of the Monte-Carlo ray-trace method as a design tool for jet engine visibility suppression, in Y. Bayazitoglu et al. (eds.), *Radiative Heat Transfer: Current Research*, ASME HTD-vol. 276, pp. 59–71, ASME, New York, 1994.
- Warren M. Rohsenow, James P. Hartnett, Young I. Cho, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill Education, 3 edition (1998)
- W. Richter, "Scale-Up and Advanced Performance Analysis of Boiler Combustion Chambers," ASME paper No. 85-WA/HT-80, ASME, New York, 1985.
- W.-J. Yang, H. Taniguchi, and K. Kudo, "Radiative Heat Transfer by the Monte Carlo Method," T. E Irvine and J. E Hartnett (eds.), *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, New York, vol. 27, pp. 1-215, 1995.

Yarbrough, D. W. and Lee, C.-L.: Monte Carlo calculation of radiation view factors, in F. R. Payne et al. (eds.), *Integral Methods in Science and Engineering*, vol. 85, pp. 563–574, Hemisphere, Washington, DC, 1985.

Zhao, Z., Poulidakos, D., and Ren, Z.: Combined natural convection and radiation from heated cylinders inside a container, *JTHT*, 6(4), 713–720, 1992.

Optimisation, Contrôle et Problèmes inverses en transferts de chaleur :

Alifanov, O. M. (1994), *Inverse heat transfer problems*, Springer-Verlag, ISBN 0-387-53679-5, New York.

Alifanov, O. M., Artyukhin, E. and Rumyantsev, A., (1995), “Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems”, Begell House, New York.

Alifanov, O.M. and Egorov, Y.V. (1985), Algorithms and Results of Solving the Inverse Heat Conduction Boundary Problem in a Two-Dimensional Formulation, *J.Engng. Phys.*, vol. 48, pp. 489-496.

Alifanov, O.M. and Nenarokomov, A.V. (1993), Boundary Inverse Heat Conduction Problem in Extreme Formulation, *Proc. 1st International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice*, ASME, Florida, USA, pp.31-37.

Alnajem M., Özisik N & N., M. (1986). A direct analytic approach for solving two-dimensional linear inverse heat conduction problems. *Wärme- und Stoffübertragung*. 20. 89-96. 10.1007/BF01008806.

Bard, Y. B., (1974), “Nonlinear Parameter Estimation”, Acad. Press, New York. Jaluria, Y., 1998, “Design and Optimization of Thermal Systems”, McGraw Hill. Stoecker, W. F., 1989, “Design of Thermal Systems”, McGraw Hill.

Bazán F S V and Bedin L (2017), Identification of heat transfer coefficient through linearization: explicit solution and approximation *Inverse Problems* 33 124006.

Beck J.V., “Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem”, *Int. J. Heat mass Transfer*, Vol.13, PP. 703-716, Great Britain, 1970.

Beck, J. V. & Arnold, K. J. (1977) *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, ISBN 0471061182, New York.

Beck, J. V. (1962), Calculation of surface heat flux from an internal temperature history, *ASME Paper* 62-HT-46.

Beck, J. V., Blackwell, B. and St. Clair, C. R., (1985), “Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems”, Wiley Interscience, New York.

Beckman, F. S.: The solution of linear equations by the conjugate gradient method, in A. Ralston and H. S. Wilf (eds.), *Mathematical Methods for Digital Computers*, pp. 62–72, John Wiley & Sons, New York, 1960.

Belegundu, A.D and Chandrupatla, T. R., (1999), “Optimization Concepts And Applications In Engineering”, Prentice Hall. Fletcher, R., 2000, “Practical Methods of Optimization”, John Wiley & Sons.

Broyden, C. G., The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms, *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications* 1970, 6, 76-90.

Broyden, C.G., “A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations”, (1965), *Math. Comp.*, vol. 19, pp. 577-593.

