

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



**ECOLE DOCTORALE : PHYSIQUE, CHIMIE, SCIENCE DE LA TERRE, DE
L'UNIVERS ET DE L'INGENIEUR (PCSTUI)**

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année : 2020 N^o d'ordre : 152

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Mécanique des Fluides et Applications

Présentée par :

Pierre FAYE

**Modélisation des échanges hydrodynamiques et thermiques dans
un bassin de rétention de forme paraboloidale**

Soutenue le 25 Septembre 2020 devant le jury composé de :

Président :	Mamadou BARRY	Professeur Titulaire FST/UCAD
Rapporteurs :	Mamadou Lamine SOW Sidy Demba TOURE	Professeur Assimilé FST/UCAD Professeur Titulaire FST/UCAD
Examineurs :	Cheikh MBOW Cheikh SENE	Professeur Assimilé FST/UCAD Professeur Titulaire FST/UCAD
Directeur de Thèse :	Joseph SARR	Professeur Titulaire FST/UCAD

AVANT PROPOS

Monsieur **Mamadou BARRY**, Professeur Titulaire à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, m'a toujours encouragé depuis la première année et a voulu présider mon Jury. Je lui exprime toute ma profonde gratitude

Monsieur **Joseph SARR**, Professeur Titulaire à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar m'a accueilli au sein de son équipe de Transferts Thermiques et a dirigé mon travail. Sa capacité à gérer un groupe m'a appris énormément de choses. Sa sympathie et sa gentillesse m'ont plus que jamais poussé à persévérer dans le travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Monsieur **Cheikh MBOW**, Professeur assimilé à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, a été attentif à toutes mes sollicitations et malgré les contraintes de temps, il a donné le meilleur de lui-même pour la réalisation de ce travail, a bien voulu participer à mon Jury. Je lui adresse mes plus sincères remerciements.

Monsieur **Mamadou Lamine SOW**, Professeur assimilé à l'université Cheikh Anta Diop de Dakar a répondu à toutes mes sollicitations allant dans le sens de l'amélioration de mes travaux de recherches et a accepté d'être mon rapporteur et participer à mon jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Monsieur **Sidy Demba TOURE**, Professeur Titulaire à l'université Cheikh Anta Diop de Dakar, a bien voulu être mon rapporteur malgré les circonstances du moment et participer à mon Jury. Je lui exprime mes remerciements les plus cordiaux.

Monsieur **Cheikh SENE** Professeur Titulaire à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar m'a toujours encouragé à persévérer dans le travail et a bien voulu participer à mon Jury malgré son emploi de temps chargé. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

DEDICACES

A la mémoire de mon père, à ma mère, à mes frères et sœurs, à mes fils, à tous mes amis et à celle qui partage aujourd'hui mes joies et mes peines.

NOMENCLATURE

LETTRES LATINES

C_v : Concentration massique adimensionnelle de vapeur d'eau dans le mélange

$C_{v\infty}$: Concentration massique adimensionnelle de vapeur d'eau dans le mélange à l'entrée du bassin

C_{vs} : Concentration massique adimensionnelle de vapeur d'eau à l'interface

C_{v0a} : Concentration massique adimensionnelle de vapeur d'eau dans le mélange à l'instant initial

C_{v0} : Concentration massique adimensionnelle de vapeur saturante à l'interface eau- mélange

C_{pa} : Capacité calorifique massique de l'air à pression constante ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)

D : Diamètre du bassin (m) à l'interface

D_a : Diffusivité massique de l'air ($m^2.s^{-1}$)

$Le = \frac{Sc}{Pr}$: Nombre de Lewis usuel

$Le_m = \frac{L_v.c_{v\infty}}{c_p Le(T_\infty - T_0)}$: Nombre de Lewis modifié

L_v : Chaleur latente de vaporisation ($J.kg^{-1}$)

$Pe = RePr$ = nombre de Péclet thermique

$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$: Nombre de Prandtl

P_{vs} : Pression de vapeur saturante à la surface de contact ($kg.m^{-1}.s^{-2}$)

mX : La masse d'eau adimensionnelle évaporée

$Re = \frac{U_{\infty} D}{\nu_a}$: Nombre de Reynolds

r : Coordonnée radiale(m)

$Sc = \frac{\mu_a}{\rho_a D_a}$: Nombre de Schmidt

T : Température adimensionnelle du mélange

T_∞ : Température adimensionnelle du mélange à l'entrée du bassin

T_{0a} : Température initiale adimensionnelle du mélange

T_0 : Température adimensionnelle sur la paroi du bassin

T_e : Température adimensionnelle de l'eau

T_{0e} : Température initiale adimensionnelle de l'eau

t : Temps adimensionnel

u : Composante horizontale longitudinale adimensionnelle de la vitesse

U_∞ : Vitesse adimensionnelle du mélange à l'entrée du bassin

u_λ : Composante de la vitesse adimensionnelle suivant λ

u_μ : Composante de la vitesse adimensionnelle

u_φ : Composante azimutale de la vitesse adimensionnelle

V : Composante verticale de la vitesse adimensionnelle

W : Composante horizontale transversale de la vitesse adimensionnelle

x : Coordonnée horizontale longitudinale adimensionnelle

y : Coordonnée verticale adimensionnelle
 z : Coordonnée horizontale transversale adimensionnelle

LETTRES GRECQUES

α_a : Diffusivité thermique de l'air ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)

α_e : Diffusivité thermique de l'eau ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)

ϕ_c : Densité de flux globale à l'interface ($\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$)

ϕ_{e0} : Densité de flux de chaleur sensible ($\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$)

ϕ_{ev} : Densité de flux de chaleur servant à évaporer l'eau liquide à la surface de contact ($\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$)

Φ : Coordonnée azimutale (rad)

λ_a : Conductivité thermique de l'air ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

λ_e : Conductivité thermique de l'eau ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

μ_a : Viscosité dynamique de l'air ($\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$)

μ_e : Viscosité dynamique de l'eau ($\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$)

ν_a : Viscosité cinématique de l'air ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)

ν_e : Viscosité cinématique de l'eau ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)

ρ_a : Masse volumique de l'air (kg.m^{-3})

ρ_e : Masse volumique de l'eau (kg.m^{-3})

Ψ : Fonction de courant adimensionnelle

θ : Coordonnée ortho radiale (rad)

Ω : Vorticité adimensionnelle

LISTE DE FIGURES

Figure 1: Représentation du système physique

Figure 2: Représentation en coordonnées cartésiennes

Figure 3: Représentation en coordonnées paraboloidales

Figure 4: Maillage du système

Figure 5: Organigramme de calcul

Figure 6 : Validation du code

Figure 7 : Evolution de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction du maillage. $Re=10$, $x=-0.5$, $t=0,05$.

Figure 8.a: Evolution de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

Figure 8. b : Evolution de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse x adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

Figure 8.c : Evolution de la température adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

Figure 8.d: Evolution de la concentration de vapeur adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

Figure 8.e: Evolution de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

Figure 8.f: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de l'abscisse adimensionnelle x a l'interface pour $Re=200$, $t=1$.

Figure 8.g: Evolution de la concentration de vapeur c_v adimensionnelle en fonction de l'abscisse adimensionnelle x a l'interface pour $Re=200$, $t=1$.

Figure 9-a: Variation de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du temps adimensionnel t , $Re=20$, $x=-0,4$.

Figure 9-b : Variation de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du temps adimensionnel t , $Re=20$, $x=-0,4$.

Figure 9-c: Variation de la température adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du temps adimensionnel t , $Re=20$, $x=-0,4$.

Figure 9-d: Variation de la concentration de vapeur adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du temps adimensionnel t , $Re=20$, $x=-0,4$.

Figure 10-a: Variation de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du nombre de Reynold. $t=1$; $x=-0.4$.

Figure 10-b: Variation de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du nombre de Reynold. $t=1$; $x=-0.4$.

Figure 10-c: Variation de la température adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. $t=1$; $x=-0.4$.

Figure 10-d: Variation de la concentration de vapeur adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du nombre de Reynold. $t=1$; $x=-0.4$.

Figure 11 : Variation de la concentration adimensionnelle dans la couche limite en fonction de l'altitude avec et sans couplage. $Re=200$, $t=0,4$, $x = -0,4$.

Figure 12-a : Evolution de la composante horizontale adimensionnelle de la vitesse en fonction de l'abscisse adimensionnelle x pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

Figure 12-b: Evolution de la température adimensionnelle de la vitesse en fonction de l'abscisse adimensionnelle x pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

Figure 12-c Evolution de la concentration de vapeur adimensionnelle de la vitesse en fonction de l'abscisse adimensionnelle x pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

Figure 13 : Variation de la masse totale en fonction du temps dimensionnel pour différentes valeurs du nombre de Reynolds .

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 .1 : Tableau des grandeurs et paramètres adimensionnels dans la couche limite

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
I Formulation mathématique du problème	04
I-1 Position du problème et choix du référentiel.....	05
I-2 Equations générales des transferts.....	06
I-3 Hypothèses simplificatrices.....	07
I-3-1 Dans l'air.....	07
I-3-2 Dans l'eau.....	07
I-4 Equations simplifiées.....	07
I-4-1 Dans la couche limite.....	07
I-4-2 Dans l'eau.....	08
I-5 Conditions initiales, aux limites et bilans à l'interface.....	10
I-5-1 Conditions initiales.....	10
I-5-2 Conditions aux limites.....	10
I-5-3 Conditions et équations des bilans à l'interface.....	10
I-6 Adimensionnalisation des équations.....	11
I-6-1 Choix des variables adimensionnelles.....	11
I-6-2 Equations des transferts dans la couche limite.....	12
I-6-3 Equations des transferts dans l'eau.....	12
I-6-4 Conditions initiales, aux limites et bilans à l'interface.....	13
I-7 Conclusion.....	14
II Analyse Numérique	15
II-1 Introduction.....	16
II-2 Discrétisation du domaine et approximation des dérivées.....	16
II-2-1 Discrétisation du domaine.....	16
II-2-2 Approximation des dérivées spatiales et temporelles.....	17
II-3 Discrétisation des équations différentielles de transfert.....	18
II-3-1 Discrétisation en schéma implicite suivant la direction x	18
II-3-2 Discrétisation en schéma implicite suivant la direction y	18
II-3-2 Discrétisation en schéma implicite suivant la direction λ	19
II-3-2 Discrétisation en schéma implicite suivant la direction μ	21
II-4- Méthodologie numérique.....	24
II-5 Algorithme de calcul.....	24
II-6 Conclusion.....	27
III- Résultats et discussions	28
III- 1-Résultats et discussions	28
III- 1-1 Validation du code	29
III- 4-2 Choix du maillage	29
III- 4-3 Résultats et commentaires	30

CONCLUSION GENERALE	46
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	47
ANNEXE	49
RESUME	52
ABSTRACT	52

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Les phénomènes liés aux écoulements diphasiques ont fait l'objet de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales. En effet ils interviennent dans de nombreux domaines aussi bien technologiques (condensateurs, centrales thermiques, nucléaires, industrie agro-alimentaire) que naturels (évaporation, évapotranspiration, brouillard, interaction océan-atmosphère) [1-12]. Cependant la modélisation théorique de ces phénomènes est très complexe à cause entre autres de la diversité et du nombre élevé des paramètres qui interviennent et de l'absence d'un modèle théorique cohérent qui décrit les phénomènes de transferts des grandeurs surfaciques. D'autre part du point de vue expérimental les acteurs se heurtent très souvent à des problèmes d'ordre métrologiques. C'est pourquoi la plupart des études relatives aux écoulements diphasiques ne concernaient que les phénomènes de diffusion.

Il existe plusieurs méthodes qui servent à évaluer l'évaporation à la surface libre d'un plan d'eau:

- Méthode de calcul par le transfert de masse: Elle est basée sur la loi de l'aérodynamique présentée pour la première fois par Dalton (1802) [1]. En effet cette méthode est basée sur la détermination de la masse d'eau transférée de la surface d'eau à l'atmosphère. Des développements récents dans la compréhension des couches limites nous permettent d'évaluer ces quantités. Cependant, la complexité du processus physique ne permet pas de faire une étude mathématique rigoureuse.
- Méthode de calcul de l'évaporation par le bilan d'énergie [2]: Elle est basée sur le principe de conservation de l'énergie, qui consiste à calculer l'évaporation en prenant en considération le bilan thermique de la masse d'eau. Quoique la méthode soit théoriquement valide, son application est sérieusement entravée par la difficulté d'évaluer les différents paramètres qui interviennent.
- Méthode du bilan de l'eau [3] : elle se fonde sur l'équation de continuité. Bien qu'elle offre l'avantage évident d'une théorie simple, elle recèle un désavantage certain : c'est-à-dire que les erreurs de mesure des termes que l'on retrouve dans l'équation se reflètent directement dans les valeurs calculées de l'évaporation.
- Méthodes empiriques : elles sont basées sur l'équation aérodynamique [4]. Le plus grand attrait de ces formules empiriques est probablement dû à leur simplicité et au fait qu'elles permettent d'évaluer l'évaporation à partir des données météorologiques classiques. Néanmoins, il est essentiel que ceux qui les utilisent en connaissent les limites.
- Méthode des bacs d'évaporation [5]: La popularité des bacs d'évaporation repose sur les faits suivants : ils ne coutent pas cher ; l'équipement est simple et, de façon générale, le rapport annuel de l'évaporation du bac à celle du lac reste généralement constant d'année en année et, quoique de façon moindre, de région en région. L'inconvénient de la méthode des bacs est qu'ils n'offrent pas de données fiables sur une longue période.

Néanmoins depuis le siècle dernier avec le développement technologique et l'apparition de calculateurs de plus en plus performants beaucoup de paramètres ignorés ont été introduits et le suivi dans le temps des différents phénomènes ont permis de mieux comprendre les mécanismes de transferts couplés de chaleur et de masse lors de l'évaporation des liquides dans un espace confiné ou au niveau d'une surface libre.

Pour faire face aux aléas climatiques, au Sénégal, des bassins de rétention qui sont des ouvrages à moindre coût, avec une technicité reproductible ont été construits. Ils offrent de multiples avantages parmi lesquels la restauration de la biodiversité par augmentation de la

faune et de la flore, la recharge des nappes phréatiques, la création d'un microclimat et d'un plan d'eau favorable aux loisirs, une sécurisation de la production et une augmentation de la diversification des cultures.

Pour quantifier la perte de masse due au passage d'un courant d'air chaud au-dessus de ces plans d'eau afin de bien dimensionner ces ouvrages, il faut alors résoudre simultanément les équations des transferts de chaleur et de masse dans et au-dessus du bassin.

Notre objectif dans ce travail est donc de déterminer les distributions des températures, des vitesses et de la masse évaporée au-dessus d'un bassin de rétention de forme paraboloidale partiellement rempli d'eau. Contrairement à certains auteurs qui étudient les transferts dans le mélange air- vapeur d'eau en se donnant des conditions imposées de températures ou de densités flux de chaleur et de masse sur l'interface air- eau [6 – 12] nous optons dans ce travail pour un modèle qui tient compte de la simultanéité des transferts aussi bien dans le mélange air- vapeur d'eau que dans l'eau d'un bassin de rétention paraboloidal partiellement rempli d'eau.

Ainsi notre travail se compose de trois chapitres :

- Le premier chapitre concerne la modélisation mathématique du problème étudié. cette partie étudie les lois fondamentales, les phénomènes physiques internes et externes à notre système.
- Le deuxième chapitre concerne la modélisation numérique du problème et intègre les différentes corrélations mise au point pour la reconstitution théorique des courbes.
- La troisième partie discute des résultats obtenus et les compare à ceux obtenus par Touhami et Roger Smith.

La conclusion générale dégage les points forts de notre étude et énonce des perspectives de recherches et de développement.

CHAPITRE I

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

CHAPITRE I

Formulation mathématique du problème

I-1 Position du problème et choix du référentiel :

Considérons un parabolôïde creux de centre O rempli d'eau. La paroi du bassin est recouverte d'une matière lisse, isotherme et imperméable de telle sorte que les transferts d'eau par infiltration soient inexistantes. A partir d'un certain instant t_0 , la surface libre du bassin est parcourue par un courant d'air chaud qui entraîne le mouvement et l'échauffement de l'eau dans le bassin.

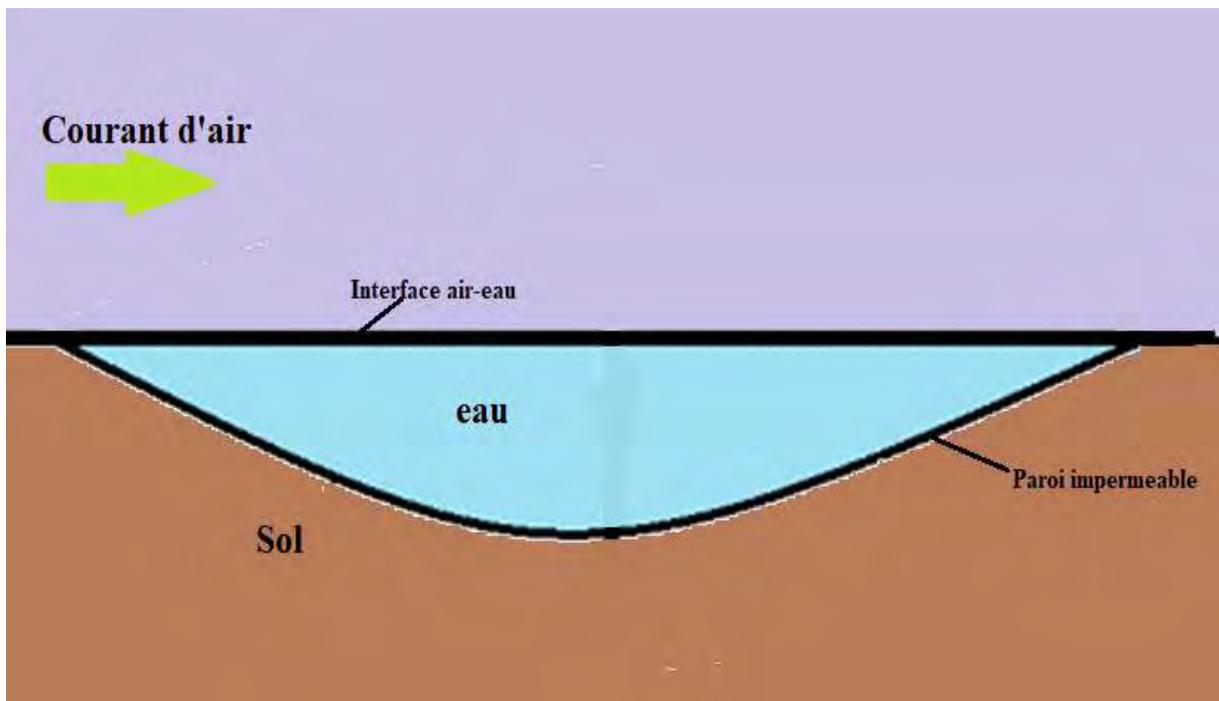


Figure 1: Représentation du système physique

La géométrie du problème nous conduit à utiliser :

-Dans l'air, le système de coordonnées cartésiennes avec x (la coordonnée horizontale longitudinale suivant laquelle s'effectue le mouvement), y la coordonnée verticale et z la coordonnée horizontale transversale comptées toutes à partir du centre de la surface libre du bassin.

