

Université Cheikh Anta Diop de Dakar
Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique



Thèse Présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Mention: Mathématiques
Option : Modélisation et calcul Scientifique

par

Babou Khady THIAM

Sous la direction de : Ibrahima FAYE, Diaraf SECK

Titre: **Etude mathématique de problème de transport de sable
en milieu sous marins**

A Soutenir le 12 janvier 2019 devant la commission d'examen:

Président :	<i>Professeur, UCAD</i>	Abdoulaye SENE
Directeurs de thèse :	<i>Matre de conférence CAMES, UADB</i>	Ibrahima FAYE
	<i>Professeur, UCAD</i>	Diaraf SECK
Examineurs :	<i>Professeur, UCAD</i>	Gabriel Birame NDIAYE
	<i>Maître de conférences CAMES, UADB</i>	Alassane SY
Rapporteurs :	<i>Professeur, université Nazi Boni Burkina faso</i>	Jean De Dieu ZABSONRE
	<i>Professeur, UCAD</i>	Idrissa LY
	<i>Matre de Conférences CAMES, université de Thiès</i>	Ibrahima MBAYE

Année Universitaire 2017-2018

Étude mathématique de problème de transport de sable en milieu sous marins ¹

¹This work is supported by NLAGA Project (Non Linear Analysis, Geometry and Applications Project).

BABOU KHADY THIAM ¹

¹baboukhthiam87.bt@gmail.com

Contents

1	Introduction générale	7
1.1	Introduction à la modélisation	7
1.2	Introduction à l'homogénéisation: convergence à deux échelles	8
1.3	Introduction de la méthode des éléments finis	10
1.4	Plan	11
2	Cadre fonctionnel	13
2.1	Quelques rappels d'analyse fonctionnelle	13
2.1.1	Espaces de Sobolev	14
2.1.2	Trace	15
2.1.3	Convergence faible	16
2.1.4	Inclusions de Sobolev	16
2.2	Analyse des problèmes paraboliques	18
2.2.1	Motivation	18
2.2.2	Problèmes paraboliques	19
2.2.3	Existence et unicité	19
3	Contexte général du problème de transport de sable	22
3.1	Construction d'un modèle de référence	23
3.1.1	Adimensionnement du modèle	26
3.1.2	Modèles paramétrés par ϵ	28
3.2	Modèle mathématique du problème de transport de sable	31
3.3	Existence et unicité de la solution du problème de transport du sable	32
3.4	Homogénéisation	57
3.4.1	La convergence à deux échelles	57
3.4.2	Homogénéisation du problème de transport du sable	58
3.4.3	Résultat de correcteur	61
4	Méthode numérique pour le problème de transport de sable	63
4.1	Méthode des éléments finis du problème limite à deux échelles	65
4.1.1	Formulation variationnelle	65
4.1.2	Formulation variationnelle discrète	67
4.2	Stabilité et convergence de la méthode	69
4.3	Méthode des éléments finis du problème de référence	71
4.3.1	Formulation variationnelle	71
4.3.2	Résultat de convergence	72

4.4	Comparaison entre la solution numérique du problème limite à deux échelles et celle du problème de référence	74
5	Conclusion générale	92

Notations

Sauf mention contraire, les notations suivantes sont valables pour l'ensemble de ce manuscrit.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, des réels et des complexes.

ϵ un petit paramètre positif.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ et $\partial\Omega$ est son bord.

$L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables définies de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \text{ pour tout } p \in [1, +\infty[.$$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable sur } \Omega : \max_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty \right\}.$$

$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$ désigne le tore de dimension 2.

$L^p_\#(Y)$ est l'espace des fonctions mesurables définies de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\|u\|_{L^p(Y)} = \left(\int_Y |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \text{ pour tout } p \in [1, +\infty[, \text{ périodiques en } Y.$$

Pour $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de u par rapport à x_i et $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ est son gradient.

Pour $u = (u_1, \dots, u_n)$ la divergence de u est : $\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

Pour $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ le laplacien de u est : $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

ρ_s densité volumique de l'eau.

τ_b la contrainte de cisaillement au fond, τ_c la contrainte critique de cisaillement.

δ la distribution de Dirac.

$\text{supp} f$ le support de f .

$L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) = (L^2(\Omega))^N$: l'ensemble des fonctions vectorielles de carrés intégrables.

$W^{1,p}$ espace de Sobolev.

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

$L^2([0, T], H^1(\Omega))$: l'ensemble des fonctions $v(t, x)$ telles que $\forall t, v(t, \cdot) \in H^1(\Omega)$ et $t \rightarrow v(t, \cdot)$ est dans $H^1(\Omega)$.

$L^\infty_\#([0, T], H^1(\Omega))$: l'ensemble des fonctions $v(t, x)$ telles que $\forall t, v(t, \cdot) \in H^1(\Omega)$ et $t \rightarrow v(t, \cdot)$ est dans $L^\infty(\Omega)$.

$\mathcal{C}^0([0, T], L^2(\Omega))$: l'ensemble des fonctions $v(t, x)$ telles que $\forall t, v(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ et $t \rightarrow v(t, \cdot)$ est continue.

$\|\cdot\|_H$ la norme dans H où H est un espace fonctionnel.

$\frac{\partial}{\partial t}$ dérivée partielle par rapport à la variable t .

$\mathbf{B}$ un opérateur au bord désignant soit une condition de Dirichlet soit une condition de Neumann.

$\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω à support compact.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω i.e. l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Résumé

Dans ce travail, les recherches effectuées s'inscrivent dans le cadre du projet **NLAGA**. Elles concernent le problème de transport de sable en milieu sous marin.

Ainsi, nous développons comme dans [23], des modèles de référence valides à court, à moyen et à long termes de la dynamique des dunes de sable dans les zones côtières soumises aux courants de la marée. Ensuite, nous établissons des résultats d'existence et d'unicité de la solution, en utilisant un résultat d'existence et d'unicité de solutions périodiques d'équations aux dérivées partielles paraboliques dégénérées et singulièrement perturbées, et des résultats d'homogénéisation du type de convergence à deux échelles du modèle de référence à court terme de notre problème d'étude. Enfin nous terminons par une résolution numérique de notre problème d'étude basée sur la méthode des éléments finis de Lagrange.

Mots clés: Equations de transport, dunes, EDP, homogénéisation, convergence deux-échelles 2000 Mathematics Subject Classification. Primaire: 35K65, 35B25, 35B10 ; Secondaire: 92F05, 86A60.

Summary

In this work, the research carried out is part of the NLAGA project. We study problems of morphodynamics of submarine sand under the influence of tides.

Thus, we develop, as in [23], valid reference models for short-term, mean-term and long-term dynamics of sand dunes in coastal areas subject to currents of tides. Then, we give the existence and uniqueness result, using an existence and uniqueness result of periodic solution for singularly perturbed parabolic degenerated equation, and homogenization results using two scales convergence for the reference model for short term. Finally, we develop a numerical method using the finite elements of Lagrange.

keywords: transport equations, dunes, PDE, homogenization, two scale convergence 2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 35K65, 35B25, 35B10 ; Secondary: 92F05, 86A60.

Remerciements

En premier lieu, je voudrais remercier Ibrahima FAYE et Diaraf SECK pour avoir accepté de diriger ma thèse, pour leurs conseils avisés sur la façon de mener mon travail doctoral, pour leur soutien dans les périodes difficiles et pour leur optimisme et leur enthousiasme constants. Travailler sous leur direction aura été une grande satisfaction. Depuis le mémoire de Master jusqu'à la rédaction de ce manuscrit, leur encadrement a participé de mon enrichissement personnel et scientifique.

Je leur suis gré de m'avoir fait partager au cours de ces quatre années leur grande sympathie et leurs très hautes connaissances scientifiques.

J'exprime également toute ma gratitude à Jean De Dieu ZABSONRE, Idrissa LY et Ibrahima MBAYE pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et pour le temps qu'ils ont consacré à l'évaluation de mes travaux. Je remercie aussi Abdoulaye SENE, Gabriel Birame NDIAYE et Alassane SY pour l'intérêt porté à mon travail doctoral en acceptant de participer à mon jury de thèse.

J'adresse mes remerciements à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques de la Décision et d'Analyse Numérique (LMDAN), ceux du Laboratoire de Mathématiques Appliquées (LMA) de la Faculté des Sciences et Techniques de l'UCAD et ceux d'étude de recherches Analyse et Géométrie et d'UFR SATIC de l'UADB.

Mes remerciements vont enfin vers ma famille et mes amis, notamment mes compagnons de Master, Ama Diop SEMBENE et Oulimata DIOP dont le soutien au cours de ces dernières années aura été plus que précieux.

Chapter 1

Introduction générale

Dans cette thèse, nous étudions les problèmes de transport de sable à proximité des côtes dans les zones soumises à la marée. Les dunes, les mégarides et les rides sont des formes sédimentaires de dimensions variées. Ces formes sédimentaires sont parmi les corps sédimentaires les plus répandus dans les environnements sous-marins mondiaux. Les dunes sous-marines modèlent régulièrement les fonds marins sur les plateaux continentaux et sont constituées de sédiments meubles. Alors, ces derniers peuvent être mobiles sous l'action des courants tidaux. Ainsi, la génération des dunes sous-marines sur un plateau continental est le résultat de l'interaction entre les fonds marins et les courants d'eaux.

Les problèmes de transport de sable près de la côte dans les zones soumises à la marée se sont rapidement révélés être primordiaux d'un point de vue sociétal. En effet, l'humanité et en particulier la communauté scientifique s'est toujours intéressée à l'étude des problèmes morphodynamiques des dunes sous-marines.

1.1 Introduction à la modélisation

De nombreux processus en biologie, en écologie et en économie, ainsi qu'en mécanique, et en chimie peuvent être modélisés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Dans notre cadre du travail, il est nécessaire de proposer des modèles mathématiques aux problèmes de transport de sable.

Ainsi, nombreux travaux liés aux problèmes de transport de sable existent dans la littérature, parmi lesquels on peut citer ceux de DeVriend [19], Engelund et Hansen [20], Kennedy [32], Blondeau [14], Dawson, Johns et Soulsby [18], Johns, Soulsby et Chesher [31], Idier [28], Astruc et Hulsher [30]. Dans leurs travaux, ils étudient le couplage entre des équations de Shallow water et d'une équation modélisant le transport de sable près des côtes. En général, ces modèles, basés sur des méthodes d'observations in situ c'est à dire la localisation des dunes, leur géométrie et leur mouvement, peuvent être définis grâce aux outils géo-acoustiques tels que le sondage bathymétrique multi-faisceaux et l'imagerie. Du coup, les résultats obtenus de cette méthode après modélisation s'avèrent inefficaces. En outre, il n'existe pas de données de terrain mettant en évidence la naissance et le développement d'une dune. Ainsi, c'est grâce à la modélisation que le temps de génération d'une dune a pu être estimé. Donc, la modélisation mathématique pour étudier les problèmes de transport de sable est nécessaire. Par exemple, la modélisation mathématique de l'évolution des dunes sous marines et du mouvement de la mer peut permettre d'étudier les phénomènes d'érosion particulièrement à la côte. L'érosion côtière est un processus naturel qui peut se définir comme l'emprise de la mer sur la terre à

cause des vents, des houles et des mouvements des marées. Les courants de la marée ont une influence notable sur les transports sédimentaires; c'est donc un problème grave et urgent. Cependant, on a recours alors à des solutions, dans la plupart des cas, coûteuses peu efficaces, pour tenter porter remède à des dégradations qui peuvent être irréversibles et qu'une meilleure connaissance de ce phénomène aurait sans doute permis d'éviter. C'est en ce sens que Faye et al [23] ont proposé des modèles mathématiques valables pour les dynamiques de sable, à court, à moyen, et à long terme, près des côtes sur les zones soumises à la marée. Cependant, ces modèles ont été étudiés dans un domaine périodique sans bord alors qu'en général, ceci ne reflète pas la réalité.

