UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Année : 2015 – 2016 N70

THESE DE DOCTORAT UNIQUE

Présentée par
EL HADJI MALICK BA

Pour l'obtention du grade de Docteur de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar (Sénégal)

Mention : Mathématiques et Modélisation

Spécialité : Analyse, Statistique et Applications

STABILISATION NON LINEAIRE DE SYSTEMES ELASTODYNAMIQUES COUPLES

Soutenue publiquement le 05 mars 2016 devant le jury composé de :

Hamidou DATHE Professeur U C A D (Sénégal) Président

Ibrahima MBAYE Maître de Conférences Université de Thiès Rapporteur

Somdouda SAWADOGO Maître de Conférences Université de Ouagadougou Rapporteur

Idrissa LY Maître de Conférences U C A D (Sénégal) Rapporteur

Benjamin MAMPASSI Professeur U C A D (Sénégal) Examinateur

Gabriel Birame NDIAYE Maître de Conférences U C A D (Sénégal) Examinateur

Abdoulaye SENE Maître de Conférences U C A D (Sénégal) Directeur de thèse

STABILISATION NON LINEAIRE DE SYSTEMES ELASTO-DYNAMIQUES COUPLES.

ELHADJI MALICK BA

15 avril 2016

Résumé

Dans ce travail, on étudie le comportement asymptotique de l'énergie associée à la solution de quelques modéles de couplage d'équations d'évolution. D'une part les systèmes considérés sont constitués d'une équation élastodynamique, et d'autre part d'une équation de la chaleur et d'une équation des ondes. Les feedbacks utilisés sont non linéaires ou de type mémoire. Par la méthode des multiplicateurs et une fonction de Lyapounov, on établit des estimations conduisant à des inégalités intégrales appropriées. On en déduit pour les trois systèmes considérés, divers types de décroissance, notamment exponentielle.

Mots clés : Thermoélasticité, estimation de stabilité, Young, Lamé, énergie, chaleur, ondes.

Abstract

In this work, we study the asymptotic behaviour of the associated energy at the solution of some couplage models of evolution equations. One part, the systems on which, we take account, are shaped as an elastodynamic equation, and for an another part, a heat equation and a wave equation.The used feedbacks are nonlinear or memory type. By the multiplier method and a lyapounov function, we establish estimations which lead to the appropried inegalities integrals. We deduce that for the three considered systems, many types of cases of decay energy, precisely exponentially.

Keywords : Thermoelasticity, estimation of stability, Young, Lamé, energy, heat, waves.

Année universitaire 2015 - 2016

Dédicaces

Je dédie ce travail

A Cheikh Seydi Mouhamadou Moustapha Sy Jamil,
fils aîné de Serigne Babacar Sy,

A tous mes parents, à ma mère Sokhna Sylla DIENG et à mon feu père Serigne Cheikh BA,

A mon homonyme Seydi Elhadji Malick SY,

A Elhadji Mansour SY Jamil,

A mes enfants,

A mes regrettés chers frères et soeurs

Alassane BA, Lamine BA et Abibou BA, Fatou BA et Mame Marième SECK.

Remerciements

Les pages ici présentées sous le nom d'un seul individu sont en fait le résultat des efforts de plusieurs personnes. Je voudrais rendre hommage à toutes ces personnes qui m'ont permis d'aller jusqu'au bout de mon aventure, sans lesquelles cette thése sommeillerait encore dans nos projets et dans nos souhaits. Je pense tout d'abord à mon directeur de thése Monsieur Abdoulaye SENE, Maitre de conférences, à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar (Sénégal). Son soutien a été total et constant. J'ai accepté et suivi les recommandations pertinentes pour que tout l'effort qu'il a consenti à mon endroit soit enfin récompensé, sanctionné par le résultat que voici. La rédaction de cette thèse nous a donné l'occasion de découvrir le Maitre, un enseignant dont les fruits ne sont ici que très imparfaitement illustrés. Qu'il en soit satisfait. Une mention spéciale de toutes mes sincères gratitudes envers Monsieur Hamidou DATHE, Professeur à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, d'avoir accepté de présider le jury. Je suis très reconnaissant envers Monsieur Ibrahima MBAYE, Maître de conférences, à l'Université de Thiès (Sénégal), Monsieur Somdouda SAWADOGO, Maître de conférences, à l'Université Ouagadougou (Burkina Faso) et à Monsieur Idrissa LY, Maître de conférences, à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Mes remerciements vont également aux examinteurs, Monsieur Benjamin MAMPASSI, Professeur à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar et à Monsieur Gabriel Birame NDIAYE, Maître de conférences, à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail. Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes qui m'ont aidé et donné des conseils dont mes amis : Cheikh Tidiane BA, Cheikh Mbacké DIOP, Papa Baka DIAGNE, Mamadou NIANG, Ibrahima DIENG, Elhadji Malick SY, Jean Baptiste NDIAYE, Malick NDIAYE avec qui j'ai passé d'agréables moments dans la vie d'étudiant et de professeur de lycée. Je remercie très sincèrement tous les collègues et autorités de mon établissement le lycée John Fitzgerald Kennedy de Dakar, je veux nommer Madame SARR Fatoumata Sow Proviseur et Madame SOW Aissatou SY Censeur des Etudes, qui m'ont mis dans des conditions favorables. Que Mesdames qui m'ont

constamment compris, encouragé et aidé, veuillent bien trouver ici l'expression de notre sincère gratitude. Nous pensons notamment à Bintou SECK et Astou SAMB. Je ne saurai terminer sans remercier la secrètaire du département de Mathématiques et Informatique Madame MBAYE, de l'aide apportée à la réalisation de cette thése.

Table des matières

1 Introduction générale **10**
- **1.1 Problèmatique** 10
  - **1.1.1 Couplage avec équation de la chaleur** 11
  - **1.1.2 Couplage avec équation hyperbolique** 14
- **1.2 Organisation du manuscrit et résultats** 14

2 Résultats préliminaires **18**
- **2.1 Problèmes d'évolution** 18
  - **2.1.1 Opérateurs maximaux monotones** 18
  - **2.1.2 Semi groupes** 19
  - **2.1.3 Equation abstraite** 20
- **2.2 Contrôlabilité exacte** 22
- **2.3 Stabilisation non linéaire** 28

3 Stabilisation non linéaire d'un système thermoélastique isotrope **33**
- **3.1 Introduction** 33
- **3.2 Existence et unicité de la solution** 35
- **3.3 Stabilisation du système** 39

4 Système avec feedback frontière de type mémoire **52**
- **4.1 Modèle** 52
- **4.2 Energie du système** 54
- **4.3 Stabilisation exponentielle** 56

5 Couplage avec équation des ondes **63**
- **5.1 Existence et Unicité de la solution du problème** . . 64
  - **5.1.1 Réduction d'ordre** 65

5.1.2 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}$ 67
5.2 Stabilisation du système 69
5.2.1 Décroissance de l'énergie du système 69
5.2.2 Stabilité du système 70

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Problèmatique

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et A un opérateur sur $\mathcal{H}$. On considère l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au &= 0 \text{ dans } \mathcal{H}, \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

avec u_0 une donnée initiale. On suppose que A vérifie les conditions d'existence et d'unicité de solution de (1.1). Pour la solution u, on associe une énergie

$$E(u,t) = E(t) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Cette énergie peut être constante mais pour la plupart des systèmes, elle est décroissante. Dans ce cas , on cherche à stabiliser le système en y rajoutant un feedback (ou rétroaction) qui fait revenir des sorties dans le système comme variables. L'objectif étant d'amortir rapidement le système, quelque soit son état d'origine

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ régulière, un corps élastique, homogène et isotrope occupant Ω. Soit $u(x,t) =$

$(u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$ **le vecteur déplacement. On considère l'opérateur de Lamé**

$$\Delta_e u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \mathrm{div}\, u$$

où $'$ désigne la dérivée par rapport au temps. Les coefficients de Lamé λ et μ vérifient

$$\mu > 0 \ \textbf{et} \ \ n\lambda + (n+1)\mu > 0,$$

Δ, ∇ **et** div **représentent les opérateurs suivants laplacien, gradient et la divergence.**
On considère l'équation élastodynamique (sans force extérieure)

$$u^{''}(x,t) - \Delta_e u(x,t) = 0 \tag{1.2}$$

Dans cette thèse, on étudie la stabilisation de systèmes obtenus par couplage de (1.2) avec une équation de la chaleur puis avec une équation des ondes, avec des feedbacks qui seront pour la plupart non linéaires.

1.1.1 Couplage avec équation de la chaleur

Soit le système

$$\begin{cases} u'' - \Delta_e u + \alpha \nabla \theta & = \ 0 \ \textbf{dans} \ = \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta \theta + \beta \mathrm{div}\, u' & = \ 0 \ \textbf{dans} \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0, \ u'(\cdot,0) = u_1 \ \theta(\cdot,0) = \theta_0 & \quad \textbf{dans} \ \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

α **et** β **étant strictement positifs.**
L'énergie associée à (1.3) peut être définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \Big\{ |u'(x,t)|^2 + \mu |\nabla u(x,t)|^2 + (\lambda + \mu) |\mathrm{div}\, u(x,t)|^2 \Big\} dx.$$

La notation utilisée est la suivante :

$$|\nabla u(x,t)|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|^2.$$

Avec les conditions aux limites

$$u = 0, \;\; \theta = 0 \;\; \textbf{sur} \;\; \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{1.4}$$

on a

$$E'(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \int_\Omega |\nabla\theta(x,t)|^2 dx.$$

L'énergie est décroissante et en plus elle tend vers 0 **([12]). Cependant, la convergence uniforme vers** 0 **dépend de la nature de** Ω **([20]). Pour assurer la convergence uniforme, Liu ([21]) a introduit un feedback linéaire prenant en compte la composante élastique** u **et agissant sur une partie de la frontière. Précisément, il remplace (1.4) par**

$$\begin{aligned} u &= 0, \;\; \textbf{sur} \quad \partial\Omega_1 \times \mathbb{R}^+ \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\nu + a(m\cdot\nu)u + m\cdot\nu u' &= 0 \;\; \textbf{sur} \;\; \partial\Omega_2 \times \mathbb{R}^+, \\ \theta &= 0 \;\; \textbf{sur} \;\; \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{1.5}$$

avec $m(x) = x - x_0$; $x \in \mathbb{R}^n$ **(**$x_0 \in \mathbb{R}^n$ **fixé),**

$$\partial\Omega_1 = \{x \in \partial\Omega : m(x)\cdot\nu(x) \leq 0\}, \tag{1.6}$$

$$\partial\Omega_2 = \{x \in \partial\Omega : m(x)\cdot\nu(x) > 0\}, \tag{1.7}$$

et a **une fonction régulière. Par ces conditions aux limites, Liu a établi une décroissance exponentielle de l'énergie , c'est à dire l'existence de deux constantes positives** K **et** w **telles que**

$$E(t) \leq KE(0)e^{-wt}.$$

Il est à noter que, avec les conditions (1.4), il a un terme additionnel

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_2} am\cdot\nu|u|^2 d\sigma dt$$

dans l'expression de l'énergie.

Dans ([20]), les auteurs LEBEAU G. ; ZUAZUA E., ont étudié le cas de feedback frontière non linéaire

$$\begin{aligned} u &= 0, \ \textbf{sur} \quad \partial\Omega_1 \times \mathbb{R}^+ \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\nu + a(m\cdot\nu)u + m\cdot\nu g(u') &= 0 \quad \textbf{sur } \partial\Omega_2 \times \mathbb{R}^+, \\ \theta &= 0 \ \textbf{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{1.8}$$

et ont établi des décroissances exponentielles et polynomiales pour certaines non linéarités de g et avec des hypothèses sur la fonction a. Leur technique combine les multiplicateurs et la méthode de Lyaponov.

Dans ([13]), les auteurs HEMINNA A.,NICAISE S.,SENE A., ont obtenu les mêmes types de résultats avec le cas anisotropique.
D'autres travaux plus récents ont eu lieu pour le même type de système mais de type III, c'est à dire avec l'introduction du flux de chaleur q, en plus de u et de θ ([26],[36]...)

Dans cette thèse, nous nous intéressons d'abord au cas de feedbacks non linéaires frontìeres et internes (avec une classe de non linéarité plus large). Ensuite, toujours avec le couplage avec équation de la chaleur, nous allons étudier le cas d'un feedback frontière linéaire avec mémoire. Concernant ces types de feedbacks, des modèles existent dans la littérature. On peut citer entre autre [2, 27, 31] .
Dans [2, 27], les auteurs ALAPARA T.A., MESSAOUDI S.A.,MESSAOUDI S.A., SOUFYANE A., ont étudié la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ et,

$$u(t)+\int_0^t k(t-s)[\mu\frac{\partial u(s)}{\partial \nu}u(s)+(\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u(s)\nu]ds+au'(t)=0 \quad \textbf{sur}\partial\Omega_2\times\mathbb{R}^+.$$

Nous nous sommes intéressés à des feedbacks du type

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu}+(\lambda+\mu)\mathrm{div}\,(u)\nu+am\cdot\nu u+\int_0^t k(t-s)u'ds+m\cdot\nu u'=0 \ \textbf{sur} \quad \partial\Omega_2\times\mathbb{R}^+$$

Les résultats de cette partie sont à paraître dans ([4]).

1.1.2 Couplage avec équation hyperbolique

Dans les réferences ([9]) et ([10]) les auteurs se sont intéressés aux systèmes

$$\begin{cases} u'' - \Delta_e u + \beta \nabla \theta & = \ 0 \ \textbf{dans} \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta'' - \alpha \Delta + \beta \mathrm{div}\, u + \gamma \theta + r\theta' & = \ 0 \ \textbf{dans} \ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0, \ u'(\cdot,0) = u_1 \ \theta(\cdot,0) = \theta_0 \quad \textbf{dans} \ \Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

(r une constante positive) avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u &= 0, \ \textbf{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ B\theta &= 0 \ \textbf{sur} \ \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{1.10}$$

où $B\theta = \theta$ ou $\frac{\partial \theta}{\partial \nu}$.
Ils ont pu établir, pour de faibles valeurs de β, la convergence uniforme vers 0 de l'énergie associée .

Nous nous sommes intéressés au cas de conditions aux limites

$$\begin{aligned} u &= 0, \ \textbf{sur} \quad \partial\Omega_1 \times \mathbb{R}^+ \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda + \mu)\mathrm{div}\, u.\nu + b\theta\nu + g(u') &= 0 \ \textbf{sur} \ \partial\Omega_2 \times \mathbb{R}^+, \\ \theta &= 0 \ \textbf{sur} \ \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{1.11}$$

avec g une fonction non linéaire.

1.2 Organisation du manuscrit et résultats

La suite du mémoire comporte quatre chapitres.

Dans le Chapitre 2, nous donnons d'abord des généralités sur les équations d'évolution dans les espaces de Hilbert, les techniques

de semi groupes.
Ensuite nous rappelons une méthode due à ([30]) qui permet l'étude des feedbacks non linéaires par des techniques de linéarisation.

Au Chapitre 3, nous avons étudié le comportement asymptotique de la
solution du système

$$\begin{cases} u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, u + \alpha\nabla\theta + f(u') = 0 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta div u' = 0 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1\times\mathbb{R}^+, \\ \mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\nu + a(m\cdot\nu)u + m\cdot\nu g(u') = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2\times\mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0)=u_0,\ u'(\cdot,0)=u_1\ \theta(\cdot,0)=\theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

et établi, avec des hypothèses géométriques classiques, des types de décroissance pour des fonctions f et g vérifiant

$$|f(x)| \leq \begin{cases} C[1+|x|^{\frac{n+2}{n-2}}] & \text{si } n\geq 3, \\ C[1+|x|^{\sigma'}] & \text{si } n\leq 2, \end{cases} \tag{1.12}$$

,

$$|g(x)| \leq \begin{cases} C[1+|x|^{\frac{n}{n-2}}] & \text{si } n\geq 3, \\ C[1+|x|^{\sigma}] & \text{si } n\leq 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

et les inégalités

$$\begin{aligned} &g(x)\cdot x \geq l|x|^2\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ |x|\geq 1, \\ &|x|^2+|g(x)|^2 \leq G(g(x)\cdot x)\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ |x|\leq 1, \\ &|x|^2+|f(x)|^2 \leq G(f(x)\cdot x)\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ |x|\leq 1, \end{aligned}$$

où l est une constante positive et G une fonction concave définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $G(0)=0$. (Voir Théorème 3.3.1).

Remarquons que cette classe de non linéarité est plus large que celle de ([20]). Aussi dans le cas où $f = 0$, et $g \neq 0$, on peut retrouver le Théorème 2.2 de ([20]).
Les résultats de ce chapitre sont publiés dans ([3])

Le Chapitre 4 est consacré à l'étude du même système mais avec un feedback de type mémoire, c'est à dire avec des conditions aux limites du type

$$\begin{cases} u & = \ 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\,(u)\nu + am\cdot\nu u + \int_0^t k(t-s)u'ds + m\cdot\nu u' & = \ 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0,\ u'(\cdot,0) = u_1,\ \theta(\cdot,0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

avec k un noyau vérifiant des propriétés classiques. Pour ce type de feedback, nous avons pu établir une décroissance exponentielle de l'énergie associée.

