

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



Groupe de Recherche sur l’Energie Solaire et les Transferts (G.R.E.S.T.)

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

ECOLE DOCTORALE : PCSTUI

Année : 2019 N° d’ordre :.....

THESE DE DOCTORAT UNIQUE

Présentée par : M. Ibrahima KAMA

Spécialité : Mécanique des Fluides et Applications (M.F.A.)

En vue d’obtenir le diplôme de Docteur

**SUJET : ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE DES
INSTABILITES DE L’ECOULEMENT D’UN FLUIDE
VISCOELASTIQUE DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE
D’AXE HORIZONTAL**

Soutenu le : 31 août 2019

Devant le jury composé de :

Président :	SENE	Cheikh	Professeur titulaire, UCAD
Rapporteurs :	SARR	Joseph	Professeur titulaire, UCAD
	TOURE	Sidy Demba	Professeur titulaire, UCAD
Membres :	MBOW	Babacar	Professeur titulaire, UCAD
	MBOW	Cheikh	Professeur assimilé, UCAD
Directeur de thèse:	SOW	Mamadou Lamine	Professeur assimilé, UCAD

REMERCIEMENTS

Mes remerciements ouvrent certes ce manuscrit mais annoncent sûrement la fin de ce manuscrit. Que vos noms figurent ou non sur cette page, je remercie les compagnons de tout bord qui m'ont aidé à réaliser ce travail tout au long de ces années et qui ont éclairé mon chemin.

Ce travail a été réalisé au laboratoire de Mécanique des Fluides et Applications (M.F.A.) sous la direction de Monsieur Mamadou Lamine SOW Professeur au département de Physique de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar. Je le remercie d'abord pour avoir accepté de diriger cette thèse, ensuite pour sa grande disponibilité et enfin pour ses précieux conseils qui ont été d'une importance capitale. En le côtoyant j'ai pu apprécier la qualité de l'homme.

Monsieur Cheikh SENE Professeur Titulaire fait partie de ceux qui nous ont accueilli à la Faculté des Sciences et Techniques notamment avec le cours de Mécanique en première année. Je le remercie profondément pour avoir accepté la présidence de jury de ma thèse et d'avoir participé à ma formation.

Je remercie profondément le Professeur Titulaire Sidy Demba TOURE du département de Mathématiques et Informatique pour m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse malgré ses nombreuses charges. Monsieur Joseph SARR Professeur au département de Physique par ailleurs Doyen de la Faculté des Sciences et Techniques nonobstant ses multiples charges a accepté de rapporter ce travail

Mes remerciements vont également à l'endroit des Professeurs Babacar MBOW et Cheikh MBOW du département de Physique pour avoir participé à ma formation et m'ont fait l'honneur de participer au jury de ma thèse.

Mes débuts en tant que doctorant ne sauraient être paisibles sans Kodjo KPODE, actuellement enseignant-Chercheur à l'université de Kara au Togo. Il m'a toujours soutenu dans les moments difficiles et n'a cessé de me prodiguer des conseils et de m'encourager. Je lui adresse mes sincères remerciements. Je pense également à mes amis Fadel DIOP et Alpha Malick NDIAYE des camarades du laboratoire avec qui j'ai beaucoup échangé. Un grand merci à Alpha sans qui les retours nocturnes de la Faculté seraient très pénibles.

Enfin, je remercie très sincèrement toute ma famille par qui tout a commencé et qui me soutient sans cesse que ce soit physiquement ou moralement. Je remercie particulièrement mes parents qui m'ont envoyé et maintenu à l'école avec patience mais sans exigence. Mon

oncle Saliou DIOGOUL m'a accueilli et hébergé à Dakar durant mes débuts en tant que lycéen puis en tant qu'étudiant, je lui adresse mes sincères remerciements ainsi qu'à toute sa famille. Une pensée pieuse à sa défunte épouse ainsi qu'à mon défunt papa, qu'Allah les accueille dans son paradis éternel.

Etude théorique et numérique des instabilités de l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique d'axe horizontal

Résumé :

Dans cette thèse, l'objectif est de fournir, par une étude théorique et numérique, une analyse de la stabilité d'un fluide (viscoélastique) en écoulement dans une conduite cylindrique d'axe horizontal. Les écoulements ouverts, comme les écoulements cisailés ont été considérés dans ces travaux. Pour l'étude numérique de ce problème, un code pseudo-spectral de type Petrov-Galerkin a été développé. Une étude linéaire de la stabilité a été effectuée. Pour cette étude, on s'est surtout intéressé à la stabilité au temps long. La stabilité au temps long consiste en une décomposition des perturbations sous la forme de modes globaux s'amplifiant exponentiellement avec le temps. Les résultats qui ressortent de cette étude montrent que l'écoulement d'un fluide newtonien est linéairement stable tandis que celui d'un fluide viscoélastique n'est pas toujours stable.

Mots-clés : Stabilité ; Ecoulement cylindrique ; Fluide viscoélastique ; Modèle d'Oldroyd-B

Theoretical and numerical study of the instabilities of the flow of a viscous fluid in a cylindrical pipe of horizontal axis

Abstract:

In this thesis, the objective is to provide, by a theoretical and numerical study, an analysis of a stability of a flowing fluid in a cylindrical pipe of horizontal axis. Open flows, such as shear flows, were considered in this work. For the numerical study of this problem, a pseudo-spectral code of Petrov-Galerkin type has been developed. A linear study of the stability was carried out. For this study, the focus was on long time stability. Long-time stability consists of a decomposition of disturbances in the form of global modes that increase exponentially with time. The results that emerge from this study show that the Newtonian flow is linearly stable while that of a viscoelastic is not always stable.

Key-words : Stability ; Pipe flow ; Viscoelastic fluid ; Oldroyd-B model

Table des matières

REMERCIEMENTS	1
Résumé :	3
Abstract:	4
NOMENCLATURE	8
Lettres grecques.....	8
Lettres latines	10
Exposants.....	12
Nombres caractéristiques	12
LISTE DES FIGURES	13
LISTE DES TABLEAUX	15
.....	16
INTRODUCTION GENERALE	17
.....	19
CHAPITRE 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	20
1.1. L'écoulement cisailé	20
1.2. Amplitude de perturbation et instabilité	22
1.3. Structure de l'écoulement instable d'un fluide.....	23
1.4. Scène de l'apparition d'instabilités	24
1.5. Cas des fluides non newtoniens	25
1.6. But de l'étude	26
1.7. Concepts d'instabilités hydrodynamiques	27
1.7.1. Notion d'instabilité hydrodynamique	27
1.7.2. Théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique	29
1.7.3. Etude théorique de la stabilité par une approche locale	29
1.7.4. Amplification modale et non modale de la perturbation	31
1.7.5. Etude de la stabilité par une approche globale.....	33
Conclusion	34
.....	36
CHAPITRE 2: MODELISATIONS MATHEMATIQUE ET NUMERIQUE.....	37
Introduction	37
2.1. Modélisation mathématique	38
2.1.1. Lois de comportement des fluides viscoélastiques.....	38
2.1.2. Caractérisation des fluides viscoélastiques.....	39

2.1.3. Le choix du modèle de fluide viscoélastique.....	39
2.1.4. Généralisation aux tenseurs.....	40
2.1.5. Description du système et position du problème.....	42
2.1.6. Adimensionnalisation des équations.....	43
2.1.7. L'écoulement de base.....	45
2.1.8. L'écoulement perturbé.....	47
2.2. Modélisation numérique.....	49
2.2.1. Stratégie Numérique.....	49
2.2.2. Choix des fonctions de base.....	50
2.2.3 Choix des fonctions test.....	52
2.2.4. Projection des termes.....	52
Conclusion.....	55
.....	57
CHAPITRE 3: ETUDE DE LA STABILITE LINEAIRE.....	58
Introduction.....	58
3.1. Linéarisation des équations aux perturbations.....	58
3.1.1. Calcul de la contribution newtonienne de l'extra contrainte.....	59
3.1.2. Calcul de la contribution élastique de l'extra contrainte.....	59
3.2. Equations pour les valeurs initiales des perturbations.....	60
3.3. Equations aux valeurs propres.....	61
3.3.1. Perturbation unidimensionnelle ($k_0 = 0 ; n = 0$).....	65
3.3.2. Cas d'une perturbation homogène suivant l'axe ($(n \neq 0 ; k_0 = 0)$).....	67
3.3.3. Cas d'une perturbation axisymétrique ($(k_0 \neq 0 ; n = 0)$).....	71
3.3.4. Cas d'une perturbation tridimensionnelle ($(n \neq 0 ; k_0 \neq 0)$).....	76
3.4. Etude de la croissance transitoire de l'énergie.....	79
Conclusion.....	82
.....	83
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	84
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	86
PAGES ANNEXES.....	91
A. Caractérisation d'un fluide viscoélastique.....	91
1. L'effet Weissenberg.....	91
2. L'effet Barus.....	91

B.	Modélisation d'un fluide viscoélastique	93
1.	La "cellule" de Maxwell :	93
2.	La "cellule" de Voigt :	94
3.	Le modèle de Jeffrey	95
C.	Equations aux perturbations	96
D.	Méthodes numériques.....	98
D.1.	Fonctions de base et fonctions test	98
D.2.	Dérivée numérique	99

NOMENCLATURE

Lettres grecques		
Symboles	Désignations	Unités
α	<i>Coefficient dans la décomposition spectrale de la vitesse</i>	
β	<i>Vecteur généré par la projection des termes non linéaires</i>	
ε	<i>Épaisseur de la couche limite</i>	<i>m</i>
η	<i>Viscosité dynamique du fluide</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻¹</i>
Θ	<i>Fonction test</i>	
θ	<i>Coordonnée azimutale</i>	<i>rd</i>
ϑ	<i>Période de la perturbation suivant direction axiale</i>	<i>s</i>
λ	<i>Temps de relaxation du fluide</i>	<i>s</i>
λ'	<i>Temps de retard</i>	<i>s</i>
ρ	<i>Masse volumique</i>	<i>kg.m⁻³</i>
$\bar{\sigma}$	<i>Tenseur des contraintes</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻²</i>
$\bar{\sigma}'$	<i>Perturbation du tenseur des contraintes</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻²</i>
$\bar{\bar{\sigma}}'_s$	<i>Contribution newtonienne de la perturbation du tenseur des contraintes</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻²</i>
$\bar{\bar{\sigma}}'_e$	<i>Contribution élastique de la perturbation du tenseur des contraintes</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻²</i>
$\bar{\tau}$	<i>Tenseur des contraintes</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻²</i>
$\bar{\tau}_{\text{élastique}}$	<i>Tenseur des contraintes élastiques</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻²</i>
$\bar{\tau}_{\text{newt}}$	<i>Tenseur des contraintes newtoniennes</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻²</i>
$\bar{\tau}_{\text{visqueux}}$	<i>Tenseur des contraintes visqueuses</i>	<i>kg.m⁻¹.s⁻²</i>
v_φ	<i>Vitesse de phase de l'onde</i>	
μ	<i>Viscosité cinématique du fluide</i>	<i>m².s⁻¹</i>
χ		

Ω	<i>Fonction de base</i>	
ω	<i>Paramètre de retard</i>	

Lettres latines		
Symboles	Désignations	Unités
a	<i>Paramètre dans la dérivée objective</i>	
c	<i>Fréquence complexe</i>	s^{-1}
c_i	<i>Partie imaginaire de C liée à la vitesse de phase</i>	s^{-1}
c_r	<i>Taux de croissance de la perturbation</i>	s^{-1}
D	<i>Dérivée totale par rapport</i>	m^{-1}
D_c	<i>Diamètre de la conduite</i>	m
\bar{D}	<i>Tenseur de déformation</i>	s^{-1}
\vec{f}	<i>Force volumique</i>	$kg.m^{-2}.s^{-2}$
\vec{g}	<i>Champs de pesanteur</i>	$m.s^{-2}$
l	<i>Mode axial</i>	
k_0	<i>Nombre d'onde axial</i>	m^{-1}
n	<i>Mode azimuthal</i>	
R	<i>Rayon de la conduit</i>	m
r	<i>Coordonnée radiale</i>	m
t	<i>Variable temporelle</i>	s
t_0	<i>Instant initial</i>	s
u	<i>Composante radiale de la vitesse</i>	$m.s^{-1}$
v	<i>Composante azimuthale de la vitesse</i>	$m.s^{-1}$
\bar{W}	<i>Tenseur tourbillon</i>	s^{-1}
W_{sym}	<i>Profil symétrique ou vitesse moyenne suivant la direction azimuthale</i>	$m.s^{-1}$
W_s	<i>Vitesse d'un jet</i>	$m.s^{-1}$
\bar{W}^b ou \bar{W}_b	<i>Vitesse de base adimensionnelle normalisée</i>	
w	<i>Composante axiale de la vitesse</i>	$m.s^{-1}$

w_d	<i>Vitesse débitante du fluide dans l'expérience de Reynolds</i>	$m \cdot s^{-1}$
w_0	<i>Vitesse maximale de l'écoulement de base</i>	$m \cdot s^{-1}$
z	<i>Coordonnée axiale</i>	m

Exposants

$()^b$: relatif à l'écoulement de base

$()'$: relatif aux grandeurs de perturbation

$\overline{(\)}$: relatif aux grandeurs adimensionnelles

$()^T$: relatif aux temps longs

Nombres caractéristiques

$Fr = \frac{(w_0)^2}{gR}$: Nombre de Froude

$Re = \frac{R \cdot w_0}{\nu}$: Nombre de Reynolds

$Recr$: Nombre de Reynolds critique

$We = \frac{\lambda \cdot w_0}{R}$: Nombre de Deborah ou de Weissenberg

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Expérience historique d'Osborne Reynolds 1883, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 174 (1883), pp. 935-982

Figure 1.2 : Caractère convectif de l'instabilité ; Wilson and Khomami (1992)

Figure 2.1 : Schéma du dispositif : écoulement de poiseuille dans une conduite cylindrique

Figure 3.1 : Vecteur vitesse transversale $u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta$ (gauche) et contours d'isovaleurs de la vitesse axiale w (droite) (a) : vitesse initiale, (b) : mode le moins stable. cas d'une perturbation monodimensionnelle ($n=0$ et $k_0=0$) à $Re = 5 \cdot 10^3$ et $We = 10^{-2}$ et à l'instant $t=50$.

Figure 3.2 : Spectre des valeurs propres d'une perturbation monodimensionnelle ($n=0$ et $k_0=0$), cas d'un fluide newtonien (rouge), cas d'un fluide viscoélastique à nombre de Weissenberg $We = 10^{-2}$ (vert).

Figure 3.3 : Spectre des valeurs propres d'une perturbation homogène suivant l'axe avec $n=1$ et $k_0=0$, cas d'un fluide newtonien (noir), cas d'un fluide viscoélastique à nombre de Weissenberg $We = 10^{-2}$ (rouge).

Figure 3.4 : vitesse transversale $u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta$ (gauche) et contours d'isovaleurs de la vitesse axiale w (droite) (a) : vitesse initiale, (b) : mode le moins stable ; cas d'une perturbation homogène ($n=1, k_0=0$) à $Re = 5 \cdot 10^3$ et $We = 10^{-2}$

Figure 3.5 : Spectre des valeurs propres d'une perturbation homogène suivant l'axe avec ($n=1, k_0=0$) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, (a) : cas d'un fluide newtonien ($\omega = 0$) ; (b) : cas d'un fluide viscoélastique avec $We = 10^{-2}$

Figure 3.6 : vecteur vitesse transversale $u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta$ (gauche) et contours d'iso-valeurs de la vitesse axiale w (droite) (a) : vitesse initiale, (b) : mode le moins stable. cas d'une perturbation axisymétrique ($n=0, k_0=1$) à $Re = 5 \cdot 10^3$ et $We = 10^{-2}$

Figure 3.7: Spectre des valeurs propres d'une perturbation axisymétrique avec $n=0$ et $k_0=0.1$, cas du fluide newtonien (noir), cas du fluide viscoélastique à $We = 10^{-2}$ (rouge)

Figure 3.8 : Evolution de la valeur propre la plus instable en fonction du paramètre de retard ω à nombre de Reynolds $Re = 10^4$ et à nombre de Weissenberg $We = 10^{-3}$.

Figure 3.9 : Spectre des valeurs propres d'une perturbation tridimensionnelle avec $n=1$ et $k_0=0.1$, cas d'un fluide newtonien (noir), cas du fluide viscoélastique à nombre de Reynolds 10^{-2} (rouge)

Figure 3.10: Vecteur vitesse transversale $ue_r + ve_\theta$ (gauche) et contours d'isovaleurs de la vitesse axiale w (droite) (a): vitesse initiale, (b): mode le moins stable; cas d'une perturbation tridimensionnelle ($n=1; k_0=1$) à $Re = 5 \cdot 10^3$ et $We = 10^{-2}$.

FigureA1 : Schéma de l'expérience de Weissenberg (J. Bico , R. Welsh et G. Mckinley, référence).

FigureA2 : Schéma de l'expérience de Barus (J. Bico, R. Welsh et G. Mckinley référence).

FigureA3 : Schéma du modèle de Maxwell

FigureA4 : Schéma du modèle de Kevin-Voigt

FigureA5 : Schéma du modèle de Jeffrey

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : perturbation minimale nécessaire pour provoquer la transition variant comme $O(Re^\nu)$ en écoulement de Poiseuille cylindrique.

Tableau 2 : perturbation minimale nécessaire pour provoquer la transition variant comme $O(Re^\nu)$ en écoulement de Poiseuille plan ou de Couette plan.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

L'étude des écoulements dans les conduites cylindriques suscite un grand intérêt dans le domaine industriel et dans beaucoup d'autres applications pratiques. C'est ce procédé d'écoulement qui est souvent mis en œuvre lors du processus de drainage des eaux usées et des eaux pluviales. On retrouve également ce type d'écoulement dans le processus de mise en forme de certains matériaux polymères, par les procédés dits d'extrusion et de co-extrusion. Cet écoulement est aussi rencontré dans d'autres applications industrielles comme les réacteurs chimiques, les chambres à combustion et les systèmes de mélange.

Cependant l'apparition de certains phénomènes dans un tel écoulement, dont l'un des plus spectaculaires est l'instabilité, peut avoir des conséquences sur les résultats attendus pour un tel écoulement ou sur la qualité et le rendement du produit. La littérature consacrée à l'écoulement cylindrique des fluides (écoulement de Poiseuille ou de Couette) est très développée pour les fluides dits newtoniens. Cependant la plupart des fluides rencontrés dans l'industrie n'obéissent pas à la loi régissant le comportement des fluides newtoniens. La loi de comportement d'un fluide est très importante pour l'étude des propriétés et du comportement de l'écoulement de ce dernier.

Parmi les phénomènes les plus spectaculaires qui ont fait l'objet d'une étude sur l'écoulement d'un fluide suivant une conduite cylindrique, on distingue les instabilités. Ces instabilités peuvent être appréhendées expérimentalement à partir de la visualisation du fluide en question ou par une étude théorique et numérique. Beaucoup d'auteurs dont **Meseguer et Trefethen** (Meseguer & Trefethen, 2001) ont mené cette étude avec un fluide newtonien. Cette même étude a été faite par Esmael puis par Lopèz Caranza avec un fluide rhéofluidifiant.

L'objectif de notre travail est de reprendre le travail de Meseguer par une méthode théorique et numérique mais cette fois-ci pour un fluide non newtonien qui est particulièrement décrit par le modèle viscoélastique d'Oldroyd-B. Une telle étude n'a pas été faite dans le passé. L'absence de travaux dans ce domaine est peut être due au fait que les fluides complexes sont très difficiles à manipuler, leur mouvement est difficile à appréhender. Difficulté qui se traduit par une forte non linéarité et une grande complexité de l'équation d'Oldroyd-B.

La méthode pseudo-spectrale de Petrov-Galerkin-Tchebyshev sera utilisée dans cette partie. Elle a été quelques fois utilisée dans l'étude du mécanisme d'instabilité en géométrie cylindrique notamment par Meseguer et Trefethen. C'est une méthode qui repose sur

l'approximation de la vitesse sous la forme d'une combinaison de fonctions alliant série de Fourier et polynômes de Tchebyshev appelées fonctions d'essai ou fonctions de base. Le problème sera ensuite projeté sur une base de fonctions dites fonctions test. Les fonctions test et les fonctions de base obéissent a priori aux mêmes règles et conditions que celles vérifiées par la vitesse physique de l'écoulement.

Pour mener à bien ce travail, nous allons d'abord dans un premier chapitre, rappeler les différents travaux analytiques, théoriques et numériques qui se rapportent à l'écoulement de Poiseuille. On y présente aussi les différents types ou concepts d'instabilités rencontrés dans la littérature ou dans la théorie. Dans le deuxième chapitre, les équations gouvernant l'écoulement sont établies sur la base d'hypothèses simplificatrices jugées raisonnables. Afin de les généraliser et de mettre en évidence les paramètres qui contrôlent le comportement de l'écoulement elles sont adimensionnalisées grâce à un jeu de grandeurs de référence. La méthode numérique utilisée pour résoudre le système d'équations fortement non linéaires est aussi abordée dans ce chapitre. Le troisième chapitre est consacré à une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement d'un fluide viscoélastique, décrit par le modèle d'Oldroyd-B, dans une conduite cylindrique d'axe horizontal. Les équations mises en œuvre étant fortement liées, le recours à la méthode numérique s'impose. Un code développé avec le langage Fortran et l'algorithme QZ a été adopté pour la résolution numérique du problème linéaire.

CHAPITRE 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans ce Chapitre, nous présentons une revue bibliographique relative aux travaux effectués dans le cadre des instabilités de fluides sous écoulement. Ces travaux qui sont de types théoriques, numériques ou expérimentaux ont été, la plupart du temps, effectués avec des fluides newtoniens. Cependant on retrouve une littérature pas assez développée pour les fluides non newtoniens. Ainsi nous distinguons deux grandes parties dans ce chapitre. L'une relative à la littérature dédiée aux fluides newtoniens et l'autre à celle consacrée aux fluides non newtoniens.

Nous aborderons par la même occasion l'état de l'art relatif à ce thème.

1.1. L'écoulement cisailé

Nous définissons un écoulement cisailé comme un fluide en mouvement et confiné entre des parois (les parois peuvent être de géométrie plane ou cylindrique, etc.). La structure d'un tel écoulement dépend de plusieurs paramètres à savoir la vitesse du fluide, la viscosité et la géométrie de l'écoulement. La célèbre expérience de **Reynolds** (**Reynolds, 1883**) est une illustration parfaite de ce genre d'écoulement. Mais au-delà de l'aspect géométrique de cet écoulement, l'expérimentateur s'est beaucoup plus intéressé à sa physionomie. Pour se faire Reynolds a visualisé l'écoulement d'un fluide newtonien dans un tube cylindrique en injectant un colorant à l'entrée du tube.

En augmentant progressivement le débit du fluide, il a observé une transition spontanée entre un état où le filet coloré reste rectiligne : l'écoulement est laminaire, et un état où le filet coloré se met à osciller et diffuse dans toute la section de la conduite : début de la transition où les régimes laminaire et turbulent coexistent. Les expériences ont été répétées pour différents diamètres de la conduite et différentes viscosités. Pour quantifier les résultats des observations expérimentales, Reynolds a introduit un paramètre adimensionnel qui porte son nom et qui est défini par :

$$Re = \frac{D_c \cdot W_d}{\mu} \quad (1.1)$$

où W_d est la vitesse débitante, D_c le diamètre de la conduite et ν la viscosité cinématique du fluide.

Après plusieurs essais expérimentaux, Reynolds finit par définir une borne supérieure pour Re à partir de laquelle, l'écoulement ne peut pas être maintenu et une borne inférieure en dessous de laquelle, on ne peut pas observer une turbulence.

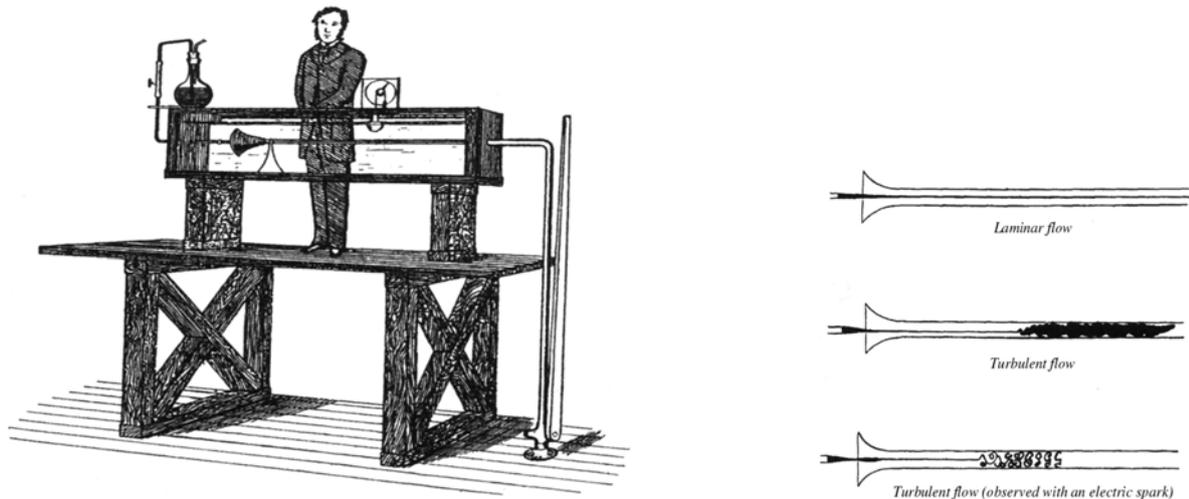


Figure 1.1: Experience historique d’Osborne Reynolds 1883, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 174 (1883), pp. 935-982

Cette expérience de Reynolds est en parfaite contradiction avec les résultats surprenants acquis progressivement entre les années 1920 et le développement du calcul numérique vers les années 1960. Ces résultats prédisaient que l’écoulement de Poiseuille en conduite circulaire est linéairement stable quel que soit le nombre de Reynolds. Selon **Kerswell** (**Wedin & Kerswell, 2004**), ce paradoxe n’est toujours pas levé mais plusieurs phénomènes aujourd’hui identifiés tels que le phénomène d’advection normale à la paroi de la quantité de mouvement longitudinale par des rouleaux longitudinaux, comme pour l’écoulement plan et les effets non linéaires correspondants à une bifurcation sous-critique, amplifiant les perturbations lorsqu’elles ont atteint une amplitude suffisante, pourraient le lever.

En ce qui concerne la limite supérieure, Reynolds a avec beaucoup de précautions, réussi à la maintenir à $Re = 13 \cdot 10^3$. Une limite que **Pfenninger** (**Pfenninger, 1961**) va pousser jusqu’à $Re = 10^5$ après un peu moins d’un siècle plus tard. Ces résultats montrent d’une part que l’amplitude de la perturbation doit dépasser un certain seuil pour que la transition ait lieu, et d’autre part que ce seuil diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente. Depuis lors des études numériques ont montré que l’écoulement de **Hagen-Poiseuille** d’un fluide newtonien est linéairement stable et **Meseguer et Trefethen** (**Meseguer & Trefethen, 2001**) ont vérifié numériquement que cet écoulement est linéairement stable jusqu’à $Re = 10^7$.

Pour ce qui est de la valeur critique du nombre de **Reynolds** (**Reynolds, 1883**) en dessous de laquelle l’écoulement reste linéairement stable quelle que soit la valeur de l’amplitude de la perturbation, **Reynolds** recommanda la valeur $Re \approx 2 \cdot 10^3$.