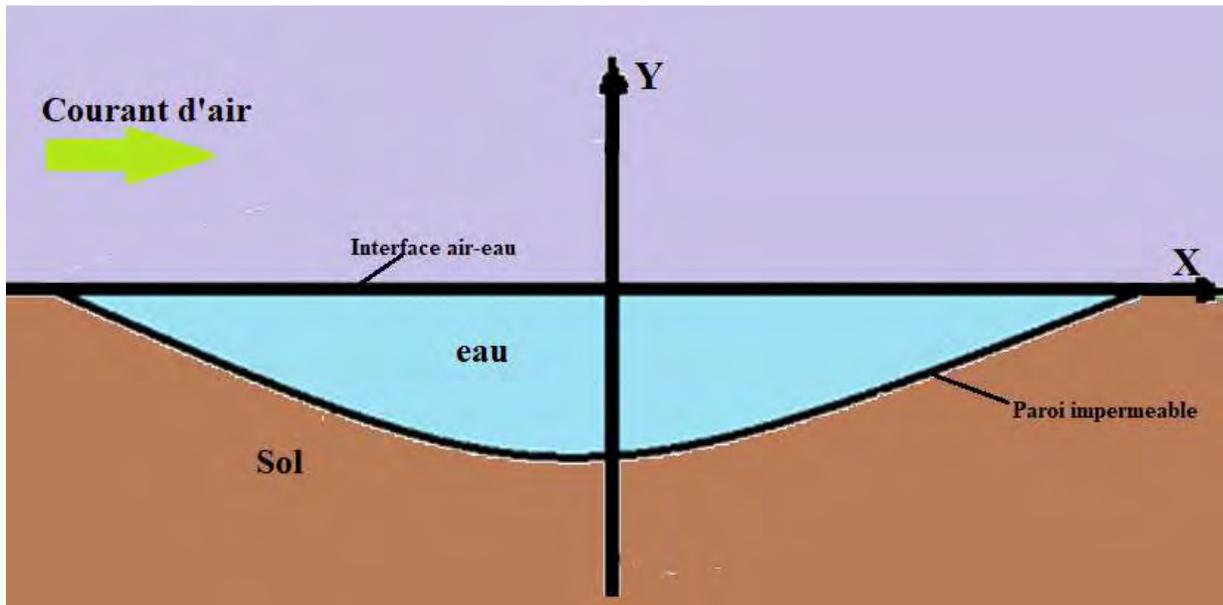


Figure 2: Représentation en coordonnées cartésiennes

-Dans l'eau, le système de coordonnées paraboloidale λ , μ et φ comptées à partir du centre O de la surface libre du bassin et qui s'expriment comme suit :

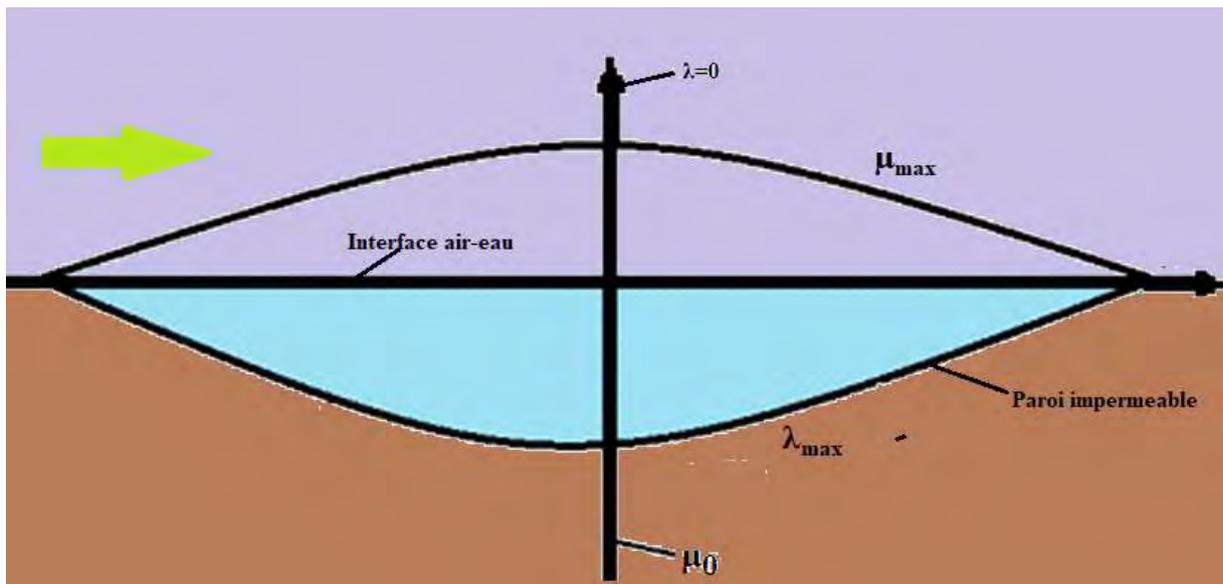


Figure 3: Représentation en coordonnées paraboloidales

$$\lambda = r - r \cos \theta = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - y \Rightarrow \lambda^2 = x^2 + z^2 - 2\lambda y \quad (a)$$

$$\mu = r + r \cos \theta = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + y \Rightarrow \mu^2 = x^2 + z^2 + 2\mu y \quad (b)$$

$$\varphi = \varphi$$

avec r la coordonnée radiale, θ la coordonnée orthoradiale, φ la coordonnée azimutale en coordonnées sphériques.

Les surfaces telles que $\left. \begin{array}{l} \lambda^2 = x^2 + z^2 - 2\lambda y = \text{constante} \\ \mu^2 = x^2 + z^2 + 2\mu y = \text{constante} \end{array} \right\}$, sont des paraboloides.

I-2 Equations générales des transferts :

D'après les lois fondamentales de la mécanique des milieux déformables, les équations générales des transferts s'écrivent : [13]

- Equation de bilan de la matière totale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{V} + \vec{J}) = \phi \quad (\text{I-2-1})$$

$\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i$, J_i est la densité de flux de diffusion des (ρ_i) à travers la surface (S) .

$\phi = \sum_i \phi_i$, ϕ_i est la densité de taux de production de la grandeur (ρ_i) dans le volume (v) .

- Equation du mouvement sous forme de variables primitives:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \text{grad}) \vec{V} = -\text{Div}(P) + \sum_i \rho_i \vec{f}_i \quad (\text{I-2-2})$$

P étant un tenseur d'ordre 2 appelé tenseur des contraintes.

\vec{f}_i est le champ de force massique qui s'applique sur chaque constituant (i) de (ρ_i) .

- Equation du mouvement sous forme de vorticité:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{Grad}) \vec{\omega} \right) = -\text{rot}(\text{Div} P) + \sum_i \text{rot}(\rho_i f_i) \quad (\text{I-2-3})$$

-Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \text{Grad}) T = \alpha \Delta T + \gamma \Delta C \quad (\text{I-2-4})$$

$\gamma \Delta C$ représente l'effet Dufour qui rend compte de la contribution du gradient de concentration au flux de chaleur.

- Equation du bilan de l'espèce

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \text{Grad}) C = D \Delta C + D \delta \Delta T \quad (\text{I-2-5})$$

Le terme $D \delta \Delta T$ représente l'effet Soret (thermo diffusion) qui rend compte de la contribution du gradient de température au flux massique.

δ étant le coefficient de thermo migration.

Afin de simplifier les équations qui régissent les phénomènes de transferts, nous posons les hypothèses suivantes:

I-3 : Hypothèses simplificatrices

I-3-1-Dans l'air

- Nous adoptons les hypothèses des couches limites laminaires hydrodynamique et thermique dans l'air.
- L'air est un mélange d'air sec et de vapeur d'eau assimilés à des gaz parfaits.
- La vitesse, la température et la concentration de la vapeur dans l'air à l'entrée du bassin sont constantes.
- Les propriétés physiques du mélange sont constantes.
- L'écoulement de l'air au dessus du bassin s'effectue seulement suivant (Ox).
- Les effets radiatifs peuvent y être négligés.
- Les effets Dufour et Soret sont négligés.

I-3-2 Dans l'eau :

- Les transferts sont bidimensionnels.
- Les propriétés thermodynamiques de l'eau sont constantes.
- L'eau est macroscopiquement homogène et n'est le siège d'aucune réaction chimique.
- Les effets Dufour et Soret sont négligés.
- Le transfert de masse ne s'effectue qu'à la surface.

I-4 Equations simplifiées :

Eu égard aux hypothèses (1.3.1) et (1.3.2), les équations vectorielles donnent:

I-4-1 Dans la couche limite:

- Equation de continuité :

$$\text{Div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{I-4-1})$$

- Equation du mouvement :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \text{Grad}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho_a} \text{Grad} p + \nu_a \Delta \vec{V} + \vec{g} \quad (\text{I-4-2})$$

- Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \text{Grad}) T = \alpha_a \Delta T \quad (\text{I-4-3})$$

- Equation du bilan de matière

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \text{Grad}) C = D_a \Delta C \quad (\text{I-4-4})$$

I-4-2 Dans l'eau:

- Equation de continuité:

$$\text{Div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{I-4-5})$$

- Equation du mouvement sous forme de variables primitives :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \text{Grad}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho_e} \text{Grad} p + \nu_e \Delta \vec{V} + \vec{g} \quad (\text{I-4-6})$$

L'équation du mouvement sous forme des variables primitives étant fortement non- linéaire, difficile à résoudre du point de vue numérique, nous faisons appel à la notion de vorticité qui nous permet d'obtenir une équation quasi-linéaire plus malléable numériquement. Pour compléter le système, on introduit l'équation de la fonction de courant.

- Equation du mouvement sous forme de la vorticité :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \text{Grad}) \vec{\omega} = \nu_e \Delta \vec{\omega} \quad (\text{I-4-7})$$

 quation de la fonction de courant

$$\vec{\omega} = \text{rot} \vec{V} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \text{rot} \vec{\psi}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{\psi} = -\vec{\omega} \quad (\text{I-4-8})$$

- Equation de la chaleur :

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{V}Grad)T_e = \alpha_e \Delta T_e \quad (\text{I-4-9})$$

En projetant ces équations sur le système d'axe de coordonnées nous obtenons les équations suivantes:

I-4-3 Dans l'air

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I-4-10})$$

- Equation du mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I-4-11})$$

- Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{I-4-13})$$

- Equation de la masse

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_a \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (\text{I-4-14})$$

I-4-4 Dans l'eau

Compte tenu des hypothèses (1.3.2) les projections des équations deviennent :

- Equation de la fonction de courant :

$$\frac{4}{\lambda + \mu} \left[\lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right] - \frac{\psi}{\lambda \mu} = -\omega \quad (\text{I-4-15})$$

- Equation du mouvement :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\frac{4}{\lambda + \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \left[u_{\lambda} \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + u_{\mu} \mu^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right] = \frac{4\nu_e}{\lambda + \mu} \left[\lambda \frac{\partial^2 \omega}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right] - \frac{\omega \nu_e}{\lambda \mu} \quad (\text{I-4-16})$$

- Equation de la chaleur :

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + \left(\frac{4}{\lambda + \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \left[u_{\lambda} \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\partial T_e}{\partial \lambda} + u_{\mu} \mu^{\frac{1}{2}} \frac{\partial T_e}{\partial \mu} \right] = \frac{4\alpha_e}{\lambda + \mu} \left[\lambda \frac{\partial^2 T_e}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial T_e}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial^2 T_e}{\partial \mu^2} + \frac{\partial T_e}{\partial \mu} \right] \quad (\text{I-4-17})$$

I-5 Conditions initiales, aux limites et des bilans à l'interface:

I-5-1 Conditions initiales :

Pour $t = 0$

$$\forall x, y: T(0, y) = T_{0a}, \quad C(0, y) = C_{0a} \quad \text{et} \quad u(0, y) = 0$$

$$\forall \lambda \text{ et } \mu: T_e(0, \lambda, \mu) = T_{0e}, \quad u_{\lambda}(0, \lambda, \mu) = u_{\mu}(0, \lambda, \mu) = 0, \quad \omega(0, \lambda, \mu) = 0, \quad \psi(0, \lambda, \mu) = 0$$

I-5-2 Conditions aux limites :

Pour $t > 0$

a) $\lambda = \lambda_0$ (sur la paroi)

$$\forall \mu, \quad \omega(t, \lambda_0, \mu) = -\frac{4}{\lambda + \mu} \left[\lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right], \quad \frac{\partial T_e}{\partial \lambda} = 0 \quad (\text{I-5-1})$$

$$\psi(t, \lambda_0, \mu) = 0$$

$$\text{b) } \mu = 0; \quad \forall \lambda \quad \frac{\partial T_e}{\partial \mu} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \mu} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0$$

c) $y = y_{\max} = \delta(x)$

$$\forall x \text{ et } z, \quad u(t, y_{\max}) = U_{\infty}, \quad T(t, y_{\max}) = T_{\infty}, \quad C(t, y_{\max}) = C_{\infty}$$

I-5-3 Conditions et équations des bilans à l'interface :

Sur cette surface, la concentration massique correspond aux conditions de saturation de la vapeur d'eau qui sont précisées par la formule reliant cette concentration massique à la pression de vapeur saturante P_{vs} à savoir : [6]

$$C_{vs} = 0,622 \frac{P_{vs}}{P - 0,378 P_{vs}} \quad (\text{I-5-2})$$

$$P_{vs} = 10^{(17,443 - 2792/T_{es} - 3,868 \log_{10} T_{es})}$$

A la surface de contact air- eau, le couplage des transferts de chaleur et de masse dans l'air avec ceux dans l'eau se traduit par la continuité des contraintes et le bilan thermique suivants :

a) Continuité des contraintes :

$$\mu_a \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_0 = \mu_e \left[\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\mu} + \mu_e \left[\frac{\partial u_\mu}{\partial \mu} \right]_{\lambda=\mu} \quad (\text{I-5-3})$$

b) Bilan thermique :

L'air apporte un flux de chaleur φ_c jusqu'à la surface de l'eau. Ce flux sert d'une part, à chauffer l'eau par conduction et d'autre part, à évaporer l'eau en surface.

Donc :

$$\varphi_c = \varphi_{c0} + \varphi_{ev}$$

φ_{c0} : Densité de flux servant à chauffer l'eau dans le bassin par conduction est donnée par :

$$\varphi_{c0} = \lambda_e \left[\frac{\partial T_e}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\mu} - \lambda_e \left[\frac{\partial T_e}{\partial \mu} \right]_{\lambda=\mu}$$

φ_{ev} : Densité de flux de chaleur servant à évaporer l'eau liquide à la surface, donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_{ev} = & L_v D_a \rho_a \left[\frac{\partial C}{\partial y} \right]_0 \\ - \lambda_a \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_0 = & - \lambda_e \left[\frac{\partial T_e}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\mu} - \lambda_e \left[\frac{\partial T_e}{\partial \mu} \right]_{\lambda=\mu} + L_v D_a \rho_a \left[\frac{\partial C}{\partial y} \right]_0 \end{aligned} \quad (\text{I-5-4})$$

I-6 Adimensionalisation des équations :

L'adimensionalisation a pour avantage de généraliser les résultats obtenus et de permettre de réduire le nombre de paramètres. Elle repose sur le théorème de Vashy- Buckingham communément appelé théorème π . [6,13]

I-6-1 Choix des variables adimensionnelles :

I-6-1-1 Dans l'air

$$y^* = \frac{y}{D} \sqrt{Re} ; t^* = \frac{U_\infty t}{D} ; T^* = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} ; C^* = \frac{C - C_\infty}{C_0 - C_\infty} ; u^* = \frac{u}{U_\infty} ; x^* = \frac{x}{D}$$

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu_a} = \text{nombre de Reynolds}$$

$$Pr = \frac{\mu_a c_p a}{\lambda_a} = \text{nombre de Prandtl}$$

$$Sc = \frac{\mu_a}{\rho_a D_a} = \text{nombre de Schmidt}$$

$$Pe = Re Pr = \text{nombre de Péclet}$$

I-6-1-2 Dans l'eau :

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{D} ; \mu^* = \frac{\mu}{D} ; t^* = \frac{U_\infty t}{D} ; T^* = \frac{T_e - T_0}{T_\infty - T_0} ; u_\lambda^* = \frac{u_\lambda}{U_\infty} ; u_\mu^* = \frac{u_\mu}{U_\infty} ;$$

$$\omega^* = \frac{\omega D}{U_\infty} ; \psi^* = \frac{\psi}{U_\infty D}$$

I-6-2 Equations des transferts dans la couche limite:

En introduisant les grandeurs adimensionnelles, on obtient les équations suivantes :

Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Equation du mouvement, de la température et de la masse sont toutes de la forme :

$$\frac{\partial G^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial G^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial G^*}{\partial y^*} = \frac{1}{F} \frac{\partial^2 G^*}{\partial y^{*2}}$$

Grandeurs	G*	F
Vitesse	u*	Re
Température	T*	Pe
Masse	C*	Sc.Re

Tableau 1.1 : Tableau des grandeurs et paramètres adimensionnels dans la couche limite

I-6-3 Equations des transferts dans l'eau :

$$\left(\frac{4}{\lambda^* + \mu^*} \right) \left[\lambda^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \lambda^{*2}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial \lambda^*} + \mu^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \mu^{*2}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial \mu^*} \right] - \frac{\psi^*}{\lambda^* \mu^*} = -\omega^* \quad (\text{I-6-1})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \left(\frac{4}{\lambda^* + \mu^*} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\lambda^{*\frac{1}{2}} u_\lambda^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \lambda^*} + \mu^{*\frac{1}{2}} u_\mu^* \frac{\partial \omega^*}{\partial \mu^*} \right] \\ &= \frac{1}{R_e} \left\{ \left(\frac{4}{\lambda^* + \mu^*} \right) \left[\lambda^* \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \lambda^{*2}} + \frac{\partial \omega^*}{\partial \lambda^*} + \mu^* \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \mu^{*2}} + \frac{\partial \omega^*}{\partial \mu^*} \right] - \frac{\omega^*}{\lambda^* \mu^*} \right\} \end{aligned} \quad (\text{I-6-2})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T_e^*}{\partial t^*} + \left(\frac{4}{\lambda^* + \mu^*} \right)^{\frac{1}{2}} \left[u_\lambda^* \lambda^{*\frac{1}{2}} \frac{\partial T_e^*}{\partial \lambda^*} + u_\mu^* \mu^{*\frac{1}{2}} \frac{\partial T_e^*}{\partial \mu^*} \right] = \\ & \frac{1}{P_e} \left(\frac{4\alpha_e}{\lambda^* + \mu^*} \right) \left[\frac{\partial T_e^*}{\partial \lambda^{*2}} + \lambda^* \frac{\partial^2 T_e^*}{\partial \lambda^{*2}} + \frac{\partial T_e^*}{\partial \mu^*} + \mu^* \frac{\partial T_e^*}{\partial \mu^{*2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{I-6-3})$$

