

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Année : 2018 - 2019

N° d'ordre : 146

THESE DE DOCTORAT UNIQUE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Mention : Mathématiques et Modélisation

Spécialité : Analyse, Statistiques et Applications

Présentée par :

BASSIROU DIA

TITRE

Contribution à la résolution d'un problème inverse de l'ensablement
d'un lac par une approche non standard de contrôlabilité exacte.

Soutenue publiquement le 08/ 02 /2020 devant le jury composé de :

<u>Président :</u>	Hamidou DATHE	Professeur Titulaire, (U.C.A.D.) / F.S.T. (Sénégal)
<u>Rapporteurs :</u>	Gabriel BISSANGA	Professeur Titulaire, Université Marien Ngouabi de Brazzaville (U.M.N.G) / F.S.T. (Congo)
	Saley BISSO	Professeur Titulaire, Université Abdou Moumouni de Niamey (U.A.M.) / F.S.T. (Niger)
<u>Examineurs :</u>	Abdoulaye SENE	Professeur Titulaire, (U.C.A.D.) / F.S.T. (Sénégal)
	Alassane SY	Maitre de Conférences, (U.A.D.B.) / U.F.R. SATIC (Sénégal)
<u>Directeur de thèse :</u>	Benjamin MAMPASSI	Professeur Titulaire, (U.C.A.D.) / F.S.T. (Sénégal)

TITRE :

*Contribution à la résolution d'un problème inverse
de l'ensablement d'un lac par une approche non
standard de contrôlabilité exacte*

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à un problème de reconstruction de l'état initial d'un processus d'ensablement d'un lac dont l'évolution est gouvernée par une EDP parabolique non linéaire définie sur un domaine borné décrivant l'état de sédimentation de son fond.

Se plaçant dans un cadre où les données sur les mesures de l'état de sédimentation du lac sont partiellement connues sur une partie du domaine dans un intervalle de temps $[0, T]$, on se propose d'élaborer une approche permettant d'identifier l'état de sédimentation à l'instant T sur tout le domaine d'étude. Cette identification est indispensable pour la prévision des états futurs (états à $t > T$). Il s'agit là d'un problème inverse dont les formulations classiques conduisent le plus souvent à des problèmes mal posés.

Dans un premier abord, on construit une suite de problèmes inverses par un processus de linéarisation de l'EDP gouvernant le phénomène étudié. Puis, on transforme ces problèmes inverses en une suite de problèmes de contrôlabilité à zéro. On se ramène ainsi à la résolution d'une suite de problèmes bien posés.

En second abord, une démarche spécifique permettant la reconstruction, pour les problèmes associés, de la suite des états initiaux est développée. Et, on établit ensuite que l'état initial du problème originel est limite de cette suite. Enfin, sur la base de ce résultat, on propose, un schéma algorithmique ouvrant ainsi des perspectives intéressantes pour la résolution des problèmes d'identification des EDPs paraboliques non linéaires à données manquantes.

Mots clés : Modèle d'ensablement des lacs - Problèmes aux limites à données incomplètes
- EDPs paraboliques non linéaires - Contrôlabilité à zéro - Schéma algorithmique

Dédicace

Je dédie, avec respect et considération, le présent travail :

À celui qui m'a donné le goût de l'effort, la volonté et la détermination, qualités qui engendrent les grands esprits,

À mon défunt père.

À celle qui m'a appris l'amour du prochain, l'humilité et le respect des hommes,
À ma mère.

À ceux et celles qui, de leur amour, leur respect et leur dévouement me bercent le coeur.
À mes frères et soeurs.

Remerciements

Je loue Allah pour m'avoir permis de réaliser ce travail, en me donnant la volonté, la patience, et surtout la santé durant toutes mes années d'étude.

Cette thèse est un moment très important de ma vie, d'une part, parce qu'elle est l'aboutissement de mon cursus universitaire et d'autre part parce que c'est un de mes rêves qui se réalise. Bien entendu, je n'ai pas fait ce travail seul et à ce titre je tiens à remercier tous ceux qui y ont contribué. Je voudrais tout d'abord remercier respectueusement mon directeur de thèse, le professeur Benjamin MAMPASSI pour avoir accepté de diriger ce travail. Sa disponibilité, son soutien inoubliable, ses compétences, sans parler de l'environnement propice qu'il a créé pour que la recherche puisse être bien menée. Ses précieux conseils m'ont permis d'avancer dans mes travaux de doctorat durant ces trois ans. Il m'a permis d'acquérir une rigueur dans la recherche et un raisonnement constructif.

Et je le remercie encore pour le sujet qu'il m'a proposé et pour son suivi permanent enrichi de beaucoup d'encouragements, ses remarques et suggestions sans lesquelles cette thèse n'aurait pas lieu.

Je tiens à remercier vivement d'une part mes deux rapporteurs, messieurs les professeurs Saley BISSO, et Gabriel BISSANGA, pour le temps consacré à l'étude de ce mémoire et les remarques importantes qui m'ont permis d'améliorer sa rigueur et d'autre part, M. le professeur Hamidou DATHE qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Merci également à Monsieur Alassane Sy qui m'a fait l'honneur de faire parti du jury.

J'exprime ma gratitude au Professeur Abdoulaye SENE, d'avoir mis à ma disposition un livre sur les inégalités de Carleman.

Il convient ici de remercier toutes les personnes ayant permis l'accomplissement de ce mémoire. Une thèse est avant tout un travail d'équipe et au sein d'une équipe. J'adresse mes plus vifs remerciements à l'équipe de modélisation et simulation numérique du Professeur Benjamin MAMPASSI pour leurs aides, leurs conseils et remarques, leurs disponibilités et leurs compétences pédagogiques.

Je remercie vivement mes collègues numériques Oulimata Diop et Ama Diop Niang Sembene, membres de l'équipe de modélisation et simulation numérique. Je retiens les bons moments d'échanges passés ensemble durant ces années de travail de doctorat.

Merci à Mohamed Taki Abdoul Karim, Mahamat Saleh DAOUSSA HAGGAR, Ali Abani et Aboubakri Traoré pour vos conseils et vos orientations, je vous exprime ma gratitude.

J'adresse mes sincères remerciements à Mme Hadiza Saley du département de Programme Grande Ecole (P.G.E./ C.E.S.A.G.) pour ses conseils et ses encouragements et la confiance qu'elle a eu à mon égard, et aux assistants de programmes et pédagogique pour l'accueil très sympathique dont j'ai pu bénéficier.

Je remercie vivement la secrétaire Madame Ba et Monsieur Bakary Manga pour leur aide.

J'adresse aussi des remerciements particuliers à des familles à Baba Garage, à Bambey et à Dakar (Gueule Tapée), ne serait- ce que pour les années d'études passées chez eux. C'est l'occasion d'exprimer ma profonde reconnaissance et mes plus sincères remerciements à Aida Boye Dièye, à Yaye Khady Diokhané et à Adja Fatou Diaw.

Un grand merci à Aminata Sy, une soeur qui a des qualités exceptionnelles. Ce fût un vrai bonheur pour moi de te connaître et de te côtoyer durant mes études supérieures.

Je remercie Ibrahima Dia, Serigne Dia et Doudou Dia. Je suis très heureux d'avoir des frères comme eux. Ils m'ont beaucoup soutenu et ont toujours été disponibles pour des conseils et des orientations.

Je remercie également Serigne Cheikh Astou Gadiaga, un amoureux du savoir qui m'a toujours encouragé et soutenu durant mon cursus scolaire.

Je remercie également mes collègues doctorants en Proba-Stat (Macoumba Ndour et Makhtar Ndao), en Algèbre (Abdou Aziz Diallo et Moussa Diakhaté) et en Géométrie (Adama Thiandoum et Fadel Ndiaye) ainsi que le Docteur Kandé Diaby. J'ai également une pensée très profonde pour tous les enseignants que j'ai eu à rencontrer durant mon cursus scolaire, plus particulièrement à mon ancien maître Saliou Yade, un enseignant exceptionnel de compétence et de dévouement bénévole à la réussite de ses élèves.

Merci à mon ancien Directeur de l'école primaire de Dinguiraye Mr Thiao pour sa disponibilité et ses encouragements de tous les jours.

Je remercie particulièrement mon ami El Hadji Tidiane Fall et mon jumeau Makhtar Fall ainsi que mon frère Mawo Dia pour leur générosité et leurs nombreux encouragements.

J'adresse mes sincères remerciements à mon frère Mr Cissé le Principal du C.E.M de Dinguiraye pour sa disponibilité et sa générosité.

Je remercie également mon frère Modou khaly dia et sa soeur Ndeye Fatou Dia.

Je tiens à remercier les nombreuses personnes qui directement, indirectement, humainement, amicalement, amoureusement, ont contribué à former ma personnalité.

Je remercie, mes parents, mes frères (Doudou et Cheikh), mes soeurs (Fatou, Ndella et Mbène) et toute ma famille pour leur soutien et leur encouragement. Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

Notations

Variables / domaines

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers naturels non nuls
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
- $\mathbb{R}^+$ (resp $\mathbb{R}^-$) : ensemble des nombres réels positifs, (resp ensemble des nombres réels négatifs)
- $\mathbb{R}^n$: espace vectoriel de dimension n construit sur un corps des réels
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$: un point de $\mathbb{R}^n$ avec $x_i \in \mathbb{R}$
- $t \in \mathbb{R}^+$: variable temporelle
- t_0 : instant initial
- v : variable de contrôle
- y : variable d'état
- Ω : domaine d'étude supposé borné ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)
- Γ ou $\partial\Omega$: bord du domaine Ω
- ω : sous ensemble ouvert non vide de Ω
- $Q = \Omega \times]0, T[$
- $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$

Fonctions - Fonctions d'état

- $y(t, x)$: état d'un système au point $x \in \Omega$ à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$
- $y(t)$: fonction d'état définie par

$$\begin{aligned} y(t) &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y(t, x) \end{aligned}$$

- $v(t)$: fonction contrôle sur Ω .

$$\begin{aligned} v(t) &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto v(t, x) \end{aligned}$$

- $y_v(t)$: état d'un système contrôlé par v
- y^0 : état d'un système à un instant initial t_0
- χ_ω : fonction caractéristique de ω définie par

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dérivées / Opérateurs différentiels

- $\frac{\partial y}{\partial t}$ ou $\partial_t y$: dérivée partielle de y par rapport à la variable t .
- $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ ou $\partial_{x_i} y$: dérivée partielle de y par rapport à la variable x_i .
- soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$

$$D^\alpha y = \frac{\partial^{|\alpha|} y}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} y}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \partial x_n^{\alpha_n}}$$

- ∇ : opérateur gradient :

$$\nabla y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)^T$$

- $\nabla \cdot U$ ou **div** (U) : divergence du champ de vecteurs $U = (u_i)$

$$\nabla \cdot U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

- Δ : opérateur de Laplace ou Laplacien

$$\Delta y = \nabla \cdot (\nabla y) = \text{div}(\nabla y)$$

- ∂_n : dérivée normale

$$\partial_n y = \nabla y \cdot n = \sum_1^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot n_i$$

où $n = (n_i)$ est un vecteur normal extérieur au domaine.

Normes / Espaces fonctionnels

- $|\cdot|$: valeur absolue ou module
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{V}}$: produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathbb{V}$.
- $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$: norme sur un espace vectoriel $\mathbb{V}$.
- $\mathbb{X}$: espace d'état (sous espace vectoriel de l'espace de fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^+$)
- Θ : espace des observations
- $\mathcal{U}$: espace des contrôles
- $\mathcal{U}_{adm}$: espace des contrôles admissibles
- $L^p(\Omega)$: espace des fonctions u mesurables sur Ω et telles que $|u|^p$ soit intégrable ($1 \leq p < \infty$)
- $L^\infty(\Omega)$: espace des fonctions u mesurables sur Ω telles qu'il existe C satisfaisant $|u| \leq C$ pour presque tout $x \in \Omega$
- $C^0(\Omega)$: ensemble des fonctions continues à valeurs dans Ω
- $C^k(\Omega)$: ensemble des fonctions k fois continûment différentiables à valeurs dans Ω
- $H^m(\Omega)$: espace de Sobolev défini par

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), D^\alpha f \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}$$

- $L^p(0, T; H^m(\Omega))$: espace des fonctions u mesurables sur $(0, T)$ à valeurs dans $H^m(\Omega)$

- $C^k(0, T; H^m(\Omega))$: espace des fonctions k fois continûment différentiables sur $(0, T)$ à valeurs dans $H^m(\Omega)$
- $L^p(0, T; L^m(\Omega))$: espace des fonctions u mesurables sur $(0, T)$ à valeurs dans $L^m(\Omega)$
- $C^k(0, T; L^m(\Omega))$: Espace des fonctions k fois continûment différentiables sur $(0, T)$ à valeurs dans $L^m(\Omega)$

Table des figures

1.1	<i>Images satellitaires relatives au processus d'ensablement du lac Tchad selon un montage MEC des images courant la période de 44 années allant de 1963 à 2001.</i>	5
1.2	<i>Illustration du phénomène d'assèchement de lac. La disparition du Lac Tchad en est un exemple typique.</i>	6
2.1	<i>Une schématisation de l'évolution du fond sédimentaire d'un fleuve ou d'un lac.</i>	14
2.2	<i>Un exemple d'évolution de fond sédimentaire.</i>	15
4.1	<i>Une illustration d'une fonction η^0 vérifiant les propriétés (4.8), (4.9) et (4.10). On voit bien que $\eta^0 = 0$ en $x = 1$ et $\nabla\eta^0(x) \neq 0$ sur $\overline{\Omega \setminus \{x, x < \epsilon < 1\}}$.</i>	49

Table des matières

Résumé	ii
Dédicace	iii
Remerciements	iv
Notations	vii
Liste des figures	xi
1 Introduction générale	2
1.1 Contexte et motivation	2
1.1.1 Enjeux	2
1.1.2 Motivation	7
1.2 Problématique	8
1.3 Organisation du document	11
2 Formulation mathématique d'un modèle d'ensablement d'un lac	13
2.1 Description d'un modèle d'ensablement de lacs	14
2.2 Cadre fonctionnel et résultats théoriques	16
2.2.1 Formulation faible du problème direct	16
2.2.2 Existence et unicité de la solution du problème faible	17

2.2.3	Solutions admissibles	22
2.2.4	Cas où le processus d'érosion est négligeable	24
2.3	Formulation inverse	25
3	Bref aperçu sur la contrôlabilité exacte à zéro de quelques systèmes paraboliques	28
3.1	Notions de contrôlabilité	29
3.2	Inégalité de Carleman pour des équations de la chaleur	31
3.3	Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur	34
3.4	Contrôlabilité à zéro interne d'un système de Navier- Stokes	38
3.4.1	Définitions	38
3.4.2	Résultat de contrôlabilité à zéro d'un système de Navier- Stokes	39
3.5	Synthèse de quelques résultats existants	42
3.6	Conclusion	45
4	Inégalités de type Carleman pour des EDPs paraboliques non linéaires	47
4.1	Fonctions poids	48
4.2	Résultats préliminaires	51
4.3	Résultat principal : Inégalité globale de Carleman	63
4.4	Conclusion	68
5	Approche non standard du problème inverse (2.37)-(2.39)	69
5.1	Problème associé	70
5.2	Problème adjoint contrôlé du système (5.11) - (5.13)	71
5.3	Reconstruction exacte de l'état initial du problème associé (5.7)-(5.9)	73
5.3.1	Inégalité d'observabilité	74
5.3.2	L'équation intégrale de reconstruction	77
5.3.3	L'algorithme de reconstruction	79

5.4	Approximation d'un couple contrôle / état admissible du problème adjoint contrôlé	81
5.4.1	Formulation du problème de contrôle approché	81
5.4.2	Caractérisation du contrôle v_α	83
5.5	Approximation et schéma algorithmique du problème inverse originel (5.1)-(5.3)	91
5.6	Conclusion	94
6	Conclusion générale et perspectives	96
6.1	Synthèse des travaux	96
6.2	Publications scientifiques	98
6.3	Perspectives	99

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Sommaire

1.1	Contexte et motivation	2
1.2	Problématique	8
1.3	Organisation du document	11

1.1 Contexte et motivation

1.1.1 Enjeux

Il est bien connu, en météorologie, en océanographie ou dans d'autres domaines, que la connaissance d'un état initial le plus exacte possible permet d'établir des prévisions fiables. L'assimilation de données a ainsi, entre autres pour objectif de construire cette condition initiale afin d'en améliorer les prévisions. C'est pourquoi, elle est au coeur de grands projets d'océanographie opérationnelles et l'on peut citer en exemple le projet MERCATOR ([44]). L'expérience acquise en météorologie et en océanographie montre que les techniques d'assimilation de données fournissent des outils efficaces permettant de combiner des modèles et des données en prenant en compte les imperfections et les incertitudes des uns et des autres. D'où l'idée de s'approprier ces techniques afin de déterminer son impact sur d'autres composants

du système climatique terrestre tel que le phénomène d'ensablement.

Toutes ces notions sont également utiles dans les domaines de la pêche, du transport maritime, de la protection des espèces marines, de la défense et, plus anecdotiquement, dans celui des courses au large.

L'assimilation variationnelle de données consiste à réduire les incertitudes sur les paramètres d'entrées du modèle à l'aide de mesures. L'objectif peut être d'améliorer les prévisions ou encore de mieux connaître des paramètres incertains tels que la condition initiale optimale. L'assimilation de données en météorologie, qui ne consistait qu'à utiliser les observations des jours précédents pour essayer de mieux prévoir le temps qu'il ferait le lendemain, s'est considérablement développée et sert actuellement dans plusieurs domaines bien différents. Elle a toujours pour but de fournir de bonnes prévisions (à moyen ou long terme) de l'état d'un système étudié. Cela a un très grand intérêt pour nombre d'utilisateurs : prévisions météo à quelques jours pour le grand public, prévision météo à plus long terme sur une zone très particulière pour les organisateurs de grandes manifestations, état de l'océan pour les marins pêcheurs mais aussi pour la détermination des trajectoires des tempêtes pour les compagnies aériennes, etc.

Au delà de la nécessité de s'adapter le plus finement possible aux besoins, plusieurs exigences économiques et sociales rendent ces prévisions indispensables avec de multiples enjeux liés aux caractéristiques des systèmes étudiés tels que :

- les coûts élevés des investissements qui doivent être évalués avant d'être adoptés ;
- les délais importants de construction et durée de vie des investissements qui inscrivent ces évaluations dans la durée ;
- l'anticipation des évolutions et des dysfonctionnements qu'il convient de prévenir ;
- l'évolution rapide du niveau de certains indicateurs de mobilité, etc.

Les modèles de prévision de la demande de déplacement, par exemple, représentent alors un enjeu fondamental.

La prévision est aussi fondamentale en médecine et en épidémiologie : l'action la plus efficace est a priori celle qui limite le risque qu'il y'ait des victimes.

Dans d'autres domaines tels que l'agriculture, l'amélioration des méthodes de prévision des productions agricoles est indispensable. L'idée de développer des modèles des plantes simples, capables de simuler la croissance et le rendement potentiel et réel des principales cultures de certaines zones est d'une importance capitale. Les modèles conçus peuvent également servir à simuler les impacts qu'auront les changements climatiques spécifiques comme les variations de la température, de l'humidité, de la concentration en dioxyde de carbone, sur la quantité d'eau disponible pour la productivité des cultures.

Ces études prospectives sont d'un grand intérêt car elles permettent d'anticiper les études sur la configuration des futures idéotypes adaptées à l'environnement et de lutter efficacement à la désertification ainsi qu'à l'assèchement et le rétrécissement des lacs, des fleuves et des rivières. Le principal enjeu de leurs applications est d'aider des zones à risques dues à des contraintes environnementales telles que la sécheresse et le phénomène d'ensablement. Par exemple, le lac Tchad naguère l'un des plus grands du monde a perdu en moins d'une décennie plus du 3 quarts de sa superficie (Figures 1.1, 1.2).

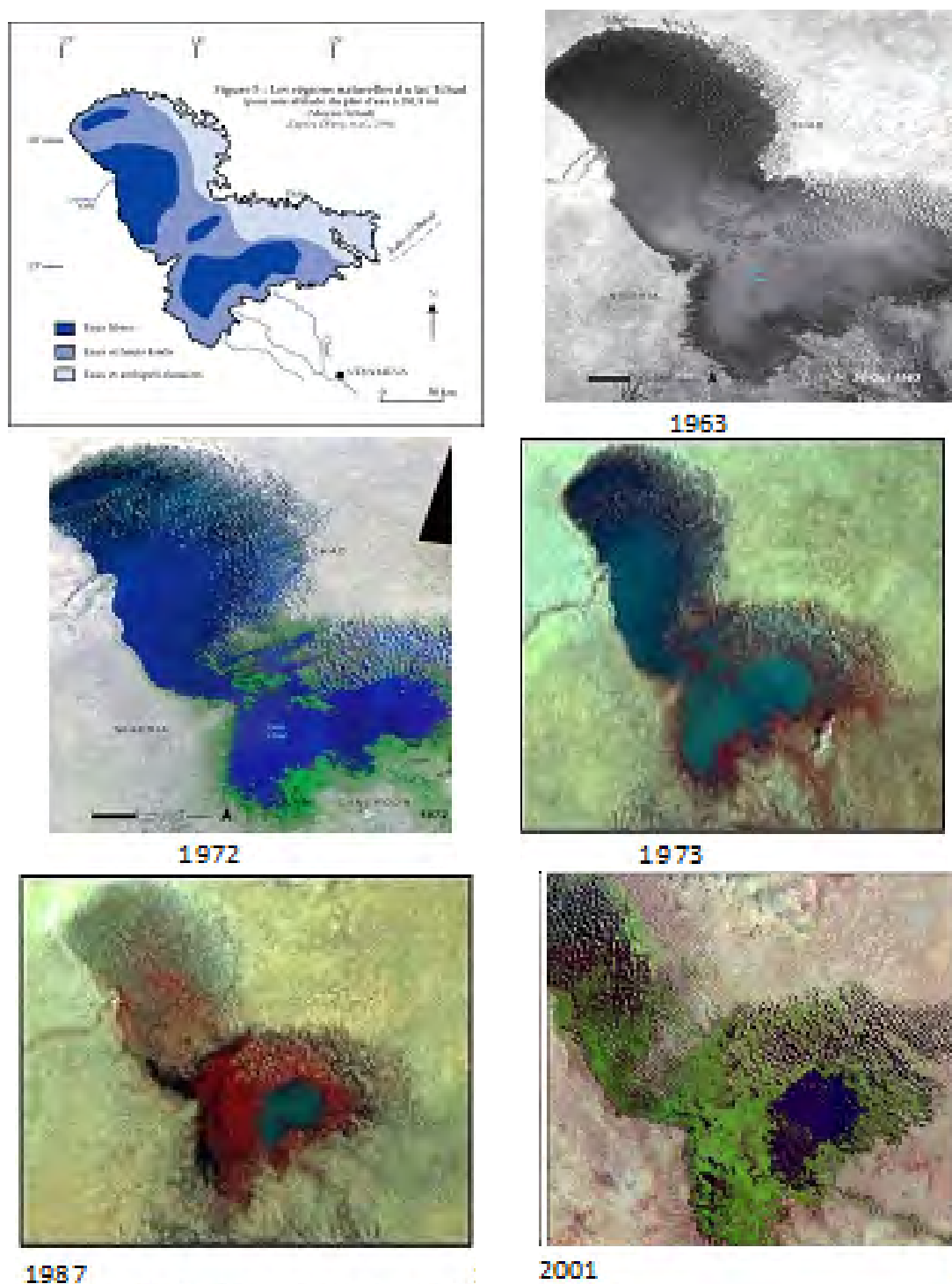


FIGURE 1.1 – Images satellitaires relatives au processus d'ensablement du lac Tchad selon un montage MEC des images courant la période de 44 années allant de 1963 à 2001.