Récemment, **Peixinho et Mullin** (**Peixinho & Mullin, 2006**) ont trouvé à partir d'expériences de « trempe » une valeur limite de **1750**.

1.2. Amplitude de perturbation et instabilité

Nous évoquions à la sous-section précédente que la valeur de l'amplitude de la perturbation devrait dépasser un certain seuil pour que la transition laminaire-instable ait lieu. **Darbyshire & Mullin** (**Darbyshire & Mullin, 1995**) ont déterminé expérimentalement une valeur critique de cette amplitude en fonction du nombre de Reynolds. Le débit de l'écoulement étant maintenu constant à l'aide d'un piston, ils créent des perturbations à **70** diamètres de la section d'entrée. Ils font varier le débit massique des jets, le nombre d'injecteurs (six au maximum) et la fréquence des injections. **Hof et al.** (**Hof, Juel, & Mullin, 2003**) ont montré avec un dispositif similaire que l'amplitude varie en fonction de Re^{-1} sur une gamme considérable de valeurs du nombre de Reynolds. Quatre ans plus tard, **Peixinho & Mullin** (**Peixinho & Mullin, 2007**) ont reproduit cette expérience mais en utilisant cette fois-ci des perturbations sous forme de paires de jets entrant et sortant de telle sorte que le débit injecté soit nul. L'exposant du nombre de Reynolds varie entre -1,5 et -1 et selon l'orientation des jets par rapport au sens de l'écoulement dans la conduite. Lorsque les jets se dirigent vers la direction azimutale l'amplitude varie en fonction de Re^{-1} . Lorsque les jets s'orientent suivant le sens de l'écoulement, on crée des stries de haute et basse vitesse dans ce cas, une variation en $Re^{-1.3}$ est observée. Et enfin, lorsque les jets sont orientés d'un angle de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à la direction de l'écoulement une variation en fonction de $Re^{-1.5}$ est observée. Ces résultats expriment le fait que l'instabilité s'obtient plus facilement en utilisant des paires de jets obliques à la direction de l'écoulement qu'en utilisant des paires de jets dans la direction azimutale. Ceci peut être dû à la croissance transitoire de l'énergie de la perturbation. **Meseguer et Trefethen** (**Meseguer & Trefethen, 2001**) et **Mellybovsky et Meseguer** (**Mellybovsky & Meseguer, 2008**) ont repris numériquement les expériences de **Hof et al** (**Hof, Juel, & Mullin, 2003**) et trouvent un comportement en Re^{-1} . **Gavarini et al.** (**Gravini, Bottaro, & Nieuwstadt, 1984**) ont aussi retrouvé un comportement semblable mais dans un contexte différent. Il s'agissait cette fois-ci de l'amplitude de la perturbation de l'écoulement de **Hagen-Poiseuille** (défaut minimum) qui l'aurait rendu linéairement instable. Dans d'autres géométries d'écoulements ouverts, en Poiseuille-plan par exemple, **Chapman** (**Chapman.,**

2002) a montré, via une méthode asymptotique, que l'amplitude critique de la perturbation varie en $Re^{-\frac{5}{4}}$ et puis en Couette une variation en Re^{-1} .

Auteurs	Méthode	Valeur de γ
(A Draad & Nieuwstadt 1998)	Expérimentale	-1
(Darbyshire & Mullin 1995)	Expérimentale	-3/2
(Meseguer 2003)	Numérique	-3/2
(Hof et al 2003)	Expérimentale	-1
(Gavarini et al 1984)	Numérique	-1
(Peixinho & Mullin 2007)	Expérimentale	-1,5 ~ -1,3
(Mellibovsky & Meseguer 2008)	Numérique	-1,5 ~ -1,35

Tableau 1 : perturbation minimale nécessaire pour provoquer la transition variant comme $O(Re^\gamma)$ en écoulement de Poiseuille cylindrique.

Auteurs	Écoulement	Méthode	Valeur de γ
(Reddy et al. 1998)	Couette plan	Numérique	-1
(Chapman 2002)	Couette plan	analytique	-1
(Reddy et al. 1998)	Poiseuille plan	Numérique	-1,6
(Chapman 2002)	Poiseuille plan	Analytique	-3/2

Tableau 2 : perturbation minimale nécessaire pour provoquer la transition variant comme $O(Re^\gamma)$ en écoulement de Poiseuille plan ou de Couette plan.

1.3. Structure de l'écoulement instable d'un fluide

Deux phénomènes importants ont été identifiés expérimentalement lors de la transition vers la turbulence : il s'agit de bouffées turbulentes localisées (*puffs* and *slugs*). Cet important résultat a été mis en œuvre par **Wynanski et Champagne** (Wynanski Champagne, 1973) grâce à l'analyse du signal de vitesse axiale. Ils ont observé les puffs qui ne sont rien d'autres que des bouffées turbulentes lorsque le nombre de Reynolds est dans l'intervalle $[2000, 2700]$. Elles sont générées par de fortes perturbations à l'entrée du cylindre. Il s'agit de structures localisées présentant un front en pointe et une sortie aplatie, de longueur ≈ 20 diamètres et se déplaçant approximativement à la vitesse égale à $0,9W_d$.

L'instabilité de la couche limite à l'entrée de la conduite est génératrice des slugs qu'on appelle communément bouchons turbulents. Ils sont observés pour des nombres de Reynolds supérieurs à 2700. Contrairement aux puffs, les slugs ont une interface laminaire-turbulent en amont et en aval de la structure. De plus les bouchons turbulents s'étendent en longueur tout en étant transportés par l'écoulement moyen. **Wygnanski et al.** (Wygnanski, Sokolov, & Friedman, 1975) et **Darbyshire et Mullin** (Darbyshire & Mullin, 1995) ont par la suite confirmé expérimentalement ces deux types de structure où cette fois ci les perturbations sont introduites loin de l'entrée dans la zone où l'écoulement est développé.

1.4. Scène de l'apparition d'instabilités

Les études de stabilité en conduite cylindrique (et en canal plan) ont été focalisées, vers les années 80, sur la croissance transitoire et sur la détermination de la perturbation optimale. Par exemple la perturbation dont l'amplification d'énergie est maximale. La croissance transitoire est une conséquence de la non normalité de l'opérateur associé aux équations de Navier-Stokes linéarisées. La perturbation optimale est formée de deux tourbillons contrarotatifs d'après les études menées par **Schmid et Henningson** (Schmid & Henningson, 1994). Ces tourbillons vont générer des stries (jets de basse et de haute vitesse) après avoir redistribué l'écoulement. L'écoulement résultant de ce phénomène, présente des points selle qui le rendent instable vis à vis des perturbations tridimensionnelles. Cette instabilité appelée "streak breakdown" peut être étudiée par une méthode numérique non linéaire. Cette approche a pour objectif principal de déterminer l'amplitude minimale de la perturbation qui peut induire une instabilité. Plus particulièrement **Zikanov** (Zikanov, 1996) et **Meseguer** (Meseguer, 2003) ont utilisé cette approche en conduite cylindrique ainsi que **Reddy et al.** (Reddy S. C., Schmid, Baggett, & Henningson, 1998) et **Krasnov et al.** (Krasnov, Rossi, Zikanov, & Boeck, 2008) en canal plan.

Cependant une nouvelle approche a émergé dans la transition brusque stable- instable dans les écoulements ouverts, ces deux dernières décennies. C'est une approche qui consiste à chercher des solutions des équations de Navier-Stokes qui seraient déconnectées de l'état laminaire. Ces solutions qui sont sous forme d'ondes non linéaires ont été obtenues par **Nagata** (Nagata, 1990), **Cherhabili & Ehrenstein** (Cherhabili & Ehrenstein, 1997) et **Waleffe** (Waleffe, 1997) en canal plan et plus récemment par **Faisst & Eckhardt** (Faisst & Eckhardt, 2003) et **Wedin & Kerswell** (Wedin & Kerswell, 2004) en conduite cylindrique. **Hof et al.** (Björn Hof, 2004) ont expérimentalement validé ces solutions en 2004. Ces solutions utilisent fondamentalement le même procédé que le self-sustaining-process (SSP),

procédé d'auto-induction de la turbulence proposé par **Waleffe** (Waleffe., 1995) : (1) les rouleaux forment des stries qui développent des instabilités linéaires non flexionnelles, qui elles-mêmes par évolution non linéaire vont générer des rouleaux. Les solutions des équations de Navier-Stokes ainsi obtenues sont appelées solutions cohérentes et sont obtenues par continuation. On génère les rouleaux contrarotatifs en introduisant une force centrifuge (Nagata, 1990) ou une force volumique ad hoc **Waleffe** (Waleffe, 1997). La solution est ensuite obtenue par continuation en réduisant progressivement la force imposée pour créer les rouleaux. Des ondes non linéaires avec un nombre d'onde azimutal fondamental $n=3$ et 2 en particulier, ont été trouvées respectivement pour $Re=1250$ et $Re=2500$. La structure de ces solutions est en accord avec les observations expérimentales **Hof et al.** (Björn Hof, 2004).

1.5. Cas des fluides non newtoniens

Plusieurs procédés industriels se font par écoulements de fluides non newtoniens à travers des conduites cylindriques. Il s'agit souvent de solutions de polymères ou des particules solides en suspension. **Toms** (Toms, 1949) montre que l'ajout d'une faible quantité de polymères (quelques parties par millions) peut conduire à une forte réduction du frottement à la paroi en régime turbulent et donc à une forte réduction du taux de pompage. Ce phénomène est très fréquent dans le domaine pétrolier notamment lorsqu'on souhaite réduire les pertes de charge dans les pipelines. De nombreuses études ont été consacrées à ce phénomène depuis 1949 mais il n'existe toujours pas un modèle universellement reconnu qui puisse expliquer le phénomène de la réduction des frottements. **White & Mungal** (White & Mungal, 2008) ont donné une revue bibliographique sur l'état de l'art relatif à ce phénomène. **Groisman & Steinberg** (Groisman & Steinberg, 2000) ont ensuite montré que pour des concentrations très élevées de solutions de polymères, les non linéarités élastiques induisent un comportement chaotique à très bas nombre de Reynolds.

A notre connaissance, ces deux résultats spectaculaires constituent l'essentiel de la littérature sur les instabilités hydrodynamiques de l'écoulement des fluides non newtoniens en conduite cylindrique. La littérature concernant le cas non newtonien est donc très limitée comparée au cas newtonien. Ceci est en grande partie dû, d'une part aux difficultés expérimentales du fait que la plupart des fluides complexes sont opaques et d'autre part aux difficultés numériques liées à la non linéarité de la loi rhéologique. Cependant la littérature existante révèle deux effets importants : le premier phénomène concerne le retard de l'apparition des puffs comparé à l'écoulement de fluides newtoniens. Le deuxième est relatif à l'asymétrie des profils de

vitesse axiale moyennée temporellement, observée dans une certaine gamme de nombres de Reynolds **Escudier & Presti** (Escudier & Presti, 1996), **Peixinho et al.** (Peixinho, Nouar, Desaubry, & Théron, 2005), **Escudier et al** (Escudier, Poole, Presti, Dales, & Nouar, 2005), (Esmael & Nouar, 2008), **Escudier et al** (Escudier, Rosa, & Poole, 2009), **Gusel et al.** (Gusel, Frigaard, & Martinez, 2009).

En régime laminaire et instable, les profils de vitesse axiale sont parfaitement axisymétriques.

Dans le cas newtonien, les profils de vitesse axiale restent axisymétriques dans toute la phase d'instabilité. Dans **Escudier et al.** (Escudier & Poole, 2005), on explique que cette asymétrie est la conséquence d'un mécanisme de la dynamique des fluides plutôt qu'un artefact expérimental (coriolis, courbure de la conduite, effets de gravité, etc.). Ce mécanisme doit être lié au comportement rhéologique du fluide. Les fluides utilisés par les différents auteurs ont deux propriétés rhéologiques : la viscoélasticité et la rhéofluidification. Les essais expérimentaux effectués par **Escudier et al.** (Escudier, Rosa, & Poole, 2009) indiquent que l'asymétrie des profils de vitesse est liée au caractère rhéofluidifiant du fluide. En effet, deux fluides ayant des propriétés viscoélastiques très différentes et des comportements rhéofluidifiants très proches conduisent au même degré d'asymétrie. Cette conclusion est en bon accord avec les résultats numériques de **Rudman et al.** (M. Rudman, 2004) qui montrent pour un fluide rhéofluidifiant purement visqueux décrit par la loi d'**Oswald** ($\mu = K\dot{\gamma}^{n-1}$) une asymétrie dans la répartition des stries.

Pour quantifier le degré d'asymétrie **Esmael et Nouar** (Esmael & Nouar, 2008) décrivent le profil de vitesse axiale $w(r, \theta, z)$ comme la superposition d'un profil symétrique $w_{sym}(r)$ défini par :

$$w_{sym}(r) = \frac{1}{2}[w(r, \theta) + w(r, \theta + \pi)] \quad (1.2)$$

qui représente plus ou moins une moyenne dans la direction azimutale et d'un jet $w_s(r, \theta, z)$ tels que :

$$w(r, \theta, z) = w_{sym} + w_s(r, \theta, z) \quad (1.3)$$

1.6. But de l'étude

A état intermédiaire entre les solides et les fluides visqueux, les fluides complexes présentent des caractéristiques particulières. Sous certaines conditions, les quelques millimètres de ce type de fluide posés sur un plan ne couleront pas.

A l'application d'un faible effort, ils se déformeront comme des solides élastiques, certains parmi ces fluides reprennent même leur forme d'origine lorsqu'on supprime la contrainte. Sous un effort plus important, ils coulent tels de simples fluides visqueux.

La motivation de cette étude provient en grande partie du fait que les fluides viscoélastiques sont à la base de nombreuses applications industrielles, notamment dans l'industrie des polymères, l'industrie des pâtes de papiers, l'industrie alimentaire, etc.

Cependant, la manipulation de tels fluides n'est pas chose gagnée du fait de leurs non linéarité et de leur compacité. Notre but est d'étudier l'effet de l'élasticité la stabilité. En première approche, on considère que l'élasticité est faible.

1.7. Concepts d'instabilités hydrodynamiques

1.7.1. Notion d'instabilité hydrodynamique

La théorie de la stabilité constitue un cadre formel pour étudier la dynamique des écoulements ouverts cisailés. Elle constitue une étape essentielle pour mener à bien une étude de la dynamique des écoulements ouverts cisailés. C'est une théorie qui vise à décrire quantitativement le comportement d'un écoulement soumis à des perturbations. La notion de la stabilité se définit comme la capacité de l'écoulement perturbé à revenir vers l'état non perturbé. Dans le cas contraire, l'écoulement est dit instable.

Dans le cas d'une étude d'un fluide viscoélastique, les équations de **Navier-Stokes** sont très difficiles à résoudre. C'est le cas par exemple de l'écoulement au voisinage d'une paroi. Une couche limite très mince s'établit au contact de la surface. Dans cette région, le gradient de vitesse transversal et les contraintes viscoélastiques qui lui sont associées équilibrent les forces d'inertie et le gradient de pression imposé par l'écoulement externe.

Une autre situation dans laquelle les forces viscoélastiques jouent un rôle important est celle des écoulements rampants dits *creeping flows (écoulements rampants)*.

Dans le cas des écoulements à vitesse modérée, l'équilibre s'établit entre les contraintes viscoélastiques et une combinaison des forces de pression, des forces volumiques et des forces d'inertie. Nous allons examiner dans ce travail un écoulement de ce type. Les configurations simplifiées envisagées conduisent à des solutions exactes des équations de **Navier - Stokes**. Il s'agit en fait de situations très spéciales qui permettent une résolution

analytique complète. Cependant dans la plupart des cas, la résolution directe des équations spécifiques n'est pas encore possible et il faut utiliser des méthodes approchées.

Les méthodes numériques applicables aux équations de **Navier-Stokes** ont fait l'objet de développements intensifs au cours de ces dernières décennies (voir par exemple **Richmeyer (Richmeyer, 1957)**, **Mitchell et Griffiths (Mitchell & Griffiths, 1980)**, **Cebeci et Bradshaw (Cebeci & Bradshaw, 1984)**, **Anderson et al. (Anderson, Tannehill, & Pletcher, 1997)**,)

Les méthodes d'approximations sont plus anciennes mais leur utilité subsiste car elles apportent souvent des informations théoriques qui complètent et expliquent les résultats obtenus par la simulation numérique. Les approximations courantes sont basées sur les développements en série. On étudie par exemple les écoulements à faible nombre de Reynolds (Re tend vers zéro) dans l'approximation des écoulements '**rampants**'. Le nombre de Reynolds est le petit paramètre d'un développement asymptotique de la solution **Van Dyke (Van Dyke, 1975)**.

Les écoulements aux petits nombres de Reynolds ou encore écoulements '**rampants**' sont caractérisés par la prédominance des effets dus à la viscosité du fluide sur ceux liés à son inertie. L'équation de **Stokes**, qui régit ces écoulements, est linéaire, car le terme convectif non linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ peut alors être négligé.

L'approximation de la lubrification est celle des écoulements visqueux faiblement divergents de filets fluides **Denn (Denn, 1980)**. Le terme de lubrification recouvre les écoulements de fluides visqueux confinés entre deux parois solides très proches en mouvement relatif. Les deux parois délimitent un espace de très grand rapport d'aspect : l'épaisseur moyenne est très petite devant la longueur.

Dans l'approximation de la couche limite, c'est le rapport de l'épaisseur de la couche limite à la distance longitudinale qui joue le rôle de petit paramètre.

Ce panorama rapide des méthodes de résolutions des équations de **Navier –Stokes** permet de mieux comprendre le caractère très spécial et l'intérêt des solutions que nous allons présenter.

Nous allons surtout consacrer cette partie à une brève revue des différentes approches qui sont utilisées pour étudier la stabilité des écoulements hydrodynamiques. Ces approches sont introduites dans le contexte des écoulements ouverts cisailés. Le caractère ouvert d'un écoulement signifie que les particules de fluide entrant dans le domaine physique considéré sortent en permanence de ce domaine et sont donc continuellement recyclées.

On peut dès lors distinguer une région amont et une région aval dans l'écoulement. Le cisaillement de l'écoulement, défini à partir du gradient du champ de vitesse, est généralement vu comme le moteur des instabilités dans un écoulement.

1.7.2. Théorie linéaire de la stabilité hydrodynamique

L'étude de la stabilité des écoulements est une théorie qui a pour but d'étudier le comportement d'un écoulement soumis à des perturbations. On peut représenter cet écoulement perturbé par les champs de vitesse, de pression et de l'extra-contrainte caractéristique des effets élastiques $(\vec{u}, p, \bar{\sigma})$ qui vérifient les équations de Navier-Stokes. Il est envisagé comme la superposition des perturbations, qu'on va noter $(\vec{u}', p', \bar{\sigma}')$, sur un écoulement non perturbé noté $(\vec{u}^b, p^b, \bar{\sigma}^b)$. On peut étudier la stabilité d'un écoulement en caractérisant l'évolution temporelle d'une perturbation initiale aléatoire introduite sur le champ de base à un instant initial $t = 0$.

Pour le cas de la théorie de stabilité linéaire, l'amplitude de la perturbation initialement superposée au champ de base est très petite par rapport à l'amplitude de ce dernier. L'évolution temporelle de cette perturbation peut alors être décrite par des équations linéaires tant que son amplitude reste petite devant celui du champ de base. On obtient ces équations linéaires en linéarisant les équations de Navier-Stokes autour du champ de base c'est-à-dire en négligeant les termes non linéaires dont l'ordre de grandeur est largement inférieur à celui des termes linéaires. L'étude de la stabilité linéaire consiste à déterminer, pour un champ de base donné, si l'amplitude de la perturbation linéaire peut croître suffisamment et atteindre l'ordre de grandeur du champ de base. Dans ce cas, le champ de l'écoulement de base est dit linéairement instable. Le concept de stabilité linéaire dépend de l'amplitude du champ de l'écoulement de base et du temps pour lequel l'amplitude de la perturbation est mesurée.

On s'intéressera dans la suite à des champs de base stationnaires bidimensionnels c'est-à-dire indépendants du temps mais dépendants des deux directions de l'espace r et z .

1.7.3. Etude théorique de la stabilité par une approche locale

Cette théorie consiste dans un premier temps à supposer que la longueur caractéristique d'évolution spatiale du champ de base est plus grande dans une direction donnée. C'est donc une approche qui n'est applicable qu'aux écoulements faiblement non parallèles. Cette séparation des échelles spatiales permet ensuite de supposer que la taille caractéristique des perturbations étudiées est très petite par rapport à l'échelle de longueur caractéristique de

l'évolution du champ de base dans la direction axiale z . La dynamique des perturbations est alors représentée par une superposition d'ondes d'instabilité qui évolueraient pour chaque station z de l'écoulement, comme si le champ de base était parallèle en chaque station. La dynamique des écoulements ouverts cisailés peut être décrite par les concepts d'instabilités convectives et absolues, qu'elles soient de type oscillateur harmonique ou amplificateur de bruit. A partir de ces concepts, on peut formaliser la compétition locale entre la convection de l'onde par le champ de base $W^b(r)$ et le mécanisme d'instabilité locale. Le comportement de l'écoulement parallèle vis-à-vis d'une impulsion localisée en temps et en espace permet de déterminer si l'écoulement de base $W^b(r)$ est **localement stable**, **convectivement instable** ou **absolument instable**. Lorsque le champ de base est **stable**, l'amplitude de la perturbation décroît asymptotiquement en fonction du temps. Dans le cas d'un champ de base **convectivement instable**, l'amplitude des perturbations s'amplifie dans le temps tandis qu'elle est convectée vers l'aval. De ce fait, l'amplitude de la perturbation mesurée à l'endroit où elle a été introduite n'est pas amplifiée. Pour toute autre position spatiale située plus en aval, l'amplitude localisée à cette position croît en premier lieu puis s'annule pour des temps très longs. La convection de l'onde par le champ de base domine le mécanisme **d'instabilité locale**.

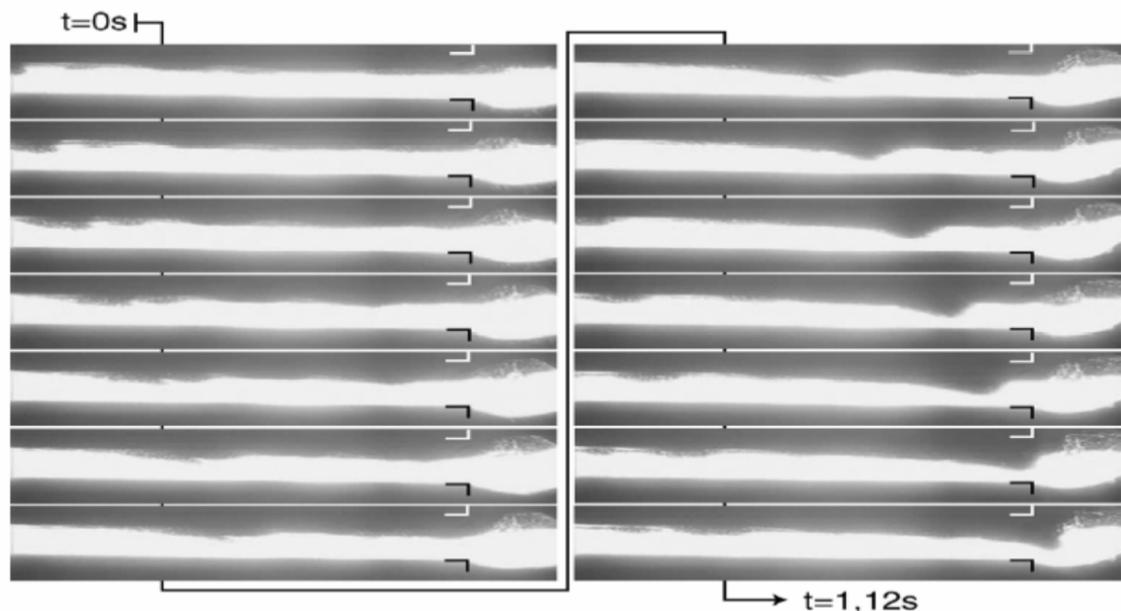


Figure 1.2 : Caractère convectif de l'instabilité ; Wilson and Khomami (1992)

Pour un champ de base **absolument instable**, la convection de l'onde par le champ de base n'est pas assez forte pour empêcher une amplification temporelle de l'onde à l'endroit où elle a été introduite. On peut de ce fait déterminer la dynamique globale des écoulements

faiblement non parallèles à partir des propriétés d'instabilités locales de l'écoulement. D'après **Chomaz et al.** (Chomaz, Huerre, & Redekopp, 1991) ; **Monkewitz et al.** (Monkewitz, Huerre, & Chomaz, 1993) ; **LeDizès et Huerre** (LeDizès & Huerre, 1996), un écoulement faiblement parallèle n'est globalement instable que lorsqu'il existe une région finie de l'espace dans laquelle l'écoulement est localement absolument instable. Une autre définition de la **stabilité globale** qui s'avère importante à noter est relative au cas où l'écoulement retourne à son état de base quelle que soit l'amplitude de la perturbation.

1.7.4. Amplification modale et non modale de la perturbation

L'approche classique de la perturbation est basée sur l'amplification modale des perturbations. Les perturbations sont alors recherchées sous forme de mode de dépendance exponentielle en fonction du temps. On associe à cet effet les propriétés de stabilité de l'écoulement au comportement de mode ayant le plus grand taux d'amplification. L'écoulement sera dit stable lorsque tous ces modes sont atténués, tandis qu'il sera dit instable lorsqu'au moins l'un de ces modes est amplifié. L'approche modale de la stabilité est implicitement liée au concept asymptotique de la stabilité des écoulements dans la mesure où elle associe l'amplification de la perturbation à l'amplification de chaque mode. Si l'amplitude de la perturbation est effectivement atténuée aux temps longs lorsque tous les modes sont atténués, cette affirmation n'est plus légitime aux temps courts car des phénomènes de coopération entre des modes atténués peuvent conduire à une croissance transitoire de l'amplitude de la perturbation. Les limites de l'amplification modale de la stabilité hydrodynamique ont été reconnues en étudiant la transition laminaire-turbulent des écoulements de Poiseuille et de Couette, deux écoulements parallèles dont l'instabilité est pilotée par un cisaillement. Les analyses basées sur une décomposition modale des perturbations n'ont en effet pas permis de déterminer un nombre de Reynolds critique correspondant au nombre de Reynolds pour lequel l'écoulement passe d'un état laminaire à un état instable dans les expériences. Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille, le nombre de Reynolds critique prédit par l'analyse de stabilité modale vaut $Re_{cr} = 5772$ **Orzag** (Orzag, 1971), alors que la transition laminaire-instable est observée dans les expériences pour un nombre de Reynolds de l'ordre de $Re_{cr} \approx 1000$ **Davies et White** (Davies & White, 1928). Dans le cas de l'écoulement de Couette la situation est encore plus dramatique puisque la théorie ne prévoit pas d'instabilité de l'écoulement pour des nombres de Reynolds finis, tandis qu'une transition est observée expérimentalement pour un nombre de Reynolds $Re_{tr} \approx 350$ **Tillmark et Alfredsson** (Tillmark & Alfredsson, 1992).