En fin, au Chapitre 5, nous considérons au cas de couplage avec une équation
des ondes suivante

$$\begin{cases} u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla divu - b\nabla\theta & = \ 0 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \theta'' - \Delta\theta + \gamma\theta + \theta' + b\,divu & = \ 0 \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} & = \ 0 \text{ sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u & = \ 0 \text{ sur } \partial\Omega_1\times\mathbb{R}^+, \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)divu.\nu + b\theta\nu + g(u') & = \ 0 \text{ sur } \partial\Omega_2\times\mathbb{R}^+, \\ u(.,0) = u_0,\ u'(.,0) = u_1,\ \theta(.,0) = \theta_0,\ \theta'(.,0) = \theta_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

Pour ce système, nous avons pu montrer, par des inégalités intégrales appropriées, une décroissance exponentielle de l'énergie pour de

faible valeur du paramètre de couplage b.

Chapitre 2

Résultats préliminaires

Dans ce premier chapitre, nous donnons quelques résultats préliminaires sur les équations d'évolution et les techniques de stabilisation non linéaires. Pour plus de détails, voir entre autre ([6],[14], [31],[32], [39]).

2.1 Problèmes d'évolution

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\langle , \rangle$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.

2.1.1 Opérateurs maximaux monotones

Définition 2.1.1 ***Un opérateur non borné dans $\mathcal{H}$ est la donnée d'un couple*** $(\mathcal{D}(A), A)$ ***où*** $\mathcal{D}(A)$ ***est un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}$ et*** A ***une application linéaire de*** $\mathcal{D}(A)$ ***dans $\mathcal{H}$. Le sous espace*** $\mathcal{D}(A)$ ***est appelé domaine de*** A***.***

Dans la suite, on écrira A pour désigner $(\mathcal{D}(A), A)$

Définition 2.1.2 ***(i) On dit que*** A ***est monotone si pour tout*** $x \in \mathcal{D}(A)$**,** $\langle Ax, x\rangle \geq 0$**.**
(ii) On dit que A ***est maximal si*** $Im(I + A) = \mathcal{H}$.

Le point (ii) peut se reécrire de la manière suivante .
$\forall y \in \mathcal{H}$**,** $\exists x \in \mathcal{D}(A)$**, tel que** $x + Ax = y$.

Définition 2.1.3 ***On dit qu'un opérateur non borné*** A ***est fermé si*** $\{(x, Ax) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, x \in \mathcal{D}(A)\}$ ***est fermé dans*** $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$***. C'est à dire que si une suite*** x_n ***de*** $\mathcal{D}(A)$ ***vérifie*** $x_n \to x$ ***dans*** $\mathcal{H}$ ***et*** $Ax_n \to y$ ***dans*** $\mathcal{H}$ ***alors,*** $x \in \mathcal{D}(A)$ ***et*** $y = Ax$.

Proposition 2.1.1 ***Si*** A ***est maximal monotone alors :***
(i) $\mathcal{D}(A)$***est dense dans*** $\mathcal{H}$***.***
(ii) A ***est fermé.***
iii) Pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ ***est bijectif de*** $\mathcal{D}(A)$ ***sur*** $\mathcal{H}$ ***et*** $(I + \lambda A)^{-1}$ ***est continu sur*** $\mathcal{H}$ ***et on a*** $||(I + \lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$.

2.1.2 Semi groupes

Définition 2.1.4 ***On appelle semi groupe de contraction sur*** $\mathcal{H}$ ***une famille d'opérateurs linéaires continues*** $(S(t))_{t\geq 0}$ ***dans*** $\mathcal{H}$ ***vérifiant :***

1. $||S(t)|| \leq 1$***,***
2. $S(t + s) = S(t)S(s) = S(t)oS(s)$ $\forall t, s \geq 0$***,***
3. $S(0) = I$***,***
4. $\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u$ $\forall u \in H$***.***

Définition 2.1.5 ***Si*** $(S(t))_{t\geq 0}$ ***est un semi groupe de contraction dans*** $u \in \mathcal{H}$***, l'opérateur non borné*** $(\mathcal{D}(A), A)$ ***défini par :***

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in \mathcal{H} : \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} \quad \textbf{\textit{existe dans}}\ \mathcal{H} \right\}$$

et

$$\left\{ Au = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

est appelé générateur infinitésimal du semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$***.***

Proposition 2.1.2 ***Soit*** $(\mathcal{D}(A), A)$ ***un opérateur non borné dans un espace de Hilbert*** $\mathcal{H}$***. Les propriétés suivantes sont équivalentes***

1. $(\mathcal{D}(A), A)$ ***est maximal monotone.***

2. $(\mathcal{D}(A), -A)$ ***est le générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction.***

Proposition 2.1.3 ***Soit*** $S(t)_{t\geq 0}$ ***un semi groupe sur*** $\mathcal{H}$ ***de générateur*** A***. Alors :***
(i) $\mathcal{D}(A)$ ***est dense dans*** $\mathcal{H}$***,***
(ii) A ***est fermé***
(iii) $\forall x \in \mathcal{D}(A),\ S(.)x \in \mathcal{C}([0,+\infty[, \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty[, \mathcal{H})$ ***et on a***

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$$

2.1.3 Equation abstraite

On considère maintenant le problème d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au &= 0 \text{ dans } \mathcal{H},\ t \geq 0, \\ \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Définition 2.1.6 ***Soit*** $u_0 \in \mathcal{D}(A)$***. Une solution classique de (2.1) est une fonction*** $u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, \mathcal{H})$ ***vérifiant***
1) $u(0) = u_0$***,***
2) $u(t) \in \mathcal{D}(A)\ \forall t > 0$***,***
3) u ***différentiable dans*** $\mathcal{H}$***,***
4) $\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0\ \forall t > 0$***.***

Théorème 2.1.1 ***Soit*** A ***un opérateur maximal monotone sur*** $\mathcal{H}$***. Alors pour tout*** $u_0 \in \mathcal{D}(A)$***, il existe une unique fonction*** $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[, \mathcal{H}) \bigcap \mathcal{C}([0,+\infty[, \mathcal{D}(A))$ ***solution de (2.1).***

Remarque 2.1.1 ***Si*** $(S(t))_{t\geq 0}$ ***est un semi groupe de contraction et*** $u \in \mathcal{H}$***,*** $S(.)u \in \mathcal{C}([0,+\infty[, \mathcal{H})$***. La solution classique (ou forte) de (2.1) s'écrit alors***

$$u(t) = S(t)u_0.$$

Si la donnée initiale est dans $\mathcal{H}$ ***mais pas dans*** $\mathcal{D}(A)$ ***nous allons définir une notion de solution (faible)***

Proposition 2.1.4 ***Soit*** $(\mathcal{D}(A), A)$ ***un opérateur maximal monotone dans*** $\mathcal{H}$***,*** $(S(t))_{t\geq 0}$ ***le semi groupe généré par*** $-A$***. Pour*** $u_0 \in \mathcal{H}$***, on pose***

$$u(t) = S(t)u_0.$$

Alors il existe un espace de Banach Y ***et un opérateur non borné*** $(\mathcal{D}(B), B)$ ***dans*** Y ***tel que :***
$\mathcal{H}$ ***est un sous espace dense de*** Y
$\mathcal{D}(B) = \mathcal{H}$ ***et*** $By = Ay$ ***pour tout*** $y \in \mathcal{D}(A)$
$(\mathcal{D}(B), B)$ ***est maximal monotone dans*** Y***,***
Si $(R(t))_{t\geq 0}$ ***est le semi groupe généré par*** $(\mathcal{D}(B), B)$ ***dans*** Y***, alors*** $S(t)u_0 = R(t)u_0$***,*** u ***est différentiable dans*** Y ***et*** $\dfrac{du(t)}{dt} + Bu(t) = 0$ ***dans*** Y***.***

Définition 2.1.7 ***Pour*** $u_0 \in \mathcal{H}$***, la fonction*** $u(t) = S(t)u_0$ ***est appelée solution faible de (2.1).***

Pour le cas des équations linéaires non homogènes du type

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au &= f(t) \text{ dans } t \geq 0 \\ \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.1.5 ***Si*** $u_0 \in \mathcal{D}(A)$***,*** $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathcal{D}(A))$***, alors (2.2) admet une solution*** $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathcal{D}(A)) \bigcap \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathcal{H})$ ***et***

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Si $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ ***et*** $f \in L^1(0, +\infty; \mathcal{D}(A))$ ***alors (2.2) admet une solution unique***

$u \in \mathcal{C}(0, +\infty, \mathcal{D}(A)) \bigcap \mathcal{C}^1(0, +\infty, \mathcal{H})$ ***et***

$$\begin{aligned} ||u(t)||_{\mathcal{D}(A)} &\leq ||u_0||_{\mathcal{D}(A)} + \int_0^T ||f(s)||_{\mathcal{D}(A)} ds \\ ||\frac{du(t)}{dt}||_{\mathcal{H}} &\leq ||u_0||_{\mathcal{D}(A)} + \int_0^t ||f(s)||_{\mathcal{D}(A)} ds \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas semi linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au &= F(u) \ , \ t \geq 0 \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Proposition 2.1.6 ***On suppose que A est maximal monotone et qu'il existe une constante L telle que***

$$\|F(u) - F(v)\| \leq L\|u - v\|.$$

Alors, si $u_0 \in \mathcal{H}$ ***(2.3) admet une solution*** $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathcal{H})$ ***vérifiant***

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds.$$

2.2 Contrôlabilité exacte

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement quelques techniques de stabilisation avec feedbacks nonlinéaires. Pour plus de détails, voir [14],[30].

Soient $\mathcal{H}$**,** $\mathcal{V}$ **deux espaces de Hilbert séparables munis des produits scalaires** $(.,.)_{\mathcal{H}}$**,** $(.,.)_{\mathcal{V}}$ **et tels que** $\mathcal{V}$ **soit dense dans** $\mathcal{H}$ **avec injection continue. On identifie** $\mathcal{H}$ **avec son dual** $\mathcal{H}'$ **et on a le diagramme suivant :**

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{V}'.$$

Considérons un opérateur linéaire non borné A_1 **de** $\mathcal{V}$ **dans** $\mathcal{V}'$ **et une forme (non linéaire)** B **de** $\mathcal{V}$ **dans** $\mathcal{V}'$**. On définit deux opérateurs (non linéaires)** $\mathcal{A}^+$ **et** $\mathcal{A}^-$ **de la manière suivante :**

$$D(\mathcal{A}^{\pm}) = \{v \in \mathcal{V} | (\pm A_1 + B)v \in \mathcal{H}\}, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{A}^{\pm}v = (\pm A_1 + B)v, \forall v \in D(\mathcal{A}^{\pm}). \tag{2.5}$$

On fera les hypothèses suivantes :

$$\mathcal{A}^+ \text{ est maximal monotone,} \tag{2.6}$$
$$\mathcal{A}^- \text{ est maximal monotone,} \tag{2.7}$$
$$D(\mathcal{A}^+) \text{ est dense } \mathcal{H}, \tag{2.8}$$
$$D(\mathcal{A}^-) \text{ est dense } \mathcal{H}, \tag{2.9}$$
$$\langle A_1 u, u\rangle = 0, \forall u \in \mathcal{V}, \tag{2.10}$$
$$\langle Bu, u\rangle \geq 0, \forall u \in \mathcal{V}, \tag{2.11}$$

où $\langle ., .\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$. En utilisant les semi groupes non linéaires [39], on montre que l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_1 u + Bu = 0 \text{ dans } \mathcal{H}, t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.12}$$

a une solution unique (faible) $u \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$. Si de plus $u_0 \in D(\mathcal{A})$, le problème (2.12) admet une unique solution (forte)

$$u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A}))$$

et telle que $u(t) \in D(\mathcal{A})$, pour tout $t \geq 0$. L'énergie du système, définie par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}||u(t)||^2_{\mathcal{H}}, \tag{2.13}$$

est décroissante et pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$, on a

$$\mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T) = \int_S^T \langle Bu(t), u(t)\rangle \, dt, \tag{2.14}$$

pour tout S, T tels que $0 \leq S < T < \infty$.
Ce résultat est encore valable pour $\mathcal{A}^-$ (avec la même expression pour l'énergie et la même identité (2.14) pour $u_0 \in D(\mathcal{A}^-)$).

On introduit la notion (inégalité intégrale) suivante :

Définition 2.2.1 ***On dit que le couple*** (A_1, B) ***vérifie l'estimation de stabilité s'il existe*** $T > 0$ ***et deux constantes positives*** C_1, C_2 ***(qui***

dépendent de T***) avec*** $C_1 < T$ ***telles que***

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt, \tag{2.15}$$

pour toute solution u ***de (2.12).***

Cette définition est équivalente à la suivante :

Lemme 2.2.1 ***Le couple*** (A_1, B) ***vérifie l'estimation de stabilité si et seulement si il existe*** $T > 0$ ***et une constante positive*** C ***(qui dépend de*** T***) telle que***

$$\mathcal{E}(T) \leq C \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt, \tag{2.16}$$

pour toute solution u ***de (2.12).***

Preuve : Supposons que le couple (A_1, B) **vérifie l'estimation de stabilité Comme** $\mathcal{E}(t)$ **est décroissante, l'estimation (2.15) implique**

$$T\mathcal{E}(T) \leq \int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt.$$

Par l'identité (2.14) on a

$$T\mathcal{E}(T) \leq C_1\mathcal{E}(T) + (C_1 + C_2) \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt.$$

Ce qui donne (2.16) en faisant le choix $C = \frac{C_1+C_2}{T-C_1}$**.**

Réciproquement, si (2.15) est vérifiée, avec la monotonie de $\mathcal{E}$ **on peut écrire**

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq T\mathcal{E}(0).$$

De même, avec l'identité (2.14) on a

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq \frac{T}{2}\mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}(\mathcal{E}(T) + \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt).$$

En utilisant (2.16) on obtient

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq \frac{T}{2}\mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}(1+C)\int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt),$$

qui n'est rien d'autre que (2.15). ∎

On a le théorème suivant, qui donne la décroissance de l'énergie de (2.12) :

Théorème 2.2.1 ***Le couple*** (A_1, B) ***satisfait l'estimation de stabilité si et seulement si il existe deux constantes positives*** M ***et*** ω ***telles que***

$$\mathcal{E}(t) \leq Me^{-\omega t}\mathcal{E}(0), \tag{2.17}$$

pour toute solution u ***de (2.12).***

Preuve du Théorème 2.2.1 : Supposons que l'estimation de stabilité est vraie, c'est à dire de manière équivalente (par le lemme 2.2.1), que (2.16) est vérifié. L'identité (2.14) implique

$$\mathcal{E}(T) \leq C(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)).$$

Cette estimation est équivalente à

$$\mathcal{E}(T) \leq \gamma\mathcal{E}(0),$$

avec $\gamma = \frac{C}{1+C}$ **tel que** < 1**. En appliquant cet argument sur** $[(m-1)T, mT]$**, pour** $m = 1, 2, \cdots$ **(ce qui est possible, le système étant invariant par translation), on obtient**

$$\mathcal{E}(mT) \leq \gamma\mathcal{E}((m-1)T) \leq \cdots \leq \gamma^m\mathcal{E}(0),\ m = 1, 2, \cdots$$

Par conséquent on a

$$\mathcal{E}(mT) \leq e^{-\omega mT}\mathcal{E}(0),\ m = 1, 2, \cdots$$

avec $\omega = \frac{1}{T}\ln\frac{1}{\gamma} > 0$**.**
Pour un t **positif quelconque, il existe** $m = 1, 2, \cdots$ **tel que**
$(m-1)T < t \leq mT$ **et avec la décroissance de l'énergie** $\mathcal{E}$**, on conclut**

que

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}((m-1)T) \leq e^{-\omega(m-1)T}\mathcal{E}(0) \leq \frac{1}{\gamma}e^{-\omega t}\mathcal{E}(0).$$

L'implication inverse est basée sur l'identité (2.14). ∎

Par le principe de Russell, cette décroissance exponentielle permet de contrôler exactement l'équation d'évolution associée à l'opérateur $-A_1$ avec des contrôles dans $L^2(]0,T[;U)$, l'espace contrôle U étant un espace de Hilbert donné contenant $\mathcal{V}$ avec injection continue. On note par I_U l'injection de $\mathcal{V}$ dans U et par $\mathcal{I}_U$ la forme identifiant U à un sous espace de $\mathcal{V}'$, c'est à dire

$$\langle \mathcal{I}_U u, v\rangle := (I_U u, I_U v)_U, \forall u, v \in \mathcal{V}.$$