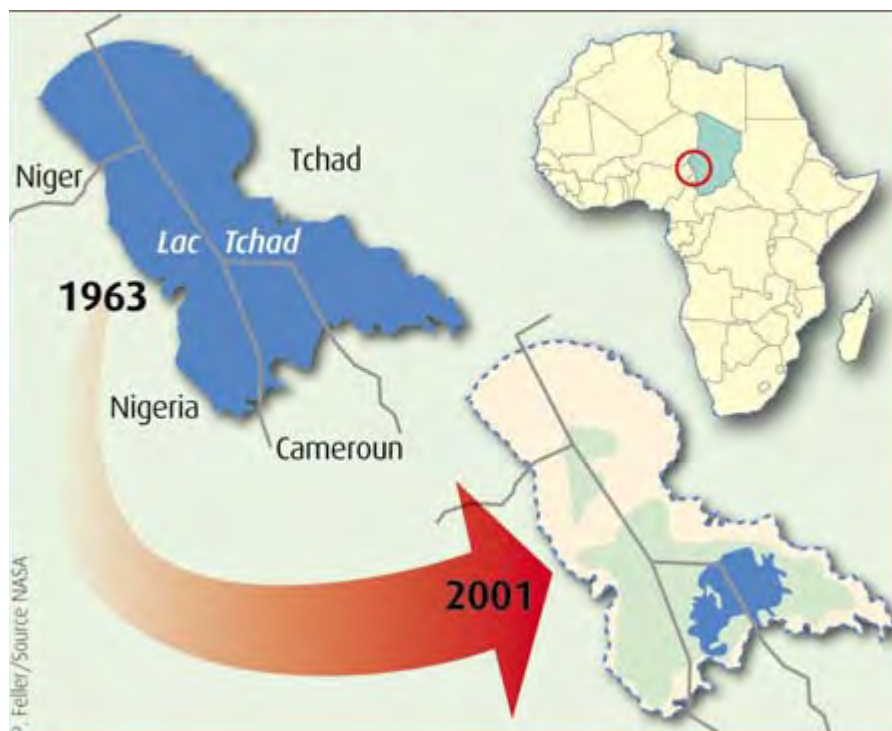


FIGURE 1.2 – *Illustration du phénomène d’assèchement de lac. La disparition du Lac Tchad en est un exemple typique.*

Les enjeux sont considérables pour les milieux touchés :

- les intérêts économiques traditionnels (pêche, conchyliculture) et modernes (activités nautiques, tourisme) sont menacés ;
- la protection du patrimoine écologique (faune, flore, zones humides) devient une problématique causant au passage un effondrement agricole ;
- la préservation du cadre de vie (paysage, coupures d'urbanisation) devient délicate ;
- les bénéfices environnementaux (effet tampon face aux inondations, épuration des eaux) sont menacés.
- l'ensablement des rives est une des causes du rétrécissement des lits des fleuves et peut contribuer à terme à son assèchement.

Un grand nombre d'utilisateurs s'intéressent à divers degrés d'importance, aux prévisions météorologiques et océanographiques. Mais l'assimilation de données ne s'arrête pas là. Elle a aussi pour but de mieux estimer certains paramètres des modèles physiques qui sont à l'heure actuelle encore inconnus ou seulement partiellement identifiés. Cela permettra sans doute d'améliorer considérablement les modèles physiques utilisés actuellement pour ces prévisions.

C'est dans ce contexte que se situe notre travail qui a pour objectif, l'identification de la condition initiale d'un modèle mathématique décrivant l'évolution du fond sédimentaire d'un lac sur une grande échelle de temps.

1.1.2 Motivation

Les problèmes d'assimilation de données sont d'une grande importance pour des raisons pratiques, notamment pour les prévisions météorologiques et climatiques et pour l'identification des modèles océaniques en sciences de l'environnement. Ils conduisent à des calculs très lourds et afin de donner une idée de cette importance, par exemple en matière de prévision

météorologique, le temps de calcul dédié à l'assimilation de données correspond à plus d'une moitié du calcul global en temps.

Des progrès importants ont été déjà réalisés dans le cadre de la reconstruction de l'état initial de systèmes gouvernés par des équations différentielles. Ils résident notamment dans le développement d'outils numériques très performants pouvant supporter un flux important de calculs en temps optimal.

L'approche standard dans ce type de problèmes inverses consiste à minimiser une fonctionnelle coût mesurant l'écart entre la solution prédite et celle observée. A cet effet, il existe dans la littérature un grand nombre de travaux sur les méthodes de résolution numériques de ces problèmes. On peut par exemple se référer à [46] pour un développement explicite de ces méthodes. Toutefois, il convient de signaler que la plupart de ces travaux conduit systématiquement à des problèmes mal posés au sens de Hadamard ([3], [5],[36]) rendant ainsi difficile leurs résolutions. Un recours est systématiquement fait à l'utilisation des techniques de régularisation dont la plus utilisée est celle de Tchikonov ([1],[3],[10]). Mais pour bon nombre de ces techniques des informations "a priori" pour les solutions sont nécessaires et que certains paramètres mathématiques utilisés telle que la constante de Tchikonov n'ont pas d'interprétations physiques bien identifiées. Le challenge, ici, est dans le développement d'autres approches, non standard, permettant de se ramener à des problèmes bien posés, admissibles et ne nécessitant pas un grand nombres d'informations a priori (souvent inaccessibles) pour obtenir des prédictions plus fines.

1.2 Problématique

Considérons un domaine plan Ω borné représentant la surface d'un lac. Le fond sédimentaire du lac est décrit par une fonction $y(t, x)$ représentant la hauteur de sédiment du dessous d'un point $x \in \Omega$ à l'instant t . Soit $\mathbb{X}$ l'espace d'état. On désigne par $y^0 \in \mathbb{X}$ l'état initial. On admet que la dynamique de sédimentation ou d'ensablement est complètement déterminée

par un ensemble d'opérateurs $(S_t)_{t \geq t_0}$:

$$\begin{aligned} S_t &: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X} \\ y^0 &\mapsto S_t(y^0) = y(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

qui à tout état initial y^0 (état de sédimentation à l'instant t_0) associe un état $y(t)$ (état de sédimentation à l'instant t).

On se place, ici, dans le cas où y^0 n'est pas connu, mais que l'on dispose de mesures partielles de l'état de sédimentation entre $[0, T]$, $T > 0$ sur une partie $\omega \subset \Omega$. Soit $y_{obs}(t)$ l'état de sédimentation observé ou mesuré à un instant t sur ω . Disposant de ces données, nous souhaitons déterminer l'état complet de sédimentation à un instant initial $t_0 \in]0, T[$:

$$y_0(x) = y(t_0, x), \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

Cette valeur permettrait, en vertu de (1.1), de donner une estimation prévisionnelle de l'état de sédimentation à un instant $t > 0$ quelconque par la formule

$$y(t) = S_t(y_0). \quad (1.3)$$

Soit, maintenant Θ l'espace vectoriel des observations, ici, le sous espace vectoriel de fonctions à valeurs réelles définies sur le domaine d'observation ω . On note $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ et $\|\cdot\|_{\Theta}$ les normes sur $\mathbb{X}$ et sur Θ . Par ailleurs on désigne par H l'opérateur d'observation de $\mathbb{X}$ vers Θ . La méthode classique consiste à estimer la condition initiale par une approche variationnelle d'assimilation de données. Cette approche consiste d'abord à définir une fonctionnelle coût J :

$$y_0 \in \mathbb{X} \mapsto J(y_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} \|H S_t(y_0) - y_{obs}\|_{\Theta}^2 \quad (1.4)$$

et le problème d'identification est alors : Trouver $\bar{y}_0 \in \mathbb{X}$ tel que

$$J(\bar{y}_0) = \min_{y_0 \in \mathbb{X}} J(y_0). \quad (1.5)$$

Mais le problème (1.5) est bien connu pour être un problème mal posé. On fait alors recours le plus souvent à la méthode de régularisation de Tychonov qui permet de transformer le problème originel en un problème bien posé. Cette méthode nécessite cependant la connaissance

d'informations supplémentaires sur l'état cherché. Par exemple, si une information a priori de la condition initiale est connue, notée b , la méthode de Tychonov consiste à chercher un coefficient $\alpha > 0$ tel que le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$y_0 \mapsto J_\alpha(y_0) = J(y_0) + \frac{\alpha}{2} \|y_0 - b\|_{\mathbb{X}}^2 \quad (1.6)$$

soit bien posé. Sous des hypothèses convenables, on peut établir que le problème de minimisation avec la régularisation de Tychonov admet une unique solution (voir [3], [5]). Il faut ensuite montrer que la suite de solution du problème (1.6) converge vers une solution de (1.5). Mais cette procédure est extrêmement fastidieuse. Même si la fonctionnelle (1.6) a été changée nous ne savons pas ce que représente la solution y_α du problème.

On peut donc dire que l'approche classique pour l'identification de y_0 est de transformer le problème inverse en un problème de minimisation d'une fonctionnelle. L'approche standard de l'assimilation variationnelle de données présente de grandes difficultés quant à l'unicité et à la sensibilité des solutions par rapport aux observations. Elle nécessite une quantité relativement importante d'informations pour mieux approcher la solution cherchée. Le challenge de problèmes inverses réside toujours dans le développement de méthodes ou techniques insensibles aux variations infinitésimales des mesures et qui peuvent produire de solutions fiables avec une quantité relativement modeste de données et d'informations.

D'une part, il est impossible de donner une interprétation physique du coefficient de Tychonov α intervenant dans l'expression (1.6) et aussi en pratique, l'information a priori est en général inconnue.

Il existe dans la littérature des documents traitant des approches non classiques de la reconstruction de la condition initiale de problèmes inverses gouvernés par des EDPs paraboliques. Deux références importantes peuvent être citées : [10] et [48]. Mais dans [10] et [48] seuls les problèmes inverses gouvernés par des EDPs paraboliques linéaires y sont traités.

Dans cette thèse, nous développons une approche basée sur des techniques de contrôlabi-

lité et qui est non classique au sens suivant : nous connaissons les observations (y connu sur $(0, T)$) sur une partie du domaine et nous donnons un résultat de reconstruction exacte de l'état à l'instant T à partir d'un problème de contrôlabilité à zéro d'un problème associé, puis nous nous référons à une démarche itérative pour déduire l'état reconstruit pour le problème non linéaire.

1.3 Organisation du document

Les travaux de ce thèse s'articulent autour de six chapitres.

Dans le chapitre 1, nous donnons un bref aperçu sur les enjeux et les motivations de la thèse. Dans le chapitre 2, nous présentons en détail une formulation mathématique d'un modèle d'ensablement de lac. Nous présenterons également quelques résultats théoriques du problème considéré et nous élaborons une formulation du problème inverse est associé.

Le chapitre 3 est consacré à une présentation de notions de contrôlabilité pour des problèmes paraboliques linéaires appliqués à l'équation de la chaleur et aux équations de Navier Stokes. Nous passons également en revue différents travaux qui ont été menés sur la contrôlabilité des problèmes paraboliques au cours des dernières années.

Au chapitre 4, nous établissons un résultat fondamental pour l'étude de la contrôlabilité de problème parabolique non linéaire avec la condition de Neumann non homogène : l'inégalité de Carleman. Cet outil principal nous conduit à l'élaboration de l'inégalité d'observabilité qui caractérisera la contrôlabilité à zéro des problèmes abordés au chapitre 5.

Au chapitre 5, nous nous consacrons à la reconstruction de la solution du problème inverse à l'instant T ; $y(T)$ à partir des mesures sur une partie du domaine Ω . Ensuite nous passons également à une formulation du problème de contrôle afin de donner une caractérisation du contrôle considéré. Enfin, nous proposons un schéma algorithmique pour l'identification de $y(T)$ qui est la limite d'une suite des états initiaux pour le problème originel.

Notre thèse se termine au chapitre 6 par une conclusion générale résumant tous les acquis de

notre travail et des perspectives ouvrant de nouveaux axes de recherches futures.

Ce travail a fait l'objet de quatres (4) publications scientifiques dont trois (3) sont déjà parus et une (1) en cours de publication (voir [2], [14], [15], [16]).

FORMULATION MATHÉMATIQUE D'UN MODÈLE D'ENSABLEMENT D'UN LAC

Sommaire

2.1	Description d'un modèle d'ensablement de lacs	14
2.2	Cadre fonctionnel et résultats théoriques	16
2.3	Formulation inverse	25

Ce chapitre donne une formulation d'un modèle de sédimentation de lacs à plus ou moins long terme. Des résultats sur le caractère bien posé au sens de Hadamard de la formulation faible de ce modèle et quelques questions sur l'existence d'une solution maximale admissible sont présentés. L'existence de la solution à plus ou moins long terme résulte d'une condition d'entropie qui doit être satisfaite. Cette condition exprime que le processus d'extinction n'a lieu que lorsque le taux de sédiments déposés en tout temps reste supérieur à un taux d'érosion. Ainsi, une solution du modèle mathématique est dite physiquement admissible si elle satisfait la condition d'entropie.

Enfin, une formulation inverse conformément à la problématique de cette thèse est donnée à la fin de ce chapitre.

2.1 Description d'un modèle d'ensablement de lacs

Il est bien connu, voir par exemple [4], que l'ensablement des lacs ou des courts d'eau résulte d'un phénomène de sédimentation progressive du lit. Cette modification progressive du fond est en fait une conséquence de plusieurs processus (érosion, comblement et autres).

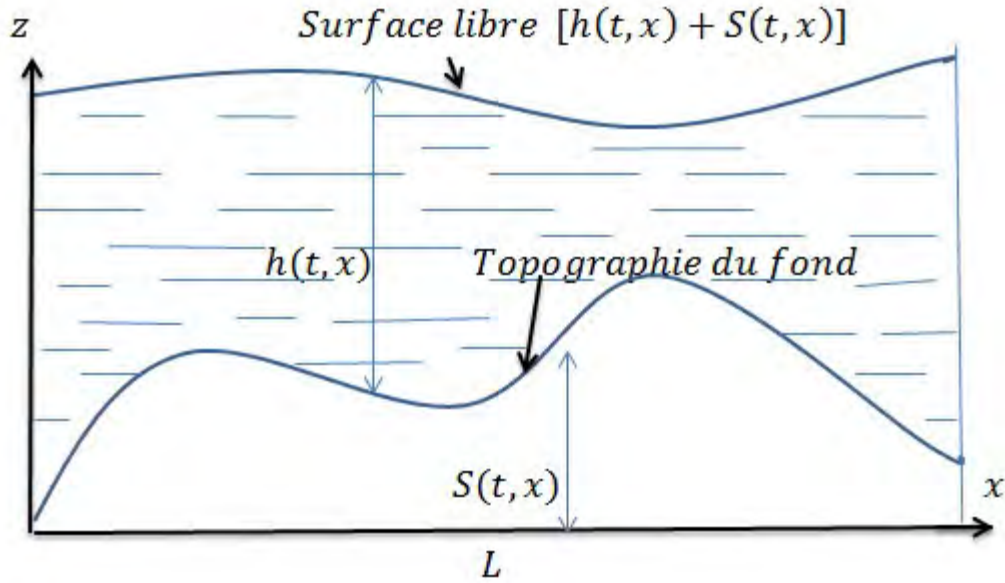


FIGURE 2.1 – Une schématisation de l'évolution du fond sédimentaire d'un fleuve ou d'un lac.

Celle ci est définie, ici, par la hauteur $S(t, x)$ des sédiments déposés au fond du lac à l'instant t au point x .

Pour désigner l'évolution du fond sédimentaire, on considère Ω un domaine plan représentant la surface libre d'un lac, puis on désigne par $y(t, x) = S(t, x)$ la hauteur du fond sédimentaire.



FIGURE 2.2 – *Un exemple d'évolution de fond sédimentaire.*

Les équations décrivant cette évolution décrites dans [18] sont alors :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y + F(y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.1)$$

$$(\mathcal{A} \nabla y) \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (2.2)$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.3)$$

$$\partial_t y + E \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.4)$$

Le terme $\nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y$ décrit le processus de convection diffusion de sédiments ; $\mathcal{A}$ étant ici un opérateur de convection diffusion. Les effets de type réaction, comblement et autres sont décrit par le terme $F(y)$.

L'inéquation $\partial_t y + E \geq 0$ apparait comme une contrainte de type entropie où le terme E désigne le taux maximal d'érosion (voir [4]).

La description des effets non linéaires, à travers l'expression $F(y)$, est fondamentale pour l'évolution rapide ou non du fond sédimentaire. Dans [17], une étude avait permis d'élaborer cette expression sous la forme :

$$F(y) = \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|^{p_0} + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|^{p_0} \right) \left(\lambda \frac{\partial y}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial b}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad (2.5)$$

où p_0 est un paramètre jouant sur la raideur d'une pente du relief de fond, λ est un paramètre représentant le coefficient d'advection des sédiments dans la direction de la variable x et α est un paramètre représentant le coefficient d'advection des sédiments dans la direction de la

variable y .

Désignons par $\Lambda \in \mathbb{R}^m (m > 1)$ le vecteur paramètre. L'opérateur $\mathcal{A}$ et la fonctionnelle F sont naturellement dépendants de Λ de sorte que le problème consiste à chercher le couple paramètre - état $(\Lambda, y) \in (L^\infty(\Omega))^m \times C^1(0, T; H^1(\Omega))$ telle que l'état y associé au vecteur paramètre Λ soit solution du problème (2.1)-(2.4).

2.2 Cadre fonctionnel et résultats théoriques

Le vecteur paramètre Λ étant supposé connu, le problème direct, consiste ici, à chercher $y(t)$ solution du système (2.1)-(2.4). Un problème inverse peut consister, ici, à chercher le vecteur paramètre Λ si on connaît des mesures partielles de l'état du système $y(t)$. Mais, nous pouvons aussi, comme on va le voir dans la suite de cette thèse, formuler le problème de reconstruction d'un état initial si on dispose de quelques mesures sur l'état du système sur une période donnée.

2.2.1 Formulation faible du problème direct

Nous supposons que le vecteur paramètre Λ est bien connu ainsi que la donnée de bord g . Le problème direct, consiste à chercher $y(t)$ solution du système (2.1)-(2.3). En multipliant l'équation (2.1) par une fonction test ϕ et en intégrant par partie sur Ω , il vient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} \phi - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y) \phi + \int_{\Omega} F(y) \phi = 0.$$

Moyennant des conditions de régularité appropriées sur y , il vient de la formule de Green que :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} \phi + \int_{\Omega} (\mathcal{A} \nabla y) \nabla \phi - \int_{\Gamma} g \cdot \phi + \int_{\Omega} F(y) \cdot \phi = 0$$

Remarquant que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} \phi = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} y \cdot \phi, \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),$$

une formulation faible du problème (2.1)-(2.3) est donc : Trouver $y \in C^1(0, T; H^1(\Omega))$ tel que pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$ on ait

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} y \cdot \phi + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y \cdot \nabla \phi - \int_{\Gamma} g \cdot \phi + \int_{\Omega} F(y) \cdot \phi = 0 \quad (2.6)$$

et

$$y(0) = y_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.7)$$

2.2.2 Existence et unicité de la solution du problème faible

Dans cette section on suppose, a priori, que $\Lambda \in (L^\infty(\Omega))^m$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ étant un espace de Hilbert séparable, il existe une famille totale dénombrable (ϕ_i) , $i \in \mathbb{N}^*$ dans $H^1(\Omega)$, telle que

$$\int_{\Omega} \phi_i \phi_j = \delta_{ij} \quad (2.8)$$

On a :

Proposition 2.1. *Soit $y_0 \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses suivantes :*

- *les fonctions F et g sont de classe C^1 par rapport à chacun de leurs arguments,*
- *$F(u) \cdot u \geq 0 \quad \forall u$ et $F(0) = 0$,*
- *la matrice $\mathcal{A}$ est définie positive,*

il existe une unique suite $(y^k(t))_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ telle que

$$y^k(t) = \sum_{j=1}^k y_{kj}(t) \phi_j \quad (2.9)$$

et pour $i = 1, \dots, k$ on ait :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} y^k(t) \cdot \phi_i + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y^k(t) \cdot \nabla \phi_i - \int_{\Gamma} g \cdot \phi_i + \int_{\Omega} F(y^k(t)) \cdot \phi_i = 0 \quad (2.10)$$

et

$$y^k(0) = y_0 \quad (2.11)$$

2.2 Cadre fonctionnel et résultats théoriques

Démonstration. L'existence d'une solution de (2.10)-(2.11) sous la forme

$$y^k(t) = \sum_{j=1}^k y_{kj}(t) \phi_j$$

se ramène à la résolution du système :

$$\frac{dy_{ki}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^k y_{kj}(t) a(\phi_i, \phi_j) - \int_{\partial\Omega} g \phi_i + \int_{\Omega} F\left(\sum_{j=1}^k y_{kj} \phi_j\right) \phi_i = 0 \quad (2.12)$$

$$y_{ki}(0) = \int_{\Omega} y_0 \phi_i. \quad (2.13)$$

où on a posé

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j. \quad (2.14)$$

F et g étant de classe C^1 par rapport à chacun de leurs arguments, l'application qui à $y^k = (y_{ki})$ associe le vecteur dont la i -ème composante est

$$-\sum_{j=1}^k y_{kj}(t) a(\phi_i, \phi_j) + \int_{\Gamma} g \phi_j - \int_{\Omega} F\left(\sum_{j=1}^k y_{kj} \phi_j\right) \phi_i, \quad (2.15)$$

est aussi de classe C^1 et donc localement lipschitzienne. Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, le système (2.12) admet une unique solution $(y_{kj}(t))_j$. Il existe donc une unique suite (y^k) de la forme (2.9) satisfaisant le système (2.10)-(2.11). $\square$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2. [18] Soit $y_0 \in L^2(\Omega)$. Sous les hypothèses de la proposition (2.1), la suite $(y^k)_k$ solution de (2.10)-(2.11), satisfait

$$\|y^k(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\|y_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|g(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds + \int_0^t \|y^k(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right). \quad (2.16)$$

pour une certaine constante C positive.

Démonstration. En considérant (y^k) la suite définie par (2.9) et solution de (2.9)-(2.10), on établit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (y^k(t))^2 + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y^k(t) \nabla y^k(t) + \int_{\Omega} F(y^k(t)) \cdot y^k(t) = \int_{\Gamma} g \cdot y^k(t). \quad (2.17)$$

2.2 Cadre fonctionnel et résultats théoriques

Grâce à la propriété d'ellipticité de $\mathcal{A}$ et à celle de la croissance de F on peut déduire l'inégalité suivante

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} y^k(t)^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla y^k|^2 \leq \int_{\Gamma} g y^k(t) \quad (2.18)$$

Il vient que

$$\int_{\Gamma} g y^k(t) \leq C \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 + C \|y^k(t)\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (2.19)$$

En utilisant successivement (2.18) et (2.19), puis le théorème des traces

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla y^k(t)\|^2 \leq C \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 + C \|y^k(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (2.20)$$

En intégrant sur $(0, t)$, il en découle

$$\frac{1}{2} \|y^k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \|\nabla y^k(s)\|^2 ds \leq \|y^k(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|g(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds + C \int_0^t \|y^k(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \quad (2.21)$$

Or $y^k(0) = y_0$, donc on en déduit finalement qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|y^k(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\|y_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|g(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds + \int_0^t \|y^k(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \right) \text{ pour } t \leq T. \quad (2.22)$$

□

Le résultat suivant s'ensuit.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses de la proposition (2.1), pour tout $y_0 \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$, il existe une unique fonction $y \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ solution du problème (2.6)-(2.7).*

Démonstration. Etape 1 : Existence D'après la proposition (2.2), il existe une suite $(y^k)_k$ vérifiant l'inégalité (2.16). En vertu du lemme de Gromwal on en déduit que :

$$\|y^k(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \quad (2.23)$$

La suite $(y^k)_k$ est donc bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Il existe alors une sous suite encore notée (y^k) telle que

$$y^k \rightharpoonup y \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

2.2 Cadre fonctionnel et résultats théoriques

Et comme l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, alors

$$y^k \longrightarrow y \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$. On peut écrire

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k u_i \phi_i \right), \quad (2.24)$$

en considérant $(\phi_i)_i$ une famille totale de $H^1(\Omega)$. Et comme $y^k \rightharpoonup y$ et

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k u_i \phi_i \right)$$

alors

$$\int_{\Omega} y^k(t) \left(\sum_{i=1}^k u_i \phi_i \right) \longrightarrow \int_{\Omega} y u \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty$$

Passant à la limite quand $k \longrightarrow \infty$ dans (2.10), on a alors

$$\int_{\Omega} \frac{dy}{dt} \phi + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y \cdot \nabla \phi + \int_{\Omega} F(y) \phi = \int_{\partial\Omega} g \phi \quad (2.25)$$

Montrons à présent que la solution y est telle que $y(0) = y_0$.