Une nouvelle approche de la théorie de la stabilité linéaire a vu le jour en hydrodynamique au début des années 90, suite aux travaux de **Gustavsson** (Gustavsson, 1991), Butler and Farel (Butler & Farrell, 1992), **Reddy et al.** (Reddy, Schmid, & Henningson, 1993) (Renardy, 1995), **Reddy et Henningson** (Reddy & Henningson, 1993) et **Trefethen et al.** (Lloyd N. Trefethen, 1993). Ces travaux ont montré que dans ces écoulements parallèles cisailés, certaines perturbations initiales peuvent être amplifiées très fortement pendant des temps finis, même lorsque l'écoulement est asymptotiquement stable. On parle alors d'amplification non modale des perturbations. Remarquons que dans le cadre de la météorologie l'amplitude non modale des perturbations a été considérée dès les années 80 afin d'expliquer des phénomènes à l'échelle synoptique **Farrell et Ioannou** (Farrell & Ioannou). Mathématiquement, l'amplification transitoire de l'énergie d'une perturbation initiale est associée à la non normalité de l'opérateur de **Navier Stokes** linéarisé décrivant l'évolution des perturbations linéaires dans l'écoulement. La perturbation initiale peut être considérée comme une combinaison de modes propres stables et non orthogonaux entre eux. La non orthogonalité des modes propres stables induit une croissance transitoire de l'amplitude de la perturbation.

Physiquement, cette amplification non modale de l'énergie est reliée à deux mécanismes de natures différentes, le mécanisme **d'Orr** et le mécanisme de **Lift-up**. Le mécanisme **d'Orr** est un mécanisme non visqueux qui conduit à un maximum d'amplification énergétique pour des perturbations initiales bidimensionnelles.

Le mécanisme de **lift-up** est un phénomène tridimensionnel qui conduit à un maximum d'amplification énergétique pour des perturbations tridimensionnelles ne variant pas spatialement dans la direction principale de l'écoulement (la direction axiale z pour un écoulement longitudinale à géométrie cylindrique). Ce mécanisme **lift-up** a été décrit par **Ellingsen et Palm** (Ellingsen & Palm, 1975) et **Landahl** (Landahl, 1980). Une perturbation tridimensionnelle a initialement la forme d'une perturbation de vorticité orientée dans la direction radiale r c'est-à-dire de tourbillons longitudinaux (**streamwise vortex**).

Trefethen et al. (Lloyd N. Trefethen, 1993) ont montré que la non normalité de l'opérateur d'évolution des perturbations peut expliquer le phénomène de pseudo-résonance de l'écoulement. Le phénomène de résonance signifie que l'énergie des perturbations apparaissant dans un écoulement soumis à un forçage harmonique est largement plus grande que l'énergie du forçage. Dans le cas d'un écoulement décrit par un opérateur d'évolution

normale ou auto-adjoint, l'écoulement entre en résonance uniquement lorsque la fréquence de forçage est proche d'une valeur propre dans le spectre de l'opérateur. Il est ainsi possible de déterminer la fréquence de résonance à partir de la connaissance du spectre. Dans le cas d'un écoulement gouverné par un opérateur d'évolution non normale, une telle amplification de l'écoulement peut avoir lieu même lorsque la fréquence de l'opérateur n'est pas proche d'une valeur propre du spectre. On parle dans ce cas de pseudo-résonance **Schmid et Henningson** (Schmid & Henningson, 2001).

En hydrodynamique, la majeure partie des études a porté sur la non normalité des écoulements de Couette et Poiseuille en recherchant les types de perturbations initiales qui maximisent l'amplification énergétique. Les perturbations initiales de ce type ont été appelées perturbations optimales par **Farrell** (Farrell, 1998). Par la suite la détermination des perturbations optimales a été étendue à des écoulements faiblement non-parallèles comme l'écoulement de couche limite (voir par exemple **Andersson et al.** (Andersson, Berggren, & Henningson) ; **Corbett et Bottaro** (Corbett & Bottaro, 2000) ; **Luchini** (Luchini, 2000)).

1.7.5. Etude de la stabilité par une approche globale

Une grande partie des écoulements ouverts évolue fortement dans les deux directions de l'espace. Ils ne sont ni parallèles ni faiblement non parallèles, et du coup l'hypothèse sur laquelle est basée l'approche locale de la théorie de la stabilité linéaire n'est plus valide a priori. L'approche globale de la théorie de stabilité linéaire consiste à s'affranchir de cette hypothèse et à étudier la stabilité linéaire d'un champ de base $w^b(r, z)$ qui dépend donc des deux directions de l'écoulement. Cette étude a débuté à la fin des années 80 et au début des années 90 avec les travaux de **Jackson** (Jackson, 1987) ; **Zebib** (Zebib, 1987) ; **Hill** (Hill, 1992) mais n'a connu un réel essor qu'à partir d'un peu moins d'une décennie plus tard (**Barkley & Henderson, 1996**) ; (**Morzynski, Afanasiev, & Thiele, 1999**) ; (**Barkley, Gomes, & Henderson, 2003**) ; **Theofilis** (Theofilis, 2003) pour une revue. Cet essor récent s'explique surtout par l'émergence de l'outil informatique et l'amélioration des algorithmes, deux facteurs incontournables pour la résolution des problèmes aux valeurs propres de très grandes tailles qui apparaissent dans l'approche globale **Theofilis** (Theofilis, 2003).

Plusieurs études faites avec cette approche sont basées sur une décomposition des perturbations sous forme modale. Les perturbations sont exprimées sous la forme de modes globaux dépendant exponentiellement du temps. Avec une telle décomposition, les équations de Navier-Stokes peuvent être transformées en un problème à valeurs propres généralisées.

La recherche de valeurs propres avec un taux d'amplification maximum permet de rendre compte de la stabilité globale de l'écoulement. Une telle analyse de stabilité peut être appelée "**analyse globale de la stabilité**" et équivaut à l'analyse de stabilité bi-globale définie par **Theofilis** (**Theofilis, 2003**). L'analyse de stabilité globale permet de déterminer la dynamique de type résonateur d'un écoulement décrit par le mode global le plus instable.

A notre connaissance, peu de travaux ont été consacrés à décrire la dynamique d'amplificateur par une approche globale de la théorie de la stabilité. **Cossu et Chomaz** (**Cossu and Chomaz, 1997**) et **Chomaz** (**Chomaz J. M., 2005**) ont suggéré à partir d'une étude de l'équation modèle de **Ginzburg-Landau** que la non normalité des écoulements ouverts était de nature différente de celle invoquée d'habitude pour expliquer la croissance transitoire dans les équations parallèles. En 2005 Chomaz a proposé de voir la dynamique d'amplificateur d'un écoulement globalement stable comme une conséquence directe de la non normalité de l'opérateur global de **Navier-Stokes** linéarisé. Cette équation a été traitée par **Schmid et Henningson** (**Schmid & Henningson, 2002**); **Ehrenstein & Gallaire** (**Ehrenstein & Gallaire, 2005**) et **Akervic et al.** (**Akervic, Hoeffner, Ehrenstein, & Henningson, 2007**) en s'intéressant à la croissance transitoire de l'énergie d'une perturbation initiale dans un écoulement globalement stable. Ils ont montré qu'une dynamique réduite de l'écoulement, construite à partir d'un nombre fini de modes globaux stables, permettait d'obtenir de fortes croissances transitoires de l'énergie des perturbations. Dans une approche globale, la dynamique d'amplificateur peut donc être étudiée en utilisant des méthodes similaires à celles utilisées pour quantifier l'amplification non modale dans les écoulements parallèles.

Dans le cadre de cette thèse nous nous focaliserons surtout sur les approches linéaires. Les perturbations pourront donc être évaluées sous forme modale ou non modale.

Conclusion

Les différents travaux théoriques et numériques effectués dans le cas des écoulements en conduite cylindrique d'axe horizontal ont conduit au même résultat : l'écoulement d'un fluide newtonien ou d'un fluide rhéofluidifiant dans une conduite cylindrique d'axe horizontal est linéairement stable. Cependant la question qu'on se pose est la suivante. Quelle serait le comportement d'un tel écoulement lorsqu'on ajoute une solution de polymère dans le fluide ? C'est à cette question que nous tenterons d'apporter réponse dans la suite. Pour rappel la présence de polymère dans un fluide lui confère un caractère élastique. Ainsi pour traduire en

équations mathématiques les faits relatés dans cette partie, on aborde la modélisation mathématique et numérique du problème.

CHAPITRE 2: *MODELISATIONS MATHEMATIQUE*
ET NUMERIQUE

CHAPITRE 2: MODELISATIONS MATHEMATIQUE ET NUMERIQUE

Introduction

Dans les écoulements parallèles ou quasi-parallèles cisailés à grand nombre de Reynolds et loin des parois, comme par exemple les couches de mélange, les jets et les sillages, le mécanisme d'instabilités non visqueuses est lié à la présence d'un point d'inflexion dans le profil des vitesses. L'ordre de grandeur du taux de croissance est de l'ordre de $\delta u/\varepsilon$ où ε est l'épaisseur de la couche de viscosité et δu la différence de vitesse de part et d'autre de cette couche. Dans cette dernière, la viscosité n'y joue aucun rôle diffusif pouvant atténuer le taux de croissance. Par contre la proximité d'une paroi dans un écoulement cisailé modifie profondément la topologie de l'écoulement.

L'observation montre en effet que l'écoulement de Poiseuille est instable au-delà d'une certaine valeur du nombre de Reynolds. Or cet écoulement ne présente pas de point d'inflexion et est donc stable d'après le théorème de **Rayleigh (1916)**.

L'analyse des effets viscoélastiques est donc nécessaire pour tenter de rendre compte des instabilités observées. Il apparaît que la viscosité a deux effets : un effet dissipatif stabilisant et un effet déstabilisant lié au couplage entre l'inertie et la condition d'adhérence à la paroi. Le mécanisme physique de cet effet déstabilisant échappe malheureusement à une explication simple. Le taux de croissance est généralement beaucoup plus faible que celui d'une instabilité non visqueuse.

Dans ce chapitre, après avoir décrit le domaine d'étude et posé le problème, nous allons établir les équations qui gouvernent notre écoulement en s'appuyant sur des hypothèses simplificatrices jugées raisonnables. Ces équations fortement non linéaires, rendues adimensionnelles afin de généraliser l'étude, nécessitent une méthode approchée pour leur résolution. Ensuite on y abordera aussi la méthode numérique utilisée pour résoudre le problème. Ce chapitre comprend en fait trois parties. Dans la première partie, les équations gouvernant le problème sont données ainsi que les différents paramètres adimensionnels intervenant dans l'écoulement.

La deuxième partie est relative à l'analyse de l'écoulement de base, où il s'agira d'étudier l'écoulement stationnaire et unidirectionnel d'un fluide viscoélastique décrit par la loi d'Oldroyd-B dans une conduite de géométrie cylindrique et d'axe horizontal. On détaillera dans cette partie l'influence des paramètres rhéologiques sur la stabilité de l'écoulement de

base. La troisième et dernière partie de ce chapitre est consacrée à la description de la méthode numérique utilisée.

2.1. Modélisation mathématique

Les principes fondamentaux de la Mécanique des Milieux Continus (conservation de la quantité de mouvement et conservation de la quantité de matière ou équation de continuité) nous permettent d'écrire un système de deux équations à résoudre. Nous avons

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}}_{tol} + \vec{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

avec

- ρ la masse volumique du fluide
- \vec{u} le champ des vitesses
- \vec{f} le champ des forces massiques
- $\bar{\bar{\sigma}}_{tol}$ le tenseur des contraintes totales donné par

$$\bar{\bar{\sigma}}_{tol} = -p \cdot \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \quad (2.2)$$

où p est la pression mécano- statique et $\bar{\bar{\tau}}$ le tenseur des contraintes viscoélastiques.

D'après les théorèmes généraux de la mécanique des milieux continus le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}_{tol}$ est symétrique et par conséquent $\bar{\bar{\tau}}$ est aussi un tenseur symétrique.

2.1.1. Lois de comportement des fluides viscoélastiques

Le fluide viscoélastique à une contrainte constante peut avoir un comportement visqueux ou élastique. Si on laisse tomber une balle de « *Silly-putty* », elle rebondit. Si à l'inverse on la laisse reposer sur un plan horizontal elle va, au bout d'un certain temps, s'étaler comme un fluide. C'est le cas des poches de silicone utilisées en chirurgie esthétique.

Dans le premier cas, le temps de sollicitation est inférieur au temps seuil spécifique au matériau car les composants du matériau n'ont donc pas le temps de se déformer de façon importante : la réaction à la contrainte est dite élastique. Dans le second cas, le temps de sollicitation est supérieur au temps seuil du matériau. Les composants élémentaires ont donc le temps de se déformer : la réaction à la contrainte est dite visqueuse.

La manière la plus simple de définir un fluide viscoélastique est donc de superposer les contraintes d'origine élastique et les contraintes d'origine visqueuse.

$$\bar{\bar{\tau}} = \bar{\bar{\tau}}_{visqueux} + \bar{\bar{\tau}}_{élastique} \quad (2.3)$$

Dans la suite par souci de simplicité nous poserons

$$\bar{\tau}_{\text{élastique}} = \bar{\sigma} \quad (2.4)$$

2.1.2. Caractérisation des fluides viscoélastiques

Plusieurs expériences nous permettent de rendre compte de l'aspect viscoélastique d'un fluide, parmi les plus spectaculaires on distingue celles de Weissenberg et de Barrus (*voir annexe A*). Il est important de noter que ces deux expériences ne sont pas les seules qui peuvent nous permettre de rendre compte des effets viscoélastiques d'un fluide.

2.1.3. Le choix du modèle de fluide viscoélastique

Les effets viscoélastiques sont très importants dans de nombreuses applications industrielles. Ils correspondent à tous les phénomènes que les comportements purement visqueux ou linéaires ne peuvent pas rendre compte. Ils peuvent être responsables de recirculations complexes qui ont un impact significatif sur la production en milieux industriels.

Un exemple classique est le procédé de renforcement de fibres par des matériaux polymères où la distribution et l'orientation des fibres déterminent les propriétés mécaniques du produit final. Le nombre Weissenberg (ou nombre de Deborah) est le rapport entre le temps de relaxation du matériau et le temps caractéristique d'observation. Il est infini pour un solide hookéen et nul pour un fluide newtonien. Mais il est clair par définition que les matériaux n'ont pas de nombre de Weissenberg (ou nombre de Deborah) associé : un matériau avec un temps de relaxation non nul peut se comporter comme un solide si le temps caractéristique du processus est petit, et réciproquement. Un exemple de matériau dont le comportement peut ressembler à un fluide ou un solide est un matériau à base de silicone qui, s'il est laissé dans un récipient pendant un temps assez long va retrouver sa position de repos alors que si on jette violemment ce matériau à terre, il peut aussi rebondir.

Bien évidemment, le comportement mécanique de nombreux fluides est bien décrit par la loi constitutive d'un fluide dit newtonien. Cette loi correspond au cas où le temps de relaxation est très petit devant celui de l'expérience. Néanmoins, d'autres fluides ont des comportements qui ne sont pas pris en compte par de telles lois. Parmi de tels fluides, on peut citer les solutions de polymères comme les peintures, les dentifrices, les argiles... Par la suite, on s'intéressera aux fluides ayant des propriétés rhéologiques qui peuvent être différentes de celles des fluides newtoniens et en particulier à la classe des fluides viscoélastiques.

De telles lois ont été validées dès que le fluide contient des macromolécules (même en petite quantité).

Leur dynamique non linéaire est fondamentalement différente de celle des fluides newtoniens.

Deux propriétés sont principalement responsables de ce fait : la première est tout simplement le changement de viscosité et la seconde correspond aux divers temps de relaxations qui sont associés aux polymères. Ces temps sont en général du même ordre de grandeur que les temps d'échelle du flot et permettent aux polymères de donner une "réponse" observable.

Il n'y a pas de loi de comportement universelle et la recherche de lois "raisonnables" est encore l'objet de nombreux travaux. On distingue deux classes de lois de comportement, les lois de type intégral et les lois de type différentiel, obtenues par des considérations moléculaires ou de mécanique des milieux continus. Les lois sous forme intégrale permettent de bien comprendre que les fluides viscoélastiques sont des fluides à mémoire : la valeur de la contrainte au temps présent dépend directement de l'histoire des déformations. Néanmoins, les modèles intégraux sont très coûteux en temps de calcul pour la simulation numérique car ils nécessitent le calcul des trajectoires. C'est pourquoi on leur préfère les modèles différentiels.

Nous allons voir par la suite comment on peut construire de tels modèles.

Une des premières idées qui fut développée pour schématiser un fluide viscoélastique est de considérer chaque "cellule" de fluide comme un complexe de masses et de ressorts. Par la suite d'autres modèles ont été proposés et l'un des plus adéquats aux fluides viscoélastiques est le modèle de Jeffrey.

Jeffrey représente une cellule de fluide viscoélastique comme étant constituée, d'une disposition en série d'une masse de viscosité η_1 et d'une cellule de Kevin-Voigt qui à son tour n'est qu'une disposition en parallèle d'une masse de viscosité η_2 et d'un ressort de constante de raideur G comme décrit au précédent paragraphe (*voir annexe B*).

L'équation traduisant le modèle monodimensionnel de Jeffrey se met alors sous la forme :

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \quad (2.5)$$

2.1.4. Généralisation aux tenseurs

C'est ce modèle de Jeffrey généralisé aux tenseurs qui a donné naissance au modèle d'**Oldroyd-B** (Oldroyd, 1950) suivant :

$$\lambda \cdot \frac{D}{Dt}(\bar{\tau}) + \bar{\tau} = 2 \cdot \eta \cdot \left\{ \bar{D}(\vec{u}) + \lambda' \cdot \frac{D}{Dt}(\bar{D}(\vec{u})) \right\} \quad (2.6)$$

$\bar{D}(\vec{u})$ est le tenseur des taux de déformations défini comme étant la partie symétrique du tenseur gradient des vitesses

$$\bar{D}(\vec{u}) = (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^s = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \otimes \vec{u} + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right\} \quad (2.7)$$

avec $(\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T$ le tenseur transposé de $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$.

$\frac{D}{Dt}$ est la dérivée au sens de Gordon-Schowalters dite aussi dérivée objective qui représente une dérivée invariante par toutes transformations euclidiennes (Fredrickson, 1961). Elle est définie par :

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \mathcal{F} + \mathcal{F} \cdot \bar{W}(\vec{u}) - \bar{W}(\vec{u}) \cdot \mathcal{F} + a \cdot \left\{ \bar{D}(\vec{u}) \cdot \mathcal{F} + \mathcal{F} \cdot \bar{D}(\vec{u}) \right\} \quad (2.8)$$

a est un paramètre compris entre -1 et $+1$ et $\bar{W}(\vec{u})$ est le tenseur tourbillon défini comme étant la partie antisymétrique du gradient des vitesses

$$\bar{W}(\vec{u}) = (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^a = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \otimes \vec{u} - (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right\} \quad (2.9)$$

Dans le cas d'un fluide newtonien, $\lambda = \lambda' = 0$ et la loi constitutive (2.6) se ramène à la relation classique :

$$\bar{\tau}_{newt} = 2 \cdot \eta \cdot \bar{D}(\vec{u}) \quad (2.10)$$

Afin de faire apparaître cette contribution dans l'expression de la loi constitutive plus générale, on décompose alors le tenseur des contraintes en la somme de la contrainte newtonienne $2 \cdot \eta \cdot \frac{\lambda'}{\lambda} \bar{D}(\vec{u})$ et de la contrainte élastique $\bar{\sigma}$ dite extra-contrainte.

En introduisant le paramètre de retard (qui caractérise la distribution des contraintes d'origine visqueuse et celles d'origine élastique) et dont l'expression est la suivante :

$$\omega = 1 - \frac{\lambda'}{\lambda}$$

la loi constitutive devient :

$$\bar{\tau} = 2 \cdot \eta \cdot (1 - \omega) \cdot \bar{D}(\vec{u}) + \bar{\sigma} \quad (2.11)$$

avec $\bar{\sigma}$ un tenseur symétrique d'ordre 2 appelé extra-contrainte.

Dans ces conditions le modèle d'Oldroyd-B (2.6) se ramène à l'équation de l'extra-contrainte suivante

$$\lambda \cdot \frac{D}{Dt}(\bar{\sigma}) + \bar{\sigma} = 2 \cdot \eta \cdot \omega \cdot \bar{D}(\vec{u}) \quad (2.12)$$

Ainsi, tenant compte de ce modèle d'Oldroyd-B et en remplaçant $\bar{\tau}$ par son expression dans celle du tenseur total des contraintes, on peut regrouper les différentes équations, de continuité, de conservation de la quantité de mouvement et de comportement de l'extra-contrainte dans le système ci-dessous.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{u}) = 0 \\ \lambda \cdot \frac{D}{Dt}(\bar{\sigma}) + \bar{\sigma} = 2 \cdot \eta \cdot \omega \cdot \bar{D}(\vec{u}) \\ \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} \cdot p + \vec{\nabla} \cdot [2 \cdot \eta \cdot (1 - \omega) \cdot \bar{D}(\vec{u})] + \vec{\nabla} \cdot \bar{\sigma} + \vec{f} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

2.1.5. Description du système et position du problème

Nous nous proposons d'étudier l'écoulement forcé d'un fluide viscoélastique isotherme initialement au repos dans une conduite cylindrique imperméable de rayon R , de longueur L et d'axe horizontal (Oz).

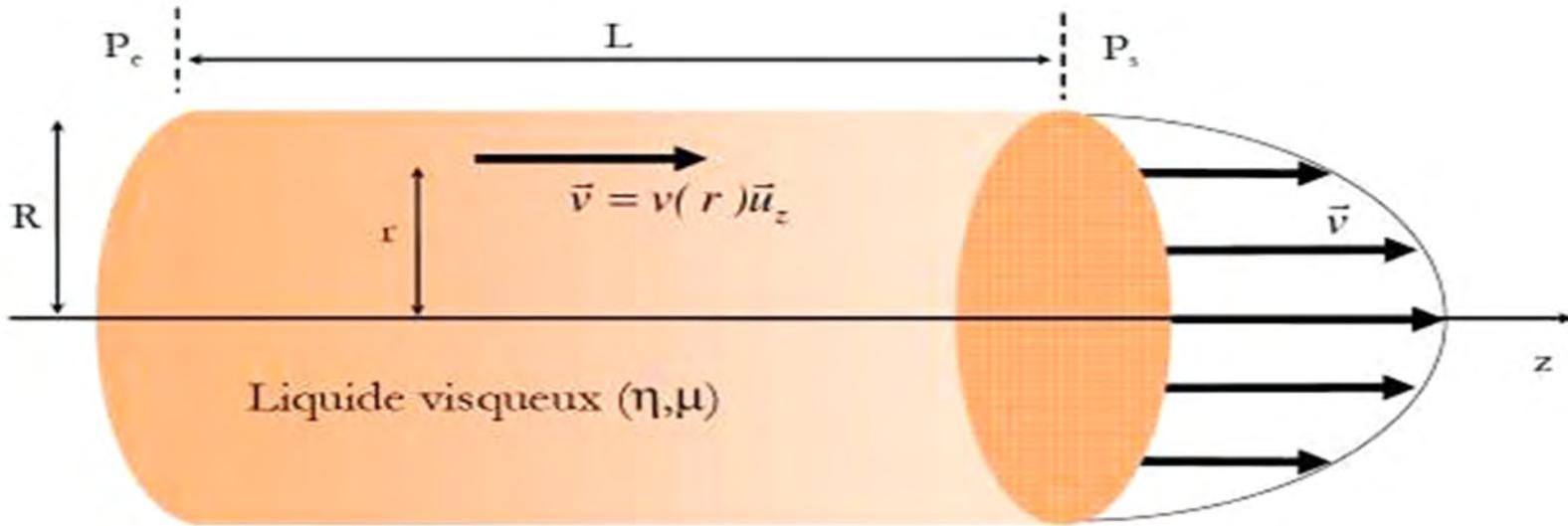


Figure 2.1: Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

A partir d'un instant $t = t_0$, on met le fluide en mouvement par le biais d'une vitesse à l'entrée $\vec{u}(x, y, z; t_0) = \vec{u}_0$. Il se produit alors une convection forcée que nous nous proposons d'étudier.

La plupart des fluides viscoélastiques sont incompressibles et en particulier ceux que nous étudions dans ce manuscrit. Nous avons considéré de plus que la température du fluide est constante (fluide isotherme) et que le champ de force volumique \vec{f} est représenté par $\rho\vec{g}$.

Le modèle que l'on va étudier comporte un seul temps de relaxation (λ). Cependant il existe d'autres modèles comportant plusieurs temps de relaxation.

Les équations gouvernant l'écoulement se mettent alors sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}) = 0 \\ \lambda \cdot \frac{D}{Dt} (\vec{\sigma}) + \vec{\sigma} = 2 \cdot \eta \cdot \omega \cdot \overline{\overline{D}}(\vec{u}) \\ \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} \cdot p + \eta \cdot (1 - \omega) \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})] + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \rho \cdot \vec{g} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

2.1.6. Adimensionnalisation des équations

Dans le but de généraliser notre étude et de réduire le nombre de paramètres, les équations qui régissent les transferts vont être ramenées sous des formes adimensionnelles. En utilisant le rayon de la conduite R et la vitesse maximale w_0 en régime laminaire établi comme échelles de longueur et de vitesse alors nous en déduisons les échelles de temps et de contrainte qui sont respectivement données par $\frac{R}{w_0}$ et $\rho \cdot (w_0)^2$. Grâce à ses grandeurs de référence, nous obtenons ainsi les grandeurs réduites

$$\bar{r} = \frac{r}{R} ; \bar{z} = \frac{z}{R} ; \bar{t} = \frac{t \cdot w_0}{R} ; \bar{p} = \frac{p}{\rho \cdot (w_0)^2} ; \bar{u} = \frac{1}{w_0} \cdot \vec{u} ; \bar{\sigma} = \frac{1}{\rho \cdot (w_0)^2} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\overline{\overline{\nabla}} = R \cdot \vec{\nabla} ; \overline{\overline{D}} = R \cdot \overline{\overline{D}} \quad (2.15)$$

En introduisant ces paramètres adimensionnels dans les équations gouvernant le problème on obtient, après quelques simplifications, les équations adimensionnelles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{\nabla}} \cdot (\overline{\overline{u}}) = 0 \\ We \cdot \left(\frac{D}{D\bar{t}} (\overline{\overline{\sigma}}) \right) + (\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{2 \cdot \omega}{Re} \cdot \left(\overline{\overline{D}} (\overline{\overline{u}}) \right) \\ \left(\frac{\partial \overline{\overline{u}}}{\partial \bar{t}} \right) + \left((\overline{\overline{u}} \cdot \overline{\overline{\nabla}}) \overline{\overline{u}} \right) = -(\overline{\overline{\nabla}} \cdot \overline{\overline{p}}) + \frac{(1-\omega)}{Re} \cdot \left(\overline{\overline{\nabla}} \cdot (\overline{\overline{\nabla}} \otimes \overline{\overline{u}}) \right) + (\overline{\overline{\nabla}} \cdot \overline{\overline{\sigma}}) + \frac{1}{Fr} \cdot \left(\frac{1}{\|\vec{g}\|} \cdot \vec{g} \right) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Dans le système nous avons posé

$Re = \rho \cdot \frac{Rw_0}{\eta}$ le nombre de Reynolds qui compare les effets d'inertie et les effets de viscosité.

C'est ce nombre qui caractérise le régime de l'écoulement.

$We = \frac{\lambda w_0}{R}$ est défini comme étant le nombre de Weissenberg. Ce nombre est encore appelé nombre de Déborah De en référence à la prophétesse de l'ancien testament. On retrouve en effet dans le livre des juges, chapitre 5, verset 5 : « *montes fluxerunt a faci Domini* » soit « *les montagnes coulèrent devant Dieu* ». Il nous paraît que le nombre de Déborah est plus à comprendre comme le temps caractéristique du matériau devant celui de la durée de l'expérience, là où le nombre de Weissenberg étudie le ratio du temps caractéristique du matériau devant celui de la configuration de l'expérience.