Dans le cadre de cette présente étude, l'objectif visé est d'étendre l'étude des modèles de transport de sable, en s'inspirant des travaux développés par Faye et al [23], sur un domaine Ω de classe $\mathcal{C}^1$ de frontière $\partial\Omega$. Plus précisément, nous nous concentrons sur le modèle à court terme du problème de transport de sable et sur des méthodes qui permettent de supprimer la présence explicite des oscillations de marée dans un domaine Ω de classe $\mathcal{C}^1$ de frontière $\partial\Omega$. Comme le domaine Ω est borné, il est donc possible de définir une condition aux limites à notre problème de transport de sable.

Pour modéliser le problème de transport de sable, nous partons de l'équation d'Exner donnée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \nabla \cdot q = 0, \text{ dans } [0, T) \times \Omega. \quad (1.1.1)$$

Dans cette équation, $z = z(t, x)$ désigne la hauteur du sable à la position x et à l'instant t où $t \in [0; T)$ pour tout $T > 0$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, q est le flux de sable et est exprimé par la relation

$$q = q_f - |q_f| \lambda \nabla z \quad (1.1.2)$$

où q_f représente le débit de sable induit par la vitesse de l'eau sur le fond marin et $|q_f|$ sa norme. La constante λ est l'inverse de la pente maximale des dunes de sable sans courant au fond marin.

En contractant les deux expressions (1.1.1) et (1.1.2), on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \nabla \cdot q = 0 \text{ dans } [0, T) \times \Omega \\ q = q_f - |q_f| \lambda \nabla z. \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Muni du système (1.1.3) et compte tenu des conditions aux limites et de l'adimensionnement de l'équation, nous obtenons le modèle suivant, valable à court terme de la dynamique des bancs et dunes de sables, à proximité des côtes dans les zones soumises à la marée :

$$\begin{cases} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.4)$$

où $g \in L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, $z_0 \in H^1(\Omega)$ et Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Ce système d'équations est de nature parabolique.

1.2 Introduction à l'homogénéisation: convergence à deux échelles

On présente brièvement dans cette partie l'homogénéisation, que l'on définit comme l'ensemble des techniques mathématiques qui permettent de passer d'une description microscopique à une description macroscopique d'un phénomène physique modélisé par une ou plusieurs équations aux dérivées

partielles. Il existe une vaste littérature sur ce sujet, et nous renvoyons le lecteur intéressé à [1] et [40].

Au point de vue des méthodes d'homogénéisation, nous nous intéressons à celle développée par Allaire [1], dite de la convergence à deux échelles, dont l'idée a été introduite par G. Nguetseng [40].

Le but de l'homogénéisation et donc de la convergence à deux échelles est d'étudier le comportement de u^ϵ quant $\epsilon \rightarrow 0$ où u^ϵ est la solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} L^\epsilon u^\epsilon &= f^\epsilon & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ B^\epsilon u^\epsilon &= g^\epsilon & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$.

Par conséquent, il s'agit d'identifier une équation de la forme

$$\begin{cases} Lu &= f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ Bu &= g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.2)$$

sans la présence explicite de ϵ , dont la solution u est proche de u^ϵ . L^ϵ et B^ϵ sont des opérateurs différentiels dont certains coefficients présentent des oscillations de taille ϵ .

DÉFINITION 1.2.1 Une suite de fonction $(u^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^p(\Omega)$ converge à deux échelles vers une fonction U appartenant $L^p(\Omega, L^p_\#(Y))$ si, pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\Omega, L^\infty_\#(Y))$ on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u^\epsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \int_\Omega \int_Y U(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (1.2.3)$$

U est la limite à deux échelles de u^ϵ dans $L^p(\Omega, L^p_\#(Y))$ où $Y = [0, 1]^N$.

THÉORÈME 1.2.1 Soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ une suite bornée indépendamment de ϵ dans $L^p(\Omega)$. Il existe une suite extraite encore notée $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui converge à deux échelles vers une fonction $U \in L^p(\Omega, L^p_\#(Y))$. De plus, $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge faiblement $-^*$ dans $L^p(\Omega)$ vers la fonction u définie par $x \mapsto u(x) = \int_Y U(x, y) dy$.

Dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation, le critère de convergence à deux échelles permet d'aborder le comportement asymptotique de plusieurs types de modèles mathématiques. En particulier, nous nous intéressons à la convergence à deux échelles des équations paraboliques. En effet, nous donnons la définition suivante :

DÉFINITION 1.2.2 Une suite de fonction $(z^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$ converge à deux échelles vers une fonction U appartenant $L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$ si, pour toute fonction $\psi \in C^\infty([0, T], C_\#(\mathbb{R}, C(\Omega)))$ on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \int_0^T z^\epsilon(t, x) \psi(t, \frac{t}{\epsilon}, x) dt dx = \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 U(t, \theta, x) \psi(t, \theta, x) d\theta dt dx. \quad (1.2.4)$$

THÉORÈME 1.2.2 Si $(z^\epsilon)_\epsilon$ une suite bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$, alors il existe une suite extraite encore notée $(z_\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui converge à deux échelles vers la fonction $U \in L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$.

Dans le cadre de notre travail, nous avons maintenu le modèle mathématique du problème de transport des dunes de sable suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon & \text{dans } [0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g & \text{sur } [0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.5)$$

où $g \in L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ et $z_0 \in H^1(\Omega)$.

Nous supposons que la suite $(z^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est indépendamment bornée de ϵ dans $L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))$ sous certaines hypothèses sur les suites de fonctions $(\mathcal{A}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(\mathcal{C}^\epsilon)_{\epsilon>0}$. Alors, d'après le théorème (1.2.2) il est possible d'en déduire un résultat de convergence à deux échelles de notre problème d'étude.

Ainsi, nous présentons le problème homogénéisé comme suit :

THÉORÈME 1.2.3 *Sous les hypothèses (3.3.9) et (3.3.10), pour tout $T > 0$ indépendant de ϵ , la suite $(z^\epsilon)_\epsilon$ solution de (1.4.1) converge à deux échelles vers $Z \in L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$ solution unique du système suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla Z) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} & \text{dans } [0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \frac{\partial Z}{\partial n} = g & \text{sur } [0, T) \times \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases} \quad (1.2.6)$$

où $\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x)$ et $\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x)$ sont donnés par

$$\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) = ag_a(|U(t, \theta, x)|)$$

et

$$\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) = cg_c(|U(t, \theta, x)|) \times \frac{U(t, \theta, x)}{|U(t, \theta, x)|}.$$

où a, b sont des nombres réels et g_a, g_c sont des fonctions positives et satisfont certaines hypothèses.

1.3 Introduction de la méthode des éléments finis

Ici, nous présentons brièvement la notion de la méthode des éléments finis pour la résolution numérique du modèle référence et du modèle asymptotique du problème (4.3.4) décrivant le transport de sable.

La méthode des éléments finis est maintenant reconnue comme l'une des principales méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) dans des géométries quelconques, que ce soit en dimension un, deux ou trois. Les applications sont nombreuses et variées. Les ingénieurs de diverses disciplines utilisent les éléments finis, que ce soit en mécanique des fluides ou des solides, mais aussi pour les problèmes thermiques, électro-magnétiques, chimiques, etc. On retrouve aussi des applications en physique, et notamment en astrophysique.

On met le problème d'équations aux dérivées partielles sous forme variationnelle :

$$\begin{cases} a(u, v) = (f, v)_V \quad \forall v \in V \\ u \in V \end{cases} \quad (1.3.1)$$

où V est un espace de Hilbert bien choisi (par exemple parce qu'il y a existence et unicité de la solution dans cet espace), $(\cdot, \cdot)_V$ le produit scalaire sur V et a une forme bilinéaire sur V . La discrétisation consiste à remplacer V par un sous espace de dimension finie V_h , construit par exemple à l'aide de fonctions de base éléments finis qu'on introduira plus loin :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) = (f, v_h)_V & \forall v \in V_h \\ u_h \in V_h \end{cases} \quad (1.3.2)$$

où V_h un espace d'éléments finis.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différences finies, de volumes finis, la méthode des éléments finis etc. On peut sans aucun doute affirmer que la méthode la plus largement répandue est la méthode des éléments finis. Cette popularité n'est pas sans fondement. La méthode des éléments finis est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qui est fort utile, même sur le plan très pratique.

En effet, cette base mathématique permet de prévoir jusqu'à un certain point la précision de notre approximation et même d'améliorer cette précision, via les méthodes adaptatives. La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis se fait en six étapes :

1. discrétiser le domaine,
2. dériver des équations d'éléments finis c'est-à-dire des équations élémentaires,
3. assembler, combiner les équations élémentaires,
4. appliquer les conditions aux bords,
5. résoudre,
6. visualiser.

1.4 Plan

Nous présentons ici le plan de la thèse, nous donnons les éléments principaux des chapitres composant ce manuscrit. Notre étude s'articule donc comme suit. Dans ce chapitre 1, nous commençons par rappeler le cadre fonctionnel nécessaire à l'étude variationnelle du problème de transport des dunes de sable sous marins. Nous rappelons quelques formulations variationnelles usuelles des équations aux dérivées partielles dans le but de préparer le lecteur à la mise en oeuvre de la formulation variationnelle du modèle de référence de notre problème d'étude et celle de sa forme homogénéisée. Nous introduisons ensuite des espaces fonctionnels nécessaires et adaptés à notre cadre fonctionnel. Le chapitre 2 est consacré à la présentation, dans un contexte général, du problème de transport de sable sous-marin. Nous décryptons en détail le phénomène physique de la dynamique des dunes de sable pour établir son modèle mathématique. Pour cela, nous introduisons l'équation de Felix Maria Exner décrivant l'évolution d'un fond sableux sous l'action d'un courant. Ensuite, à l'aide d'un schéma inspiré des travaux menés dans le domaine physique [23], nous présentons en détail la mise en oeuvre des modèles de référence à court, à moyen et à long terme de notre problème du transport de sable sous marin. Et dans la suite, nous nous limitons dans le cadre de ce présent

document à un modèle de référence de la dynamique des dunes de sable marin à court terme dont le schéma mathématique se met sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \text{ dans } [0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.4.1)$$

où $g \in L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, $z_0 \in H^1(\Omega)$.

Dans le chapitre 3, nous définissons un cadre purement mathématique de notre travail. Nous établissons dans un premier temps un résultat d'existence et d'unicité pour le modèle de référence à court terme du problème de transport de sable sous marin (1.4.1) en utilisant un résultat d'existence d'une solution périodique pour une équation aux dérivées partielles parabolique dégénérée. Ensuite, nous nous appliquons à retrouver quelques résultats très précis sur l'estimation des solutions périodiques pour des équations aux dérivées partielles paraboliques dégénérées. Et, nous utilisons ces estimations comme un outil de taille dans la suite de notre travail.