I-6-4 Conditions initiales, aux limites et bilans à l'interface :

Les conditions initiales deviennent :

Pour $t^* = 0$, $\forall x^*, y^*$ et z^* : $T^* = 0$, $C^* = 0$, $u^* = 0$, $v^* = w^* = 0$

$\forall \lambda^*$ et μ^* : $T_e^* = 0$, $u_\lambda^* = u_\mu^* = 0$, $\psi^* = 0$, $\omega^* = 0$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\text{I-6-4-1 } \lambda^* = \frac{\lambda_0}{D}$$

$$\forall \mu, \omega^* = -\frac{4}{\lambda^* + \mu^*} \left[\lambda^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \lambda^{*2}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial \lambda^*} \right] \quad (\text{I-6-4})$$

$$\frac{\partial T_e^*}{\partial \lambda} = 0; \quad \psi \left(t^*, \frac{\lambda_0}{D}, \mu^* \right) = 0$$

$$\text{I-6-4-2 } \mu^* = 0; \quad \forall \lambda^* \quad \frac{\partial T_e^*}{\partial \mu^*} = 0; \quad \frac{\partial \omega^*}{\partial \mu^*} = 0; \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial \mu^*} = 0$$

$\forall \mu^* : T_e^* = 0$, $u_\lambda^* = u_\mu^* = 0$; $\psi^* = 0$,

$$\omega^* = -\frac{4}{\lambda^* + \mu^*} \left[\lambda^* \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \lambda^{*2}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial \lambda^*} \right]_{\lambda_0} \quad (\text{I-6-5})$$

$$\text{I-6-4-3 } y^* = \frac{\delta(x)}{D} \sqrt{R_e}$$

$\forall x$ et z , $T^* = 1$, $C^* = 0$, $u^* = 1$, $v^* = 0$

I-6-4-4 Les conditions et bilans à l'interface deviennent :

Les bilans à l'interface

La Continuité des contraintes :

$$\left[\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right]_0 = \frac{\mu_e}{\mu_a} \left[\frac{\partial u_\lambda^*}{\partial \lambda^*} \right]_{\lambda=\mu} + \frac{\mu_e}{\mu_a} \left[\frac{\partial u_\mu^*}{\partial \mu^*} \right]_{\lambda=\mu} \quad (\text{I-6-6})$$

Le Bilan thermique :

$$-\left[\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right]_0 = -\frac{\lambda_e}{\lambda_a} \left[\frac{\partial T_e^*}{\partial \lambda^*} \right]_{\lambda=\mu} - \frac{\lambda_e}{\lambda_a} \left[\frac{\partial T_e^*}{\partial \mu^*} \right]_{\lambda=\mu} + \frac{1}{L_{em}} \left[\frac{\partial C^*}{\partial y^*} \right]_0 \quad (\text{I-6-7})$$

$$L_{em} = \frac{L_v C_\infty}{c_p Le (T_\infty - T_0)} = \text{nombre de Lewis modifié}$$

avec $Le = \frac{Sc}{Pr}$ le nombre de Lewis usuel

I-7 Conclusion :

Dans cette partie nous avons modélisé les transferts simultanés de chaleur et de masse dans le bassin de rétention et dans la couche fluide au dessus du bassin en régime instationnaire .Les équations du mouvement dans l'eau étant fortement non linéaires, nous les avons transformées et réduit leur nombre en utilisant le formalisme vorticité- fonction de courant. Ainsi nous obtenons une équation quasi- linéaire et plus malléable numériquement : Pour résoudre les équations dans la couche fluide au dessus du bassin, les hypothèses des couches limites laminaires thermique, massique et dynamique sont adoptées. Les conditions de raccordement au niveau de l'interface sont des bilans d'impulsion et de chaleur

Dans le but de généraliser le problème et de réduire le nombre de paramètres aussi bien physiques que géométriques, les équations ont été adimensionnalisées grâce à l'introduction de grandeurs de référence judicieusement choisies. Ainsi nous avons fait apparaître des groupements de nombres adimensionnels dont leur connaissance permet de caractériser plus facilement les transferts.

Les équations aux dérivées partielles régissant les transferts dans l'eau étant très compliquées toute recherche de solutions analytiques est illusoire. Donc nous allons faire appel à des méthodes numériques, qui s'adaptent bien à la résolution de ce genre de problèmes.

La méthode de résolution choisie est présentée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II
Analyse Numérique

CHAPITRE II

Analyse Numérique

II-1 Introduction

Les équations obtenues étant très compliquées, il est utopique de chercher des solutions analytiques. Pour résoudre donc le problème concret modélisé dans la partie précédente, nous faisons appel à une méthode de résolution numérique qui est la mieux adaptée. Ce choix est dicté par le fait que l'expérience numérique peut être répétée à l'infini dans le temps et dans l'espace en obtenant toujours les mêmes résultats contrairement à l'expérience humaine, c'est-à-dire au sens classique du terme. D'autre part avec les ordinateurs qui sont devenus aujourd'hui très performants et très rapides, la simulation peut nous donner des résultats quasi-instantanés.

Si le problème est bien posé, l'analyse numérique consiste à :

- ramener d'abord le domaine continu en un domaine discret formé d'un réseau de points appelés nœuds ;
- ensuite d'approcher les fonctions et variables continues en des grandeurs discrètes ;
- puis de chercher en chaque nœud la valeur des inconnues du problème par une technique au choix mais qui est la plus économique en temps et en volume de calculs. C'est cette étape qui est le nœud central de l'analyse numérique.

II-2 Discrétisation du domaine et approximations des dérivées

Dans tout ce qui suit, pour alléger l'écriture, les grandeurs adimensionnelles sont notées sans astérisques.

II-2. 1 Discrétisation du domaine

Divisons comme indiqué sur la figure 2 :

- La variable x en intervalles réguliers d'indice j , de largeur $\Delta\lambda$ avec $1 \leq j \leq j_{\max}$.
- La variable y en intervalles réguliers d'indice k , de largeur $\Delta\mu$ avec $1 \leq k \leq k_{\max}$.
- La variable temporelle en plusieurs intervalles réguliers d'indice n , de largeur Δt avec $1 \leq n \leq n_{\max}$

Les intervalles d'espace et de temps sont alors données par :

$$\Delta x = \frac{x}{m_{\max} - 1}, \quad \Delta y = \frac{y}{i_{\max} - 1} \quad ; \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{j_{\max} - 1} \quad ; \quad \Delta\mu = \frac{\mu}{k_{\max} - 1} \quad ; \quad \Delta t = \frac{t}{n_{\max} - 1}$$

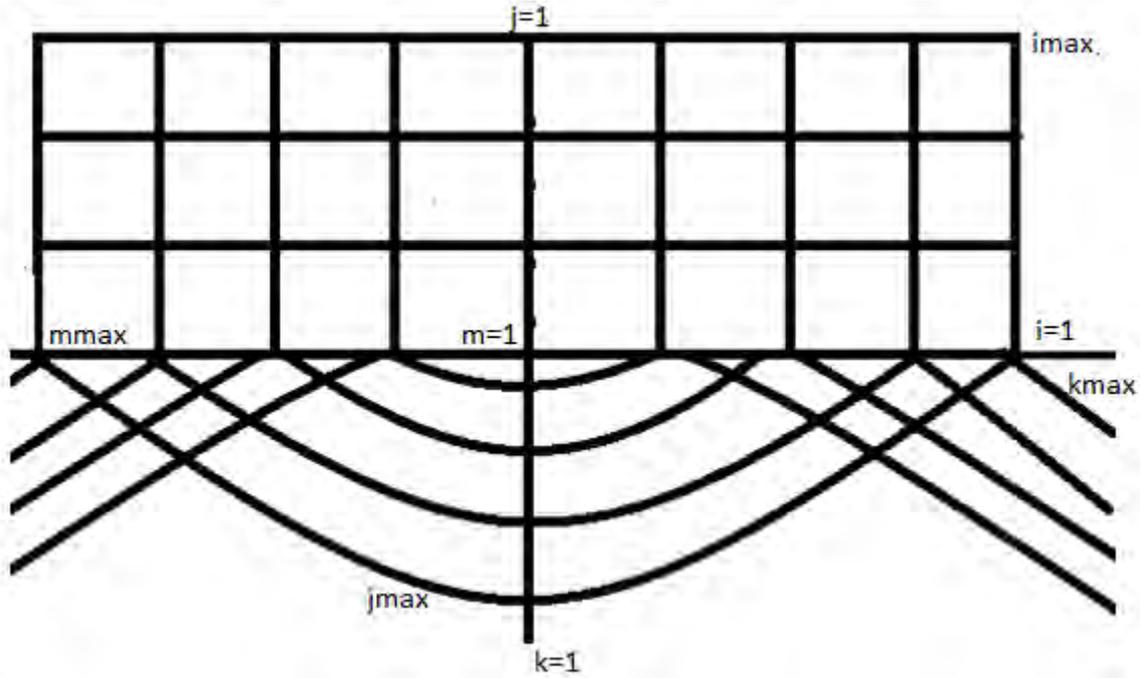


Figure 4: Maillage du système

II-2-2 Approximations des dérivées spatiales et temporelles

Pour approcher nos dérivées, nous utilisons des différences finies qui reposent sur le développement en série de Taylor.

Si $f = f(\lambda, \mu, t)$ alors ses dérivées spatiales peuvent se mettre sous les formes de différences centrées suivantes [6,13] (voir annexe):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(m+1,i) - f(m-1,i)}{2\Delta x} \quad (\text{II-1})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(m,i+1) - f(m,i-1)}{2\Delta y} \quad (\text{II-2})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(m,i+1) - 2f(m,i) + f(m,i-1)}{\Delta y^2} \quad (\text{II-3})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{f(j+1,k) - f(j-1,k)}{2\Delta \lambda} \quad (\text{II-4})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = \frac{f(j+1,k) - 2f(j,k) + f(j-1,k)}{\Delta \lambda^2} \quad (\text{II-5})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{f(j,k+1) - f(j,k-1)}{2\Delta \mu} \quad (\text{II-6})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} = \frac{f(j,k+1) - 2f(j,k) + f(j,k-1)}{\Delta \mu^2} \quad (\text{II-7})$$

Pour les dérivées temporelles, nous nous limiterons à la différence progressive suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1}(j,k) - f^n(j,k)}{\Delta t} \quad (\text{II-8})$$

II-3 Discrétisation des équations différentielles de transfert:

Pour discrétiser les différents équations de transferts, nous choisissons un schéma à pas fractionnaire, aux directions alternées, implicite et explicite .Par exemple dans l'eau le principe consiste à considérer un demi- pas de temps intermédiaire entre n et $n+1$, à savoir $n + \frac{1}{2}$. Au premier demi- pas de temps (entre n et $n + \frac{1}{2}$), les dérivées par rapport à λ sont approchées implicitement et celles par rapport à μ explicitement. Au second demi- pas (entre $n + \frac{1}{2}$ et $n+1$), les dérivées par rapport à μ sont approchées implicitement et celles par rapport à λ explicitement.

II-3-1 Discrétisation des équations dans l'air suivant la direction x

Equation de continuité

$$A_v v(n + \frac{1}{2}, m-1, i) + B_v v(n + \frac{1}{2}, m, i) + C_v v(n + \frac{1}{2}, m+1, i) = D_v \quad (\text{II-9})$$

$$A_v = 1; \quad B_v = 0; \quad C_v = -1; \quad D_v = \frac{\Delta x}{\Delta y} (v(n, m, i+1) - v(n, m, i-1))$$

Les équations du mouvement, de la chaleur et de la concentration s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$A_G G(n + \frac{1}{2}, m-1, i) + B_G G(n + \frac{1}{2}, m, i) + C_G G(n + \frac{1}{2}, m+1, i) = D_G \quad (\text{II-10})$$

$$A_G = -\frac{u(n, m, i)}{\Delta x}; \quad B_G = \frac{1}{\Delta t}; \quad C_G = -\frac{u(n, m, i)}{\Delta x};$$

$$D_G = \left(\frac{1}{F\Delta\Delta^2} + v(n, m, i) \right) G(n, m, i-1) + \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{2}{F\Delta\Delta^2} \right) G(n, m, i) + \left(\frac{1}{F\Delta\Delta^2} + v(n, m, i) \right) G(n, m, i+1)$$

II-3-2 Discrétisation des équations dans l'air suivant la direction y

Equation de continuité

$$A_{vR}v(n+1, m, i-1) + B_{vR}v(n+1, m, i) + C_{vR}v\left(n + \frac{1}{2}, m, i+1\right) = D_v \quad (\text{II-11})$$

$$A_{vR} = 1; \quad B_{vR} = 0; \quad C_{vR} = -1; \quad D_{vR} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(v\left(n + \frac{1}{2}, m-1, i\right) - v(n, m+1, i) \right)$$

Les équations du mouvement, de la chaleur et de la concentration s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$A_{GR}G(n+1, m, i-1) + B_{GR}G(n+1, m, i) + C_{GR}Gv(n+1, m, i+1) = D_{GR} \quad (\text{II-12})$$

$$A_{GR} = -\frac{v\left(n + \frac{1}{2}, m, i\right)}{\Delta y} - \frac{1}{F\Delta\Delta^2}; \quad B_{GR} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{F\Delta\Delta^2}; \quad C_{GR} = \frac{1}{F\Delta\Delta^2} - \frac{u\left(n + \frac{1}{2}, m, i\right)}{\Delta y};$$

$$D_{GR} = \frac{u\left(n + \frac{1}{2}, m, i\right)}{\Delta x} G\left(n + \frac{1}{2}, m-1, i\right) + \frac{1}{\Delta t} G\left(n + \frac{1}{2}, m, i\right) + \frac{u\left(n + \frac{1}{2}, m, i\right)}{\Delta x} G\left(n + \frac{1}{2}, m+1, i\right)$$

II-3-3 Discrétisation des équations dans l'eau en schéma implicite suivant la direction de l'axe λ :

Equation de la fonction de courant

Il vient pour $1 < j < j_{\max}$ et $1 < k < k_{\max}$

$$A_{L\psi}(j, k)\psi\left(n + \frac{1}{2}, j-1, k\right) + B_{L\psi}(j, k)\psi\left(n + \frac{1}{2}, j, k\right) + C_{L\psi}(j, k)\psi\left(n + \frac{1}{2}, j+1, k\right) =$$

$$D_{L\psi}(j, k)\psi(n, j, k-1) + E_{L\psi1}(j, k)\psi(n, j, k) + E_{L\psi2}(j, k)\psi(n, j, k+1) - \omega(n, j, k) \quad (\text{II-13})$$

$$A_{L\psi}(j, k) = \frac{2(2j-3)}{\Delta\lambda(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))}; \quad B_{L\psi}(j, k) = -\frac{8(j-1)}{\Delta\lambda(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))}$$

$$C_{L\psi}(j, k) = \frac{2(2j-1)}{\Delta\lambda(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))}; \quad D_{L\psi}(j, k) = \frac{2(2k-3)}{\Delta\mu(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))};$$

$$E_{L\psi_1}(j, k) = \frac{8(k-1)}{\Delta\mu(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))} - \frac{1}{(j-1)(k-1)\Delta\lambda\Delta\mu};$$

$$E_{L\psi_2}(j, k) = \frac{2(2k-1)}{\Delta\mu(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))}$$

Equation du mouvement

Il vient pour $1 < j < j \max$ et $1 < k < k \max$

$$A_{LW}(j, k)\omega(n + \frac{1}{2}, j-1, k) + B_{LW}(j, k)\omega(n + \frac{1}{2}, j, k) + C_{LW}(j, k)\omega(n + \frac{1}{2}, j+1, k) = \quad (\text{II-14})$$

$$D_{LW}(j, k)\omega(n, j, k-1) + E_{LW1}(j, k)\omega(n, j, k) + E_{LW2}(j, k)\omega(n, j, k+1)$$

$$A_{LW}(j, k) = \frac{1}{\Delta\lambda[(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[-((j-1)\Delta\lambda((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu))^{\frac{1}{2}} u_\lambda(n, j, k) - 4(j-2) \right]$$

$$B_{LW}(j, k) = \left[\frac{8(j-1)}{\Delta\lambda\{(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu\}} \right] + \frac{2}{\Delta t}$$

$$C_{LW}(j, k) = \frac{1}{\Delta\lambda[(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)^{\frac{1}{2}} (j-1)\Delta\lambda u_\lambda(n, j, k) - 4j \right]$$

$$D_{LW}(j, k) = \frac{1}{\Delta\mu((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)} \left[((k-1)\Delta\mu((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu))^{\frac{1}{2}} u_\mu(n, j, k) + 4(k-2) \right]$$

$$E_{LW1} = -\frac{8(k-1)}{\Delta\mu((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)} + \frac{2}{\Delta t} - \frac{1}{(j-1)(k-1)\Delta\lambda\Delta\mu}$$

$$E_{LW2}(j, k) = \frac{1}{\Delta\mu[(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[-\{((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)(k-1)\Delta\mu\}^{\frac{1}{2}} u_\mu(n, j, k) + 4k \right];$$

Equation de la chaleur

Il vient pour $1 < j < j \max$ et $1 < k < k \max$

$$A_{LT}(j, k)T_e(n + \frac{1}{2}, j-1, k) + B_{LT}T_e(n + \frac{1}{2}, j, k) + C_{LT}(j, k)T_e(n + \frac{1}{2}, j+1, k) =$$

(II-15)

$$D_{LT}(j, k)T_e(n, j, k-1) + E_{LT1}(j, k)T_e(n, j, k) + E_{LT2}(j, k)T_e(n, j, k+1)$$

$$\begin{aligned}
A_{LT}(j,k) &= \frac{1}{P_r \Delta \lambda [(j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu]} \left[- \left((j-1)P_r^2 \Delta \lambda ((j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu) \right)^{\frac{1}{2}} u_\lambda(n,j,k) - 4(j-2) \right] \\
; B_{LT}(j,k) &= \left[\frac{8(j-1)}{P_r \Delta \lambda \{ (j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu \}} \right] + \frac{2}{\Delta t} \\
C_{LT}(j,k) &= \frac{1}{P_r \Delta \lambda [(j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu]} \left[\left(\{ (j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu \} (j-1)P_r^2 \Delta \lambda \right)^{\frac{1}{2}} u_\lambda(n,j,k) - 4j \right] \\
; \\
D_{LT}(j,k) &= \frac{1}{P_r \Delta \mu ((j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu)} \left[\left((k-1)P_r^2 \Delta \mu ((j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu) \right)^{\frac{1}{2}} u_\mu(n,j,k) + 4(k-2) \right] \\
E_{LT1}(j,k) &= - \frac{8(k-1)}{\Delta \mu P_r ((j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu)} + \frac{2}{\Delta t} ; \\
E_{LT2}(j,k) &= \frac{1}{\Delta \mu P_r [(j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu]} \left[- \left(\{ (j-1)\Delta \lambda + (k-1)\Delta \mu \} (k-1)P_r^2 \Delta \mu \right)^{\frac{1}{2}} u_\mu(n,j,k) + 4k \right]
\end{aligned}$$

II-3-4 Conditions initiales, aux limites et bilans à l'interface :