$Fr = \frac{(w_0)^2}{gR}$ dit nombre de Froude compare les effets d'inertie aux effets de gravité.

Il est important de noter que dans chaque équation adimensionnelle les termes mis entre parenthèses () sont de même ordre de grandeur. Ainsi ce sont les valeurs des paramètres de contrôle (Re, We, Fr) qui nous renseignent sur la prédominance de tel ou tel effet.

Vu la géométrie de notre domaine d'étude, nous adopterons dans tout ce qui suit les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Ainsi en développant \vec{u} dans la base cylindrique polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ nous avons :

$$\vec{u} = u \cdot \vec{e}_r + v \cdot \vec{e}_\theta + w \cdot \vec{e}_z \quad (2.16)$$

On rappelle que dans le système de coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\text{Grad}}(\vec{u}) = (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_r) + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta) + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_z) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \cdot (\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_r) \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) \cdot (\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot (\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_z) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot (\vec{e}_z \otimes \vec{e}_r) + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot (\vec{e}_z \otimes \vec{e}_\theta) + \\ &\frac{\partial w}{\partial z} \cdot (\vec{e}_z \otimes \vec{e}_z) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \overline{\text{Grad}}(\vec{u}) : \vec{I} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.18)$$

Si \vec{T} est un tenseur d'ordre 2, il vient

$$\begin{aligned} \text{Div}(\vec{T}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{T} &= \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(T_{\theta r})}{\partial \theta} + \frac{\partial(T_{zr})}{\partial z} - \frac{1}{r} \cdot T_{\theta\theta} \right\} \cdot \vec{e}_r + \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot T_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(T_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \right. \\ &\left. \frac{\partial(T_{z\theta})}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot T_{\theta r} \right\} \cdot \vec{e}_\theta + \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot T_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(T_{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{\partial(T_{zz})}{\partial z} \right\} \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (2.18')$$

Enfin pour plus de lisibilité et de légèreté dans l'écriture des équations, nous omettrons volontairement l'accentuation ($\vec{\nabla}$) dans la suite de ce manuscrit.

2.1.7. L'écoulement de base

Nous considérons l'écoulement de base comme étant un écoulement plan (r, z) unidirectionnel et permanent

$$\vec{U}_b(M) = W_b(r, 0, z) \cdot \vec{e}_z \quad (2.19)$$

L'équation de continuité nous montre que $W(r, z)$ doit être indépendante de z . Donc on a

$$\vec{U}_b(M) = w_b(r) \cdot \vec{e}_z = w^b \cdot \vec{e}_z \quad (2.20)$$

Cet écoulement est induit par un gradient longitudinal de pression.

Comme

$$\overline{D}(\vec{U}_b) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial w^b}{\partial r} \cdot (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_z) + \frac{\partial w^b}{\partial r} \cdot (\vec{e}_z \otimes \vec{e}_r) \right\} \quad (2.21)$$

alors

$$\overline{\vec{V}} \cdot (\overline{\vec{V}} \otimes \overline{\vec{u}}) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial w^b}{\partial r} \right) \cdot \vec{e}_z \quad (2.22)$$

Le tenseur $(\overline{\vec{V}} \otimes \overline{\vec{u}})$ étant symétrique alors

$$\overline{\vec{W}}(\overline{\vec{u}}) = \overline{0} \quad (2.23)$$

Si nous posons $\overline{\sigma^b}$ l'extra-contrainte de base, il vient

$$Div(\overline{\sigma^b}) = \overline{\vec{V}} \cdot \overline{\sigma^b} = \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \sigma^b_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma^b_{zr})}{\partial z} \right\} \cdot \vec{e}_r + \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \sigma^b_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma^b_{zz})}{\partial z} \right\} \cdot \vec{e}_z \quad (2.24)$$

Compte tenu de ces égalités, les équations qui régissent l'écoulement de base s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\vec{V}} \cdot (\overline{u^b}) = 0 \\ \left\{ We \cdot \left(w^b \cdot \frac{\partial \sigma^b_{ij}}{\partial z} + a \cdot \sum_{k=1}^3 \{ D_{ik} \sigma^b_{kj} + \sigma^b_{ik} D_{kj} \} \right) + \sigma^b_{ij} \right\} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = \\ \frac{\omega}{Re} \cdot \frac{\partial w^b}{\partial r} \cdot (\vec{e}_r \otimes \vec{e}_z) + \frac{\omega}{Re} \cdot \frac{\partial w^b}{\partial r} \cdot (\vec{e}_z \otimes \vec{e}_r) \\ 0 = -\frac{\partial p^b}{\partial z} + \frac{(1-\omega)}{Re} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial w^b}{\partial r} \right) + \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \sigma^b_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial(\sigma^b_{zz})}{\partial z} \right\} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Comme

$$\overline{\sigma^b} = \overline{\sigma^b}(r) \quad (2.26)$$

et compte tenu de la symétrie du tenseur de contrainte et l'écoulement plan, alors l'équation de l'extra-contrainte conduit à

$$\sigma^b_{\theta r} = \sigma^b_{\theta \theta} = \sigma^b_{\theta z} = 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} We.(2.a.D_{rz}.\sigma^b_{rz}) + \sigma^b_{rr} = 0 \\ We.(a.D_{rz}.\sigma^b_{rr} + \sigma^b_{zz}) + \sigma^b_{rz} = \frac{\omega}{Re} \cdot \frac{dw^b}{dr} \\ \{We.(2.a.D_{rz}.\sigma^b_{rz}) + \sigma^b_{zz}\} = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Ce qui donne après calcul

$$\begin{cases} \sigma^b_{rz} = \sigma^b_{zr} = \frac{\omega}{Re} \cdot \frac{dw^b}{dr} \cdot \frac{1}{[1-(2.We.a.D_{rz})^2]} \\ \sigma^b_{rr} = \sigma^b_{zz} = -\frac{\omega}{Re} \cdot \frac{dw^b}{dr} \cdot \frac{2.We.a.D_{rz}}{[1-(2.We.a.D_{rz})^2]} \end{cases} \quad (2.29)$$

En remplaçant σ^b_{rz} par son expression, alors l'équation de la vitesse de base devient

$$0 = -\frac{\partial p^b}{\partial z} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \cdot \left(\frac{dw^b}{dr} \right) \left[(1 - \omega) + \frac{\omega}{1 - \left(We.a.\left(\frac{dw^b}{dr} \right) \right)^2} \right] \right\} \quad (2.30)$$

En intégrant une fois, il vient

$$\left(\frac{dw^b}{dr} \right) \left[(1 - \omega) + \frac{\omega}{1 - \left(We.a.\left(\frac{dw^b}{dr} \right) \right)^2} \right] = -G.Re.\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad (2.31)$$

Dans cette relation nous avons posé

$$G = -\frac{\partial p^b}{\partial z} \quad (2.31)$$

Comme w^b et $\frac{dw^b}{dr}$ sont finis dans tout le milieu et en particulier sur l'axe $r = 0$, donc

$$C_1 = 0 \quad (2.32)$$

Nous avons alors

$$\left(\frac{dw^b}{dr} \right) \left[(1 - \omega) + \frac{\omega}{1 - \left(We.a.\left(\frac{dw^b}{dr} \right) \right)^2} \right] = -G.Re.\frac{r}{2} \quad (2.33)$$

Dans le cadre de notre étude nous allons chercher la vitesse $w^b(r)$ de l'écoulement de base en se plaçant dans le cas où $We \ll 1$ ou $\omega \rightarrow 0$

Si tel est le cas, l'écoulement de base est de type Poiseuille et le profil de la vitesse normalisée est

$$W^b(r) = -\frac{4}{G.Re} w^b(r) = (1 - r^2) \quad (2.34)$$

L'écoulement de base est donc caractérisé par

$$\{\vec{u}^b, p^b, \vec{\sigma}^b(r)\}$$

avec

$$\overline{W}^b = \vec{e}_z \cdot W^b(r)$$

$$\overline{\sigma}^b(r) = \begin{bmatrix} \sigma^b_{rr} & 0 & \sigma^b_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma^b_{rz} & 0 & \sigma^b_{rr} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Où

$$\begin{cases} \sigma^b_{rz} = \frac{\omega}{Re} \cdot \frac{dw^b}{dr} \\ \sigma^b_{rr} = -\frac{2 \cdot We \cdot a \cdot \omega}{Re} \cdot \left(\frac{dw^b}{dr}\right)^2 \end{cases} \quad (2.36)$$

2.1.8. L'écoulement perturbé

Nous nous attachons ici à étudier l'écoulement d'un fluide viscoélastique décrit par le modèle d'Oldroyd-B et soumis à des perturbations. Cet écoulement perturbé est considéré comme la superposition d'une perturbation $\{\overline{u}', p', \overline{\sigma}'\}$ et de l'écoulement de base $\{\overline{u}^b, p^b, \overline{\sigma}^b(r)\}$ décrit dans le précédent paragraphe. On obtient les équations aux perturbations en retranchant aux équations de conservation écrites pour l'écoulement perturbé $\{\overline{W}^b + \overline{u}', p^b + p', \overline{\sigma}^b(r) + \overline{\sigma}'\}$ celles satisfaites par l'écoulement de base.

On obtient après calcul :

$$\begin{cases} \text{div}(\overline{u}') = 0 \\ \frac{\partial \overline{u}'}{\partial t} + (\overline{W}_b \cdot \nabla) \overline{u}' + (\overline{u}' \cdot \nabla) \overline{W}_b + (\overline{u}' \cdot \nabla) \overline{u}' = -\nabla p' + \frac{(1-\omega)}{Re} \cdot \Delta \overline{u}' + \nabla \cdot \overline{\sigma}' \\ \frac{\partial \overline{\sigma}'}{\partial t} + (\overline{W}_b \cdot \nabla) \overline{\sigma}' + (\overline{u}' \cdot \nabla) \overline{\sigma} + \overline{\sigma} \overline{W}(\overline{u}') - \overline{W}(\overline{W}_b) \overline{\sigma}' + \overline{\sigma}' \overline{W}(\overline{W}_b) - \overline{W}(\overline{u}') \overline{\sigma} + \\ \alpha \{ \overline{D}(\overline{W}_b) \overline{\sigma}' + \overline{D}(\overline{u}') \overline{\sigma} + \overline{\sigma}' \overline{D}(\overline{W}_b) + \overline{\sigma} \overline{D}(\overline{u}') \} + \frac{\overline{\sigma}'}{We} = \frac{2 \cdot \omega}{Re \cdot We} \cdot \overline{D}(\overline{u}') \end{cases} \quad (2.37)$$

Rappelons au passage que nous travaillons en géométrie cylindrique et de ce fait les équations s'écrivent sous la forme suivante dans ce système de coordonnées :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -W_b \frac{\partial u'}{\partial z} - u' \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{v'}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{v'^2}{r} - w' \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{(1-\omega)}{Re} \left(\Delta u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) + \left[\nabla \cdot (\sigma - \sigma^b) \right]_r \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -W_b \frac{\partial v'}{\partial z} - u' \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{u'v'}{r} - \frac{v'}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - w' \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{(1-\omega)}{Re} \left(\Delta v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) + \left[\nabla \cdot (\sigma - \sigma^b) \right]_\theta \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -W_b \frac{\partial w'}{\partial z} - u' \frac{\partial W_b}{\partial r} - u' \frac{\partial w'}{\partial r} - \frac{v'}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - w' \frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{(1-\omega)}{R_e} \Delta w' + \left[\nabla \cdot (\sigma - \sigma^b) \right]_z \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.41)$$

En remarquant de plus que $\overline{\sigma}$ est un tenseur d'ordre 2 et donc peut s'écrire :

$$\overline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

et que dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\text{div} \overline{\sigma} = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \end{cases} \quad (2.43)$$

Les équations de conservation du mouvement deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} = & -W_b \frac{\partial u'}{\partial z} - u' \frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{v'}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{v'^2}{r} - w' \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{(1-\omega)}{R_e} \left(\Delta u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\partial \sigma'_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma'_{rr} - \sigma'_{\theta\theta}}{r} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} = & -W_b \frac{\partial v'}{\partial z} - u' \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{u'v'}{r} - \frac{v'}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - w' \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{(1-\omega)}{R_e} \left(\Delta v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\partial \sigma'_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma'_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma'_{r\theta} + \sigma'_{\theta r}}{r} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} = & -W_b \frac{\partial w'}{\partial z} - u' \frac{\partial W_b}{\partial r} - u' \frac{\partial w'}{\partial r} - \frac{v'}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - w' \frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{(1-\omega)}{R_e} (\Delta w') \\ & + \frac{\partial \sigma'_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma'_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma'_{zr}}{r} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Avec

$$\Delta = \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \partial_{zz}^2$$

A ces équations on rajoute la condition de non glissement à la paroi qui s'écrit alors :

$$\vec{u}(r=1) = \vec{0} \quad (2.48)$$

On peut écrire ce système d'équations sous forme condensée de la manière suivante :

$$\partial_t \vec{u}' = -\nabla p - (N)_{lin} + (N)_{visq} - (N)_{nonlin} + (N)_{elas} \quad (2.49)$$

Où

$$(N)_{lin} = (\vec{W}_b \cdot \nabla) \vec{u}' + (\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{W}_b \quad (2.50)$$

$$(N)_{nonlin} = (\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}' \quad (2.51)$$

$$(N)_{visq} = \frac{(1-\omega)}{R_e} (\Delta \vec{u}') \quad (2.52)$$

$$(N)_{elas} = \overline{\overline{div \sigma'}} \quad (2.53)$$

2.2. Modélisation numérique

2.2.1. Stratégie Numérique

Généralement, il existe trois manières de résoudre les problèmes d'écoulement des fluides : la méthode analytique, la méthode expérimentale et la méthode numérique. L'approche analytique donne des solutions exactes, mais elle est un peu limitée à quelques problèmes typiques comme le profil de vitesse de l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien dans une conduite cylindrique, puisque les solutions analytiques ne s'obtiennent que pour quelques équations différentielles très particulières. Toutefois cette méthode permet d'obtenir une solution continue pour une variable donnée. Pour ce qui est de la méthode expérimentale, elle permet d'étudier plusieurs problèmes mais son utilisation nécessite beaucoup de temps et son coût est parfois élevé. Quant à l'approche numérique, elle est non seulement flexible mais elle est universelle et n'est pas aussi chère que l'approche expérimentale. Son défaut majeur est dû au fait qu'elle ne donne pas de solution exacte. Pour modéliser le problème d'instabilité, nous

considérons la superposition d'un écoulement de base (traité analytiquement) et d'une perturbation.

On suppose dans la suite que les perturbations sont périodiques dans les directions azimutale et axiale, avec les périodes 2π et ϑ respectivement. Cette périodicité suivant les directions axiale et azimutale nous suggère de chercher une solution sous la forme d'une série de Fourier en θ et z . Dans l'autre direction dite radiale, on adoptera une décomposition en série formée par les polynômes de Chebychev.

En résumé, on peut se servir, partant des travaux de **Meseguer & Trefethen (Meseguer & Trefethen, 2001b)**, d'une approximation spectrale de la solution u_s d'ordre L en z , N en θ , et M en r qui sera donnée par :

$$u_s(r, \theta, z) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M \alpha_{mnl}(t) \Omega_{mnl}(r, \theta, z) \quad (2.54)$$

Où Ω_{mnl} est défini par :

$$\Omega_{mnl} = \bar{\Omega}_{mnl}(r) e^{i(n\theta + l\lambda_0 z)} \quad (2.55)$$

$$\text{et } k_0 = \frac{2\pi}{\vartheta} \quad (2.56)$$

est le nombre d'onde fondamental dans la direction axiale.

2.2.2. Choix des fonctions de base

Il existe différentes manières de déterminer des fonctions de base à divergence nulle.

On considère les fonctions de base proposées par **Leonnard et Wray (Leonnard & Wray, 1982)** puis reprises par **Meseguer et Trefethen (Meseguer & Trefethen, 2001b)**.

Ces fonctions sont données sous la forme $\Omega_{mnl}(r, \theta, z)$ et peuvent être considérées comme une décomposition spectrale de la vitesse u_s . Les indices m, n et l font référence aux décompositions spectrales respectivement suivant les directions radiale, azimutale et axiale. Ce sont des fonctions périodiques, à divergence nulle, vérifiant les conditions de régularité au niveau de l'axe de la conduite et qui s'annulent au niveau de la paroi.

$$\nabla \cdot \Omega(r, \theta, z) = 0 \quad (2.57)$$

$$\Omega(1, \theta, z) = 0 \quad (2.58)$$

$$\Omega(r, \theta, z) = \Omega(r, \theta + 2\pi, z) = \Omega(r, \theta, z + \vartheta) \quad (2.59)$$

$\Omega(r, \theta, z)$ et $\frac{1}{r}\Omega(r, \theta, z)$ ne présentent pas de singularité.

L'équation de continuité entraîne une dépendance linéaire entre les trois composantes de $\Omega(r, \theta, z)$ aboutissant à un système à deux degrés de liberté. De ce fait nous notons :

$$u_s(r, \theta, z; t) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M \alpha_{mnl}^{(1)}(t) \Omega_{mnl}^{(1)}(r, \theta, z) + \alpha_{mnl}^{(2)}(t) \Omega_{mnl}^{(2)}(r, \theta, z) \quad (2.60)$$

Où

$$\Omega_{mnl}^{(1,2)} = e^{i(n\theta + lk_0z)} \overline{\Omega_{mnl}^{(1,2)}}(r) \quad (2.61)$$

La détermination des coefficients $a_{mnl}^{(1,2)}$ peut s'effectuer suivant une méthode de collocation (ou méthode « pseudo-spectrale »).

Dans cette méthode, on choisit N points dits de collocation θ_j et z_j , et l'on définit les fonctions de pondération par :

$$\delta(n - n')\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\theta} d\theta \quad (2.62)$$

$$\delta(l - l')k_0z = \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} e^{i(l-l')k_0z} dz \quad (2.63)$$

Notre domaine d'étude étant $[-1; 1]$, les fonctions de base choisies sont des fonctions qui font intervenir les polynômes de Tchebychev. L'écoulement étant symétrique par rapport à l'axe du cylindre, le domaine d'intégration de la variable r peut être limité sur l'intervalle $[0; 1]$. De ce fait l'intégrande $G(r)$ sera choisie comme une fonction paire de la variable r . On a alors :

$$\int_{-1}^{+1} G(r) dr = 2 \int_0^{+1} G(r) dr \quad (2.64)$$

2.2.3 Choix des fonctions test

Les fonctions test seront aussi considérées comme étant à divergence nulle, s'annulant à la paroi et vérifiant les conditions de périodicité et de régularité au niveau de l'axe du cylindre.

$$\nabla \cdot \Theta(r, \theta, z) = 0 \quad (2.65)$$

$$\Theta(1, \theta, z) = 0 \quad (2.66)$$

$$\Theta(r, \theta + 2\pi, z) = \Theta(r, \theta, z) = \Theta(r, \theta, z + \vartheta) \quad (2.67)$$

$\Theta(r, \theta, z)$ et $\frac{1}{r}\Theta(r, \theta, z)$ ne présentent pas de singularité.

On définit alors le produit scalaire par :

$$(c, d) = \int c \cdot d^* d\psi \quad (2.68)$$

En projetant les équations aux perturbations sur l'espace des fonctions test on aboutit à :

$$(\partial_t u_s, \Theta) = -\left(N(\bar{\mathbf{u}}')_{lin}, \Theta\right) - \left(N(\bar{\mathbf{u}}')_{nonl}, \Theta\right) + \left(N(\bar{\mathbf{u}}')_{visq}, \Theta\right) + \left(N(\bar{\mathbf{u}}')_{elas}, \Theta\right) \quad (2.69)$$

Ici le terme de pression disparaît parce que le vecteur gradient s'annule par projection sur les fonctions à divergence nulle.

2.2.4. Projection des termes

- Pour la projection des termes linéaires, on utilise la décomposition en mode de Fourier. Les propriétés d'orthogonalité de ces modes,

$$2\pi\delta_{nn'} = \int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\theta} d\theta \quad \text{et} \quad \vartheta\delta_{ll'} = \int_0^{\vartheta} e^{i(l-l')\lambda_0 z} dz \quad (2.70)$$

δ_{ij} étant défini comme la fonction de Kronecker, nous permettent d'obtenir un système de $(2N+1) \times (2L+1)$ équations aux valeurs initiales pour chaque mode axial l et azimutal n .

La projection des termes linéaires donnent :

$$(\partial_t u_s, \Theta) = \alpha_{mnl}^{(1)} \left\{ \left(\overline{\Omega}_{mnl}^{(1)}, \overline{\Theta}_{mnl}^{(1)} \right) + \left(\overline{\Omega}_{mnl}^{(1)}, \overline{\Theta}_{mnl}^{(2)} \right) \right\} + \alpha_{mnl}^{(2)} \left\{ \left(\overline{\Omega}_{mnl}^{(2)}, \overline{\Theta}_{mnl}^{(1)} \right) + \left(\overline{\Omega}_{mnl}^{(2)}, \overline{\Theta}_{mnl}^{(2)} \right) \right\} \quad (2.71)$$

Ou sous forme matricielle

$$(\partial_t u_s, \Theta) = \begin{bmatrix} \left(\bar{\Omega}^{(1)}, \bar{\Theta}^{(1)} \right) & \left(\bar{\Omega}^{(2)}, \bar{\Theta}^{(1)} \right) \\ \left(\bar{\Omega}^{(1)}, \bar{\Theta}^{(2)} \right) & \left(\bar{\Omega}^{(2)}, \bar{\Theta}^{(2)} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^{(1)} \\ \dot{\alpha}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Analogiquement :

$$(\mathcal{L}, \Theta) = \begin{bmatrix} \left(\mathcal{L}\bar{\Omega}^{(1)}, \bar{\Theta}^{(1)} \right) & \left(\mathcal{L}\bar{\Omega}^{(2)}, \bar{\Theta}^{(1)} \right) \\ \left(\mathcal{L}\bar{\Omega}^{(1)}, \bar{\Theta}^{(2)} \right) & \left(\mathcal{L}\bar{\Omega}^{(2)}, \bar{\Theta}^{(2)} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Où on a posé

\mathcal{L} est la Somme des termes linéaires de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

L'équation relative aux termes linéaires de l'équation de conservation du mouvement est donc la suivante :

$$\begin{bmatrix} \left(\bar{\Omega}^{(1)}, \bar{\Theta}^{(1)} \right) & \left(\bar{\Omega}^{(2)}, \bar{\Theta}^{(1)} \right) \\ \left(\bar{\Omega}^{(1)}, \bar{\Theta}^{(2)} \right) & \left(\bar{\Omega}^{(2)}, \bar{\Theta}^{(2)} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}^{(1)} \\ \dot{\alpha}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathcal{L}(\bar{\Omega}^{(1)}), \bar{\Theta}^{(1)} \right) & \left(\mathcal{L}(\bar{\Omega}^{(2)}), \bar{\Theta}^{(1)} \right) \\ \left(\mathcal{L}(\bar{\Omega}^{(1)}), \bar{\Theta}^{(2)} \right) & \left(\mathcal{L}(\bar{\Omega}^{(2)}), \bar{\Theta}^{(2)} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Il faut remarquer que chacune des sous matrices $\left(\bar{\Omega}^{(i)}, \bar{\Theta}^{(j)} \right)$ est de taille $(M+1)^2$ et peut-être écrite de la manière suivante :

$$\left(\bar{\Omega}^{(i)}, \bar{\Theta}^{(j)} \right) = \begin{bmatrix} \int_0^1 \bar{\Omega}_{0nl}^{(i)} \bar{\Theta}_{0nl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \bar{\Omega}_{mnl}^{(i)} \bar{\Theta}_{0nl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \bar{\Omega}_{Mnl}^{(i)} \bar{\Theta}_{0nl}^{*(j)} r dr \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 \bar{\Omega}_{0nl}^{(i)} \bar{\Theta}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \bar{\Omega}_{mnl}^{(i)} \bar{\Theta}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \bar{\Omega}_{Mnl}^{(i)} \bar{\Theta}_{mnl}^{*(j)} r dr \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \bar{\Omega}_{0nl}^{(i)} \bar{\Theta}_{Mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \bar{\Omega}_{mnl}^{(i)} \bar{\Theta}_{Mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \bar{\Omega}_{Mnl}^{(i)} \bar{\Theta}_{Mnl}^{*(j)} r dr \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Dans cette matrice i et j ne peuvent prendre que les valeurs 1 ou 2.

De la même manière, une sous-matrice $\left(\mathcal{L}\left(\bar{\Omega}^{(i)}, \bar{\Theta}^{(j)}\right)\right)$ aussi de taille $(M+1)^2$ est donnée par :

$$\left(\mathcal{L}\left(\bar{\Omega}^{(i)}, \bar{\Theta}^{(j)}\right)\right) = \begin{bmatrix} \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{0nl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{0nl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{mnl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{0nl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{Mnl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{0nl}^{*(j)} r dr \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{0nl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{mnl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{Mnl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{mnl}^{*(j)} r dr \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{0nl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{Mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{mnl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{Mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathcal{L}\left(\bar{\Omega}_{Mnl}^{(i)}\right) \bar{\Theta}_{Mnl}^{*(j)} r dr \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

L'équation (2.85) peut-être écrite sous forme condensée de la manière suivante :

$$F_{nl} \dot{\alpha}(t) = G_{nl} \alpha(t) \quad (2.77)$$

F_{nl} est la matrice générée par le produit scalaire (u_s, Θ) et G_{nl} est celle générée par le produit scalaire $((\mathcal{L}u_s), \Theta)$.

$$\alpha_{nl} = \begin{pmatrix} \alpha_{0nl}^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_{Mnl}^{(1)} \\ \alpha_{0nl}^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha_{Mnl}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Il est évident et bien visible que α est une matrice d'ordre $2M+2$ et il est à noter que M est le nombre de modes radiaux.

- Pour la projection des termes non linéaires dans l'espace physique, on utilise une projection pseudo-spectrale. Après calcul, les termes sont projetés sur l'espace de Fourier-Tchebychev par l'algorithme dite de Transformée de Fourier Rapide (FFT).

L'équation (1) projetée de cette manière conduit à :

$$F_{nl} \dot{\alpha}(t) = G_{nl} \alpha(t) + \beta_{nl} \quad (2.79)$$

solvables par une méthode analytique. La seule alternative qui s'offre à notre disposition est la méthode numérique. De ce fait nous avons opté pour les méthodes spectrales qui semblent très adaptées à notre problème. Dans la suite, nous nous intéresserons d'abord au cas où les perturbations sont très faibles devant l'écoulement de base. Ce type d'instabilité est appelée instabilité linéaire.

CHAPITRE 3: *ETUDE DE LA STABILITE LINEAIRE*

CHAPITRE 3: ETUDE DE LA STABILITE LINEAIRE

Introduction

L'objectif, dans cette partie, est d'étudier la stabilité de l'écoulement d'un fluide viscoélastique, soumis à des perturbations infinitésimales, dans un canal cylindrique d'axe horizontal. Nous utiliserons les approches modales et non modales. Les solutions seront donc cherchées sous la forme d'une superposition de modes de Fourier complexes. Ce qui conduit à un problème aux valeurs initiales ou à un problème aux valeurs propres généralisées qui feront l'objet d'une description dans la suite.