Soit $\psi \in C^1((0, T); \mathcal{D}(\Omega))$ telle que $\psi(T) = 0$. Comme $(\phi_i)_i$ est totale dans $H^1(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ alors :

$$\psi(t) = \lim_k \sum_{i=1}^k \psi(t) \phi_i \quad \text{en norme sur} \quad H^1(\Omega)$$

Posons

$$\psi^k(t) = \sum_{i=1}^k \psi(t) \phi_i.$$

Il s'ensuit de (2.10) que :

$$\int_{\Omega} \frac{dy^k}{dt} \psi^k + a(y^k, \psi^k) + \int_{\Omega} F(y^k) \psi^k = \int_{\partial\Omega} g \psi^k, j = 1, \dots, k$$

En intégrant cette équation par partie sur $[0, T]$ et tenant compte du fait que $\psi(T) = 0$, on établit que :

$$-\int_{\Omega} y^k(0) \psi^k(0) - \int_0^T \int_{\Omega} y^k \frac{d}{dt} \psi^k + \int_0^T a(y^k, \psi^k) + \int_0^T \int_{\Omega} F(y^k) \psi^k = \int_0^T \int_{\partial\Omega} g \psi^k$$

Remarquons que

$$\int_{\Omega} y^k(0)\psi(0) = \sum_{i=1}^k \psi(0) \int_{\Omega} y^k(0)\phi_i$$

On a donc

$$\int_{\Omega} y^k(0)\psi(0) = \sum_{i=1}^k \psi(0) \int_{\Omega} y^k(0)\phi_i = \int_{\Omega} y_0\psi^k(0)$$

Par suite :

$$-\int_{\Omega} y^k(0)\psi^k(0) - \int_0^T \int_{\Omega} y^k \frac{d}{dt} \psi^k + \int_0^T a(y^k, \psi^k) + \int_0^T \int_{\Omega} F(y^k)\psi^k = \int_0^T \int_{\partial\Omega} g\psi^k$$

En passant à la limite il vient

$$-\int_{\Omega} y_0\psi(0) - \int_0^T \int_{\Omega} y \frac{d}{dt} \psi + \int_0^T a(y, \psi) + \int_0^T \int_{\Omega} F(y)\psi = \int_0^T \int_{\partial\Omega} g\psi \quad (2.26)$$

D'autre part de l'équation (2.25) en intégrant sur $[0, T]$ avec $\psi(T) = 0$ on obtient :

$$-\int_{\Omega} y(0)\psi(0) - \int_0^T \int_{\Omega} y \frac{d}{dt} \psi + \int_0^T a(y, \psi) + \int_0^T \int_{\Omega} F(y)\psi = \int_0^T \int_{\partial\Omega} g\psi \quad (2.27)$$

Comparant les équations (2.26) et (2.27), on déduit que

$$\int_{\Omega} y(0)\psi(0) = \int_{\Omega} y_0\psi(0) \quad \forall \quad \psi \in C^1(0, T; \mathcal{D}(\Omega)) \quad \text{et} \quad \psi(T) = 0 \quad (2.28)$$

Il suffit alors de choisir $\psi(t) = (T - t)\eta$ avec $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui satisfait bien $\psi(T) = 0$. Ainsi (2.28) devient

$$\int_{\Omega} y(0)\eta = \int_{\Omega} y_0\eta \quad \forall \quad \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On en déduit alors $y(0) = y_0$ sur Ω .

Etape 2 : Unicité On suppose éventuellement qu'il existe deux solutions y^1 et y^2 pour la même condition initiale $y_0 \in H^1(\Omega)$.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y^i}{\partial t} u + a(y^i, u) = \int_{\partial\Omega} g \cdot u - \int_{\Omega} F(y^i) \cdot u, \quad i = 1, 2$$

En soustrayant membre à membre les équations vectorielles régies par les deux solutions y^1 et y^2 et prenant $u = y^1 - y^2$, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(y^1 - y^2)}{\partial t} (y^1 - y^2) + a(y^1(t) - y^2(t), y^1(t) - y^2(t)) + \int_{\Omega} (F(y^1(t) - y^2(t))(y^1(t) - y^2(t)) = 0$$

Grâce à la propriété d'ellipticité de $\mathcal{A}$ et à celle de la croissance de F , il s'en suit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (y^1(t) - y^2(t))^2 + \alpha \|y^1(t) - y^2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$$

Posant $E(t) = \|y^1(t) - y^2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, il vient : $\frac{dE(t)}{dt} \leq 0$. $E(t)$ est donc une fonction décroissante. D'où $\forall t > 0, E(t) \leq E(0) = 0$. Ce qui se traduit par $\|y^1(t) - y^2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$, c'est à dire $y^1(t) = y^2(t)$. La solution du problème est donc unique. $\square$

2.2.3 Solutions admissibles

Intéressons nous aux solutions qui vérifient la condition d'entropie ($\partial_t y + E \geq 0$). Nous convenons d'appeler solution admissible tout couple paramètre-état (Λ, y) tel que (2.6),(2.7) et la condition d'entropie ($\partial_t y + E \geq 0$) soient satisfaites. Par la suite nous posons

$$\mathcal{E} = \{(\Lambda, y) \in (L^\infty(\Omega))^m \times C^1((0, T); H^1(\Omega)), \quad (\Lambda, y) \text{ solution admissible}\} \quad (2.29)$$

et nous introduisons la notion de solution maximale.

Définition 2.1. *Un couple (Λ_{max}, y_{max}) est dit maximal si pour tout $(\Lambda, y) \in \mathcal{E}$,*

$$\|\Lambda\|_{L^\infty(\Omega)^m} \leq \|\Lambda_{max}\|_{L^\infty(\Omega)^m}. \quad (2.30)$$

Sous des hypothèses raisonnables sur le choix de Λ considéré momentanément comme un paramètre, on a montré que le problème (2.6)-(2.7) est bien posé au sens de Hadamard dans un cadre fonctionnel approprié. La difficulté technique réside dans le fait que le paramètre Λ est inconnu, ce qui complique notablement l'obtention d'estimation a priori. Dès lors, **deux types de problèmes peuvent être considérés :**

Problème I : Existe-t-il des solutions admissibles ?

On peut établir aisément que l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide.

Dans le cas où E est constant, pris égal à E_0 par exemple (cf. Antonstsev et al.[4]), la question

se ramène à trouver une fonction qui à $(x_1, x_2) \mapsto \Lambda(x_1, x_2)$, a priori dans un espace de type fonctions à variation bornée $BV(\Omega)$, solution du problème suivant :

$$\operatorname{div}(A\nabla y) - F(y) + E_0 \geq 0, \quad \text{au sens des mesures sur } \Omega.$$

Ce problème a donné lieu à diverses études fournissant des conditions suffisantes utiles à la notion d'identifiabilité du vecteur paramètre Λ ; citons en particulier Perez [49] et Richter [50]. On sait à la lumière de ces travaux que l'on sera conduit à faire des hypothèses supplémentaires sur l'état initial via ∇y_0 .

Problème II : Sous quelles conditions nécessaires sur $\Lambda \in (L^\infty(\Omega))^m$, un couple paramètre-état (Λ, y) est-il solution admissible ?

Nous nous ramènon à la proposition suivante :

Proposition 2.3. [18] *Pour tout couple paramètre- état (Λ, y) solution la réalisation de la contrainte $\frac{\partial y}{\partial t} + E \geq 0$ est assurée sous les conditions nécessaires suivantes :*

$$E \leq F(y) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{2.31}$$

$$g \leq 0 \quad \text{dans } \partial\Omega \times (0, T) \tag{2.32}$$

$$A\nabla y \cdot \nabla \left(\frac{\partial y}{\partial t} + E \right)^- \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{2.33}$$

avec

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} + E \right)^- = \max(0, -\frac{\partial y}{\partial t} - E)$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est admise. □

Remarque 2.1. *Sous les conditions de la proposition précédente, le taux de sédiments déposés $\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$ en tout temps reste supérieur au taux d'érosion $(-E(t))$. Le phénomène de sédimentation restera dominant dans le temps et dans l'espace jusqu'au comblement total du système c'est à dire à l'extinction du lac. Par conséquent la fonction $y(t)$ est croissante et il*

existe un temps $T > 0$ tel que

$$\forall t > T, \|y(t) - Z(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

avec $Z(t)$ le niveau piézométrique (profondeur par rapport à la surface du sol entre la zone saturé et la zone non saturé) du lac.

D'où le résultat suivant

Proposition 2.4. [17](Propriétés d'extinction) *Sous les conditions de la proposition précédente, la solution entropique tend sur $L^2(\Omega)$ vers la fonction $Z(t)$, quand t tend vers l'infini :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - Z(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

avec pour donnée initiale une fonction $y(0)$ à support compact.

2.2.4 Cas où le processus d'érosion est négligeable

On se limite aux seuls effets de sédimentation sous l'action gravitaire. En conséquence, le processus se ramène à un phénomène d'érosion :

$$E = 0.$$

ce qui induit désormais la contrainte

$$\frac{\partial y}{\partial t} \geq 0 \quad p.p. \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (2.34)$$

On définit alors une notion relativement forte de solution.

Définition 2.2. *Pour toute donnée initiale $y_0 \in H^1(\Omega)$, une solution forte du problème est un couple de paramètre-état $(\Lambda, y) \in (L^\infty(\Omega))^m \times L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ vérifiant $\forall u \in H^1(\Omega)$:*

$$y(0, \cdot) = y_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t} \geq 0 \quad p.p. \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (2.35)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t} u = \int_{\Omega} (\text{div}(\mathcal{A} \nabla y(t) - F(y(t))) u \quad p.p. \quad \text{en} \quad t \in (0, T). \quad (2.36)$$

L'énoncé de cette définition appelle les remarques suivantes :

Remarque 2.2. *Le choix de $\Lambda = 1$ conduit à l'équation classique de convection diffusion*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y - (|\frac{\partial y}{\partial x_1}|^p + |\frac{\partial y}{\partial x_2}|^p) \cdot (\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2})$$

avec la contrainte $\frac{\partial y}{\partial t} \geq 0$ p.p. dans $\Omega \times (0, T)$; on aurait alors, p.p. en t et pour tout $u \in \mathcal{D}^+(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \Delta y(t) \cdot u \geq \int_{\Omega} (|\frac{\partial y}{\partial x_1}|^p + |\frac{\partial y}{\partial x_2}|^p) \cdot (\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}) u.$$

En faisant tendre t essentiellement vers 0^+ , on en déduit que nécessairement Δy_0 est positif dans $H^{-1}(\Omega)$ et donc, définit une mesure positive, ce qui est un cas exceptionnel.

Un point délicat concerne la propriété de non- négativité de $\frac{\partial y}{\partial t}$ p.p. dans $\Omega \times (0, T)$ imposée dans la définition; en clair, cette condition n'est-elle pas redondante et ne résulterait-elle pas de la nullité de Λ sur $\frac{\partial y}{\partial t} < 0$ et de l'équation de continuité? Comme $\frac{\partial y}{\partial t}$ n'est pas une fonction test, le résultat n'est pas trivial en formulation continue.

Remarque 2.3. *Le problème énoncé par la définition 2.2 est mal posé. En effet, il admet toujours la solution triviale $(0, y_0)$; cependant, on ne peut pas exclure cette solution de la définition car elle constitue dans certains cas la seule solution. Il suffit pour cela de supposer que l'on a $y_0 > 0$ dans un ouvert $\Omega_{\delta} = \{(x_1, x_2) \in \Omega, 0 < d((x_1, x_2), \partial\Omega) < \delta\}$ pour un $\delta > 0$. Il y'a là, en accord avec un effet-barrière sur le bord. En outre, on peut en général construire une infinité de solutions.*

2.3 Formulation inverse

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la prédiction à long terme du processus d'ensablement d'un lac dont la surface horizontale est un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. L'ensablement, ici, est vu sous le prisme de la dynamique de sédimentation du lit de lac. Les phénomènes de sédimentation ou de comblement étant bien étudiés, nous pouvons admettre que l'opérateur

$\mathcal{A}$ et la fonction F définis dans le modèle d'état (2.1)-(2.3) sont bien connus. Il en aït de même pour la donnée du bord g .

Ainsi, dans le modèle direct, si l'état initiale $y_0 = y(t_0)$ est bien identifié sur tout le domaine, alors il sera possible de prédire l'évolution future de l'état de sédimentation : $y(t) \quad \forall \quad t \geq T$ où T est le temps présent. Mais, en pratique, l'état $y(t_0)$ n'est pas totalement identifié sur tout le domaine. L'enjeux de la recherche actuelle, au delà de tout modèle prédictif, est la reconstitution complète (dans tout le domaine Ω) de l'état de sédimentation initiale $y(t_0)$. Grâce à certains instruments de mesure comme les satellites on peut disposer partiellement des données sur l'état de sédimentation sur une partie du domaine.

Dans cette thèse, nous formulons les hypothèses suivantes :

(H1) : L'état de sédimentation $y(t)$ est observé sur une partie $\omega \subset \Omega$, pour tout $t \in [T_0, T]$.

(H2) : ω est un domaine connexe de Ω de mesure non nulle.

Notons que l'hypothèse (H2) peut sembler irréaliste, car en pratique, les mesures au sol se font parfois sur des points discrets. Cependant, avec des images satellitaires on peut disposer de mesures sur des étendus bien fixées. En cela, (H1) et (H2) sont tout à fait réalistes, de sorte que, cette thèse s'intéresse formellement au problème suivant :

Problème 1. *Etant donnés*

— $\omega \subset \Omega$,

— $y_{obs}(t) : \omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall \quad t \in [T_0, T]$,

chercher $y(T)$ tel que l'on aït

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y + F(y) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (2.37)$$

$$(\mathcal{A} \nabla y) \cdot n = g \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T) \quad (2.38)$$

$$y \chi_\omega = y_{obs} \quad \text{dans} \quad \omega \times (0, T) \quad (2.39)$$

Il s'agit là d'un problème de reconstruction complète d'un état à l'instant T connaissant son statut sur une partie du domaine dans le passé ($t \in [T_0, T]$).

Compte tenu de la présence d'un terme non linéaire dans l'équation d'état (2.37), la problématique de cette thèse réside alors dans la détermination d'un processus, non standard, de reconstruction de l'état initial. L'approche non standard se base en fait sur une transformation du problème inverse en un problème de contrôlabilité exacte à zéro qui a été déjà utilisée avec plus ou moins de succès sur certains problèmes d'identification de condition initiale des Equations aux Dérivées Partielles linéaires (voir par exemple [10] [46]).

BREF APERÇU SUR LA CONTRÔLABILITÉ EXACTE À ZÉRO DE QUELQUES SYSTÈMES PARABOLIQUES

Sommaire

3.1	Notions de contrôlabilité	29
3.2	Inégalité de Carleman pour des équations de la chaleur	31
3.3	Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur	34
3.4	Contrôlabilité à zéro interne d'un système de Navier- Stokes	38
3.5	Synthèse de quelques résultats existants	42
3.6	Conclusion	45

De nombreux phénomènes physiques, chimiques ou biologiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires dépendant de variables d'espaces et de temps. La contrôlabilité représente une des possibilités d'agir au cours du temps sur des systèmes de façon à les amener à un état désiré.

La théorie de la contrôlabilité, introduite dans les années 60 à partir de la théorie du contrôle optimal, a connu un essor important dans les années 80 sous l'impulsion notamment des travaux de Jacques-Louis Lions et demeure à l'heure actuelle une discipline très active des ma-

thématiques appliquées. Le contrôle des systèmes d'équations aux dérivées partielles constitue un vaste champ mathématique toujours en perpétuel évolution. Même si de grandes avancées ont été effectuées ces dernières années, de nombreuses questions restent encore ouvertes.

Les enjeux de la contrôlabilité résident dans l'obtention de systèmes fiables, économiques et rapides. Pour un système biologique, la contrôlabilité peut permettre de réduire la douleur et de prolonger la vie. Par exemple, lorsqu'on étudie un régulateur de pression sanguine destiné à la maintenir à un niveau constant et convenable.

Dans les années 90, des méthodes robustes d'approximation ont été proposées pour l'étude de la contrôlabilité de l'équation de la chaleur et pour les système de Navier Stokes, basée sur des approches variationnelles et des estimations de type Carleman [31, 39].

Nous faisons dans ce chapitre une brève revue de quelques notions de contrôlabilité.

3.1 Notions de contrôlabilité

Un problème générique de la contrôlabilité est le suivant : étant donnés deux éléments y_0 et y_1 de l'espace d'états, peut-on trouver un temps T et un contrôle admissible v tels que la trajectoire $t \rightarrow y_v(t)$ associée à ce contrôle joigne $y_0 = y_v(0)$ à $y_1 = y_v(T)$?

On peut poser le même problème avec un temps T fixé. Autrement dit, le problème pour lequel si T est fixé on cherche v .

Cette section, aborde de manière plus générale des notions de contrôlabilité exacte, approchée, à zéro et aux trajectoires pour des systèmes paraboliques et explique les relations existantes entre ces différents concepts.

De manière générale, on peut formuler un système de contrôle d'une équation différentielle comme suit :

$$y'(t) = f(t, y(t); v(t)) \quad t > 0 \tag{3.1}$$

$$y(0) = y^0 \tag{3.2}$$

où $t \longrightarrow y(t) \in \mathbb{X}$ décrit la trajectoire (évolution temporelle) de l'état du système et $t \longrightarrow v(t) \in \mathcal{U}$ est la fonction contrôle. Les espaces $\mathbb{X}$ et $\mathcal{U}$ sont supposés être des espaces de Banach appelés respectivement espace d'états et espace des contrôles admissibles. Le problème de la contrôlabilité consiste, pour un état initial $y^0 \in \mathbb{X}$ donné et un temps final T , à l'emmener vers un état cible à l'instant T par l'action d'un contrôle v .

Dans la suite, on notera y_v l'état du système contrôlé par l'action de la fonction v .

On rappelle ci-après différentes notions de contrôlabilité.

Définition 3.1 (Contrôlabilité exacte). *On dit que le système est exactement contrôlable au temps T si, pour tous états y^0 et y^T dans $\mathbb{X}$, il existe un contrôle $v \in \mathcal{U}$ tel que $y_v(0) = y^0$ et $y_v(T) = y^T$.*

Définition 3.2 (Contrôlabilité approchée). *On dit que le système est approximativement contrôlable au temps T si, pour tous états y^0 et y^T dans $\mathbb{X}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un contrôle $v \in \mathcal{U}$ tel que $y_v(0) = y^0$ et $\|y^T - y_v(T)\|_X \leq \varepsilon$.*

Définition 3.3 (Contrôlabilité à zéro). *On dit que le système est contrôlable à zéro au temps T si, pour tout état initial y^0 dans $\mathbb{X}$, il existe un contrôle $v \in \mathcal{U}$ tel que $y_v(0) = y^0$ et $y_v(T) = 0$.*

Remarque 3.1. *Il arrive parfois de raisonner non pas sur les états finaux du système, mais sur les trajectoires.*

Nous allons modifier notre problème pour dire que nous voulons non pas atteindre n'importe quel état final mais coïncider avec une trajectoire donnée à l'instant T . On dit alors qu'il s'agit de la contrôlabilité aux trajectoires. Dans ce cas considérons une trajectoire libre de notre système $(\bar{y}, \bar{u})$. Supposons notre état initial $y^0 \in \mathbb{X}$ différent de $\bar{y}^0$. Alors nous voulons trouver un contrôle v tel que la solution du système vérifie $y_v(T) = \bar{y}(T)$. Autrement dit pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\|y^0 - \bar{y}^0\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon$ il existe un contrôle v satisfaisant $y_v(T) = \bar{y}(T)$.

Les différentes notions de contrôlabilité admettent chacune une formulation duale équivalente. Précisément, l'étude de la contrôlabilité d'un système se ramène à celle des propriétés

de son adjoint. La contrôlabilité à zéro peut se caractériser par une inégalité d'observabilité et la contrôlabilité approchée par une propriété de continuation unique (voir : S. Dolecki et D. Russell dans [19]).

Une question légitime peut être posée : quelles relations existe-t-il entre ces différents concepts de contrôlabilité ?

Il est évident que la contrôlabilité exacte d'un système implique les contrôlabilités approchée, à zéro et aux trajectoires de celui-ci.

Par contre, il n'y a cependant aucune relation entre la contrôlabilité approchée et la contrôlabilité aux trajectoires.

Si un système linéaire vérifiant l'hypothèse d'unicité rétrograde (ou propriété de continuation unique) est contrôlable à zéro, alors il est approximativement contrôlable. Lorsqu'un système est linéaire, les notions de contrôlabilité aux trajectoires et à zéro sont équivalentes.

Remarque 3.2. *Pour un système linéaire, contrôler aux trajectoires le système revient à contrôler à zéro le système vérifié par $w := y - \bar{y}$.*

La remarque que nous venons de faire est valable pour les systèmes linéaires, mais ne l'est plus pour les systèmes non linéaires.

3.2 Inégalité de Carleman pour des équations de la chaleur

Dans le but de prouver une inégalité d'observabilité appropriée nous allons donner une inégalité de Carleman (voir [28],[29],[30] et [31]) utile pour l'obtention d'un résultat bien connu de contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec terme source.

Pour $s, \lambda > 0$, $p \in \mathbb{R}$ et $y \in L^2(Q)$, nous définissons les fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
I_1(p, y) &:= s^p \lambda^{p+1} \int \int_Q \exp(-2s\alpha) \xi^p y^2 dt dx + s^{p-2} \lambda^{p-1} \int \int_Q \exp(-2s\alpha) \xi^{p-2} |\nabla y|^2 dt dx \\
I_2(p, y) &:= s^p \lambda^{p+1} \int \int_Q \exp(-2s\alpha) \xi^p y^2 dt dx + s^{p-2} \lambda^{p-1} \int \int_Q \exp(-2s\alpha) \xi^{p-2} |\nabla y|^2 dt dx \\
&\quad + s^{p-4} \lambda^{p-3} \int \int_Q \exp(-2s\alpha) \xi^{p-4} (|\Delta y|^2 + |\partial_t y|^2) dt dx,
\end{aligned}$$

où, pour tout $(x, t) \in Q$,

$$\alpha(t, x) := \frac{\exp\left(\frac{k(m+1)}{m} \lambda \|\eta^0\|_\infty\right) - \exp[\lambda(k\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^m (T-t)^m}$$

et

$$\xi(t, x) := \frac{\exp[\lambda(k\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^m (T-t)^m},$$

avec $m \in \mathbb{N}^*$, $k > m$ et $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ une fonction satisfaisant pour $k > 0$ et ω un ouvert non vide de Ω , $|\nabla \eta^0| \geq k$ dans $\Omega \setminus \overline{\omega}$, $\eta^0 > 0$ dans Ω et $\eta^0 = 0$ sur $\partial\Omega$. La démonstration de l'existence d'une telle fonction η^0 peut être trouvée dans [31], (Cf également [13]).

Lemme 3.1 (Inégalités de Carleman, [31]). *Soit $y^0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q)$.*

Alors il existe une constante C_0 dépendant uniquement de Ω et ω telle que la solution du système

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f(t, x) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.3)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.4)$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.5)$$

satisfasse

$$I_2(p, y) \leq C_0 (s^p \lambda^{p+1} \int_{\mathcal{B}} \int_0^T \exp(-2s\alpha) \xi^p y^2 dt dx + s^{p-3} \lambda^{p-3} \int_{\Omega} \int_0^T \exp(-2s\alpha) \xi^{p-3} |f|^2 dt dx),$$

pour tout $\lambda \geq C$ et $s \geq s_0 := C(T^{2m} + T^{2m-1})$.

Une légère modification de la preuve permet d'obtenir le résultat énoncé.

On peut trouver le lemme dans [31], bien que la démonstration soit faite pour $m = 1$.

Théorème 3.1. *Il existe trois constantes positives λ_0 , s_0 et C (qui ne dépendent que de Ω et ω) telles que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, pour tout $s \geq s_0(T + T^2)$ et pour tout $p \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned}
 & s^p \lambda^{p+1} \int \int_Q \exp(-2s\alpha) \xi^p y^2 dt dx \\
 & + s^{p-2} \lambda^{p-1} \int \int_Q \exp(-2s\alpha) \xi^{p-2} |\nabla y|^2 dt dx \\
 & + s^{p-4} \lambda^{p-3} \int \int_Q \exp(-2s\alpha) \xi^{p-4} (|\Delta y|^2 + |\partial_t y|^2) dt dx \\
 & \leq C \left(s^p \lambda^{p+1} \int_{\omega} \int_0^T \exp(-2s\alpha) \xi^p y^2 dt dx \right. \\
 & \left. + s^{p-3} \lambda^{p-3} \int_{\Omega} \int_0^T \exp(-2s\alpha) \xi^{p-3} |f|^2 dt dx \right)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

pour tout $y \in C^2(\overline{\Omega})$ tel que $y = 0$ sur Σ .

Nous allons déduire maintenant l'inégalité d'observabilité à partir de l'inégalité de Carleman (3.6)

Théorème 3.2. *Il existe une constante $C_{obs} > 0$ telle que pour tout $\varphi^0 \in L^2(Q)$, la solution φ du système adjoint*

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{3.7}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma \tag{3.8}$$

$$\varphi(T) = \varphi^0 \quad \text{dans } \Omega \tag{3.9}$$

satisfait l'inégalité d'observabilité

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \int_0^T \rho^{-1} \varphi^2 dt dx \leq C_{obs} \int_0^T \|\chi_{\omega} \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

où $\rho = \exp(2s_0\alpha)$.