La controlabilité exacte peut être formulée de la manière suivante : pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, on cherche un temps $T > 0$ et un contrôle $J \in L^2(]0,T[;U)$ tels que la solution u de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - A_1 u = J \text{ dans } \mathcal{V}', t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.18}$$

vérifie

$$u(T) = 0. \tag{2.19}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.2.2 ***Si les hyphothèses (2.6) à (2.11) sont vérifiées pour*** $(A_1, \mathcal{I}_U)$ ***et si le couple*** $(A_1, \mathcal{I}_U)$ ***vérifie l'estimation de stabilité, alors pour tout*** $T > 0$ ***suffisamment grand, et tout*** $u_0 \in \mathcal{H}$ ***il existe un contrôle***
$J \in L^2(]0,T[;U)$ ***tel que la solution*** $u \in C([0,T],\mathcal{H})$ ***de (2.18) vérifie (2.19).***

Preuve du Théorème 2.2.2 : On applique le principe de Liu[21] en résolvant le problème inverse (on remplace l'hypothèse "$(A_1, \mathcal{I}_U)$ vérifie 2.15" par "$(-A_1, \mathcal{I}_U)$ vérifie 2.15"). Pour $p_0 \in \mathcal{H}$, on cherche

$K \in L^2(]0,T[;U)$ **tel que la solution** $p \in C([0,T],\mathcal{H})$ **de**

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} + A_1 p = K \text{ dans } \mathcal{V}', t \geq 0, \\ p(T) = p_0, \end{cases} \tag{2.20}$$

satisfasse

$$p(0) = 0. \tag{2.21}$$

On choisit d'abord h_0 **dans** $\mathcal{H}$ **et on considère** $h \in C([0,T],\mathcal{H})$ **l'unique solution de**

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} + A_1 h - \mathcal{I}_U f = 0 \text{ dans } \mathcal{H}, t \geq 0, \\ h(T) = h_0. \end{cases} \tag{2.22}$$

En appliquant le Théorème 2.2.1, on obtient

$$\mathcal{E}(h(t)) \leq M e^{-\omega(T-t)} \mathcal{E}(h_0). \tag{2.23}$$

Ensuite on considère la fonction $q \in C([0,T],\mathcal{H})$ **solution unique de**

$$\begin{cases} \dfrac{dg}{dt} + A_1 q + \mathcal{I}_U g = 0 \text{ dans } \mathcal{H},\ t \geq 0, \\ q(0) = h(0). \end{cases} \tag{2.24}$$

On pose maintenant $p = q - fh$**. Alors** p **vérifie l'équation (2.20) avec**

$$K = -\mathcal{I}_U q - \mathcal{I}_U f h. \tag{2.25}$$

Soit l'application Λ **de** $\mathcal{H}$ **vers** $\mathcal{H}$ **définie par**

$$\Lambda(h_0) = q(T).$$

Avec l'estimation (2.23), on a $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = \sqrt{d}$ **(où** $d := Me^{-\omega T}$**) et donc, pour tout** $T > 0$ **tel que** $d < 1$**, l'application** $\Lambda - I$ **est inversible. Dès lors, pour tout** $p_0 \in \mathcal{H}$**, il existe une donnée initiale unique** $h_0 \in \mathcal{H}$ **telle que**

$$p_0 = p(T) = q(T) - h(T) = (\Lambda - I) f h_0. \tag{2.26}$$

On termine la preuve en montrant que $K \in L^2(]0,T[;U)$. Pour cela, on remarque qu'avec l'identité (2.14) on a

$$\mathcal{E}(h(T)) - \mathcal{E}(h(0)) = \int_0^T \|I_U h(t)\|_U^2 \, dt,$$
$$\mathcal{E}(q(0)) - \mathcal{E}(q(T)) = \int_0^T \|I_U q(t)\|_U^2 \, dt.$$

En sommant ces deux identités et en considérant la condition initiale du problème (2.24) et la condition finale de (2.22), on obtient

$$\int_0^T (\|I_U h(t)\|_U^2 + \|I_U q(t)\|_U^2) \, dt = \mathcal{E}(h(T)) - \mathcal{E}(q(T)) \leq \frac{1}{2}\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2.$$

En utilisant (2.26) et le fait que $(I-\Lambda)^{-1}$ soit borné, on arrive à l'estimation

$$\int_0^T (\|I_U h(t)\|_U^2 + \|I_U q(t)\|_U^2) \, dt \leq \frac{1}{2}\|(I-\Lambda)^{-1} p_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2(1-\sqrt{d})^2}\|p_0\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.27}$$

Ce qui prouve que K défini par (2.25) est dans $L^2(]0,T[;U)$. ∎

2.3 Stabilisation non linéaire

On suppose que l'espace contrôle U est de la forme

$$U = \prod_{j=1}^{J} U_j, \tag{2.28}$$

où, pour tout $j = 1, \cdots, J$, $J \in \mathbb{N}^\star := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, U_j est un sous espace fermé de $L^2(X_j, \mu_j)^{N_j}$, avec $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ un espace mesurable tel que $\mu_j(X_j) < \infty$ et $N_j \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $j = 1, \cdots, J$, on suppose donnée une fonction

$$g_j : \mathbb{R}^{N_j} \to \mathbb{R}^{N_j}$$

vérifiant

$$(g_j(x) - g_j(y)) \cdot (x - y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^{N_j} \textbf{ (monotonie)}, \quad (2.29)$$

$$g_j(0) = 0, \quad (2.30)$$

$$|g_j(x)| \leq M(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}^{N_j}, \quad (2.31)$$

où M est une constante positive. Enfin, on suppose que B est défini par

$$\langle Bu, v\rangle = \sum_{j=1}^{J} \int_{X_j} g_j((I_U u)_j(x_j)) \cdot (I_U v)_j(x_j)\, d\mu_j(x_j), \quad (2.32)$$

On rappelle que I_U est l'injection de $\mathcal{V}$ dans U et donc $(I_U u)_j$ est la j^{ieme} composante de $I_U u$. On a le Théorème suivant .

Théorème 2.3.1 ***On suppose que les hypothèses (2.6) à (2.11) sont vérifiées pour les couples*** (A_1, B) ***et*** $(A_1, \mathcal{I}_U)$***. Soient*** g_j, $j = 1, \cdots, J$ ***satisfaisant (2.29), (2.30) ainsi que***

$$g_j(x) \cdot x \geq l|x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^{N_j} : |x| \geq 1, \quad (2.33)$$

$$|x|^2 + |g_j(x)|^2 \leq G(g_j(x) \cdot x), \forall x \in \mathbb{R}^{N_j} : |x| \leq 1, \quad (2.34)$$

où l ***est une constante positive et*** $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ***est une fonction concave strictement croissante telle que*** $G(0) = 0$***. Si*** $(-A_1, \mathcal{I}_U)$ ***vérifie l'estimation de stabilité, alors il existe des constantes*** $c_2, c_3 > 0$ ***et*** $T_1 > 0$ ***(dépendant de*** T***,*** $\mathcal{E}(0)$***,*** $\mu_j(X_j)$***,*** $j = 1, \cdots, J$***) telles que***

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G\left(\frac{\psi^{-1}(c_2 t)}{c_2 T t}\right), \forall t \geq T_1, \quad (2.35)$$

pour toute solution u ***de (2.12), où*** ψ ***est donné par***

$$\psi(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\phi(s)}\, ds, \forall t > 0. \quad (2.36)$$

pour ϕ ***défini par***

$$\phi(s) = T\mu G^{-1}(\frac{s}{c_3}), \quad (2.37)$$

où $\mu = \min_{j=1,\cdots,J} \mu_j(X_j)$***.***

La preuve de ce théorème est basée sur l'inégalité intégrale suivante, établie dans [8].

Lemme 2.3.1 ***Soit*** $\mathcal{E} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ ***une fonction vérifiant l'inégalité***

$$\int_S^\infty \phi(\mathcal{E}(t))\, dt \leq T\mathcal{E}(S), \forall S \geq 0, \tag{2.38}$$

pour un $T > 0$ ***et une fonction*** ϕ ***convexe et strictement croissante de*** $[0, +\infty[$ ***dans*** $[0, +\infty[$ ***telle que*** $\phi(0) = 0$***. Alors, il existe un temps*** $t_1 > 0$ ***et un réel*** c_1 ***dépendant de*** T ***et*** $\mathcal{E}(0)$ ***tels que***

$$\mathcal{E}(t) \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_1 t)}{c_1 T t}\right), \forall t \geq t_1, \tag{2.39}$$

où ψ ***est definie par (2.36)***

Preuve du Théorème 2.3.1 Le domaine $D(\mathcal{A})$ **étant dense dans** $\mathcal{H}$**, il suffit d'établir (2.35) pour des données dans** $D(\mathcal{A})$**. Dans ce cas,** u **est solution (forte) de (2.12) et on considère** p **la solution du problème (2.20) et (2.21) avec** $p_0 = u(T) \in D(\mathcal{A})$**,** $T > 0$ **assez grand (l'existence est assurée par le théorème 2.2.2). A partir de (2.12) et (2.20) on peut écrire,**

$$\langle \frac{du}{dt} + A_1 u + Bu, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle \frac{dp}{dt} + A_1 p - K, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} (\frac{\partial u}{\partial t}, p)_{\mathcal{H}} &+ (\frac{dp}{dt}, u)_{\mathcal{H}} + \langle A_1 u, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle A_1 p, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \\ &+ \langle Bu, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0. \end{aligned}$$

L'hypothèse (2.10) entraîne

$$\langle A_1 u, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle A_1 p, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0,$$

et donc on a

$$(\frac{du}{dt}, p)_{\mathcal{H}} + (\frac{dp}{dt}, u)_{\mathcal{H}} + \langle Bu, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0.$$

En intégrant cette identité par partie pour $t \in (0,T)$, on obtient

$$(u(T),p(T))_{\mathcal{H}} - (u(0),p(0))_{\mathcal{H}} + \int_0^T (\langle Bu,p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K,u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}})\,dt = 0.$$

Avec les définitions de K et de B on arrive à

$$\begin{aligned}(u(T),p(T))_{\mathcal{H}} - (u(0),p(0))_{\mathcal{H}} &= \int_0^T \Big((K, I_U u)_U \\ &- \sum_{j=1}^J \int_{X_j} g_j((I_U u)_j(x_j)) \cdot (I_U p)_j(x_j)\,d\mu_j(x_j)\Big)\,dt.\end{aligned}$$

En utilisant les conditions initiale et finale sur p, on obtient

$$2\mathcal{E}(T) = \int_0^T \left((K, I_U u)_U - \sum_{j=1}^J \int_{X_j} g_j((I_U u)_j(x_j)) \cdot (I_U p)_j(x_j)\,d\mu_j(x_j)\right)\,dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}&2\mathcal{E}(T) \le \|K\|_{L^2(0,T;U)} \|I_U u\|_{L^2(0,T;U)} \\ &+\|I_U p\|_{L^2(0,T;U)} \left(\sum_{j=1}^J \int_0^T \int_{X_j} |g_j((I_U u)_j(x_j))|^2\,d\mu_j(x_j)\,dt\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Remarquons que l'estimation (2.27) et la condition finale sur p entrainent

$$\int_0^T (\|I_U f(t)\|_U^2 + \|I_U g(t)\|_U^2)\,dt \le \frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}\mathcal{E}(T).$$

Avec cette estimation, la définition de K et $p = g - f$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \|K(t)\|_U^2\,dt &\le \frac{2}{(1-\sqrt{d})^2}\mathcal{E}(T) \\ \int_0^T \|I_U p(t)\|_U^2\,dt &\le \frac{2}{(1-\sqrt{d})^2}\mathcal{E}(T).\end{aligned}$$

Si on insère cette estimation dans (2.40) on obtient

$$\mathcal{E}(T) \leq \frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}\left(\sum_{j=1}^{J}\int_0^T\int_{X_j}\{|(I_U u)_j(x_j)|^2 + |g_j((I_U u)_j(x_j))|^2\}\, d\mu_j(x_j)\, dt\right).$$

Avec les propriétés des g_j on estime le membre de droite et on obtient

$$\mathcal{E}(0) \leq c_3 G(\frac{\mathcal{E}(0)-\mathcal{E}(T)}{T\mu}),$$

pour une constante $c_3 > 0$ (dépendant de T, $\mathcal{E}(0)$, $\max_j \mu_j(X_j)$, et $\min_j \mu_j(X_j)$). En appliquant cet argument sur $[t, t+T]$ (au lieu de $[0,T]$) on obtient

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G(\frac{\mathcal{E}(t)-\mathcal{E}(t+T)}{T\mu}) = \phi^{-1}(\mathcal{E}(t)-\mathcal{E}(t+T)), \forall t \geq 0,$$

où ϕ est défini par (2.37). Comme ϕ est décroissante, cette estimation implique que , pour tout $0 \leq S < N$, avec N assez grand

$$\begin{aligned}\int_S^N \phi(\mathcal{E}(t))\, dt &\leq \int_S^N (\mathcal{E}(t)-\mathcal{E}(t+T))\, dt \\ &\leq T\mathcal{E}(S) - T\mathcal{E}(N+T)).\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on arrive à l'estimation (2.38) (voir lemme 5.1 de [8]) et on conclut par le théorème 2.3.1. ∎

Chapitre 3

Stabilisation non linéaire d'un système thermoélastique isotrope

3.1 Introduction

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ le vecteur unitaire normal extérieur à Γ. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, on définit la fonction $m(x) = x - x_0$; $x \in \mathbb{R}^n$ et une partition de la frontière Γ de la manière suivante :

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\}, \tag{3.1}$$

$$\Gamma_2 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}. \tag{3.2}$$

Dans ce chapitre, on considère le système de la thermoélasticité suivant :

$$\begin{cases} u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, u + \alpha\nabla\theta + f(u') &= 0 \text{ dans } Q := \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta \mathrm{div}\, u' &= 0 \text{ dans } Q, \\ \theta &= 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\nu + a(m\cdot\nu)u + m\cdot\nu g(u') &= 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0,\ u'(\cdot,0) = u_1,\ \theta(\cdot,0) = \theta_0 & \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $u = u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))$ désigne le vecteur déplacement et $\theta = \theta(x,t)$ la température. La fonction a est positive et régulière, c'est-à-dire
$a \in C^1(\Gamma_2)$ et les fonctions $g(u) = (g_1(u), ..., g_n(u))$ et $f(u) = (f_1(u), ..., f_n(u))$ sont continues et satisfont

$$f(0) = g(0) = 0 \tag{3.4}$$
$$(g(x) - g(y)) \cdot (x - y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.5}$$
$$(f(x) - f(y)) \cdot (x - y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Les paramétres de couplage α et β et les constantes de Lamé λ, μ seront toujours strictement positives.

La stabilisation de plusieures variantes du système (3.3) a été étudiée dans la littérature, citons notamment [12, 21, 22, 23, 35, 37, 38]. Dans [21], Liu a considéré le cas $f = 0$ et un feedback linéaire, i.e., $g(x) = x$ sur $\Gamma_2 \neq \emptyset$ et a obtenu une décroissance exponentielle de l'énergie. De même, Liu et Zuazua [22] ont établi, toujours dans le cas $f = 0$, une décroissance exponentielle, polynomiale ou logarithmique de l'énergie pour certaines non linéarités de g. Dans ce chapitre, nous généralisons ces résultats au cas $f \neq 0$, avec une classe de non linéarité g plus large et d'autres types de décroissance. Pour ce faire, on établit des inégalités intégrales comme dans [21] dans le cas linéaire et on utilise la théorie abstraite du chapitre 1.

Les résultats de cette partie sont publiées dans [3].

3.2 Existence et unicité de la solution

On établit dans ce paragraphe l'existence et l'unicité de la solution du système (3.3) en le ramenant à une équation d'évolution du premier ordre.