3.1. Linéarisation des équations aux perturbations

Pour une perturbation infinitésimale, le terme non linéaire d'inertie $(\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}'$ peut être négligé et de ce fait nous obtenons une équation de type Stokes qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\partial_t \vec{u}' = -(\overline{W}_b \cdot \nabla) \vec{u}' - (\vec{u}' \cdot \nabla) \overline{W}_b - \nabla p' + \frac{(1-\omega)}{\text{Re}} \Delta \vec{u}' + \nabla \cdot \overline{\sigma}' \quad (3.1)$$

L'équation d'Oldroyd-B quant à elle donne après calcul

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{\sigma}' + (\overline{W}_b \cdot \nabla) \overline{\sigma}' + (\vec{u}' \cdot \nabla) \overline{\sigma}^b + (\vec{u}' \cdot \nabla) \overline{\sigma}' + \overline{\sigma}^b \overline{W}(\vec{u}') - \overline{W}(\overline{W}_b) \overline{\sigma}' + \overline{\sigma}' \overline{W}(\overline{W}_b) - \overline{W}(\vec{u}') \overline{\sigma}' \\ + \left\{ \overline{D}(\overline{W}_b) \overline{\sigma}' + \overline{D}(\vec{u}') \overline{\sigma}^b + \overline{\sigma}' \overline{D}(\overline{W}_b) + \overline{\sigma}^b \overline{D}(\vec{u}') \right\} + \frac{\overline{\sigma}'}{We} = \frac{(2 \cdot \omega)}{\text{Re} \cdot We} \overline{D}(\vec{u}') \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sachant que :

$$\overline{\sigma}^b = \overline{\sigma}^b(r) \quad (3.3)$$

On a bien :

$$(\overline{U}_b \cdot \nabla) \overline{\sigma}' = \overline{W}_b \cdot \frac{\partial \overline{\sigma}'}{\partial z} \quad (3.4)$$

$$(\vec{u}' \cdot \nabla) \overline{\sigma}^b = u' \cdot \frac{\partial \overline{\sigma}^b}{\partial r} \quad (3.5)$$

En insérant ces résultats dans l'équation de comportement de l'extra-contrainte précédente et en négligeant les termes non linéaires $(\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \overline{\sigma}'$ et $g(\vec{u}', \overline{\sigma}')$ en raison de l'hypothèse de perturbations infinitésimales, on obtient:

$$\frac{\partial \overline{\sigma}'}{\partial t} + u' \cdot \frac{\partial \overline{\sigma}^b}{\partial r} + W_b \cdot \frac{\partial \overline{\sigma}'}{\partial z} + g_a(\vec{u}', \overline{\sigma}^b) + g_a(\vec{W}_b, \overline{\sigma}') + \frac{\overline{\sigma}'}{We} = \frac{2\omega}{\text{Re} \cdot We} \cdot \overline{D}(\vec{u}') \quad (3.6)$$

3.1.1. Calcul de la contribution newtonienne de l'extra contrainte

Pour un fluide newtonien cette équation donne :

$$\frac{\partial \overline{\sigma}'_s}{\partial t} + u' \cdot \frac{\partial \overline{\sigma}^b}{\partial r} + W_b \cdot \frac{\partial \overline{\sigma}'_s}{\partial z} + g_a(\vec{u}', \overline{\sigma}^b) + g_a(\vec{W}_b, \overline{\sigma}'_s) + \frac{\overline{\sigma}'_s}{We} = \frac{2\omega}{\text{Re} \cdot We} \cdot \overline{D}(\vec{u}') \quad (3.7)$$

En outre, nous constatons que pour un fluide newtonien le nombre de Weissenberg est très faible ($We_e \ll 1$). Si nous tenons compte de cette dernière hypothèse dans cette dernière équation, on obtient :

$$\overline{\sigma}'_s = \frac{2\omega}{\text{Re}} \cdot \overline{D}(\vec{u}') \quad (3.8)$$

Dans ces conditions la relation (3.1) donne :

$$\partial_t \vec{u}' = -(\vec{W}_b \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}' - (\vec{u}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{W}_b - \vec{\nabla} p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{u}' + \vec{\nabla} \cdot \overline{\sigma}'_e \quad (3.9)$$

3.1.2. Calcul de la contribution élastique de l'extra contrainte

Nous considérons que la contribution de la partie élastique, pour un fluide viscoélastique est une perturbation du cas newtonien pur, soit :

$$\overline{\sigma}' = \overline{\sigma}'_s + \overline{\sigma}'_e \quad (3.10)$$

En insérant l'équation (3.10) dans l'équation (3.6) à laquelle, on retranche l'équation (3.7) puis en omettant volontairement « ()' » dans la notation $\overline{\sigma}'_e$ pour plus de légèreté, il vient :

$$\partial_t \overline{\sigma}'_e + W_b \partial_z \overline{\sigma}'_e + \frac{\overline{\sigma}'_e}{We} + \overline{\sigma}'_e \nabla (\vec{W}_b) = -\frac{2\omega}{\text{Re}} \left\{ W_b \partial_z \overline{D}(\vec{u}') + \overline{D}(\vec{u}') \vec{\nabla} (\vec{W}_b) \right\} \quad (3.11)$$

3.2. Equations pour les valeurs initiales des perturbations

Les équations aux perturbations linéarisées dans le paragraphe précédent sont considérées comme étant invariantes dans les directions azimutale θ et axiale z . A partir de cette hypothèse, on peut émettre l'idée selon laquelle la solution peut être écrite sous la forme d'une superposition de modes de Fourier complexes

$$\left(u', v', w'; p'; \overline{\sigma} \right) = \left\{ u^*(r, t), v^*(r, t), w^*(r, t); p^*(r, t); \overline{\sigma}^*(r, t) \right\} e^{i(n\theta + k_0 z)} \quad (3.12)$$

Dans cette équation, $k_0 \in \mathbb{R}$ est défini comme étant le nombre d'onde axial et $n \in \mathbb{Z}$ est défini comme le nombre d'onde azimutal.

En remplaçant $\left(u', v', w'; p'; \overline{\sigma} \right)$ par leurs expressions dans les équations précédentes, on obtient les équations aux valeurs initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} = & -i \cdot k_0 \cdot W_b \cdot u^* - \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{(1-\omega)}{Re} \left[\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \cdot \partial_r - \frac{n^2}{r^2} - k_0^2 - \frac{1}{r^2} \right) \cdot u^* - \frac{2 \cdot i \cdot n}{r^2} v^* \right] \\ & + \text{div} \overline{\sigma}^* \Big|_r \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t} = & -i \cdot k_0 \cdot W_b \cdot v^* - i \frac{n}{r} p^* + \frac{(1-\omega)}{Re} \left[\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \cdot \partial_r - \frac{n^2}{r^2} - k_0^2 - \frac{1}{r^2} \right) \cdot v^* + \frac{2 \cdot i \cdot n}{r^2} u^* \right] + \\ & \text{div} \overline{\sigma}^* \Big|_\theta \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial t} = & -i \cdot k_0 \cdot W_b \cdot w^* + 2 \cdot r \cdot u^* - i k_0 p^* + \frac{(1-\omega)}{Re} \left[\partial_{rr} + \frac{1}{r} \cdot \partial_r - \frac{n^2}{r^2} - k_0^2 \right] w^* \\ & + \text{div} \overline{\sigma}^* \Big|_z \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r u^*)}{\partial r} + i \cdot \left\{ \frac{n}{r} \cdot v^* + k_0 \cdot w^* \right\} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \overline{\sigma}_e^*}{\partial t} + i k_0 W_b \overline{\sigma}_e^* + \frac{\overline{\sigma}_e^*}{We} + \overline{\sigma}_e^* \nabla \cdot (\overline{W}_b) = - \frac{2\omega}{Re} \left\{ i k_0 W_b \overline{D}(\overline{u}^*) + \overline{D}(\overline{u}^*) \nabla \cdot (\overline{W}_b) \right\} \quad (3.17)$$

Les équations peuvent s'écrire plus simplement de la manière suivante, si on pose :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - k_0^2 \quad (3.18)$$

Les équations précédentes sont équivalentes encore à :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = -i \cdot k_0 \cdot W_b \cdot u^* - \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) u^* - \frac{2 \cdot i \cdot n}{r^2} v^* \right] + \text{div} \overline{\overline{\sigma_e^*}} \Big|_r \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = -i \cdot k_0 \cdot W_b \cdot v^* - i \frac{n}{r} p^* + \frac{1}{Re} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) v^* + \frac{2 \cdot i \cdot n}{r^2} u^* \right] + \text{div} \overline{\overline{\sigma_e^*}} \Big|_\theta \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t} = -i \cdot k_0 \cdot W_b \cdot w^* + 2 \cdot r \cdot u^* - i k_0 p^* + \frac{(1-\omega)}{Re} [L] w^* + \text{div} \overline{\overline{\sigma_e^*}} \Big|_z \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r u^*)}{\partial r} + i \cdot \left\{ \frac{1}{r} \cdot v^* + k_0 \cdot w^* \right\} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \overline{\overline{\sigma_e^*}}}{\partial t} + i k_0 W_b \overline{\overline{\sigma_e^*}} + \frac{\overline{\overline{\sigma_e^*}}}{We} + \overline{\overline{\sigma_e^*}} \nabla (\overline{W_b}) = -\frac{2\omega}{Re} \left\{ i k_0 W_b \overline{D}(\overline{u^*}) + \overline{D}(\overline{u^*}) \overline{\nabla}(\overline{W_b}) \right\} \quad (3.23)$$

C'est un système d'équations aux dérivées partielles qui comporte au total 13 équations avec 13 inconnues.

3.3. Equations aux valeurs propres

Nous considérerons que le comportement de la perturbation au temps long peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left(\overline{\mathbf{u}}^*(r, t), p^*(r, t), \overline{\sigma}^*(r, t) \right)^T = \left\{ \left(\widehat{\mathbf{u}}(r), \widehat{p}(r), \widehat{\sigma}(r) \right)^T \right\} \cdot e^{ct} \quad (3.24)$$

Où c est complexe et est donc donné par la relation $c = c_r + i c_i$ de sorte que c_i soit lié à la vitesse de propagation de phase de la perturbation donnée par $v_\varphi = \frac{c_i}{k_0}$ et que c_r soit lié au taux d'amplification ou d'amortissement de la perturbation.

Cette relation insérée dans les équations mises en œuvre dans le précédent paragraphe donne :

$$c \widehat{\mathbf{u}} = \mathcal{H} \widehat{\mathbf{u}} - \frac{dW_b}{dr} \widehat{u} \cdot \vec{e}_z - \vec{\nabla} \widehat{p} + \text{div} \widehat{\sigma}^e \quad (3.25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \widehat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.26)$$

$$c \widehat{\sigma}^e + i k_0 W_b^s \widehat{\sigma}^e + \frac{\widehat{\sigma}^e}{We} + \widehat{\sigma}^e \overline{D}(\overline{W_b}) + \overline{D}(\overline{W_b}) \widehat{\sigma}^e = -\frac{2\omega}{Re} \left\{ i k_0 W_b \partial_z \overline{D}(\overline{\mathbf{u}}) + \overline{D}(\overline{\mathbf{u}}) \nabla(\overline{W_b}) \right\} \quad (3.27)$$

$$\text{Où } \mathcal{H} = -(\vec{w}_b \cdot \vec{\nabla}) + \frac{1}{Re} \Delta$$

➤ Détermination de σ'_e et de $div\sigma'_e$

Considérons l'équation (3.11)

$$\partial_t \overline{\overline{\sigma^e}} + W_b \partial_z \overline{\overline{\sigma^e}} + \frac{\overline{\overline{\sigma^e}}}{W_e} + \overline{\overline{\sigma^e}} \nabla (\overline{W_b}) = -\frac{2\omega}{Re} \left\{ W_b \partial_z \overline{\overline{D}}(\vec{u}') + \overline{\overline{D}}(\vec{u}') \overline{\nabla}(\overline{W_b}) \right\}$$

$$\frac{\partial \overline{\overline{\sigma^e}}}{\partial t} = c \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\sigma_{rr}^e} & \widehat{\sigma_{r\theta}^e} & \widehat{\sigma_{rz}^e} \\ \widehat{\sigma_{\theta r}^e} & \widehat{\sigma_{\theta\theta}^e} & \widehat{\sigma_{\theta z}^e} \\ \widehat{\sigma_{zr}^e} & \widehat{\sigma_{z\theta}^e} & \widehat{\sigma_{zz}^e} \end{pmatrix} \cdot e^{ct} \cdot e^{i(n\theta + k_0 z)} \quad (3.29)$$

$$W_b \cdot \frac{\partial \overline{\overline{\sigma^e}}}{\partial z} = i \cdot k_0 \cdot W_b \begin{pmatrix} \widehat{\sigma_{rr}^e} & \widehat{\sigma_{r\theta}^e} & \widehat{\sigma_{rz}^e} \\ \widehat{\sigma_{\theta r}^e} & \widehat{\sigma_{\theta\theta}^e} & \widehat{\sigma_{\theta z}^e} \\ \widehat{\sigma_{zr}^e} & \widehat{\sigma_{z\theta}^e} & \widehat{\sigma_{zz}^e} \end{pmatrix} \cdot e^{ct} \cdot e^{i(n\theta + k_0 z)} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_e \overline{\nabla}(\overline{W_b}) &= \begin{pmatrix} \widehat{\sigma_{rr}^e} & \widehat{\sigma_{r\theta}^e} & \widehat{\sigma_{rz}^e} \\ \widehat{\sigma_{\theta r}^e} & \widehat{\sigma_{\theta\theta}^e} & \widehat{\sigma_{\theta z}^e} \\ \widehat{\sigma_{zr}^e} & \widehat{\sigma_{z\theta}^e} & \widehat{\sigma_{zz}^e} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial_r W_b & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ct} \cdot e^{i(n\theta + k_0 z)} = \\ \partial_r W_b \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\sigma_{zr}^e} & 0 & 0 \\ \widehat{\sigma_{\theta z}^e} & 0 & 0 \\ \widehat{\sigma_{zz}^e} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{ct} \cdot e^{i(n\theta + k_0 z)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} -\frac{2\omega}{Re} \cdot \left\{ W_b \frac{\partial}{\partial z} \overline{\overline{D}}(\vec{u}') + \overline{\overline{D}}(\vec{u}') \overline{\nabla}(\overline{W_b}) \right\} &= -\frac{2\omega}{Re} \cdot \left\{ i \cdot k_0 \cdot W_b \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(i \cdot k_0 \hat{u} + \partial_r \hat{w}) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{in}{r} \hat{w} + i \cdot k_0 \hat{v}\right) & 0 & 0 \\ i \cdot k_0 \hat{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ W_b \left. \begin{pmatrix} \partial_r \hat{u} & \frac{1}{2}\left(\frac{in}{r} \hat{u} - \frac{\hat{v}}{r} + \partial_r \hat{v}\right) & \frac{1}{2}(i \cdot k_0 \hat{u} + \partial_r \hat{w}) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{in}{r} \hat{u} - \frac{\hat{v}}{r} + \partial_r \hat{v}\right) & \frac{1}{r}(in \hat{v} + \hat{u}) & \frac{1}{2}\left(\frac{in}{r} \hat{w} + ik_0 \hat{v}\right) \\ \frac{1}{2}(i \cdot k_0 \hat{u} + \partial_r \hat{w}) & \frac{1}{2}\left(\frac{in}{r} \hat{w} + ik_0 \hat{v}\right) & \partial_r \hat{w} \end{pmatrix} \right\} \cdot e^{ct} \cdot e^{i(n\theta + k_0 z)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

L'équation est un système de 9 équations à 9 inconnues dont la résolution fournit les résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^e = -\frac{\omega We}{Re} \left[2ik_0 W_b \partial_r u' + (ik_0 u' + \partial_r w') \frac{dW_b}{dr} \right] \\ \sigma_{r\theta}^e = -\frac{\omega We}{Re} \cdot i \cdot k_0 W_b \left[\frac{in}{r} u' - \frac{v'}{r} + \partial_r v' \right] \\ \sigma_{rz}^e = -\frac{\omega We}{Re} \cdot i \cdot k_0 W_b [ik_0 u' + \partial_r w'] \\ \sigma_{\theta r}^e = -\frac{\omega We}{Re} \left[i \cdot k_0 W_b \left(\frac{in}{r} u' - \frac{v'}{r} + \partial_r v' \right) + \frac{dW_b}{dr} \left(\frac{in}{r} w' + i \cdot k_0 \cdot v' \right) \right] \\ \sigma_{\theta\theta}^e = -\frac{2 \cdot \omega \cdot We}{r \cdot Re} \cdot i \cdot k_0 \cdot W_b [i \cdot n \cdot v' + u'] \\ \sigma_{\theta z}^e = -\frac{\omega \cdot We}{Re} \cdot i \cdot k_0 \cdot W_b \cdot \left[\frac{in}{r} w' + i \cdot k_0 \cdot v' \right] \\ \sigma_{zr}^e = -\frac{\omega \cdot We}{Re} \cdot i \cdot k_0 \cdot \left[W_b \cdot (i \cdot k_0 \cdot u' + \partial_r w') + 2 \cdot \left(\frac{dW_b}{dr} \right) \cdot w' \right] \\ \sigma_{z\theta}^e = -\frac{\omega \cdot We}{Re} \cdot i \cdot k_0 \cdot W_b \left[\frac{in}{r} w' + i \cdot k_0 \cdot v' \right] \\ \sigma_{zz}^e = \frac{2 \cdot \omega \cdot We}{Re} \cdot k_0^2 \cdot W_b \cdot w' \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Rappelons que pour le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ d'ordre 2 la divergence est donnée par :

$$div \sigma = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$\left. \bar{\bar{\nabla}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} \right|_r = -\frac{\omega We}{Re} \left\{ \begin{array}{l} \left[i \cdot k_0 \cdot DW_b \left(3D + \frac{1}{r} \right) - 2 \cdot i \cdot k_0 \cdot D^2 W_b + i \cdot k_0 \cdot W_b \left(2D^2 - \left(\frac{n}{r} \right)^2 - k_0^2 + \frac{2}{r} D - \frac{2}{r^2} \right) \right] u' \\ -n \cdot k_0 \cdot W_b \left[\frac{3}{r^2} - \frac{1}{r} D \right] v' + \left[DW_b \left(D^2 + \frac{1}{r} D \right) + D^2 W_b D \right] w' \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}^e \Big|_{\theta} = -\frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{r} DW_b + W_b \left(\frac{1}{r} D + \frac{1}{r^2} \right) \right] u' \\ & -ik_0 \left[DW_b \left(\frac{2}{r} + 2D \right) + W_b \cdot \left(2 \left(\frac{n}{r} \right)^2 + k_0^2 + \frac{1}{r} D - \frac{1}{r^2} \right) \right] v' + in \left[DW_b \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r} D \right) - W_b \cdot \frac{k_0^2}{r} \right] w' \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}^e \Big|_z = -\frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & -k_0^2 \left[DW_b + W_b \cdot \left(\frac{1}{r} + D \right) \right] u' \\ & -\frac{in}{r} [k_0^2 \cdot W_b] v' + ik_0 \left[2D^2 W_b + 2D^2 W_b \left(\frac{1}{r} + D \right) + W_b \left(D^2 + \frac{1}{r} D + 2k_0^2 \right) \right] w' \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

En tenant compte de ce résultat dans l'équation (3.25) il vient :

$$c \cdot \hat{u} = -ik_0 W_b \hat{u} - D \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{u} + \frac{2in}{r^2} \hat{v} \right] - \frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & \left[ik_0 DW_b \left(3D + \frac{1}{r} \right) - 2ik_0 D^2 W_b + ik_0 W_b \left(2D^2 - \left(\frac{n}{r} \right)^2 - k_0^2 + \frac{2}{r} D - \frac{2}{r^2} \right) \right] \hat{u} \\ & -nk_0 W_b \left[\frac{3}{r^2} - \frac{1}{r} D \right] \hat{v} + \left[DW_b \left(D^2 + \frac{1}{r} D \right) + D^2 W_b D \right] \hat{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

$$c \cdot \hat{v} = -ik_0 W_b \hat{v} - \frac{in}{r} \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{v} + \frac{2in}{r^2} \hat{u} \right] - \frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{r} DW_b + W_b \left(\frac{1}{r} D + \frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{u} \\ & -ik_0 \left[DW_b \left(\frac{2}{r} + 2D \right) + W_b \cdot \left(2 \left(\frac{n}{r} \right)^2 + k_0^2 + \frac{1}{r} D - \frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{v} + in \left[DW_b \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r} D \right) - W_b \cdot \frac{k_0^2}{r} \right] \hat{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

$$c \cdot \hat{w} = -ik_0 W_b \hat{w} + 2r \hat{u} - ik_0 \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot L \cdot \hat{w} - \frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & -k_0^2 \left[DW_b + W_b \cdot \left(\frac{1}{r} + D \right) \right] \hat{u} \\ & -\frac{in}{r} [k_0^2 \cdot W_b] \hat{v} + ik_0 \left[2D^2 W_b + 2D^2 W_b \left(\frac{1}{r} + D \right) + W_b \left(D^2 + \frac{1}{r} D + 2k_0^2 \right) \right] \hat{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Nous orienterons notre étude sur les quatre cas particuliers cités ci-dessous :

- Le premier cas sera dédié à une étude unidimensionnelle et radiale de la perturbation ($n=0$ et $k_0=0$).
- Le deuxième cas concerne une perturbation homogène suivant la direction axiale ($k_0=0$ et $n \neq 0$)
- Le troisième cas se rapporte à une perturbation axisymétrique ($k_0 \neq 0$ et $n=0$)

- Le quatrième et dernier cas désigne une perturbation dite oblique ($k_0 \neq 0$ et $n \neq 0$)

3.3.1. Perturbation unidimensionnelle ($k_0 = 0$; $n = 0$)

Pour ($k_0 = 0$ et $n = 0$), l'équation de continuité se réduit à $\partial_r(r\hat{u}) = 0$. Cette relation permet d'écrire que $\hat{u} = C'/r$ où C' est une constante. La condition d'adhérence à la paroi ($u(r=1)) = 0$ entraîne que $C' = 0$. La vitesse radiale est donc identiquement nulle pour une perturbation monodimensionnelle.

Les équations du mouvement suivant r, θ et z se réduisent à :

$$D\hat{p} = -\frac{\omega We}{r \cdot \text{Re}} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dw_b}{dr} \frac{d\hat{w}}{dr} \right) \quad (3.38')$$

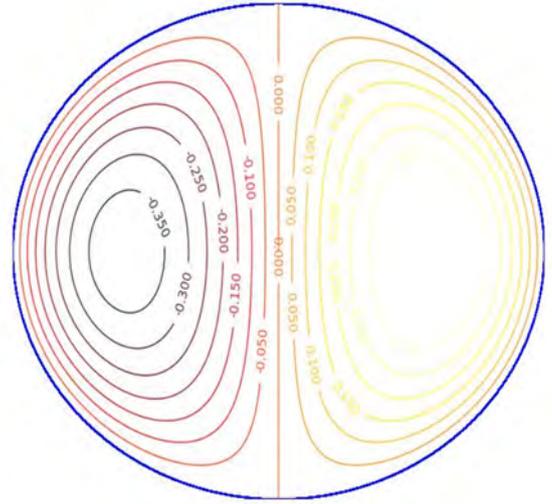
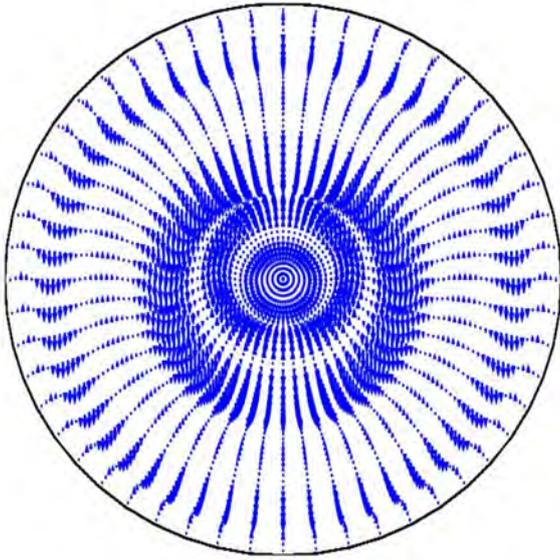
$$c\hat{v} = -i\frac{n}{r}\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{v} \right] \quad (3.41)$$

$$c\hat{w} = -\hat{u}D^2W_b + \frac{1}{\text{Re}}[L]\hat{w} \quad (3.42)$$

$$\text{Où } L = D^2 + \frac{1}{r}D$$

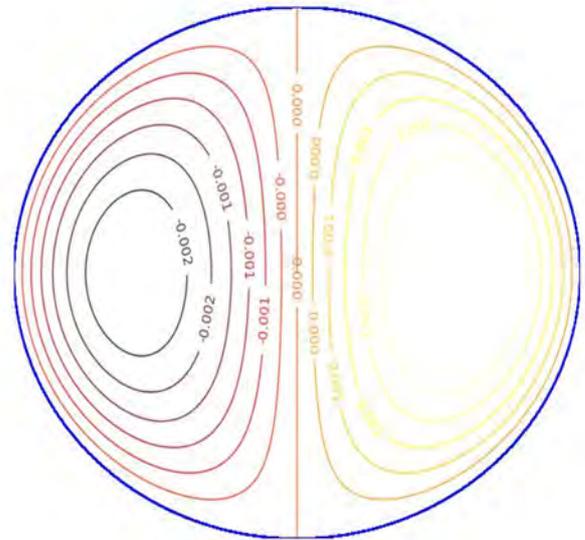
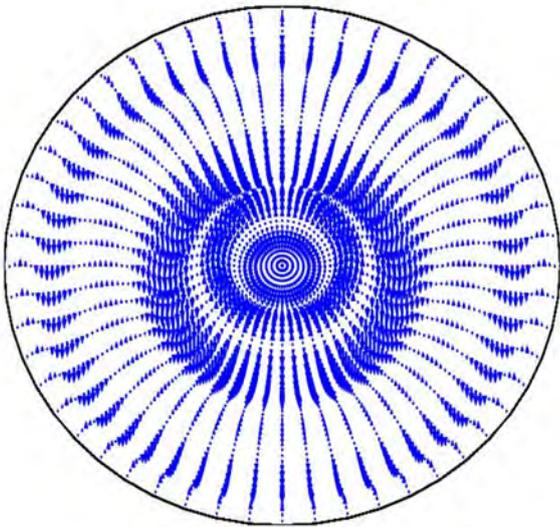
En plus, que le fluide soit newtonien ($\omega = 0$) ou viscoélastique ($\omega > 0$), les valeurs propres sont purement réelles et négatives quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds R_e . D'ailleurs, dans cet écoulement, on ne note aucun effet élastique. L'écoulement viscoélastique se réduit presque tout simplement à un écoulement de type newtonien. Ce résultat nous amène à émettre une hypothèse : l'élasticité est étroitement liée aux variations axiale et azimutale de la perturbation et/ou à la composante radiale de la vitesse de perturbation.

$$(n=0, k_0=0)$$



(a)

$\vec{u}\vec{e}_r + \vec{v}\vec{e}_\theta$ w



(b)

Figure 3.1 : Vecteur vitesse transversale $\vec{u}\vec{e}_r + \vec{v}\vec{e}_\theta$ (gauche) et contours d'isovaleurs de la vitesse axiale w (droite) (a) : vitesse initiale, (b) : mode le moins stable. cas d'une perturbation monodimensionnelle ($n=0$ et $k_0=0$) à $Re = 5 \cdot 10^3$ et $We = 10^{-2}$ et à l'instant $t=50$.