Broyden, C.G., (1967), “Quasi-Newton Methods and Their Applications to Function Minimization”, *Math. Comp.*, vol. 21, pp. 368-380.

Burggraf, O. R. (1964), An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Application, *Journal of Heat Transfer*, Vol.86, August 1964, pp.373-382, ISSN 0022-1481.

- Cheng, C.H. & Chang, M.H. (2003), Shape design for a cylinder with uniform temperature distribution on the outer surface by inverse heat transfer method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.46, No.1, (January 2003), pp. 101-111, ISSN 0017-9310
- Cheng-Hung Huang, Shao-Pei Wang, A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42 (1999) 3387-3403.
- Cheng-Hung Huang, Shao-Pei Wang, A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method *International Journal of Heat and Mass Transfer* 13 (1999) 3387-3403.
- Chiang, W. C. and Russell, R. A.: Simulated annealing metaheuristics for the vehicle routing problem with time windows, *Ann. Operat. Res.*, 63, 3–27, 1996.
- Ciałkowski, M. J. & Grysa, K. (2010), A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.48, No.1, pp. 111-134, ISSN 1429-2955
- Colaço, M. J. and Orlande, H. R. B. (1999) A Comparison of Different Versions of the Conjugate Gradient Method of Function Estimation, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 36, pp. 229-249.
- Colaço, M.J., Dulikravich, G.S. and Martin, T. J., 2003a, "Optimization of Wall Electrodes for Electro-Hydrodynamic Control of Natural Convection Effects During Solidification", In: *ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition*, Washington, DC, November.
- Colaço, M.J., Dulikravich, G.S. and Martin, T. J., (2004), "Optimization of Wall Electrodes for Electro-Hydrodynamic Control of Natural Convection Effects During Solidification", *Materials and Manufacturing Processes*, Vol. 19, No. 4, pp. 719-736.
- Colaço, M.J., Dulikravich, G.S. and Martin, T.J., (2003b), "Reducing Convection Effects in Solidification by Applying Magnetic Fields Having Optimized Intensity Distribution" (Keynote Lecture), In: *ASME Summer Heat Transfer Conference*, Las Vegas, Nevada, July.
- Corana, A., Marchesi, M., Martini, C., and Ridella, S.: Minimizing multimodal functions of continuous variables with the "simulated annealing" algorithm, *ACM Trans. Math. Softw.*, 13, 262–280, 1987.
- Dahlke and P. Maa^{1/4}. An outline of adaptive wavelet Galerkin methods for Tikhonov regularization of inverse parabolic problems. In Y.-C. Hon and et al, editors, *Recent Development in Theories and Numerics. Proceedings of the International Conference on Inverse Problems*, pages 56{66, Hong Kong, China, 9-12 January 2002.
- Darvishvand, L., Kowsary, F., and Hadi Jafar, P.: Optimization of 3-D radiant enclosures with the objective of uniform thermal conditions on 3-D design bodies, *Heat Transfer Engineering*, Accepted, (2015).
- Daun, K. J. and Howell, J. R.: Inverse design methods for radiative transfer systems, *JQSRT*, 93(1–3), 43–60, June 2005.
- Daun, K. J., Howell, J. R., and Morton, D. P.: Design of radiant enclosures using inverse and non-linear programming techniques, *Inverse Probl. Eng.*, 11, 541–560, 2003c.
- Daun, K. J., Howell, J. R., and Morton, D. P.: Geometric optimization of radiative enclosures through nonlinear programming, *Numer. Heat Transfer B*, 43, 203–219, March 2003d.
- Daun, K. J., Howell, J. R., and Morton, D. P.: Geometric optimization of radiant enclosures containing specular surfaces, *JHT*, 125, 845–851, 2003e.
- Daun, K. J., Howell, J. R., and Morton, D. P.: Smoothing Monte Carlo exchange factors through constrained maximum likelihood estimation, *JHT*, 127(10), 1124–1128, October 2005.