Démonstration. On commence par remarquer que l'inégalité de Carleman est valide pour les solutions du système adjoint avec $\varphi^T \in L^2(\Omega)$. On fixe $\lambda = \lambda_0$ et $s = s_0(T + T^2)$. On obtient en particulier

$$\int \int_{\Omega} \exp[-2s\alpha] t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 dx dt \leq C \int \int_{\omega \times (0, T)} \exp[-2s\alpha] t^{-3} (T-t)^{-3} |\varphi|^2 dx dt$$

3.3 Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

On tronque en $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$ l'intégrale à gauche et on utilise

$$\exp[-2s\alpha]t^{-3}(T-t)^{-3} \geq \exp[-2C(1 + \frac{1}{T})]\frac{1}{T^6} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$$

et

$$\exp[-2s\alpha]t^{-3}(T-t)^{-3} \geq \exp[-C(1 + \frac{1}{T})]\frac{1}{T^6} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T)$$

pour obtenir

$$\int \int_{\Omega \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})} |\varphi|^2 dxdt \leq C \exp[C(1 + \frac{1}{T})] \int \int_{\omega \times (0, T)} |\varphi|^2 dxdt \quad (3.10)$$

Pour les solutions de l'équation adjointe on a l'estimation d'énergie

$$\int_0^1 |\varphi(0)|^2 dx \leq \int_0^1 |\varphi(t)|^2 dx, \forall t \in [0, T],$$

et en intégrant dans $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$ on trouve

$$\int_0^1 |\varphi(0)|^2 dx \leq \frac{2}{T} \int \int_{\Omega \times (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})} |\varphi|^2 dxdt$$

En combinant cette inégalité avec la précédente on obtient l'inégalité d'observabilité. $\square$

3.3 Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

La contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur est due à G. Lebeau et L. Robbiano [39] et A.V. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [31]. Deux approches différentes ont été utilisées pour résoudre ce problème par Lebeau-Robbiano [39] et Fursikov-Imanuvilov [31], toutes deux utilisant de manière fondamentale (mais différemment) des inégalités de Carleman globales. Dans la première, les auteurs prouvent l'inégalité d'observabilité par une décomposition spectrale des solutions. Dans la deuxième, la preuve de l'inégalité d'observabilité repose sur les inégalités de Carleman globales pour les solutions du système adjoint. Dans la suite, nous allons présenter cette deuxième technique.

3.3 Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

Soit l'équation de la chaleur avec condition homogène de Dirichlet

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.11)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.12)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.13)$$

où $y^0 \in L^2(\Omega)$ est la donnée initiale, $y = y(t)$ est la variable d'état qui décrit la distribution de température dans Ω à l'instant t et $v = v(t)$ est le contrôle distribué dans ω ($\omega \subset \Omega$).

Le but de cette partie est de présenter une méthode pour construire un contrôle v tel que la solution y satisfasse $y(T) = 0$. C'est la méthode de dualité ou Hilbert Uniqueness Method (HUM) introduite par J.-Louis Lions. Remarquons que dû à l'effet régularisant de l'équation de la chaleur (et en général des équations paraboliques), on ne peut pas espérer, quelque soit $y^0 \in L^2(\Omega)$, mener y vers une cible quelconque en temps T . C'est pour cela qu'il est convenable de considérer pour ce type d'équation la notion de contrôlabilité aux trajectoires, i.e, pour tout $y^0 \in L^2(\Omega)$ et toute solution $\bar{y}$ de l'équation de la chaleur non contrôlée

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.14)$$

$$\bar{y} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.15)$$

il existe un contrôle $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que $y_v(T) = \bar{y}(T)$. Néanmoins, par linéarité, cette notion de contrôlabilité est équivalente à la contrôlabilité à zéro. La contrôlabilité à zéro du système se réduit à montrer l'observabilité du système adjoint (voir [39]), i.e, l'existence d'une constante $C > 0$ tel que pour tout $\varphi^T \in L^2(\Omega)$, la solution φ de l'équation adjointe donnée par

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.16)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.17)$$

$$\varphi(T) = \varphi^T \quad \text{dans } \Omega \quad (3.18)$$

3.3 Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

satisfasse

$$\int_{\Omega} |\varphi(0)|^2 dx \leq C \int \int_{\omega \times (0,T)} |\varphi|^2 dx dt$$

Dans le cas linéaire, l'étude de la contrôlabilité d'un système est semblable à l'étude de sa contrôlabilité aux trajectoires.

La question que l'on se pose ici est la suivante, exprimée sur le modèle le plus simple. On considère l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v \chi_{\omega} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.19)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.20)$$

$$y(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.21)$$

où χ est la fonction caractéristique de ω .

On cherche à déterminer un contrôle v tel que $y_v(T) = 0$.

Théorème 3.3. *Quel que soit $T > 0$ et quel que soit l'ouvert $\omega \subset \Omega$, il existe v tel que la solution de l'équation vérifie $y_v(T) = 0$.*

La démonstration de ce théorème nécessite de longs développements techniques.

La méthode développée par Fursikov et Imanuvilov [31] a un caractère plus général et s'applique à des situations variées (aux prix d'une technique lourde). Par exemple ils ont montré le résultat suivant : soit f une fonction lipschitzienne et considérons une solution du problème (sans contrôle)

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + f(\bar{y}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.22)$$

$$\bar{y} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.23)$$

$$\bar{y}(0) = \bar{y}_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.24)$$

3.3 Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur

(Par exemple $\bar{y}$ peut être une solution stationnaire de ce problème, c'est-à-dire $\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = 0$, qui peut être éventuellement instable.)

Considérons maintenant l'équation (avec contrôle)

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.25)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.26)$$

$$y(0) = y_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.27)$$

Le résultat dit alors que si $\|y_0 - \bar{y}_0\|$ est assez petit, il existe v tel que $y_v(T) = \bar{y}(T)$.

Comme le système est linéaire la méthode utilisée consiste à retrancher à y une solution particulière du système non contrôlé. La contrôlabilité à zéro est équivalente à amener n'importe quelle condition initiale à n'importe quelle extrémité de trajectoire libre (c'est ce qu'on appelle la contrôlabilité aux trajectoires), ce qui confère une généralité à la contrôlabilité à zéro plus importante qu'initialement visible.

L'action du contrôle permet donc de «changer de trajectoire» pour le problème d'évolution ou d'atteindre exactement une solution stationnaire, même si elle est naturellement instable. Le résultat a été étendu aux équations de Navier-Stokes sur des variétés sans bord ou lorsque la condition au bord est $\text{rot}(y) = 0$ par Fursikov-Imanuvilov [31], puis récemment au cas des équations de Navier Stokes avec la condition au bord $y = 0$ par Imanuvilov [38].

Signalons que cette équivalence n'est pas vérifiée en général pour les systèmes non linéaires, comme pour le système de Navier-Stokes.

3.4 Contrôlabilité à zéro interne d'un système de Navier-Stokes

On présente des résultats sur la contrôlabilité à zéro du problème non linéaire de Navier-Stokes issue de la mécanique des fluides.

Cette équation modélise un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen de commandes que l'on appelle les contrôles, et qui sont représentées en général par des conditions aux limites ou des forces extérieures.

Nous considérons l'équation de Navier-Stokes dans $\Omega \times (0, T)$ avec un contrôle agissant sur $\omega \times (0, T)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot y = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.29)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.30)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.31)$$

Nous rappelons les différentes définitions de contrôlabilité qui seront considérées et nous décrivons la stratégie d'étude employée.

3.4.1 Définitions

Comme le système de contrôle considéré est non linéaire, on doit distinguer les résultats de contrôlabilité locales des résultats de contrôlabilité globales.

1. On dit que le système est localement exactement contrôlable au temps $T > 0$, si pour toutes conditions initiale y^0 et finale y^1 très proches au sens de la norme, on peut trouver un contrôle v qui permet d'amener l'état y du système de y^0 à y^1 en un temps T .
2. On dit que le système est localement contrôlable à zéro au temps $T > 0$, si pour

toute condition initiale y^0 suffisamment proche de 0, on peut trouver un contrôle v qui permet d'amener l'état y du système de y^0 à 0 en temps T .

Une question intéressante est la contrôlabilité locale exacte aux trajectoires au temps $T > 0$. Etant donnée une solution particulière (une trajectoire $(\bar{y}, \bar{u})$) du système de contrôle et une condition initiale y^0 assez proche de $\bar{y}(0)$, il s'agit de trouver un contrôle v qui amène l'état y du système de y^0 à $\bar{y}(T)$ en temps T . On peut enfin reprendre ces différentes notions de contrôlabilité exacte pour les transposer dans un cadre approché. Il ne s'agit alors plus d'atteindre exactement l'état souhaité y^F ou $\bar{y}(T)$, mais de pouvoir, pour tout $\varepsilon > 0$ très petit, construire un contrôle qui permet à l'état du système d'approcher cet état à une distance ε . On parle de contrôlabilité globale des différentes notions si les propriétés ci-dessus sont valables pour tout y^0 et y^1 dans $\mathbb{X}$.

3.4.2 Résultat de contrôlabilité à zéro d'un système de Navier-Stokes

On commence par introduire deux espaces classiques présents dans le contexte de fluides incompressibles, à savoir :

$$V = \{y \in H_0^1(\Omega)^N : \nabla \cdot y = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\}$$

$$H = \{y \in L^2(\Omega)^N : \nabla \cdot y = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad y = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}$$

La contrôlabilité de l'équation de Navier Stokes a été abordée par J. -L Lions dans [40] et a été l'objet de nombreux travaux ces dernières années.

Dans le cadre de la contrôlabilité approchée, les premiers résultats ont été obtenus par J.M Coron dans [11] avec des conditions au bord de type Navier en utilisant la célèbre méthode du retour. Pour des conditions au bord de type Dirichlet homogènes, on peut se référer à [25] et [41]. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 3.4. *Pour tout $T > 0$ et $\omega \subset \Omega$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout y^0 dans V satisfaisant $\|y^0\|_V \leq \delta$, on peut trouver un contrôle $v \in L^2(\omega \times (0, T))$, et une solution associée (y, p) du système de Navier Stokes telle que $y(T) = 0$ dans Ω .*

i.e le système non linéaire (système de Navier Stokes) est localement contrôlable à zéro.

La preuve du théorème repose sur un résultat de contrôle à zéro pour le système linéaire avec un terme source

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla p = f + v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.32)$$

$$\nabla \cdot y = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.33)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.34)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.35)$$

et un théorème d'inversion locale (voir ci-dessous). La contrôlabilité à zéro du système linéaire est démontrée avec $f = 0$ et $v = 0$. Pour ce faire, les auteurs montrent une inégalité d'observabilité pour le système adjoint

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi + \nabla \pi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.36)$$

$$\nabla \cdot \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.37)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.38)$$

$$\varphi(T) = \varphi^T \quad \text{dans } \Omega \quad (3.39)$$

Ils montrent (voir [25],[41]) l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi^T \in H$, la solution du système adjoint satisfait

$$\int_{\Omega} |\varphi(0)|^2 dx \leq C \sum_{j=1, j \neq i}^N \int \int_{\omega \times (0, T)} |\varphi_j|^2 dx dt.$$

La preuve de cette inégalité repose sur une inégalité de type Carleman

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho_1 |\varphi(0)|^2 dx dt \leq C \sum_{j=1, j \neq i}^N \int \int_{\omega \times (0, T)} \rho_2 |\varphi_j|^2 dx dt$$

où $\rho_1(x, t)$ et $\rho_2(x, t)$ sont des poids du type

$$\rho_1(t, x) := \frac{\exp\left(\frac{k(m+1)}{m}\lambda\|\eta^0\|_\infty\right) - \exp[\lambda(k\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t(T-t)}$$

et

$$\rho_2(t, x) := \frac{\exp[\lambda(k\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t(T-t)}.$$

Cependant une inégalité d'observabilité ne suffit pas pour traiter le problème non linéaire de Navier Stokes. On aura besoin de déduire quelques propriétés de décroissance pour le terme $(y \cdot \nabla)y$. Pour ce faire, on démontre dans une première étape une inégalité de Carleman pour le système adjoint non homogène

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi + \nabla \pi = g \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.40)$$

$$\nabla \cdot \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.41)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.42)$$

$$\varphi(T) = \varphi^T \quad \text{dans } \Omega \quad (3.43)$$

où $g \in L^2(\Omega)^N$

Théorème 3.5 (théorème d'inversion locale). *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux espaces de Banach et $\mathcal{A} : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ vérifiant $\mathcal{A} \in C^1(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. On suppose que $b_1 \in \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{A}(b_1) = b_2$ et que $\mathcal{A}'(b_1) : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ est surjective.*

Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $b' \in \mathcal{B}_2$ satisfaisant $\|b' - b_2\| < \delta$, il existe une solution de l'équation

$$\mathcal{A}(b) = b', b \in \mathcal{B}_1$$

Pour appliquer ce théorème dans ce contexte, on considère l'opérateur

$$\mathcal{A}(y, p, v) = \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y \cdot \nabla)y \nabla p - v \chi_\omega, y(0) \right)$$

Lorsque l'on cherche à étudier la contrôlabilité d'un système non linéaire, on essaie souvent dans un premier temps de se débarrasser de la non linéarité en linéarisant le système autour

d'un état d'équilibre du système, car on a en général une meilleure connaissance des systèmes linéaires. Ensuite, si le système linéaire est contrôlable, on essaie d'en déduire un résultat de contrôlabilité pour le système non linéaire en utilisant par exemple un théorème d'inversion locale ou de point fixe [41]. Cette méthode - résoudre d'abord un problème linéaire puis utiliser un problème de point fixe pour passer au non linéaire est classique en dimension finie. Si après linéarisation le système obtenu n'est pas contrôlable, on doit donc utiliser une autre méthode pour linéariser le système et pouvoir en déduire un résultat pour le système non linéaire.

3.5 Synthèse de quelques résultats existants

Pour les systèmes linéaires, autonomes et non autonomes, leur contrôlabilité est caractérisée par le critère de Kalman qui est une caractérisation algébrique de la contrôlabilité. Beaucoup de progrès ont été faits ces dernières années dans le cadre de la contrôlabilité des équations paraboliques. Dans un premier temps, tant que les conditions aux limites sont de types Dirichlet, la contrôlabilité à zéro du système.

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.44)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.45)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.46)$$

a été démontré, d'une part par G. Lebeau et L. Robbiano dans [39] et d'autre part par A.V. Fursikov et O.Yu. Imanuvilov dans [31] en utilisant une méthode qui peut s'adapter à des systèmes assez généraux reposant sur des inégalités de Carleman globales. Ce type d'inégalités constitue une estimation très importante du point de vue de la contrôlabilité. Plus précisément, les inégalités globales de Carleman impliquent en particulier l'observabilité pour le système adjoint associé au problème de contrôle linéaire et il est bien connu que l'observabilité du problème adjoint entraîne la contrôlabilité à zéro.

Par exemple, pour une équation avec termes d'ordre inférieur de la forme

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + B(x, t) \cdot \nabla y + a(x, t)y = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.47)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.48)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.49)$$

Ici, a et $B = (B_i)_{i=1}^N$, sont $N + 1$ fonctions qui dépendent de x et de t qui sont supposées appartenir à $L^\infty(Q)$. Dans ce cas, il faut utiliser une inégalité de Carleman appropriée pour les solutions de l'équation de la chaleur avec un second membre dans un espace plus faible [37]. En particulier, la contrôlabilité à zéro de (3.47) est utilisée pour traiter quelques équations paraboliques non linéaires à travers un argument de point fixe.

Des avancées fructueuses ont été faites dans ce domaine. Un exemple intéressant [25], établit la contrôlabilité approchée du système de réaction-diffusion non linéaire.

Dans [28] E. Fernandez-Cara et E. Zuazua ont étudié la contrôlabilité à zéro de systèmes non linéaires avec linéarité "explosives" (ou semi linéaire). En fait, pour des fonctions f satisfaisants

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s \log^{\frac{3}{2}}(1 + |s|)} = 0 \quad (3.50)$$

ils démontrent que le système

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.51)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.52)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.53)$$

est contrôlable à zéro.

Très récemment et comme application du travail [37], A. Doubova et al. ont étendu dans [20] ce résultat à des non linéarités qui dépendent de l'état et du gradient de l'état. Ils ont déduit

la contrôlabilité à zéro du système :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + F(y, \nabla y) = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.54)$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.55)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.56)$$

pourvu que la dérivée de $F(s, p)$ par rapport à la première variable (resp. aux N dernières variables) soit strictement majoré à l'infini par $\log^{\frac{3}{2}}(1 + |s| + |p|)$ (resp. $\log^{\frac{1}{2}}(1 + |s| + |p|)$).

La contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de type Fourier (ou Robin) a été étudiée dans [31] où les auteurs ont résolu la contrôlabilité à zéro du système

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} + \beta y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.58)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.59)$$

pour des coefficients $\beta \in C^1(\overline{\Sigma})$. En utilisant ce résultat, A. Doubova et al. [21] ont montré la contrôlabilité locale à zéro pour tout $T > 0$ et la contrôlabilité à zéro pour T assez grand (qui dépend de y^0) du système :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + G(y) = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} + g(y) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.61)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.62)$$

où G vérifie

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{G(s)}{s \log^{\frac{3}{2}}(1 + |s|)} = 0 \quad (3.63)$$

et $g \in C^4(\mathbb{R})$ à une dérivée première positive.

La contrôlabilité du système de réaction-diffusion avec conditions aux limites de type Fourier

3.6 Conclusion

linéaires et non linéaires a été étudiée dans [27] et [32].

Les auteurs ont résolu la contrôlabilité à zéro du système

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + ay + B \times \nabla y = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} + \beta y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.65)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.66)$$

avec des coefficients a , B et β appartenant à l'espace L^∞ (cette partie correspond à l'article [27]).

Ceci permet ensuite d'obtenir un résultat de contrôlabilité globale pour le système non linéaire

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + G(y, \nabla y) = v\chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} + g(y) = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (3.68)$$

$$y(0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.69)$$

qui est l'objet de l'article [32]. Pour déduire un résultat de caractère global, on obtient la contrôlabilité nulle du système linéaire précédent seulement avec les hypothèses L^∞ sur les coefficients puis on applique les idées développées dans [28].

La contrôlabilité à zéro du système de Navier-Stokes a été aussi très étudiée ces derniers temps. Dans [12] J. -M. Coron et S. Guerrero obtiennent la contrôlabilité locale à zéro d'un système de Navier Stokes 2-D sur un tore au moyen d'un seul contrôle scalaire.

Dans [35], S. Guerrero, O Yu. Imanuvilov et J-P. Puel prouvent un résultat de contrôlabilité pour un système de Navier Stokes sur un carré avec une seule condition de Dirichlet en s'inspirant de la méthode du retour.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évoqué quelques problèmes de contrôlabilité pour des systèmes paraboliques linéaires. Il apparaît clairement que, les inégalités de Carleman jouent un

3.6 Conclusion

rôle fondamental dans l'établissement de la contrôlabilité à zéro de ces systèmes. Toutefois, il convient de remarquer que bon nombre des résultats établis concernent des systèmes paraboliques avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Pour d'autres types de condition les inégalités de Carleman peuvent être difficiles à obtenir comme nous allons le voir au chapitre suivant.

INÉGALITÉS DE TYPE CARLEMAN POUR DES EDPs PARABOLIQUES NON LINÉAIRES

Sommaire

4.1 Fonctions poids	48
4.2 Résultats préliminaires	51
4.3 Résultat principal : Inégalité globale de Carleman	63
4.4 Conclusion	68

Dans ce chapitre, nous établissons une inégalité de type Carleman pour un problème parabolique non linéaire avec condition de Neumann non homogène. Ce type d'inégalité constitue une étape très importante du point de vue de la contrôlabilité. Précisément, les inégalités de Carleman impliquent en particulier l'observabilité pour le problème adjoint associé au problème de contrôle linéaire.

Nous considérons, ici, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 de frontière Γ . Pour $T > 0$ donné nous considérons une équation aux dérivées partielles paraboliques non linéaire

$$\partial_t \psi - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla \psi + F(\psi) = 0 \quad \text{dans } Q_T = \Omega \times (0, T) \quad (4.1)$$

avec condition aux limites de type Neumann suivante :

$$\mathcal{A} \nabla \psi \cdot n = g \quad \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times (0, T) \quad (4.2)$$

4.1 Fonctions poids

et la condition initiale

$$\psi(0) = \psi_0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.3)$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^d$ satisfaisant la propriété d'ellipticité :

$$\exists C > 0 \text{ telle que } \xi^t \mathcal{A} \xi \geq C |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (4.4)$$

En outre, nous supposons que $\mathcal{A}$ est un opérateur symétrique :

$$\xi^t \mathcal{A} \eta = \eta^t \mathcal{A} \xi \quad \forall \eta, \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (4.5)$$

F est une fonction scalaire non linéaire de classe $\mathcal{C}^1$; g et ψ_0 des fonctions de régularité suffisante. En plus, il sera supposé la condition de croissance suivante

$$(u - v)(F(u) - F(v)) \geq 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

et

$$F(0) = 0. \quad (4.7)$$

Afin d'établir des résultats d'estimation sur la solution du problème (4.1)-(4.3), on présente d'abord des fonctions poids puis quelques unes des propriétés utiles pour établir une estimation de type Carleman pour ce problème.

4.1 Fonctions poids

Fixons $\omega \subset \Omega$ non vide. On introduit une fonction scalaire η^0 définie sur Ω de classe C^2 satisfaisant

$$\eta^0 > 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.8)$$

$$|\nabla \eta^0(x)| \neq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega \setminus \omega'} \quad (4.9)$$

$$\eta^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.10)$$

4.1 Fonctions poids

avec $\omega' \subset\subset \omega$ un sous ensemble ouvert non vide de ω . On peut se référer à [31], où il est prouvé l'existence d'une telle fonction. En exemple, si $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$, la fonction $\eta^0(x) = A_0 \exp(\frac{-1}{1-|x|})$ satisfait bien (4.8), (4.9) et (4.10) en prenant par exemple $\omega' = \{x, |x| < \epsilon \ll 1\}$ (Figure ci contre).

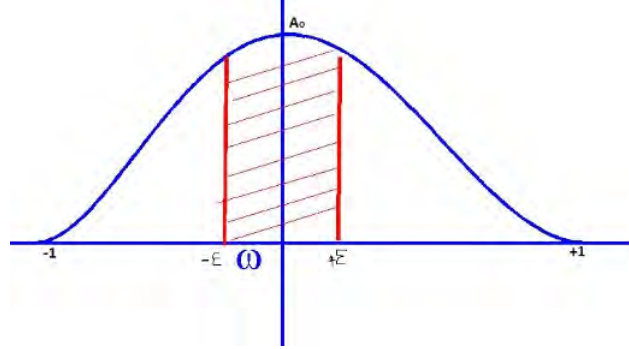


FIGURE 4.1 – Une illustration d'une fonction η^0 vérifiant les propriétés (4.8), (4.9) et (4.10). On voit bien que $\eta^0 = 0$ en $|x| = 1$ et $|\nabla \eta^0(x)| \neq 0$ sur $\overline{\Omega \setminus \{x, |x| < \epsilon \ll 1\}}$.