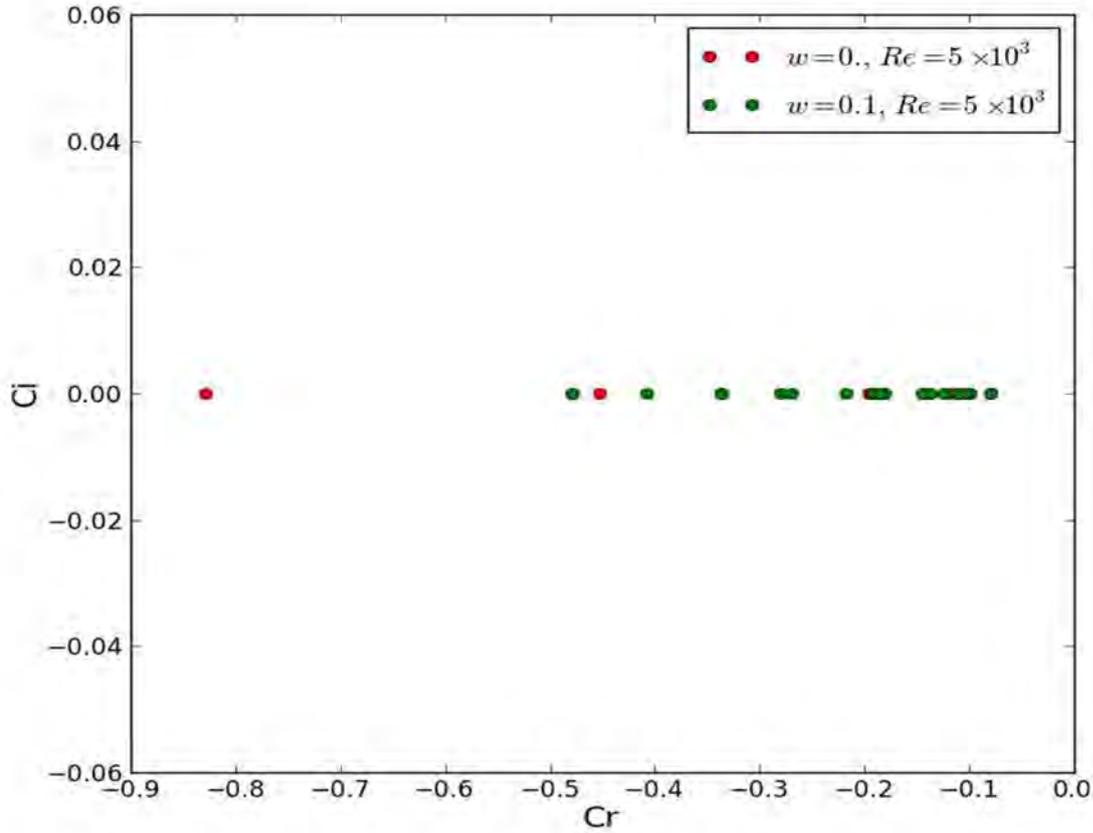


Figure 3.2 : Spectre des valeurs propres d'une perturbation monodimensionnelle ($n=0$ et $k_0=0$), cas d'un fluide newtonien (rouge), cas d'un fluide viscoélastique à nombre de Weisseberg $We = 10^{-2}$ (vert).

3.3.2. Cas d'une perturbation homogène suivant l'axe ($n \neq 0 ; k_0 = 0$)

Pour ce cas de perturbation, notre système d'équations se réduit à :

$$c\hat{u} = -D\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{u} - \frac{2in}{r^2} \hat{v} \right] - \frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \left[DW_b D^2 + \frac{1}{r} DW_b D + D^2 W_b D \right] \hat{w} \right\} \quad (3.43)$$

$$c\hat{v} = -i \frac{n}{r} \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{v} + \frac{2in}{r^2} \hat{u} \right] - \frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \left[\frac{1}{r} DW_b + W_b \left(\frac{1}{r} D + \frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{u} + in \left[DW_b \left(-\frac{2}{r} + \frac{1}{r} D \right) \right] \hat{w} \right\} \quad (3.44)$$

$$c\hat{w} = -\hat{u} D^2 W_b + \frac{1}{\text{Re}} [L] \hat{w} \quad (3.45)$$

$$\text{Où } L = D^2 + \frac{1}{r}D - \left(\frac{n}{r}\right)^2$$

Pour les deux types de fluides (newtonien et viscoélastique), on voit bien que toutes les valeurs propres générées sont négatives. L'écoulement est donc stable pour ces deux fluides pour $Re = 5 \cdot 10^3$. Toutefois, il est important de noter que cette stabilité demeure toujours pour le fluide newtonien lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds. Cependant, cette augmentation n'entraîne les mêmes effets chez le fluide non newtonien où des signes d'instabilités apparaissent à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds ($Re = 5 \cdot 10^3$ pour $k_0 = 0,1$) .

On en déduit alors que ces instabilités sont induites par les effets élastiques.

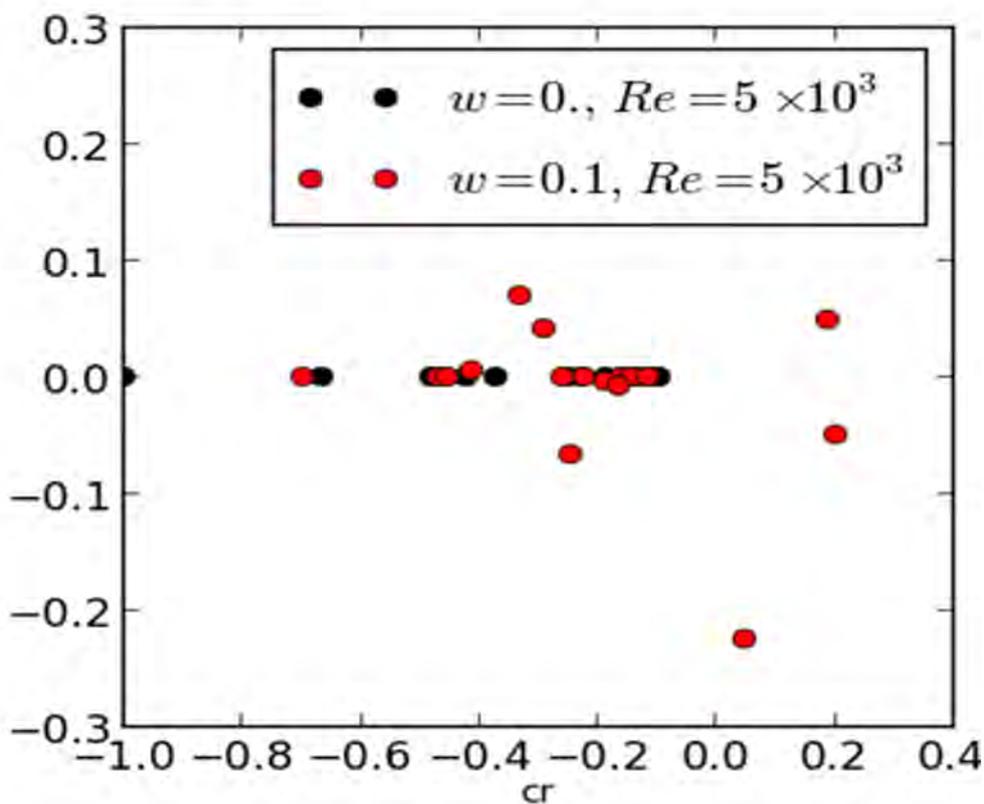


Figure 3.3 : Spectre des valeurs propres d'une perturbation homogène suivant l'axe cr avec $n = 1$ et $k_0 = 0$, cas d'un fluide newtonien (noir), cas d'un fluide viscoélastique à nombre de Weissenberg $We = 10^{-2}$ (rouge).

Les valeurs propres liées à cet écoulement sont toujours réelles et négatives pour le cas du fluide newtonien. Le résultat ne change pas lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds jusqu'à des valeurs voisines de 10^7 . Par contre, tel n'est pas toujours le cas pour un fluide

viscoélastique dont la partie réelle de certaines valeurs propres est positive pour un nombre de Reynolds égal à $5 \cdot 10^3$. L'écoulement d'un fluide newtonien est donc stable tandis-que celui d'un fluide viscoélastique devient instable pour un même nombre de Reynolds $Re = 5 \cdot 10^3$. Avec ce nouveau résultat, on peut dire à coup sûr que l'élasticité favorise l'apparition des instabilités dans l'écoulement.

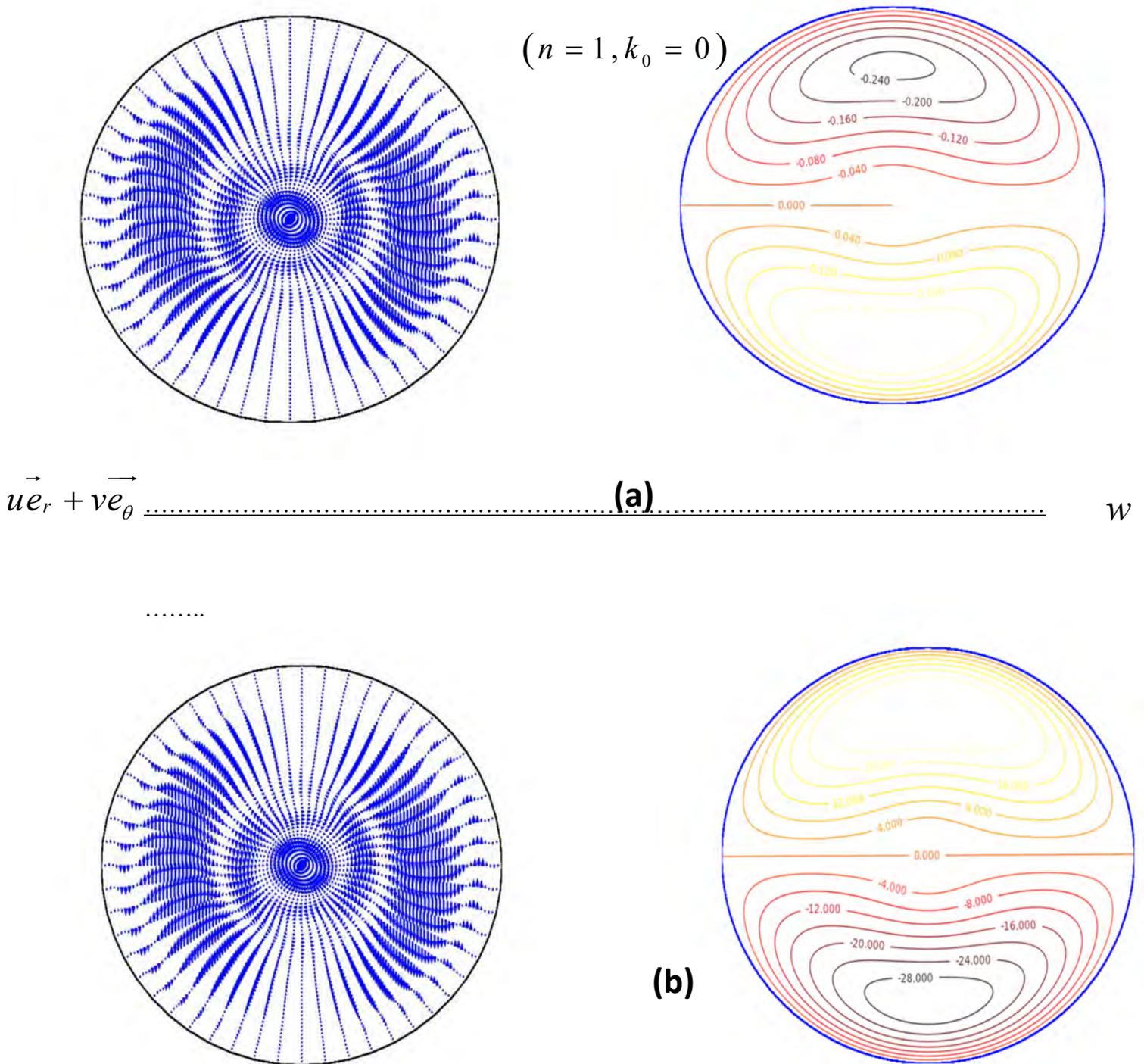


Figure 3.4 : vitesse transversale $\vec{u}e_r + \vec{v}e_\theta$ (gauche) et contours d'isovaleurs de la vitesse axiale w (droite), (a) : vitesse initiale, (b) : mode le moins stable ; cas d'une perturbation homogène ($n=1, k_0 = 0$) à $Re = 5 \cdot 10^3$ et $We = 10^{-2}$

3.3.3. Cas d'une perturbation axisymétrique ($k_0 \neq 0 ; n = 0$)

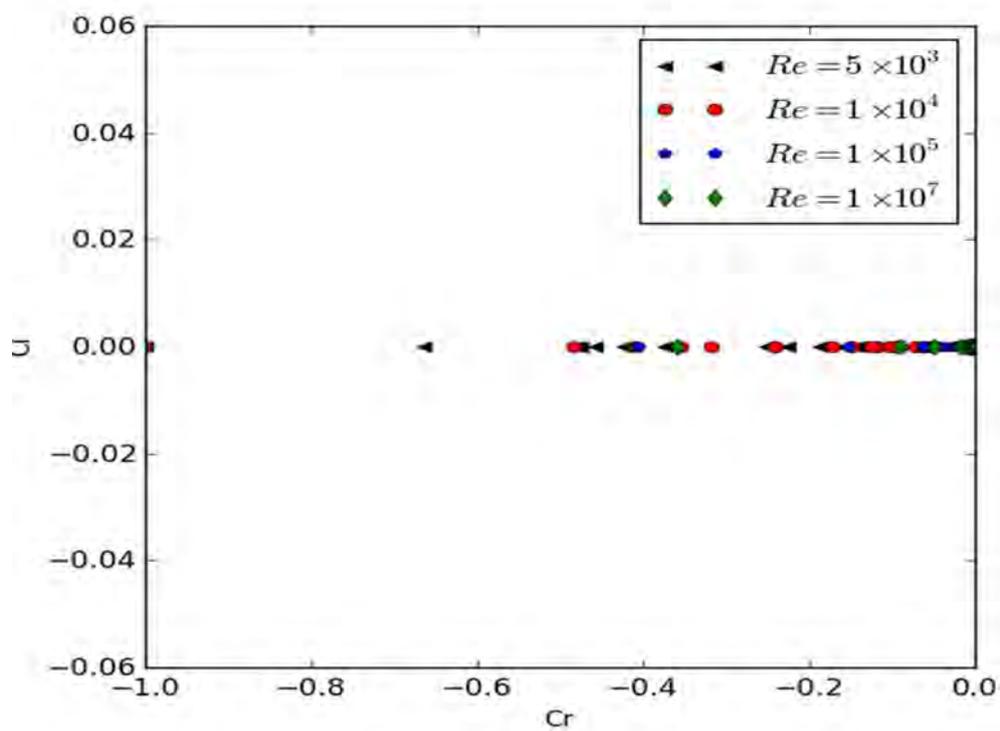
Pour ($k_0 \neq 0$ et $n = 0$), on se retrouve avec une perturbation bidimensionnelle dépendant des variables spatiales r et z . Les équations du mouvement donnent :

$$c\hat{u} = -ik_0W_b\hat{u} - D\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{u} \right] - \frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & \left[ik_0DW_b \left(3D + \frac{1}{r} \right) - 2ik_0D^2W_b + ik_0W_b \left(2D^2 - \left(\frac{n}{r} \right)^2 - k_0^2 + \frac{2}{r}D - \frac{2}{r^2} \right) \right] \hat{u} \\ & \left[DW_bD^2 + \frac{1}{r}DW_bD + D^2W_bD \right] \hat{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

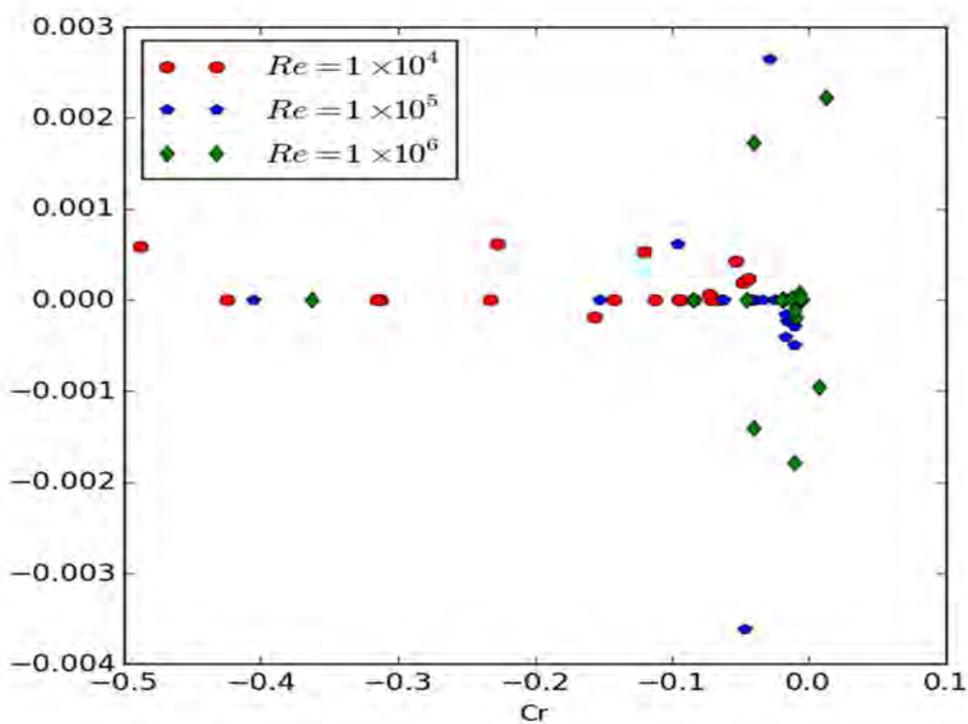
$$c\hat{v} = -ik_0W_b\hat{v} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{v} \right] - \frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{r}DW_b + W_b \cdot \left(\frac{1}{r}D + \frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{u} - ik_0 \left[DW_b \cdot \left(\frac{2}{r} + 2D \right) + W_b \left(k_0^2 + \frac{1}{r}D - \frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{v} \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

$$c\hat{w} = -ik_0W_b\hat{w} - \hat{u}D^2W_b - ik_0\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} [L] \hat{w} - \frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & \left[-k_0^2 \left[DW_b + W_b \cdot \left(\frac{1}{r} + D \right) \right] \right] \hat{u} \\ & \left[+ik_0 \left[2D^2W_b + 2DW_b \left(\frac{1}{r} + D \right) + W_b \left(2k_0^2 + \frac{1}{r}D + D^2 \right) \right] \right] \hat{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

$$\text{Où } L = D^2 + \frac{1}{r}D - k_0^2$$



(a)

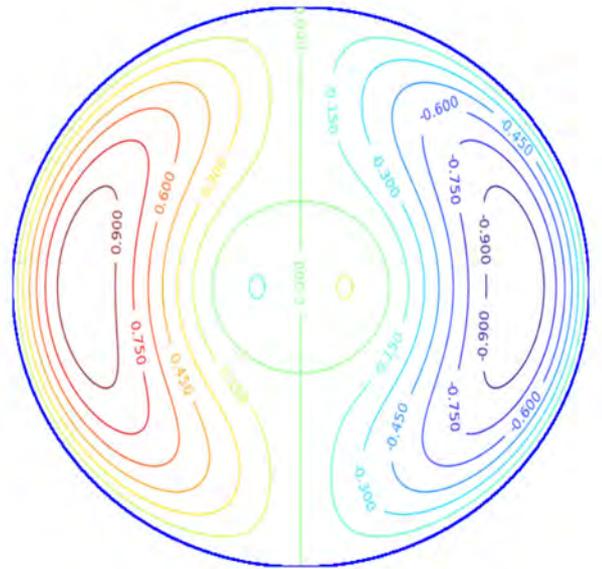
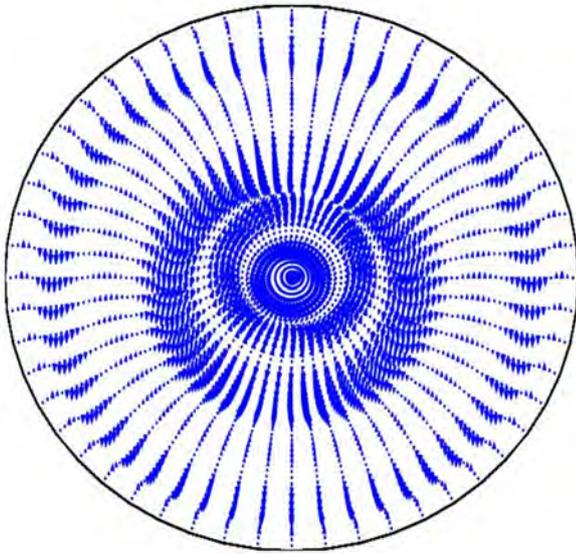


(b)

Figure 3.5 : Spectre des valeurs propres d'une perturbation homogène suivant l'axe avec $n=1; k_0=0$ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, (a) : cas d'un fluide newtonien ($\omega=0$) ; (b) : cas d'un fluide viscoélastique ($We=10^{-2}$)

Les parties réelles des valeurs propres restent négatives pour les fluides newtoniens, tandis que pour les mêmes conditions d'écoulement, les parties réelles des valeurs propres ne sont pas toutes négatives pour un fluide viscoélastique, ce qui témoigne de l'apparition d'instabilités dans l'écoulement. On constate aussi qu'au-delà d'une certaine valeur du nombre de Reynolds, il apparaît des instabilités dans l'écoulement même du fluide newtonien, ce qui n'est pas le cas pour les écoulements monodimensionnel et homogène. En effet, le terme de convection $(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u}$, responsable des échanges entre l'écoulement de base et l'écoulement perturbé, est source d'instabilité. Terme qui est nul pour les écoulements monodimensionnel et homogène newtonien. En outre, on remarque que plus l'élasticité du fluide est importante, plus l'écoulement est instable (fig3.8). On en déduit que le terme d'élasticité est source d'instabilité

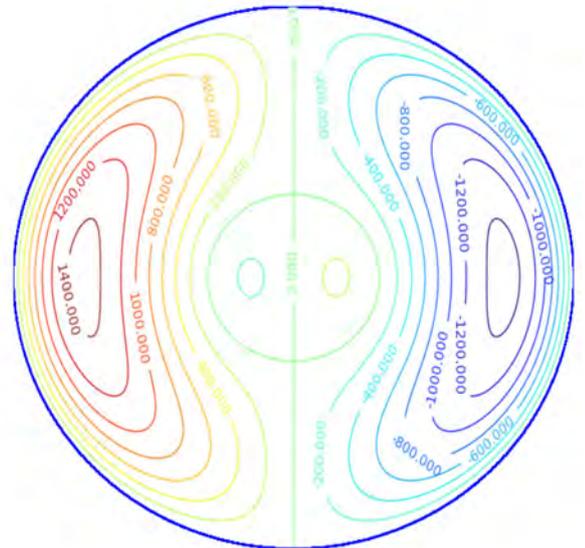
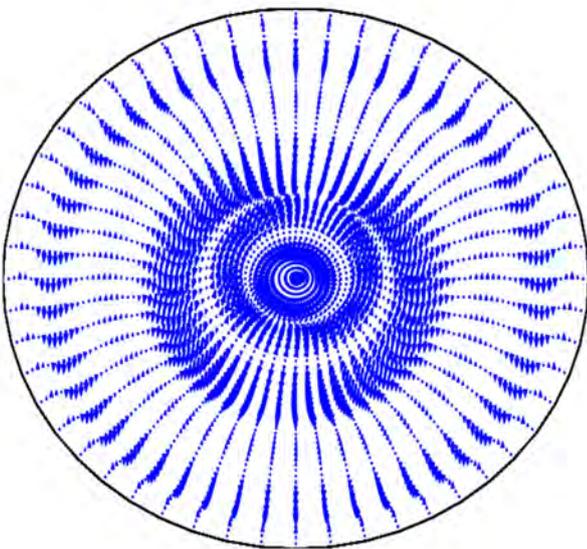
$$(n=0; k_0=0,1)$$



(a)

$$\vec{u}_e_r + \vec{v}_e_\theta$$

w



(b)

Figure 3.6 : vecteur vitesse transversale $\vec{u}_e_r + \vec{v}_e_\theta$ (gauche) et contours d'iso-valeurs de la vitesse axiale w (droite), (a) : vitesse initiale, (b) : mode le moins stable. cas d'une perturbation axisymétrique ($n=0, k_0=1$) à $Re = 5 \cdot 10^3$ et $We = 10^{-2}$

La **figure3.8** montre que l'écoulement monodimensionnel d'un fluide viscoélastique avec un nombre de Reynolds $Re = 10^4$ est stable pour un paramètre de retard variant de 0 (fluide purement newtonien) à 0,35.

L'écoulement homogène d'un fluide viscoélastique reste stable tant que le paramètre de retard est inférieur ou égal à 0,2 puis devient instable au-delà de cette valeur. Toutefois cet écoulement reste stable jusqu'à $\omega = 0,25$ pour $k_0 = 0,1$. Cependant au-delà de $k_0 = 0,1$, ce seuil d'instabilité est atteint à partir de $\omega = 0,2$.