Deb K., Pratap A., Agarwal S. and Meyarivan T., "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II," in IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 6, no. 2, pp. 182-197, April 2002 doi: 10.1109/4235.996017.

Deiveegan, M., Balaji, C., and Venkateshan, S. P.: Comparison of various methods for simultaneous retrieval of surface emissivities and gas properties in gray participating media, JHT, 128, 829–837, August 2006.

Dennis, B. H., Dulikravich, G. S. Egorov, I. N., Yoshimura, S. & Herceg, D. (2009), Three-Dimensional Parametric Shape Optimization Using Parallel Computers, Computational Fluid Dynamics Journal, Vol.17, No.4, pp.256–266, ISSN 0918-6654

Dennis, J. and Schnabel, R., 1983, "Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations", Prentice Hall.

Dulikravich, G. S. and Martin, T. J., 1996, "Inverse Shape and Boundary Condition Problems and Optimization in Heat Conduction", Chapter 10 in Advances in Numerical Heat Transfer, 1, 381-426, Minkowycz, W. J. and Sparrow, E. M. (eds.), Taylor and Francis.

Dulikravich, G.S., Colaço, M.J., Dennis, B.H., Martin, T.J. and Lee, S., 2003c, "Optimization of Intensities, and Orientations of Magnets Controlling Melt Flow During Solidification", In: Symposium on Materials Processing Under the Influence of Electrical and Magnetical Fields, TMS Annual Meeting, San Diego, CA, March.

Dulikravich, G.S., Colaço, M.J., Dennis, B.H., Martin, T.J. and Lee, S., 2004, "Optimization of Intensities, and Orientations of Magnets Controlling Melt Flow During Solidification", Materials and Manufacturing Processes, vol. 19, iss. 4, pp. 695-718.

Dulikravich, G.S., Colaço, M.J., Martin, T.J. and Lee, S., 2003a, "Magnetized Fiber Orientation and Concentration Control in Solidifying Composites", In: Symposium on Materials Processing Under the Influence of Electrical and Magnetical Fields, TMS Annual Meeting, San Diego, CA, March.

Dulikravich, G.S., Colaço, M.J., Martin, T.J. and Lee, S., 2003b, "An Inverse Method Allowing User-Specified Layout of Magnetized Micro-Fibers in Solidifying Composites", Journal of Composite Materials, vol. 37, no. 15, pp. 1351-1365.

Ertürk, H., Ezekoye, O. A., and Howell, J. R.: Boundary condition design to heat a moving object at uniform transient temperature using inverse formulation, J. Manuf. Sci. Eng., 126, 619–626, August 2004. doi: 10.1115/1.1763179.

Ertürk, H., Ezekoye, O. A., and Howell, J. R.: Comparison of three regularized solution techniques in a three dimensional inverse radiation problem, JQSRT, 73, 307–316, 2002b.

Ertürk, H., Ezekoye, O. A., and Howell, J. R.: Inverse design of a three-dimensional furnace with moving design environment, Proceedings of the ASME IMECE, New York, 2001.

Ertürk, H., Ezekoye, O. A., and Howell, J. R.: The application of an inverse formulation in the design of boundary conditions for transient radiating enclosures, JHT, 124(6), 1095–1102, 2002a.

Ertürk, H., Ezekoye, O. A., and Howell, J. R.: The application of an inverse formulation in the design of boundary conditions for transient radiating enclosures, JHT, 124(6), 1095–1102, 2002a.

Ertürk, H., Ezekoye, O. A., and Howell, J. R.: The use of inverse formulation in design and control of transient thermal systems, Proceedings of the 12th International Heat Transfer Conference, pp. 729–734, Grenoble, France, 2002c.