Le chapitre 4 a pour but d'étudier le comportement asymptotique du modèle de référence du problème de transport de sable décrivant l'évolution de la dynamique des dunes de sable sous marin. Nous nous attachons à utiliser les estimations déjà établies dans le chapitre 3 pour mettre en oeuvre un résultat de convergence à deux échelles. Dans ce travail, la méthode d'homogénéisation adoptée est basée sur la convergence à deux échelles et dont un résultat de convergence par rapport à notre modèle de référence du problème d'étude s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla Z) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \frac{\partial Z}{\partial n} = g \text{ dans } [0, T) \times \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.4.2)$$

où $\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x)$ et $\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x)$ sont donnés par

$$\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) = ag_a(|U(t, \theta, x)|)$$

et

$$\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) = cg_c(|U(t, \theta, x)|) \times \frac{U(t, \theta, x)}{|U(t, \theta, x)|}.$$

Enfin, le chapitre 5 a pour but de résoudre numériquement les deux problèmes (1.4.2) et (1.4.1) par la méthode des éléments finis en vue de comparer leurs solutions respectives z^ϵ et Z pour des valeurs de ϵ fixées assez proches de zéro et un temps t donné.

Chapter 2

Cadre fonctionnel

La modélisation des problèmes de transport de sable, à proximité des côtes dans les zones soumises à la marée, fait apparaître des équations aux dérivées partielles paraboliques. C'est pourquoi, nous nous intéressons à des équations d'évolution paraboliques pour des fonctions dépendant de plusieurs variables (typiquement une variable de temps et des variables de position en espace). Notre objectif est de présenter les principaux résultats concernant les propriétés qualitatives des solutions aux équations aux dérivées partielles, ainsi que la méthode d'homogénéisation, en nous concentrant sur les problèmes elliptiques et paraboliques. Au passage, nous nous contenterons d'un survol assez rapide mais relativement complet. Une équation aux dérivées partielles est une relation entre une variable x , une fonction et ses dérivées :

$$F\left(x, u, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}\right) = 0 \quad (2.0.1)$$

où m est le degré de l'équation. Le problème est posé sur un domaine (i.e. un ouvert connexe) $\Omega \cap \mathbb{R}^d$ ($x \in \Omega$) et les indices i_k varient entre 1 et d . On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω :

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega.$$

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire, scalaire, d'ordre 2 est

$$au + c \cdot \nabla u + \nabla \cdot (A \nabla u) = f \quad (2.0.2)$$

où $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les coefficients de l'équation aux dérivées partielles. Dans la suite de ce chapitre, nous nous concentrerons sur les problèmes elliptiques et paraboliques. En terme de conditions aux limites pour des problèmes elliptiques, pour que le problème admette une unique solution, il faut typiquement ajouter des conditions aux limites en tous les points de la frontière $\partial\Omega$. Pour des problèmes paraboliques, il faut ajouter des conditions aux limites en tous les points de la frontière $\partial\Omega$, et une condition initiale en $t = 0$. Nous donnons dans la section suivante quelques rappels et compléments d'analyse nécessaires pour la suite.

2.1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Pour étudier les équations aux dérivées partielles, il faut préciser dans quel espace fonctionnel on cherche des solutions. On donne ensuite un sens différent aux opérateurs de différentiation suivant la régularité de la fonction. Un lien important peut être fait entre mesure et distribution :

THÉORÈME 2.1.1 (*Théorème de représentation de Riesz*) Pour toute distribution T positive (i.e. telle que $\langle T, \phi \rangle \geq 0$ dès que $\phi \geq 0$), il existe une unique mesure μ borélienne, positive et finie sur les compacts de Ω telle que

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi d\mu.$$

On peut donc naturellement identifier les mesures μ boréliennes, positives et finies sur les compacts de Ω aux distributions sur Ω positives.

REMARQUE 2.1.1 Un corollaire de ce théorème est que les distributions positives sont nécessairement d'ordre 0. En fait, toute distribution T (à valeur réelle) d'ordre 0 s'identifie à une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions continues à support compact, muni de la norme du *sup*. Si on suppose de plus cette forme linéaire bornée :

$$\exists C, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{L^\infty}$$

alors elle s'écrit sous la forme $T_+ - T_-$, avec T_+ et T_- des distributions positives. En particulier, la distribution T peut être identifiée à la différence de deux mesures de Radon positives bornées (on parle de mesure de Radon bornée).

Intégration et dérivation

Dans l'approche élémentaire (intégrale de Riemann, et dérivation au sens classique), l'intégration et la dérivation sont des opérations inverses. Qu'en est-il avec la notion d'intégrale de Lebesgue, et la dérivation au sens des distributions ? On suppose donc ici $d = 1$, et que l'on travaille sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$, disons $[0, 1]$. Commençons tout d'abord par une des implications :

$$\text{si } f \in L^1(0, 1) \text{ et } F(x) = \int_0^x f(y)dy,$$

alors on peut faire le lien avec la dérivée au sens classique grâce à la proposition suivante:

PROPOSITION 2.1.2 (*Théorème de dérivation de Lebesgue*) Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout point x ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

2.1.1 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces très naturels pour les solutions des équations aux dérivées partielles.

DÉFINITION 2.1.1 Pour $k \geq 1$, l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ telles que les dérivées de f au sens distribution jusqu'à l'ordre k s'identifient à des fonctions de $L^2(\Omega)$. Autrement dit,

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \text{ multi-indice de longueur } |\alpha| \leq k, \exists g_\alpha \in L^2(\Omega), \partial^\alpha T_f = g_\alpha \text{ dans } D'(\Omega)\}.$$

REMARQUE 2.1.2 Par le théorème de Riesz sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, une distribution T s'identifie à une fonction $f \in L^2(\Omega)$ si et seulement si T définit une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$, i.e.,

$$\exists C, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{L^2}.$$

On rappelle que H^k muni du produit scalaire

$$(f, g)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\alpha f \partial^\alpha g.$$

est un espace de Hilbert séparable. On peut également définir l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ pour des k fractionnaires. Retenons simplement qu'on a toujours les injections continues : si

$$k \leq l, H^l(\Omega) \subset H^k(\Omega).$$

REMARQUE 2.1.3 Quand $\Omega = \mathbb{R}^d$, ou bien quand $\Omega = \mathbb{T}^d$, on peut définir les espaces de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier et les séries de Fourier. Ainsi, sur $\Omega = \mathbb{R}^d$, on dit que $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, où $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-ix \cdot \xi) f(x) dx$ est la transformée de Fourier de f . Remarquer que cette définition a bien un sens pour k non entier.

2.1.2 Trace

PROPOSITION 2.1.3 Soit Ω un ouvert borné régulier. On peut alors définir une application linéaire continue et surjective

$$\gamma_0 : \begin{cases} H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ f \mapsto f|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

qui prolonge l'application trace pour les fonctions continues sur Ω . De même, on peut définir une application linéaire continue et surjective

$$\gamma_1 : \begin{cases} H^2(\Omega) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial n}|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

où n désigne la normale sortante à Ω et $\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n$ est la dérivée normale.

REMARQUE 2.1.4 (Régularité du domaine) On ne définit pas plus précisément la notion d'ouvert régulier. Grosso modo, un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est de classe C^p si localement, il peut être transporté par un difféomorphisme de classe C^p sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$.

PROPOSITION 2.1.4 Si Ω un ouvert borné régulier, alors

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \gamma_0(u) = 0\}$$

et

$$H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega), \gamma_0(u) = 0, \gamma_1(u) = 0\}.$$

L'application trace intervient notamment dans les formules d'intégrations par parties. Par exemple, si Ω est borné et régulier, on a : $\forall u, v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\sigma, \quad (2.1.1)$$

où n désigne la normale sortante à Ω (n_i est la i -ème composante de n) et σ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$. Dans la dernière intégrale, u et v sont à comprendre comme $\gamma_0(u)$ et $\gamma_0(v)$. En utilisant (2.1.1), on peut montrer que pour Ω un ouvert borné régulier, $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

2.1.3 Convergence faible

DÉFINITION 2.1.2 Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de H converge faiblement vers u dans H si et seulement si $u \in H$ et, $\forall v \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v)_H = (u, v)_H.$$

On note $u_n \rightharpoonup u$.

On peut vérifier que la topologie de la convergence faible est séparée : la limite d'une suite au sens de la convergence faible, si elle existe, est unique. Si H est de dimension finie, la convergence au sens faible est équivalente à la convergence au sens fort. Ceci est faux en dimension infinie.

PROPOSITION 2.1.5 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de H .

1. Si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers u fortement (i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_H = 0$), alors u_n converge vers u faiblement.
2. Si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers u faiblement et $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers v fortement, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v_n)_H = (u, v)_H.$$

2.1.4 Inclusions de Sobolev

On commence par rappeler l'inégalité de Holder :

LEMMA 2.1.6 Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 \leq p, q \leq \infty$, alors

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Soit Ω un domaine borné et $1 \leq p < q \leq \infty$. On peut montrer l'inclusion continue $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ (pour une fonction $h \in L^q$, utiliser l'inégalité de Hölder, avec $g = 1$, $f = |h|^p$ et l'exposant $r = \frac{q}{p}$).

On peut aussi montrer que si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p < q \leq \infty$, alors pour tout $p \leq r \leq q$, $f \in L^r(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha},$$

où α est tel que $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ (pour une fonction $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, utiliser l'inégalité de Hölder, avec $g = |f|^{\alpha r}$, $h = |f|^{(1-\alpha)r}$ et les exposants conjugués $\frac{p}{\alpha r}$ et $\frac{q}{(1-\alpha)r}$).

Soit f et g deux fonctions de $L^2(\Omega)$. on peut montrer que l'inégalité : pour $\epsilon > 0$,

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \epsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.1.2)$$

Par Cauchy Schwarz, on a $\int_{\Omega} fg \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$. On utilise ensuite l'inégalité

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$$

qui se déduit du cas bien connu $\epsilon = \frac{1}{2}$.

PROPOSITION 2.1.7 (Inclusions de Sobolev) *Soit Ω un ouvert régulier. On a les injections continues: pour $k \geq 1$ un entier,*

1. si $d > 2k$, alors $H^k(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{k}{d}$
2. si $d = 2k$, alors $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [2, \infty[$.
3. si $d < 2k$, alors $H^k(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Dans ce cas, si de plus $k - \frac{d}{2} > 0$ n'est pas un entier, on a $H^k(\Omega) \subset C^{n, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$, avec $n = k - \frac{d}{2}$ où $C^{n, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$ désigne les fonctions de classe $C^n(\bar{\Omega})$ de dérivées n -ième $\frac{1}{2}$ -höldérienne : pour toute dérivée n -ième v de u ,

$$\exists C > 0, \forall x, y \in \bar{\Omega}, |v(x) - v(y)| \leq C |x - y|^{\frac{1}{2}}$$

.

Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, en utilisant la définition des espaces de Sobolev en terme de transformée de Fourier, on peut montrer que si $d < 2k$, $H^k(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$, où $C_0(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme L^∞ .