Les conditions initiales deviennent :

$$\forall j, k : \quad T_e(1, j, k) = 0, \quad u_\lambda(1, j, k) = 0, \quad u_\mu(1, j, k) = 0 ; \quad \omega(1, j, k) = 0$$

Pour $j = j \max$ et $1 < k < k \max$, la condition aux limites devient

$$T_e(j \max, k) = - \frac{T_{0e}}{T_\infty}$$

$$u_\mu(n, j \max, k) = u_\lambda(n, j \max, k) = 0 ; \quad \omega(n, j \max, k) = 0 ; \quad \psi(n, j \max, k) = 0$$

$$A_{L\psi}(k)\psi(n + \frac{1}{2}, j \max - 1, k) + B_{L\psi}(k)\psi(n + \frac{1}{2}, j \max, k) = \delta_{L\psi}(n, k) \quad (\text{II-16})$$

$$A_{L\psi} = (2j \max - 3), \quad B_{L\psi} = 4(j \max - 1), \quad \delta_{L\psi}(n, k) = \frac{1}{4} \Delta \lambda (\Delta \lambda (j \max - 1) + \Delta \mu (k - 1)) \omega(n, j \max, k)$$

La continuité des contraintes devient :

$$4u_\lambda(n + \frac{1}{2}, j, 1) - 3u_\lambda(n + \frac{1}{2}, j, 2) - u_\lambda(n + \frac{1}{2}, j, 3) = \delta_{LU}(n, k) \quad (\text{II-17})$$

$$\delta_{LU}(n, k) = \frac{\mu_a}{\mu_e} \frac{\Delta \lambda}{\Delta y} [4u(n, 1) - 3u(n, 2) - u(n, 3)] - \frac{\Delta \lambda}{\Delta \mu} [4u_\mu(n, 1, k) - 3u_\mu(n, 2, k) - u_\mu(n, 3, k)]$$

Le bilan thermique devient :

$$4T(n + \frac{1}{2}, 1, k) - 3T_e(n + \frac{1}{2}, 2, k) - T_e(n + \frac{1}{2}, 3, k) = \delta_{LT}(n, j) \quad (\text{II-18})$$

$$\delta_{LT}(n, j) = -\frac{\Delta\lambda}{\Delta\mu} (4T(n, j, 1) - 3T_e(n, j, 2) - T_e(n, j, 3)) +$$

$$\frac{\lambda_e \Delta\lambda}{\lambda_a \Delta y} \left[\left((4T(n, 1) - 3T(n, 2) - T(n, 3)) - \frac{1}{Lem} (4C(n, 1) - 3C(n, 2) - C(n, 3)) \right) \right]$$

II-3-2 Discrétisation en schéma implicite suivant la direction μ

II-3-2-1 Equation de la fonction de courant :

Il vient pour $1 < j < j \max$ et $1 < k < k \max$

$$A_{R\psi}(j, k)\psi(n+1, j, k+1) + B_{R\psi}(j, k)\psi(n+1, j, k) + C_{R\psi}(j, k)\psi(n+1, j, k-1) =$$

$$D_{R\psi}(j, k)\psi\left(n + \frac{1}{2}, j+1, k\right) + E_{R\psi}(j, k)\psi\left(n + \frac{1}{2}, j, k\right) + E_{R\psi}(j, k)\psi\left(n + \frac{1}{2}, j-1, k\right) - \omega\left(n + \frac{1}{2}, j, k\right) \quad (\text{II-19})$$

$$A_{R\psi}(j, k) = \frac{2(2k-1)}{\Delta\mu(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))} ; B_{R\psi}(j, k) = \frac{8(k-1)}{\Delta\mu(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))} ;$$

$$C_{R\psi}(j, k) = \frac{2(2k-3)}{\Delta\mu(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))} ; D_{R\psi}(j, k) = \frac{2(2j-1)}{\Delta\lambda(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))}$$

$$E_{R\psi}(j, k) = -\frac{8(j-1)}{\Delta\lambda(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))} - \frac{1}{(j-1)(k-1)\Delta\lambda\Delta\mu} ;$$

$$E_{R\psi}(j, k) = \frac{2(2j-3)}{\Delta\lambda(\Delta\lambda(j-1) + \Delta\mu(k-1))}$$

II-3-2-2 Equation du mouvement :

Il vient pour $1 < j < J$ et $1 < k < K$

$$A_{RW}(j, k)\omega(n+1, j, k-1) + B_{RW}(j, k)\omega(n+1, j, k) + C_{RW}(j, k)\omega(n+1, j, k+1) = D_{RW}(j, k)$$

$$\omega\left(n + \frac{1}{2}, j-1, k\right) + E_{RW1}(j, k)\omega\left(n + \frac{1}{2}, j, k\right) + E_{RW2}(j, k)\omega\left(n + \frac{1}{2}, j+1, k\right) \quad (\text{II-20})$$

$$A_{RW}(j, k) = \frac{1}{\Delta\mu[(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[-\{(k-1)\Delta\mu((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)\}^{\frac{1}{2}} u_\mu\left(n + \frac{1}{2}, j, k\right) - 4(k-2) \right] ;$$

$$= B_{RW}(j, k) = \frac{2}{\Delta t} + \frac{8(k-1)}{\Delta\mu[(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} ;$$

$$C_{RW}(j, k) = \frac{1}{\Delta\mu[(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[\{(k-1)\Delta\mu((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)\}^{\frac{1}{2}} u_\mu\left(n + \frac{1}{2}, j, k\right) - 4k \right] ;$$

$$D_{RW}(j, k) = \frac{1}{\Delta\lambda[(j-1)\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[\{(j-1)\Delta\lambda((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)\}^{\frac{1}{2}} u_{\lambda}(n + \frac{1}{2}, j, k) + 4(j-1) \right]$$

$$E_{RW1} = -\frac{8(j-1)}{\Delta\lambda((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)} + \frac{2}{\Delta t} - \frac{1}{(j-1)(k-1)\Delta\lambda\Delta\mu}$$

$$E_{RW2}(j, k) = \frac{1}{\Delta\lambda[(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[-\{(j-1)\Delta\lambda((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)\}^{\frac{1}{2}} u_{\mu}(n, j, k) + 4j \right]$$

II-3-2-3 Equation de la chaleur

Il vient pour $1 < j < J$ et $1 < k < K$

$$A_{RT}(j, k) T_e(n+1, j, k-1) + B_{RT}(j, k) T_e(n+1, j, k) + C_{RT}(j, k) T_e(n+1, j, k+1) =$$

$$D_{RT}(j, k) T_e(n + \frac{1}{2}, j-1, k) + E_{RT1}(j, k) T_e(n + \frac{1}{2}, j, k) + E_{RT2}(j, k) T_e(n + \frac{1}{2}, j+1, k) \quad (\text{II-21})$$

$$A_{RT}(j, k) = \frac{1}{\Delta\mu P_r [(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[-\{(k-1)P_r^2 \Delta\mu((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)\}^{\frac{1}{2}} u_{\mu}(n + \frac{1}{2}, j, k) - 4(k-2) \right] ;$$

$$B_{RT}(j, k) = \frac{2}{\Delta t} + \frac{8(k-1)}{\Delta\mu P_r [(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} ;$$

$$D_{RT}(j, k) = \frac{1}{\Delta\lambda P_r [(j-1)\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[\{(j-1)\Delta\lambda P_r^2 ((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)\}^{\frac{1}{2}} u_{\lambda}(n + \frac{1}{2}, j, k) + 4(j-1) \right] ;$$

$$E_{RT1}(j, k) = -\frac{8(j-1)}{\Delta\lambda P_r ((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)} + \frac{2}{\Delta t} ;$$

$$E_{RT2}(j, k) = \frac{1}{\Delta\lambda P_r [(j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu]} \left[-\{(j-1)\Delta\lambda P_r^2 ((j-1)\Delta\lambda + (k-1)\Delta\mu)\}^{\frac{1}{2}} u_{\mu}(n + \frac{1}{2}, j, k) + 4j \right] ;$$

II-3-2-4 Conditions aux limites et bilans à l'interface :

Pour $j = j_{\max}$ et $1 < k < k_{\max}$, les conditions aux limites deviennent :

$$T_e(n+1, j_{\max}, k) = \frac{T_0}{T_{\infty}} ,$$

$$u_{\mu}(n + \frac{1}{2}, j_{\max}, k) = u_{\lambda}(n + \frac{1}{2}, j_{\max}, k) = 0 ; \quad \omega(n + \frac{1}{2}, j_{\max}, k) = 0 ; \quad \psi; n + \frac{1}{2}, j_{\max}, k) = 0$$

$$A_{R\psi}(k)\psi(k) + \frac{1}{2} j_{\max} - 1, k) + B_{R\psi}(k)\psi(k) + \frac{1}{2} j_{\max}, k) = \delta_{R\psi}(n + \frac{1}{2}, k) \quad (\text{II-22})$$

$$A_{R\psi} = (2j_{\max} - 3) , \quad B_{R\psi} = 4(j_{\max} - 1) , \quad \delta_{R\psi}(n + \frac{1}{2}, k) = \frac{1}{4} \Delta\lambda(\Delta\lambda(j_{\max} - 1) + \Delta\mu(k-1))\omega(n + \frac{1}{2}, j_{\max}, k)$$

La continuité des contraintes devient :

$$4u_{\mu}(n+1,j,1) - 3u_{\mu}(n+1,j,2) - u_{\mu}(n+1,j,3) = \delta_{RU} \left(n + \frac{1}{2}, k \right) \quad (\text{II-23})$$

$$\delta_{RU} \left(n + \frac{1}{2}, k \right) = \frac{\mu_a}{\mu_e} \frac{\Delta\mu}{\Delta y} [4u(n,1) - 3u(n,2) - u(n,3)] - \frac{\Delta\mu}{\Delta\lambda} [4u_{\lambda}(n,1,k) - 3u_{\lambda}(n,2,k) - u_{\lambda}(n,3,k)]$$

Le bilan thermique devient :

$$4T(n+1,1,k) - 3T_e(n+1,2,k) - T_e(n+1,3,k) = \delta_{RT} \left(n + \frac{1}{2}, j \right) \quad (\text{II-24})$$

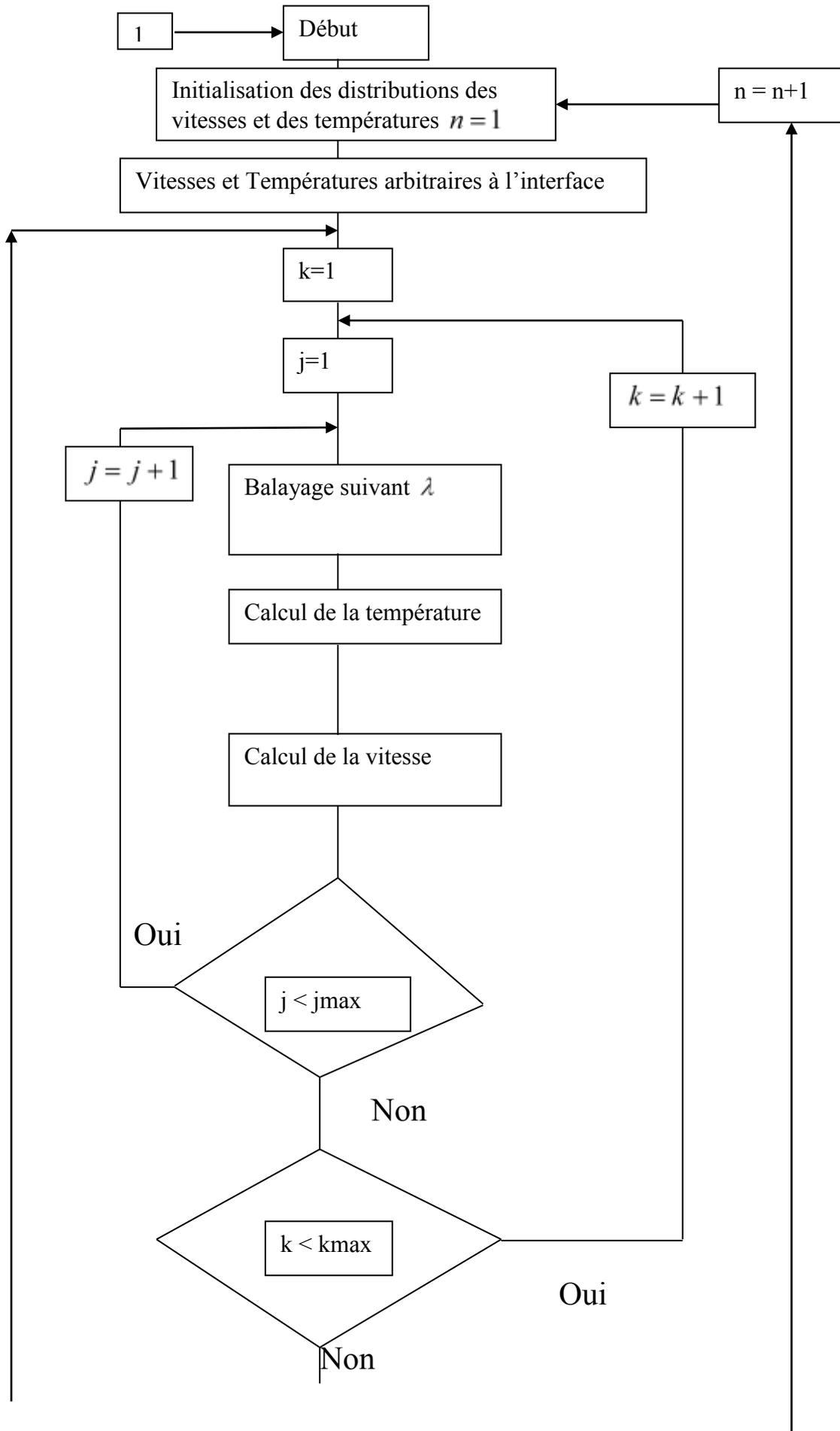
$$\delta_{RT} \left(n + \frac{1}{2}, j \right) = -\frac{\Delta\mu}{\Delta\lambda} \left(4T \left(n + \frac{1}{2}, j, 1 \right) - 3T_e \left(n + \frac{1}{2}, j, 2 \right) - T_e \left(n + \frac{1}{2}, j, 3 \right) \right) +$$

$$\frac{\lambda_e \Delta\mu}{\lambda_a \Delta y} \left[\left(4T \left(n + \frac{1}{2}, 1 \right) - 3T \left(n + \frac{1}{2}, 2 \right) - T \left(n + \frac{1}{2}, 3 \right) \right) - \frac{1}{Lem} \left(4C \left(n + \frac{1}{2}, 1 \right) - 3C \left(n + \frac{1}{2}, 2 \right) - C \left(n + \frac{1}{2}, 3 \right) \right) \right]$$

II- 4 Méthodologie numérique

Les équations du mouvement, de la chaleur et de la masse sont traitées en utilisant la méthode aux directions alternées(ADI) qui a été décrite par **Peaceman** et **Rachford** [19] ; la fonction de courant est résolue à l'aide de la méthode de sur- relaxation (SOR) avec un paramètre de relaxation donné par la formule de **Bejan** [20]. La résolution des équations régissant les transferts dans la couche limite et dans l'eau conduit à un système d'équations algébriques que l'on peut écrire sous forme de matrice trigonale avec, comme inconnues au départ, la température et la vitesse à l'interface. La démarche suivie associe une méthode itérative à une méthode de résolution directe. Au départ, on estime, à un instant donné, les profils de température et de vitesse de l'eau à la surface de contact air- eau. On résout ensuite, à l'aide de la méthode de Thomas, les équations de transfert dans l'eau. Les distributions des températures et des vitesses à la surface de contact air- eau sont calculées à partir des équations donnant la continuité des contraintes et des bilans thermiques à l'interface. Après cette étape intervient une méthode itérative. On compare le profil de températures et des vitesses aux profils arbitraires initiaux. Si la différence est inférieure à une certaine précision fixée au départ à 10^{-5} , on passe au pas de temps suivant ; dans le cas contraire, les profils de températures et de vitesses calculés remplacent les profils arbitraires et le processus de calcul décrit ci- dessus est repris jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte.

II- 5 Organigramme de calcul :



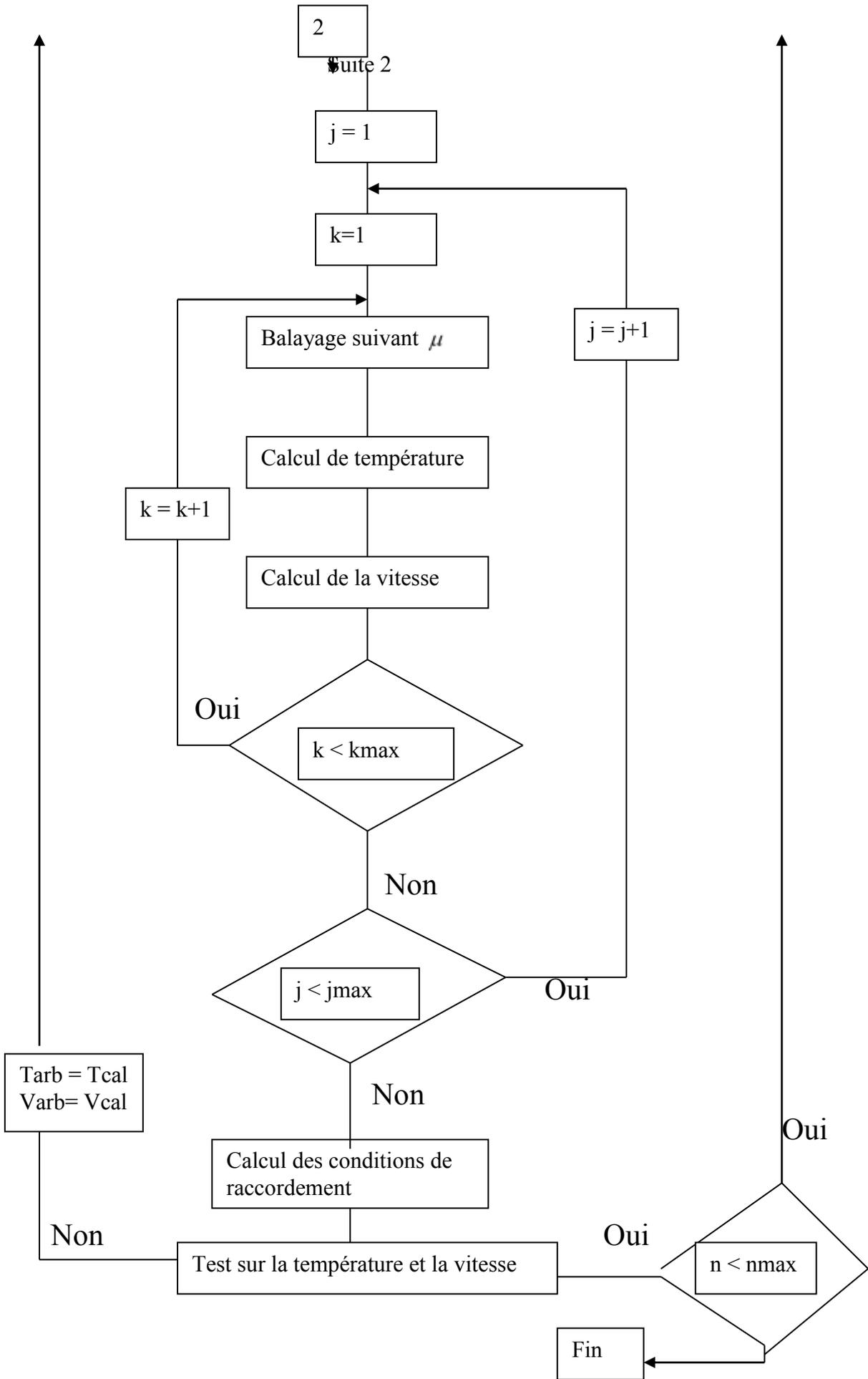


Figure 5 : Organigramme de calcul

Non

II-6 Conclusion

Dans cette partie nous avons ramené le domaine continu en un domaine discret formé par un nuage de points.