Soit, maintenant les fonctions poids $\xi(t, x)$ et $\alpha(t, x)$ définies par

$$\alpha(t, x) = (t(T - t))^{-1} \left(e^{2\lambda \|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))} \right) \quad (4.11)$$

et

$$\xi(t, x) = (t(T - t))^{-1} e^{\lambda(\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))} \quad (4.12)$$

avec $\lambda > 0$. Il s'ensuit les formules suivantes :

$$\nabla \xi = \lambda \xi \nabla(\eta^0), \quad (4.13)$$

$$\nabla \alpha = -\lambda \xi \nabla(\eta^0), \quad (4.14)$$

et

$$\mathcal{A}\nabla\alpha = -\lambda\xi\mathcal{A}\nabla(\eta^0). \quad (4.15)$$

Par ailleurs, pour simplifier les écritures, on posera parfois

$$\Delta'(\cdot) = \nabla.\mathcal{A}\nabla(\cdot). \quad (4.16)$$

Avec cette notation on écrit

$$\Delta'(\alpha) = -\lambda^2\xi.\nabla(\eta^0).\mathcal{A}\nabla(\eta^0) - \lambda\xi\Delta'(\eta^0). \quad (4.17)$$

Un simple calcul permet d'écrire

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{2t-T}{t^2(T-t)^2} \left(e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))} \right)$$

et

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{2t-T}{t^2(T-t)^2} e^{\lambda(\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}.$$

Mais, remarquant

$$e^{\lambda(\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))} \leq e^{2\lambda(\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}$$

et

$$-e^{2\lambda(\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))} \leq e^{2\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))} \leq e^{2\lambda(\|\eta^0\|_\infty+\eta^0(x))}.$$

Il en découle :

Proposition 4.1. *Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de T tel que pour tout $t \in (0, T)$*

$$\left| \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right| \leq C\xi^2, \quad (4.18)$$

$$\left| \frac{\partial\xi}{\partial t} \right| \leq C\xi^2, \quad (4.19)$$

$$\left| \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \right| \leq C\xi^2, \quad (4.20)$$

$$\left| \frac{\partial \xi^2}{\partial t} \right| \leq C \xi^3, \quad (4.21)$$

et pour λ suffisamment grand, on a

$$|\Delta'(\alpha)| \leq C \lambda^2 \xi. \quad (4.22)$$

4.2 Résultats préliminaires

Pour tout ψ solution de (4.1), (4.2), (4.3), posons

$$\tilde{\psi}(t, x) = e^{-s\alpha(t, x)} \psi(t, x) \quad (4.23)$$

pour un réel s strictement positif judicieusement choisi. Clairement, il en découle

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\psi}(t, x) = \lim_{t \rightarrow T} \tilde{\psi}(t, x) = 0. \quad (4.24)$$

On a d'une part,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} e^{s\alpha(t, x)} + s \frac{\partial \alpha}{\partial t} e^{s\alpha} \tilde{\psi}(t, x) \quad (4.25)$$

et d'autre part,

$$\nabla \psi = e^{s\alpha(t, x)} \nabla \tilde{\psi} + s e^{s\alpha(t, x)} \tilde{\psi} \nabla(\alpha)$$

d'où l'on déduit

$$\mathcal{A} \nabla \psi = e^{s\alpha(t, x)} \mathcal{A} \nabla \tilde{\psi} + s e^{s\alpha(t, x)} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\alpha).$$

Par suite

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \psi) &= -s \nabla \alpha (\mathcal{A} \nabla \psi) e^{s\alpha(t, x)} - \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \psi) e^{s\alpha(t, x)} \\ &\quad - s \tilde{\psi} \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \alpha) e^{s\alpha(t, x)} - s (\nabla \psi) (\mathcal{A} \nabla \alpha) e^{s\alpha(t, x)} \\ &\quad - s^2 \nabla \alpha \tilde{\psi} (\mathcal{A} \nabla \alpha) e^{s\alpha(t, x)}. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{A}$ est un opérateur symétrique,

$$s (\nabla \tilde{\psi}) (\mathcal{A} \nabla \alpha) = s \nabla \alpha (\mathcal{A} \nabla \psi).$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \psi) &= -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \tilde{\psi}) e^{s\alpha(t,x)} - 2s \nabla \tilde{\psi} (\mathcal{A} \nabla \alpha) e^{s\alpha(t,x)} \\ &\quad - s \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \alpha) \tilde{\psi} e^{s\alpha(t,x)} - s^2 \tilde{\psi} (\nabla \alpha) (\mathcal{A} \nabla \alpha) e^{s\alpha(t,x)}. \end{aligned}$$

Utilisant la notation (4.16), le système d'équation (4.1)-(4.3) s'écrit finalement

$$\begin{aligned} s \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) &= s^2 \tilde{\psi} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) + 2s \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \\ &\quad + s \tilde{\psi} \Delta'(\alpha) + \Delta'(\tilde{\psi}) \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (4.26)$$

$$s \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\alpha) \mathbf{n} + \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \mathbf{n} = e^{-s\alpha} g \quad \text{sur } \Sigma_T \quad (4.27)$$

$$\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(T) = 0. \quad (4.28)$$

Posant

$$L(\tilde{\psi}) := s \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} - s \tilde{\psi} \Delta'(\alpha) - s^2 \tilde{\psi} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \quad (4.29)$$

et

$$G(\tilde{\psi}) := \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) - 2s \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) - \Delta'(\tilde{\psi}). \quad (4.30)$$

L'équation (4.26) s'écrit

$$L(\tilde{\psi}) + G(\tilde{\psi}) = 0 \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega \quad (4.31)$$

Par la suite, on note $\langle f, g \rangle = \int_0^T \int_\Omega f g$ et $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. De l'équation (4.31) on déduit

$$\langle L(\tilde{\psi}) + G(\tilde{\psi}), L(\tilde{\psi}) + G(\tilde{\psi}) \rangle = 0,$$

puis en développant

$$\|L(\tilde{\psi})\|^2 + \|G(\tilde{\psi})\|^2 + 2\langle L(\tilde{\psi}), G(\tilde{\psi}) \rangle = 0. \quad (4.32)$$

On se servira de cette dernière équation pour établir les estimations de type Carleman. Mais auparavant on donne d'abord quelques résultats préliminaires.

Proposition 4.2. *On suppose que $0 < \lambda < \lambda_0$ et $0 < s < s_0$, pour un λ_0 et un s_0 donnés, sous les hypothèses (4.5) et (4.6) il existe une constante positive C telle que pour tout $\psi \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ and $g \in L^2(\Sigma_T)$, nous avons*

$$\begin{aligned}
 \langle L(\tilde{\psi}), G(\tilde{\psi}) \rangle \geq & -Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 - Cs^2\lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
 & -Cs^3\lambda \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
 & -Cs^4\lambda^5 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-2s\alpha} \psi^2 - Cs^5\lambda^3 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\
 & -Cs^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) - Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\
 & -Cs^2\lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\
 & -Cs^3\lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 d\sigma dt.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pour la preuve de cette proposition 4.2 nous allons d'abord établir les lemmes suivants.

Lemme 4.1. *Sous les hypothèses de la proposition 4.2, il existe une constante C positive telle que*

$$\langle L(\tilde{\psi}), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \rangle \geq -C(s\lambda + s\lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 - C(s + s^2\lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \xi^3. \tag{4.34}$$

Démonstration. Remplaçant $L(\tilde{\psi})$ par son expression (4.29), il vient

$$\langle L(\tilde{\psi}), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \rangle = s \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} - s \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \Delta'(\alpha) - s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha).$$

Sachant que $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\psi}(t, x) = \lim_{t \rightarrow T} \tilde{\psi}(t, x) = 0$ et en intégrant par partie sur $(0, T)$, on obtient

$$\langle L(\tilde{\psi}), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \rangle = -\frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta'(\alpha) + \frac{s^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha)).$$

En remplaçant $\Delta'(\alpha)$ et $\nabla(\alpha)$ par leurs expressions (4.13) et (4.17), on obtient

$$\begin{aligned}
 \langle L(\tilde{\psi}), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \rangle = & -\frac{s}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \tilde{\psi}^2 - \frac{s\lambda^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \xi}{\partial t} \tilde{\psi}^2 \nabla(\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0) \\
 & -\frac{s\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \xi}{\partial t} \tilde{\psi}^2 \Delta'(\eta^0) + \frac{s^2\lambda^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \xi^2}{\partial t} \tilde{\psi}^2 (\nabla \eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0).
 \end{aligned}$$

Utilisant les inégalités de la proposition (4.1), il existe alors une constante positive C telle que

$$\begin{aligned} \langle L(\tilde{\psi}), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \rangle &\geq -Cs \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2 - C(s + s\lambda + s\lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 \\ &\quad + \frac{s^2 \lambda^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial t} (\nabla(\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0)). \end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$\frac{s^2 \lambda^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial t} (\nabla(\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0)) = \frac{s^2 \lambda^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial t} (\nabla(\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0))$$

et en utilisant encore les inégalités dans (4.1), nous obtenons

$$\left| \frac{s^2 \lambda^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial t} (\nabla(\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0)) \right| \leq Cs^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \xi^3.$$

Par conséquent, il s'en suit que

$$\langle L(\tilde{\psi}), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \rangle \geq -C(s\lambda + s\lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 - C(s + s^2 \lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 \xi^3$$

pour une constante positive C . D'où la preuve du lemme. $\square$

Lemme 4.2. *Sous les hypothèses de la proposition 4.2 il existe alors une constante positive C telle que*

$$\begin{aligned} \langle L(\tilde{\psi}), e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) \rangle &\geq -C(s + s^2 \lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \tilde{\psi} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) \\ &\quad - Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-s\alpha} \tilde{\psi} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle L(\tilde{\psi}), e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) \rangle &= s \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) \\ &\quad - s \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) \Delta'(\alpha) \\ &\quad - s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha). \end{aligned}$$

A partir de l'hypothèse (4.6), on peut voir que $e^{s\alpha}\tilde{\psi}F(e^{s\alpha}\tilde{\psi}) \geq 0$ et, grâce aux inégalités de la proposition 4.1, on obtient

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha}\tilde{\psi}) \right| \leq C \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha}\tilde{\psi}).$$

Il en découle

$$s \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha}\tilde{\psi}) \geq -Cs \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha}\tilde{\psi}).$$

Par conséquent, en utilisant (4.14), (4.15) et (4.22) on obtient finalement

$$\begin{aligned} \langle L(\tilde{\psi}), e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha}\tilde{\psi}) \rangle &\geq -C(s + s^2\lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha}\tilde{\psi}) \\ &\quad -Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi \tilde{\psi} e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha}\tilde{\psi}). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. $\square$

Lemme 4.3. *Sous les hypothèses de la proposition 4.2, il existe une constante positive C telle que*

$$\begin{aligned} -2s \langle L(\tilde{\psi}), \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \rangle &\geq -C(s^2\lambda^3 + s^2\lambda^2) \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla(\tilde{\psi})|^2 \right) \\ &\quad -C(s^2\lambda + s^3\lambda^3) \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 |\nabla(\tilde{\psi})|^2 \right). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} -2s \langle L(\tilde{\psi}), \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \rangle &= -2s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \\ &\quad + 2s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \Delta'(\alpha) \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \\ &\quad + 2s^3 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha). \end{aligned}$$

Grâce à (4.13) et à la proposition 4.1, nous obtenons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \right| &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right| |\tilde{\psi}| |\nabla(\tilde{\psi})| |\mathcal{A} \nabla(\alpha)| \\ &\leq C\lambda \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 |\tilde{\psi}| |\nabla(\tilde{\psi})|. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young et les inégalités de la proposition 4.2, il vient

$$-2s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \geq -Cs^2 \lambda \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 |\tilde{\psi}|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 |\nabla(\tilde{\psi})|^2 \right). \quad (i)$$

De plus grâce aux formules de 4.13, (4.14) et (4.15), nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) = -\lambda^3 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi} \nabla(\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0) \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0).$$

En appliquant l'inégalité de Young et les inégalités de la proposition (4.1), on obtient

$$2s^3 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \geq -Cs^3 \lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 |\nabla(\tilde{\psi})|^2 \right). \quad (ii)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 2s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \Delta'(\alpha) \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) &= 2s^2 \lambda^3 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \xi^2 \cdot \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0) (\nabla(\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0)) \\ &\quad + 2s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \xi^2 \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\eta^0) \Delta'(\eta^0). \end{aligned}$$

Nous appliquons encore l'inégalité de Young et les inégalités de la proposition (4.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} 2s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \Delta'(\alpha) \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) &\geq -Cs^2 \lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla(\tilde{\psi})|^2 \right) \\ &\quad -Cs^2 \lambda^2 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla(\tilde{\psi})|^2 \right). \end{aligned} \quad (iii)$$

En combinant (i), (ii), et (iii), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} -2s \langle L(\tilde{\psi}), \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \rangle &\geq -C(s^2 \lambda^3 + s^2 \lambda^2) \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla(\tilde{\psi})|^2 \right) \\ &\quad -C(s^2 \lambda + s^3 \lambda^3) \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 |\nabla(\tilde{\psi})|^2 \right). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. $\square$

Lemme 4.4. *Sous les hypothèses de la proposition 4.2 nous avons*

$$\begin{aligned} -\langle L(\tilde{\psi}), \Delta'(\tilde{\psi}) \rangle &\geq -Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla \tilde{\psi}|^2 - C(s + s^2 \lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2 \\ &\quad -C(s\lambda + s\lambda^2 + s\lambda^3 + s^2 \lambda^3) \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2 \right) \\ &\quad -Cs\lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi |\tilde{\psi}| e^{-s\alpha} |g| d\sigma dt - C(s + s^2 \lambda^2) \int_{\Sigma_T} \xi^2 |\tilde{\psi}| e^{-s\alpha} |g| d\sigma dt \\ &\quad -Cs^2 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi \tilde{\psi}^2 d\sigma dt - Cs^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^2 \tilde{\psi}^2 d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} -\langle L(\tilde{\psi}), \Delta'(\tilde{\psi}) \rangle &= -s \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} \Delta'(\tilde{\psi}) + s \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \Delta'(\alpha) \Delta'(\tilde{\psi}) \\ &\quad + s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \Delta'(\tilde{\psi}) \nabla(\alpha) \mathcal{A} \nabla(\alpha). \end{aligned}$$

En utilisant la formule Green, on a

$$\begin{aligned} -\langle L(\tilde{\psi}), \Delta'(\tilde{\psi}) \rangle &= s \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) - s \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \xi}{\partial t} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \nabla(\eta^0) \\ &\quad - s \int_{\Sigma_T} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \, n d\sigma dt - s \int_0^T \int_{\Omega} \Delta'(\alpha) \nabla \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \\ &\quad - s \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \nabla(\Delta'(\alpha)) + s \int_{\Sigma_T} \Delta'(\alpha) \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \, n d\sigma dt \\ &\quad - s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \nabla(\alpha) \mathcal{A} \nabla(\alpha) \\ &\quad - s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \nabla(\nabla(\alpha) \mathcal{A} \nabla(\alpha)) \\ &\quad + s^2 \int_{\Sigma_T} \nabla(\alpha) \mathcal{A} \nabla(\alpha) \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \, n d\sigma dt. \end{aligned}$$

Ecrivons cette inégalité sous la forme $-\langle L(\tilde{\psi}), \Delta'(\tilde{\psi}) \rangle = (a) + (b) + (c) + (d)$ où

$$\begin{aligned} (a) &= s \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) - s \int_0^T \int_{\Omega} \Delta'(\alpha) \nabla \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) - s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \nabla(\alpha) \mathcal{A} \nabla(\alpha) \\ (b) &= -s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \nabla(\nabla(\alpha) \mathcal{A} \nabla(\alpha)) - s \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \xi}{\partial t} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \nabla(\eta^0) \\ (c) &= -s \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \nabla(\Delta'(\alpha)) \\ (d) &= -s \int_{\Sigma_T} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \, n d\sigma dt + s \int_{\Sigma_T} \Delta'(\alpha) \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \, n d\sigma dt + s^2 \int_{\Sigma_T} \nabla(\alpha) \mathcal{A} \nabla(\alpha) \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \, n d\sigma dt \end{aligned}$$

Maintenant, nous estimons des termes de l'expression précédente. A partir des inégalités de la proposition 4.1 et en sachant que l'opérateur $\mathcal{A}$ est positif, on peut déduire les inégalités.

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \right| \leq C \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2$$

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \Delta'(\alpha) \nabla \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla(\tilde{\psi}) \right| \leq C \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla \tilde{\psi}|^2$$

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \tilde{\psi} \cdot \mathcal{A} \nabla (\tilde{\psi}) \nabla (\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla (\alpha) \right| \leq C \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2$$

ainsi, il s'en suit

$$(a) \geq -C s \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla \tilde{\psi}|^2 - C(s + s^2 \lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2$$

Pour donner une estimation de (b), nous déterminons d'abord $\nabla (\nabla (\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla (\alpha))$. Du fait que nous avons

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla (\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla (\alpha)) &= \lambda^2 \nabla (\xi^2 \nabla (\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla (\eta^0)) \\ &= 2\lambda^2 \xi \nabla (\xi) \nabla (\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla (\eta^0) + \lambda^2 \xi^2 \nabla (\nabla (\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla (\eta^0)) \\ &= 2\lambda^3 \xi^2 \nabla (\eta^0) \nabla (\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla (\eta^0) + \lambda^2 \xi^2 \nabla (\nabla (\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla (\eta^0)). \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young et pour λ très grand, on obtient

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi} \mathcal{A} \nabla (\tilde{\psi}) \cdot \nabla (\nabla (\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla (\alpha)) \right| \leq C \lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2 \right).$$

De ce qui précède, nous avons également

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \xi}{\partial t} \tilde{\psi} \cdot \mathcal{A} \nabla (\tilde{\psi}) \cdot \nabla (\eta^0) \right| \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2 \right)$$

de sorte que l'on a :

$$(b) \geq -C(s^2 \lambda^3 + s \lambda) \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2 \right).$$

Pour donner une estimation de (c) nous allons évaluer $\nabla (\Delta' (\alpha))$. De l'égalité

$$\Delta' (\alpha) = -\lambda^2 \xi \cdot \nabla (\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla (\eta^0) - \lambda \xi \Delta' (\eta^0)$$

alors

$$\nabla (\Delta' (\alpha)) = -\lambda^3 \xi^2 (\nabla (\eta^0) \cdot \mathcal{A} \nabla (\eta^0)) \nabla (\eta^0) - \lambda^2 \xi^2 \Delta' (\eta^0) \nabla (\eta^0).$$

En appliquant encore l'inégalité de Young, on obtient finalement

$$(c) \geq -C(s \lambda^3 + s \lambda^2) \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2 \right).$$

De plus, nous savons qu'à partir de (4.27) que

$$\mathcal{A}\nabla(\tilde{\psi}) \mathbf{n} = e^{-s\alpha}g + s\lambda\tilde{\psi}\mathcal{A}\nabla(\eta^0) \mathbf{n} \text{ sur } \Sigma_T,$$

alors nous avons

$$-s \int_{\Sigma_T} \frac{\partial\alpha}{\partial t} \tilde{\psi} \mathcal{A}\nabla(\tilde{\psi}) \mathbf{n} d\sigma dt = -s \int_{\Sigma_T} \frac{\partial\alpha}{\partial t} \tilde{\psi} e^{-s\alpha} g \mathbf{n} d\sigma dt - s^2 \lambda \int_{\Sigma_T} \frac{\partial\alpha}{\partial t} \tilde{\psi}^2 \mathcal{A}\nabla(\eta^0) \mathbf{n} d\sigma dt$$

$$s \int_{\Sigma_T} \Delta'(\alpha) \tilde{\psi} \mathcal{A}\nabla(\tilde{\psi}) \mathbf{n} d\sigma dt = s \int_{\Sigma_T} \Delta'(\alpha) \tilde{\psi} e^{-s\alpha} g \mathbf{n} d\sigma dt + s^2 \lambda \int_{\Sigma_T} \Delta'(\alpha) \tilde{\psi}^2 \mathcal{A}\nabla(\eta^0) \mathbf{n} d\sigma dt$$

et

$$s^2 \int_{\Sigma_T} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A}\nabla(\alpha) \tilde{\psi} \mathcal{A}\nabla(\tilde{\psi}) \mathbf{n} d\sigma dt = s^2 \int_{\Sigma_T} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A}\nabla(\alpha) \tilde{\psi} e^{-s\alpha} g \mathbf{n} d\sigma dt + s^3 \lambda \int_{\Sigma_T} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A}\nabla(\alpha) \tilde{\psi}^2 \mathcal{A}\nabla(\eta^0) \mathbf{n} d\sigma dt$$

de sorte que nous en déduisons l'inégalité suivante

$$(d) \geq -Cs\lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi |\tilde{\psi}| e^{-s\alpha} |g| d\sigma dt - C(s + s^2\lambda^2) \int_{\Sigma_T} \xi^2 |\tilde{\psi}| e^{-s\alpha} |g| d\sigma dt - Cs^2\lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi \tilde{\psi}^2 d\sigma dt \\ - Cs^3\lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^2 \tilde{\psi}^2 d\sigma dt.$$

Finalement, nous obtenons

$$(a) + (b) + (c) + (d) \geq -Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla \tilde{\psi}|^2 - C(s + s^2\lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2 \\ - C(s\lambda + s\lambda^2 + s\lambda^3 + s^2\lambda^3) \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla \tilde{\psi}|^2 \right) \\ - Cs\lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi |\tilde{\psi}| e^{-s\alpha} |g| d\sigma dt - C(s + s^2\lambda^2) \int_{\Sigma_T} \xi^2 |\tilde{\psi}| e^{-s\alpha} |g| d\sigma dt \\ - Cs^2\lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi \tilde{\psi}^2 d\sigma dt - Cs^3\lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^2 \tilde{\psi}^2 d\sigma dt.$$

Ce qui achève la démonstration. $\square$

Preuve de la proposition 4.2. Premièrement, en remplaçant $\tilde{\psi}$ par son expression, il vient :

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{\psi}|^2 &= |-se^{-s\alpha} \psi \nabla \alpha + e^{-s\alpha} \nabla \psi|^2 \\ &\leq s^2 e^{-2s\alpha} |\psi|^2 |\nabla \alpha|^2 + 2se^{-2s\alpha} |\psi| |\nabla \alpha| |\nabla \psi| + e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \\ &\leq Ce^{-2s\alpha} (s^2 |\psi|^2 |\nabla \alpha|^2 + 2s |\psi| |\nabla \alpha| |\nabla \psi| + |\nabla \psi|^2) \end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \nabla \tilde{\psi} \right|^2 &\leq C e^{-2s\alpha} \left(s^2 |\psi|^2 |\nabla \alpha|^2 + |\nabla \psi|^2 \right) \\ &\leq C e^{-2s\alpha} \left(s^2 \lambda^2 \xi^2 |\psi|^2 |\nabla \eta^0|^2 + |\nabla \psi|^2 \right). \end{aligned}$$

Deuxièmement à partir des relations (4.29) et (4.30) on peut écrire :

$$\langle L(\tilde{\psi}), G(\tilde{\psi}) \rangle = \langle L(\tilde{\psi}), \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \rangle + \langle L(\tilde{\psi}), e^{-s\alpha} F(e^{s\alpha} \tilde{\psi}) \rangle - 2s \langle L(\tilde{\psi}), \nabla(\tilde{\psi}) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \rangle - \langle L(\tilde{\psi}), \Delta'(\tilde{\psi}) \rangle$$

Ainsi, en utilisant les inégalités de (4.34) à (4.37) on obtient

$$\begin{aligned} \langle L(\tilde{\psi}), G(\tilde{\psi}) \rangle &\geq -C (s\lambda + s\lambda^2 + s^2\lambda^2 + s^2\lambda^3 + s\lambda + s^2\lambda^2 + s\lambda^3) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\ &\quad - C s \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \\ &\quad - C (s + s^2\lambda^2 + s^2\lambda^3 + s\lambda + s^2\lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \\ &\quad - C (s^3\lambda^2 + s^4\lambda^4 + s^4\lambda^5 + s^3\lambda^3 + s^4\lambda^4) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\ &\quad - C (s + s^2\lambda^2 + s^2\lambda + s^3\lambda^3) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\ &\quad - C (s^2\lambda + s^3\lambda) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \\ &\quad - C (s^4\lambda^3 + s^5\lambda^3) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\ &\quad - C (s + s^2\lambda^2) \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) - C s \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\ &\quad - C (s + s\lambda^2 + s\lambda^2 + s^2\lambda^2) \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\ &\quad - C (s^2\lambda + s^2\lambda^2 + s^2\lambda^3 + s^3\lambda^3) \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 d\sigma dt. \end{aligned}$$

En prenant s et λ suffisamment grand cette inégalité devient

$$\begin{aligned}
 \langle L(\tilde{\psi}), G(\tilde{\psi}) \rangle &\geq -Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 - Cs^2\lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
 &\quad -Cs^3\lambda \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
 &\quad -Cs^4\lambda^5 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-2s\alpha} \psi^2 - Cs^5\lambda^3 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\
 &\quad -Cs^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) - Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\
 &\quad -Cs^2\lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\
 &\quad -Cs^3\lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 d\sigma dt.
 \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Proposition 4.3. *On suppose que $0 < \lambda < \lambda_0$ et $0 < s < s_0$ pour un λ_0 et s_0 donnés, il existe alors une constante positive C telle que pour tout $\psi \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$, nous avons*

$$\begin{aligned}
 \langle L(\tilde{\psi}), L(\tilde{\psi}) \rangle &\geq Cs^2\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 + Cs^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 \\
 &\quad -Cs^3\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 - Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \langle L(\tilde{\psi}), L(\tilde{\psi}) \rangle &= \|L(\tilde{\psi})\|^2 \\
 &= \left\| s \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi} - s \tilde{\psi} \Delta'(\alpha) - s^2 \tilde{\psi} \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \right\|^2 \\
 &= s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 \tilde{\psi}^2 + s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 (\Delta'(\alpha))^2 + s^4 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 (\nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha))^2 \\
 &\quad - 2s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi}^2 \Delta'(\alpha) - 2s^3 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi}^2 \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \\
 &\quad + 2s^3 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta'(\alpha) \tilde{\psi}^2 \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha).
 \end{aligned}$$

Il est clair que

$$s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 \tilde{\psi}^2 \geq 0.$$

De plus, pour une valeur de λ suffisamment grand, à partir de (4.17), on peut écrire

$$(\Delta' \alpha)^2 \sim C \lambda^4 \xi^2.$$

On a alors

$$s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 (\Delta'(\alpha))^2 \geq C s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2.$$

Comme $\mathcal{A}$ est définie positive et satisfaisant la propriété d'ellipticité on a alors

$$s^4 \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\psi}^2 (\nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha))^2 \geq C s^4 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 \tilde{\psi}^2.$$

A partir de (4.18) et (4.22), nous avons

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi}^2 \Delta'(\alpha) \right| \leq C \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2$$

ainsi

$$-2s^2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi}^2 \Delta'(\alpha) \geq -C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2.$$

De la même manière, on obtient successivement

$$-2s^3 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \tilde{\psi}^2 \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \geq -C s^3 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 \tilde{\psi}^2$$

et

$$2s^3 \int_0^T \int_{\Omega} \Delta'(\alpha) \tilde{\psi}^2 \nabla(\alpha) \cdot \mathcal{A} \nabla(\alpha) \geq -C s^3 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2.$$

Nous déduisons finalement

$$\begin{aligned} \langle L(\tilde{\psi}), L(\tilde{\psi}) \rangle &\geq C s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \tilde{\psi}^2 + C s^4 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 \tilde{\psi}^2 \\ &\quad - C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2 - C s^3 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 \tilde{\psi}^2 \\ &\quad - C s^3 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2. \end{aligned}$$

Pour des valeurs de λ et s suffisamment grand, nous avons

$$-C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2 - C s^3 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2 \geq -C s^3 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 \tilde{\psi}^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle L(\tilde{\psi}), L(\tilde{\psi}) \rangle &\geq Cs^2\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 + Cs^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 \\ &\quad - Cs^3\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 - Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

□

4.3 Résultat principal : Inégalité globale de Carleman

De ce qui précède, nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7) et $g \in L^2(\Sigma_T)$, il existe alors une constante positive C dépendant de Ω , ω et T telle que pour tout*

$$\psi \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

solution de (4.1)-(4.3) avec $g \in L^2(\Sigma_T)$, nous avons

$$\begin{aligned} s^2\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 + s^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 &\leq Cs^2\lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\ &\quad + Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla \tilde{\psi}|^2 \\ &\quad + Cs^3\lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\ &\quad + Cs^4\lambda^5 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-2s\alpha} \psi^2 + Cs^5\lambda^3 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\ &\quad + Cs^3\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 + Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2 \\ &\quad + Cs^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\ &\quad + Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\ &\quad + Cs^2\lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\ &\quad + Cs^3\lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.40)$$

4.3 Résultat principal : Inégalité globale de Carleman

Démonstration. Sachant que

$$\|L(\tilde{\psi})\|^2 + 2\langle L(\tilde{\psi}), G(\tilde{\psi}) \rangle + \|G(\tilde{\psi})\|^2 = 0,$$

il s'en suit que

$$\|L(\tilde{\psi})\|^2 + 2\langle L(\tilde{\psi}), G(\tilde{\psi}) \rangle \leq 0$$

et en combinant les équations (4.33) et (4.38) des propositions (4.2) et (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} 0 \geq \|L(\tilde{\psi})\|^2 + 2\langle L(\tilde{\psi}), G(\tilde{\psi}) \rangle &\geq -Cs^2\lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\ &\quad -Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla \tilde{\psi}|^2 \\ &\quad -Cs^3\lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\ &\quad -Cs^4\lambda^5 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-2s\alpha} \psi^2 - Cs^5\lambda^3 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\ &\quad -Cs^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) - Cs\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\ &\quad -Cs^2\lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\ &\quad -Cs^3\lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 d\sigma dt \\ &\quad +Cs^2\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 + Cs^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 \\ &\quad -Cs^3\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 - Cs^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2. \end{aligned}$$

D'où il découle l'inégalité (4.40). □

L'inégalité (4.40) est de type Carleman et proche de celle obtenue dans [10]. Les fonctions poids intervenant dans cette inégalité sont les mêmes que celles définies dans [46] dans le cas où la condition de bord est de type Dirichlet homogène. Mais ici, on note de plus dans le second membre la présence du terme non linéaire F du problème originel.