Fan J. Y. and Pan J. Y., A note on the Levenberg-Marquardt parameter, Applied Mathematics and Computation, 207 (2009), 351–359. MR2489105 (2010a:65080)

Fan J. Y. and Yuan Y. X., On the quadratic convergence of the Levenberg-Marquardt method without nonsingularity assumption, Computing, 74 (2005), 23–39. MR2127319 (2006a:65079)

- Fan J. Y., The modified Levenberg-Marquardt method for nonlinear equations with cubic convergence, *Mathematics of Computation* Volume 81, Number 277, January 2012, Pages 447–466
- Fedorov, A. G., Lee, K. H., and Viskanta, R. V.: Inverse optimal design of the radiant heating in materials Processing and manufacturing, *J. Mater. Eng. Perform.*, 7, 719–726, 1999.
- Fletcher, R., A New Approach to Variable Metric Algorithms, *Computer Journal* 1970, 13, 317-322.
- França, F. H. R. and Howell, J. R.: Transient inverse design of radiative enclosures for thermal processing of materials, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 14(4), 423–435, June 2006.
- França, F. H. R., Ezekoye, O. A., and Howell, J. R.: Inverse boundary design combining radiation and convection heat transfer, *JHT*, 123, 884–891, 2001.
- Fung-Bao Liu, A modified genetic algorithm for solving the inverse heat transfer problem of estimating plan heat source, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51 (2008) 3745–3752.
- Gamba, M., Pavy, T., and Howell, J. R.: Inverse methods for design and control of thermal systems: Validation in a 2-D visible light enclosure, *Proceedings of the 2003 ASME International Mechanical Engineering Conference and Exhibition*, Washington, DC, November 15–21, 2003.
- Gamba, M., Pavy, T., and Howell, J. R.: Modeling of a radiative RTP-type furnace through an inverse design: Mathematical model and experimental results, *Proceedings of the 2002 ASME International Mechanical Engineering Conference and Exhibition*, New Orleans, LA, November 17–22, 2002.
- Goffe, W. L., Ferrier, G. D., and Rogers, J.: Global optimization of statistical functions with simulated annealing, *J. Econom.*, 60(1–2), 65–100, 1994.
- Goldberg, D.E. (1989) *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co. Inc., Boston, MA, USA.
- Goldfarb, D., A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means, *Mathematics of Computation* 1970, 24, 23-26.
- Handbook of heat transfer, Warren M. Rohsenow Editor Department of Mechanical Engineering Massachusetts Institute of Technology James R Hartnett Editor Energy Resources Center University of Illinois at Chicago Young I. Cho Editor Department of Mechanical Engineering and Mechanics Drexel University Third Edition MCGRAW-HILL (1998).
- Hansen C, P. (2010), Discrete inverse problems. Insight and algorithms. 10.1137/1.9780898718836.
- Hansen, P. C. (2000), The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems, In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, P. Johnston (Ed.), 119-142, *Advances in Computational Bioengineering*. Available, WIT Press, from <http://www.sintef.no/project/eVITAMeeting/2005/Lcurve.pdf>.
- Hansen, P.C. & O’Leary, D.P. (1993), The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, *SIAM Journal of Scientific Computing*, Vol.14, No.6, pp. 1487–1503, ISSN 1064-8275.
- Hansen, P.C. (1998). Rank-deficient and discrete ill-posed problems, *SIAM monographs on mathematical modeling and computation*, Philadelphia.
- Hofmann B. and Yamamoto M., Convergence rates for Tikhonov regularization based on range inclusions. *Inverse Problems*, 2005.
- Hosseini Sarvari, S. M., Howell, J. R., and Mansouri, S. M. H.: Inverse boundary design radiation problem in absorbing-emitting media with irregular geometry, *Numer. Heat Transfer A*, 43(5), 565–584, 2003a.
- Hosseini Sarvari, S. M., Howell, J. R., and Mansouri, S. M. H.: Inverse design of three-dimensional enclosures with transparent and absorbing-emitting media using an optimization technique, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 30, 149–162, 2003c.