En approchant les équations aux dérivés partielles par des équations aux différences finies et en utilisant un schéma aux directions alternées, nous obtenons un système algébrique que l'on peut écrire sous forme de matrice trigonale facilement inversible avec, comme inconnues au départ, la température et la vitesse à la surface de contact air- eau.

Et enfin nous avons choisi une méthodologie numérique et présenté l'organigramme de calcul.

CHAPITRE III
RESULTATS ET DISCUSSIONS

CHAPITRE III

RESULTATS ET DISCUSSIONS

III-1 Résultats et discussions

III-1-1 Validation du code

Pour valider ce modèle, nous avons comparé les profils de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle donnés par notre modèle (fig. 6-a) à ceux obtenus par Roger K. Smith [14] concernant l'étude d'un modèle simple de couche limite (fig.6-b) et par Touhami[6] qui étudiait le séchage d'un anneau poreux humide sous l'action d'un courant d'air chaud dans la direction de l'axe du canal (fig.6-c). Nous voyons donc que notre code de calcul donne des profils analogues à ceux des auteurs sus- mentionnés.

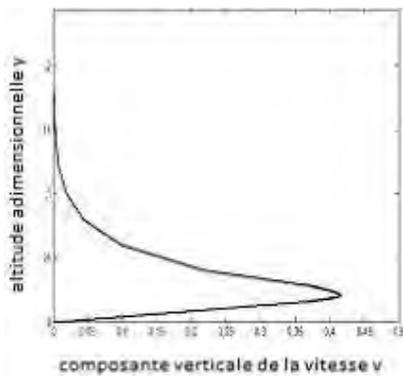


Figure 6-a Variation de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle donnée par notre modèle. $x = -0.4$, $Re = 10$ et $t = 0.05$.

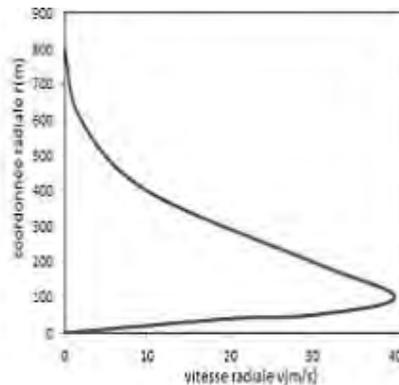


Figure 6-b Profil de Roger K. SMITH de la composante radiale de la vitesse en fonction de de coordonnée radiale

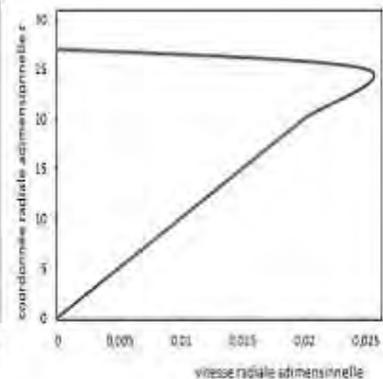


Figure 6-c Profil de la composante radiale de vitesse en fonction de la coordonnée radiale donné par Touhami

III-1-2 Choix du maillage :

Nous avons reporté sur la figure 7 les variations de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle pour différents maillages d'espace ; le pas de temps est fixé 10^{-3} . L'analyse des différentes courbes de la figure7 nous incite à choisir à choisir le maillage 41×41 qui constitue un bon compromis entre un temps de calcul relativement faible et une bonne précision.

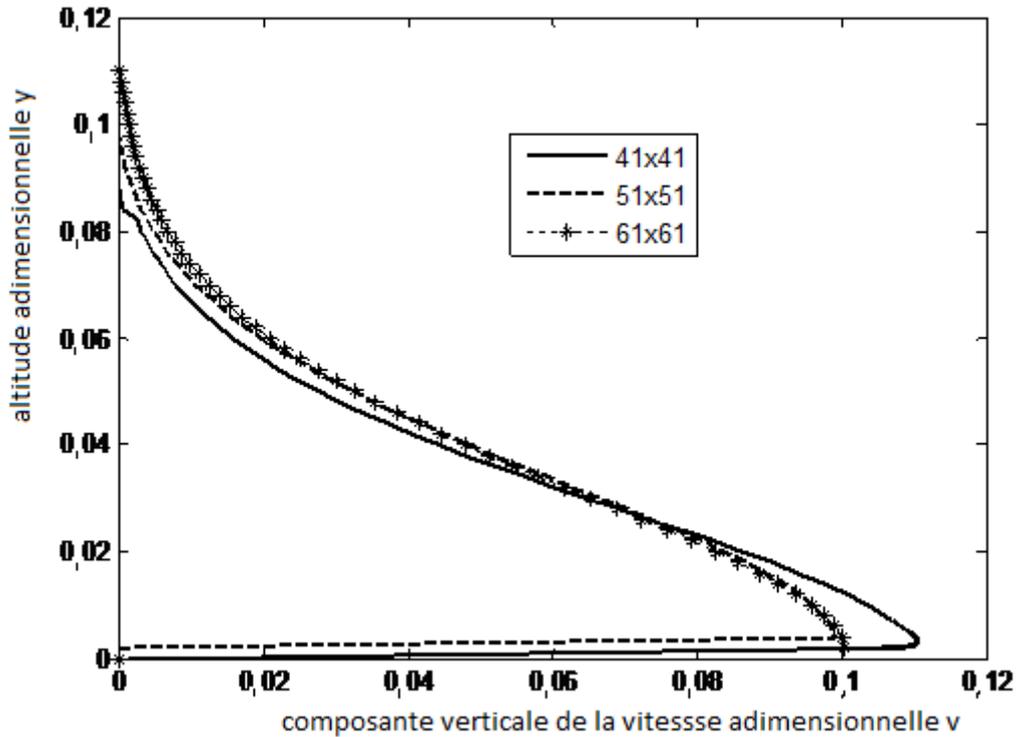


Figure 7 : Evolution de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction du maillage. $Re=10$, $x=-0.5$, $t=0,05$.

III-1-3 Résultats et commentaires

III-1-3-1 Evolution des champs de vitesse, de la température et de la concentration de vapeur en fonction de l'abscisse x

Tous les calculs présentés ici sont relatifs à des nombres de Reynolds variant de 20 à 3000, des nombres de Schmidt et de Prandtl tous les deux égaux à 0,7 ainsi le nombre de Lewis.

Les courbes des figures 8 montrent que c'est dans la zone adjacente à l'interface ($y < 0,01$) où l'on observe les plus importants taux de variations des grandeurs dynamique, thermique et massique. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du bord d'attaque (lorsque x augmente), les couches limites se développent et la concentration en vapeur du mélange augmente entraînant ainsi une diminution des vitesses et des températures. En effet quand les effets de diffusion de la vapeur dans l'air augmentent la vitesse horizontale doit diminuer afin d'équilibrer l'équation de la conservation de l'espèce. Ces figures montrent aussi qu'au-delà de $x = -0,03$, les écoulements peuvent être considérés comme établis car les grandeurs dynamiques, thermique et massique ne varient pratiquement plus. Il est à noter aussi les valeurs de la vitesse transversale sont, en dehors de la zone d'entrée, très faibles comparées à celles de la vitesse longitudinale. Contrairement à l'écoulement en couche limite au-dessus d'une plaque solide plane, la vitesse longitudinale et les températures au niveau de l'interface dans notre problème varient en fonction de x .

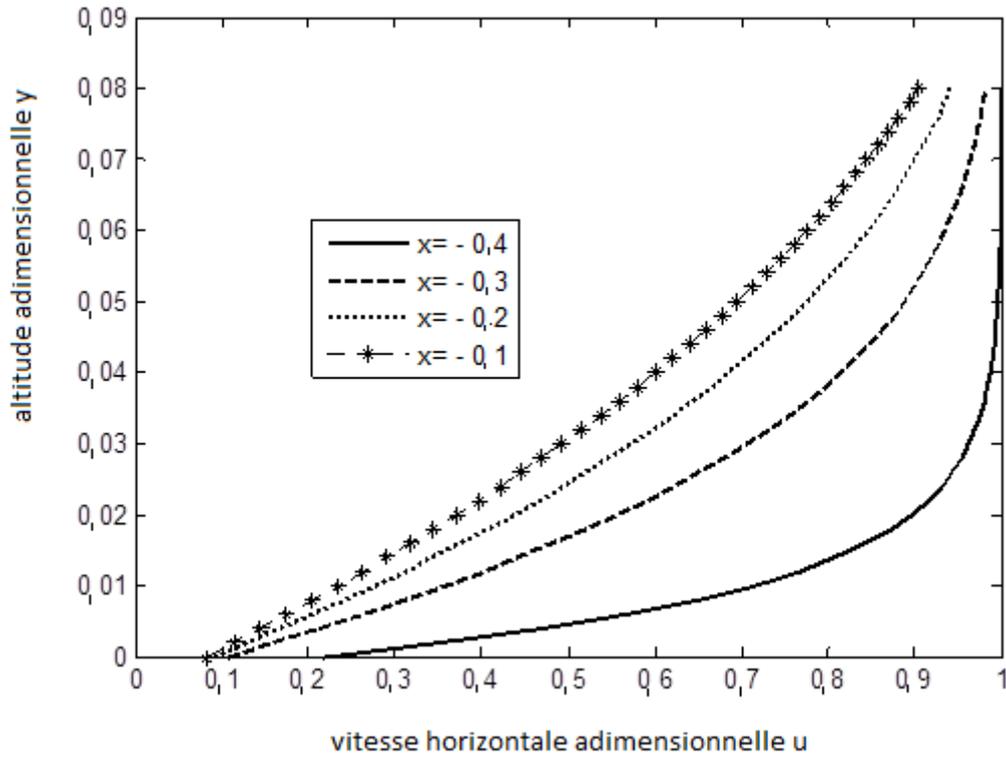


Figure 8.a: Evolution de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

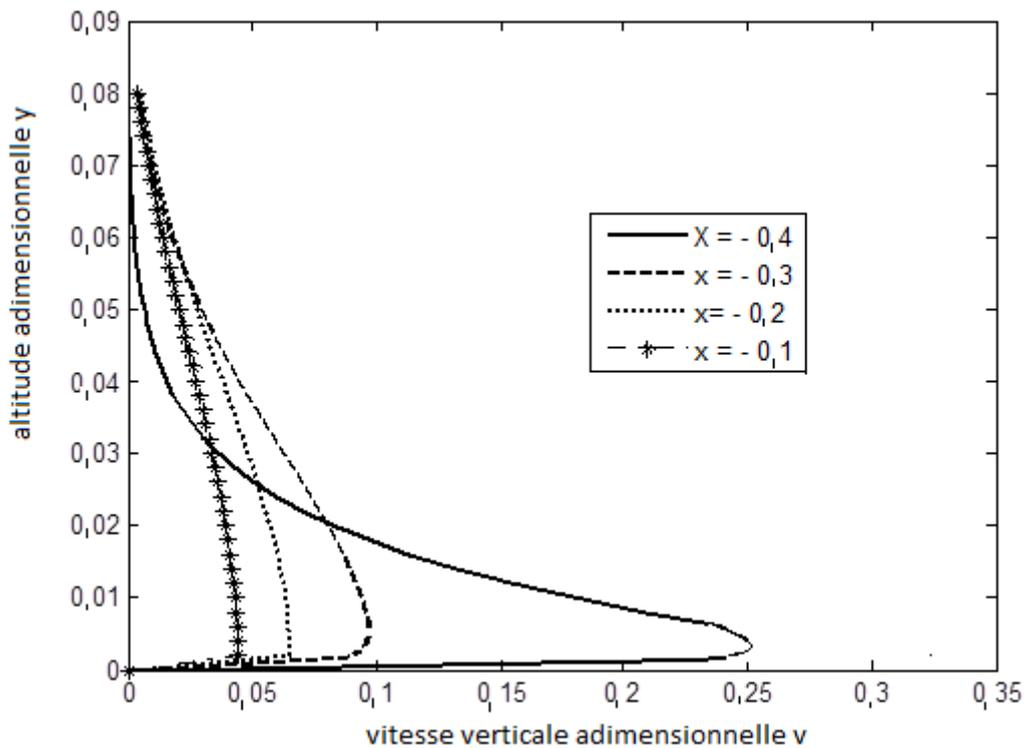


Figure 8. b : Evolution de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse x adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

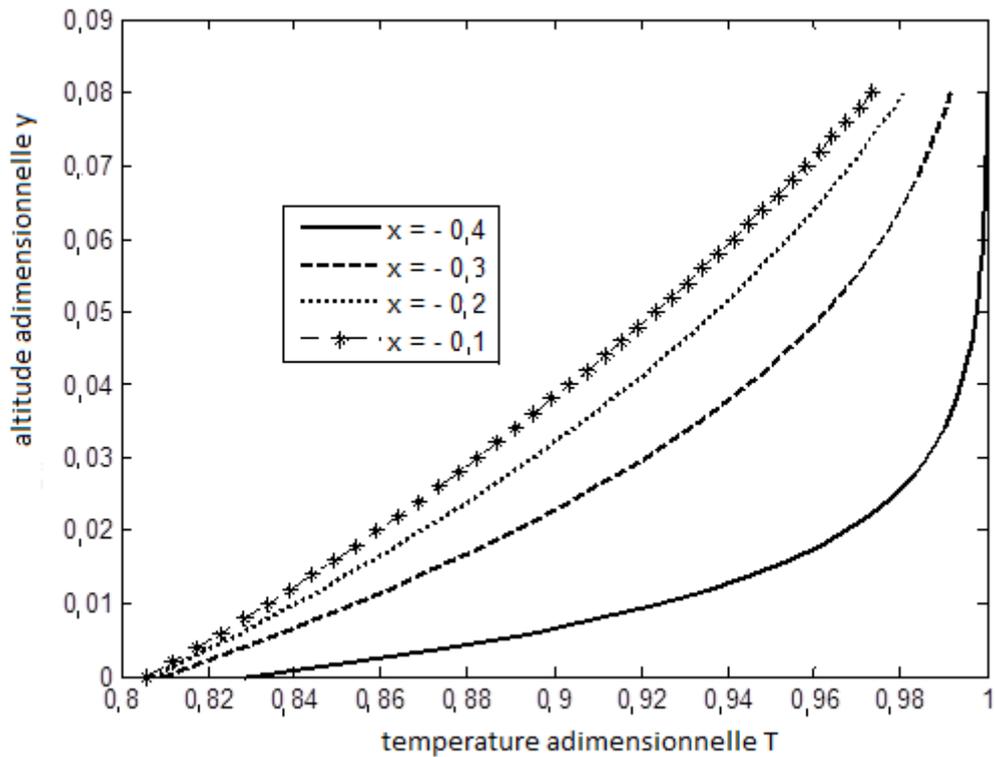


Figure 8. c : Evolution de la température adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

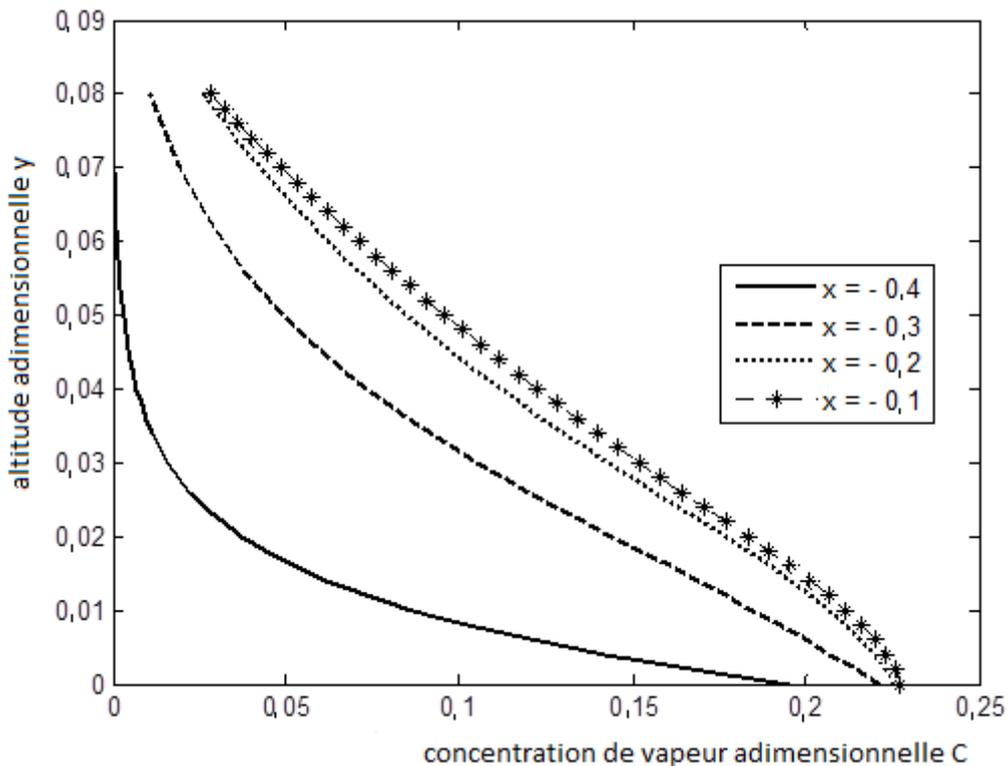


Figure 8.d : Evolution de la concentration de vapeur adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

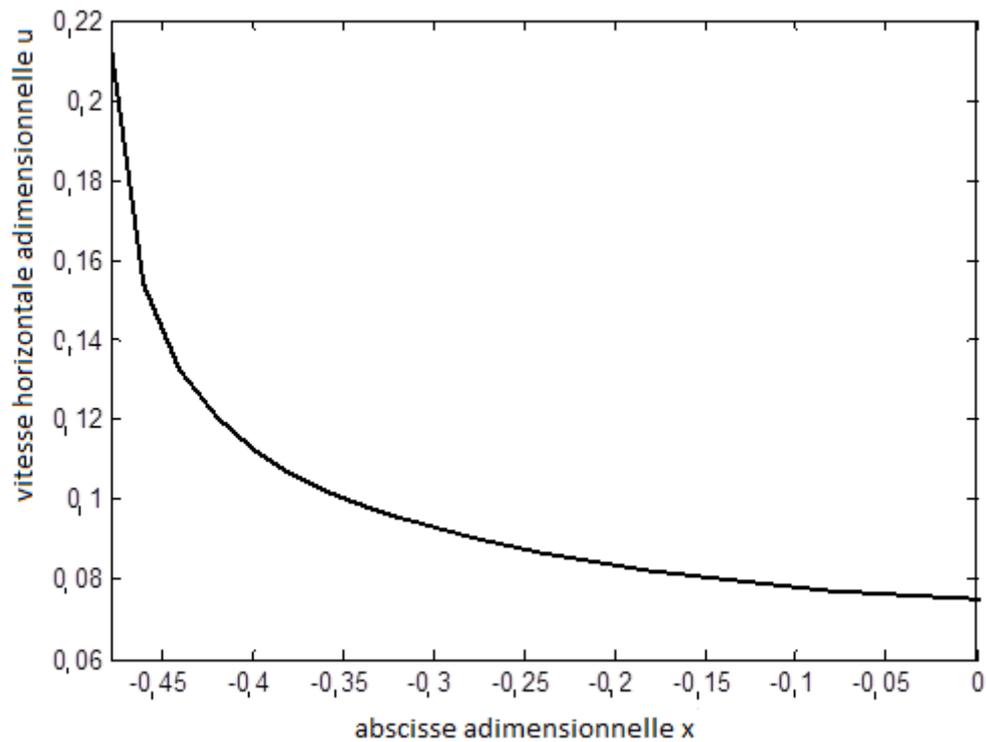


Figure 8.e: Evolution de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs de l'abscisse adimensionnelle x . $Re=200$, $t=1$.