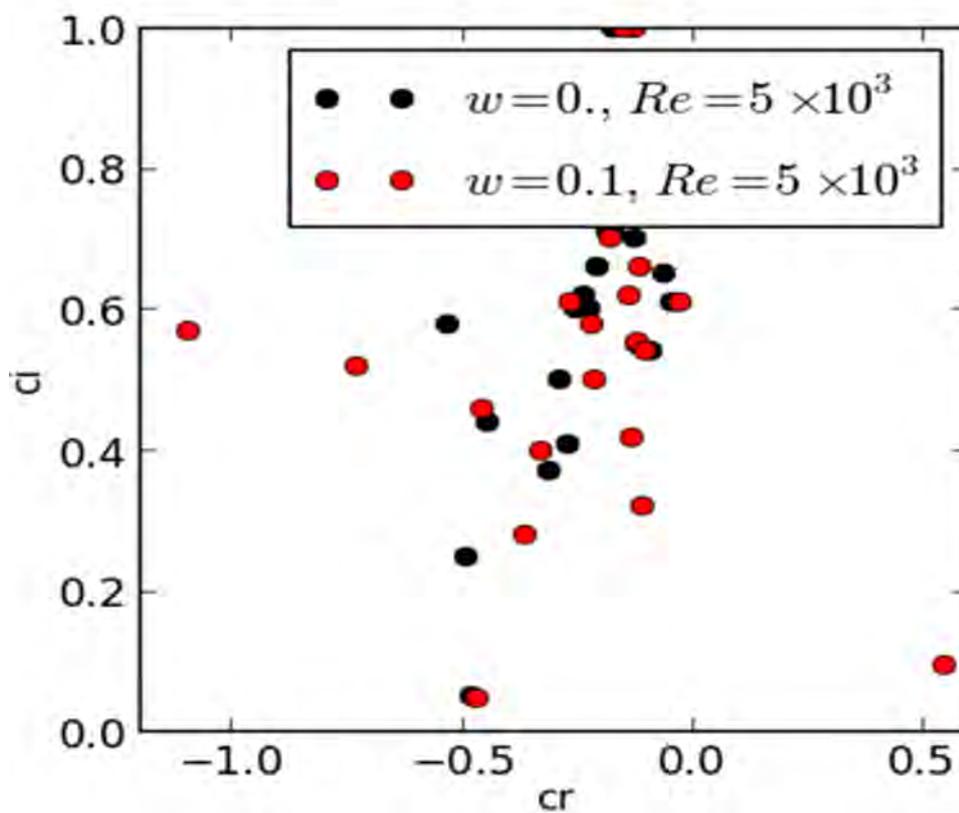


Figure 3.7: Spectre des valeurs propres d'une perturbation axisymétrique avec $n = 0$ et $k_0 = 0,1$, cas du fluide newtonien (noir), cas du fluide viscoélastique à $We = 10^{-2}$ (rouge)

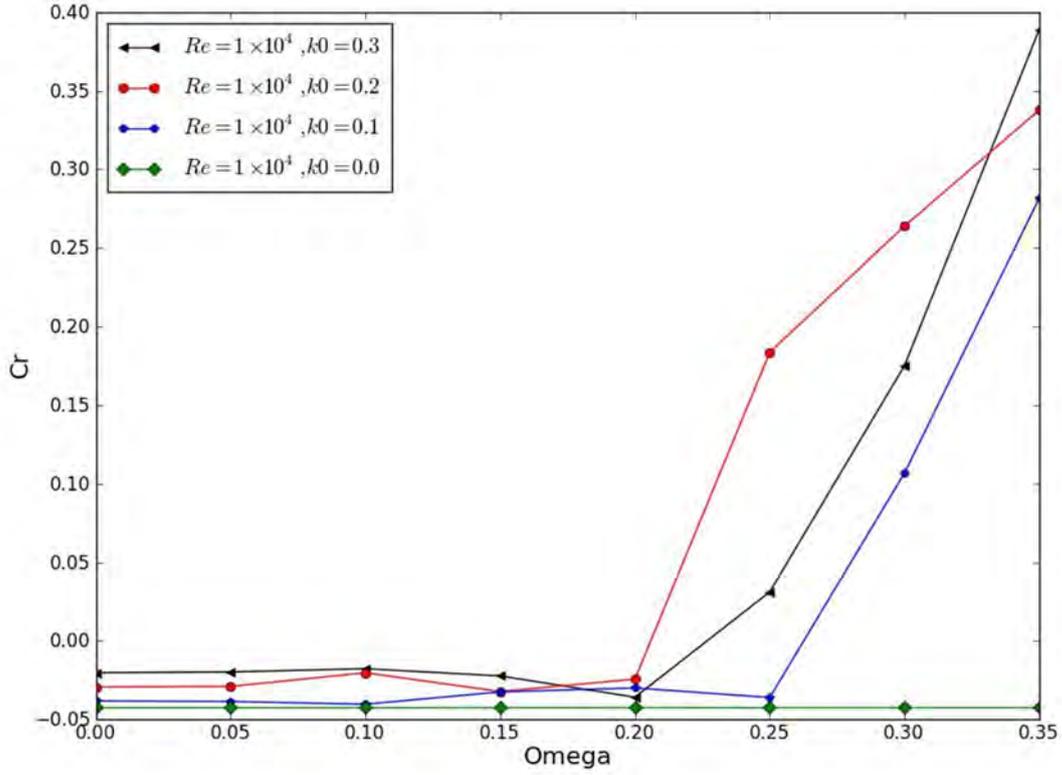


Figure 3.8 : Evolution de la valeur propre la plus instable en fonction du paramètre de retard ω pour différents nombres d'onde axial à nombre de Weissenberg $W_e = 10^{-3}$.

3.3.4. Cas d'une perturbation tridimensionnelle ($n \neq 0; k_0 \neq 0$)

$$c\hat{u} = -i.k_0.W_b.\hat{u} - \frac{d\hat{p}}{dr} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{u} - \frac{2in}{r^2} \hat{v} \right]$$

$$-\frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & \left[i.k_0 \cdot \frac{dW_b}{dr} \cdot \left(3 \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) - 2.i.k_0 \cdot \frac{d^2}{dr^2} W_b + i.k_0.W_b \left(2 \frac{d^2}{dr^2} - \left(\frac{n}{r} \right)^2 - k_0^2 + \frac{2}{r} D - \frac{2}{r^2} \right) \right] \hat{u} \\ & -n.k_0.W_b \left[\frac{3}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] \hat{v} + \left[\frac{d}{dr} W_b \cdot \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} W_b \cdot \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} W_b \cdot \frac{d}{dr} \right] \hat{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

$$c\hat{v} = -ik_0W_b\hat{v} - i\frac{n}{r}\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\left(L - \frac{1}{r^2} \right) \hat{v} + \frac{2.in}{r^2} \hat{u} \right]$$

$$-\frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{r} \frac{dW_b}{dr} + W_b \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{u} - ik_0 \left[\frac{dW_b}{dr} \left(\frac{2}{r} + 2D \right) + W_b \left(2 \left(\frac{n}{r} \right)^2 + k_0^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{v} \\ & + in \left[\frac{dW_b}{dr} \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{k_0^2}{r} W_b \right] \hat{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

$$c\hat{w} = -ik_0W_b\hat{w} - \hat{u}\frac{d^2W_b}{dr^2} - ik_0\hat{p} + \frac{1}{\text{Re}}[L]\hat{w}$$

$$\frac{\omega We}{\text{Re}} \left\{ \begin{array}{l} -k_0^2 \left[\frac{dW_b}{dr} + W_b \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{dW_b}{dr} \right) \right] \hat{u} \\ -i\frac{n}{r} \cdot [k_0^2 \cdot W_b] \hat{v} + i.k_0 \cdot \left[2 \cdot \frac{d^2W_b}{dr^2} + 2 \frac{dW_b}{dr} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) + W_b \left(2k_0^2 + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) \right] \hat{w} \end{array} \right\} \quad (3.51)$$

Où $L = D^2 + \frac{1}{r}D - \left(\frac{n}{r}\right)^2 - k_0^2$; $D = \frac{d}{dr}$

Le graphe montre nettement un spectre des valeurs propres dont les parties réelles sont toutes négatives pour le fluide newtonien. Pour le fluide viscoélastique, la partie réelle des valeurs propres n'est pas toutefois négative et indiquerait que l'écoulement du fluide est instable pour un même nombre de Reynolds $Re = 5 \cdot 10^3$. S'intéressant au cas du fluide newtonien, une comparaison avec le cas de l'écoulement axisymétrique nous indique que le terme visqueux a un effet stabilisant.

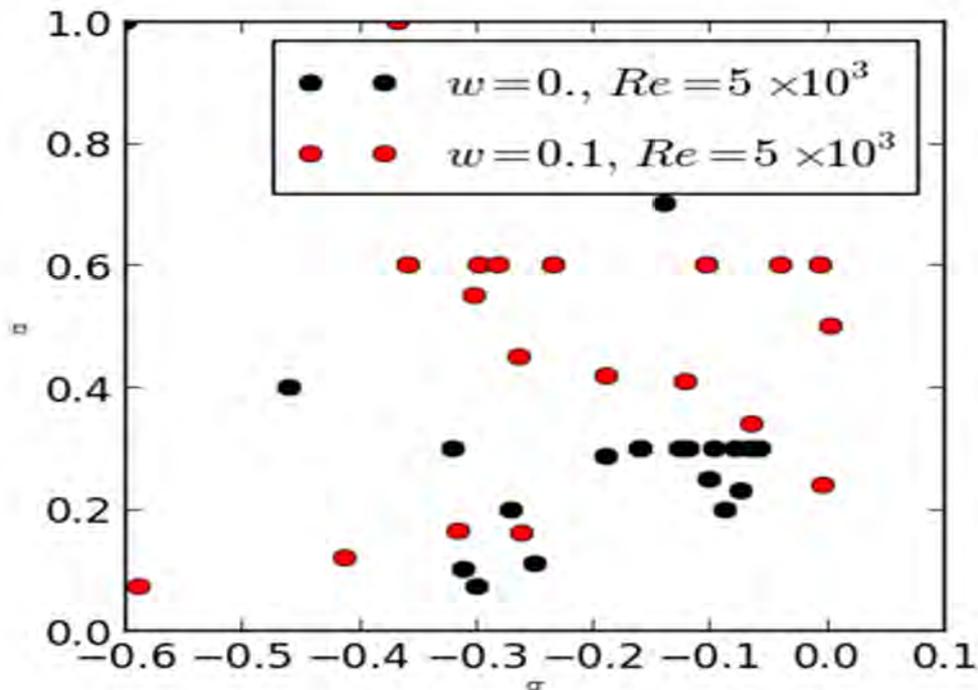
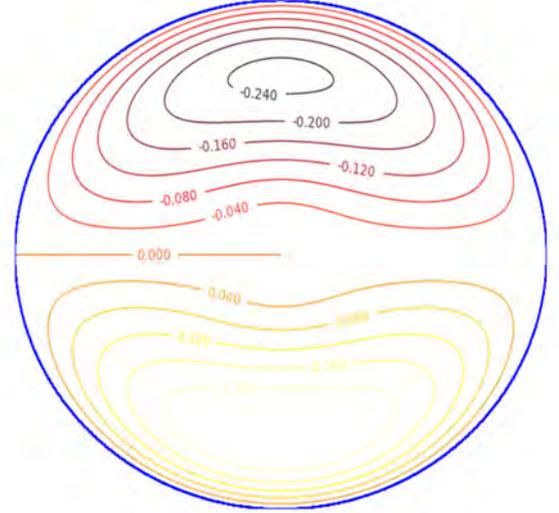
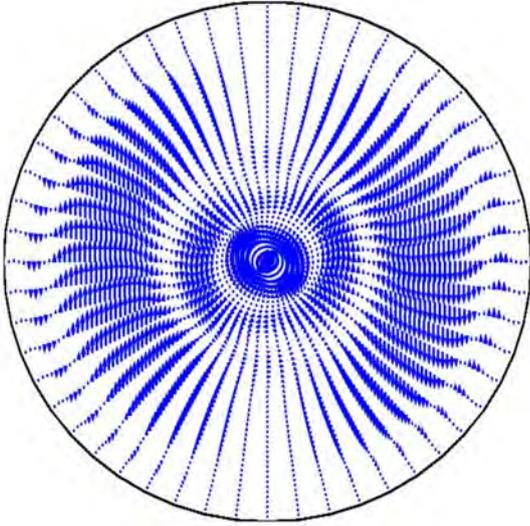


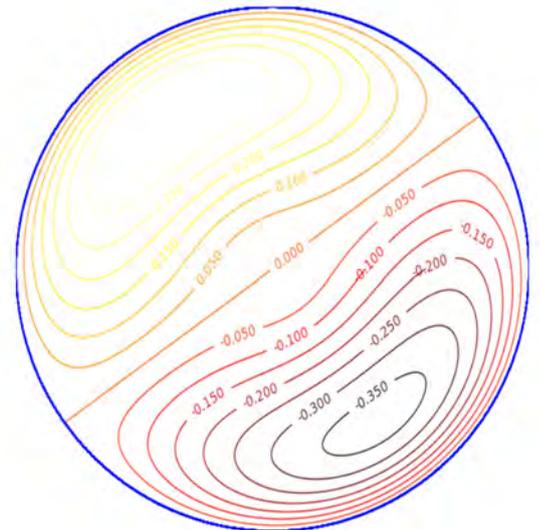
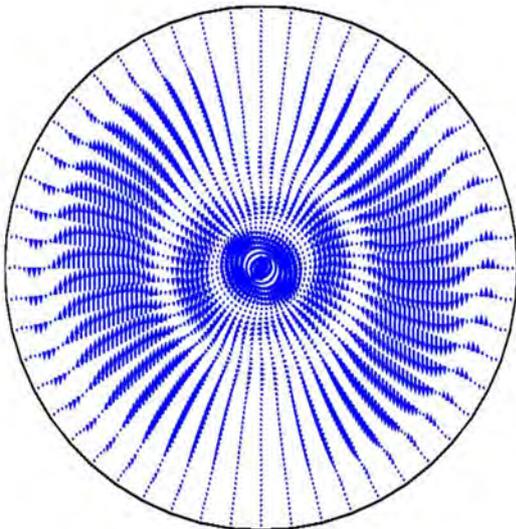
Figure 3.9 : Spectre des valeurs propres d'une perturbation tridimensionnelle avec $n = 1$ et $k_0 = 0.1$, cas d'un fluide newtonien (noir), cas du fluide viscoélastique à nombre de Reynolds 10^{-2} (rouge)

$$(n = 1; k_0 = 0, 1)$$



(a)

$$\vec{u}e_r + \vec{v}e_\theta \xrightarrow{\hspace{15em}} w$$



(b)

Figure 3.10_: Vecteur vitesse transversale $\vec{u}e_r + \vec{v}e_\theta$ (gauche) et contours d'isovaleurs de la vitesse axiale w (droite), (a) : vitesse initiale, (b) : mode le moins stable ; cas d'une perturbation tridimensionnelle ($n = 1; k_0 = 1$) à $Re = 5 \cdot 10^3$ et $We = 10^{-2}$

3.4. Etude de la croissance transitoire de l'énergie

Un fait important et notoire ici, est la non normalité de l'opérateur linéaire de Navier-Stokes établi dans le chapitre précédent, c'est-à-dire que les vecteurs propres de cet opérateur ne sont pas orthogonaux par rapport au produit scalaire (f, g) défini dans L^2 . D'après **Meseguer** (**Meseguer et al 1993**), cette non orthogonalité peut engendrer une superposition (interférence) positive des ondes et par conséquent entrainer une croissance transitoire de l'énergie cinétique. Dans le cas où cette énergie cinétique devient plus importante, elle peut déclencher les termes non linéaires et par conséquent mener vers l'instabilité de l'écoulement.

Rappelons l'équation linéaire de Stokes mis en œuvre dans le précédent chapitre :

$$F_{nl}\dot{\alpha}(t) = G_{nl}\alpha(t) \quad (3.52)$$

L'étude de la croissance transitoire peut se faire en se basant sur la méthode de **Meseguer et Trefethen** (**Meseguer & Trefethen, 2001a**).

Lorsque la matrice F est inversible (matrice non singulière) l'équation précédente peut s'écrire ainsi :

$$F_{nl}^{-1}F_{nl}\dot{\alpha}(t) = F_{nl}^{-1}G_{nl}\alpha(t) \quad (3.53)$$

Où F^{-1} est la matrice inverse de F

$$F^{-1}F = I$$

I est la matrice unité d'ordre $2M + 2$

Si on pose $H = F^{-1}G$, l'équation de Stokes peut se mettre sous la forme suivante :

$$\dot{\alpha}(t) = H\alpha(t) \quad (3.54)$$

Une perturbation δ admise par le système peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des $(2M + 2)$ vecteurs propres de la matrice H .

$$\delta = \sum_{k=1}^{2M+2} \lambda_k(t) \delta_k \quad (3.55)$$

Avec

$$\bar{\delta}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{0k}^1 \\ \vdots \\ \alpha_{Mk}^1 \\ \alpha_{0k}^2 \\ \vdots \\ \alpha_{Mk}^2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Posons :

$$D = \left[\bar{\delta}_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad \bar{\delta}_{2M+2} \right] \quad (3.57)$$

Soit encore

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_{0,1}^1 & \alpha_{0,2}^1 & \cdots & \alpha_{0,M}^1 & \alpha_{0,M+1}^1 & \cdots & \alpha_{0,2M+1}^1 & \alpha_{0,2M+2}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{M,1}^1 & \alpha_{M,2}^1 & \ddots & \alpha_{M,M}^1 & \alpha_{M,M+1}^1 & \cdots & \alpha_{M,2M+1}^1 & \alpha_{M,2M+2}^1 \\ \alpha_{0,1}^2 & \alpha_{0,2}^2 & \cdots & \alpha_{0,M}^2 & \alpha_{0,M+1}^2 & \ddots & \alpha_{0,2M+1}^2 & \alpha_{0,2M+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{M,1}^2 & \alpha_{M,2}^2 & \cdots & \alpha_{M,M}^2 & \alpha_{M,M+1}^2 & \cdots & \alpha_{M,2M+1}^2 & \alpha_{M,2M+2}^2 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Puis

$$\lambda = [\lambda_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad \lambda_{2M+2}] \quad (3.59)$$

$$\text{On a alors : } \delta = \lambda D \quad (3.60)$$

L'équation (3.54) donne alors

$$\frac{d\lambda}{dt} = \Gamma \lambda \quad (3.61)$$

Γ représente une matrice diagonale comportant les valeurs propres.

$$\text{Si } \Gamma = \text{diag}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_M) \quad (3.62)$$

L'équation précédente admet pour solution

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{\Gamma t} \quad (3.63)$$

Les éléments de l'opérateur $\lambda(t)$ sont les composantes de la perturbation dans la base des fonctions propres.

On peut donc dire que l'évolution temporelle de la perturbation est régie par le terme $e^{\Gamma t}$.

- Si l'un des χ_r par ailleurs partie réelle des éléments de la matrice Γ est positif, alors la perturbation croît exponentiellement avec le temps et par conséquent l'écoulement devient **instable**.
- Si au contraire, tous ces éléments sont négatifs, la perturbation est atténuée au cours du temps et l'écoulement tend de plus en plus vers un état **stable**.
- Si ces éléments sont nuls, on ne pourra pas conclure l'état stable ou non de la perturbation.

Où χ_r est la partie réelle de χ .

Soit ε l'énergie cinétique de la perturbation qu'on définit par :

$$\varepsilon = (u, u) = \int_0^1 u^* u dr \quad (3.64)$$

Selon Schmid et **Henningson** (Schmid & Henningson, 2001), on peut exprimer l'énergie sous forme matricielle, ainsi on a :

$$\varepsilon = [\lambda^H] [V^H \mathfrak{M} V] [\lambda] \quad (3.65)$$

V est une matrice dont les vecteurs colonne sont les $\bar{\delta}_k$ et :

$$\mathfrak{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \left(\bar{\Omega}_i^{(1)}, \bar{\Omega}_j^{(1)} \right) & \left(\bar{\Omega}_i^{(2)}, \bar{\Omega}_j^{(1)} \right) \\ \left(\bar{\Omega}_i^{(1)}, \bar{\Omega}_j^{(2)} \right) & \left(\bar{\Omega}_i^{(2)}, \bar{\Omega}_j^{(2)} \right) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

La matrice \mathfrak{M} définie positive est donnée par : $V^H \mathfrak{M} V$, elle peut-être décomposée de la forme :

$$\mathfrak{M} = F^H F \quad (3.67)$$

L'énergie cinétique de la perturbation est donnée par la norme d'ordre 2 :

$$e(t) = \lambda^H F^H F \lambda = \|F \lambda\|^2 \quad (3.68)$$

Le facteur d'amplification de l'énergie est défini par l'expression:

$$g_a(t) = \frac{e(t)}{e(0)} = \frac{\|F \lambda(t)\|^2}{\|F \lambda(0)\|^2} \quad (3.69)$$

Conclusion

L'analyse des différents résultats montre que l'écoulement linéaire d'un fluide newtonien est stable tandis que pour un fluide viscoélastique de nombre de Weissenberger $We = 10^{-2}$ et pour un paramètre de retard ($\omega = 0.1$) l'écoulement est instable même pour un nombre de Reynolds $Re = 5.10^3$ sauf pour le cas de l'écoulement monodimensionnel. En effet, pour les cas monodimensionnel et homogène, le terme de convection qui est en fait responsable des échanges d'énergie entre l'écoulement de base et l'écoulement perturbé est nul. On peut donc dire que la viscoélasticité et le terme de convection sont responsables des instabilités observées (voir **I. Kama et al.**) (Kama, Sow, Kpodé, & Mbow, 2018)

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Nous avons orienté notre étude sur la stabilité de l'écoulement cylindrique d'un fluide viscoélastique. Le fluide viscoélastique étudié ici est décrit par le modèle d'Oldroyd-B. Nous avons, dans une première partie, établi les équations qui gouvernent l'écoulement d'un tel fluide et ceci pour le cas de l'écoulement de base pour lequel le mouvement du fluide est considéré comme stationnaire (qui ne varie pas avec le temps), bidimensionnel (variant suivant les directions radiale et axiale) et unidirectionnel c'est-à-dire ne s'effectuant que suivant la direction axiale. Nous nous sommes par la suite attaqués au cas où l'écoulement est soumis à de faibles perturbations. Les équations obtenues n'étant pas pour le moment solvables par une méthode analytique, nous avons fait recours à une méthode numérique. Pour adopter cette méthode numérique, nous avons développé un code DNS non Newtonien qui n'est qu'une adaptation ou modification du code linéaire Newtonien publié par **Meseguer et Trefethen** (Meseguer & Trefethen, 2001). L'algorithme QZ a été utilisé pour la résolution du problème numérique. Cette partie numérique de la thèse se rapporte à l'étude modale de la stabilité de l'écoulement linéaire d'un fluide viscoélastique en mouvement dans une conduite cylindrique d'axe horizontal. Le code Fortran utilisé permet de faire varier les paramètres du fluide et de l'écoulement. Il ressort de cette étude que l'écoulement d'un fluide newtonien est linéairement stable. Pour ce qui est du fluide viscoélastique, des instabilités apparaissent même pour des faibles valeurs du nombre de Weissenberg ($We = 10^{-2}$) et pour un nombre de Reynolds $Re = 5.10^3$. Une étude comparative entre le cas newtonien et le cas viscoélastique des différentes situations nous a permis d'affirmer à coup sûr que l'élasticité est à l'origine des instabilités observées. Toutefois cette instabilité apparait plus vite lorsque le terme de convection est non nul. En réalité ce terme de convection ($(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$) est responsable des échanges d'énergies entre l'écoulement de base et les perturbations.

Pour ce qui est des perspectives, **Lopèz Carranza** (Lopez Carranza, Jenny, & Nouar, 2012) a montré pour le cas particulier des fluides non newtoniens dits rhéofluidifiants, que l'écoulement linéaire en conduite cylindrique est stable et que la situation qui permet d'avoir une amplitude de perturbation plus élevée est obtenue pour les paramètres ($n=1$ et $k_0=0$) (cas bidimensionnel où les perturbations ne varient pas suivant la direction axiale). On peut vérifier les paramètres qui conduiraient à la même situation pour le cas d'un fluide viscoélastique. Cette étude appelée « perturbation optimale » peut se faire à l'aide de la méthode de décomposition en valeurs singulières.

On pourrait même aller plus loin en étudiant la stabilité non linéaire bidimensionnelle si les résultats obtenus sont les mêmes que ceux obtenus avec les fluides newtoniens et rhéofluidifiants. Sachant que la plupart des installations industrielles sont conçues avec un échange de chaleur avec le milieu environnant, on peut aussi imaginer un écoulement où le fluide serait non isotherme. On peut également varier la disposition du cylindre, par exemple un cylindre qui serait incliné d'un angle $\alpha \neq 0$ par rapport à l'horizontal.

Toujours dans le cadre des perspectives, on pourrait imaginer un écoulement bi-fluide, c'est-à-dire un écoulement composé de deux fluides viscoélastiques non miscibles avec des paramètres rhéologiques différents. Dans ce contexte, on pourra introduire le concept d'instabilités interfaciales.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Akervic, E., Hoeffner, J., Ehrenstein, U., & Henningson, D. S. (2007). Optimal growth, model reduction and control in a boundary-layer flow using global modes. *J. Fluid Mech.*, 579, 305-314.
- Anderson, D. A., Tannehill, J. C., & Pletcher, R. H. (1997). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Philadelphia: Hemisphere .
- Andersson, P., Berggren, M., & Henningson, D. (s.d.). *Optimal disturbances and by pass transition in boundary layers* (Vol. 11(1)). *Phys. fluids* .
- Barkley, D., & Henderson, R. D. (1996). Three-dimensional floquet analysis of the wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 322, 215-241.
- Barkley, D., Gomes, M. M., & Henderson, R. D. (2003). *J. Fluid Mech.*, 473, 167-190.
- Björn Hof, C. W. (2004). Experimental observation of Nonlinear Traveling Waves in turbulent pipe Flow. *Science*, 305, 1594-1598.
- Butler, K. M., & Farrell, B. F. (1992). Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys Fluids*, 11 (4), pp. 1637-1650.
- Cebeci, T., & Bradshaw, P. (1984). Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 66.
- Chapman., S. J. (2002). Subcritical transition in Channel flows. *J. Fluid Mech.*, 35, 451.
- Cherhabili, A., & Ehrenstein, U. (1997). Finite amplitude equilibrium states in plane Couette flow. *J. Fluid Mech*, 342, 159-177.
- Chomaz, J. M. (2005). Global instabilities in spatially developing flows: nonnormality and non-linearity. Dans *Annu. Rev. Fluid Mech.* (Vol. 37, pp. 357-392).
- Chomaz, J. -M., Huerre, P., & Redekopp, L. G. (1991). *A frequency selection criterion in spatially developing flows*. (éd. Stud. App. Maths, Vol. 84).
- Corbett, P., & Bottaro, A. (2000). *Optimal perturbations for boundary layers subject to streamwise pressure gradient*. (Vol. 12). *Phys. Fluids*.
- Cossu, C., & Chomaz, J. M. (1997). Global measures of local convective instabilities. Dans *Phys. REV. Lett.* (Vol. 37, pp. 4387-4390).
- Darbyshire, A. G., & Mullin, T. (1995). Transition to turbulence constant-mass-flux pipe flow. *J. Fluid. Mech.*, 289, 83-114.
- Darbyshire, A. G., & Mullin, T. (1995). Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *Journal of fluid mechanics*, vol. 289, 83-114.

- Darbyshire, A. G., & Mullin, T. (1995). Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *Journal of fluid mechanics*, vol. 289, 83-114.
- Davies, S. J., & White, C. M. (1928). An experimental study of the flow of water in pipe of rectangular section. *Proc. R. Soc. A*, 119, p. 92. London.
- Denn, M. (1980). On an analysis of draw resonance by Hyun. *AichE*.
- Ehrenstein, U., & Gallaire, F. (2005). On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows : the flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 536, 209-218.
- Ellingsen, T., & Palm, E. (1975). Stability of linear flow. Dans *Phys. Fluids* (Vol. 18, p. 487).
- Escudier, M. P., & Poole, R. J. (2005). Observations of asymmetrical flow behaviour in transitional pipe flow of yield-stress and other shear thinning liquids. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 127, 143-155.
- Escudier, M. P., & Presti, F. (1996). Pipe flow of thixotropic liquid. *J. of Non-Newtonian fluid Mech*, 62, 221-306.
- Escudier, M. P., Rosa, S., & Poole, R. J. (2009). Assymetry in transitional pipe flow of drag-reduction polymer solutions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 161, 19-29.
- Esmael, A., & Nouar, C. (2008). Transitional flow of a yield-stress fluid in a pipe : Evidence of a robust coherent structure. *Phys. Rev. E.*, 77.
- Faisst, H., & Eckhardt, B. (2003). Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 91, 224-502.
- Farrell, B. F. (1998). Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids*, 31 (8).
- Farrell, B. F., & Ioannou, P. J. (s.d.). Generalized stability theory. Part i : Autonomous operators. *Journal of the atmospheric Sciences*, 53(14).
- Fonberg, B. (1996). A pratical guide for pseudospectral Methods. Dans *Cambridge University Press*.
- Fredrickson. (1961). *Transport Phenomena in Muticomponent Systems*. New York.
- Gravini, M. I., Bottaro, A., & Nieuwstadt, F. M. (1984). The initial stage of transition in pipe flow : Role of optimal base flow distorsions. *J. fluid mech.*, 517, 131-165.
- Groisman, A., & Steinberg, V. (2000). Elastic turbulence in a polymer solution flow. *Nature*, 405, 53-55.
- Gusel, B., Frigaard, I., & Martinez, M. (2009). Predicting laminar-turbulent transition in poiseuille pipe flow for Non-Newtonian fluids. *Chem. Eng. Sci.*, 64, 254-264.
- Gustavsson, L. H. (1991). Energy growth of three-dimensional disturbances in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 224, 241.
- Hill, D. C. (1992). A theoretical approach to analyzing the restabilization of wakes. 92(0067).