Corollaire 4.1. *Sous les hypothèses du théorème (4.1) on a :*

$$\begin{aligned}
 s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 &\leq C s^5 \lambda^5 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
 &\quad + C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi F(\psi) + C s^4 \lambda^4 \int_0^T \int_{\omega'} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 \\
 &\quad + C s^2 \lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\
 &\quad + C s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2 d\sigma dt.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Démonstration. Clairement, puisque $\xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 \geq 0$, on a

$$s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 \leq s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 + s^4 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2$$

et l'inégalité (4.40) s'écrit

$$\begin{aligned}
 s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 &\leq C s^2 \lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
 &\quad + C s \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi |\nabla \tilde{\psi}|^2 \\
 &\quad + C s^3 \lambda^3 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
 &\quad + C s^4 \lambda^5 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-2s\alpha} \psi^2 + C s^5 \lambda^3 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-2s\alpha} \psi^2 \\
 &\quad + C s^3 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 + C s^3 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2 \\
 &\quad + C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\
 &\quad + C s \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\
 &\quad + C s^2 \lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\
 &\quad + C s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 d\sigma dt
 \end{aligned}$$

Signalons que les 5 premiers termes du second membre de l'inéquation ci-dessous peuvent être absorbés par le terme $C s^5 \lambda^5 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right)$ de sorte que l'on

obtienne

$$\begin{aligned}
s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 &\leq C s^5 \lambda^5 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
&\quad + C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\
&\quad + C s \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} \psi F(\psi) \\
&\quad + C s^2 \lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-2s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\
&\quad + C s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Le corollaire est établi en remarquant que le terme $s \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi e^{-2s\alpha} \psi F(\psi)$ peut être absorbé par le terme $s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-2s\alpha} \psi F(\psi)$ et que $e^{-2s\alpha} \leq e^{-s\alpha}$. $\square$

On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 &\leq C s^5 \lambda^5 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right) \\
&\quad + C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi F(\psi) \\
&\quad + C s^2 \lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\
&\quad + C s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-2s\alpha} \psi^2 d\sigma dt
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Corollaire 4.2. *Sous les hypothèses du théorème (4.1) on a :*

$$\begin{aligned}
s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 &\leq C s^5 \lambda^5 \int_0^T \int_{\omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi F(\psi) \\
&\quad + C s^2 \lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\
&\quad + C s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2 d\sigma dt
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Le corollaire est établi en remarquant que le terme $s^5 \lambda^5 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \right)$ peut être absorbé par le terme $C s^5 \lambda^5 \int_0^T \int_{\omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2$

Démonstration. Comme par hypothèse

$$|\nabla \eta^0| \neq 0 \text{ dans } \overline{\Omega \setminus \omega'}$$

on a :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 |\nabla \eta^0|^4 \geq C_1 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 - C_1 \int_0^T \int_{\omega'} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2$$

on obtient alors :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 \leq C_1 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 |\nabla \eta^0|^4 + \int_0^T \int_{\omega'} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 \quad (4.44)$$

de même

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \leq C_1 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 |\nabla \eta^0|^4 + \int_0^T \int_{\omega'} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \quad (4.45)$$

En faisant la somme membre à membre de (4.44) et (4.45) et des propriétés de la fonctions η^0 , on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 &\leq C_2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + C_2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \\ &\quad + \int_0^T \int_{\omega'} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\omega'} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

En utilisant le fait que $\omega' \subset \omega$, alors le terme $\int_0^T \int_{\omega'} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\omega'} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2$ peut être absorbé par $\int_0^T \int_{\omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2$ (voir p.1409 de [23] et [45]).

On définit aisément, qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi^5 e^{-s\alpha} |\nabla \psi|^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 \quad (4.47)$$

On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 &\leq C s^5 \lambda^5 \int_0^T \int_{\omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 + C s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi F(\psi) \\ &\quad + C s^2 \lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt \\ &\quad + C s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2 d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.48)$$

□

En utilisant le fait que $\xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 \geq 0$ et $\xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2 \geq 0$ alors le terme $s^4 \lambda^4 \int_0^T \int_{\omega} \xi^4 e^{-s\alpha} \psi^2$ peut être absorbé par le terme $s^5 \lambda^5 \int_0^T \int_{\omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2$.

Enfin, en vertu des propriétés des fonctions ξ , α et η_0 , on déduit finalement le résultat principal qui est une estimation globale de type suivante.

Théorème 4.2. *Il existe une constante positive C dépendant de T , Ω et ω telle que pour tout*

$$\psi \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

nous avons

$$\begin{aligned} s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi^2 &\leq C \left(s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \psi F(\psi) + s^5 \lambda^5 \int_0^T \int_{\omega} \xi^5 e^{-s\alpha} \psi^2 \right. \\ &\quad \left. + s^2 \lambda^2 \int_{\Sigma_T} \xi^2 e^{-s\alpha} |\psi| |g| d\sigma dt + s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-s\alpha} \psi^2 d\sigma dt \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.4 Conclusion

L'inégalité obtenue est bien une inégalité de type Carleman d'un problème parabolique non linéaire avec la condition de Neumann non homogène. Elle fait intervenir des termes d'intégrales qui dépendent de la fonction non linéaire F et également de la fonction g .

Les résultats que nous obtiendrons de notre approche dépendront fortement de cette inégalité globale de Carleman qui permettra d'établir l'inégalité d'observabilité pour prouver la contrôlabilité à zéro du problème associé au problème parabolique non linéaire modélisant le phénomène d'ensablement.

APPROCHE NON STANDARD DU PROBLÈME INVERSE (2.37)-(2.39)

Sommaire

5.1	Problème associé	70
5.2	Problème adjoint contrôlé du système (5.11) - (5.13)	71
5.3	Reconstruction exacte de l'état initial du problème associé (5.7)- (5.9)	73
5.4	Approximation d'un couple contrôle / état admissible du pro- blème adjoint contrôlé	81
5.5	Approximation et schéma algorithmique du problème inverse originel (5.1)-(5.3)	91
5.6	Conclusion	94

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution du problème d'identification évoqué au chapitre 2 et qui constitue la problématique principale de cette thèse, à savoir : trouver $y(T)$ tel que l'on ait

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y + F(y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.1)$$

$$(\mathcal{A} \nabla y) \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.2)$$

$$y|_{\chi_\omega} = y_{obs} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \quad (5.3)$$

Une approche non standard a été déjà utilisée dans [10] dans un cas plus particulier de l'équation de la chaleur avec un terme linéaire $F(y) = \alpha y$ et où les conditions aux limites données sont de type Dirichlet homogènes. Le problème, ici, est plus général et introduit des difficultés supplémentaires très peu abordées dans la littérature. Outre la présence du terme non linéaire $F(y)$ dans l'équation d'état (5.1), la condition aux limites non homogène de Neumann n'est pas couramment utilisée dans la littérature.

5.1 Problème associé

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ ($N = 2$ ou 3) de frontière Γ assez régulière. Nous considérons dans un premier temps le problème suivant :

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla \bar{y} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (5.4)$$

$$(\mathcal{A} \nabla \bar{y}) \cdot n = g \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T) \quad (5.5)$$

$$\bar{y}(0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (5.6)$$

Sous des hypothèses convenables sur $\mathcal{A}$, le système (5.4)-(5.5)-(5.6), voir par exemple [7, 8, 9] admet une solution unique $\bar{y} \in C^1(0, T; H^1(\Omega))$ dès que $g \in C^0(0, T; L^2(\Gamma))$. En second abord, pour tout $\bar{u} \in C^1(0, T; H^1(\Omega))$ arbitrairement choisi, on considère le problème inverse suivant : Chercher $y(T)$ dépendant de $\bar{u}$ telle que y soit solution de

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y + \bar{F}(\bar{u})y = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (5.7)$$

$$(\mathcal{A} \nabla y) \cdot n = g \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T) \quad (5.8)$$

$$y|_{\omega} = y_{obs} \quad \text{dans} \quad \omega \times (0, T) \quad (5.9)$$

où $\bar{F}$ est une fonction à choisir convenablement plus tard. Moyennant le changement de variable

$$z = y - \bar{y} \quad (5.10)$$

on se ramène au problème d'identification suivant.

Problème 2. Chercher $z(T) \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla z + \overline{F}(\overline{u})z = -\overline{F}(\overline{u})\overline{y} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.11)$$

$$(\mathcal{A} \nabla z) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.12)$$

$$z\chi_\omega = y_{obs} - \overline{y}\chi_\omega = z_{obs} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \quad (5.13)$$

Nous nous sommes donc ramenés à un problème parabolique linéaire avec condition de Neumann homogène dont la reconstruction de $z(T)$ peut être adaptée à celle proposée dans ([10], [46]) pour un problème de diffusion de chaleur avec condition aux limites de Dirichlet homogène.

5.2 Problème adjoint contrôlé du système (5.11) - (5.13)

Admettons que z vérifie les équations (5.11), (5.12) et (5.13). Multiplions scalairement (5.11) par une fonction φ suffisamment régulière et intégrons sur $(0, T) \times \Omega$. On obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega z_t \varphi - \int_0^T \int_\Omega (\nabla \cdot \mathcal{A} \nabla z) \varphi + \int_0^T \int_\Omega \overline{F}(\overline{u})z \varphi = - \int_0^T \int_\Omega \overline{F}(\overline{u})\overline{y} \varphi \quad (5.14)$$

Le développement du premier terme du membre de gauche de (5.14) donne

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial z}{\partial t} \varphi = - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} z + \int_\Omega z(T) \varphi(T) - \int_\Omega z(0) \varphi(0) \quad (5.15)$$

Par ailleurs, grâce à la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_\Omega (\nabla \cdot \mathcal{A} \nabla z) \varphi &= - \int_0^T \int_\Omega \nabla \cdot (\varphi \mathcal{A} \nabla z) + \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi \cdot (\mathcal{A} \nabla z) \\ &= - \int_0^T \int_\Gamma \varphi (\mathcal{A} \nabla z) \cdot n + \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi \cdot (\mathcal{A} \nabla z) \end{aligned} \quad (5.16)$$

On peut facilement remarquer que

$$\nabla \varphi \cdot (\mathcal{A} \nabla z) = \nabla z \cdot (\mathcal{A}^T \nabla \varphi) \quad (5.17)$$

En effet, en écriture matricielle, le produit scalaire s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \nabla \varphi.(\mathcal{A} \nabla z) &= (\nabla \varphi)^T (\mathcal{A} \nabla z) \\
 &= (\mathcal{A} \nabla z)^T \nabla \varphi \\
 &= (\nabla z)^T \mathcal{A}^T \nabla \varphi \\
 &= \nabla z.(\mathcal{A}^T \nabla \varphi)
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \varphi.(\mathcal{A} \nabla z) &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla z.(\mathcal{A}^T \nabla \varphi) \\
 &= \int_0^T \int_{\Omega} \nabla.(z \mathcal{A}^T \nabla \varphi) - \int_0^T \int_{\Omega} z \nabla.(\mathcal{A}^T \nabla \varphi) \\
 &= \int_0^T \int_{\Gamma} z(\mathcal{A}^T \nabla \varphi).n - \int_0^T \int_{\Omega} z \nabla.(\mathcal{A}^T \nabla \varphi)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

D'où la relation (5.16) devient :

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla. \mathcal{A} \nabla z) \varphi &= - \int_0^T \int_{\Gamma} \varphi.(\mathcal{A} \nabla z).n + \int_0^T \int_{\Gamma} z.(\mathcal{A}^T \nabla \varphi).n \\
 &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} z \nabla.(\mathcal{A}^T \nabla \varphi)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

En remplaçant leurs expressions (5.15) et (5.20) dans (5.14) on obtient

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T \int_{\Omega} \overline{F}(\overline{u}) z \varphi &= - \int_0^T \int_{\Omega} z \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_{\Omega} z(T) \varphi(T) \\
 &\quad - \int_{\Omega} z(0) \varphi(0) - \int_0^T \int_{\Gamma} \varphi(\mathcal{A} \nabla z).n \\
 &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma} z(\mathcal{A}^T \nabla \varphi).n - \int_0^T \int_{\Omega} z \nabla.(\mathcal{A}^T \nabla \varphi)
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

qui peut s'écrire encore

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Omega} z \left[- \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla.(\mathcal{A}^T \nabla \varphi) + \overline{F}(\overline{u}) \varphi \right] &+ \int_{\Omega} z(T) \varphi(T) - \int_{\Omega} z(0) \varphi(0) \\
 - \int_0^T \int_{\Gamma} \varphi(\mathcal{A} \nabla z).n + \int_0^T \int_{\Gamma} z(\mathcal{A}^T \nabla \varphi).n &= - \int_0^T \int_{\Omega} \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Au regard de l'équation (5.22), nous formulons le problème adjoint contrôlé rétrograde suivant : pour tout $\widehat{\varphi} \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(0, T; L^2(\omega))$, chercher φ solution de

$$- \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla. \mathcal{A}^T \nabla \varphi + \overline{F}(\overline{u}) \varphi = \chi_{\omega} v \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{5.23}$$

$$(\mathcal{A}^T \nabla \varphi).n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \tag{5.24}$$

$$\varphi(T) = \widehat{\varphi} \quad \text{dans } \Omega \tag{5.25}$$

5.3 Reconstruction exacte de l'état initial du problème associé (5.7)-(5.9)

où $\widehat{\varphi}$ est une donnée du problème. Il est bien connu, voir par exemple [10], que le problème rétrograde (5.23)-(5.25) admet bien une solution $\varphi \in C(0, T; L^2(\Omega) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)))$.

En vertu de l'équation (5.22), on a donc pour toute solution φ de (5.23)-(5.25),

$$\int_0^T \int_{\Omega} z \chi_{\omega} v + \int_{\Omega} z(T) \widehat{\varphi} - \int_{\Omega} z(0) \varphi(0) = - \int_0^T \int_{\Omega} \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi. \quad (5.26)$$

qui s'écrit encore

$$\int_0^T \int_{\omega} z_{obs} v + \int_{\Omega} z(T) \widehat{\varphi} - \int_{\Omega} z(0) \varphi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi = 0 \quad (5.27)$$

A cette étape, deux problèmes constituent notre préoccupation. Dans un premier temps si φ est déterminé, alors l'équation (5.27) est une équation intégrale d'inconnu $z(T)$. Sa résolution nécessite l'utilisation de méthodes numériques classiques et donc à cet effet plusieurs options peuvent se présenter à nous. Toutefois, la présence de $z(0)$ qui est aussi une inconnue constitue une difficulté qu'on peut contourner si on impose $\varphi(0) = 0$.

Nous devons pour cela déterminer au préalable un contrôle v convenable tel que l'on ait $\varphi(0) = 0$. C'est donc l'étude de la contrôlabilité à zéro du problème adjoint contrôlé qui est à faire, et particulièrement il faut calculer un contrôle adéquat.

5.3 Reconstruction exacte de l'état initial du problème associé (5.7)-(5.9)

Dans le but de donner un résultat de reconstruction exacte de $z(T)$ relativement à la connaissance de la mesure $z \chi_{\omega} = z_{obs}$, nous allons d'abord établir un résultat de type observabilité.

5.3.1 Inégalité d'observabilité

On donne l'inégalité de Carleman relative au problème associé.

On a le résultat suivant :

Proposition 5.1. *On suppose que $0 < \lambda < \lambda_0$ et $0 < s < s_0$ pour un λ_0 et s_0 donnés, il existe alors une constante positive C telle que*

$$\begin{aligned}
 s^2 \lambda^4 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} z^2 &\leq C \left(s^2 \lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 e^{-s\alpha} \overline{F}(\overline{u}) z^2 \right. \\
 &\quad + s^5 \lambda^5 \int_0^T \int_{\omega} \xi^5 e^{-s\alpha} z^2 \\
 &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} e^{-s\alpha} (\overline{F}(\overline{u}) \overline{y})^2 \\
 &\quad \left. + s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_T} \xi^3 e^{-s\alpha} z^2 ds \right)
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Ce résultat est une conséquence directe du résultat global de l'inégalité de Carlemann (4.49) que nous avons établi au chapitre 4 dans le cas où la fonction F est non linéaire. Dans le cas présent, il suffit de remplacer $F(z)$ par $\overline{F}(\overline{u})z$ et d'annuler la fonction g pour obtenir les résultats de la proposition.

On note de plus que la solution $\overline{y}$ du problème (5.4)-(5.5)-(5.6) apparait dans cette inégalité. Cette solution dépend elle même de la condition au bord g . Comme on va le voir, ce résultat sera fondamental dans la reconstruction de $z(T)$.

Remarque 5.1. *On peut prendre une fonction poids $\xi^5 e^{-s\alpha}$ de l'expression précédente comme nous pouvons le constater*

$$\exists \quad M > 0 \text{ tel que } \xi^5 e^{-s\alpha} \leq M$$

Considérons à présent une fonction de troncature θ de classe C^2 définie comme suit :

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \in [0, \frac{T}{4}] \\ 1, & \forall t \in [\frac{3T}{4}, T] \end{cases} \tag{5.29}$$

Posons

$$\overline{z}(x, t) = \theta(t) z(x, t). \tag{5.30}$$

5.3 Reconstruction exacte de l'état initial du problème associé (5.7)-(5.9)

Il vient que

$$\bar{z}(0) = 0 \text{ et } \bar{z}(T) = z(T). \quad (5.31)$$

En réécrivant le problème 2 avec la variable $\bar{z}$ on obtient le problème suivant :

$$\partial_t \bar{z} - \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) + \bar{F}(\bar{u}) \bar{z} = \theta' z - \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \theta \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.32)$$

$$(\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.33)$$

$$\bar{z}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (5.34)$$

Force est de constater que pour avoir une estimation de $\bar{z}(T)$ et donc de $z(T)$, on peut utiliser une estimation de type énergie en multipliant par $\bar{z}$ l'équation (5.32). Il vient

$$\partial_t \bar{z} \cdot \bar{z} - \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \bar{z} + \bar{F}(\bar{u}) \bar{z}^2 - \theta' z \bar{z} = 0.$$

En intégrant sur $(0, T) \times \Omega$ et en remarquant que $\partial_t \bar{z} \cdot \bar{z} = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \bar{z}^2)$ il s'ensuit :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{z}^2(T) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{z}^2(0) - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \bar{z} + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \bar{z}^2 = \int_0^T \int_{\Omega} \theta' z \bar{z}$$

mais

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \bar{z} &= - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \cdot (\bar{z} \mathcal{A} \nabla \bar{z}) + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \nabla \bar{z} \\ &= - \int_0^T \int_{\Gamma} \bar{z} (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \cdot n + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \bar{z} (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \end{aligned} \quad (5.35)$$

donc

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{z}^2(T) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{z}^2(0) - \int_0^T \int_{\Gamma} \bar{z} (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \cdot n + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \bar{z} (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) - \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \bar{z}^2 - \int_0^T \int_{\Omega} \theta' \theta z^2 = 0.$$

Comme $(\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \cdot n = 0$ sur $\Gamma \times (0, T)$ on a :

$$\int_0^T \int_{\Gamma} \bar{z} (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) \cdot n = 0$$

et sachant que $\bar{z}(0) = 0$, on obtient :

$$\int_{\Omega} \bar{z}^2(T) = 2 \left(- \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \bar{z} (\mathcal{A} \nabla \bar{z}) + \int_0^T \int_{\Omega} \theta' \theta z^2 - \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \theta \bar{y} \bar{z} \right).$$

5.3 Reconstruction exacte de l'état initial du problème associé (5.7)-(5.9)

Compte tenu de la positivité de $\mathcal{A}$ et si de plus l'on a choisi $\bar{F}$ telle que $\bar{F}(\bar{u}) > 0$ et que $\theta' = 0$ sur $[0, \frac{T}{4}] \cup [\frac{3T}{4}, T]$ alors on peut déduire

$$\int_{\Omega} z(T)^2 \leq \int_0^T \int_{\Omega} \theta' \theta z^2 - \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \theta^2 z$$

En application de l'inégalité de Young nous pouvons écrire

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \theta^2 \bar{y} z \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{F}(\bar{u}) \theta \bar{y})^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \theta^2 z^2,$$

qu'on peut reformuler par

$$- \left(\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{F}(\bar{u}) \theta \bar{y})^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \theta^2 z^2 \right) \leq \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \theta^2 \bar{y} z \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{F}(\bar{u}) \theta \bar{y})^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \theta^2 z^2.$$

En conséquence

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \theta^2 \bar{y} z \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{F}(\bar{u}) \theta \bar{y})^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \theta^2 z^2$$

d'où l'on déduit

$$\int_{\Omega} z^2(T) \leq \int_0^T \int_{\Omega} \theta' \theta z^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{F}(\bar{u}) \theta \bar{y})^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \theta^2 z^2.$$

Compte tenu des propriétés de $\theta(t)$, on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} \theta' \theta z^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \theta^2 z^2 \leq C \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_{\Omega} z^2.$$

En vertu de la proposition (5.1), les fonctions poids étant bornées sur $[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}]$ (voir la remarque (5.1)), on en déduit

$$\int_{\Omega} z^2(T) \leq C \left(\int_0^T \int_{\omega} z^2 + \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{F}(\bar{u}) \bar{y})^2 \right).$$

On peut alors énoncer :

Théorème 5.1. *Il existe une constante $C(\Omega, T, \omega) > 0$ telle que toute solution z du système (5.7)-(5.9) vérifie l'inégalité suivante :*

$$\|z(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^T \int_{\omega} z_{obs}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{F}(\bar{u}) \bar{y})^2 \right) \quad (5.36)$$

Ce résultat est bien un résultat d'observabilité.

5.3.2 L'équation intégrale de reconstruction

En corollaire du théorème (5.1), nous pouvons énoncer avec précision ce qui suit.

Théorème 5.2. $\forall \hat{\varphi} \in L^2(\Omega), \exists v(\hat{\varphi}) \in L^2(0, T, L^2(\omega))$ telle que la solution φ de (5.23), (5.24) et (5.25) satisfasse $\varphi(0) = 0$.

Ce résultat de contrôlabilité exacte à zéro se révèle très utile dans le processus de reconstruction.

Dans la suite, nous appellerons contrôle admissible tout contrôle $\bar{v} \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ tel que la solution correspondante $\varphi_{\bar{v}}$ au problème (5.23)-(5.25) satisfasse $\varphi_{\bar{v}}(0) = 0$.

Précisément, pour tout $\hat{\varphi}$ fixé, nous posons

$$\mathcal{U}_{adm} = \{(v, \varphi) \text{ tel que } \varphi = \varphi_v, \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi(T) = \hat{\varphi}\} \quad (5.37)$$

l'ensemble de couples contrôle / état admissibles. En vertu du théorème (5.2) cet ensemble est non vide.