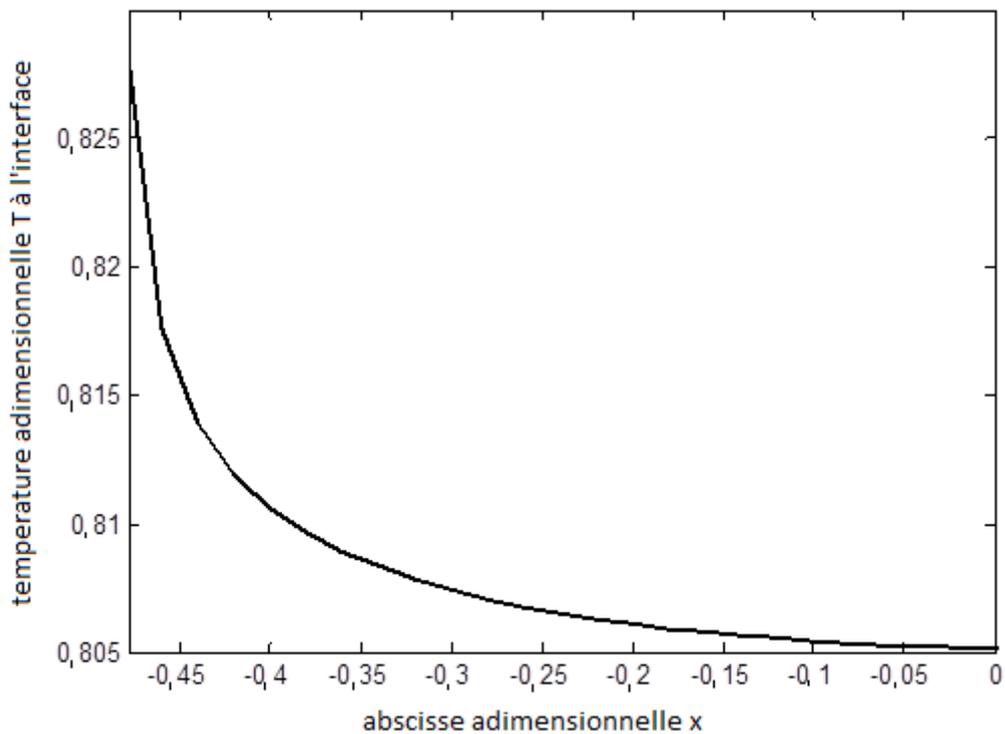


Figure 8.f: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de l'abscisse adimensionnelle x à l'interface pour $Re=200$, $t=1$.

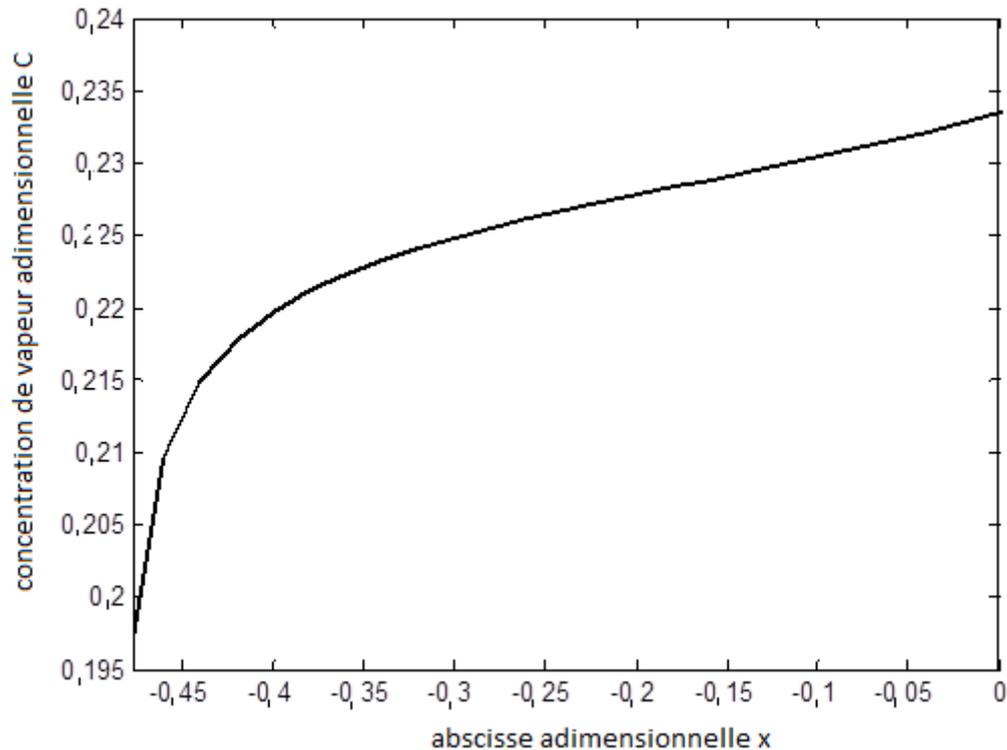


Figure 8.g: Evolution de la concentration de vapeur c_v adimensionnelle en fonction de l'abscisse adimensionnelle x a l'interface pour $Re=200$, $t=1$.

III-1-3-2 Evolution des champs de vitesse, de la température et de la concentration de vapeur en fonction du temps

Les courbes des figures 9-a et 9-b et 9-c montrent que les vitesses longitudinale et transversale adimensionnelles ainsi que la température adimensionnelle sont des fonctions décroissantes du temps. En effet au cours du temps, la surface de contact air- eau s'échauffe et la teneur en eau de l'air augmente (figure 9-d) entraînant ainsi une chute des composantes des vitesses longitudinales et transversales ainsi que de la température adimensionnelle.

La teneur en eau de l'air, joue un rôle très important sur le comportement cinétique de l'évaporation de l'eau. De même que pour la vitesse de l'air, cette influence est plus importante en début de séchage et diminue au cours du temps. Nous constatons qu'aux environs de $t > 0,02$, les transferts ne varient pratiquement plus ce qui correspond à l'établissement du régime permanent.

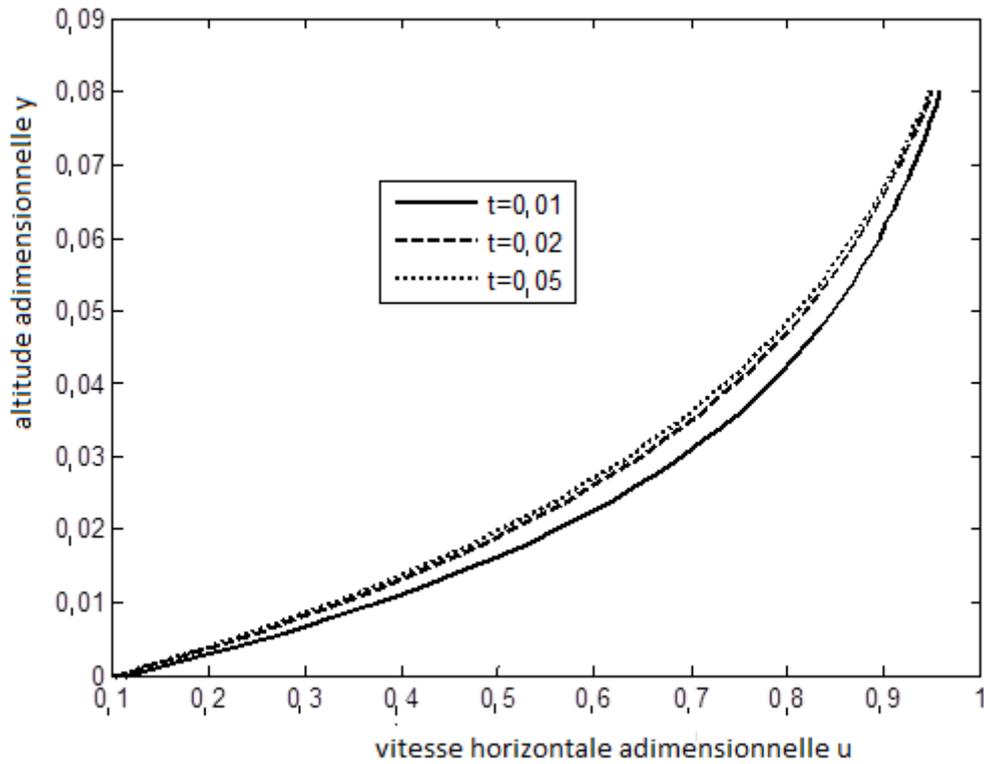


Figure 9-a: Variation de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du temps adimensionnel t , $Re=20$, $x=-0,4$.

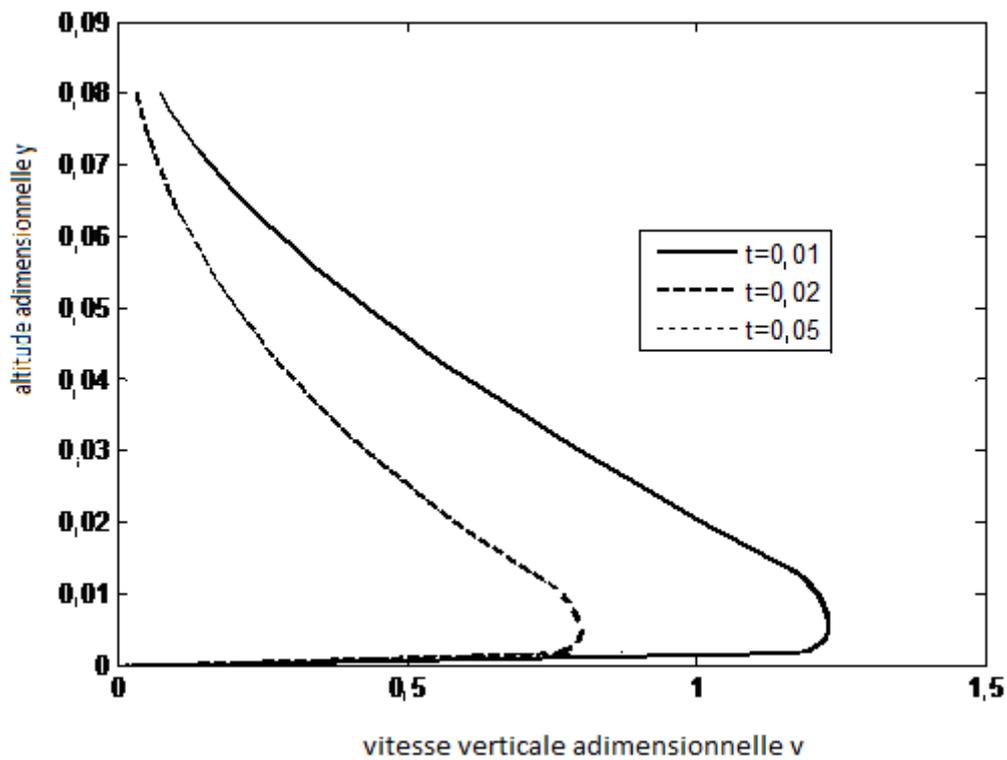


Figure 9-b : Variation de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du temps adimensionnel t , $Re=20$, $x=-0,4$.

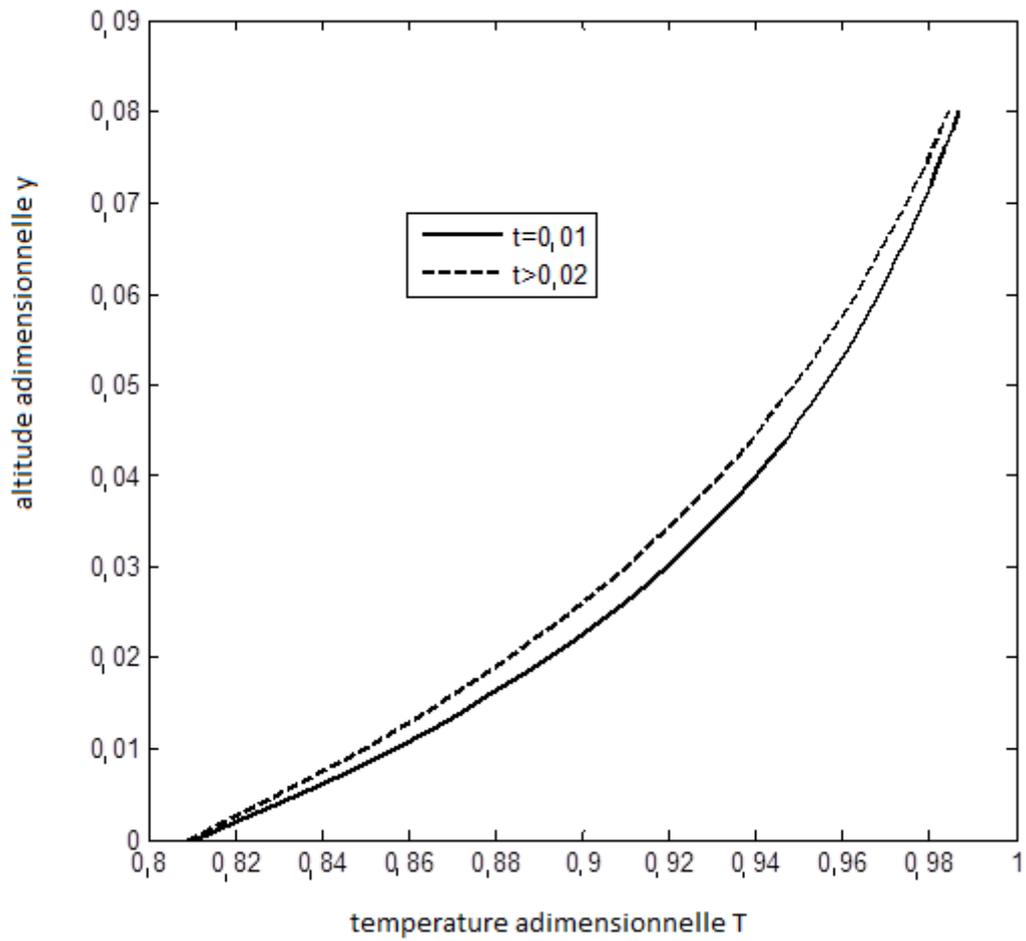


Figure 9-c: Variation de la température adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du temps adimensionnel t , $Re=20$, $x=-0.4$.

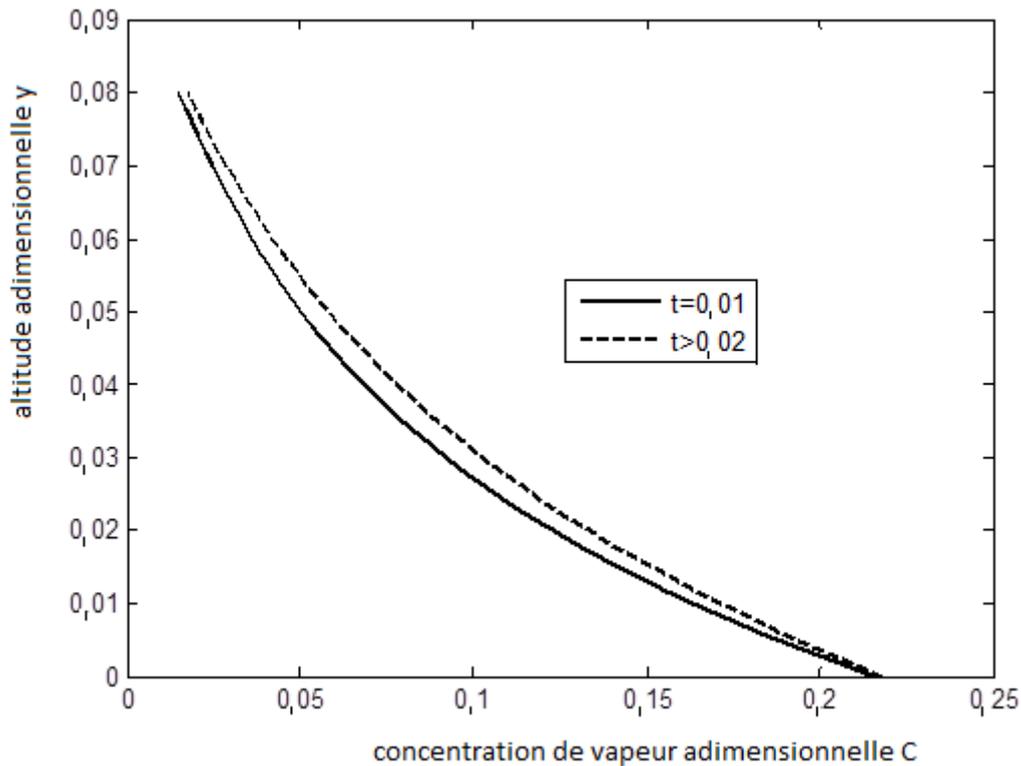


Figure 9-d: Variation de la concentration de vapeur adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du temps adimensionnel t, $Re=20$, $x=-0,4$.