- Hosseini Sarvari, S. M., Howell, J. R., and Mansouri, S. M. H.: Inverse boundary design conduction-radiation problem in irregular two-dimensional domains, *Numer. Heat Transfer A Appl.*, 44, 1–16, 2003b.
- Hottel H. C. and Sarofim A. E, *Radiative Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- Hożejowski, L., Grysa, K., Marczewski, W. & Sendek-Matysiak, E. (2009), Thermal diffusivity estimation from temperature measurements with a use of a thermal probe, *Proceedings of the International Conference Experimental Fluid Mechanics 2009*, pp. 63-72, ISBN 978-80-7372-538-9, Liberec, Czech Republic, November 25.-27, 2009
- HUANG C.H. and OZISIK M. N., Inverse Problem of Determining the Unknown Strength of an Internal Plane Heat Source, *Journal of the Franklin institute* Vol. 329, No. 4, pp. 751-764, 1992.
- Huang C.-H., Tsai C.-C., An inverse heat conduction problem of estimating boundary fluxes in an irregular domain with conjugate gradient method, *Heat and Mass Transfer* 34 (1998) 47-54 Springer-Verlag 1998.
- Huang, C.H. and Ozisik, M.N. (1992), Inverse Problem of Determining Unknown Wall Heat Flux in Laminar Flow Through Parallel Plate Duct, *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 21, pp.101-116.
- Huang, C.H. and Wu, J.-Y. (1994), Two-Dimensional Inverse Problem in Estimating Heat Fluxes of an Enclosure with Unknown Internal Heat Sources, *J. Appl.Phys.*, vol. 76, pp.133--141.
- Huang, C.H., Wang, D.M. and Chen, H.M. (1999), Prediction of Local Thermal Contact Conductance in Plate Finned-Tube Heat Exchangers, *Inverse Problems in Engineering*, vol. 7, pp. 119-11.
- Imber M. and Khan J., "Prediction of Transient Temperature Distributions With Embedded Thermocouples", *AIAA Journal*, Vol.10, No.6, PP.784-789, USA, June 1972.
- Jarny Y., Ozisik M. N. and Bardon J. P., A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction, *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 34, No. II, pp. 2911-2919, 1991.
- Jianhua Zhou, Yuwen Zhang, J.K. Chen, Z.C. Feng, Inverse estimation of surface heating condition in a three-dimensional object using conjugate gradient method, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53 (2010) 2643–2654.
- Kerov, N.V. (1984), Solution of the Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem in a Cylindrical Coordinate System, *J. Engng, Phys.*, vol. 45, pp. 1245-1249.
- Kim, K. W. and Baek, S. W.: Inverse surface radiation analysis in an axisymmetric cylinder enclosure using a hybrid genetic algorithm, *Numer. Heat Transfer A*, 46, 367–381, 2004.
- Safavinejad, A., Mansouri, S. H., and Hosseini Sarvari, M.: Inverse boundary design of 2-D radiant enclosures with absorbing-emitting media using micro-genetic algorithm, *IASME Trans.*, 2(8), 1558–1567, 2005.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, Jr., C. C., and Vecchi, M. P.: Optimization by simulated annealing, *Science*, 220(4598), 71–680, 1983.
- Kirsch Andrea, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Second edition, Springer 2011.
- Kover'yanov, A. V. (1967), Inverse problem of nonsteady state thermal conductivity, *Teplofizika vysokikh temperatur*, Vol.5 No.1, pp.141-148, ISSN 0040-3644.
- Kurpisz, K. and Nowak, A. J., 1995, "Inverse Thermal Problems", WIT Press, Southampton, UK.
- Leduc, G., Monchoux, F., and Thellier, F.: Inverse radiative design in human thermal environment, *IJHMT*, 47(14–16), 3291–3300, 2004a.
- Leduc, G., Monchoux, F., and Thellier, F.: Optimal design of complex human environment by inverse radiative method, *International Symposium on Radiative Transfer IV*, Istanbul, Turkey, June 2004b.