Dans la suite de ce chapitre, nous posons les hypothèses suivantes

$$\Gamma_1 \neq \emptyset \ \textbf{ou} \ a(x) > 0, \forall x \in \Gamma_2, \tag{3.7}$$

et

$$\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \emptyset. \tag{3.8}$$

Nous supposons aussi qu'ils existent des constantes $C > 0,\ \sigma \geq 0$ **et** $\sigma' \geq 0$ **telles que**

$$|f(x)| \leq \begin{cases} C[1+|x|^{\frac{n+2}{n-2}}] & \textbf{si } n \geq 3, \\ C[1+|x|^{\sigma'}] & \textbf{si } n \leq 2, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$|g(x)| \leq \begin{cases} C[1+|x|^{\frac{n}{n-2}}] & \textbf{si } n \geq 3, \\ C[1+|x|^{\sigma}] & \textbf{si } n \leq 2. \end{cases} \tag{3.10}$$

On définit les espaces suivants :

$$\begin{aligned} H^1_{\Gamma_1}(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \quad \textbf{sur } \Gamma_1\}, \\ W &= (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n, \\ \mathcal{H} &= W \times L^2(\Omega). \end{aligned}$$

L'espace W **étant muni de la norme**

$$\|(u,v)\|^2_W = \int_\Omega [|v|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2]dx + \int_{\Gamma_2} am \cdot \nu |u|^2 d\Gamma.$$

Remarque 3.2.1 ***Les coefficients*** λ ***et*** μ ***étant positifs, l'hypothèse (3.7) permet d'avoir une équivalence entre la norme de*** $(H^1(\Omega))^n$

et la norme

$$\|u\|_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} = (\int_\Omega [\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2]dx + \int_{\Gamma_2} am\nu|u|^2 d\Gamma)^{\frac{1}{2}}.$$

On notera par $< \cdot, \cdot >$ la dualité entre $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ et $[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ ou entre $H^1_0(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, et par $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire dans $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$. De plus, on définit les opérateurs

$$A : (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \to [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$$

et

$$A_0 : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

par

$$\begin{aligned} < Au, v > &= \int_\Omega [\mu \nabla u \cdot \nabla v + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u \mathrm{div}\, v]dx, \forall u, v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, \\ < A_0 u, v > &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx, \forall u, v \in H^1_0(\Omega). \end{aligned}$$

On introduit aussi l'opérateur non linéaire B_0 de $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ dans $[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ par

$$< B_0 u, v >= \int_{\Gamma_2} m \cdot \nu g(u) \cdot v d\Gamma + \int_\Omega f(u) v dx, \forall u, v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n.$$

Lemme 3.2.1 ***Si les fonctions f et g vérifient (2.9) et (2.10), alors l'opérateur B_0 est bien défini.***

La preuve du lemme est identique à celle du Lemme 3.1 de [22] (voir aussi la section 6 de [30]).

Pour obtenir la formulation abstraite de (3.3), on multiplie la première équation du système (3.3) par $v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ et on intégre par parties

sur Ω, ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega [u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, u + \alpha\nabla\theta + f(u')] \cdot v\, dx \\
&= \int_\Omega u'' \cdot v dx - \mu \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v d\Gamma - (\lambda+\mu) \int_\Gamma v \cdot \nu \mathrm{div}\, u d\Gamma \\
&+ \int_\Omega [\mu \nabla u \nabla v + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u \mathrm{div}\, v] dx + \int_\Omega (\alpha\nabla\theta \cdot v) dx + \int_\Omega f(u').v dx \\
&= \int_\Omega u'' \cdot v dx + \int_\Gamma a.m \cdot \nu u.v d\Gamma + \int_\Gamma m \cdot \nu g(u').v d\Gamma \\
&+ \int_\Omega [\mu \nabla u \nabla v + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u \mathrm{div}\, v] dx + \int_\Omega \alpha\nabla\theta \cdot v dx + \int_\Omega f(u') \cdot v dx \\
&= < u'', v > + < Au, v > + < B_0 u', v > + < \alpha\nabla\theta, v > .
\end{aligned}$$

Ce qui donne l'équation

$$u'' + Au + B_0 u' + \alpha\nabla\theta = 0.$$

De la même manière, si on multiplie la seconde équation du système (3.3) par $v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ et si on intégre par parties sur Ω, on obtient

$$\theta' + A_0\theta + \beta \mathrm{div}\,(u') = 0.$$

En posant

$$\Phi = (u, u', \theta)$$

et

$$\mathcal{A}\Phi = (-u', Au + B_0 u' + \alpha\nabla\theta, A_0\theta + \beta \mathrm{div}\,(u')), \tag{3.11}$$

le système (3.3) se réduit à

$$\begin{cases} \Phi' + \mathcal{A}\Phi = 0, \\ \Phi(0) = (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases} \tag{3.12}$$

Lemme 3.2.2 ***Sous les hypothèses (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.9) et (3.10), l'opérateur $\mathcal{A}$ défini sur $\mathcal{H}$ par (3.11) et de domaine***

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} : v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, Au + B_0 v \in (L^2(\Omega))^n, \theta \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\}$$

est maximal monotone.

Preuve: Soit $(u,v,\theta)\in D(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{A}(u,v,\theta);(u,v,\theta)\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle(-v,Au+B_0v+\alpha\nabla\theta,A_0\theta+\beta\mathrm{div}\,v),(u,v,\theta)\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= -\langle u,v\rangle_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}+\langle Au,v\rangle_{(L^2(\Omega))^n}+\langle B_0v,v\rangle_{(L^2(\Omega))^n}\\ &+ \langle\alpha\nabla\theta,v\rangle_{(L^2(\Omega))^n}+\langle A_0\theta,\theta\rangle+\langle\beta\mathrm{div}\,v,\theta\rangle\\ &+ \langle B_0v,v\rangle_{(L^2(\Omega))^n}+\langle A_0\theta,\theta\rangle\geq 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}$ est monotone.

Il reste à établir la maximalité. Soit $(\varphi,\psi,\xi)\in\mathcal{H}$. On cherche $(u,v,\theta)\in D(\mathcal{A})$ solution du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} u-v &=& \varphi,\\ v+Au+B_0v+\alpha\nabla\theta &=& \psi\\ \theta+A_0\theta+\beta\mathrm{div}\,v &=& \xi\end{array}\right. \tag{3.13}$$

Comme $u=v+\varphi$, on a à résoudre

$$\left\{\begin{array}{lcl} v+Av+B_0v+\alpha\nabla\theta &=& \psi-A\varphi\\ \theta+A_0\theta+\beta\mathrm{div}\,v &=& \xi\end{array}\right. \tag{3.14}$$

On introduit l'opérateur

$$\mathcal{N}(v,\theta)=(v+Av+B_0v+\alpha\nabla\theta,\frac{\alpha}{\beta}\theta+\frac{\alpha}{\beta}A_0\theta+\alpha\mathrm{div}\,v).$$

$\mathcal{N}$ est monotone, continu et hémicontinu (Lemme 3.2 de [22]).

$\mathcal{N}((H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n\times H^1_0)\Omega))=[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'\times H^{-1}(\Omega)$**, donc si** $\psi-A\varphi\in[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ **et** $\frac{\alpha}{\beta}\xi\in L^2(\Omega)$**, il existe** $(v,\theta)\in(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n\times H^1_0(\Omega)$ **vérifiant (3.14).**
Aussi, comme

$$A_0\theta=\xi-\theta-\beta\mathrm{div}\,v\in L^2(\Omega),$$

on a

$$\theta \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

■

Par la théorie des semi groupes, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 3.2.1 ***Soient*** Γ_1 ***et*** Γ_2 ***définis par (3.1)-(3.2) et satisfaisant (3.7) et (3.8). On suppose que les fonctions f et g vérifient (3.4), (3.5), (3.6), (3.9) et (3.10) alors, pour des conditions initiales*** $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$***, le système (3.3) (ou (3.12)) admet une solution unique (définie au sens faible)*** (u, θ) ***vérifiant***

$$(u, u', \theta) \in C([0, \infty[; \mathcal{H}). \tag{3.15}$$

3.3 Stabilisation du système

L'énergie de la solution du système (3.3) est définie par

$$E(t) = E(u, \theta, t) = \frac{1}{2}\|(u(t), u'(t), \theta(t))\|^2_{\mathcal{H}},$$

ou encore

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{|u'|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\Big\}dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma.$$

Un calcul simple montre que

$$E'(t) = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla\theta(x,t)|^2\, dx - \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u'(t))\cdot u'(t) d\Gamma - \int_\Omega f(u'(t))\cdot u'(t) dx,$$

et dès lors

$$\begin{aligned} E(T) - E(S) &= -\frac{\alpha}{\beta}\int_S^T\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dxdt \\ &- \int_S^T\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu g(u'(t))\cdot u'(t) d\Gamma dt \\ &- \int_S^T\int_\Omega f(u'(t))\cdot u'(t) dxdt, \forall 0 \le S \le T < \infty. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Les hypothèses (3.4), (3.5) et (3.6) conduisent alors à la décroissance de l'énergie.

Sous des hypothèses complémentaires sur f et g, nous allons maintenant préciser différents types de décroissance. Pour cela, introduisons les constantes suivantes :

$$R_0 = \max_{x\in\overline{\Omega}}(\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{0k})^2)^{1/2}, \tag{3.17}$$

$$R_1 = \min(|\Gamma_2|; |\Omega|), \tag{3.18}$$

et

$$K(a) = \max_{x\in\Gamma_2}|\frac{2R_0^2 a(x)}{\mu} + (2-n)|.$$

Soient γ et λ_0 les plus petites constantes positives telles que pour tout $u \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$

$$\int_{\Gamma_2}|u|^2 d\Gamma \leq \gamma^2\left(\int_\Omega\{\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2\}dx + \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma\right), \tag{3.19}$$

et

$$\|u\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \leq \lambda_0^2\left(\int_\Omega\{\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2\}dx + \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma\right) \tag{3.20}$$

respectivement.

Alors nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 ***Soient Γ_1 et Γ_2 donnés par (3.1) et (3.2) et vérifiant (3.7) et (3.8). On suppose que les fonctions vectorielles f et g satisfont (3.9), (3.10) et les inégalités***

$$g(x)\cdot x \geq l|x|^2 \ \forall x\in\mathbb{R}^n \ |x|\geq 1, \tag{3.21}$$

$$|x|^2 + |g(x)|^2 \leq G(g(x)\cdot x) \ \forall x\in\mathbb{R}^n \ |x|\leq 1, \tag{3.22}$$

$$|x|^2 + |f(x)|^2 \leq G(f(x)\cdot x) \ \forall x\in\mathbb{R}^n \ |x|\leq 1, \tag{3.23}$$

où l ***est une constante positive et*** G ***une fonction concave définie sur*** $\mathbb{R}_+$ ***telle que G(0)=0. Alors, ils existent une constante*** $\tau > 0$***, des constantes*** r_1, r_2 ***et un temps*** $T_1 > 0$ ***(dépendant de*** $\tau, E(0), |\Gamma_2|, |\Omega|$***) tels que l'énergie de toute solution de (3.3) vérifie***

$$E(t) \leq r_2 G(\frac{\Psi^{-1}(r_1 t)}{r_1 \tau t}),\ \forall t \geq T_1, \tag{3.24}$$

où Ψ ***est donnée par***

$$\Psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\Phi(s)} ds,\ \textbf{\textit{avec}}\ \Phi(s) = \tau r_1 G^{-1}(\frac{s}{r_2}). \tag{3.25}$$

Remarque 3.3.1 ***ce résultat généralise le Théorème 2.3 de [22].***

On va d'abord démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.3.1 ***Soit*** (u, u', θ) ***la solution du système suivant***

$$\begin{cases} u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, u + \alpha\nabla\theta + u' &= 0 \ \textbf{\textit{dans}}\ Q, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta \mathrm{div}\, u' &= 0 \ \textbf{\textit{dans}}\ Q, \\ \theta &= 0 \ \textbf{\textit{sur}}\ \Gamma, \\ u &= 0 \ \textbf{\textit{sur}}\ \Gamma_1, \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\nu + a(m\cdot\nu)u + m\cdot\nu u' &= 0 \ \textbf{\textit{sur}}\ \Gamma_2, \\ u(.,0) = u_0,\ u'(.,0) = u_1\ \theta(.,0) = \theta_0 \quad \textbf{\textit{dans}}\ \Omega. \end{cases} \tag{3.26}$$

Pour tout nombre réel $\varepsilon_0 > 0$***, il existe une constante positive*** $C(\varepsilon_0)$ ***telle que***

$$\int_{\Gamma_2}\int_0^T am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma dt \leq C(\varepsilon_0)E(0) + \varepsilon_0\int_0^T E(t)dt.$$

Preuve : Pour $t \geq 0$**, on considère la solution** $z = z(t)$ **de**

$$\begin{cases} -\mu\Delta z - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, z = 0\ \textbf{dans}\ \Omega, \\ z = u\ \textbf{sur}\,\Gamma. \end{cases} \tag{3.27}$$

Cette solution est caractérisée par $z = \omega + u$ où $\omega \in (H_0^1(\Omega))^n$ et est solution de

$$\int_\Omega (\mu \nabla \omega \nabla v + (\lambda+\mu) \mathrm{div}\, \omega \mathrm{div}\, v) dx dt = - \int_\Omega (\mu \nabla u \nabla v + (\lambda+\mu) \mathrm{div}\, u \mathrm{div}\, v) dx dt,$$

$$\forall v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Cette égalité implique que Preuve : Pour $t \geq 0$, on considère la solution $z = z(t)$ de

$$\begin{cases} -\mu \Delta z - (\lambda + \mu) \nabla \mathrm{div}\, z = 0 \ \textbf{dans} \ \Omega, \\ z = u \ \textbf{sur} \, \Gamma. \end{cases} \tag{3.28}$$

Cette solution est caractérisée par $z = \omega + u$ où $\omega \in (H_0^1(\Omega))^n$ et est solution de

$$\int_\Omega (\mu \nabla \omega \nabla v + (\lambda+\mu) \mathrm{div}\, \omega \mathrm{div}\, v) dx dt = - \int_\Omega (\mu \nabla u \nabla v + (\lambda+\mu) \mathrm{div}\, u \mathrm{div}\, v) dx dt,$$

$$\forall v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Cette égalité implique que

$$\int_\Omega (\mu \nabla u \nabla z + (\lambda+\mu) \mathrm{div}\, u \mathrm{div}\, z) dx dt = \int_\Omega (\mu |\nabla z|^2 + (\lambda+\mu) |\mathrm{div}\, z|^2) dx dt \geq 0. \tag{3.29}$$

De plus, grâce à l'inégalité de Korn, on aura

$$\int_\Omega |z|^2 dx \leq C_0 \int_\Gamma |u|^2 d\Gamma \tag{3.30}$$

et

$$\int_\Omega |z'|^2 dx \leq C_0 \int_\Gamma |u'|^2 d\Gamma \leq C_0' \int_\Gamma m \cdot \nu |u'|^2 d\Gamma \tag{3.31}$$

où C_0, C_0' sont des constantes positives.

Soit $0 < T < \infty$, on multiplie la première équation de (3.26) par z et on intégre sur Q_T. On obtient

$$\int_\Omega \int_0^T z(u'' - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \nabla \mathrm{div}\, u + \alpha \nabla \theta + u') dx dt = 0.$$

Par application de la formule de Green et avec les conditions aux limites de (3.26) et (3.28), il vient

$$\int_\Omega \int_0^T (zu'' + \mu \nabla u \nabla z + (\lambda + \mu) \mathrm{div}\, u \mathrm{div}\, z + \alpha z \nabla \theta + u' z) dx dt$$
$$+ \int_{\Gamma_2} \int_0^T am \cdot \nu |u|^2 d\Gamma dt + \int_{\Gamma_2} \int_0^T m \cdot \nu u u' d\Gamma dt = 0.$$

En intégrant par parties et en tenant compte de (3.29), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \int_0^T am \cdot \nu |u|^2 d\Gamma dt &\leq -\int_{\Gamma_2} \int_0^T m \cdot \nu u u' d\Gamma dt + \int_\Omega \int_0^T z' u' dx dt \\ &- \alpha \int_\Omega \int_0^T z \nabla \theta dx dt - \int_\Omega \int_0^T u' z dx dt - \int_\Omega z u'|_0^T dx. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ donné, on estime les intégrales du membre de droite de l'inégalité précédente comme suit :

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_2} \int_0^T m \cdot \nu u u' d\Gamma dt &\leq \varepsilon_0 \int_{\Gamma_2} \int_0^T m \cdot \nu |u|^2 d\Gamma dt + \frac{1}{4\varepsilon_0} \int_{\Gamma_2} \int_0^T m \cdot \nu |u'|^2 d\Gamma dt \\ &\leq 2\varepsilon_0 R_0 \gamma^2 \int_0^T E(t) dt + \frac{1}{4\varepsilon_0} E(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \int_0^T z' u' dx dt &\leq \varepsilon_0 \int_\Omega \int_0^T |u'|^2 dx dt + \frac{1}{4\varepsilon_0} \int_\Omega \int_0^T |z'|^2 dx dt \\ &\leq \varepsilon_0 \int_0^T E(t) dt + \frac{C_0'}{4\varepsilon_0} E(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \int_0^T \alpha \nabla \theta . z dx dt &\leq \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_0} \int_\Omega \int_0^T |\nabla \theta|^2 dx dt + \varepsilon_0 \int_\Omega \int_0^T |z|^2 dx dt \\ &\leq \frac{\alpha \beta}{4\varepsilon_0} E(0) + 2\varepsilon_0 C_0 \gamma^2 \int_0^T E(t) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_0^T u'z dxdt &\leq \varepsilon_0\int_\Omega\int_0^T |z|^2 dxdt + \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_\Omega\int_0^T |u'|^2 dxdt \\ &\leq \varepsilon_0 C_0\gamma^2\int_0^T E(t)dt + \frac{1}{4\varepsilon_0}E(0),\end{aligned}$$

$$\int_\Omega zu'|_0^T dx \leq 4(1+C_0\gamma^2)E(0).$$

A noter qu'on a plusieurs fois utilisé (3.16) (avec $f(x) = g(x) = x$), (3.30), (3.31) et l'inégalité de Young. En regroupant ces différentes estimations, on aboutit à l'estimation désirée. ∎

Preuve du Théorème 3.3.1 : Pour démontrer le Théorème 3.3.1 , nous allons montrer que le système linéaire correspondant à (3.3) est exponentiellement stable. Or ce système (associé à $f(x) = g(x) = x$) est le système (3.26).