PROPOSITION 2.1.8 (Inclusions de Sobolev compactes. Théorème de Rellich-Kondrachov) *Soit Ω un ouvert régulier borné. On a les injections compactes :*

1. Si $d > 2k$, alors $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, p[$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{k}{d}$.
2. Si $d = 2k$, alors $H^k(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, \infty[$.
3. Si $d < 2k$, alors $H^k(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Si Ω est borné, on a ainsi $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (quelque soit la dimension d) avec injection compacte. On rappelle que cela signifie que l'image de tout borné de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est relativement compact. En terme de suites, cela se traduit par les propriétés suivantes :

1. Si (u_n) est une suite de $H^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers u dans $H^1(\Omega)$, alors (u_n) converge fortement vers u dans $L^2(\Omega)$, et $(\nabla u_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers ∇u dans $L^2(\Omega)^2$.
2. De toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$.

On énonce maintenant le lemme suivant :

LEMMA 2.1.9 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un domaine borné. Alors il existe une constante $C > 0$ (appelée constante de Poincaré du domaine Ω) telle que $\forall u \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (2.1.3)$$

On peut montrer que l'inégalité de Poincaré est aussi valable sur l'espace $V = \left\{ u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$, pour un domaine (i.e. un ouvert connexe) Ω borné et un ouvert Γ non vide de $\partial\Omega$. On peut en déduire que pour un domaine borné Ω , il existe une constante $C > 0$ tel que $\forall u \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left(u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \right)^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad (2.1.4)$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Cela revient à montrer que l'inégalité (2.1.4) est valable sur

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u = 0 \right\}$$

.

REMARQUE 2.1.5 On s'est restreint à des espaces de Sobolev définis par rapport à l'espace $L^2(\Omega)$. On peut de même définir des espaces de Sobolev par rapport à l'espace $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq \infty$. Ainsi

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ multi-indice de longueur } |\alpha| \leq k, \exists g_{\alpha} \in L^p(\Omega), \partial^{\alpha} T_f = g_{\alpha} \text{ dans } D'(\Omega) \right\}.$$

2.2 Analyse des problèmes paraboliques

On suppose dans tout ce qui suit et pour simplifier la présentation que Ω est un domaine (i.e. un ouvert connexe) de $\mathbb{R}^d$ borné (en particulier pour utiliser l'inégalité de Poincaré) et régulier pour pouvoir définir la trace. Plusieurs résultats qui suivent se généralisent au cas où Ω n'est pas borné ou régulier. De plus, on se limite à des équations simples mais les résultats et les méthodes de démonstration se généralisent à des équations paraboliques, moyennant une régularité suffisante sur les coefficients.

2.2.1 Motivation

Les équations paraboliques se rencontrent dans de nombreux domaines. Donnons quelques exemples. En physique, de nombreuses équations de conservation s'écrivent sous la forme d'une équation parabolique. Prenons l'exemple de l'équation qui régit l'évolution de la température $T(t, x)$ pour $t \geq 0$ et $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \partial_t T - \nabla \cdot (K \nabla T) = 0, \forall t \geq 0, \forall x \in \Omega, \\ T(0, x) = T_0(x), \forall x \in \Omega, \\ T(t, x) = f(x), \forall t \geq 0, \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

La matrice K (qui peut éventuellement dépendre des variables (t, x)) est la matrice de conductivité thermique et $K \nabla T$ donne le flux de chaleur (loi de Fourier-Fick). L'équation est donc une équation de conservation, qui exprime le fait que la variation de température au cours du temps en un point s'obtient en comptabilisant les flux rentrant et sortant. En effet, en intégrant l'équation sur un petit élément $E \subset \Omega$ et en utilisant la formule de Stokes, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_E T(t, x) dx = \int_{\partial E} K \nabla T \cdot n,$$

où n désigne la normale sortante à E .

2.2.2 Problèmes paraboliques

Avant de donner des résultats liés au problème parabolique, nous rappelons ce résultat dû à Lax-Milgram et utile pour la résolution des problèmes elliptiques.

THÉORÈME 2.2.1 (*Théorème de Lax-Milgram*) Soit V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue, coercive sur V , i.e. telle que (continuité)

$$\exists M > 0, \forall u, v \in H, \left| a(u, v) \right| \leq M \|u\| \|v\|,$$

et (coercivité)

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, a(u, u) \geq \|u\|^2.$$

Soit L une forme linéaire continue sur H i.e. telle que

$$\exists C > 0, \forall v \in H, \left| L(v) \right| \leq C \|v\|.$$

Alors le problème suivant : trouver $u \in V$, tel que

$$\forall v \in V, a(u, v) = L(v)$$

admet une unique solution. De plus on a

$$\|u\| \leq \frac{C}{\alpha}.$$

On considère le problème du transport de sable suivant : trouver $u(t, x)$ tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla u) = f & \text{sur } [0, T) \times \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u(t, \cdot) = 0 & \text{sur } [0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

2.2.3 Existence et unicité

On commence donc par chercher une formulation variationnelle de ce problème.

Etape 1 : Formulation variationnelle

Nous faisons jouer à la variable de temps t et la variable d'espace x des rôles différents. On considère ainsi la fonction $u(t, x)$ comme une fonction du temps, à valeur dans un espace fonctionnel en x , et on prend comme fonctions tests des fonctions qui dépendent seulement de la variable x . On obtient facilement la formulation variationnelle : trouver u tel que pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.2.2)$$

Pour donner un sens à cette formulation variationnelle, nous demandons la régularité suivante sur u :

$$u \in C^0([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], H_0^1(\Omega)).$$

L'espace $C^0([0, T], L^2(\Omega))$ est l'espace des fonctions $v(t, x)$ telles que pour tout t , $v(t, \cdot)$ est une fonction de $L^2(\Omega)$ et l'application qui à t associe la fonction $v(t, \cdot)$ est continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$. Il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))} = \sup_{t \in [0, T]} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

pour lequel c'est un espace de Banach. L'espace $L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$ est l'espace des fonctions $v(t, x)$ telles que pour presque tout t , $v(t, \cdot)$ est une fonction de $H_0^1(\Omega)$ et $\int_0^T \|v\|_{H_0^1}^2 < \infty$. Il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^2([0, T], H_0^1(\Omega))} = \left(\int_0^T \|v\|_{H_0^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour lequel c'est un espace de Banach.

La formulation variationnelle s'écrit donc : trouver $u \in C^0([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], H_0^1(\Omega))$, tel que $u(0, \cdot) = u_0$ et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.2.3)$$

La dérivée en temps dans (2.2.3) est à comprendre au sens des distributions sur $D([0, T])$.

Etape 2 : Résolution du problème sous forme variationnelle

On donne ici le principe d'une méthode de résolution, sans entrer dans tous les détails techniques. Nous nous référons aux travaux de [36], [34] et [15] pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (2.2.3).

Soit $a : (u, v) \mapsto a(u, v)$ la forme bilinéaire elliptique dans $H^1(\Omega)$ telle que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Alors, la formulation variationnelle du problème parabolique (2.2.3) se réécrit comme suit : trouver pour tout $t \in [0, T]$, $u : (t, x) \mapsto u(t, x)$ telle que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u v dx + a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.2.4)$$

Le résultat suivant permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution faible pour les problèmes paraboliques. Ce théorème joue un rôle comparable au théorème de Lax Milgram, pour les problèmes paraboliques. La forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

avec $\mathcal{A}(t, x) \in L^\infty([0, T] \times \Omega)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. la fonction $t \mapsto a(t, u, v)$ est mesurable $\forall u, v \in H^1(\Omega)$
2. $|a(t, u, v)| \leq M |u| |v|$ p.p $t \in [0, T]$, $u, v \in L^2(\Omega)$ avec $M \geq 0$ est une constante.
3. $a(t, u, u) \geq \alpha |u|^2$ p.p $t \in [0, T]$, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ où $\alpha > 0$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2.2 (*J. L. Lions*)

Soit $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, sous les hypothèses précédentes, il existe une unique solution u de (2.2.4) vérifiant

$$u \in L^2([0, T], H^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)), \quad \frac{du}{dt} \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$$

avec la condition $u(0) = u_0$.

Pour la preuve de ce théorème, voir [39]. Dans le cas où l'équation (2.2.4) est dégénérée, c'est à dire le coefficient $\mathcal{A}$ peut s'annuler, la méthode de Lions [38] et Ladyzenskaja et al [34] permet d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité. En effet, pour tout paramètre $\nu > 0$, on considère l'équation régularisée suivante de (2.2.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\nu}{\partial t} - \nabla((\mathcal{A} + \nu)\nabla u^\nu) = f \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ u^\nu(0, x) = u_0 \text{ dans } \Omega \\ u^\nu = 0 \text{ sur }]0, T[\times \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

On a donc le résultat suivant qui assure l'existence et l'unicité d'une solution u^ν de (2.2.5).

LEMMA 2.2.3 *Pour tout $T > 0$, si $u_0 \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, alors pour tout $\nu > 0$ il existe une unique solution $u^\nu \in L^2([0, T], H^1(\Omega))$ de (2.2.5) et vérifiant*

$$\|u^\nu\|_2 + \|u^\nu\|_\infty \leq \gamma \quad (2.2.6)$$

où γ est une constante indépendante de ν .

Comme les estimations (2.2.6) ne dépendent pas de ν , en passant directement à la limite, on a le lemme suivant :

LEMMA 2.2.4 *Pour tout $T > 0$, si $u_0 \in L^2 \cap L^\infty(\Omega)$, alors il existe une unique solution $u \in L^2([0, T], H^1(\Omega))$ de (2.2.1) et vérifiant*

$$\|u\|_2 + \|u\|_\infty \leq \gamma. \quad (2.2.7)$$

Chapter 3

Contexte général du problème de transport de sable

Ce chapitre a fait l'objet de la publication [43].

L'un des principaux objectifs de cette étude est de présenter le problème modélisant la dynamique de dunes de sable. Cette partie vise à construire des modèles appropriés à notre problème de transport de sable sous marins. La modélisation présentée dans cette partie s'inspire des travaux de [23], [5], et [6].

Sous l'influence des forces hydrodynamiques, les particules sédimentaires s'organisent régulièrement sous la forme de structures, périodiques ou non, lors de leur dépôt. Ces structures sédimentaires peuvent être caractérisées par leur morphologie. Cette dernière est liée à une multitude de paramètres tels que la granulométrie du sédiment, la nature et l'intensité des agents forcants, la disponibilité du sédiment ou encore la profondeur d'eau.

Les dunes sont des corps sédimentaires largement répandus et observés actuellement dans une multitude d'environnements actuels. En domaine continental, on observe des dunes dans les environnements désertiques ou littoraux; les dunes sont qualifiées d'éoliennes si elles sont façonnées par le vent.

Les dunes sont également produites dans les environnements aquatiques soumis à l'action des courants. On distingue deux types de dunes sous-aquatiques en fonction de l'agent dynamique responsable de leur formation et de leur évolution : les dunes tidales pour lesquelles l'agent essentiel est la marée et ses courants associés et les dunes non-tidales pour lesquelles les agents dynamiques dominants sont différents de la marée par exemple action de la houle, courants de dérive, courants profonds, écoulements gravitaires, etc. Cette multitude de phénomènes pouvant générer des dunes implique que les dunes aquatiques se répartissent dans des environnements variés, dès lors que les profondeurs sont suffisamment importantes et que les courants, unidirectionnels ou alternatifs, sont assez puissants. Les dunes sont des structures transverses, étant donnée l'orientation quasiment perpendiculaire de leur crête par rapport à la direction principale des courants. Comme pour les formations d'origine éolienne, les dunes sous-marines peuvent être caractérisées grâce à des paramètres et des indices morphologiques utilisés couramment par les sédimentologues marins.