III-1-3-3 Evolution des champs de vitesse, de la température et de la concentration de vapeur en fonction du nombre de Reynolds

Les figures 10 montrent l'influence du nombre de Reynolds sur les champs des vitesses, des températures et des concentrations. En effet lorsque le nombre de Reynolds augmente, la composante horizontale de la vitesse (figure 10-a) augmente favorisant ainsi le transfert de chaleur par convection au détriment de la diffusion ce qui explique la diminution de la composante transversale de la vitesse adimensionnelle. C'est ce qui explique la diminution de la composante verticale de la vitesse (figure 10-b) et de la concentration de vapeur. On remarque aussi plus le nombre de Reynolds augmente plus les épaisseurs des couches limites rétrécissent. A partir de $Re = 2000$, nous remarquons que les champs de vitesse, de température et de concentration ne varient pratiquement plus, ce qui s'explique par le fait que l'air humide au-dessus de l'interface sèche très vite et est emporté vers la sortie du bassin. Nous constatons également que l'influence du nombre de Reynolds est d'autant plus importante que l'on s'approche de l'interface

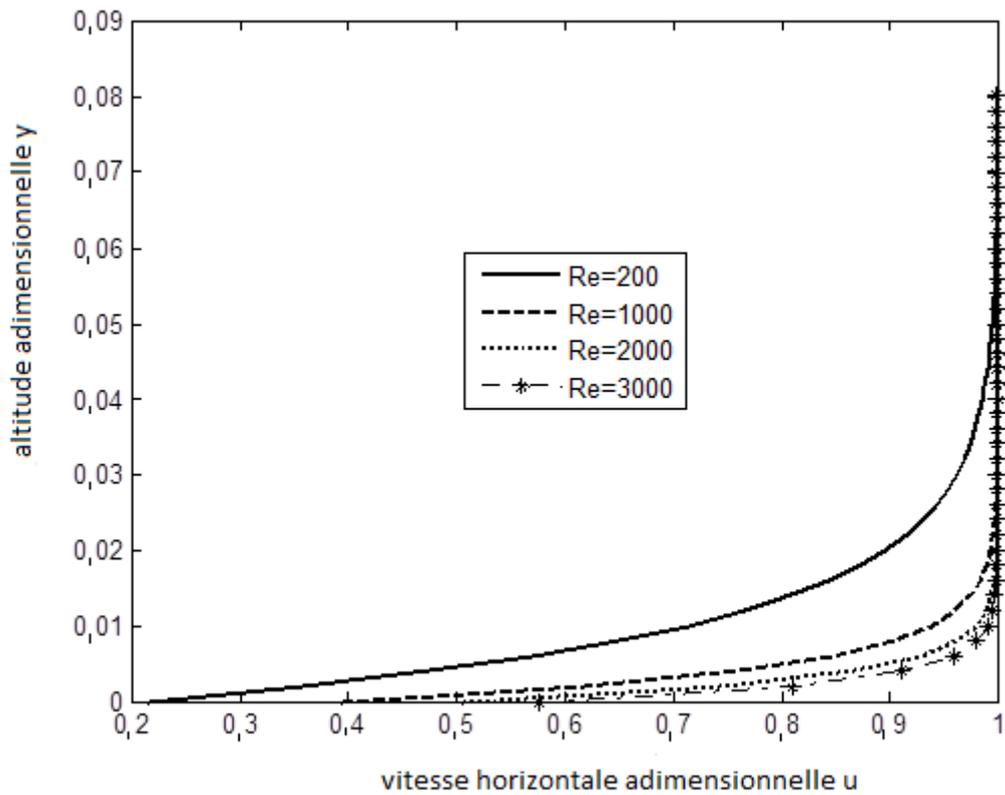


Figure 10-a: Variation de la composante horizontale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du nombre de Reynold. $t=1$; $x=-0,4$.

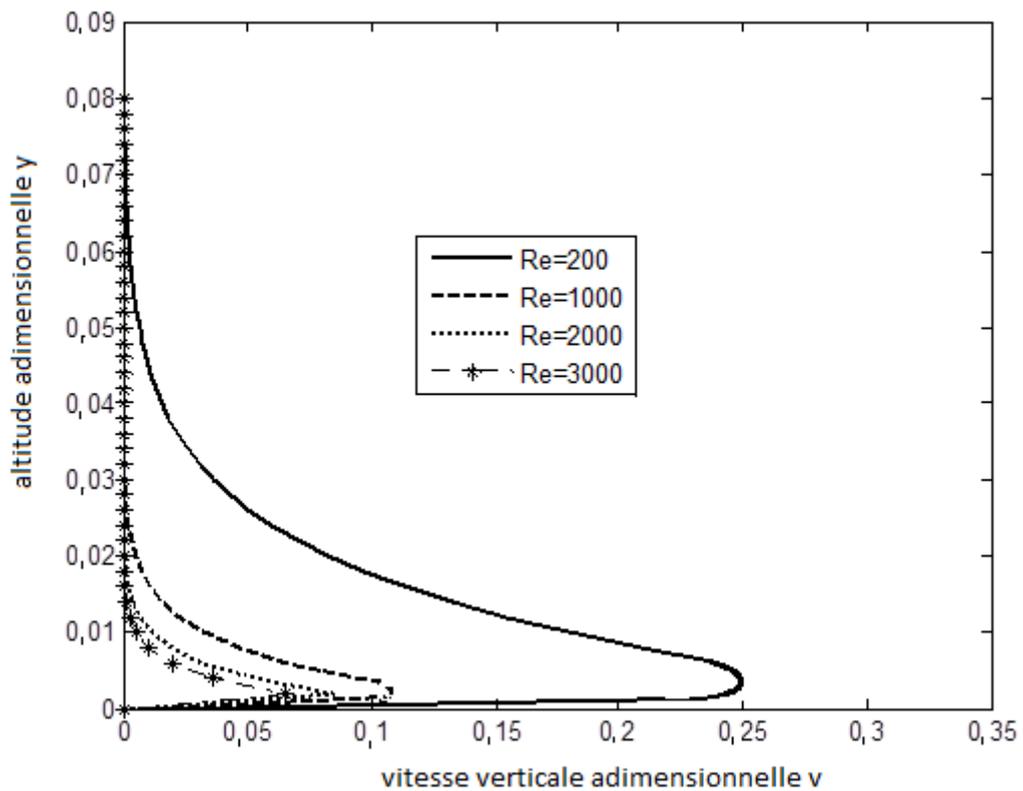


Figure 10-b: Variation de la composante verticale de la vitesse adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. $t=1$; $x=-0,4$.

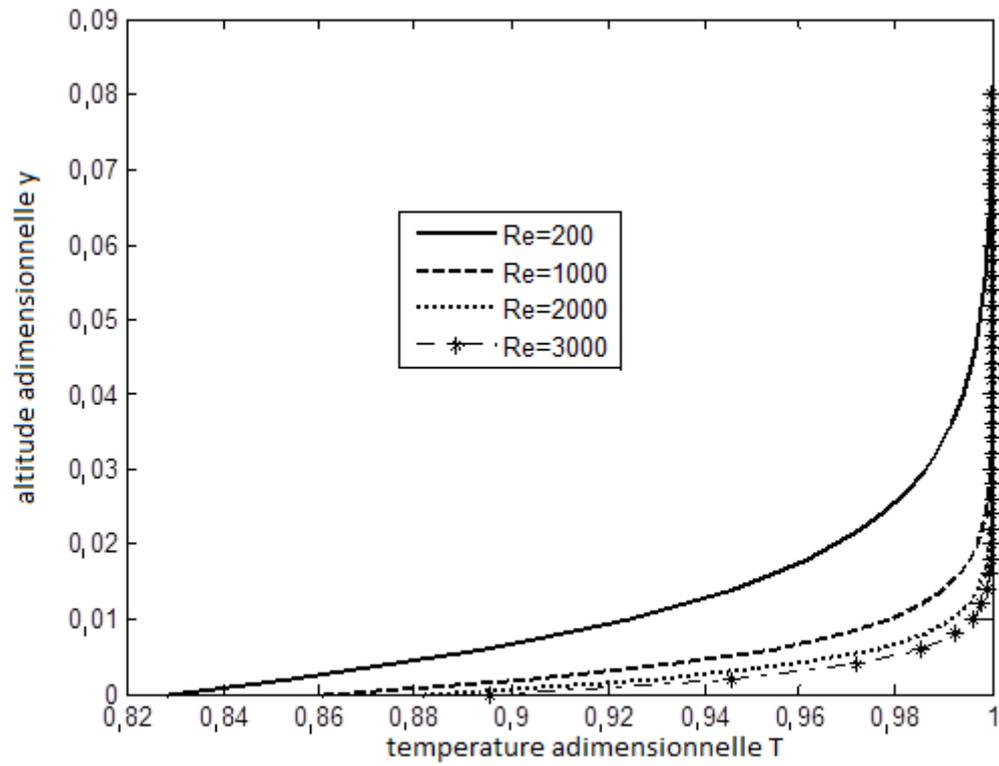


Figure 10-c: Variation de la température adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. $t=1$; $x=-0,4$.

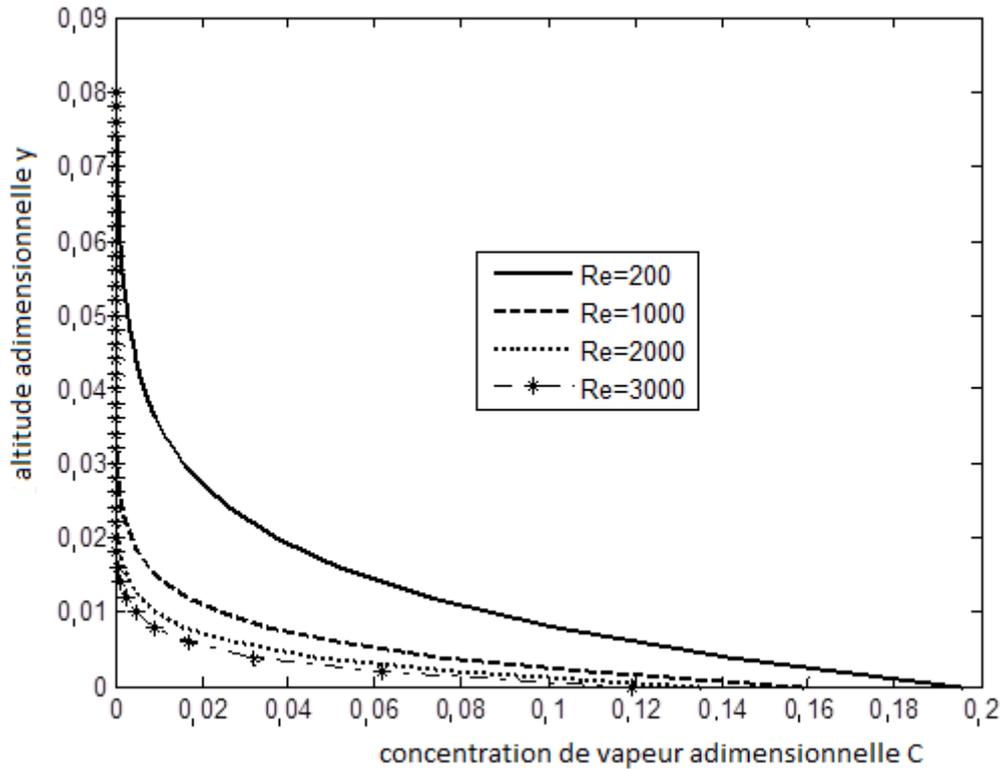


Figure 10-d: Variation de la concentration de vapeur adimensionnelle en fonction de l'altitude adimensionnelle y pour différentes valeurs du nombre de Reynold. $t=1$; $x=-0,4$.

III-1-3-4 Influence du couplage sur les transferts de chaleur et de masse

Les résultats de la figure 11 montrent que près de l'interface, les transferts avec couplage sont moins importants que les transferts sans couplage. Loin de l'interface les transferts suivent sensiblement la même évolution. Cette modélisation a permis de mieux comprendre le processus de séchage car elle met en considération les effets de la diffusion et de la convection dans l'interface contrairement à l'utilisation des coefficients globaux de transfert de chaleur et de masse entre l'air et le plan d'eau qui ne tiennent compte que des effets de diffusion. Bien que plus simples à manipuler numériquement, les méthodes globales ne tiennent pas rigoureusement compte des transferts de chaleur et de masse.

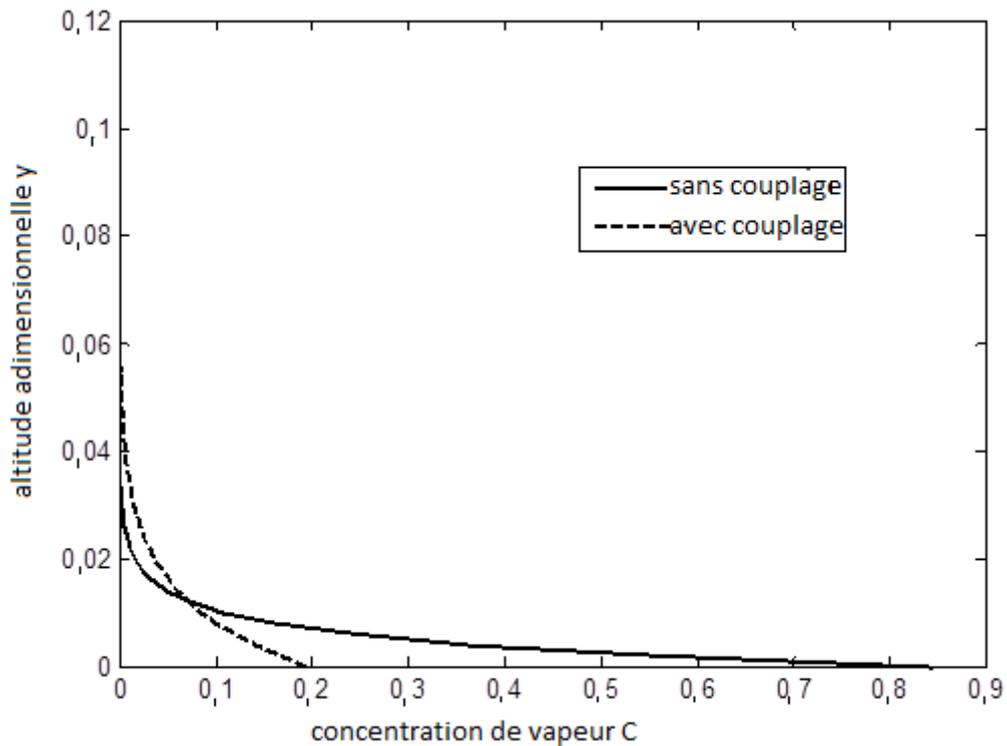


Figure 11 : Variation de la concentration adimensionnelle dans la couche limite en fonction de l'altitude avec et sans couplage. $Re=200$, $t=0,4$, $x = -0,4$.

III-1-3-5 Influence du nombre de Reynolds sur les grandeurs pariétales

Les figures (12-a, 12-b et 12-c) montrent que la vitesse et la température à l'interface sont des fonctions décroissantes de l'abscisse (x), la concentration quand à elle est une fonction croissante de (x) et qu'une augmentation du nombre de Reynolds entraîne une augmentation de la température et une chute concentration de vapeur. Ceci est du au fait que plus le nombre de Reynolds augmente plus la vapeur qui s'échappe de la surface sèche plus vite. Ces variations sont plus accentuées à l'entrée du bassin. On note que loin de l'entrée (aux environs de $x= -0,05$), les transferts deviennent constantes ce qui correspond à la saturation en vapeur humide de l'air au dessus qu bassin.

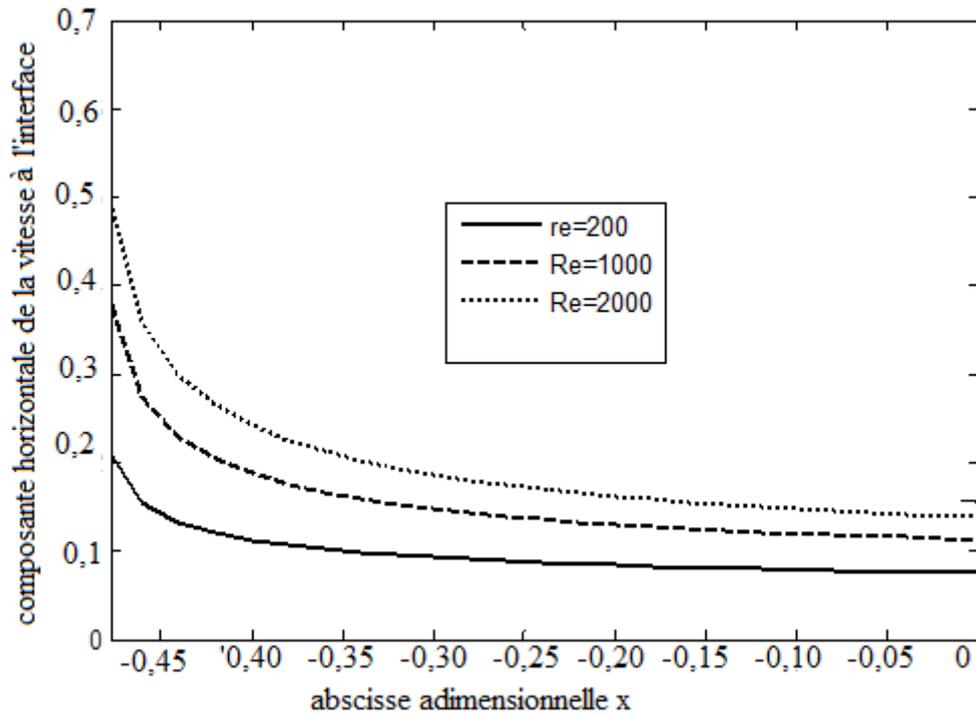


Figure 12-a : Evolution de la composante horizontale adimensionnelle de la vitesse en fonction de l'abscisse adimensionnelle x pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

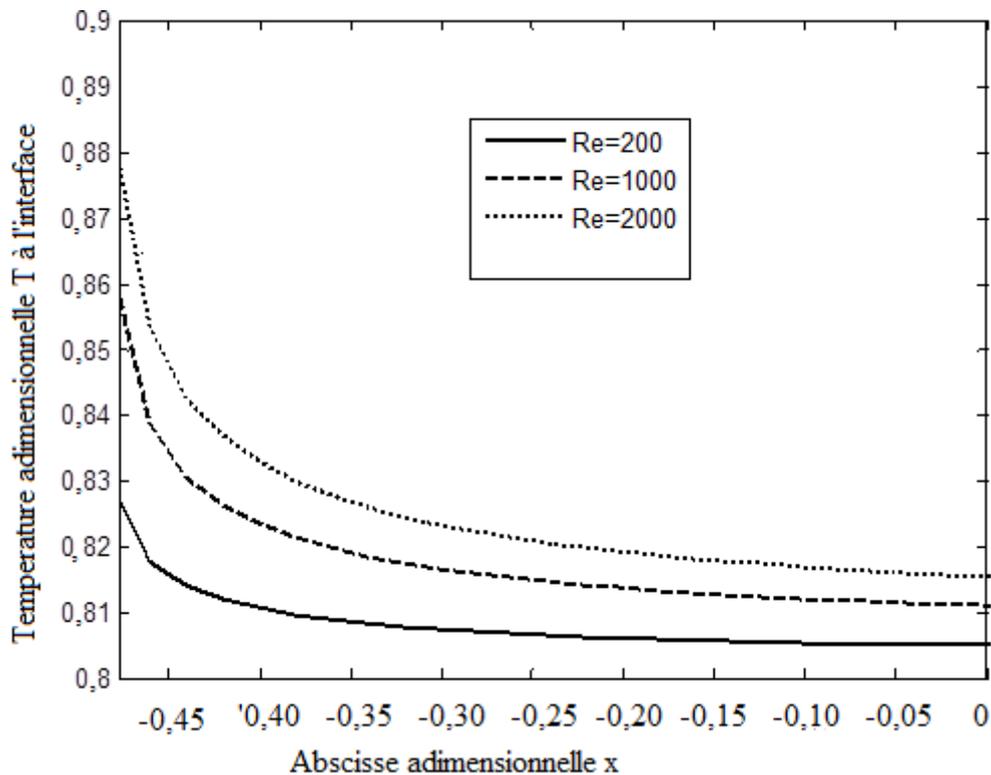


Figure 12-b: Evolution de la température adimensionnelle de la vitesse en fonction de l'abscisse adimensionnelle x pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