Finalement, nous pouvons énoncer le résultat de reconstruction comme suit :

Proposition 5.2. *Pour tout couple $(\bar{v}, \bar{\varphi}) \in \mathcal{U}_{adm}$,*

$$\int_0^T \int_{\omega} z_{obs} \bar{v} + \int_{\Omega} z(T) \bar{\varphi}(T) + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \bar{\varphi} = 0 \quad (5.38)$$

L'équation (5.38) permet de déterminer $z(T)$ connaissant un couple admissible $(\bar{v}, \bar{\varphi})$. Nous proposons par la suite une procédure d'approximation d'un couple admissible pour la reconstruction de $z(T)$. Mais avant de donner un algorithme général de reconstruction de $z(T)$ et donc de $y(T; \bar{u})$, il est légitime de se poser la question de la stabilité ou encore celle de la sensibilité du résultat en fonction des données mesurées.

5.3 Reconstruction exacte de l'état initial du problème associé (5.7)-(5.9)

Proposition 5.3. *Si $z_1(T)$ est solution du problème associé aux données z_{obs1} et $z_2(T)$ est solution du problème associé aux données z_{obs2} alors on a*

$$\int_{\Omega} |z_1(T) - z_2(T)| \leq C \int_0^T \int_{\omega} |z_{obs1} - z_{obs2}| \quad (5.39)$$

Preuve : $\forall \hat{\varphi} \in L^2(\Omega), \exists (v, \varphi_v) \in \mathcal{U}_{adm}$ tel que

$$\int_0^T \int_{\omega} z_{obs} v + \int_{\Omega} z(T) \hat{\varphi} - \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \varphi_v = 0 \quad (5.40)$$

où φ_v est solution du problème adjoint contrôlé. On a :

$$\int_0^T \int_{\omega} z_{obs1} v(\hat{\varphi}) + \int_{\Omega} z_1(T) \hat{\varphi} - \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \varphi_v = 0 \quad (5.41)$$

$$\int_0^T \int_{\omega} z_{obs2} v(\hat{\varphi}) + \int_{\Omega} z_2(T) \hat{\varphi} - \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \varphi_v = 0 \quad (5.42)$$

En soustrayant (5.41) de (5.42), il vient

$$\int_0^T \int_{\omega} (z_{obs1} - z_{obs2}) v(\hat{\varphi}) + \int_{\Omega} (z_1(T) - z_2(T)) \hat{\varphi} = 0 \quad (5.43)$$

En vertu de (5.38) on déduit que pour tout $\hat{\varphi} \in L^2(\Omega)$, il existe $v(\hat{\varphi}) \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ tel que

$$\int_{\Omega} (z_1(T) - z_2(T)) \hat{\varphi} = \int_0^T \int_{\omega} (z_{obs2} - z_{obs1}) v(\hat{\varphi}) \quad (5.44)$$

En considérant $\hat{\varphi} \in L^2(\Omega)$ tel que $\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ alors on obtient

$$\sup_{\hat{\varphi} \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} (z_1(T) - z_2(T)) \hat{\varphi} \right| \leq \int_0^T \int_{\omega} |z_{obs2} - z_{obs1}| \sup_{\hat{\varphi} \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\Omega)}=1} \|v(\hat{\varphi})\| \quad (5.45)$$

En posant $C = \sup_{\hat{\varphi} \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\Omega)}=1} \|v(\hat{\varphi})\|$ il vient :

$$\sup_{\hat{\varphi} \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\Omega)}=1} \left| \int_{\Omega} (z_1(T) - z_2(T)) \hat{\varphi} \right| \leq C \int_0^T \int_{\omega} |z_{obs2} - z_{obs1}|.$$

5.3 Reconstruction exacte de l'état initial du problème associé (5.7)-(5.9)

En choisissant $\widehat{\varphi}$ tel que $\widehat{\varphi} = +1$ ou -1 dans Ω , alors $\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} = |\Omega|$ et

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |z_1(T) - z_2(T)| \leq C \int_0^T \int_{\omega} |z_{obs2} - z_{obs1}|.$$

Puisque Ω est borné alors on déduit que

$$\int_{\Omega} |z_1(T) - z_2(T)| \leq C \int_0^T \int_{\omega} |z_{obs2} - z_{obs1}|.$$

avec $C = C(\Omega, T)$ indépendant de z_{obs1} et z_{obs2} . □

Remarque 5.2. *Le problème qui consiste à déterminer $z(T)$ comme solution de l'équation intégrale est bien posé au sens de Hadamard et ceci en vertu des propositions (5.2) et (5.3). Il est donc clair que l'équation intégrale (5.38) admet une unique solution.*

5.3.3 L'algorithme de reconstruction

De ce qui précède, nous venons d'établir un processus de reconstruction de $z(T)$ et donc de $y(T)$ à l'aide de l'équation intégrale (5.38) et que cette solution est en vertu de la proposition (5.3) stable par rapport aux observations (ou les mesures). Ce qui, d'un point numérique, est très précieux. Toutefois, il faudrait avant tout déterminer le couple admissible état final / contrôle $(\widehat{\varphi}, v(\widehat{\varphi}))$. Admettons a priori que le couple $(\widehat{\varphi}, v(\widehat{\varphi}))$ est donné. Alors l'algorithme de reconstruction est donné par ce qui suit :

Algorithme 1. *Processus de reconstruction de l'état à l'instant T du problème associé (5.7)-(5.9).*

1. *Arguments d'entrée :*

- $g \in L^2(\Gamma)$
- Poser $z_{obs} = y_{obs} - \bar{y}\chi_{\omega}$.
- Choisir judicieusement $\bar{u} \in C^1(0, T; H^1(\Omega))$.
- Donner une fonction $\bar{F}$ bien choisie.

2. Calculer $\bar{y}(t)$ solution du problème (5.4)-(5.5)-(5.6) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla \bar{y} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ (\mathcal{A} \nabla \bar{y}) \cdot n &= g \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ \bar{y}(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

3. Déterminer $(\hat{\varphi}, v(\hat{\varphi})) \in \mathcal{U}_{adm}$, c'est-à-dire la solution $\varphi_{\hat{v}}$ correspondante du système rétrograde suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A}^T \nabla \varphi + \bar{F}(\bar{u})\varphi &= \chi_{\omega} v \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ (\mathcal{A}^T \nabla \varphi) \cdot n &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ \varphi(T) &= \hat{\varphi} \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

satisfaisant $\varphi_{\hat{v}}(0) = 0$.

4. Déterminer $z(T)$ solution de l'équation intégrale (5.38) :

$$\int_0^T \int_{\omega} z_{obs} v(\hat{\varphi}) + \int_{\Omega} z(T) \varphi(T) + \int_0^T \int_{\Omega} \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \varphi = 0$$

5. En considérant $y(t; \bar{u})$ la solution du problème associé :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y + \bar{F}(\bar{u})y &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ (\mathcal{A} \nabla y) \cdot n &= g \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ y \chi_{\omega} &= y_{obs} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \end{aligned}$$

alors

$$y(T; \bar{u}) = z(T) + \bar{y}$$

□

La solution de l'équation intégrale (voir (5.38)) exige le calcul d'un couple (contrôle, état admissible) du problème adjoint contrôlé.

5.4 Approximation d'un couple contrôle / état admissible du problème adjoint contrôlé

5.4.1 Formulation du problème de contrôle approché

Nous avons établi (voir section précédente) que la reconstruction de l'état à l'instant T dépend du calcul de $(v, \varphi_v) \in \mathcal{U}_{adm}$. Nous donnons ici une procédure pour approcher un couple admissible (v, φ_v) . Dans un premier temps on a :

Proposition 5.4. *Il existe un unique couple $(\bar{v}, \bar{\varphi}) \in \mathcal{U}_{adm}$ solution de*

$$\|\bar{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} = \min_{(v, \varphi_v) \in \mathcal{U}_{adm}} \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \quad (5.46)$$

En utilisant des résultats classiques d'analyse fonctionnelle (continuité, coercivité et convexité de $K(v) = \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))}$) on montre clairement qu'il existe une unique solution du problème (5.46).

Dans la suite, on notera $(\bar{\varphi}, \bar{v})$ la solution de (5.46). Nous utilisons maintenant une technique de pénalisation pour approcher cette solution. Pour $\hat{\varphi} \in L^2(\Omega)$ fixé, nous désignons par φ_v la solution du problème adjoint contrôlé avec pour contrôle v et condition finale $\hat{\varphi}$. Pour $\alpha > 0$ on considère J_α défini par

$$J_\alpha(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v|^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_v^2(0) \quad (5.47)$$

Considérons maintenant le problème : Chercher v_α tel que

$$J_\alpha(v_\alpha) = \min_{v \in L^2(0,T;L^2(\omega))} J_\alpha(v) \quad (5.48)$$

En utilisant, de nouveau, des résultats classiques d'analyse fonctionnelle (continuité, coercivité et convexité de J_α), on montre aussi qu'il existe un unique $v_\alpha \in L^2(0,T;L^2(\omega))$ solution de (5.48).

On établit maintenant un résultat de convergence.

Proposition 5.5. *La solution v_α du problème d'optimisation pénalisé (5.48) converge dans $L^2(0, T; L^2(\omega))$, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, vers la solution $\bar{v}$ où $(\bar{v}, \bar{\varphi})$ est solution du problème (5.46).*

Preuve : Soit $\bar{v}$ le contrôle à zéro de norme minimale qui existe en vertu de la proposition (5.4) et $\bar{\varphi}$ la solution correspondante du problème adjoint contrôlé telle que $\bar{\varphi}(T) = \hat{\varphi}$. Puisque $\bar{\varphi}(0) = 0$, on a

$$J_\alpha(v_\alpha) \leq J_\alpha(\bar{v}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\bar{v}|^2.$$

On en déduit

$$\int_0^T \int_\omega |v_\alpha|^2 \leq \int_0^T \int_\omega |\bar{v}|^2$$

et

$$\frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_{v_\alpha(0)}^2 \leq \int_0^T \int_\omega |\bar{v}|^2$$

La suite (v_α) est donc bornée dans $L^2(0, T; L^2(\omega))$ et l'on peut extraire une sous suite notée encore (v_α) telle que

$$v_\alpha \rightharpoonup v^* \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; L^2(\omega))$$

En considérant l'argument de continuité de la solution du problème adjoint contrôlé relativement au second membre de l'équation d'état, les conditions aux limites et initiale étant fixées, on en déduit que

$$\varphi_{v_\alpha} \rightarrow \varphi_{v^*} \quad \text{dans} \quad C(0, T; L^2(\Omega))$$

donc

$$\varphi_{v_\alpha}(0) \rightarrow \varphi_{v^*}(0) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Or pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^T \int_\omega |v_\alpha|^2 \leq \int_0^T \int_\omega |\bar{v}|^2$$

puisque $v_\alpha \rightharpoonup v^*$ alors, on a aussi

$$\int_0^T \int_\omega |v^*|^2 \leq \int_0^T \int_\omega |\bar{v}|^2.$$

Mais $\bar{v}$ étant de norme minimale, on a aussi

$$\int_0^T \int_{\omega} |\bar{v}|^2 \leq \int_0^T \int_{\omega} |v^*|^2,$$

il en découle que $\bar{v} = v^*$.

Ce qui achève la démonstration. □

On notera, grâce à l'argument de continuité que $\varphi_{v_\alpha} \longrightarrow \bar{\varphi}$ dans $C(0, T; L^2(\Omega))$.

5.4.2 Caractérisation du contrôle v_α

Dans cette section, nous allons donner une méthode d'approximation dans laquelle nous utilisons un problème classique de contrôle optimal et nous prouvons la convergence de cette approximation. Fixons $\hat{\varphi} \in L^2(\Omega)$. Nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.3. *Pour tout $\alpha > 0$, la solution $v_\alpha \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ du problème (5.48) est caractérisée par le système d'optimalité suivant*

$$-\partial_t \varphi_\alpha - \nabla \cdot \mathcal{A}^T \nabla \varphi_\alpha + \bar{F}(\bar{u}) \varphi_\alpha = v_\alpha \chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.49)$$

$$(\mathcal{A}^T \nabla \varphi_\alpha) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.50)$$

$$\varphi_\alpha(T) = \hat{\varphi} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.51)$$

$$\partial_t p_\alpha - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla p_\alpha + \bar{F}(\bar{u}) p_\alpha = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.52)$$

$$(\mathcal{A} \nabla p_\alpha) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.53)$$

$$p_\alpha(0) = -\frac{1}{\alpha} \varphi_\alpha(0) \quad \text{dans } \Omega \quad (5.54)$$

$$p_\alpha - v_\alpha = 0 \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \quad (5.55)$$

Preuve : Posons $\varphi_{v_\alpha} = \varphi_\alpha$ la solution du problème contrôlé avec v_α . En vertu de ce qui

précède cette solution satisfait bien le système d'équations :

$$-\partial_t \varphi_\alpha - \nabla \cdot \mathcal{A}^T \nabla \varphi_\alpha + \overline{F}(\bar{u}) \varphi_\alpha = v_\alpha \chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.56)$$

$$(\mathcal{A}^T \nabla \varphi_\alpha) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.57)$$

$$\varphi_\alpha(T) = \widehat{\varphi} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.58)$$

Pour s suffisamment petit, la solution du problème adjoint contrôlé $\varphi_{v_\alpha+sh}$ satisfait également le système suivant :

$$-\partial_t \varphi_{v_\alpha+sh} - \nabla \cdot \mathcal{A}^T \nabla \varphi_{v_\alpha+sh} + \overline{F}(\bar{u}) \varphi_{v_\alpha+sh} = v_\alpha \chi_\omega + sh \chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.59)$$

$$(\mathcal{A}^T \nabla \varphi_{v_\alpha+sh}) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.60)$$

$$\varphi_{v_\alpha+sh}(T) = \widehat{\varphi} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.61)$$

Posons

$$\phi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi_{v_\alpha+sh} - \varphi_{v_\alpha}}{s},$$

alors on a

$$-\partial_t \phi - \nabla \cdot \mathcal{A}^T \nabla \phi + \overline{F}(\bar{u}) \phi = h \chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.62)$$

$$(\mathcal{A}^T \nabla \phi) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.63)$$

$$\phi(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.64)$$

Par ailleurs

$$J_\alpha(v_\alpha + sh) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega (v_\alpha + sh)^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_{v_\alpha+sh}^2(0) \quad (5.65)$$

$$\frac{J_\alpha(v_\alpha + sh) - J_\alpha(v_\alpha)}{s} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega v_\alpha^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega s^2 h^2 \right. \quad (5.66)$$

$$\left. + \int_0^T \int_\omega v sh \right) + \frac{1}{2\alpha s} \int_\Omega \varphi_{v_\alpha+sh}^2(0) \quad (5.67)$$

$$- \frac{1}{2s} \int_0^T \int_\omega v_\alpha^2 - \frac{1}{2\alpha s} \int_\Omega \varphi_{v_\alpha}^2(0) \quad (5.68)$$

d'où

$$\frac{J_\alpha(v_\alpha + sh) - J_\alpha(v_\alpha)}{s} = \frac{1}{2}s \int_0^T \int_\omega h^2 + \int_0^T \int_\omega v_\alpha h + \frac{1}{2\alpha s} \int_\Omega \varphi_{v_\alpha + sh}^2(0) - \frac{1}{2\alpha s} \int_\Omega \varphi_{v_\alpha}^2(0)$$

et en passant à la limite lorsque $s \rightarrow 0$, on obtient

$$\nabla J_\alpha(v_\alpha).h = \int_0^T \int_\omega v_\alpha h + \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega (2\varphi_{v_\alpha}(0)) \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi_{v_\alpha + sh}(0) - \varphi_{v_\alpha}(0)}{s} \right).$$

Or

$$\phi(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi_{v_\alpha + sh}(0) - \varphi_{v_\alpha}(0)}{s},$$

d'où

$$\nabla J_\alpha(v_\alpha).h = \int_0^T \int_\omega v_\alpha h + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega \varphi_{v_\alpha}(0) \phi(0).$$

D'après la condition d'optimalité de J_α , on en déduit

$$- \int_0^T \int_\omega v_\alpha h = \frac{1}{\alpha} \int_\Omega \varphi_{v_\alpha}(0) \phi(0) \quad \forall \quad h \quad (5.69)$$

Considérons maintenant p_α solution du problème

$$\partial_t p_\alpha - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla p_\alpha + \overline{F}(\overline{u}) p_\alpha = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (5.70)$$

$$(\mathcal{A} \nabla p_\alpha).n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T) \quad (5.71)$$

$$p_\alpha(0) = p_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (5.72)$$

pour un p_0 à déterminer.

En multipliant scalairement l'équation (5.70) par ϕ et en intégrant sur $\Omega \times (0, T)$ en utilisant la formule de Green, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega p_\alpha [-\partial_t \phi - \nabla \cdot \mathcal{A}^T \nabla \phi + \overline{F}(\overline{u}) \phi] + \int_\Omega p_\alpha(T) \phi(T) - \int_\Omega p_\alpha(0) \phi(0) \\ - \int_0^T \int_\Gamma \phi (\mathcal{A} \nabla p_\alpha).n + \int_0^T \int_\Gamma p_\alpha (\mathcal{A}^T \nabla \phi).n = 0 \end{aligned}$$

Or

$$-\partial_t \phi - \nabla \cdot \mathcal{A}^T \nabla \phi + \overline{F}(\bar{u})\phi = h\chi_\omega, (\mathcal{A}\nabla p_\alpha) \cdot n = 0 \text{ et } (\mathcal{A}^T \nabla \phi) \cdot n = 0,$$

on obtient alors,

$$\int_0^T \int_\Omega p_\alpha h \chi_\omega - \int_\Omega p_\alpha(0)\phi(0) = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^T \int_\omega p_\alpha h = \int_\Omega p_\alpha(0)\phi(0). \quad (5.73)$$

En additionnant membre à membre les deux égalités (5.69) et (5.73), on aboutit à l'égalité :

$$\int_0^T \int_\omega (p_\alpha - v_\alpha) \cdot h = \frac{1}{\alpha} \int_\Omega (\alpha p_\alpha(0) + \varphi_{v_\alpha}(0))\phi(0) \quad \forall \quad h. \quad (5.74)$$

En choisissant $p_\alpha(0) = p_0 = -\frac{1}{\alpha}\varphi_{v_\alpha}(0)$ alors

$$\int_0^T \int_\omega (p_\alpha - v_\alpha) \cdot h = 0 \quad \forall \quad h \quad (5.75)$$

d'où $p_\alpha = v_\alpha$ sur $L^2(0, T; L^2(\omega))$ et le système d'optimalité est complètement vérifié. $\square$

D'après ce qui précède p_α satisfait alors le système suivant :

$$\partial_t p_\alpha - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla p_\alpha + \overline{F}(\bar{u})p_\alpha = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (5.76)$$

$$(\mathcal{A} \nabla p_\alpha) \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T) \quad (5.77)$$

$$p_\alpha(0) = -\frac{1}{\alpha}\varphi_{v_\alpha}(0) \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (5.78)$$

Théorème 5.4. *Soit $(v_\alpha, \varphi_\alpha)$ solution du système optimal. Alors la suite (p_α) où p_α est solution de (5.76)-(5.78) converge vers $\bar{p}$ satisfaisant le système suivant*

$$\partial_t \bar{p} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla \bar{p} + \overline{F}(\bar{u})\bar{p} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (5.79)$$

$$(\mathcal{A} \nabla \bar{p}) \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T) \quad (5.80)$$

$$\bar{p} = \bar{v} \quad \text{dans} \quad \omega \times (0, T). \quad (5.81)$$

Preuve : On définit le produit scalaire $\langle p, q \rangle = \int_0^T \int_{\omega} pq$.

D'autre part la fonction $q \mapsto \int_{\Omega} \widehat{\varphi}q(T)$ est une forme linéaire continue. D'après le théorème de Riesz, toute forme linéaire continue peut s'écrire en un produit scalaire. On a alors

$$\exists \text{ un unique } p \text{ tel que } \forall q \int_{\Omega} \widehat{\varphi}q(T) = \langle p, q \rangle = \int_0^T \int_{\omega} pq \quad (5.82)$$

En multipliant scalairement la première équation du problème adjoint contrôlé par q et en intégrant sur $\Omega \times (0, T)$ en utilisant la formule de Green, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_{\alpha} [\partial_t q - \nabla \cdot A \nabla q + \overline{F}(\overline{u})q] + \int_{\Omega} \widehat{\varphi}q(T) - \int_{\Omega} \varphi_{\alpha}(0)q(0) \\ - \int_0^T \int_{\Gamma} q(\mathcal{A}^T \nabla \varphi_{\alpha}) \cdot n + \int_0^T \int_{\Gamma} \varphi_{\alpha}(\mathcal{A} \nabla q) \cdot n = \int_0^T \int_{\omega} qv_{\alpha}. \end{aligned}$$

Si q vérifie

$$\partial_t q - \nabla \cdot A \nabla q + \overline{F}(\overline{u})q = 0, \quad (\mathcal{A}^T \nabla \varphi_{\alpha}) \cdot n = 0 \text{ et } (\mathcal{A} \nabla q) \cdot n = 0$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} \widehat{\varphi}q(T) - \int_{\Omega} \varphi_{\alpha}(0)q(0) = \int_0^T \int_{\omega} qv_{\alpha}.$$

Or de ce qui précède on a $v_{\alpha} = p_{\alpha}$ dans $\omega \times (0, T)$. D'où on obtient l'égalité

$$\int_0^T \int_{\omega} p_{\alpha}q = \int_{\Omega} \widehat{\varphi}q(T) - \int_{\Omega} \varphi_{\alpha}(0)q(0).$$

Si α tend vers 0 alors $p_{\alpha} \longrightarrow \overline{p}$ et $\varphi_{\alpha}(0) = 0$

Par conséquent,

$$\int_0^T \int_{\omega} \overline{p}q = \int_{\Omega} \widehat{\varphi}q(T)$$

où $\overline{p}$ est la solution de (5.82). Comme la solution de (5.82) est unique on a alors $p = \overline{p}$. Notons que la fonction $\overline{p}$ n'est pas définie à l'instant $t = 0$, mais elle satisfait le système suivant :

$$\partial_t \overline{p} - \nabla \cdot A \nabla \overline{p} + \overline{F}(\overline{u})\overline{p} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.83)$$

$$(\mathcal{A} \nabla \overline{p}) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.84)$$

$$\overline{p} = \overline{v} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \quad (5.85)$$

Corollaire 5.1. *Soit $(v_\alpha, \varphi_\alpha)$ solution du système optimal. Alors, quand $\alpha \rightarrow 0$,*

$$-\int_0^T \int_\Omega \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi_\alpha - \int_0^T \int_\omega v_\alpha z_{obs} \rightarrow \int_\Omega z(T) \widehat{\varphi} \quad (5.86)$$

où z est la solution du problème associé inverse (5.11)(5.13).

En effet, en corollaire du théorème, $z(T)$ peut être approchée par $z_\alpha(T)$ où $z_\alpha(T)$ est solution de

$$\int_\Omega z_\alpha(T) \widehat{\varphi} + \int_0^T \int_\Omega \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi_\alpha + \int_0^T \int_\omega z_{obs} v_\alpha = \int_\Omega \overline{p}(0) \varphi_\alpha(0) \quad (5.87)$$

quand $\alpha \rightarrow 0$, on a $\varphi_\alpha(0) \rightarrow \overline{\varphi}(0) = 0$. D'où

$$-\int_0^T \int_\Omega \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi_\alpha - \int_0^T \int_\omega v_\alpha z_{obs} \rightarrow \int_\Omega z(T) \widehat{\varphi} \quad (5.88)$$

□

Nous allons maintenant terminer cette section en donnant un résultat de convergence de l'approximation.

Théorème 5.5 (Ordre de Convergence). *Supposons que la fonction $\overline{p}$, solution de (5.82), satisfait*

$$\overline{p} \in C((0, T); L^2(\Omega)). \quad (5.89)$$

Alors on a :

- $\|\varphi_\alpha(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\alpha \|\overline{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$
- $\|\overline{v} - v_\alpha\|_{L^2((0, T); L^2(\omega))} \leq 2\alpha^{\frac{1}{2}} \|\overline{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$
- $\left| \int_\Omega z(T) \widehat{\varphi} + \int_0^T \int_\Omega \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi_\alpha + \int_0^T \int_\omega z_{obs} v_\alpha \right| \leq C\alpha^{\frac{1}{2}} \|\overline{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$

où $C(\omega, T)$ est indépendante de α et $\widehat{\varphi}$.