Pour montrer la stabilité exponentielle de ce système, on va établir des inégalités intégrales pour les solutions fortes de (3.26) correspondants à des données initiales $(u_0, v_0, \theta_0) \in D(\mathcal{A})$.

On introduit les constantes suivantes :

$$\begin{aligned}c_1 &= \alpha\beta(n-1)^2 + 4\alpha\beta R_0^2, \\ N &= \lambda_0^2 + \frac{2}{\mu} + \frac{\gamma^2\lambda_0^2 R_0^2(n-1)^2}{c_1} + 4\frac{R_0^2}{\mu c_1}.\end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que

$$0 < \varepsilon < \frac{2}{1+N}$$

et définissons les constantes

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 1 + \frac{2R_0^2}{\mu} + \frac{c_1}{4\varepsilon}, \\
k_2 &= \frac{\alpha\beta(n-1)^2}{4\varepsilon} + \frac{\alpha\beta R_0^2}{\varepsilon} + \lambda_0^2.
\end{aligned}
$$

Pour une solution forte de 3.26, on définit la fonction $M = (M_i)_{i=1\ldots n}$ où

$$
M_i = 2m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + (n-1)u_i. \tag{3.32}
$$

En multipliant la première équation de (3.26) par M_i et en intégrant par parties sur $\Omega \times [0,T]$ (en adoptant la convention des indices répétés), on obtient

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \int_0^T u_i'' M_i dx dt \\
= \; & (u_i'(t), 2m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k})|_0^T - \int_\Gamma \int_0^T m_k \nu_k |u_i'|^2 d\Gamma dt + n \int_\Omega \int_0^T |u_i'|^2 dx dt \\
+ \; & (n-1)(u_i', u_i)|_0^T - (n-1) \int_\Omega \int_0^T |u_i'|^2 dx dt \\
= \; & 2(u_i'(t), m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2} u_i)|_0^T - \int_{\Gamma_2} \int_0^T m_k \nu_k |u_i'|^2 d\Gamma dt + \int_\Omega \int_0^T |u_i'|^2 dx dt.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T \Delta u_i M_i dx dt \\
&= 2\int_{\Gamma_2} \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial \nu} m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Gamma dt - \int_\Gamma \int_0^T m_k \nu_k |\nabla u_i|^2 d\Gamma dt + (n-2)\int_\Omega \int_0^T |\nabla u_i|^2 dx dt \\
&+ (n-1)\int_\Gamma \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i d\Gamma dt - (n-1)\int_\Omega \int_0^T |\nabla u|^2 dx dt \\
&= 2\int_{\Gamma_2} \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial \nu} m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Gamma dt - \int_\Gamma \int_0^T m_k \nu_k |\nabla u_i|^2 d\Gamma dt + (n-1)\int_\Gamma \int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i d\Gamma dt \\
&- \int_\Omega \int_0^T |\nabla u|^2 dx dt.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) M_i dx dt &= 2\int_\Gamma \int_0^T \operatorname{div} u m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \nu_i d\Gamma dt \\
&- \int_\Gamma \int_0^T m_k \nu_k |\operatorname{div} u|^2 d\Gamma dt + (n-2)\int_\Omega \int_0^T |\operatorname{div} u|^2 dx dt \\
&+ (n-1)\int_\Gamma \int_0^T \operatorname{div} u u_i \nu_i d\Gamma dt - (n-1)\int_\Omega \int_0^T |\operatorname{div} u|^2 dx dt \\
&= 2\int_\Gamma \int_0^T \operatorname{div} u m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \nu_i d\Gamma dt - \int_\Gamma \int_0^T m_k \nu_k |\operatorname{div} u|^2 d\Gamma dt. \\
&+ (n-1)\int_\Gamma \int_0^T \operatorname{div} u u_i \nu_i d\Gamma dt - \int_\Omega \int_0^T |\operatorname{div} u|^2 dx dt.
\end{aligned}
$$

En regroupant ces différentes identités, on obtient

$$
\begin{aligned}
2\int_0^T E(t)dt &= \int_\Gamma \int_0^T [|u_i'|^2 - \mu|\nabla u_i|^2 - (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2] m\cdot\nu d\Gamma dt \\
+ \;& 2\int_\Gamma \int_0^T [\mu\frac{\partial u_i}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\nu_i] m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Gamma dt \\
+ \;& (n-1)\int_\Gamma \int_0^T [\mu\frac{\partial u_i}{\partial \nu} d\Gamma dt + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\nu_i] u_i d\Gamma dt \\
- \;& 2({u'}_i, m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}u_i)_0^T - 2\alpha\int_\Omega\int_0^T \frac{\partial\theta}{\partial x_i}(m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}u_i)dxdt \\
+ \;& \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\int_0^T \theta^2 dxdt + \int_\Gamma\int_0^T am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma dt - 2\int_\Omega\int_0^T u_i' m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dxdt \\
- \;& (n-1)\int_\Omega\int_0^T u_i u_i' dxdt
\end{aligned}
$$

Avec les conditions aux limites de (3.26), qui impliquent en particulier $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}\nu_k$ **sur** $\Gamma_1\times[0,T]$**, on aboutit à :**

$$2\int_0^T E(t)dt = \sum_{i=1}^7 I_i,$$

lorsque

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\Gamma_1}\int_0^T m\cdot\nu[\mu|\frac{\partial u_i}{\partial\nu}|^2+(\lambda+\mu)|\mathrm{div}\,u|^2]d\Gamma dt,\\
I_2 &:= \int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu[|u_i'|^2-\mu|\nabla u_i|^2-(\lambda+\mu)|\mathrm{div}\,u|^2]d\Gamma dt,\\
I_3 &:= -2\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu[au_i+u_i']m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}d\Gamma dt,\\
I_4 &:= -(n-1)\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu[au_i+u_i']u_i d\Gamma dt+\int_{\Gamma_2}\int_0^T am\cdot\nu|u_i|^2d\Gamma dt,\\
I_5 &:= -2({u'}_i,m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{n-1}{2}u_i)_0^T-(n-1)\int_\Omega\int_0^T u_iu_i'dxdt,\\
I_6 &:= -2\alpha\int_\Omega\int_0^T\nabla\theta(m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{n-1}{2}u_i)dxdt+\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\int_0^T|\theta|^2dxdt,\\
I_7 &:= -2\int_\Omega\int_0^T u_i'm_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}dxdt.
\end{aligned}
$$

On estime les différents termes I_i comme suit :

Premièrement $I_1\le 0$ car $m\cdot\nu\le 0$ sur $\Gamma_1\times[0,T]$ et de même

$$I_2\le\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu(|u'|^2-\mu|\nabla u|^2)d\Gamma dt.$$

L'inégalité de Young et la définition de R_0 (définit dans 3.17) impliquent

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le 2\frac{R_0^2}{\mu}\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu a^2u_i^2d\Gamma dt+\frac{\mu}{2}\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|\nabla u_i|^2d\Gamma dt\\
&+ \frac{R_0^2}{\mu}\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|u_i'|^2d\Gamma dt+\frac{\mu}{2}\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|\nabla u_i|^2d\Gamma dt.
\end{aligned}
$$

Donc on a

$$I_3\le 2\frac{R_0^2}{\mu}\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu a^2u_i^2d\Gamma dt+\frac{2R_0^2}{\mu}\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|u_i'|^2d\Gamma dt+\mu\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|\nabla u_i|^2d\Gamma dt.$$

De même

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \frac{c_1}{4\varepsilon}\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|u_i'|^2 d\Gamma dt + \frac{(n-1)^2}{c_1}\varepsilon\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|u_i|^2 d\Gamma dt \\ &+ (2-n)\int_{\Gamma_2}\int_0^T am\cdot\nu|u_i|^2 d\Gamma dt \\ &\leq \frac{c_1}{4\varepsilon}\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|u_i'|^2 d\Gamma dt + (2-n)\int_{\Gamma_2}\int_0^T am\cdot\nu|u_i|^2 d\Gamma dt \\ &+ \frac{(n-1)^2\varepsilon\gamma^2\lambda_0^2 R_0^2}{c_1}\int_0^T E(t)dt. \end{aligned}$$

Les inégalités

$$|2\int_\Omega u_i' m\cdot\nabla u_i dx| \leq \frac{R_0^2}{\mu^{\frac{1}{2}}}[\|u_i'(t)\|^2 + \mu\|\nabla u_i(t)\|^2] \leq \frac{2R_0^2}{\mu^{\frac{1}{2}}}E(t),$$

$$|(n-1)\int_\Omega u_i' u_i dx| \leq \frac{n-1}{2}\lambda_0[\|u_i'(t)\|^2 + \mu\|\ u(t)\|^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n}] \leq (n-1)\lambda_0 E(t),$$

$$|\frac{(n-1)}{2}\int_\Omega u_i^2|dx \leq (n-1)\lambda_0^2 E(t),$$

et la définition de k_1 impliquent que

$$I_5 \leq k_1 E(0).$$

Par l'inégalité de Young, la définition de R_0 et de λ_0, et en tenant

compte de (3.16) (avec $f(x) = g(x) = x$), on a les estimations

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq \frac{\alpha^2(n-1)^2}{4\varepsilon}\int_\Omega\int_0^T |\nabla\theta|^2 dxdt + \varepsilon\int_\Omega\int_0^T |u|^2 dxdt + \frac{\alpha^2 R_0^2}{\varepsilon}\int_\Omega\int_0^T |\nabla\theta|^2 dxdt \\
&+ \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega\int_0^T |\theta|^2 dxdt + \varepsilon\int_\Omega\int_0^T |\nabla u|^2 dxdt, \\
&\leq [\frac{\alpha\beta(n-1)^2}{4\varepsilon} + \frac{\alpha\beta R_0^2}{\varepsilon} + \lambda_0^2]\int_\Omega\int_0^T \frac{\alpha}{\beta}|\nabla\theta|^2 dxdt + [\varepsilon\lambda_0^2 + \frac{2\varepsilon}{\mu}]\int_0^T E(t)dt \\
&\leq k_2 E(0) + [\varepsilon\lambda_0^2 + \frac{2\varepsilon}{\mu}]\int_0^T E(t)dt.
\end{aligned}$$

$$I_7 = -2\int_\Omega\int_0^T u_i' m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dxdt \leq \frac{c_1}{4\varepsilon}\int_\Omega\int_0^T |u'|^2 dxdt + \frac{4R_0^2\varepsilon}{\mu c_1}\int_\Omega\int_0^T \mu|\nabla u|^2 dxdt.$$

En regroupant ces différentes estimations, il vient

$$\begin{aligned}
2\int_0^T E(t)dt &\leq I_9 + k_1(\int_{\Gamma_2}\int_0^T m\cdot\nu|u'|^2 d\Gamma dt + \int_\Omega\int_0^T |u'|^2 dxdt) \\
&+ k_2 E(0) + \varepsilon N\int_0^T E(t)dt,
\end{aligned}$$

où on a posé

$$I_9 = \int_{\Gamma_2}\int_0^T [\frac{2R_0^2 a^2}{\mu} + (2-n)a] m\cdot\nu|u|^2 d\Gamma dt.$$

Mais

$$I_9 \leq K(a)\int_{\Gamma_2}\int_0^T am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma dt.$$

En appliquant le Lemme 4.3.2 avec $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{K(a)}$, on a l'existence d'une constante $C(\varepsilon)$ telle que

$$I_9 \leq C(\varepsilon)E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)dt.$$

Finalement, en posant

$$C_1 = \frac{k_2 + C(\varepsilon)}{2 - \varepsilon(1+N)},\ C_2 = \frac{k_1}{2 - \varepsilon(1+N)},$$

on aboutit à l'estimation

$$\int_0^T E(t) \leq C_1 E(0) + C_2 \Big(\int_{\Gamma_2} \int_0^T m \cdot \nu |u'|^2 d\Gamma dt + \int_\Omega \int_0^T |u'|^2 dx dt \Big). \quad (3.33)$$

Cette estimée reste valable pour les solutions faibles par un argument de densité.

Dans le formalisme du chapitre 1, l'estimée (3.33) signifie que le couple $(-A_1, \mathcal{I}_U)$ défini ci-dessous, vérifie l'estimation de stabilité. On conclut dès lors par le Théorème (2.3.1).

Pour compléter la preuve du Théorème précédent, il nous reste à définir les opérateurs A_1 et $\mathcal{I}_U$ associé au système (3.26) : A_1 est défini sur

$$\mathcal{V} := (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega)$$

par

$$A_1 \Phi = (-v, Au + \alpha \nabla \theta, \beta \mathrm{div}\, v).$$

Au vu des feedbacks appliqués dans (3.26), on pose

$$U = (L^2(\Gamma_2))^n \times (L^2(\Omega))^n \times L^2(\Omega)$$

et on définit l'application

$$I_U : \mathcal{V} \to U$$

$$(u, v, \theta) \longmapsto (v_{|\Gamma_2}, v, \theta)$$

et la forme $\mathcal{I}_U$ de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{V}'$ par

$$\begin{aligned} &< \mathcal{I}_U(u, v, \theta), (u^*, v^*, \theta^*) >= (I_U(u, v, \theta), I_U(u^*, v^*, \theta^*)) \\ &= \int_{\Gamma_2} m \cdot \nu v . v^* d\Gamma + \int_\Omega v . v^* dx + \frac{\alpha}{\beta} \int_\Omega \nabla \theta \cdot \nabla \theta^* dx. \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Système avec feedback frontière de type mémoire

Dans ce chapitre, nous considérons le cas du même modèle de couplage avec un feedback frontière agissant sur une partie de la frontière, l'autre partie étant maintenue à une condition de Dirichlet homogène. Notons que le feedback considéré contient un terme mémoire.

4.1 Modèle

On conserve les notations et la même partition de la frontière (3.1), (3.2) introduites dans le chapitre 2.

On considère le système suivant

$$\begin{cases} u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div}\, u + \alpha\nabla\theta &= 0 \text{ dans } Q := \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta \mathrm{div}\, u' &= 0 \text{ dans } Q, \\ \theta &= 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\,(u)\nu + am\cdot\nu u + \int_0^t k(t-s)u'ds + m\cdot\nu u' &= 0 \text{ sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0,\ u'(\cdot,0) = u_1,\ \theta(\cdot,0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ce système est une variante de (3.3) avec un autre type de conditions aux limites, précisement avec l'introduction d'un terme mémoire

$$\int_0^t k(t-s)u'ds.$$

Le potentiel a est dans $C^1(\Gamma_2)$ et supposé positif,
$k : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^2 et on suppose qu'il existe des constantes positives γ_0 et γ_1 telles que

$$k(t) \geq 0, \quad k'(t) \leq -\gamma_0 k(t), \quad k''(t) \geq -\gamma_1 k'(t). \tag{4.2}$$

Les paramètres de couplage α et β sont positifs.

Nous ferons en plus les hypothèses suivantes :

$$\Gamma_1 \neq \emptyset \text{ et } 0 < a(x) < a_0,\ \forall x \in \Gamma_2, \tag{4.3}$$

où a_0 est une constante positive dont la valeur sera convenablement choisie.

4.2 Energie du système

Montrons d'abord que le problème est bien posé.
On reprend les espaces fonctionnels introduits au chapitre 2

$$\begin{aligned} H^1_{\Gamma_1}(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega);\, u = 0 \quad \textbf{sur } \Gamma_1\}, \\ W &= (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n, \\ \mathcal{H} &= W \times L^2(\Omega). \end{aligned}$$

On rappelle que l'espace W est muni de la norme

$$\|(u,v)\|^2_W = \int_\Omega [|v|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2]dx + \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma.$$

Théorème 4.2.1 ***Soit*** Γ_1 ***et*** Γ_2 ***définis dans (3.1)-(3.2) et vérifiant (3.7) , (3.8). Supposons que la fonction*** k ***satisfait (4.2). Alors pour des données initiales*** $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$***, le système (4.1) admet une solution unique*** (u,θ) ***satisfaisant***

$$(u, u', \theta) \in C([0,\infty); \mathcal{H}).$$

Preuve: ([32])

On définit l'énergie du système (4.1) par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{|u'|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\Big\}dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} k(t)[u(t)-u(0)]^2 d\Gamma \\ &- \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\int_0^t k'(t-s)[u(t)-u(s)]^2 d\Gamma ds. \end{aligned} \tag{4.4}$$

.