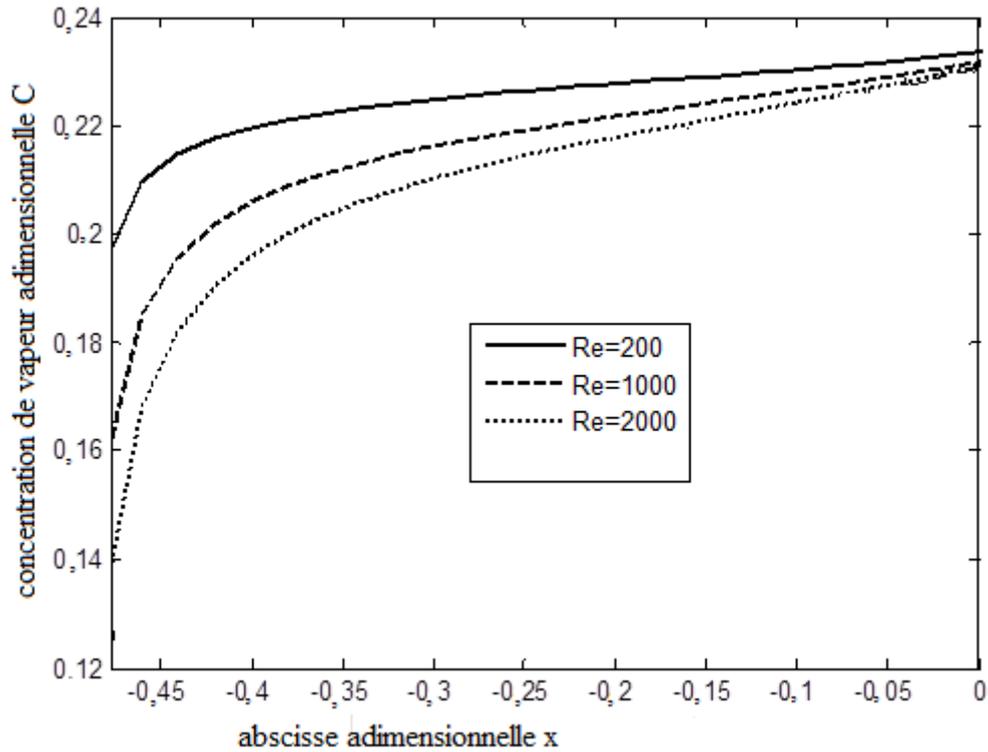


Figure 12-c Evolution de la concentration de vapeur adimensionnelle de la vitesse en fonction de l'abscisse adimensionnelle x pour différentes valeurs du nombre de Reynolds

III-1-3-6 Influence du nombre de Reynolds sur la masse totale

Les résultats de la figure 13 montrent que pour des faibles nombres de Reynolds, la masse totale est augmentée de façon très rapide en début de séchage ($t < 0,14$). À partir de cette date la masse totale évaporée suit un profil sensiblement constant ce qui correspond à l'établissement du régime permanent. Nous notons également que pour de grands nombres de Reynolds le régime s'établit plus lentement aux environs de $t=0,14$.

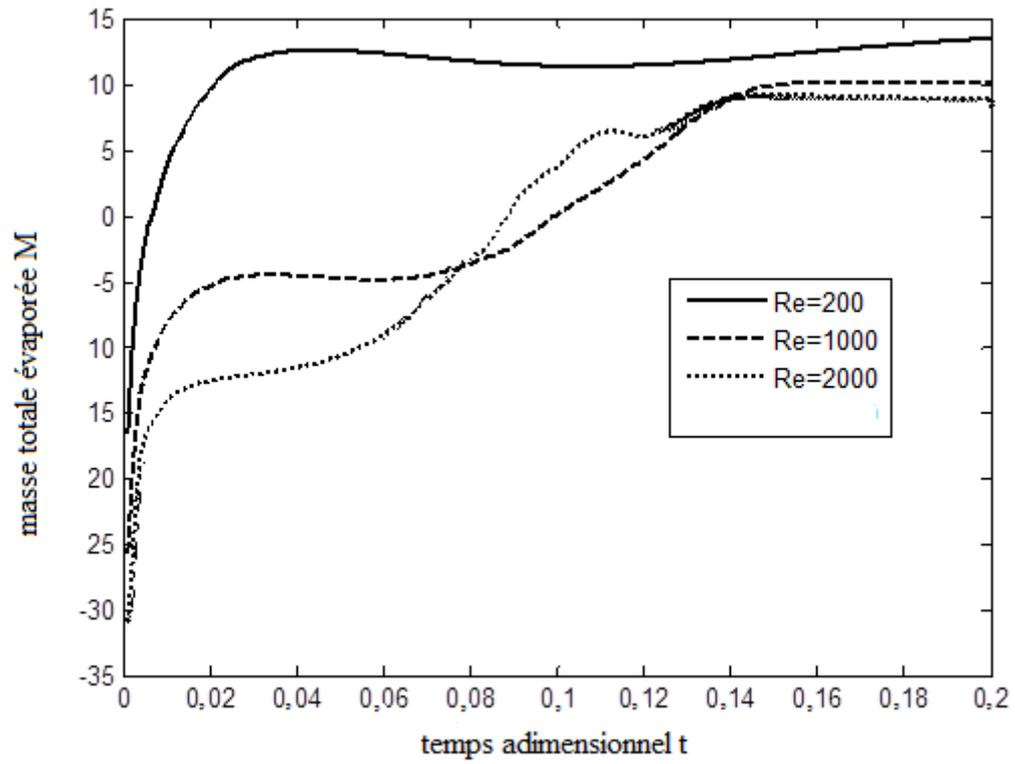


Figure 13 : Variation de la masse totale en fonction du temps dimensionnel pour différentes valeurs du nombre de Reynolds .

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Nous avons modélisé les transferts simultanés de chaleur et de masse dans le bassin de rétention et dans la couche fluide au-dessus du bassin en régime instationnaire. Les équations du mouvement dans l'eau étant fortement non linéaires, nous les avons transformées et réduit leur nombre en utilisant le formalisme vorticité- fonction de courant. Ainsi nous obtenons une équation quasi- linéaire et plus malléable numériquement. Pour résoudre les équations dans la couche fluide au-dessus du bassin, les hypothèses des couches limites laminaires thermique, massique et dynamique sont adoptées. Les conditions de raccordement au niveau de l'interface sont des bilans d'impulsion et de chaleur. Dans le but de généraliser le problème et de réduire le nombre de paramètres aussi bien physiques que géométriques, les équations ont été adimensionnalisées grâce à l'introduction de grandeurs de référence judicieusement choisies. Ainsi nous avons fait apparaître des groupements de nombres adimensionnels dont leur connaissance permet de caractériser plus facilement les transferts. Les équations aux dérivées partielles régissant les transferts dans l'eau étant très compliquées toute recherche de solutions analytiques est illusoire.

Nous avons ramené le domaine continu en un domaine discret formé par un nuage de points. En approchant les équations aux dérivées partielles par des équations aux différences finies et en utilisant un schéma aux directions alternées, nous obtenons un système algébrique que l'on peut écrire sous forme de matrice trigonale facilement inversible avec, comme inconnues au départ, la température et la vitesse à la surface de contact air- eau. Nous avons choisi une méthodologie numérique et présenté l'organigramme de calcul.

Nous avons analysé l'établissement du régime, l'influence du nombre de Reynolds et du couplage sur les transferts. Les résultats obtenus ont montré que :

- les transferts sont d'autant plus accentués que l'on se rapproche de l'interface ce qui confirme l'hypothèse que les transferts de masse sont surfaciques
- c'est tout près de l'entrée du bassin que nous observons le plus important transfert de la chaleur et de masse. Plus on s'éloigne du bord d'attaque, les couches limites se développent et la concentration en vapeur du mélange augmente entraînant ainsi une diminution des vitesses et des températures.
- La teneur en eau de l'air, joue un rôle très important sur le comportement cinétique de l'évaporation de l'eau. De même que pour la vitesse de l'air, cette influence est plus importante en début de séchage et diminue au cours du temps
- L'augmentation du nombre de Reynolds favorise le transfert de chaleur par convection au détriment de la diffusion
- près de l'interface, les transferts avec couplage sont moins importants que les transferts sans couplage

La suite logique de ce travail serait:

- d'élargir le problème à d'autres géométries,
- d'étudier l'influence de la variabilité des grandeurs physiques sur les transferts
- de confronter les résultats obtenus à ceux des méthodes de transfert de masse, des méthodes du bilan de l'eau, des méthodes des bacs d'évaporation et des méthodes empiriques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Anderson E.R., 1954. Energy-budget. Studies. U.S. Geol. Surv. Profesional paper 269
- [2] Elsaser W. M., and Cubertson M.F., 1960. Atmospheric radiation tables. Meteorological monographs, Amer. Met. Soc. 23. 1-43. August
- [3] Linley R.K., Kohler M.A, and Paulhus J.L.H, 1958. Hydrology for ingireers. Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York., N.Y.
- [4] Kohler M.A, Nordenson T.J., and Fox W.E., 1955. Evaporation from pans and lakes. U.S. weather Bureau Research Paper 38.
- [5] Bruce J.P., and Rodgers G.K. 1962. Water balance of the great lakes sytem. Amer. Assoc. Advancement of Sciences, No. 71, pp. 41-70
- [6] Ab. Touhami (1990) « Etude du séchage d'un cylindre annulaire poreux humide sous l'action d'un courant d'air forcé dans le conduit centrale : couplage des équations de Luikoc et celles de la couche limite ». Laboratoire de Thermodynamique et Energétique, Perpignan, France.
- [7] J.-L. Battaglia, L. Puigsegur, A. Kusiak Représentation non entière du transfert de chaleur par diffusion. Utilité pour la caractérisation et le contrôle non destructif thermique (2004)
- [8] M. Daguénet Evaporation en convection forcée d'un film mince s'écoulant en régime permanent, laminaire et sans onde, sur une surface plane inclinée (1994)
- [9] Miloud Samir BEGHOULA, Xavier CHESNEAU, Belkacem ZEGHMATTI, « Modelisation numerique de l'évaporation en convection forcee laminair d'un film liquide, ruisselant sur une plaque inclinee », 13emes Journees Internationales de Thermiques(2007)
- [10] A. V Luikoc Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies (1966)
- [11] A. V Luikoc Application of irreversible thermodynamics methods to investigation of heat and mass transfer (1965)
- [12] Jen. V. Liu Solutions of Luikoc equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies (1991)
- [13] Ch. Mbow (2006) ; « Equations générales des transferts et calcul numérique ». Cours de D .E.A de Mécanique des fluides et d'hydraulique, F-S-T, UCAD, Sénégal.
- [14] Roger K. SMITH « A simple model of hurricane boundary layer », Q.J.R. Meteorol. Soc. (2003), 129, pp.1007-1027.

- [15] H. Schlichting « Boundary layer theory », 6th edition, (1968)
- [16] J. w. Mitchell Heat transfer from sphere and other animals form, Biotechnical Journal 16, 561 (1976)
- [17] Ch. Mbow (2000) ; « Méthodes Itérative Implicite aux directions alternées »
Communication interne, Laboratoire de Thermodynamique et Energétique, Perpignan, France
- [18] BAIRAMOV and all Heat and mass Transfer to models of stills of various configurations, Geotechnica 4, 4, 45-47 (1968).
- [19] Peaceman, D.W. and Rachford, H.H (1955) “The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation”, Journal of the society for industrial and Applied Mathematics, Vol. 3, No.1, pp. 28-41
- [20] Bejan, A. (1984), Convection Heat Transfer, A. Wiley- interscience Publication, John Wiley&Sons, New York, NY.
- [21] Euvrard, D. (1990), Résolution Numérique des Equations aux Dérivées partielles, 2nd éd. Masson, Paris.
- [22] BAIRAMOV and all Heat and mass Transfer to models of stills of various configurations, Geotechnica 4, 4, 45-47 (1968).
- [23] Pierre Faye et al. « Modelling of the local Thermal and Hydrodynamique Exchanges in Boundary Layer Over a Paraboloidal Pond of Retention Filled with Water in Forced Convection », Vol3, No3, pp.74-80(2015)
- [24] Faye et al. « Heat and mass transfers at the interface of a paraboloidal cavity filled with water in forced convection », Vol 10, No.2, pp. 85-97 (2020)

ANNEXES

Discretisation des opérateurs différentiels à la surface de contact :

Soit une fonction $F(x, y)$ continue et différentiable. Le développement en série de Taylor de la fonction $F(x + \Delta x, y + \Delta y)$ autour du point (x, y) s'écrit :

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{1}{1!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right] F(x, y) + \frac{1}{2!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 F(x, y) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n-1} F(x, y)$$

Ainsi, le développement en série de Taylor de $F(x, y - \Delta y)$ autour de (x, y) donne, si $n = 2$:

$$F(x, y - \Delta y) = F(x, y) - \Delta y \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) + \frac{\Delta y^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y)$$

De même, celui de $F(x, y - 2\Delta y)$ donne :

$$F(x, y - 2\Delta y) = F(x, y) - 2\Delta y \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) + \frac{4\Delta y^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y)$$

Prenons le cas de la température dans l'eau. Les équations deviennent :

$$T(j, k - \Delta \lambda) = T(j, k) - \Delta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} T(j, k) + \frac{\Delta \lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} T(j, k)$$

$$T(j, k - 2\Delta \lambda) = T(j, k) - 2\Delta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} T(j, k) + \frac{4\Delta \lambda^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} T(j, k)$$

A la surface de contact $k = K; j = J$

$$T(J, K - \Delta \mu) = T(J, K) - \Delta \mu \frac{\partial}{\partial \mu} T(J, K) + \frac{\Delta \mu^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} T(J, K)$$

Approximation des dérivées :

Elle est basée sur le développement de Taylor.

Approximation des dérivées premières :

Considérons une fonction $f = f(x)$,

Au voisinage de δx on a :

$$f(x + \delta x) = f(x) + \delta x f^{(1)}(x) + \frac{\delta x^2}{2} f^{(2)}(x) + \frac{\delta x^3}{6} f^{(3)}(x) + 0(\delta x^4) [1]$$

$$f(x - \delta x) = f(x) - \delta x f^{(1)}(x) + \frac{\delta x^2}{2} f^{(2)}(x) - \frac{\delta x^3}{6} f^{(3)}(x) + 0(\delta x^4) [2]$$

D'après (1), il vient $f^{(1)} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} + 0(\delta x)$ (1-a)

(1-a) est dite dérivation progressive ou avant.

De même d'après (2), on a $f^{(1)} = \frac{f(x) - f(x - \delta x)}{\delta x} + 0(\delta x)$ (1-r)

(1-r) est dite dérivation régressive ou arrière.

Faisons (1)-(2) ; on a :

$$= \frac{f(x + \delta x) - f(x - \delta x)}{2\delta x} + 0(\delta x^2) \quad (1-c)$$

(1-c) est appelée dérivée centrée

Approximation des dérivées secondes

En faisant [1]+[2] on obtient :

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x + \delta x) - 2f(x) + f(x - \delta x)}{\delta x^2}$$

Algorithme de Thomas

Soit le système matriciel suivant :

$$b'_1 u_1 + c'_1 u_2 = d'_1 \quad i = 1$$

$$a(i)u(i-1) + b(i)u(i) + c(i)u(i+1) = d(i) \quad 1 < i < im$$

$$a'_{im} u_{im-1} + b'_{im} u_{im} = d'_{im} \quad i = im$$

La solution récursive de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i$$

$$u_{i-1} = \alpha_{i-1} u_i + \beta_{i-1}$$

$$a_i (\alpha_i u_{i-1} + \beta_{i-1}) + b_i u_i + c_i u_{i+1} = d_i$$

$$\Rightarrow u_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i \alpha_{i-1}} u_{i+1} + \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}$$

Par identification

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}$$

$$\beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i + a_i \alpha_{i-1}}$$

$$u_{im-1} = \alpha_{im-1} u_{im} + \beta_{im-1}$$

$$a'_{im} u_{im-1} + b'_{im} u_{im} = d'_{im}$$

$$a'_{im} (\alpha_{im-1} u_{im-1} + \beta_{im-1}) + b'_{im} u_{im} = d'_{im}$$

$$u_{im} = \frac{d'_{im} - a'_{im} \beta_{im-1}}{b'_{im} + a'_{im} \alpha_{im-1}}$$

Résumé

Dans ce travail l'auteur a modélisé les transferts simultanés de chaleur et de masse dans un bassin de rétention de forme paraboloidale rempli d'eau et dans la couche de fluide au-dessus du bassin en régime instationnaire; la surface libre du bassin est parcourue par un courant d'air chaud forcé.

Dans l'eau, il a utilisé le formalisme vorticité- fonction de courant pour rendre quasi- linéaire et plus malléable numériquement l'équation du mouvement.

Pour résoudre les équations dans la couche fluide qui est constituée d'un mélange d'air sec et de vapeur d'eau, les hypothèses des couches limites laminaires thermique, massique et dynamique sont adoptées.

Pour généraliser le problème et réduire le nombre de paramètres, les équations ont été adimensionnalisées grâce à l'introduction de grandeurs de référence judicieusement choisies.

Les résultats obtenus des simulations numériques ont montré que: d'une part c'est tout près de l'entrée du bassin et de l'interface que nous observons le plus important transfert de chaleur et de masse, d'autre part l'augmentation du nombre de Reynolds favorise le transfert de chaleur par convection au détriment de la diffusion. Par ailleurs, près de l'interface les transferts avec couplage sont moins importants que les transferts sans couplage. En effet bien que simples à manipuler, les méthodes globales ne rendent pas compte rigoureusement aux transferts de chaleur et de masse.

Tous les résultats ont été obtenus pour des nombres de Reynolds variant de 20 à 3000.

Mots clés : Bassin de rétention, convection forcée, couche limite, nombre de Reynolds

Abstract

In this work, we have modeled the unsteady heat and mass transfers in an air- water interface of a paraboloidal cavity filled with of water. The free surface of the pond is crossed by a forced warm air. For studying the dynamic and thermal transfer a vorticity-stream function formalism is adopted in the water. In the interface which is constituted by a mixture of dry air and steam, the laminar boundary layer (thermal, mass and dynamic) hypotheses are adopted. The dimensionless equations are resolved by the finite difference method with an implicit scheme for the time. The authors have analyzed the steady state, the influence of the Reynolds number and the influence of the coupling on the transfers. The results obtained correspond to a Reynolds number varying from 20 to 3000.

Keywords: Pond of retention, forced convection, boundary Layer, Reynolds number