- Levenberg, K., 1944, "A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares", *Quart. Appl. Math.*, 2, 164-168.
- Li, H. Y. and Yang, C. Y.: A genetic algorithm for inverse radiation problems, *IJHMT*, 40, 1545–1549, 1997.
- Marquardt, D. W., 1963, "An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters", *J. Soc. Ind. Appl. Math*, 11, 431-441.
- Mikhalev, A.M. and Reznik, S.V. (1988), Method of Determining the Thermophysical Properties of Orthotropic Materials from the Solution of a Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem, *J.Engng. Phys.*, vol.5 6, pp. 342-348.
- Mossi, A. C., Vielmo, H. A., França, F. H. R., and Howell, J. R., Inverse design involving combined radiative and turbulent convective heat transfer, *IJHMT*, 51(11–12), 3217–3222, March 2008.
- Murio, D. A., 1993, "The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems", Wiley Interscience, New York.
- Nehad Al-Khalidy, Analysis of boundary inverse heat conduction problem using space marching with Savitzky-Gollay Digital filter, *Int. Comm. Heat mass transfer* vol.26, No.2 pp-199-208, 1999.
- Onyango, T.T.M., Ingham, D.B. & Lesnic, D. (2008), Reconstruction of heat transfer coefficients using the boundary element method. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.56 No.1, pp. 114–126, ISSN: 0898-1221
- Ozisik, M.N. and Orlande, H.R.B., 2000, "Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications", Taylor and Francis, New York.
- Porter, J. M., Larsen, M. E., and Howell, J. R.: Discrete optimization of radiant heaters with simulated annealing, *Proceedings of the ASME Summer Heat Transfer Conference (on CD)*, San Francisco, CA, July 2005.
- Porter, J., Larsen, M., Barnes, J., and Howell, J.: Optimization of discrete heater arrays in radiant furnaces, *JHT*, 128(10), 1031–1040, October 2006.
- Pourshaghaghay, A., Pooladvand, K., Kowary, F., and Karimi-Zand, K.: An inverse radiation boundary design problem for an enclosure filled with an emitting, absorbing and scattering media, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 33, 381–390, 2006.
- Ren, H.-S. (2007), Application of the heat-balance integral to an inverse Stefan problem, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol.46, No.2, (February 2007), pp. 118–127, ISSN 1290-0729
- Safavinejad, A., Mansouri, S. H., Sakurai, A., and Maruyama, S.: Optimal number and location of heater in 2-d radiant enclosures composed of specular and diffuse surfaces using micro-genetic algorithm, *Appl. Thermal Eng.*, 29(5–6), 1075–1085, 2009.
- Shanno, D. F., Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization, *Mathematics of Computation* 1970, 24, 647-656.
- Siegel R. and Howell J. R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, 3d ed., Hemisphere/Taylor and Francis, Washington, D.C., 1992.
- Silva Neto, A.J. and Ozisik, M.N. (1992), Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem of Estimating the Time-Varying Strength of a Line Heat Source, *J. Appl. Phys.*, vol. 71, pp. 5357-5362.
- Silva Neto, A.J. and Ozisik, M.N. (1993a), Inverse Problem of Simultaneously Estimating the Timewise-Varying Strengths of Two Plane Heat Sources, *J. Appl. Phys.*, vol. 73, pp. 2132-2137.
- Silva Neto, A.J. and Ozisik, M.N. (1993b), Simultaneous Estimation of Location and Timewise Varying Strength of a Plane Heat Source, *J. Numer. Heat Transfer, Part A*, vol. 24, pp. 467-477.
- Silva Neto, A.J. and Ozisik, M.N. (1994a), An Inverse Heat Conduction Problem of Unknown Initial Condition, *Proc. 10th International Heat Transfer Conference*, Brighton, England.