Proposition 4.2.1 ***l'énergie vérifie***

$$E'(t) = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla\theta(x,t)|^2\, dx - \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u'|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} k'(t)[u(t)-u(0)]^2 d\Gamma$$

$$- \quad \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\int_0^t k^{''}(t-s)[u(t)-u(s)]^2 d\Gamma ds. \tag{4.5}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
E'(t) = \; & - \int_\Omega u^{''}u'dx + \mu\int_\Omega \nabla u\nabla u'dx + \int_\Omega(\lambda+\mu)divudivu'dx + \\
& + \int_\Omega \frac{\alpha}{\beta}\theta\theta^{'}dx + \int_\Gamma am\nu uu^{'}d\Gamma + \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} k'(t)[u(t)-u(0)]^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k(t)[u(t)-u(0)]u'(t)d\Gamma \\
& - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\int_0^t k^{''}(t)[u(t)-u(s)]^2 d\Gamma ds - \int_{\Gamma_2}\int_0^t k^{'}(t-s)u(t)u'(t)d\Gamma ds + \\
& + \int_{\Gamma_2}\int_0^t k^{'}(t-s)u(s)u'(t)d\Gamma ds.
\end{aligned}$$

En integrant par parties on obtient

$$\begin{aligned}
E'(t) = \; & - \int_\Omega u^{''}u'dx + \mu\int_\Omega \nabla u\nabla u'dx + \int_\Omega(\lambda+\mu)divudivu'dx + \\
& + \int_\Omega \frac{\alpha}{\beta}\theta\theta^{'}dx + \int_\Gamma am\nu uu^{'}d\Gamma + \\
& - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\int_0^t k^{''}(t)[u(t)-u(s)]^2 d\Gamma ds + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} k'(t)[u(t)-u(0)]^2 d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_2} k(t)u(0)u'(t)d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k(t)u(t)u'(t)d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_2} u'(t)\int_0^t k^{'}(t-s)u(s)ds d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u(t)u'(t)\int_0^t k^{'}(t-s)d\Gamma ds
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
E'(t) = \; & - \int_\Omega u^{''}u'dx + \mu\int_\Omega \nabla u\nabla u'dx + \int_\Omega(\lambda+\mu)divudivu'dx + \\
& + \int_\Omega \frac{\alpha}{\beta}\theta\theta^{'}dx + \int_\Gamma am\nu uu^{'}d\Gamma + \\
& - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\int_0^t k^{''}(t)[u(t)-u(s)]^2 d\Gamma ds + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} k'(t)[u(t)-u(0)]^2 d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_2} k(t)u(0)u'(t)d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k(0)u(t)u'(t)d\Gamma
\end{aligned}$$

$$+ \quad \int_{\Gamma_2} u'(t) \int_0^t k^{'}(t-s)u(s)dsd\Gamma. \tag{4.6}$$

La condition aux limites

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\,(u)\nu + am\cdot\nu u + \int_0^t k(t-s)u'ds + m\cdot\nu u' = 0$$

sur $\Gamma_2 \times \mathbb{R}^+$ **peut se reécrire**

$$\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\,(u)\nu + am\cdot\nu u + m\cdot\nu u' + \int_0^t k'(t-s)u(s)ds - k(t)u(0) + k(0)u(t) = 0 \tag{4.7}$$

En multipliant (4.7) par $u'(t)$ **et en intégrant sur** Γ_2**, on a**

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}[\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\,(u)\nu + am\cdot\nu u]u'd\Gamma = \; & - \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu(u')^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_2} k(0)u(t)u'(t)d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_2} k(t)u(0)u'(t)d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u' \int_0^t k'(t-s)u(s)dsd\Gamma\end{aligned}$$

ce qui, dans (4.6) donne (4.5) ∎

Remarque 4.2.1 ***(i) Les hypothèses sur*** k***,*** k' ***et*** k'' ***nous permettent de déduire la décroissance de l'énergie.***

(ii) De la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned}E(T) - E(S) \; &= \; -\frac{\alpha}{\beta}\int_S^T \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}\int_S^T k'(t)[u(t)-u(0)]^2 dtd\Gamma \\ &- \; \int_S^T \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu|u'(t)|^2 dtd\Gamma - \frac{1}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_2}\int_0^t k''(t-s)[u(t)-u(s)]^2 dsd\Gamma dt,\end{aligned}$$

$\forall\ 0 \le S \le T < \infty$.

4.3 Stabilisation exponentielle

Considérons l'énergie standard (correspondant à $k \equiv 0$**)**

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{|u'|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\,u|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\Big\}dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma.$$

Pour montrer la propriété de décroissance exponentielle de l'énergie, nous allons d'abord établir quelques résultats préliminaires.

Lemme 4.3.1 ***Soit*** (u, θ) ***une solution forte de (4.1) et***

$$M(u) = 2(m \cdot \nabla)u + (n-1)u$$

. Alors, pour tout $t \geq 0$, ***il existe une constante positive*** η ***telle que***

$$\|M(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \leq \eta \mathcal{E}(t).$$

Preuve: : En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
\|M(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} &= \int_\Omega [|2(m \cdot \nabla)u|^2 + (n-1)^2|u|^2 + 4(n-1)u \cdot (m \cdot \nabla)u]dx \\
&= \int_\Omega [|2(m \cdot \nabla)u|^2 + (n-1)^2|u|^2 + 2(n-1)m \cdot \nabla(|u|^2)]dx \\
&= \int_\Omega [|2(m \cdot \nabla)u|^2 + (1-n^2)|u|^2]dx + 2(n-1)\int_{\Gamma_2} m \cdot \nu |u|^2 d\Gamma \\
&\leq 4R_0^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2(n-1)\int_{\Gamma_2} m \cdot \nu |u|^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant l'inégalité de Korn. ∎

Soit la fonction définie pour $t > 0$ **par**

$$\varphi_\sigma(t) = \int_\Omega \left[u' M(u) + \frac{\sigma}{2}\theta^2\right] dx,$$

où (u, θ) **est solution de (4.1) et** σ **une constante positive.**

Lemme 4.3.2 ***Pour une constante convenable*** σ***, il existe des constantes positives*** c_0 ***et*** C ***telles que pour toute solution régulière*** (u, θ) ***de (4.1), on a***

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma^{'}(t) \leq & - c_0 \mathcal{E}(t) + C(\int_{\Gamma_2} |u'(t)|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} k(t)[u(t) - u(0)]^2 d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_2}\int_0^t k'(t-s)|u(t) - u(s)|^2 ds d\Gamma) + \int_{\Gamma_2} am \cdot \nu u^2 d\Gamma. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Preuve: : Par dérivation de $\varphi_\sigma(t)$ on a

$$\varphi_\sigma^{'}(t) = \int_\Omega [u^{''} M(u) + u'(2m \cdot \nabla u' + (n-1)u') + \sigma\theta^{'}\theta]dx.$$

En appliquant la formule de Green, il vient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u_i M_i dxdt &= 2\int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial \nu} m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Gamma - \int_\Gamma m_k \nu_k |\nabla u_i|^2 d\Gamma + (n-2)\int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx \\
&+ (n-1)\int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i d\Gamma - (n-1)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&= 2\int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial \nu} m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Gamma - \int_\Gamma m_k \nu_k |\nabla u_i|^2 d\Gamma + (n-1)\int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial \nu} u_i d\Gamma \\
&- \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div} u) M_i dx &= 2\int_\Gamma \operatorname{div} u m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \nu_i d\Gamma \\
&- \int_\Gamma m_k \nu_k |\operatorname{div} u|^2 d\Gamma + (n-2)\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx \\
&+ (n-1)\int_\Gamma \operatorname{div} u u_i \nu_i d\Gamma - (n-1)\int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx \\
&= 2\int_\Gamma \operatorname{div} u m_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \nu_i d\Gamma - \int_\Gamma m_k \nu_k |\operatorname{div} u|^2 d\Gamma \\
&+ (n-1)\int_\Gamma \operatorname{div} u u_i \nu_i d\Gamma - \int_\Omega |\operatorname{div} u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Ces différentes inégalités conduisent à

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u' M(u) dx\right) &= -\int_\Omega \left[|u'|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\operatorname{div} u|^2\right] dx \\
&+ \int_\Gamma \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)\operatorname{div} u \cdot \nu_i\right) M(u) d\Gamma - \int_\Omega \alpha \nabla\theta M(u) dx \\
&+ \int_\Gamma m \cdot \nu |u'|^2 d\Gamma - \int_\Gamma m \cdot \nu \left[\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\operatorname{div} u|^2\right] d\Gamma.
\end{aligned}$$

De la même manière, en travaillant avec l'équation en θ du système (4.1) on obtient

$$\int_\Omega \theta^{'}\theta dx = -\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \beta\int_\Omega \theta \mathrm{div}\, u' dx.$$

En regroupant ces différentes égalités , on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma^{'}(t) &\leq -2\mathcal{E}(t) + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta^2 dx + \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma \\
&+ \int_\Gamma \left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\cdot\nu_i\right) M(u) d\Gamma - \int_\Gamma m\cdot\nu\left[\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2\right] d\Gamma \\
&+ \int_\Gamma m\cdot\nu|u'|^2 d\Gamma - \int_\Omega \alpha\nabla\theta M(u) dx - \sigma\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx + \sigma\beta\int_\Omega \nabla\theta u' dx. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions aux limites de (4.1) (qui impliquent en particulier $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_i}{\partial\nu}\nu_k$ sur Γ_1), on arrive à

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma^{'}(t) \leq\ & -2\ \ \mathcal{E}(t) + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta^2 dx + \int_{\Gamma_2} am\cdot\nu|u|^2 d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma_2}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\cdot\nu_i\right) M(u) d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu|u'|^2 d\Gamma - \int_\Omega \alpha\nabla\theta M(u) dx \\
&- \sigma\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx + \sigma\beta\int_\Omega u'\nabla\theta dx. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Young et le Lemme (4.8), on a , pour tout $\varepsilon > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned}
\varphi_\sigma^{'}(t) &\leq (-2+\varepsilon\eta+\varepsilon\sigma\beta)\mathcal{E}(t) + \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu|u|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu|u'|^2 d\Gamma \\
&+ \frac{c_1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_2}[\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\cdot\nu]^2 d\Gamma \\
&+ \varepsilon\int_{\Gamma_2}(|\nabla u|^2 + |u|^2) d\Gamma
\end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta^2 dx + (\frac{\alpha^2+1}{4\varepsilon} - \sigma)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \tag{4.11}$$

où c_1 est une constante positive.
Maintenant, on fait le choix de σ de sorte quelconque

$$\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta^2 dx + (\frac{\alpha^2+1}{4\varepsilon} - \sigma)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx < 0.$$

En utilisant le théorème de Poincaré, les propriétés de la trace et la définition de γ, dans (4.11), en choisissant ε suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma^{'}(t) \leq \quad &- \quad c_2\mathcal{E}(t) + \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu|u|^2 d\Gamma \\ &+ \quad c_3\int_{\Gamma_2}[\mu\frac{\partial u}{d\nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\cdot\nu]^2 d\Gamma \\ &+ \quad \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta^2 dx + (\frac{\alpha^2+1}{4\varepsilon} - \sigma)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \end{aligned} \tag{4.12}$$

pour une constante convenable c_2 et c_3.
On choisit maintenant σ de sorte que

$$\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \theta^2 dx + (\frac{\alpha^2+1}{4\varepsilon} - \sigma)\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx < 0.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma^{'}(t) \leq \quad &- \quad c_2\mathcal{E}(t) + \int_{\Gamma_2} m\cdot\nu|u|^2 d\Gamma \\ &+ \quad c_3\int_{\Gamma_2}[\mu\frac{\partial u}{d\nu} + (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\cdot\nu]^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Notons que comme dans [31] la condition au bord sur Γ_2 du systeme (4.1) peut être reécrite

$$\begin{aligned}\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} \quad &+ \quad (\lambda+\mu)\mathrm{div}\, u\nu + am\cdot\nu u + m\cdot\nu u' \\ &- \quad \int_0^t k'(t-s)[u(t)-u(s)]ds - k(t)[u(t)-u(0)] = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

et donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^t k'(t-s)[u(t)-u(s)]ds\right)^2 \leq [k(0)-k(t)]\int_0^t(-k'(t-s))[u(t)-u(s)]^2ds \quad (4.15)$$

Finalement, en utilisant (4.14) et (4.15) on peut estimer

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}[\mu\frac{\partial u}{\partial\nu}+(\lambda+\mu)\mathrm{div}\,u\nu]^2d\Gamma \leq C[\int_{\Gamma_2}|u'|^2d\Gamma &- \int_{\Gamma_2}\int_0^t k'(t-s)[u(t)-u(s)]^2dsd\Gamma\\ &+ \int_{\Gamma_2}k(t)[u(t)-u(0)]^2d\Gamma]+\int_{\Gamma_2}u^2d\Gamma,\end{aligned}$$

ce qui, dans (4.12) donne (4.8). ∎

Théorème 4.3.1 ***Soit*** Γ_1 ***et*** Γ_2 ***définis dans (3.1), (3.2) et vérifiant (3.7) et (3.8). Supposons que la fonction*** k ***satisfait l'hypothèse (4.2). Alors il existe des constantes positives*** C_1 ***et*** C_2 ***telles que l'énergie de la solution du système (4.1) vérifie***

$$E(t)\leq C_1e^{-C_2t},\quad \forall t>0. \quad (4.16)$$

Preuve: : Avec les hypothèses sur k, k' **et** k''**, on peut obtenir, de (4.5), l'estimation**

$$\begin{aligned}E'(t) &\leq -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega|\nabla\theta(x,t)|^2dx-\int_{\Gamma_2}m\cdot\nu|u'|^2d\Gamma\\ &- \frac{\gamma_0}{2}\int_{\Gamma_2}k(t)[u(t)-u(0)]^2d\Gamma\\ &+ \frac{\gamma_1}{2}\int_{\Gamma_2}\int_0^t k'(t-s)[u(t)-u(s)]^2dsd\Gamma. \quad (4.17)\end{aligned}$$

On introduit une fonction de Lyapounov

$$E^*(t):=E(t)+\rho\varphi_\sigma(t) \quad (4.18)$$

où ρ **est une constante positive dont son ordre de grandeur sera précisé dans la suite, et** σ **étant tel que le Lemme (4.3.2) soit vérifié. Alors , par l'identité (4.5) et le lemme (4.3.2), pour une valeur de**

ρ suffisamment petite, on a

$$\begin{aligned}(E^*)'(t) &\leq -c_0\rho\mathcal{E}(t) + \rho\int_{\Gamma_2} am\cdot\nu u^2 d\Gamma \\ &- \frac{\gamma_0}{4}\int_{\Gamma_2} k(t)[u(t)-u(0)]^2 d\Gamma \\ &+ \frac{1}{4}\int_{\Gamma_2}\int_0^t k'(t-s)[u(t)-u(s)]^2 ds d\Gamma \end{aligned} \tag{4.19}$$

ce qui implique, pour a_0 (défini dans (3.7) suffisamment petit,

$$(E^*)'(t) \leq -c_4 E(t), \quad \forall t > 0 \tag{4.20}$$

pour une certaine constante positive c_4. En remarquant que $E^*(t) \leq CE(t)$ pour une certaine constante positive c_5, l'inégalité (4.20) implique que

$$(E^*)'(t) \leq -c_4 E^*(t)$$

.
Ce qui veut dire que E^* décroit exponentiellement. Par conséquent, comme $E(t) \leq cE^*(t)$ pour une certaine constante c, le Théorème 4.3.1 en découle. ∎

Chapitre 5

Couplage avec équation des ondes

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons considérer la même équation élastodynamique mais que nous allons coupler avec une équation des ondes, avec $n = 2$ ou $n = 3$. Plus pécisément, soit le système suivant

$$\begin{cases} u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla divu - b\nabla\theta &= 0 \text{ dans } Q, \\ \theta'' - \Delta\theta + \gamma\theta + \theta' + b\, divu &= 0 \text{ dans } Q, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} &= 0 \text{ sur } \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_1\times\mathbb{R}^+ \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)divu.\nu + b\theta\nu + g(u') &= 0 \text{ sur } \Gamma_2\times\mathbb{R}^+, \\ u(.,0) = u_0,\ u'(.,0) = u_1,\ \theta(.,0) = \theta_0,\ \theta'(.,0) = \theta_1 & \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

Le paramètre de couplage est b , constante positive et $\gamma > 0$, λ, μ sont les constantes de Lamé toujours strictement positives.
Les parties Γ_1 et Γ_2 de la frontière sont les mêmes introduites dans (3.1) et (3.2). La fonction g est définie sur $\Gamma_2\times\mathbb{R}^+$.

Nous allons d'abord démontrer que le système linéaire associé est bien posé et ensuite, par des inégalités intégrales appropriées, étudier les propriétes asymptotiques de la solution.