Preuve : On peut écrire

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v_\alpha - \overline{v}|^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_v^2(0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\overline{v}|^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v_\alpha|^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_v^2(0) - \int_0^T \int_\omega v_\alpha \overline{v}$$

$$\begin{aligned}
&= J_\alpha(v_\alpha) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\bar{v}|^2 - \int_0^T \int_\omega v_\alpha \bar{v} \\
&\leq J_\alpha(\bar{v}) + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\bar{v}|^2 - \int_0^T \int_\omega v_\alpha \bar{v} \\
&\leq \int_0^T \int_\omega (\bar{v} - v_\alpha) \bar{v}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v_\alpha - \bar{v}|^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_v^2(0) \leq \int_0^T \int_\omega (\bar{v} - v_\alpha) \bar{v}$$

La fonction $\psi = \bar{\varphi} - \varphi_\alpha$ satisfait le système suivant

$$-\partial_t \psi - \nabla \cdot \mathcal{A}^T \nabla \psi + \bar{F}(\bar{u}) \psi = (\bar{v} - v_\alpha) \chi_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.90)$$

$$(\mathcal{A}^T \nabla \psi) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.91)$$

$$\psi(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (5.92)$$

$$\psi(0) = -\varphi_\alpha(0) \quad \text{dans } \Omega \quad (5.93)$$

□

En multipliant la première équation du système par $\bar{p}$ puis en intégrant sur $\Omega \times (0, T)$ ainsi qu'en utilisant le fait que

$$\bar{p} = \bar{v}.$$

On obtient

$$\int_0^T \int_\omega (\bar{v} - v_\alpha) \bar{v} = \int_\Omega \varphi_\alpha(0) \bar{p}(0).$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz on a alors

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v_\alpha - \bar{v}|^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_v^2(0) \leq \|\varphi_\alpha(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.94)$$

De même on a :

$$\frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_v^2(0) \leq \|\varphi_\alpha(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ce qui entraine l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2\alpha} \|\varphi_\alpha(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\varphi_\alpha(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors

$$\frac{1}{2\alpha} \|\varphi_\alpha(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\|\varphi_\alpha(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\alpha \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

De même on a aussi l'inégalité :

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v_\alpha - \bar{v}|^2 \leq \|\varphi_\alpha(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

On obtient

$$\left(\int_0^T \int_\omega |v_\alpha - \bar{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(4\alpha \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\|v_\alpha - \bar{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \leq 2\alpha^{\frac{1}{2}} \|\bar{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a également

$$\int_\Omega z(T) \hat{\varphi} + \int_0^T \int_\Omega \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \varphi_\alpha + \int_0^T \int_\omega z_{obs} v_\alpha = \int_\Omega \bar{p}(0) \varphi_\alpha(0).$$

Or de ce qui précède on a aussi l'égalité suivante :

$$\int_0^T \int_\omega (\bar{v} - v_\alpha) \bar{v} = \int_\Omega \varphi_\alpha(0) \bar{p}(0).$$

On a alors

$$\int_\Omega z(T) \hat{\varphi} + \int_0^T \int_\Omega \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \varphi_\alpha + \int_0^T \int_\omega z_{obs} v_\alpha = \int_0^T \int_\omega (\bar{v} - v_\alpha) \bar{v}.$$

De l'inégalité de Cauchy Schwartz on a alors

$$\left| \int_\Omega z(T) \hat{\varphi} + \int_0^T \int_\Omega \bar{F}(\bar{u}) \bar{y} \varphi_\alpha + \int_0^T \int_\omega z_{obs} v_\alpha \right| \leq \left(\int_0^T \int_\omega |\bar{v} - v_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_\omega |\bar{v}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left| \int_{\Omega} z(T) \widehat{\varphi} + \int_0^T \int_{\Omega} \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi_{\alpha} + \int_0^T \int_{\omega} z_{obs} v_{\alpha} \right| \leq \|v_{\alpha} - \overline{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} C(T, \omega)$$

Or

$$\|v_{\alpha} - \overline{v}\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \leq 2\alpha^{\frac{1}{2}} \|\overline{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} z(T) \widehat{\varphi} + \int_0^T \int_{\Omega} \overline{F}(\overline{u}) \overline{y} \varphi_{\alpha} + \int_0^T \int_{\omega} z_{obs} v_{\alpha} \right| \leq C(T, \omega) \alpha^{\frac{1}{2}} \|\overline{p}(0)\|_{L^2(\Omega)}$$

où $C(T, \omega)$ est une constante indépendante de $\widehat{\varphi}$ et de α .

5.5 Approximation et schéma algorithmique du problème inverse originel (5.1)-(5.3)

Dans cette section, nous établissons un lien entre le problème inverse du problème non linéaire avec celui du problème linéaire associé. L'objectif est de calculer une bonne approximation de y au cours d'une période de temps de longueur T .

Il existe des travaux sur ces questions (voir par exemple [46],[10]). Certains d'entre eux utilisent une méthode de point fixe, d'autres établissent un résultat d'inversion locale.

La méthode utilisée dans cette section est une méthode itérative.

Considérons la suite $(y^k)_{k \geq 1} \subset C^1(0, T; H^1(\Omega))$ définie par :

$$\frac{\partial y^k}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y^k + \overline{F}(y^{k-1}) y^k = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (5.95)$$

$$(\mathcal{A} \nabla y^k) \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (5.96)$$

$$y^k \chi_{\omega} = y_{obs} \quad \text{dans } \omega \times (0, T). \quad (5.97)$$

Ce problème est un problème d'approximation successif pour tout $K = 1, 2, 3, \dots, \infty$. y^0 est choisi de manière arbitraire. De façon itérative, en posant que $\overline{u} = y^{k-1}$, y^k existe et $y^k(T)$ est identifié suivant la procédure d'algorithme précédent. De ce qui précède, il est clair que,

dès qu'on se donne y^0 quelconque dans $C^1(0, T; H^1(\Omega))$ par itération la suite (y^k) existe et est unique. Nous avons :

Théorème 5.6 (sur la convergence de la suite $(y^k)_{k \geq 1}$). *Sous l'hypothèse $\bar{F} \geq 0$, $y^k \rightharpoonup y$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. De plus, $\forall \phi \in H^1(\Omega)$,*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} y \phi + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y \nabla \phi - \int_{\Gamma} g \phi + \int_{\Omega} \bar{F}(y) y \phi = 0 \quad (5.98)$$

$$\int_{\omega} y \phi = \int_{\omega} y_{obs} \phi. \quad (5.99)$$

Démonstration. On multiplie (5.95) par y^k puis on intègre sur Ω . On obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (y^k)^2 + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y^k \nabla y^k - \int_{\Gamma} g y^k + \int_{\Omega} \bar{F}(y^{k-1}) (y^k)^2 = 0.$$

Or $\int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y^k \nabla y^k \geq 0$ et comme par hypothèse $\bar{F}(y^k) \geq 0$ alors $\int_{\Omega} \bar{F}(y^{k-1}) (y^k)^2 \geq 0$. Par conséquent,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (y^k)^2 \leq \int_{\Gamma} g y^k \leq \int_{\Gamma} |g| |y^k|.$$

En vertu de l'inégalité de Young on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (y^k)^2 \leq \|g\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))}^2 + \int_{\Omega} (y^k)^2.$$

Grâce au lemme de Gronwall, on en déduit

$$\|y^k\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C(\|g\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))}). \quad (5.100)$$

Par ailleurs, si on revient sur l'équation et on intègre sur $(0, T) \times \Omega$, on obtient

$$\frac{1}{2} \|y^k(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|y^k(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y^k \nabla y^k \leq \int_0^T \int_{\Gamma} g y^k.$$

Compte tenu de la continuité de $\mathcal{A}$, on a

$$\frac{1}{2} \|y^k(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|y^k(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla y^k\|^2 \leq \|g\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|y^k\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2.$$

Or on vient de montrer que $\|y^k\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C$ alors

$$\|\nabla y^k\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C. \quad (5.101)$$

D'où finalement (5.100) et (5.101) impliquent que

$$\|y^k\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.$$

Ceci entraîne donc que $y^k \rightharpoonup y$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$.

On a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} y^k \phi + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y^k \nabla \phi - \int_{\Gamma} g \phi + \int_{\Omega} \overline{F}(y^k) y^k \phi = 0.$$

En passant à la limite, puisque $y^k \rightharpoonup y$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} y \phi + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla y \nabla \phi - \int_{\Gamma} g \phi + \int_{\Omega} \overline{F}(y) y \phi &= 0 \\ \int_{\omega} y \phi &= \int_{\omega} y_{obs} \phi. \end{aligned}$$

□

Pour un choix approprié de $\overline{F}$:

$$\overline{F}(y) = \frac{F(y)}{y} \text{ si } y \neq 0 \text{ et } \overline{F}(0) = 0.$$

Il suffit alors de faire l'hypothèse de positivité de F :

$$F(0) = 0 \text{ et } \frac{F(y)}{y} > 0 \quad \forall \quad y \neq 0.$$

Dans ce cas, y est la solution faible du problème originel. Il s'ensuit que le schéma algorithmique du problème originel se résume aux points suivants :

Algorithme 2 (Schéma algorithmique du problème inverse originel).

- Définir $\overline{F}$:

$$\overline{F}(\overline{u}) = \frac{F(\overline{u})}{\overline{u}} \text{ si } \overline{u} \neq 0 \text{ et } \overline{F}(0) = 0.$$

- Prendre $y^0 \in C^1(0,T;H^1(\Omega))$ quelconque

- Poser $k = 1$
- Calculer y^1 en posant $\bar{u} = y^0$
- Tant que $\|y^k - y^{k-1}\| > \epsilon$
 - Poser $\bar{u} = y^k$
 - Calculer y^{k+1}
 - $k = k + 1$.
- Poser l'approximation : $y(T) = y^k(T)$

5.6 Conclusion

L'approche standard de l'assimilation variationnelle de données présente de grandes difficultés quant à l'unicité et la sensibilité des solutions par rapport aux observations. Par exemple dans la méthode de régularisation de Tikhonov, le plus souvent utilisée pour l'identification de l'état initial, il est impossible de donner une interprétation physique du coefficient de Tychonov $\alpha > 0$ et aussi en pratique l'information à priori est en général inconnue. Afin de contourner ces difficultés pour résoudre le problème inverse, nous avons développé une approche insensible aux variations infinitésimales des mesures et qui produit de solutions fiables. Par un processus de linéarisation de l'EDP gouvernant le système étudié et une transformation du problème en une suite de problème de contrôlabilité à zéro, nous avons construit la suite des états initiaux dont sa limite est solution du problème originel.

Le schéma algorithmique ainsi obtenu illustre bien la capacité de résoudre des problèmes d'identification à données manquantes. L'approche que nous avons proposée dans cette thèse constitue un premier pas vers l'élaboration d'un outil prévisionnel de l'ensablement d'un lac. Ceci nous permettrait de donner une estimation prévisionnelle de l'état du système pour le futur par la formule

$$y(t) = S_t(y_0) \text{ pour tout } t > t_0 = T$$

5.6 Conclusion

Les résultats obtenus donnent des conclusions intéressantes aussi bien que pour l'efficacité de l'approche utilisée qu'aux perspectives qui en découlent.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

6.1 Synthèse des travaux

Cette thèse a porté sur une résolution d'un problème inverse de type parabolique non linéaire avec condition de Neumann non homogène modélisant un phénomène d'ensablement des lacs décrit par le modèle suivant :

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y + F(y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (6.1)$$

$$(\mathcal{A} \nabla y) \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (6.2)$$

$$y \chi_\omega = y_{obs} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \quad (6.3)$$

Précisément, l'objectif principal de ce travail était d'élaborer un algorithme de reconstruction de la condition initiale par une approche de contrôlabilité.

Dans un premier temps, sous des hypothèses convenables sur F et g et pour toute mesure y_{obs} , nous avons associé au problème non linéaire ainsi considéré le problème inverse suivant : Chercher $y(T)$ dépendant de $\bar{u}$ telle que y soit solution de

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla y + \bar{F}(\bar{u})y = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (6.4)$$

$$(\mathcal{A} \nabla y) \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (6.5)$$

$$y \chi_\omega = y_{obs} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \quad (6.6)$$

où $\bar{u} \in C^1(0, T; H^1(\Omega))$ arbitrairement choisi.

Moyennant le changement de variable

$$z = y - \bar{y} \quad (6.7)$$

on s'est ramené au problème d'identification :

Problème 3. Chercher $z(T) \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla z + \bar{F}(\bar{u})z = -\bar{F}(\bar{u})\bar{y} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (6.8)$$

$$(\mathcal{A} \nabla z) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (6.9)$$

$$z\chi_\omega = y_{obs} - \bar{y}\chi_\omega = z_{obs} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \quad (6.10)$$

où $\bar{y}$ est une solution faible du système

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathcal{A} \nabla \bar{y} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (6.11)$$

$$(\mathcal{A} \nabla \bar{y}) \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \quad (6.12)$$

$$\bar{y}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (6.13)$$

Nous nous sommes donc ramenés à un problème parabolique linéaire avec condition de Neumann homogène dont la reconstruction de $z(T)$ s'apparente à celle d'un problème de diffusion de chaleur avec condition aux limites de Dirichlet homogène (voir : ([10], [46])).

Ensuite, notre contribution a consisté principalement à

- élaborer un outil fondamental pour l'étude de la contrôlabilité des EDPs de type parabolique non linéaire. Cet outil permet d'établir l'inégalité d'observabilité caractérisant la contrôlabilité à zéro du problème adjoint contrôlé qui s'est révélé très précieux dans le processus de reconstruction de $y(T)$.
- Etablir l'équation intégrale permettant d'identifier la solution $z(T)$.
- Approcher le couple (contrôle, état admissible) du problème adjoint contrôlé, puis à caractériser le contrôle v_α solution du problème d'optimisation : Chercher v_α tel que

$$J_\alpha(v_\alpha) = \min_{v \in L^2(0, T; L^2(\omega))} J_\alpha(v) \quad (6.14)$$

où

$$J_\alpha(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |v|^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_\Omega \varphi_v^2(0) \quad (6.15)$$

- Proposer un schéma algorithmique adapté à la simulation numérique pour la reconstruction de la condition initiale $y(T)$.

L'efficacité de notre schéma algorithmique réside dans l'extention du résultat obtenu avec le problème linéaire associé au problème non linéaire pour un $\overline{F}$ bien défini tel que

$$\overline{F}(\overline{u}) = \frac{F(\overline{u})}{\overline{u}} \text{ si } \overline{u} \neq 0 \text{ et } \overline{F}(0) = F'(0).$$

6.2 Publications scientifiques

Les résultats des travaux de cette thèse ont fait l'objet des publications scientifiques suivantes

- La première intitulée "*Carleman type estimates for some non linear parabolic problems*" qui porte sur l'élaboration d'une estimation de type Coleman [14].
- La seconde intitulée "*On the reconstruction of initial state of some non linear parabolic PDEs inverse problems using a non standard approach*" présente des résultats de notre approche pour la résolution du problème inverse posé dans le cadre d'un problème d'ensablement ou d'assèchement de lac [15].
- La troisième intitulée "*Solving an incomplete data inverse problem by a pseudo spectral approximation method with a non standard approach*" présente des résultats numériques d'un problème à donnée initiale incomplète par une méthode d'approximation pseudo spectrale avec des points de collocation de Chebyshev [2].
- La quatrième intitulée "*A numerical scheme for solving some non linear PDE inverses problems*" présente des resultats de convergence et un algorithme pour l'identification de la condition initiale [16].

6.3 Perspectives

Les résultats obtenus illustrent bien la capacité de résoudre un problème inverse non linéaire de type parabolique par une approche de contrôlabilité. Cette approche est très complexe, du fait de la difficulté de construire l'inégalité de Carleman ou son adaptation dans certains cas. Il n'est pas toujours facile également d'étendre le résultat obtenu du problème linéarisé au problème non linéaire. Cette approche a cependant le mérite d'aborder un problème inverse non linéaire en se ramenant à des problèmes bien posés au sens d'Hadamard. La suite logique de ce travail de thèse serait l'implémentation en vu de la validation numérique de l'approche utilisée dans cette thèse. Il s'agira de générer des codes pour une simulation numérique du phénomène d'ensablement de lacs.

Il serait aussi important de donner un processus numérique permettant d'identifier sur le long terme la date probable d'extinction d'un lac soumis au phénomène d'ensablement ou simplement de contrôler le processus en ramenant l'état du système à un état désiré à un instant donné.

Bibliographie

- [1] Abani, M.A. *"Contribution à la résolution des problèmes inverses aux dérivées partielles non linéaires par les techniques d'assimilation variationnelle de données"* Thèse de Doctorat Unique, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, (2013)
- [2] Abani, M.A., Dia B., Diop, O., Sembene, A.D.N. and Mampassi, B. *"Solving an incomplete data inverse problem by a pseudo spectral approximation method with a non standard approach"* International Journal of Numerical Methods And Applications, v 18, N 2, pages 9 – 21, (2019).
- [3] Albert, T. *"Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation"* SIAM, (2005)
- [4] Antontsev, S.N., Gagneux, G. and Vallet, G. *"Analyse Mathématique d'un modèle d'asservissement stratigraphique. Approche gravitationnelle d'un processus de sédimentation sous contrainte d'érosion maximale"* Publication interne du Laboratoire de Mathématiques Appliquées UMR6CNRS 5142, Université de Pau, 23, 1, (2001)
- [5] Aurous, D. *"Problème inverses pour l'environnement"* Université de Nice Sophia Antipolis, (2010)
- [6] Brezis, H. *"Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications"* Masson, Paris (1983)
- [7] Blanchard, D. and Porretta, A. *"Stefan problems with nonlinear diffusion and convection"*, Journal of Differential Equations, 210, 2, pages. 383 – 428, (2005), Elsevier

- [8] Bénilan, Ph., Boccardo, L., Gallouët, Th., Gariepy, R., Pierre, M., and Vázquez, J. L. *"An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations"*, Citeseer
- [9] Benilan, Ph. and Wittbold, P. and others *"On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems"*, Advances in Differential Equations, 1, 6, pages. 1053 – –1073, (1996), Khayyam Publishing, Inc.
- [10] Clason, C. and Heppenger, P. *"A forward approach to numerical data assimilation"* SIAM Journal on Scientific Computing, 31, 4, 3090 – 3115, (2009), SIAM
- [11] Coron, J.M. *"On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions"* ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations Cambridge Univ Press 1, 35 – 75, (1996).
- [12] Coron, J. M. and Guerrero, S. *Local null controllability of the two-dimensional Navier–Stokes system in the torus with a control force having a vanishing component*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Elsevier, 92, 5, 528 – –545, (2009).
- [13] Coron, J. M. and Lissy, P. *"Local null controllability of the three-dimensional Navier–Stokes system with a distributed control having two vanishing components"*, Inventiones mathematicae, Springer, 198, 3, 833 – –880, (2014).
- [14] Dia, B. and Mampassi, B. *"Carleman type estimates for some non linear parabolic problems"* Journal of Computations & Modelling, (9), (1), 11 – 31, (2019).
- [15] Dia, B. Diop, O., Sembene A.D.N. and Mampassi, B. *"On the reconstruction of initial state of some non linear parabolic PDEs inverse problems using a non standard approach"* Far East Journal of Mathematical Sciences, v 116 N 1 pages 1-9 (2019).
- [16] Dia, B. Sembene A.D.N., Diop, O. and Mampassi, B. *"A numerical scheme for solving some non linear PDE inverses problems"* International Journal of Applied Mathematics (à paraitre en 2020).

- [17] Djaokamla, T. and Mampassi, B. " *On a mathematical investigation of a sedimentation model of lakes*" International Journal of Applied Mathematics, 28, 4, (2015)
- [18] Djaokamla, T. " *Contribution à une étude mathématique de sédimentation des lacs : Modélisation, Analyse théorique et numérique*" Thèse de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, (2015)
- [19] Dolecki, S. and Russell, D. L. " *A general theory of observation and control*" SIAM Journal on Control and Optimization, 15, 2, 185 – –220, (1977).
- [20] Doubova, A., Fernández-Cara, E., González-Burgos, M. and Zuazua, E. " *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*" SIAM Journal on Control and Optimization, 41, 3, 798 – –819, (2002)
- [21] Doubova, A., Fernández-Cara, E. and González-Burgos, M. " *On the controllability of the heat equation with nonlinear boundary Fourier conditions*" Journal of Differential Equations, Elsevier, 196, 2, 385 – –417, (2004).
- [22] Eymard R. and Gallouet " *A partial differential inequality in geological model*" Chin. Ann. Math. Ser. B, 28, 6, (2007), 709 – 736
- [23] Fernández-Cara, E. and Guerrero, S. " *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*" SIAM J. Control Optim., 45 (2006), 1395 – 1446.
- [24] Fabre, C. " *Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems*" ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1, 267 – –302, (1996).
- [25] Fabre, C. , Puel, J. P. and Zuazua, E. " *Approximate controllability of the semilinear heat equation*" Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics, Cambridge Univ Press, 125, 01, 31 – –61, (1995).
- [26] Fernández-Cara, E. and González-Burgos, M. and Guerrero, S. and Puel, J. P. " *Exact controllability to the trajectories of the heat equation with Fourier boundary conditions :*

- the semilinear case*" ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, EDP Sciences, 12, 3, 466 – 483, (2006).
- [27] Fernández-Cara, E. and González-Burgos, M. and Guerrero, S. and Puel, J. P. "*Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions : the linear case*" ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, EDP Sciences, 12, 3, 442 – 465, (2006).
- [28] Fernández-Cara, E. and Zuazua, E. "*Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations*" Annales de l'IHP Analyse non linéaire, 17, 5, 583 – 616, (2000).
- [29] Fernández-Cara, E. and Zuazua, E. "*The cost of approximate controle for hear equation : the linear cas*", Adv. Differential Equations, 5(2000), pp 465 – 514.
- [30] Fernández-Cara, E. and Guerrero, S "*Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*" SIAM. J. Control Optimal, 45, (2000) no. 4 pp. 1395 – 1446.
- [31] Fursikov, A. V. and Imanuvilov, O. Yu. "*Controllability of evolution equations*" Seoul National University 34, (1996).
- [32] Fernández-Cara, E., González-Burgos, M., Guerrero, S. and Puel, J.P. "*Exact controllability to the trajectories of the heat equation with Fourier boundary conditions : the semilinear case*" ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 12, 3, 466 – 483, (2006), EDP Sciences.
- [33] Glowinski, R. and Lions, J.-L. "*Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*" Acta Numerica, 3 (1994), pp. 269 – 378.
- [34] Guerrero, S. "*Local exact controllability to the trajectories of the Navier-Stokes system with nonlinear Navier-slip boundary conditions*" ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, EDP Sciences, 12, 3, 484 – 544, (2006).

- [35] Guerrero, S. and Imanuvilov, O. Yu. and Puel, J.P. *"Remarks on global approximate controllability for the 2-D Navier–Stokes system with Dirichlet boundary conditions"* Comptes Rendus Mathematique, Elsevier, 343, 9, 573 – 577, (2006).
- [36] Hadamard, J. *"Lectures on cauchy's Problem in linear Partial Differential Equations"* Yale University Press, (1923).
- [37] Imanuvilov, O. *"Carleman estimates for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and its applications," Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems"*, Lecture Notes in Pure Appl. Math., 218, 113 – 137, (2001).
- [38] Imanuvilov, O. Yu. *"Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations"* ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, EDP Sciences, 6, 39 – 72, (2001).
- [39] Lebeau, G. and Robbiano, L. *"Contrôle exact de l'équation de la chaleur"* Communications in Partial Differential Equations, Taylor & Francis, 20, 1 – 2, 335 – 356, (1995).
- [40] Lions, J. L. *"Are there connections between turbulence and controllability"* 9th INRIA International Conference, Antibes, 12 – 15, (1990).
- [41] Lions, J. L. and Zuazua, E. *"A Generic Uniqueness Result for the Stokes System and Its Control Theoretical Consequences"* partial differential equations and applications : Collected Papers in Honor of Carlo Pucci, CRC Press, 177, 221, (1996).
- [42] Lions, J.L. *"Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems"* SIAM review, 30, 1, 1 – 68, (1988), SIAM
- [43] Lions, J. L. *"Optimal control of systems governed by partial differential equations problèmes aux limites"* Springer (1971)
- [44] Lebeau, A. *"Mercator : les enjeux de l'océan numérique"* Institut français de navigation, Navigation, vol55, pages :37 – 44, num :217, (2007)
- [45] Maniar, L. , Meyries, M. and Schnaubelt, R. *"Null controllability for parabolic equations with dynamic boundary conditions"* AIMS (2010)

- [46] Puel, J.P. *"Une approche non classique d'un problème d'assimilation de données"* Comptes Rendus Mathematique, 335, 2, 161 – 166, (2002), Elsevier
- [47] Puel, J.P. *"Application of global Carleman estimates to controllability and inverse problems"* Monograph, Universidad Federal de Rio de Janeiro, (2008)
- [48] Puel, J.P. *"A nonstandard approach to a data assimilation problem and Tychonov regularization revisited"* SIAM Journal on Control and Optimization, 48, 2, 1089 – 1111, (2009), SIAM
- [49] Perez, S. *"Identification et homogénéisation de paramètres dans des équations aux dérivées partielles"* Thèse de l'Université de Pau, (1999).
- [50] Richter, G.R. *"An inverse problem for the steady state diffusion equation"* SIAM Journal Appl. Math., (1981), 210 – 221
- [51] Rockafellar, R. T. *"Duality and stability in extremum problems involving convex functions"* Pacific Journal of Mathematics, 21 (1967), pp. 167 – 187.