L'amplitude, ou hauteur, et la longueur d'onde des dunes sont les paramètres morphologiques clas-

siquement utilisés par les sédimentologues marins pour caractériser les dunes. Dans le cas où les dunes se disposent de façon périodique, la longueur d'onde est la distance entre deux crêtes consécutives. Dans le cas où les dunes sont isolées, cette grandeur est régulièrement substituée par la largeur L de la dune qui correspond à la distance horizontale mesurée du pied de dune amont au pied de dune aval dans le sens du courant. En domaine aquatique, la hauteur et la longueur d'onde des dunes varient énormément en fonction des conditions environnementales. Berné et al. (1989) [10], dans leur essai de synthèse sur les dunes hydrauliques tidales actuelles, estiment que la hauteur et la longueur d'onde des dunes sont respectivement comprises entre 6 cm et une dizaine de mètres et entre 60 cm et plusieurs centaines de mètres. L'amplitude des dunes sous-marines est rarement supérieure à 20 m. Pour ce qui est de la longueur d'onde, Allen (1982b) [2] estime, en se basant sur 25 études, que la valeur maximale est de 1000 m. La forme des sections transversales de dunes varie principalement en fonction de la pente de ses flancs. Lorsque la pente du flanc doux est plus faible que celle du flanc raide, le profil de dune est qualifié d'asymétrique. Les dunes asymétriques sont généralement associées à un courant unidirectionnel, ou à des courants tidaux asymétriques, c'est-à-dire marqués par la prédominance d'une phase de courant par rapport à l'autre ([35]). Le flanc raide est alors orienté dans la direction où porte le courant, ce qui définit la polarité de la dune. Il est le siège d'avalanches sableuses qui permettent la migration de la dune (Berné, 1991 [11]). Lorsque les pentes des deux flancs sont semblables, la dune adopte alors un profil symétrique qui est généralement dû à des courants tidaux symétriques. La taille, ainsi que l'évolution des dunes sous-marines dépendent principalement de la granulométrie du sédiment dunaire, de la vitesse des courants et de la profondeur d'eau. L'existence, la taille et la forme des figures sédimentaires en milieu sous-marin dépendent principalement du régime d'écoulement du fluide, ainsi que de la granulométrie du sédiment. Deux types de régimes d'écoulements sont distingués : le régime d'écoulement inférieur dans lequel la résistance des particules au mouvement est élevée et leur déplacement modéré, et le régime d'écoulement supérieur dans lequel les particules sont entraînées en abondance, presque indépendamment de leur taille. Selon la vitesse de l'écoulement et son régime, différentes figures sédimentaires se mettent en place. Les dunes se développent lorsque l'intensité du courant augmente à partir de rides de plus petites dimensions. Amos et King [3] indiquent que, pour permettre la formation de tels corps sédimentaires, les vitesses de l'écoulement près du fond doivent être comprises entre $0,4$ et 1 m.s^{-1} pour des sables moyens, entre $0,5$ et 1 m.s^{-1} pour des sables grossiers et entre $0,6$ et 1 m.s^{-1} pour des sables très grossiers. La taille des grains composant les dunes est très variable et est généralement comprise entre les sables fins et les graviers. Flemming [27] a montré que plus le sédiment est grossier, plus les dimensions des dunes sont importantes. Dans cette étude, la compilation des paramètres descriptifs de 1500 dunes de divers environnements lui permet de proposer un modèle statistique sans discontinuité des rides aux dunes géantes à partir duquel il peut prévoir les dimensions maximales d'une dune (hauteur et longueur d'onde) en fonction de la granulométrie. Ainsi, pour un sédiment dont le diamètre moyen est de $0,125 \text{ mm}$, la hauteur et la longueur d'onde maximales sont respectivement de $0,8 \text{ m}$ et 7 m , alors que pour un sédiment de 1 mm , il prévoit des grandeurs maximales de 30 m et 600 m respectivement.

3.1 Construction d'un modèle de référence

De nombreux phénomènes physiques sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques. En effet, nous nous centrons sur la modélisation du phénomène physique conduisant à une équation de transport. Le processus physique sur lequel porte notre étude est la dynamique des dunes de sable marin, à proximité des côtes dans les zones soumises à la marée.

Pour comprendre la traduction mathématique de ce phénomène physique, on revoit brièvement le travail du météorologue et sédimentologiste Felix Maria Exner.

En effet, il développe une équation décrivant la conservation de la masse s'appliquant aux sédiments dans un système fluvial comme une rivière ; d'où il tire son nom.

L'équation de base indique que le changement en altitude z du lit, sur un temps t est égal à l'inverse de la densité de tassement des grains ε_0 multiplié par la divergence négative du flux q de sédiments

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot q. \quad (3.1.1)$$

Notons que ε_0 peut aussi être exprimé sous la forme $(1 - p)$ où p est égal à la porosité du lit. En effet, l'équation modélisant l'évolution d'un fond sableux sous l'action d'un courant (voir L.C Van Rijn [44] et Idier [28]) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{1 - p} \nabla \cdot q. \quad (3.1.2)$$

Dans cette équation, les champs dépendent du temps $t \in [0, T)$, pour $T > 0$, de la position dans la direction horizontale $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$. Le champ $z = z(x, t)$ désigne l'altitude du fond en la position x et à l'instant t et le champ $q = q(x, t)$ est le flux de volume de sable en la position x et à l'instant t . Le paramètre $p \in [0, 1]$ désigne la porosité du sable.

Ce flux de volume de sable est défini en fonction de la variation en altitude du fond marin et la vitesse de l'eau au voisinage du fond. Il est exprimé par la relation suivante :

$$q = q_f - |q_f| \lambda \nabla z \quad (3.1.3)$$

où $q_f = q_f(x, t)$ est le flux de volume de sable induit par le courant sur le fond plat et $|q_f|$ est sa norme. La constante λ est l'inverse de la pente maximale des dunes de sable lorsque la vitesse de l'eau est nulle c'est à dire sans courant au fond marin.

De façon générique, le flux q_f s'écrit comme suit [23]

$$q_f = \alpha \tilde{\chi} \left(g(|u|) - g(u) \right) \frac{u}{|u|} \quad (3.1.4)$$

où g est une fonction régulière positive définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\tilde{\chi}$ est une fonction régulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule sur $\mathbb{R}^-$. Le champ u désigne la vitesse de l'eau au voisinage du fond et u_c est la vitesse critique à partir de laquelle le courant met en mouvement le sable considéré si le fond est plat.

La plupart des formules du flux de transport de sédiments sont fonction de la contrainte de cisaillement du lit et ont été développées et calibrées sur des ensembles de données spécifiques. Par exemple, Bijker (1967,1971) [12] -[13] et Bailard (1981) [9] ont principalement validé leur formule aux données de terrain pour la dérive littorale; Van Rijn [44] a comparé leurs formules à une grande variété de données du laboratoire et du terrain.

L'une des premières formulations du flux de transport de sédiments encore utilisées dans les applications d'ingénierie a été proposée par Bijker. Elle est déduite de la formule de Frijlink (1952)[29] pour un courant seulement avec une modification de la contrainte de cisaillement du fond en utilisant un modèle de courant d'onde. La direction des flux de sédiments est toujours celle du courant puisque cette formule a été proposée pour estimer le flux de transport de sable sur le littoral. Le flux de

transport de sable au fond q_{sb} est exprimé comme :

$$q_{sb} = C_b d_{50} \sqrt{\frac{\mu_c \tau_c}{\rho}} \exp\left(-0.27 \frac{(\rho_s - \rho)gd}{\mu_c \tau_{cw}}\right)$$

où d_{50} est le diamètre médian de la taille du grain, h la profondeur de l'eau, C_b un paramètre d'onde déferlante, μ_c un paramètre d'ondulation, τ_c la contrainte de cisaillement due au courant seulement, τ_{cw} la contrainte de cisaillement due à interaction onde-courant, et ρ_s , ρ les densités de sédiments et d'eau, respectivement.

La formule de Van Rijn [44] est exprimée de la même manière que la formule de Bijker, en tant que formule du flux de transport de sable au fond prenant en compte l'influence des vagues comme un effet d'agitation. La direction des flux de sédiments est également celle du courant. Le flux de transport de sable peut être écrit comme suit :

$$q_{sb} = 0,25 d_{50} d_*^{-0.3} (\tau_{cw}/\rho)^{0.5} (\tau_{cw}/\tau_{cr} - 1) \quad (3.1.5)$$

où d_* le diamètre adimensionné des sédiments, τ_{cw} la contrainte de cisaillement due au courant et aux ondes. Van Rijn [44] a mis à jour sa formule du flux. Il a proposé une nouvelle formule simplifiée du transport de particule au fond pour un flux constant (avec ou sans vagues) :

$$q_{sb} = 0.015 U_c h \left(\frac{d_{50}}{h}\right)^{1.2} \Psi^{1.5}$$

où

$$\Psi = (U_e - U_{cr}) / \sqrt{(s-1)gd_{50}}$$

est le paramètre de mobilité, $U_e = U_c + \gamma U_w$ la vitesse effective avec $\gamma = 0.4$ pour les ondes irrégulières et $\gamma = 0,8$ pour les ondes régulières, U_{cr} la vitesse critique pour la création du mouvement.

Dans la suite du présent document, nous nous limitons aux lois de type Van Rijn [44] qui consiste à écrire d'après la relation (3.1.5)

$$q_f = \alpha \chi \left(D_G \left(|\tau_b| - \tau_c \right) \right) \frac{\tau_b}{|\tau_b|}, \quad (3.1.6)$$

où τ_b est la densité de contrainte de cisaillement imposée par l'eau sur le fond marin. Il est exprimé en fonction de la vitesse de l'eau au voisinage du fond. Cette quantité τ_b est définie par

$$\tau_b = \rho \frac{|u|^2}{C^2} \frac{u}{|u|}, \quad (3.1.7)$$

où ρ est la densité de l'eau, C est une constante définie par

$$C = \ln\left(\frac{12d}{3D_G}\right), \quad (3.1.8)$$

d étant la hauteur de l'eau au-dessus du fond marin et D_G étant le diamètre du grain de sable. Le seuil τ_c s'exprime comme suit

$$\tau_c = \rho \frac{u_c^2}{C^2}. \quad (3.1.9)$$

Si nous injectons les relations (3.1.7) et (3.1.9) dans la relation (3.1.6) alors nous obtenons

$$q_f = \alpha \chi \left(D_G \left(\left| \rho \frac{|u|^2}{C^2} \frac{u}{|u|} - \rho \frac{u_c^2}{C^2} \right| \right) \right) \frac{\rho \frac{|u|^2}{C^2} \frac{u}{|u|}}{\left| \rho \frac{|u|^2}{C^2} \right|}. \quad (3.1.10)$$

Au final, on obtient

$$q_f = \alpha \chi \left(D_G \rho \left(\frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \right) \cdot \frac{u}{|u|}. \quad (3.1.11)$$