5.1 Existence et Unicité de la solution du problème

Etablissons l'existence et l'unicité de la solution du système (5.1) en le ramenant une équation d'évolution du premier ordre. Nous allons d'abord considerer le cas où la fonction g est l'identité. Soit alors le système suivant

$$\begin{cases} u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla div u - b\nabla\theta &= 0 \text{ dans } Q, \\ \theta'' - \Delta\theta + \gamma\theta + \theta' + b\, div u &= 0 \text{ dans } Q, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} &= 0 \text{ sur } \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_1\times\mathbb{R}^+ \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu) div u.\nu + b\theta\nu + u' &= 0 \text{ sur } \Gamma_2\times\mathbb{R}^+, \\ u(.,0)=u_0,\ u'(.,0)=u_1,\ \theta(.,0)=\theta_0,\ \theta'(.,0)=\theta_1 & \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

Dans la suite, on suppose encore que

$$\Gamma_1 \neq \emptyset, \tag{5.3}$$

$$\overline{\Gamma_1}\bigcap\overline{\Gamma_2} = \emptyset. \tag{5.4}$$

et qu'il existe une constante a_0 telle que

$$m\cdot\nu > a_0 > 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

5.1.1 Réduction d'ordre

Pour obtenir la formulation abstraite du système (5.2), on multiplie la première équation par $v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ et on intégre par parties sur Ω, ce qui donne

$$\int_\Omega [u'' - \mu\,\Delta u - (\lambda+\mu)\,\nabla\, divu - b\,\nabla\,\theta]vdx = 0.$$

Par la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega u''vdx - \mu\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v}\,v\,d\Gamma - (\lambda+\mu)\int_\Gamma v\,\nu\,divud\Gamma + \int_\Omega [\mu\nabla u\nabla v + (\lambda+\mu)divu\,divv]dx + \int_\Omega (-b\nabla\theta)vdx = 0$$

ou encore

$$\int_\Omega u''vdx + \int_\Omega [\mu\nabla u\nabla v + (\lambda+\mu)divu\,divv]dx + \int_\Omega b\,\theta\,divvdx - \int_{\Gamma_2} [\mu\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\lambda+\mu)divu\nu + b\theta\nu]vd\Gamma = 0.$$

En tenant compte de la condition frontière sur $\Gamma_2 \times \mathbb{R}^+$, on obtient alors :

$$\int_\Omega u''\,v\,dx + \int_\Omega [\mu\nabla u\nabla v + (\lambda+\mu)divu\,divv + b\,\theta\,divv]dx + \int_{\Gamma_2} u'vd\Gamma = 0 \quad (5.5)$$

En multipliant la deuxième équation du système (5.2) par $\varphi \in H^1(\Omega)$, il vient alors

$$\int_\Omega \theta''\varphi dx + \int_\Omega (\nabla\theta\nabla\varphi + \gamma\,\theta\,\varphi + b\varphi divu)dx + \int_\Omega \theta'\,\varphi\,dx = 0 \quad (5.6)$$

En faisant la somme membre à membre de (5.5) et (5.6), on obtient alors

$$\int_\Omega u''vdx + \int_\Omega \theta''\varphi dx \quad + \quad \int_\Omega [\mu\nabla u\nabla v + (\lambda+\mu)divudivv + \nabla\theta\nabla\varphi + \gamma\,\theta\,\varphi + b\theta divv + b\varphi divu]dx$$

$$+ \int_{\Gamma_2} u'vd\Gamma + \int_\Omega \theta'\varphi dx = 0. \tag{5.7}$$

On définit les opérateurs suivants

$$\begin{aligned}
< A(u,\theta),(v,\varphi) > &= \int_\Omega [\mu\nabla u\nabla v + (\lambda+\mu)divu\, divv + \nabla\theta\nabla\varphi + \gamma\theta\varphi + b\theta divv + b\varphi divu]dx \\
< B(u,\theta),(v,\varphi) > &= \int_{\Gamma_2} uvd\Gamma + \int_\Omega \theta\varphi dx \\
< C(u,\theta),(v,\varphi) > &= < (u,\theta),(v,\varphi) >= \int_\Omega (uv + \theta\varphi)dx
\end{aligned}$$

Soit

$$\xi = (u,\theta) \in V := (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$$

et

$$\eta = (v,\varphi) \in V_1 := (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1(\Omega).$$

L'identité (5.7) se réduit à

$$(u'',\theta'') + A\xi + B\eta = (0,0). \tag{5.8}$$

Soit l'espace

$$\mathcal{H} = V \times V_1.$$

On définit l'opérateur $\mathcal{A}$ de domaine

$$D_{\mathcal{A}} = \{w = (\xi,\eta) \in \mathcal{H}/A\xi + B\eta \in (L^2(\Omega))^2\}$$

de la manière suivante :

$$\mathcal{A}(\xi,\eta) = (-\eta, A\xi + B\eta)$$

pour tout $(\xi,\eta) \in D_{\mathcal{A}}$.

En posant $X = (\xi,\eta)$, , le système se réduit à

$$\begin{cases} X' + \mathcal{A}X = 0, \\ X(0) = X_0 = ((u_0,\theta_0),(u_1,\theta_1)). \end{cases}$$

5.1.2 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}$

Monotonie

Soit $w = (\xi, \eta)$ dans le domaine de $\mathcal{A}$, on a alors

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}w, w > &= < \mathcal{A}(\xi,\eta), (\xi,\eta) > \\ &= < (-\eta, A\xi + B\eta), (\xi,\eta) > \\ &= - < \eta, \xi > + < A\xi + B\eta, \eta > \\ &= - < \eta, \xi > + < A\xi, \eta > + < B\eta, \eta > . \end{aligned}$$

Avec

$$< \eta, \xi > = < A\xi, \eta >,$$

on obtient

$$< \mathcal{A}w, w > = < B\eta, \eta > \geq 0,$$

c'est à dire $\mathcal{A}$ est monotone.

Maximalité

Nous devons montrer que $I + \mathcal{A}$ est un opérateur surjectif ; c'est à dire que $(I + \mathcal{A})(D_{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$.
Pour $(F, G) \in \mathcal{H}$, on cherche $(\xi, \eta) \in D_{\mathcal{A}}$ tel que

$$(I + \mathcal{A})(\xi, \eta) = (F, G)$$

c'est à dire

$$(\xi, \eta) + (-\eta, A\xi + B\eta) = (\xi - \eta, \eta + A\xi + B\eta) = (F, G)$$

Nous avons donc à résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \xi - \eta & = & F \\ A\xi + B\eta + \eta & = & G \end{cases} \tag{5.9}$$

En remplacant $\xi = \eta + F$, on a alors

$$\eta + A\eta + B\eta = G - AF = H.$$

On introduit maintenant la fonction K définie par

$$K(\eta) = \frac{1}{2}(\|\eta\|^2 + \|\eta\|^2 + \int_\Omega \theta^2 + \int_{\Gamma_1} u^2) - \langle H, \eta \rangle$$

(ici $\eta = (u, \theta)$).
En dérivant K au sens de Gateaux, on a

$$\langle K'(\eta), \Phi \rangle = \langle (I + A + B)\eta - H, \Phi \rangle \quad \forall \Phi.$$

Aussi, K vérifie

$$K(\eta) \geq \|\eta\|(\frac{1}{2}\|\eta\| - \|H\|).$$

Donc K tend vers l'infini lorsque $\|\eta\| \to +\infty$. Par suite K atteint son minimum sur V en un point η qui est alors la solution recherchée.

Nous pouvons maintenant énoncer le Théoreme suivant

Théorème 5.1.1 ***Si*** $X(0) \in D_{\mathcal{A}}$, ***Alors (5.2) admet une solution unique***

$$X(.) \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; D_{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{H}).$$

Preuve: Il suffit d'appliquer les semi groupes, étant données les propriétés preétablies de l'opérateur $\mathcal{A}$. ∎

Rappelons le résultat suivant ([9]) :

Proposition 5.1.1 ***Sous les conditions***

$$(\lambda + \mu)\gamma > b^2 \ \textbf{\textit{si}} \ n = 2 \tag{5.10}$$

$$(3\lambda + 2\mu)\gamma > 3b^2 \ \textbf{\textit{si}} \ n = 3 \tag{5.11}$$

Il existe une constante positive κ telle que la solution de (5.2) vérifie, pour tout $t > 0$

$$\|u(t)\|_{(H^1(\Omega))^n} \leq \kappa E(t). \tag{5.12}$$

5.2 Stabilisation du système

5.2.1 Décroissance de l'énergie du système

Montrons d'abord que le système est dissipatif.

Proposition 5.2.1 ***L'énergie du système (5.2) définie par :***
$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|u'|^2 + |\theta'|^2 + \mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)|divu|^2 + |\nabla\theta|^2 + \gamma|\theta|^2 + 2b\,\theta\, divu]dx$
est décroissante.

Preuve: En dérivant l'énergie du système associée à une solution forte, on obtient

$$\begin{aligned} E'(t) = & \int_\Omega [u'u'' + \theta'\theta'' + \mu\nabla u\nabla u' + (\lambda+\mu)divudivu' \\ + & \nabla\theta\nabla\theta' + \gamma\theta\theta' + b\theta' divu + b\theta divu']dx \\ = & \int_\Omega [\mu\Delta uu' + (\lambda+\mu)\nabla divuu' + b\nabla\theta u' + \Delta\theta\theta' - \gamma\theta\theta' - \theta'^2 - b\,divu\theta' \\ + & (\lambda+\mu)divudivu' + \nabla\theta\nabla\theta' + \gamma\theta\theta' + b\theta' divu + b\theta divu']dx, \end{aligned}$$

ce qui entraine que

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Gamma_2} [\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)divu\nu]u'd\Gamma + \int_{\Gamma_2} b\theta\nu u'd\Gamma - \int_\Omega \theta'^2 dx \\ &= \int_{\Gamma_2} [\mu\frac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)divu\nu + b\theta\nu]u'd\Gamma - \int_\Omega \theta'^2 dx. \end{aligned}$$

On a sur $\Gamma_2 : \mu\dfrac{\partial u}{\partial\nu} + (\lambda+\mu)divu\nu + b\theta\nu = -u'$**, donc**

$$E'(t) = \int_{\Gamma_2} - u'.u'd\Gamma - \int_\Omega \theta'^2 dx = -\int_{\Gamma_2} |u'|^2 d\Gamma - \int_\Omega \theta'^2 dx.$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\int_{\Gamma_2} |u'|^2 d\Gamma - \int_\Omega |\theta'|^2 dx, \\ E'(t) &\leq 0. \end{aligned}$$

Ce qui conduit à la décroissance de l'énergie du système (5.2).
On passe aux solutions faibles par un argument de densité.

5.2.2 Stabilité du système

Soit M le multiplicateur introduit dans (3.32). On a l'identité suivante :

Proposition 5.2.2 ***L'énergie du système vérifie***

$$\begin{aligned}
2\int_0^T E(T)dt &= \int_{\Gamma_1}\int_0^T [\mu|\frac{\partial u_i}{\partial \nu}|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2]m\nu d\Gamma dt \\
&+ \int_{\Gamma_2}\int_0^T [|u_i^{'}|^2 - \mu|\nabla u_i|^2 - (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2]m\nu d\Gamma dt \\
&- \int_{\Gamma_2}\int_0^T (b\theta\nu + u^{'})M_i d\Gamma dt \\
&- \int_{\Omega}\int_0^T [b\frac{\partial \theta}{\partial x_i}M_i + 2\theta'^2 + b\theta \mathrm{div}\, u - \theta^{'}\theta]dxdt \\
&- \int_{\Omega} u_i^{'}M_i|_0^T dx - \int_{\Omega}\theta'\theta|_0^T dx. \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Preuve: On multiplie la première équation du système par le multiplicateur $M(u)$ et on intégre par parties sur $\Omega\times(0,T)$. Il vient

$$\begin{aligned}
&2(u'_i, m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{n-1}{2}u_i)_0^T + \int_{\Gamma_2}\int_0^T m_k\nu_k|u_i^{'}|^2 d\Gamma dt + \int_{\Omega}\int_0^T |u_i^{'}|^2 dxdt \\
-\ & 2\mu\int_{\Gamma_2}\int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial \nu}m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}d\Gamma dt + \mu\int_{\Gamma}\int_0^T m_k\nu_k|\nabla u_i|^2 d\Gamma dt \\
-\ & \mu(n-1)\int_{\Gamma}\int_0^T \frac{\partial u_i}{\partial \nu}u_i d\Gamma dt + \mu\int_{\Omega}\int_0^T |\nabla u|^2 dxdt \\
-\ & 2(\lambda+\mu)\int_{\Gamma}\int_0^T \mathrm{div}\, u m_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\nu_i d\Gamma dt \\
+\ & (\lambda+\mu)\int_{\Gamma}\int_0^T m_k\nu_k|\mathrm{div}\, u|^2 d\Gamma dt - (n-1)(\lambda+\mu)\int_{\Gamma}\int_0^T \mathrm{div}\, u u_i\nu_i d\Gamma dt \\
+\ & (\lambda+\mu)\int_{\Omega}\int_0^T |\mathrm{div}\, u|^2 dxdt - \int_{\Omega}\int_0^T b\frac{\partial\theta}{\partial x_i}M_i dxdt = 0
\end{aligned}$$

De la même manière, en multipliant la deuxième équation du système (5.2) par θ et en intégrant par parties, on a

$$\int_{\Omega}\theta'\theta dx|_0^T - \int_{\Omega}\int_0^T |\theta'|^2 dxdt + \int_{\Omega}\int_0^T |\nabla\theta|^2 dxdt + \int_{\Omega}\int_0^T \gamma|\theta|^2 dxdt + \int_{\Omega}\int_0^T \theta\theta' dxdt +$$

$$\int_\Omega \int_0^T b\theta div u dx dt = 0$$

En regroupant ces deux identités et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient (5.13) ∎

Inégalité intégrale

Nous allons maintenant établir avec les termes de droite de l'identité (5.13) les majorations nécessaires pour avoir l'estimation de stabilité.
Posons d'abord

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\Gamma_1} \int_0^T [\mu |\frac{\partial u_i}{\partial \nu}|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2] m\nu d\Gamma dt, \\
I_2 &:= \int_{\Gamma_2} \int_0^T [|u_i^{'}|^2 - \mu|\nabla u_i|^2 - (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2] m\nu d\Gamma dt, \\
I_3 &:= \int_{\Gamma_2} \int_0^T (b\theta\nu + u^{'}) M_i d\Gamma dt, \\
I_4 &:= \int_\Omega \int_0^T [b\frac{\partial \theta}{\partial x_i} M_i + 2\theta'^2 + b\theta \mathrm{div}\, u - \theta^{'}\theta] dx dt, \\
I_5 &:= \int_\Omega u_i^{'} M_i|_0^T dx - \int_\Omega \theta'\theta|_0^T dx.
\end{aligned}$$

Il est clair, avec la définition de Γ_1 que $I_1 \leq 0$.