- Hof, B., Juel, A., & Mullin, T. (2003). Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe. *Phys Rev. Letters*, Vol. 91, 244-502.
- J. Peixinho et T. Mullin. (2007). Finite- amplitude threshold for transition in pipe flow . *Phys. Rev. Lett.*, Vol 582, 3 et 7.
- Jackson, C. P. (1987). A finite element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J. FluidMech.*, 182, 23-45.
- Kama, I., Sow, M. L., Kpodé, K., & Mbow, C. (2018, Novembre 30). Effects of Reynolds' and Weissenberg's numbers on the stability of linear pipe flow of viscous fluid. *Modern Mechanical Engineering*, 8, 264-277.
- kerswell, W. &. (2004). On transition in a pipe. part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid. Mech.*, 333-371.
- Krasnov, D., Rossi, M., Zikanov, O., & Boeck, T. (2008). Optimal growth and transition to turbulence in Channel flow with spanwise magnetic field. *J. Fluid Mch.*, 596, 73-101.
- Landahl, M. T. (1980). A note on an algebraic instability of invicid parallel shear flows. *J. Fluid Mech*, 98, 243-251.
- LeDizès, S., & Huerre, P. (1996). Linear global modes in spatially developing media. 354, pp. 169-212. London: Phil. Trans. R. soc.
- Leonard, A., & Wray, A. (1982). A new numerical method for the for the simulation for three dimensional flow in pipe. Dans Springer-Verlag (Éd.), *8th Int. Conf on numerical methods in fluid dynamics*, (pp. 335-342). Berlin.
- Lloyd N. Trefethen, A. E. (1993). *Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues*. (Vol. 261). Science.
- Lopez Carranza, S. N., Jenny, M., & Nouar, C. (2012). Pipe flow of shear-thinning fluids. Dans *C. R. Mech.* (Vol. 340, pp. 602-618).
- Luchini, P. (2000). Reynolds-number-independant stability of the boundary layer over a flat surface : Optimal perturbations. *404*, 289-309.
- M. Rudman, H. M. (2004). Turbulent pipe flow of shear-shinning fluids. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 118, 33-48.
- M.I. Gravini, A. B. (1984). The initial stage of transition in pipe flow : Role of optimal base flow distorsions. *J. fluid mech.*, 517, 131-165.
- Mellibovsky, F., & Meseguer, A. (2008). *Critical threshold in pipe flow transition*. Phil. Trans. R. Soc. A.
- Meseguer , A., & Trefethen, L. N. (2001). Linearized pipe flow to 10^7 . *Jornal of computational physics*, 186, 178-197.
- Meseguer, A. (2003). Streak breakdown instability in pipe Poiseuille flow. *Physic of fluids*, 15, 1203-1213.

- Meseguer, A., & Trefethen, L. N. (2001b). *A spectral Petrov-Galerkin formulation for pipe flow (II) : Nonlinear transitional stages*. Oxford University: Numerical Analysis Group.
- Mitchell, A. R., & Griffiths, D. F. (1980). The Finite Difference Method in Partial Difference Equations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 60.
- Monkewitz, P. A., Huerre, P., & Chomaz, J. M. (1993). Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 251, 1-20.
- Morzynski, M., Afanasiev, K., & Thiele, F. (1999). Solution of the eigenvalue problems resulting from global non-parallel flow stability analysis. Dans *Computer methods in Applied Mechanics and engineering* (Vol. 169, pp. 161-176).
- Mullin, P. &. (2006). J. Peixinho et T. Mullin. *phys. Rev. Lett.*, , vol. 128,172-184.
- Nagata, M. (1990). Three dimensional finite amplitude solutions in plane Couette flow. *A.I. ChE. Journal.*, 217, 519-527.
- Oldroyd, J. (1950). *On the formation of rheological equation of state*. London: Proc. R. Soc A200.
- Orzag, S. A. (1971). Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J Fluid Mech.*, 50, 689.
- Peixinho, J., & Mullin, T. (2007). Finite- amplitude threshold for transition in pipe flow . *Phys. Rev. Lett.*, Vol 582, 3 et 7.
- Peixinho, J., Nouar, C., Desaubry, C., & Théron, B. (2005). Laminar transitional and turbulent flow of yield stress fluid in a pipe. *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 128, 172-184.
- Peixinho, J., & Mullin, T. (2006). Decay of turbulence in pipe flow. Dans *phys. Rev. Lett.*, (Vol. vol. 128, pp. 172-184).
- Pfenniger, W. (1961). *Boundary layer suction experiments with laminar flow at high Reynolds numbers in the inlet length of a tube by various suction methods*. In *Boundary layer and flow control*. Pergamon: Oxford.
- Reddy, S. C., Schmid, J. P., Baggett, J. S., & Henningson, D. S. (1998). On the stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane Channel flows. *J. Fluid Mech.*, 365, 269-303.
- Reddy, S., & Henningson, D. S. (1993). Energy growth in viscous channel flows. *J. Fluid Mech.*, 252, 209-238.
- Reddy, S., & Henningson, D. S. (1993). Energy growth in viscous channel flows. *J. Fluid Mech.*, 252, 209-238.
- Reddy, S., Schmid, P., & Henningson, D. S. (1993). Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator. *SIAM J. Appl. Math*, 53, 15-47.
- Renardy, M. (1995). Nonlinear stability of flows of Jeffreys fluids at low Weissenberg numbers. Dans *Arch. Rational Mech. Anal.* (Vol. 132, pp. 37-48).

- Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. . *Philos. trans. R. Soc. R. Soc.*, Vol. 174, 935-982.
- Richmeyer. (1957). *Non-Linear Wave Propagation With Applications to Physics and Magnetohydrodynamics* (Vol. 9). (A. PRESS, Éd.) New York: United Kingdom Edition.
- Schmid, J. P., & Henningson, D. S. (1994). Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 277, 197-255.
- Schmid, P. J., & Henningson, D. S. (2001). *Stability and transition in shear flows*. Springer-Verlag.
- Schmid, P. J., & Henningson, D. S. (2002). On the stability of a falling liquid curtain. *J. Fluid Mech*, 463, 163-171.
- Theofilis, V. (2003). Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. Dans *Progress in aerospace Sciences* (Vol. 39, pp. 249-315).
- Tillmark, N., & Alfredsson, P. H. (1992). Experiments on transition in plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 235, 89.
- Toms, B. A. (1949). Proc int Cong. Rheology.
- Trefethen, A. M. (2003). Linearized pipe flow to Reynolds number 10^{**7} . *Journal of computational physics*, 186,178-197.
- Van Dyke, M. (1975). *Perturbatio Methods in Fluid Mechanics* (éd. Science, Vol. 79). Parabolic Press.
- Waleffe, F. (1997). On the self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids*, 9, 883-900.
- Waleffe., F. (1995). Hydrodynamic Stability and turbulence: Beyond transients to a self-sustaining process. *Stud. Appl. Math.*, 95, 319-343.
- Wedin, H., & Kerswell, R. (2004). On transition in a pipe. part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid. Mech.*, 333-371.
- White, C. M., & Mungal, M. G. (2008). Mechanics and prediction of turbulent drag reduction with polymer additives. *Annual REV. Fluid Mech*, 40, 235-256.
- Wynanski, I. J., & Champagne, F. H. (1973). On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid Mech.*, 59, 281-351.
- Wynanski, I. J., Sokolov, M., & Friedman, D. (1975). On transition in a pipe. Part 2. The equilibrium puff. *J. Fluid. Mech.*, 69, 283-304.
- Zebib, A. (1987). Stability of viscous flow past a circular cylinder. *J. Eng. Math.*, 11, 155-165.
- Zikanov, O. Y. (1996). On the stability of pipe poiseuille flow. *Phys. Fluids*, 8, 2923-2932.

PAGES ANNEXES

A. Caractérisation d'un fluide viscoélastique

1. L'effet Weissenberg

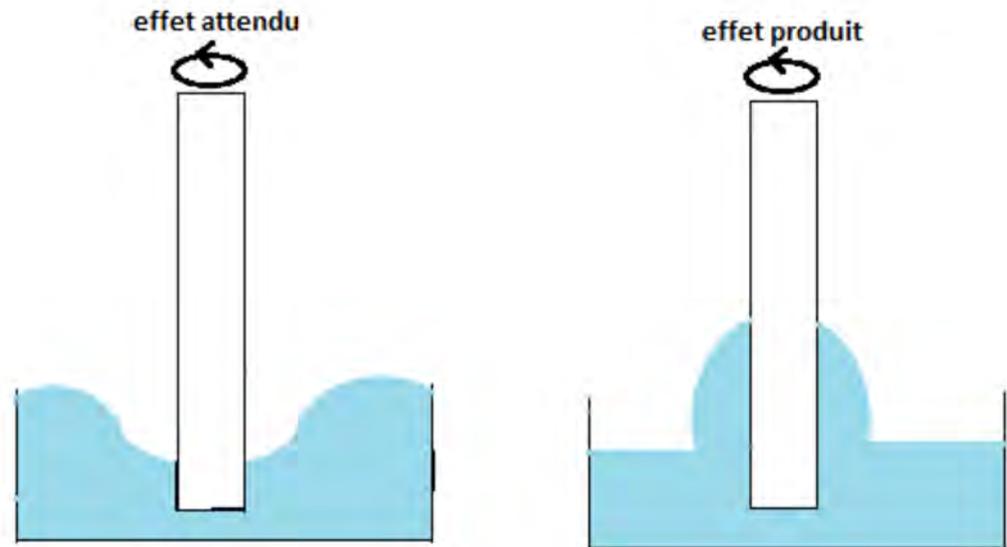


Figure A1 : Schéma de l'expérience de Weissenberg (J. Bico, R. Welsh et G. McKinley, référence).

Soit un fluide viscoélastique, par exemple la « *Silly-Putty* ». Si l'on fait tourner une tige dans ce fluide, on pourrait penser que ce fluide subit un effet centrifuge. Mais il aura au contraire tendance à grimper le long de la tige. Pour expliquer un tel comportement nous assimilons notre fluide à un système constitué de deux boules reliées par un ressort (modèle de Maxwell). Lorsqu'il est soumis à un cisaillement fort, ce système se déforme, le ressort est étiré vers le sens de cisaillement. Le ressort cherche donc à rétablir sa forme initiale et exerce une contre pression. La vitesse est plus grande autour de la tige qu'aux extrémités du cristallin. Les polymères situés autour de la tige sont donc étirés.

Le polymère est étiré, c'est-à-dire que le ressort est étiré. Ainsi, le ressort exerce une contre pression vers le haut et vers le bas. La pression exercée vers le bas est arrêtée par le fond du cristallin, alors que la pression exercée vers le haut entraîne la montée du fluide autour de la tige.

2. L'effet Barus

Lorsqu'un fluide viscoélastique sort d'un orifice, il a tendance à grossir : il s'agit de l'effet de **Barus**. De la même façon que l'expérience de Weissenberg, la vitesse d'écoulement est plus

forte au centre du tube. Les polymères assimilés à des systèmes « deux boules – ressort » sont étirés. Le ressort qui veut retrouver sa forme initiale exerce alors une pression perpendiculaire à la force d'écoulement.



Figure A2 : Schéma de l'expérience de Barus (J. Bico, R. Welsh et G. Mckinley référence).

B. Modélisation d'un fluide viscoélastique

1. La "cellule" de Maxwell :

Elle est constituée d'un ressort (de constante d'élongation G) et d'une masse (de viscosité η_1), les deux constituants étant montés en série.

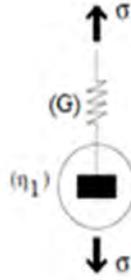


Figure A3: Schéma du modèle de Maxwell

Les forces σ_1 et σ_2 appliquées respectivement au ressort et à la masse vérifient :

$$\sigma_1 = G\gamma_1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma_2 = \eta_1 \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} \quad (\text{B.2})$$

γ_1 et γ_2 étant les déformations respectives des extrémités du ressort et de la masse. Le montage étant en série, les deux forces sont égales (notées σ) et on peut donc dire que la déformation γ totale vérifie les égalités suivantes :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} = \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\sigma_2}{\eta_1} \quad (\text{B.3})$$

Soit, en introduisant :

$$\lambda = \frac{\eta_1}{G} \quad (\text{temps de relaxation}) \quad (\text{B.4})$$

$$\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (\text{B.5})$$

Mais ce modèle est trop élastique pour rendre compte des phénomènes des fluides. En effet dans le cas d'une déformation constante non nulle, on montre que :

$$\sigma(t) = \sigma(0)e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (\text{B.6})$$

Nous voyons que ce modèle représente le comportement d'un matériau viscoélastique liquide ne possédant aucune élasticité instantanée. Sous une déformation brutale, les contraintes deviennent infinies. La différence avec un fluide newtonien est la présence d'une élasticité instantanée pendant le temps de relaxation λ .

2. La "cellule" de Voigt :

Elle propose de considérer le même couplage mais en parallèle.

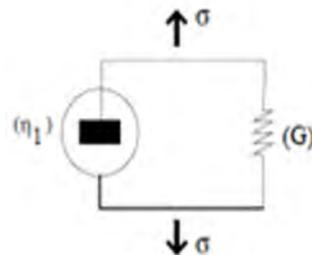


Figure A4 :Schéma du modèle de Kevin-Voigt

La force totale s'écrit alors :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = G\gamma + \eta_1 \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (\text{B.7})$$

Contrairement au modèle de Maxwell, ce modèle n'est pas assez élastique. Une déformation constante non nulle γ entraîne :

$$\sigma = G\gamma \quad (\text{B.8})$$

Il est utilisé en général pour modéliser des solides viscoélastiques.

Ce modèle représente le comportement d'un matériau viscoélastique solide et possédant un comportement totalement élastique sous un effort brutal. Il s'agit d'une élasticité retardée par la présence de l'élément visqueux.

Il ne décrit donc pas la relaxation de contrainte d'un matériau, contrairement au modèle de **Maxwell** qui ne décrit pas le **fluage** qui consiste à imposer au matériau un échelon de contrainte et à observer l'évolution de la déformation en fonction du temps.

3. Le modèle de Jeffrey

Jeffrey (Renardy, 1995) représente une cellule de fluide viscoélastique comme étant constituée, d'une disposition en série d'une masse de viscosité η_1 et d'une cellule de Kelvin-Voigt qui à son tour n'est qu'une disposition en parallèle d'une masse de viscosité η_2 et d'un ressort de constante de raideur G comme décrit au précédent paragraphe.

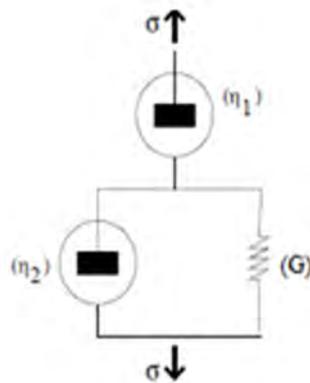


Figure A5 : Schéma du modèle de Jeffrey

L'équation traduisant le modèle monodimensionnel de Jeffrey se met alors sous la forme :

$$\lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \quad (\text{B.9})$$

C. Equations aux perturbations

On obtient les équations perturbées en retranchant des équations du mouvement de l'écoulement perturbée $(u, v, w + \bar{W}_b, p + p_b, \sigma + \sigma_b)$ celles satisfaites par l'écoulement de base $(0, 0, \bar{W}_b; p_b; \sigma_b)$. On a alors :

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} = -\nabla p' - (\vec{W}_b \cdot \nabla) \vec{u}' - (\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{W}_b - (\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}' + \frac{1}{R_e} \Delta \vec{u}' + \nabla \cdot [\sigma(\vec{u}) - \sigma(\vec{W}_b)] \quad (C.1)$$

$$\text{div}(\vec{u}') = 0 \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(\vec{u})}{\partial t} + (\vec{W}_b \cdot \nabla) \sigma' + (\vec{u}' \cdot \nabla) \sigma(\vec{u}) + \sigma(\vec{u}) \mathbf{W}(\vec{u}') - \mathbf{W}(\vec{U}_b) \sigma' + \sigma' \mathbf{W}(\vec{U}_b) - \mathbf{W}(\vec{u}') \sigma + \frac{\sigma'}{W_e} + \\ a \{ D(\vec{W}_b) \sigma' + D(\vec{u}') \sigma + \sigma' D(\vec{W}_b) + \sigma D(\vec{u}') \} = \frac{2\omega}{R_e W_e} D(\vec{u}') \end{aligned} \quad (C.3)$$

Où

$$D(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \partial_r u & \frac{1}{2} \left(r \partial_r (v/r) + \frac{1}{r} \partial_\theta u \right) & \frac{1}{2} (\partial_r w + \partial_z u) \\ \frac{1}{2} \left(r \partial_r (v/r) + \frac{1}{r} \partial_\theta u \right) & \frac{1}{r} (\partial_\theta v + u) & \frac{1}{2} \left(\partial_z v + \frac{1}{r} \partial_\theta w \right) \\ \frac{1}{2} (\partial_r w + \partial_z u) & \frac{1}{2} \left(\partial_z v + \frac{1}{r} \partial_\theta w \right) & \partial_z w \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

$$\mathbf{W}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left(r \partial_r (v/r) - \frac{1}{r} \partial_\theta u \right) & -\frac{1}{2} (\partial_r w - \partial_z u) \\ \frac{1}{2} \left(r \partial_r (v/r) - \frac{1}{r} \partial_\theta u \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \partial_\theta w - \partial_z v \right) \\ \frac{1}{2} (\partial_r w - \partial_z u) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \partial_\theta w - \partial_z v \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (C.5)$$

l'équation C.1 développée donne :

$$\begin{aligned} \partial_t u' = & -u' \partial_r u' - \frac{v'}{r} \partial_\theta u' - w \partial_z u' + \frac{v'^2}{r} - \partial_r p' + \frac{1}{\text{Re}'} \left(\Delta u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \partial_r (r \sigma_{rr}' - r \sigma_{rr}^b) + \\ & \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma_{r\theta}' + \partial_z (\sigma_{rz}' - \sigma_{rz}^b) - \frac{\sigma_{\theta\theta}'}{r} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \partial_t v' = & -u' \partial_r v' - \frac{u'v'}{r} - \frac{v'}{r} \partial_\theta v' - w \partial_z v' - \frac{1}{r} \partial_\theta p' + \frac{1}{\text{Re}'} \left(\Delta v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \partial_r (r \sigma_{\theta r}') + \partial_z \sigma_{\theta z}' + \\ & \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta}' + \frac{\sigma_{r\theta}'}{r} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} \partial_t w' = & -u' \partial_r w' - u' \partial_r w_b' - \frac{v'}{r} \partial_\theta w' - w' \partial_z w' + \partial_z p' + \frac{1}{\text{Re}'} \Delta w' + \frac{1}{r} \partial_r (r \sigma_{zr}') + \frac{1}{r} \partial_\theta \sigma_{z\theta}' - \frac{1}{r} \partial_r (r \sigma_{zr}^b) + \\ & \partial_z \sigma_{zz}' - \partial_z \sigma_{zz}^b \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\partial_r u' + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta v' + \partial_z w' = 0 \quad (\text{C.9})$$

Avec $\text{Re}' = \frac{Re}{1-\omega}$

D. Méthodes numériques

D.1. Fonctions de base et fonctions test

Notre méthode numérique repose sur les fonctions de base utilisées par Meseguer et Trefethen. Ces mêmes fonctions de base ont été utilisées auparavant par Léonnard et Wray. Pour cette méthode, la vitesse de perturbation u est approximée par discrétisation spectrale par la formule :

$$u_s(r, \theta, z; t) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M \alpha_{mnl}^{(1)}(t) \Omega_{mnl}^{(1)}(r, \theta, z) + \alpha_{mnl}^{(2)}(t) \Omega_{mnl}^{(2)}(r, \theta, z) \quad (D.1)$$

$$\Omega_{mnl}^{(1,2)} = \bar{\Omega}_{mnl}^{(1,2)}(r) e^{i(n\theta + l\lambda_0 z)} \quad (D.2)$$

Dans cette expression, les $\bar{\Omega}_{mnl}^{(1,2)}$ sont des champs vectoriels et sont à divergence nulle. Ces fonctions de base sont données dans 4 cas différents selon les valeurs de n et l .

1^{er} cas $n = 0$

$$\bar{\Omega}_{m,l,n}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ rh_m(r) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\Omega}_{m,l,n}^{(2)} = \begin{pmatrix} ik_0 l r g_m(r) \\ 0 \\ \begin{cases} D_+ [r g_m(r)] & \text{si } l \neq 0 \\ h_m(r) & \text{si } l = 0 \end{cases} \end{pmatrix} \quad \text{où } D_+ = D + \frac{1}{r} \quad (D.3)$$

2^{ème} cas $n \neq 0$

$$\bar{\Omega}_{mnl}^{(1)} = \begin{pmatrix} -inr^{\delta-1} g_m(r) \\ D [r^{\delta} g_m(r)] \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\Omega}_{m,l,n}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ik_0 l r^{\delta+1} h_m(r) \\ inr^{\delta} h_m(r) \end{pmatrix} \quad (D.4)$$

$$\delta = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (D.5)$$

La vitesse spectrale u_s est ensuite projetée sur une base de fonctions test. Cette projection est encore dénommée projection de Petrov-Galerkin et les fonctions test sont représentées ci-dessous suivant les valeurs de n et l :

1^{er} cas $n = 0$

$$\bar{\Theta}_{m,l,n}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_m(r) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \bar{\Theta}_{m,l,n}^{(2)} = \begin{pmatrix} -ik_0 l r^2 g_m(r) \\ 0 \\ \begin{cases} D_+ [r^2 g_m(r) + r^3 h_m(r)] & sil \neq 0 \\ rh_m(r) & sil = 0 \end{cases} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (D.6)$$

2^{ème} cas $n \neq 0$

$$\bar{\Theta}_{m,l,n}^{(1)} = \begin{pmatrix} -i\omega^\beta g_m(r) \\ D [r^{\beta+1} g_m(r) + r^{\beta+2} h_m(r)] \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \bar{\Theta}_{m,l,n}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ ik_0 l r^{\beta+2} h_m(r) \\ \begin{cases} [-i\omega^{\beta+1} h_m(r)] & sil \neq 0 \\ r^{1-\beta} h_m(r) & sil = 0 \end{cases} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (D.7)$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (D.8)$$

T_{2m} est le polynôme de Tchebychev de degré $2m$. Ce polynôme est donné par la formule

$$T_{2m} = \cos(2m \times ar \cos r) \quad (D.9)$$

On définit ainsi les expressions h_m et g_m de la manière suivante:

$$h_m = (1-r^2)T_{2m} \text{ et } g_m = (1-r^2)h_m \quad (D.10)$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ est le poids de la quadrature de Gauss-Lobatto. Il permet de normaliser

ou d'avoir un calcul exact du calcul de l'intégrale suivant r . L'une des avantages de l'utilisation des fonctions de base à divergence nulle est qu'elle permet d'éliminer le terme ∇p .

D.2. Dérivée numérique

Pour dériver la vitesse spectrale u_s par rapport à r , θ et z , on peut utiliser les matrices de dérivation spatiale. Ces matrices sont en détail dans Meseguer & Trefethen 2001b. La composante radiale est discrétisée en tenant compte des points de Gauss-Lobatto :

$$r_k = -\cos\left(\frac{\pi k}{N_r}\right) \text{ avec } k = 0, 1, 2, \dots, N_r \text{ et } N_r \text{ étant impair} \quad (D.11)$$

$$Dr_{ij}^r = \begin{cases} (1+2N_r^2)/6 & \text{si } i = j = 0 \\ -(1+2N_r^2)/6 & \text{si } i = j = N_r \\ \frac{r_i}{2(1-r_i^2)} & \text{si } i = j \\ (-1)^{i+j} \frac{c_i}{c_j(r_i-r_j)} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (D.12)$$

Où $c_j = 1$ pour $0 < j < N_r$ et $c_0 = c_{N_r} = 2$. Les fonctions à dériver par rapport à r étant soit paires ou impaires de r , on peut considérer les points de Gauss-Lobatto dans $[0,1]$. On définit alors les matrices de dérivation D_r^e (respectivement D_r^o) pour calculer la dérivée d'une fonction paire quelconque f_e (respectivement impaire f_o)

$$(D_r^e)_{ij} = (D_r)_{ij} + (D_r^e)_{iN_r-j} \quad i, j = \frac{N_r+1}{2}, \dots, N_r \quad (D.13)$$

$$\frac{d}{dr} \bar{\Omega}_{mnl} = D_r \otimes \bar{\Omega}_{mnl} \quad (D.14)$$

$$\text{Avec } D_r \otimes = \begin{pmatrix} D_r^o & 0 & 0 \\ 0 & D_r^o & 0 \\ 0 & 0 & D_r^e \end{pmatrix}, \text{ si } n \text{ est pair} \quad (D.15)$$

$$D_r \otimes = \begin{pmatrix} D_r^e & 0 & 0 \\ 0 & D_r^e & 0 \\ 0 & 0 & D_r^o \end{pmatrix}, \text{ si } n \text{ est } im \text{ pair} \quad (D.16)$$

Pour la discrétisation azimutale, on a :

$$\theta_l = \frac{2\pi l}{N_\theta}, \quad l = 0, \dots, N_\theta - 1 \quad (D.17)$$

La matrice de dérivation utilisée pour cette variable est :

$$(D_\theta)_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{2 \sin \frac{(i-j)\pi}{N_\theta}} & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (D.18)$$

Où N_θ est choisi comme étant impair (Fonberg, 1996). En fin pour la coordonnée axiale, le maillage suivant cette dernière est donné par :

$$z_j = \frac{2\pi}{N_z} j; \quad j = 0, \dots, N_z - 1 \quad (D.19)$$

$$(D_z)_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{2 \sin \frac{(i-j)\pi}{N_z}} & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (D.20)$$

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



Etude théorique et numérique des instabilités de l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique d'axe horizontal

Résumé :

Dans cette thèse, l'objectif est de fournir, par une étude théorique et numérique, une analyse de la stabilité d'un fluide (viscoélastique) en écoulement dans une conduite cylindrique d'axe horizontal. Les écoulements ouverts, comme les écoulements cisailés ont été considérés dans ces travaux. Pour l'étude numérique de ce problème, un code pseudo-spectral de type Petrov-Galerkin a été développé. Une étude linéaire de la stabilité a été effectuée. Pour cette étude, on s'est surtout intéressé à la stabilité au temps long. La stabilité au temps long consiste à une décomposition des perturbations sous la forme de modes globaux s'amplifiant exponentiellement avec le temps. Les résultats qui ressortent de cette étude montrent que l'écoulement d'un fluide newtonien est linéairement stable tandis que celui d'un fluide viscoélastique n'est pas toujours stable.

Mots-clés : Stabilité ; Ecoulement cylindrique ; Fluide viscoélastique ; Modèle d'Oldroyd-B

.....

Theoretical and numerical study of the instabilities of the flow of a viscous fluid in a cylindrical pipe of horizontal axis

Abstract:

In this thesis, the objective is to provide, by a theoretical and numerical study, an analysis of a stability_of a flowing fluid in a cylindrical pipe of horizontal axis. Open flows, such as shear flow, were considered in this work. For the numerical study of this problem, a pseudo-spectral code of Petrov-Galerkin type has been developed. A linear study of the stability was carried out. For this study, the focus was on long time stability. Long-time stability consists of a decomposition of disturbances in the form of global modes that increase exponentially with time. The results that emerge from this study show that the Newtonian flow is linearly stable while that of a viscoelastic is not always stable.

Key-words : Stability ; Pipe flow ; Viscoelastic fluid ; Oldroyd-B model