Le coefficient $\alpha > 0$ est lié à la géométrie des grains de sable. En injectant la relation (3.1.11) dans la relation (3.1.3) alors, le flux de volume de sable se réécrit de la façon suivante :

$$q = \alpha \chi \left(D_G \rho \left(\frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \right) \frac{u}{|u|} - \left| \alpha \chi \left(D_G \rho \left(\frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \right) \frac{u}{|u|} \right| \lambda \nabla z \quad (3.1.12)$$

or comme χ est une fonction positive alors,

$$q = \alpha \chi \left(D_G \rho \left(\frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \right) \frac{u}{|u|} - \alpha \chi \left(D_G \rho \left(\frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \right) \frac{|u|}{|u|} \lambda \nabla z, \quad (3.1.13)$$

ou encore

$$q = \alpha \chi \left(D_G \rho \left(\frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \right) \frac{u}{|u|} - \alpha \chi \left(D_G \rho \left(\frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \right) \lambda \nabla z. \quad (3.1.14)$$

Enfin, on a :

$$q = \alpha \chi \left(D_G \rho \left(\frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \right) \left[\frac{u}{|u|} - \lambda \nabla z \right]. \quad (3.1.15)$$

En injectant (3.1.15) dans (3.1.2), nous obtenons par conséquent la formule de transport de sable suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\alpha}{1-p} \nabla \cdot \left[\chi \left(D_G \rho \frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \left(\frac{u}{|u|} - \lambda \nabla z \right) \right] = 0. \quad (3.1.16)$$

D' où l'équation modélisant l'évolution des dunes de sable s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\alpha}{1-p} \nabla \cdot \left[\chi \left(D_G \rho \frac{|u|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \left(\frac{u}{|u|} - \lambda \nabla z \right) \right] = 0. \quad (3.1.17)$$

Les opérateurs ∇ et $\nabla \cdot$ désignent le gradient et la divergence. La fonction χ est définie par :

$$\chi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma < 0 \\ |\sigma|^{\frac{3}{2}} & \text{si } \sigma \geq 0. \end{cases} \quad (3.1.18)$$

Cette équation traduit que, lorsqu'il ya un courant avec une vitesse suffisante celui-ci transporte le sable et que ce transport est augmenté ou diminué par l'effet conjugué de la direction du courant et celle de la pente des dunes.

3.1.1 Adimensionnement du modèle

L'adimensionnement (parfois appelé aussi dédimensionnement) est la suppression partielle ou totale des unités d'une équation par une substitution appropriée de variables, dans le but de simplifier la représentation paramétrique de problèmes physiques. Nous présentons ici l'adimensionnement de l'équation de transport de sable de notre modèle de référence.

Les variables adimensionnées $\tilde{\zeta}$ sont liées aux variables physiques par un facteur multiplicatif $\bar{\zeta}$, selon

$$\zeta = \bar{\zeta} \tilde{\zeta}$$

que nous allons expliciter.

Pour cela nous introduisons un temps caractéristique d'observation $\bar{t}$ et une longueur caractéristique $\bar{L}$ puis nous définissons les variables sans dimensions $\tilde{t}$ et $\tilde{x}$ par $t = \bar{t}\tilde{t}$, $x = \bar{L}\tilde{x}$. Nous définissons également $\bar{z}$ la hauteur caractéristique des dunes et la hauteur adimensionnée du fond $\tilde{z}$ définie par:

$$\tilde{z}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{\bar{z}} z(\bar{t}\tilde{t}, \bar{L}\tilde{x}). \quad (3.1.19)$$

En ce qui concerne les coefficients de l'équation, nous considérons la vitesse caractéristique de l'eau $\bar{u}$, la hauteur d'eau moyenne H et $\bar{M}$ la valeur caractéristique de la variation de la hauteur due à la marée. Puis nous définissons les champs adimensionnés du courant $\tilde{u}$ et de variation de hauteur d'eau $\tilde{m}$ par:

$$\tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{\bar{u}} u(\bar{t}\tilde{t}, \bar{L}\tilde{x}), \quad \tilde{m}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{\bar{M}} (d(\bar{t}\tilde{t}, \bar{L}\tilde{x}) - H). \quad (3.1.20)$$

En utilisant la relation de type

$$\nabla z(t, x) = \frac{\bar{z}}{\bar{L}} \tilde{\nabla} \tilde{z}(\tilde{t}, \tilde{x}) \quad (3.1.21)$$

et les relations définissant les variables adimensionnées, on a :

$$\frac{\partial(\tilde{z}\tilde{z})}{\partial(\tilde{t}\tilde{t})} + \frac{\alpha}{1-p} \frac{1}{\bar{L}} \tilde{\nabla} \cdot \left[\chi \left(D_G \rho \frac{|\tilde{u}\tilde{u}|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \left(\frac{\tilde{u}\tilde{u}}{|\tilde{u}\tilde{u}|} - \lambda \frac{1}{\bar{L}} \tilde{\nabla} \tilde{z}\tilde{z} \right) \right] = 0, \quad (3.1.22)$$

ou encore

$$\frac{\tilde{z}\partial\tilde{z}}{\partial\tilde{t}\tilde{t}} + \frac{\alpha}{1-p} \frac{1}{\bar{L}} \tilde{\nabla} \cdot \left[\chi \left(\frac{D_G \rho \bar{u}^2}{C^2} \left(|\tilde{u}|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2} \right) \right) \left(\frac{\tilde{u}}{|\tilde{u}|} - \lambda \frac{1}{\bar{L}} \tilde{\nabla} \tilde{z} \right) \right] = 0. \quad (3.1.23)$$

En tenant compte du fait que $\frac{\bar{M}}{H}$ est petit on a :

$$C = \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right) + \ln\left(1 + \frac{\bar{M}}{H} \tilde{m}\right) \simeq \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right) + \frac{\bar{M}}{H} \tilde{m}. \quad (3.1.24)$$

À partir de (3.1.24), nous faisons l'approximation suivante :

$$\frac{1}{C^3} \simeq \frac{1}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3} \left(1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \tilde{m}\right). \quad (3.1.25)$$

$$\frac{1}{C^2} = \left(\frac{1}{C^3}\right)^{\frac{2}{3}} \simeq \frac{1}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^2} \left(1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \tilde{m}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.1.26)$$

On utilise la définition de la fonction χ pour déterminer l'image de la quantité suivante par la fonction χ .

$$\frac{D_G \rho \bar{u}^2}{C^2} = D_G \rho \bar{u}^2 \left(\frac{1}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^2} \left(1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \tilde{m}\right)^{\frac{2}{3}} \right)$$

ou

$$\frac{D_G \rho \bar{u}^2}{C^2} = \frac{D_G \rho \bar{u}^2}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^2} \left(1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \tilde{m}\right)^{\frac{2}{3}}$$

qui vaut

$$\chi\left(\frac{D_G \rho \bar{u}^2}{C^2}\right) = \left[\frac{D_G \rho \bar{u}^2}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^2}\right]^{\frac{3}{2}} \left[\left(1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \tilde{m}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} \quad (3.1.27)$$

ou

$$\chi\left(\frac{D_G \rho \bar{u}^2}{C^2}\right) = \frac{(D_G)^{\frac{3}{2}} \bar{u}^3}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3} \left(1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \tilde{m}\right). \quad (3.1.28)$$

En multipliant l'équation (3.1.23) par $\frac{\bar{t}}{\bar{z}}$ et en y injectant la relation (3.1.28) alors, nous obtenons le modèle adimensionné de (3.1.17) que nous cherchions dont la variable est $\tilde{z}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{t}} - \frac{\lambda}{1-p} \alpha \frac{\bar{t} \bar{u}^3 (\rho D_G)^{\frac{3}{2}}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L}^2} \tilde{\nabla} \cdot ((1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \tilde{m}) \chi(|\tilde{u}|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}) \tilde{\nabla} \tilde{z}) = \\ \frac{1}{1-p} \alpha \frac{\bar{t} \bar{u}^3 (\rho D_G)^{\frac{3}{2}}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L} \tilde{z}} \tilde{\nabla} \cdot ((1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \tilde{m}) \chi(|\tilde{u}|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}) \frac{\tilde{u}}{|\tilde{u}|}). \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Pour simplifier les notations, nous utilisons l'équation adimensionnée en omettant les tildes. Nous considérons donc l'équation de transport de sable suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\lambda}{1-p} \alpha \frac{\bar{t} \bar{u}^3 (\rho D_G)^{\frac{3}{2}}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L}^2} \nabla \cdot ((1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} m) \chi(|u|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}) \nabla z) = \\ \frac{1}{1-p} \alpha \frac{\bar{t} \bar{u}^3 (\rho D_G)^{\frac{3}{2}}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L} \bar{z}} \nabla \cdot ((1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} m) \chi(|u|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}) \frac{u}{|u|}). \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Ayant ce modèle sans dimension à portée de main, nous allons maintenant considérer les valeurs caractéristiques correspondant aux différentes situations pour l'évolution des dunes à court, à moyen et à long terme et pour le sable de petit et gros grains. Tout d'abord, nous fixons les valeurs caractéristiques qui sont appropriées à chaque situation, ce qui va faire apparaître un petit paramètre ϵ .

Sachant que les dunes sous-marines du type que nous étudions, existent dans les océans côtiers dont le socle rocheux est relativement plat avec une hauteur d'eau environ 30m à 50m, avec une marée ayant des courants plutôt forts mais une variation de la hauteur due à la marée modérée, nous posons $\bar{u} = 1m/s$, $H = 50m$ et $\bar{M} = 5m$. Comme de plus $\frac{\lambda}{1-p}$ est de l'ordre 1, donc nous prenons $\frac{\lambda}{1-p} = 1$ et $\frac{1}{1-p} = 2$.

3.1.2 Modèles paramétrés par ϵ

Nous considérons ici plusieurs cas d'évolution des dunes sous-marines en fonction du temps caractéristique et de la taille des grains de sable.

La dynamique à court terme des dunes faites de petits grains de sable:

La situation choisie ici est celle de dunes faites de petits grains de sable, c'est-à-dire avec un diamètre $D_G \simeq 0,1mm = 10^{-4}m$ selon Flemming [27] et Idier [28], avec un tel sable, les dunes générées font un mètre de hauteur et une dizaine de mètres de longueur. Cela nous amène à poser $\bar{z} = 1m$ et $\bar{L} = 10m$. Vu que les dunes marines ne connaissent pas d'évolution significative sur des périodes inférieures à quelques mois, nous fixons pour la longueur de la période d'observation $\bar{t} = 100jours \sim 2400heures \sim 8,6.10^6s$. En introduisant la fréquence de marée $\bar{\omega}$, $\bar{t}$ doit être comparée à la période de marée $\frac{1}{\bar{\omega}} \sim 13heures \sim 4,7.10^4s$, ce qui met en évidence un petit paramètre $\epsilon = \frac{1}{\bar{\omega} \bar{t}} \sim \frac{1}{200}$.

En plus, nous considérons que la vitesse critique $\frac{u_c^2}{\bar{u}^2} = 0$.