De même, $m \cdot \nu$ étant positif sur Γ_2, on a

$$I_2 \leq \int_{\Gamma_2} \int_0^T m\nu |u_i^{'}|^2 d\Gamma dt - \int_{\Gamma_2} \int_0^T \mu |\nabla u_i|^2 m\nu d\Gamma dt \ \ (:= I_2'). \tag{5.14}$$

L'énergie étant décroissante, on a pour tout t, $E(t) \leq E(0)$ et donc il existe une constante positive c_5 telle que

$$I_5 \leq c_5 E(0). \tag{5.15}$$

Proposition 5.2.3 ***Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_{\varepsilon,b}$ telle***

que

$$I_4 \leq C_{\varepsilon,b}\int_0^T E(t)dt + \varepsilon\int_\Omega\int_0^T u^2 dxdt + (2+\frac{1}{4\varepsilon})\int_\Omega\int_0^T \theta'^2 dxdt. \quad (5.16)$$

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$, par la formule de Young, on a

$$\int_\Omega\int_0^T 2\theta'^2 dxdt - \int_\Omega\int_0^T \theta'\theta dxdt \leq (2+\frac{1}{4\varepsilon})\int_\Omega\int_0^T \theta'^2 dxdt + \varepsilon\int_\Omega\int_0^T \theta^2 dxdt \quad (5.17)$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} I_4' : &= \int_\Omega\int_0^T b\frac{\partial\theta}{\partial x_i}[(2m\nabla u_i) + (n-1)u_i]dxdt + \int_\Omega\int_0^T (b\theta \mathrm{div}\, u - \theta'\theta)dxdt \\ &\leq [\frac{b^2}{4\varepsilon} + \frac{b^2(n-1)^2}{4\varepsilon}]\int_\Omega\int_0^T |\nabla\theta|^2 dxdt + \frac{4R_0^2}{\mu}\varepsilon\int_\Omega\int_0^T \mu|\nabla u|^2 dxdt + \frac{b^2}{\gamma}\int_\Omega\int_0^T \gamma\theta^2 dxdt \\ &+ \frac{\varepsilon}{\lambda+\mu}\int_\Omega\int_0^T (\lambda+\mu)|\mathrm{div}\, u|^2 dxdt + \varepsilon\int_\Omega\int_0^T u^2 dxdt. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ce qui donne, en posant

$$C_{\varepsilon,b} = \max(\frac{\varepsilon}{\lambda+\mu}, \frac{b^2+\varepsilon}{\gamma}, \frac{4R_0^2}{\mu}\varepsilon, \frac{b^2}{4\varepsilon} + \frac{b^2(n-1)^2}{4\varepsilon}) \quad (5.19)$$

l'estimation

$$I_4' \leq C_{\varepsilon,b}\int_0^T E(t))dt + \varepsilon\int_\Omega\int_0^T u^2 dxdt. \quad (5.20)$$

En combinant (5.17) et (5.20) on obtient (5.16). ∎

Il nous reste à estimer le terme I_3.
Pour $\varepsilon > 0$, on introduit les constantes suivantes :

$$c'_{\varepsilon,b} = (\frac{R_0^2}{a_0\mu} + \frac{(n-1)^2}{4\varepsilon})(b^2(1+\varepsilon)) \quad (5.21)$$

et

$$c''_{\varepsilon,b} = (\frac{R_0^2}{a_0\mu} + \frac{(n-1)^2}{4\varepsilon})(1+\frac{1}{\varepsilon}) \quad (5.22)$$

où a_0 minore $m\nu$ sur Γ_2. Nous avons l'inégalité suivante :

Proposition 5.2.4

$$\begin{aligned} I_3 = \int_{\Gamma_2}\int_0^T (b\theta\nu + u^{'})M_i d\Gamma dt &\leq c'_{\varepsilon,b}\int_{\Gamma_2}\int_0^T \theta^2 d\Gamma dt + c''_{\varepsilon,b}\int_{\Gamma_2}\int_0^T |u'|^2 d\Gamma dt \\ &+ \varepsilon\int_{\Gamma_2}\int_0^T u^2 d\Gamma dt \\ &+ a_0\mu\int_{\Gamma_2}\int_0^T |\nabla u|^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Preuve: Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2}\int_0^T (b\theta\nu + u^{'})^2 d\Gamma dt &= \int_{\Gamma_2}\int_0^T (b^2\theta^2 + 2b\theta u'\nu + u^{'2}) d\Gamma dt \\ &\leq b^2\int_{\Gamma_2}\int_0^T \theta^2 d\Gamma dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_2}\int_0^T u^{'2} d\Gamma dt \\ &+ \varepsilon b^2\int_{\Gamma_2}\int_0^T \theta^2 d\Gamma dt + \int_{\Gamma_2}\int_0^T u^{'2} d\Gamma dt \\ &\leq (1+\varepsilon)b^2\int_{\Gamma_2}\int_0^T \theta^2 d\Gamma dt + (1+\frac{1}{\varepsilon})\int_{\Gamma_2}\int_0^T u^{'2} d\Gamma dt \ \ (:= I'_3). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, on a

$$\int_{\Gamma_2}\int_0^T (b\theta\nu + u^{'})(2m\nabla u_i) d\Gamma dt \leq \frac{R_0^2}{a_0\mu} I'_3 + a_0\mu\int_{\Gamma_2}\int_0^T |\nabla u|^2 d\Gamma dt \tag{5.24}$$

et

$$(n-1)\int_{\Gamma_2}\int_0^T (b\theta\nu + u^{'})(u_i) d\Gamma dt \leq \frac{(n-1)^2}{4\varepsilon} I'_3 + \varepsilon\int_{\Gamma_2}\int_0^T |u|^2 d\Gamma dt. \tag{5.25}$$

En faisant la somme des inégalités (5.24) et (5.25), on obtient (5.23)

■

Stabilisation exponentielle

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant

Théorème 5.2.1 ***Soit*** Γ_1 ***et*** Γ_2 ***définis dans (3.1), (3.2) et vérifiant (3.7) et (3.8). Alors, il existe une constante positive*** b_0 ***tel que pour un paramétre de couplage*** $b \in]0, b_0[$***, il existe des constantes positives*** w_1 ***et*** w_2 ***telles que l'énergie de la solution du système (5.2) vérifie***

$$E(t) \leq w_1 e^{-w_2 t}, \quad \forall t > 0. \tag{5.26}$$

Nous allons d'abord démontrer le Lemme suivant :

Lemme 5.2.1 ***Soit*** Γ_1 ***et*** Γ_2 ***définis dans (3.1), (3.2) et vérifiant (3.7) et (3.8). Alors, pour toute solution forte de (5.2), il existe des constantes positives*** K_0***,*** K_1 ***et*** K_2 ***telles que l'énergie associée vérifie***

$$\int_0^T E(t)dt \leq K_0 E(0) + K_1 \int_{\Gamma_2}\int_0^T |u'|^2 d\Gamma dt + K_2 \int_\Omega \int_0^T \theta'^2 dx dt, \quad \forall T > 0. \tag{5.27}$$

Preuve du Lemme
En combinant la proposition (5.2.3) et les estimations des termes I_i**, on obtient**

$$\begin{aligned} 2\int_0^T E(T)dt &\leq \int_{\Gamma_2}\int_0^T m\nu |u'|^2 d\Gamma dt - (a_0 - m\nu)\nu \int_{\Gamma_2}\int_0^T |\nabla u_i|^2 d\Gamma dt \\ &+ c_5 E(0) + C_{\varepsilon,b} \int_0^T E(T)dt + \varepsilon \int_\Omega \int_0^T u^2 dx dt \\ &+ (2 + \frac{1}{4\varepsilon}) \int_\Omega \int_0^T \theta'^2 dx dt + C'_{\varepsilon,b} \int_{\Gamma_2}\int_0^T \theta^2 d\Gamma dt \\ &+ C''_{\varepsilon,b} \int_{\Gamma_2}\int_0^T |u'|^2 d\Gamma dt + \varepsilon \int_{\Gamma_2}\int_0^T |u|^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Ce qui entraine

$$\begin{aligned} (1 - C_{\varepsilon,b}) \int_0^T E(T)dt &\leq c_5 E(0) + C''_{\varepsilon,b} \int_{\Gamma_2}\int_0^T |u'|^2 d\Gamma dt + (2 + \frac{1}{4\varepsilon}) \int_\Omega \int_0^T \theta'^2 dx dt \\ &+ 2\varepsilon \int_{\Gamma_2}\int_0^T |u|^2 d\Gamma dt + C'_{\varepsilon,b} \int_{\Gamma_2}\int_0^T \theta^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Soit κ la plus petite constante positive telle quelconque

$$\int_{\Gamma_2}\int_0^T \theta^2 d\Gamma dt \leq \kappa \int_0^T \|\theta\|_{H^1(\Omega)} dt \leq \kappa \int_0^T E(t)dt.$$

En remarquant que

$$\int_\Omega \int_0^T u^2 dx dt \leq \int_0^T \|u\|_{(H^1(\Omega))^n} dt,$$

on a, avec (5.12) l'estimation

$$\varepsilon \int_{\Gamma_2}\int_0^T |u|^2 d\Gamma dt \leq \varepsilon\varpi \int_0^T E(t)dt. \tag{5.30}$$

Finalement

$$\begin{aligned}(1 - C_{\varepsilon,b} - C'_{\varepsilon,b} - 2\varepsilon\varpi)\int_0^T E(T)dt &\leq c_5 E(0) + C''_{\varepsilon,b}\int_{\Gamma_2}\int_0^T |u'|^2 d\Gamma dt \\ &+ (2 + \frac{1}{4\varepsilon})\int_\Omega\int_0^T \theta'^2 dx dt. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Pour ε suffisamment petit, nous allons définir b_0 comme étant la plus petite constante positive telle que (5.10) soit vérifié et

$$C_{\varepsilon,b} + C'_{\varepsilon,b} + 2\varepsilon\varpi < 1.$$

Il suffit alors de poser

$$K_0 = \frac{c_5}{1 - C_{\varepsilon,b} - C'_{\varepsilon,b} - 2\varepsilon\varpi},$$

$$K_1 = \frac{C''_{\varepsilon,b}}{1 - C_{\varepsilon,b} - C'_{\varepsilon,b} - 2\varepsilon\varpi}$$

et

$$K_2 = \frac{2 + \frac{1}{4\varepsilon}}{1 - C_{\varepsilon,b} - C'_{\varepsilon,b} - 2\varepsilon\varpi}.$$

■

Preuve du Théorème 5.2.1 :
Avec le lemme (5.2.1), il suffit d'appliquer le Théorème (2.3.1) avec le choix

$$G(x) = x^{\frac{2}{q+1}} \text{ et } q = \frac{p+1}{\alpha} - 1.$$

En effet si $p = \alpha = 1$, alors

$$\Psi^{-1}(t) = e^{-t}$$

et on obtient une décroissance exponentielle.

Remarque 5.2.1 ***Avec le système (5.1), pour des fonctions g vérifiant les hypothèses (3.5), (3.10), (3.21), (3.22), ainsi que***

$$x \cdot g(x) \geq \alpha_0 |x|^{p+1}, \ \forall |x| \leq 1, \tag{5.32}$$

$$|g(x)| \leq \alpha_1 |x|^{\alpha}, \ \forall |x| \leq 1, \tag{5.33}$$

où α_0, α_1 sont des constantes positives, $\alpha \in (0, 1]$ et $p \geq \alpha$, on a la stabilisation non linéaire de (5.1)

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons étudié le comportement asymptotique de l'énergie associée à des systèmes issus de couplage d'équations hyperboliques et paraboliques.

Pour les cas feedbacks non linéaires, nous avons vu que l'étude de la stabilisation peut se faire en passant par une méthode de systèmes linéaires associés dont les principes sont rappelés au chapitre 1. La difficulté réside dans l'établissement des estimations nécessaires. Nous avons pu établir une stabilisation par une large classe de rétroactions non linéaires pour le système thermoélastique.
Aussi, nous avons pu avoir les mêmes types de résultats pour un cas de couplage de deux équations hyperboliques mais avec un couplage faible.

Dans le cas de feedback avec terme mémoire, nous avons établi une décroissance exponentielle.
Comme perspectives, nous envisageons l'étude, par les techniques de découplage, des cas de feedbacks dynamiques, c'est à dire les cas où les contrôles vérifient une équation différentielle.
Enfin, nous comptons nous intéresser au cas thermoviscoélastique consistant à mettre un terme retard sur la partie hyperbolique.

Bibliographie

[1] **AASSILA M., CAVALCANTI M., SORIANO J., Asymptotic stability and energy decay rates for solution of the wave equation with memory in a sharped domain, SIAM J Control Optim., 38 : 1581-1602, (2000).**

[2] **ALAPARA T.A.,MESSAOUDI S.A., Energy decay in the thermoelasticity type III with viscoelastic damping and delay term, EJDE 2012 Num. 128 pp 1-15 (2012).**

[3] **BA E.M. ; SENE A., Energy decay for a thermoelastic system with nonlinear feedback, Math. Aeterna, Vol.4 Num.4 pp 329-343 (2014).**

[4] **BA E.M. ; SENE A., Energy decay of a thermoelastic system with boundary condition of memory type, à paraître dans JST FST, Vo.13 série A, num. 2 (2016).**

[5] **BEY, R. ; HEMINNA, A. ; LOHEAC, JP., Boundary stabilization of a linear elastodynamic system with variable coefficients, E.J.D.E. 2001 (2001), Num. 78, 1-23.**

[6] **BREZIS H.,** *Analyse fonctionnelle, thérorie et applications*, **RMA Masson (1983).**

[7] **BROSSARD R., LOHEAC, J.-P., Stabilisation frontière du système élastodynamique dans un polygone plan,** *C. R. Acad.*

Sc. Math. **338 (2004), 213-218.**

[8] **ELLER M., J. E. LAGNESE J.E., NICAISE S.,** *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping*, **Comp. and Apppl. Math., 21 (2002), 135-165.**

[9] **GLOWINSKI P., LADA A., Asymptotic stability of solutions to the equations of linear elasticity and thermoelasticity in viscoporous media, Demonstratio mathematica, Vol. XLII, Num.4, (2009).**

[10] **GLOWINSKI P., LADA A.,The compact decoupling for the system of thermoelasticty in viscoporous media and exponential decay, Applied mathematics (2010).**

[11] **GUESMIA A., Existence globale and stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité, Portugaliae Mathematica, 56 (1999), 361-379.**

[12] **HANSEN S.W., Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod, J. Math. Anal. Appl. 167 (1992), 429-442.**

[13] **HEMINNA A., NICAISE S., SENE A., Stabilisation d'un système de la thermoélasticité avec feebacks non linéaires, C.R. Acad. Sci. Paris, série I Math.339 (2004), 561-566.**

[14] **HEMINNA A., NICAISE S., SENE A., Stabiliszation of an anisotropic thermoelasticity system by nonlinear boundary and internal feedback, Quarterly of applied mathematics, Num.63 ; Vol.3 (2005).**

[15] **HORN M.A., Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the systemof linear elasticity, J. Math. Anal. Appl. 223 (1998), 126-50.**

[16] **KOMORNIK V.,** *Exact Controllability And Stabilisation, The Multiplier Method*, **RMA 36, Masson, (1994).**

[17] **K. LEMRABET : Étude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, *Thesis, U.S.T.H.B.*, Alger, (1987).**

[18] **LOHEAC J.P., problèmes elliptiques à données peu régulières, Thèse Uni. Lyon (2002)**

[19] **LIONS J.L.,** *Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués*, **tome 1,RMA Masson (1988).**

[20] **LEBEAU G.; ZUAZUA E., Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 148 (1999) 179–231.**

[21] **LIU W.J., Partial exact controllability and exponential stability in higher-dimensional linear thermoelasticity, ESAIM COCV 3 (1998), 23-48.**

[22] **LIU W.J.; ZUAZUA.E., Uniform Stabilization of the higher dimentional System of thermoelasticity with a nonlinear boundary feedback Quaterly of Applied Mathematics 59 (2001), 269-314.**

[23] **LIU Z.; ZHENG S., Exponential stability of the semigroup associated with a thermoelastic system, Quart. Appl. Math. LI (1993), 535-545.**

[24] **MESSAOUDI S A, AL-SHEHRI A., General boundary stabilization of memory type thermoelasticity ; 51, 1035 14 (2010).**

[25] **MUSTAFA M.I., Boundary stabilization of memory type thermoelastic system, EJDE, Num. 52pp 1-16 (2013).**

[26] **Boundary stabilization of memory type thermoelasticity with second sound, Zeitschrift angewandte mathematik and physik, Vol. 63, Num. 4 pp. 777-792 (2012).**

[27] **MESSAOUDI S A., SOUFYANE A., Boundary stabilization of memory type thermoelasticity of type III, Applicable Analysis 87 (1) , 13-28 (2008).**

[28] **NAKURAMA K.,Boundary value control of thermoelastic systems, Hiroshima Math. J. 13 (1983), 227-272.**

[29] **NICAISE S., Stability and controllability of the electromagneto-elastic system, Portugaliae Mathematica 60 (2003), 37-70.**

[30] **NICAISE S., Stability and controllability of and abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications, Rendiconti di Matematica, Serie VII, 23 (2003), 83-116.**

[31] **NICAISE. S ; PIGNOTTI. C ;Stabilization of the wave equation with variables coefficients and boundary conditions of memory type, Asymptot. Anal.50 no. 1-2, 31-67 (2006).**

[32] **PRUSS. J.,** *Evolutionary integral Equations and applications*, **Birkhauser (2012).**

[33] **PUEL J.P., ZUAZUA E. ; Exact controllability for somes models of multidimensional vibrating structure. Mathematics, climate and environnement. RMA : Research Notes in Applied Mathematics, 27, 288-295.**

[34] **PUEL J.P., ZUAZUA E. ; Exact controllability for a model of multidimensional flexible structure. Proc. Royal soc. Edinburgh, 123 A, 323-334.**

[35] **OLIVIERA L.A.F., Exponential decay of thermoelasticity, Commun. Appl. Anal. 1 (1997), 113-118.**

[36] **RACKE R., WANG Y.G., Nonlinear well-posedness and rates of decay in thermoelasticity with second sound, J. Hyper. Diff.Eq 05, 25 (2008).**

[37] **RIVIERA J.E.M., Decomposition of the displacement vector field and decay rates in linear thermoelasticity, SIAM J. Math. Anal. 24 (1993), 390-406.**

[38] **RIVIERA J.E.M., Asymptotic behaviour in n-dimensional thermoelasticity, Appl. Math. Lett. 10 (1997), 47-53.**

[39] **SHOWALTER R.E.,** *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, **Math. Surveys and Monographs, 49, AMS, (1997).**

[40] **VALID R.,La mécanique des milieux continus et le calcul des structures,*Eyrolles*, Paris,(1977).**