- Silva Neto, A.J. and Ozisik, M.N. (1994b), The Estimation of Space and Time Dependent Strength of a Volumetric Heat Source in a One-Dimensional Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 37, pp. 909-915.
- Stolz G. (1960) Numerical solution to an inverse problem of heat conduction for simple shapes, *J. Heat Transfer*, 82 C: 20.
- Sparrow E. M., A. H. Sheikh and T. S. Lundgren (1964) The inverse problem in transient heat conduction, *J. Appl. Mechanical*, 86E: 369.
- Storn, R. & Price, K. *Journal of Global Optimization* (1997) 11: 341
<https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>
- Su, J. and Silva Neto, A.J. (2001), Two-dimensional Inverse Heat Conduction Problem of Source Strength Estimation in Cylindrical Rods, *Applied Mathematical Modelling*, 25, pp. 861-872.4.
- Taler J., Zima W., Solution of inverse heat conduction problems using control volume approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42(1999) 1123-1140.
- Tanana V. P., An Order-Optimal Method of Solving an Inverse Problem for a Parabolic Equation, ISSN 1990-4789, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2009, Vol. 3, No. 3, pp. 395–400.
- Tikhonov, A. N. & Arsenin, V. Y. (1977), *On the solution of ill-posed problems*, John Wiley and Sons, ISBN 0-470-99124-0, New York, USA.
- Tikhonov, A. N. & Arsenin, V. Y. (1977), *On the solution of ill-posed problems*, John Wiley and Sons, ISBN 0-470-99124-0, New York, USA.
- Trujillo, D. M. and Busby, H. R., 1997, "Practical Inverse Analysis in Engineering", CRC Press, Boca Raton.
- Tu J.S. and Beck J.V., Solution of inverse heat conduction problems using a combined function specification and regularization method and a direct finite element solver, in *Proceedings of the Second Annual Inverse Problems in Engineering Seminar*, J.V. Beck, ed., East Lansing, MI, 1989, pp. 1–25, College of Engineering, Michigan State University.
- Van Laarhove, P. J. M., Aarts, E. H. L., and Lenstra, J. K.: Job shop scheduling by simulated annealing, *Oper. Res.*, 40(1), 113–125, 1992.
- Vogel J., Sara L. and Krejc L., A simple inverse heat conduction method with optimization, *International journal, heat and mass transfer*, vol.36, No.17, pp-4215-4220, 1993.
- Vogel, C. R.: *Computational Methods for Inverse Problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 2002.
- Wagner Barbosa Muniz A comparison of some inverse methods for estimating the initial condition of the heat equation, *Journal of computational and applied mathematics* 103, 1999, 145-163.
- Woodbury, K.A. and Thakur, S.K. (1993), A Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Algorithm, *Proc. 1st International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice*, ASME, Florida, USA, pp.219-226.
- Yamashita N. and Fukushima M., On the rate of convergence of the Levenberg-Marquardt method, *Computing (Supplement 15)*, (2001), 237–249. MR1874516 (2002k:65088)
- Yan L., Fu C.L., Yang F.L., The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 32 (2008) 216–222.
- Yoon, K.-B., Park, S.-J., and Kim, T.-K.: Study on inverse estimation of radiative reflection properties in midwavelength infrared region by using the repulsive particle swarm optimization algorithm, *Appl. Opt.*, 52(22), 5533–5538, 2013.
- Yüksel, A.: Design, characterization and optimization of high-efficiency thermophotovoltaic (TPV) device using near-field thermal energy conversion, MS thesis, Department of Mechanical Engineering, The University of Texas at Austin, Austin, TX, December 2013.

Zabaras, Nicholas & C. Liu, Joshua. (1988). An Analysis of Two-Dimensional Linear Inverse Heat Transfer Problems Using AN Integral Method. Numerical Heat Transfer Part A-applications - NUMER HEAT TRANSFER PT A-APPL. 13. 527-533. 10.1080/10407788808910006.