À partir de ces données, nous allons calculer les coefficients de l'équation (3.1.30). Par conséquent on a :

$$\frac{\lambda}{1-p} \alpha \frac{\bar{t} \bar{u}^3 (\rho D_G)^{\frac{3}{2}}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L}^2} \sim 90 \sim \frac{1}{2\epsilon},$$

$$\frac{1}{1-p} \alpha \frac{\bar{t} \bar{u}^3 (\rho D_G)^{\frac{3}{2}}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L}^2 \bar{z}} \sim 1800 \sim \frac{10}{\epsilon},$$

$$3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \sim 2.10^{-2} \sim 4\epsilon.$$

Ainsi, l'équation (3.1.30) devient :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2\epsilon} \nabla \cdot ((1 - 4\epsilon m) \chi(|u|^2) \nabla z) = \frac{10}{\epsilon} \nabla \cdot ((1 - 4\epsilon m) \chi(|u|^2) \frac{u}{|u|}). \quad (3.1.31)$$

Or, d'après la définition de la fonction χ on a $\chi(|u|^2) = |u|^3$ puis en remplaçant dans l'équation on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2\epsilon} \nabla \cdot ((1 - 4\epsilon m) |u|^3 \nabla z) = \frac{10}{\epsilon} \nabla \cdot ((1 - 4\epsilon m) |u|^2 u). \quad (3.1.32)$$

En ce qui concerne les champs des fluides u et m , comme ils sont les modèles adimensionnés de fonctions périodiques à amplitude modulée et de période de marée, nous supposons :

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathcal{U}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \text{ et } \mathbf{m}(t, x) = \mathcal{M}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \quad (3.1.33)$$

où $\mathcal{U}$ et $\mathcal{M}$ sont deux fonctions régulières vérifiant $\theta \mapsto (\mathcal{U}, \mathcal{M})$ périodique de période 1, avec une valeur moyenne nulle.

La dynamique à court terme des dunes faites de gros grains de sable

Dans ce cas, nous fixons les valeurs caractéristiques suivantes :

$$\bar{t} = 100 \text{jours} \sim 2400 \text{heures} \sim 8,6.10^6 s$$

$$\frac{1}{\bar{\omega}} \sim 13 \text{heures} \sim 4,7.10^4 s, D_G = 5.10^{-3}$$

$$\bar{z} = 1m, \bar{L} = 10m, u_c = \frac{1}{2} m/s.$$

Alors

$$\frac{\lambda}{1-p} \alpha \frac{\bar{t} \bar{u}^3 (\rho D_G)^{\frac{3}{2}}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L}^2} \sim 90 \sim \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\frac{1}{1-p} \alpha \frac{\bar{t} \bar{u}^3 (\rho D_G)^{\frac{3}{2}}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L}^2 \bar{z}} \sim 1000 \sim \frac{5}{\epsilon}$$

$$3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} \sim 1.3.10^{-2} \sim 3\epsilon.$$

Par conséquent l'équation (3.1.30) se réécrit :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2\epsilon} \nabla \cdot ((1 - 3\epsilon m) \chi(|u|^2 - \frac{1}{2}) \nabla z) = \frac{5}{\epsilon} \nabla \cdot ((1 - 3\epsilon m) \chi(|u|^2 - \frac{1}{2}) \frac{u}{|u|}). \quad (3.1.34)$$

La dynamique à moyen terme des dunes faites de petits grains de sable

Dans le moyen terme, nous fixons une période de temps d'observation de $4,5 \text{ans} \sim 54 \text{mois} \sim 1,4.10^8 s$. Ainsi en comparant $\bar{t} = 1,4.10^8$ à la période $\frac{1}{\bar{\omega}} \sim 13 \text{heures} \sim 4,7.10^4 s$, nous obtenons :

$$\epsilon = \frac{1}{\bar{t} \bar{\omega}} \sim \frac{1}{3000}.$$

Nous considérons également une deuxième période de marée qui est le temps pour la terre, la lune et le soleil de retrouver les mêmes positions relatives. Cette période de temps $\frac{1}{\bar{\omega}_c}$ est environ un mois. Donc, nous avons :

$$\frac{1}{\bar{t}\bar{\omega}_c} \sim \frac{1}{54} \sim \sqrt{\epsilon}.$$

Nous prenons également

$$D_G = 5.10^{-5}, \bar{z} = 1m, \bar{L} = 10m, u_c = 0,$$

alors on a :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot ((1 - \sqrt{\epsilon}m)|u|^3 \nabla z) = \frac{20}{\epsilon} \nabla \cdot ((1 - \sqrt{\epsilon}m)|u|^2 u). \quad (3.1.35)$$

En ce qui concerne les champs de fluides dans cette situation, nous considérons :

$$u(x, t) = \tilde{\mathcal{U}}(x, t, \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}, \frac{t}{\epsilon}), m(x, t) = \mathcal{M}(x, t, \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}, \frac{t}{\epsilon}), \quad (3.1.36)$$

afin de prendre en compte les deux périodes de marée.

Dans (3.1.36), nous prenons $\tilde{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{M}$ comme des fonctions régulières de telle sorte que :

$$\begin{cases} \tau \mapsto (\tilde{\mathcal{U}}(t, \tau, \theta, x), & \mathcal{M}(t, \tau, \theta, x)) \\ \theta \mapsto (\tilde{\mathcal{U}}(t, \tau, \theta, x), & \mathcal{M}(t, \tau, \theta, x)) \end{cases} \quad (3.1.37)$$

soient périodiques de période 1.

La dynamique à long terme des dunes faites de petits grains de sable

Nous prenons ici une période de temps $\bar{t} \sim 16ans \sim 1.4.10^5 heures \sim 5.10^9 s$. Nous comparons cette dernière à une deuxième période de marée $\frac{1}{\bar{\omega}_c} \sim 1mois \sim 2,6.10^6 s$. Ainsi, nous définissons ϵ par la relation suivante:

$$\frac{1}{\bar{t}\bar{\omega}_c} \sim \frac{1}{192} \sim \epsilon,$$

puis nous posons

$$D_G = 7.10^{-5}, \bar{z} = 1m, \bar{L} = 10m, u_c = 0.$$

En calculant les coefficients de l'équation (3.1.30) dans cette situation, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot ((1 - 4\epsilon m)(|u|^3) \nabla z) = \frac{20}{\epsilon^2} \nabla \cdot ((1 - 4\epsilon m)(|u|^2)|u|). \quad (3.1.38)$$

Comme dans la deuxième période de marée, le phénomène de la marée peut presque être considéré réellement périodique, alors nous posons :

$$u(x, t) = \mathcal{U}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) + \epsilon \mathcal{U}_1(t, \frac{t}{\epsilon}, x) + \epsilon^2 \mathcal{U}_2(t, \frac{t}{\epsilon}, x),$$

$$m(x, t) = \mathcal{M}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) + \epsilon^2 \mathcal{M}_2(t, \frac{t}{\epsilon}, x),$$

où $\mathcal{U}, \mathcal{U}_2, \mathcal{M}, \mathcal{M}_2$ sont des fonctions régulières telles que

$$\theta \mapsto (\mathcal{U}(\theta, x), \mathcal{U}_2(t, \theta, x), \mathcal{M}(\theta, x), \mathcal{M}_2(t, \theta, x))$$

est périodique de période 1 et vérifie

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{U}(\theta, x) d\theta &= 0, \\ \int_0^1 \mathcal{M}(\theta, x) d\theta &= 0. \end{aligned}$$

3.2 Modèle mathématique du problème de transport de sable

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au caractère bien posé des modèles proposés dans la section précédente dans un domaine du type $[0, T) \times \Omega$ où Ω est un ouvert borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ contenant le tore de dimension 2 et $T > 0$. L'étude des différents modèles proposés dans le paragraphe précédent a été déjà étudié dans un domaine périodique en espace, le tore de dimension 2, qui est sans bord. Dans cette présente partie, nous tentons de généraliser les résultats obtenus par Faye et al [23] en considérant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. L'une des difficultés majeures auxquelles nous sommes confrontées, est la présence d'une intégrale sur le bord, qu'il faudra ménager, pour borner la solution z^ϵ du problème considéré. L'existence en général de solution du problème modèle, découle des résultats obtenus par Lions [38] et Ladyzenkaja et al [34]. Par ailleurs, en considérant l'équation d'Exner donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \nabla \cdot q = 0 \text{ dans } [0, T) \times \Omega \\ q = q_f - |q_f| \lambda \nabla z \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où le flux de transport q_f donné par la formule de Van Rijn [44]. Faye et al [23] ont montré que le modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \text{ dans } [0, T) \times \mathbb{T}^2 \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) \text{ dans } \mathbb{T}^2, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

est valable pour la dynamique des dunes de sable à court terme, à proximité des côtes, dans les zones soumises à la marée où $z_0 \in H^1(\mathbb{T}^2)$ est une fonction donnée et $\mathbb{T}^2$ désigne le tore de dimension 2. Les coefficients $\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{C}^\epsilon$ sont définis par

$$\mathcal{A}^\epsilon(t, x) = a(1 - b\epsilon \mathbf{m})g_a(|\mathbf{u}|) \text{ et } \mathcal{C}^\epsilon(t, x) = c(1 - b\epsilon \mathbf{m})g_c(|\mathbf{u}|) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (3.2.3)$$

où $\epsilon > 0$ et a, b, c sont des nombres réels. Les champs de fluides $\mathbf{u}, \mathbf{m}$

$$\mathbf{u} : [0, T) \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \text{ et } \mathbf{m} : [0, T) \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.2.4)$$

représentent respectivement la vitesse et la variation de la hauteur de l'eau. Ces champs s'expriment comme suit :

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathcal{U}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \text{ et } \mathbf{m}(t, x) = \mathcal{M}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \quad (3.2.5)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} = \mathcal{U}(t, \theta, x), \mathcal{M} = \mathcal{M}(t, \theta, x) \text{ des fonctions régulières sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \\ \theta \longmapsto (\mathcal{U}, \mathcal{M}) \text{ périodique de période 1} \\ |\mathcal{U}|, |\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}|, |\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta}|, |\nabla \mathcal{U}|, |\mathcal{M}|, |\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t}|, |\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta}|, |\nabla \mathcal{M}| \text{ sont bornés par } d \\ \forall (t, \theta, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2, |\mathcal{U}(t, \theta, x)| \leq U_{thr} \implies \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = 0, \nabla \mathcal{U}(t, \theta, x) = 0, \nabla \mathcal{M}(t, \theta, x) = 0 \\ \exists \theta_\alpha < \theta_\omega \in [0, 1], \text{ tels que, } \forall \theta \in [\theta_\alpha, \theta_\omega] \implies |\mathcal{U}(t, \theta, x)| \geq U_{thr}. \end{array} \right. \quad (3.2.6)$$

g_a et g_c sont des fonctions positives et satisfont les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_a \geq g_c \geq 0, \quad g_c(0) = g'_c(0) = 0, \\ \exists d \geq 0, \quad \sup_{u \in \mathbb{R}^+} |g_a(u)| + \sup_{u \in \mathbb{R}^+} |g'_a(u)| \leq d, \quad \sup_{u \in \mathbb{R}^+} |g_c(u)| + \sup_{u \in \mathbb{R}^+} |g'_c(u)| \leq d, \\ \exists U_{thr} \geq 0, \quad \exists G_{thr} > 0, \quad \text{tels que } u \geq U_{thr} \implies g_a(u) \geq G_{thr}. \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

Maintenant, on choisit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert de frontière $\partial\Omega$ et de classe $\mathcal{C}^1$ contenant le tore $\mathbb{T}^2$ sous lequel le sable ne sort pas. Ainsi, le produit scalaire du flux de transport du sable q par la normale n s'annule c'est à dire $q \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. Comme

$$q = q_f - |q_f| \lambda \nabla z, \quad (3.2.8)$$

alors

$$q \cdot n = q_f \cdot n - |q_f| \lambda \nabla z \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (3.2.9)$$

Ainsi, on a :

$$\nabla z \cdot n = \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{q_f \cdot n}{|q_f| \lambda} = \tilde{g} \text{ sur } \partial\Omega \quad (3.2.10)$$

valide une condition aux limites.

Par conséquent, l'équation (3.2.2) peut être munie d'une condition aux limites

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \partial\Omega. \quad (3.2.11)$$

Ainsi, le modèle que nous retenons dans la suite de cette étude est régi par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \text{ dans } [0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (3.2.12)$$

où $g \in L^2([0, T), H^{\frac{1}{2}}(\Omega))$ est une fonction donnée.

Dans la section suivante, nous montrons que le problème (3.2.12) est bien posé.

3.3 Existence et unicité de la solution du problème de transport du sable

Nous énonçons, dans cette section, l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.2.12) associée à l'une des conditions aux limites présentées ci-dessus. Nous y considérons le modèle à court terme de l'évolution des dunes dans les environnements soumis à la marée. Les résultats d'existence et d'unicité des modèles à court, à moyen et à long terme du transport de sable dans un domaine non borné appelé tore furent étudiés par I.Faye et al dans [23] et [24]. Ceci ne reflète pas en général, la réalité. Dans ce présent travail, nous considérons le même problème, dans un domaine Ω de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui nécessite donc des conditions aux limites de Dirichlet ou Neumann au problème de transport de sable.

Suivant l'hypothèse (3.2.5), nous pouvons écrire par analogie les deux relations suivantes :

$$\mathcal{A}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \text{ et } \mathcal{C}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \quad (3.3.1)$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \theta, x) = a(1 - b\epsilon\mathcal{M}(t, \theta, x))g_a(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|), \quad (3.3.2)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \theta, x) = c(1 - b\epsilon\mathcal{M}(t, \theta, x))g_c(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|}, \quad (3.3.3)$$

où $\mathcal{U}$ et $\mathcal{M}$ sont donnés dans la relation (3.2.5). Un modèle pertinent pour la dynamique à court terme des dunes est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \text{ dans } [0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.4)$$

où $z_0 \in H^1(\Omega)$, $g \in L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\Omega))$ et Ω est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a le résultat suivant.

THÉORÈME 3.3.1 *Soit Ω un ouvert mesurable de classe $\mathcal{C}^1$; sous les hypothèses (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7) et pour $T > 0$, $\epsilon > 0$ et $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, si $z_0 \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}}(\Omega))$ alors le problème (3.3.4) admet une unique solution dans $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$ qui vérifie*

$$\|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))} \leq \tilde{\gamma} \quad (3.3.5)$$

ou $\tilde{\gamma}$ est une constante qui dépend uniquement de z_0 , G_{thr} et g .

Grâce aux hypothèses (3.2.5), (3.2.6) et (3.2.7), on peut montrer que les coefficients $\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon$ et $\tilde{\mathcal{C}}_\epsilon$ donnés par (3.3.2) et (3.3.3) ainsi que leurs dérivées, sont bornés sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega$ par une constante γ ne dépendant pas de ϵ .

En se référant sur I.Faye et al [23], nous considérons les deux problèmes suivants: $\forall \mu > 0, \forall \nu > 0$, trouver $\mathcal{S}^\nu = \mathcal{S}^\nu(t, \theta, x)$ et $\mathcal{S}_\mu^\nu = \mathcal{S}_\mu^\nu(t, \theta, x)$ périodiques de période 1 en θ solutions respectives des systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} - \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \text{ dans } [0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \mathcal{S}^\nu(0, 0, x) = z_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.6)$$

et

$$\begin{cases} \mu \mathcal{S}_\mu^\nu + \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} - \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \text{ dans } [0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \mathcal{S}_\mu^\nu(0, 0, x) = z_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

De plus, nous supposons que :

$$\forall \epsilon > 0, \mu > 0, \nu > 0, (\mathcal{A}^\epsilon + \nu)g + \mathcal{C}^\epsilon \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (3.3.8)$$

où n est la normale extérieure sur Ω . Cette hypothèse est très importante, dans la suite, car elle permettra de se passer directement de l'intégrale sur le bord. Dans le cas où la divergence moyenne de

$$-(\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \theta, x) + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu - \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \theta, x)$$

est non nulle, alors on ajoute au problème (3.3.7) une expression de la forme

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \left((\mathcal{A}^\epsilon + \nu)g + \mathcal{C}^\epsilon \cdot n \right) d\sigma = 0,$$

où σ est la mesure surfacique sur le bord $\partial\Omega$.

REMARQUE 3.3.1 Pour tout $0 \leq \epsilon \leq 1$, l'application $\theta \longrightarrow (\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{C}_\epsilon)$ est périodique de période 1, et il existe une constante $\tilde{G}_{thr}$ et $\theta_\alpha, \theta_\omega \in [0, 1], \theta_\alpha < \theta_\omega$ vérifiant

$$\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \geq \tilde{G}_{thr}, \forall (t, \theta, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (3.3.9)$$

et tels que $\forall (t, \theta, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega$

$$\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \theta, x) \leq \tilde{G}_{thr} \implies \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}(t, \theta, x) &= 0 \\ \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \theta, x) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}(t, \theta, x) &= 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \theta, x) &= 0. \end{cases} \quad (3.3.10)$$

Alors, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.3.2 *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.3.1 et les hypothèses (3.3.9) et (3.3.10), $\forall \epsilon > 0, \nu > 0, \mu > 0$, le problème (3.3.7) admet une unique solution $\mathcal{S}_\mu^\nu = \mathcal{S}_\mu^\nu(t, \theta, x)$ périodique de période 1. De plus, il existe des constantes $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_6$ ne dépendant que de Ω, γ, ν, g tels que*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \int_{\Omega} \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, x) dx \right| = 0, \quad (3.3.11)$$

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega))} \leq \sqrt{2 \frac{\gamma^2}{\nu} |\Omega|^2 + \|z_0\|_2^2 + \left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2}, \quad (3.3.12)$$

$$\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \frac{\gamma |\Omega|}{\nu}, \quad (3.3.13)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma |\Omega|}{\nu} \right)^2 + \frac{\gamma |\Omega|}{\nu} \right), \quad (3.3.14)$$

$$\left\| \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma_2, \quad (3.3.15)$$

$$\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_{\#}^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_3, \quad (3.3.16)$$

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_{\#}^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_3, \quad (3.3.17)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L_{\#}^\infty(\mathbb{R}, H^1)}^2 \leq \gamma_6. \quad (3.3.18)$$

Preuve En intégrant (3.3.7) sur Ω alors, nous obtenons

$$\mu \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left((\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right) dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} dx. \quad (3.3.19)$$

En utilisant la formule de Green dans le troisième terme du premier membre de l'équation (3.3.19) alors, on a

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx + \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial n} d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n d\sigma \\ \mu \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx + \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx &= \int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) g + \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Du fait de l'hypothèse (3.3.8), on a

$$\mu \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx + \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx = 0. \quad (3.3.21)$$

L'équation ci-avant est une équation différentielle ordinaire dont la solution peut être écrite comme suit :

$$\int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}(\theta_0 + 1, \cdot) dx = e^{-\mu} \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}(\theta_0, \cdot) dx. \quad (3.3.22)$$

Comme la fonction $\theta \rightarrow \mathcal{S}_{\mu}(\theta, \cdot)$ est périodique de période 1 alors, la seule possibilité de satisfaire l'équation (3.3.22) est que:

$$\int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}(\theta, \cdot) dx = 0 \quad \text{pour tout } \theta \in [0; 1].$$

Au final, la relation (3.3.11) est vraie.

En multipliant l'équation (3.3.7) par $\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}$ et en l'intégrant sur Ω alors, on a :

$$\mu \int_{\Omega} \left| \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left((\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right) \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx. \quad (3.3.23)$$

En utilisant la formule de Green sur Ω dans les deux derniers termes du premier membre de l'équation (3.3.23) alors, on a

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left((\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right) \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx = - \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx + \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \cdot n \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx \quad (3.3.24)$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx \quad (3.3.25)$$

où n désigne la normale extérieure à Ω et σ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$. Dans chacune des intégrales sur le bord, $\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}$ est à comprendre comme $\gamma_1(\mathcal{S}_{\mu}^{\nu})$.

En injectant les relations (3.3.24) et (3.3.25) dans l'équation (3.3.23), alors on obtient :

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \left| \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \left| \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \left| \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial n} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} d\sigma &= - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx + \\ &\int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} d\sigma. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) g \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} d\sigma = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx \\ + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} d\sigma \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx = \int_{\partial\Omega} ((\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu)g + \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n) \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} d\sigma \\ - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (3.3.8), l'équation devient :

$$\mu \int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx. \quad (3.3.26)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans le second membre de l'équation (3.3.26) et en majorant, on a :

$$\mu \int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \leq \gamma |\Omega| \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.3.27)$$

En intégrant de 0 à 1 par rapport à la variable θ , on a

$$\mu \int_0^1 \|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_{L^2(\Omega)}^2 d\theta + \int_0^1 \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx d\theta \leq \gamma |\Omega| \int_0^1 \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_{L^2(\Omega)} d\theta, \quad (3.3.28)$$

puis comme $\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu \geq \nu$ et $\|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_{L^2}^2 \geq 0$, alors on en déduit que

$$\nu \int_0^1 \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx d\theta \leq \gamma |\Omega| \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \quad (3.3.29)$$

ou

$$\nu \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma |\Omega| \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \quad (3.3.30)$$

ce qui permet finalement d'obtenir

$$\|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \frac{\gamma}{\nu} |\Omega|. \quad (3.3.31)$$

Par ailleurs, on a :

$$\mu \|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2) + \nu \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2 \leq \gamma |\Omega| \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2. \quad (3.3.32)$$

En intégrant la relation (3.3.32) de 0 à θ , pour tout $\theta \in [0, 1]$, on obtient

$$\mu \int_0^{\theta} \|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \frac{d}{d\theta} (\|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2) d\theta + \nu \int_0^{\theta} \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2 d\theta \leq \gamma |\Omega| \int_0^{\theta} \|\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2 d\theta. \quad (3.3.33)$$

En tenant compte de la positivité du premier et du troisième terme du premier membre de (3.3.33) alors, on a

$$\frac{1}{2} \left(\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot) \right\|_2^2 - \left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(0, \cdot) \right\|_2^2 \right) \leq \gamma |\Omega| \int_0^1 \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2 d\theta \quad (3.3.34)$$

ou

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot) \right\|_2^2 \leq 2\gamma |\Omega| \int_0^1 \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2 d\theta + \left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(0, \cdot) \right\|_2^2 \quad (3.3.35)$$

ou encore

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot) \right\|_2^2 \leq 2\gamma |\Omega| \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} + \left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(0, \cdot) \right\|_2^2. \quad (3.3.36)$$

D'où

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot) \right\|_2^2 \leq 2 \frac{\gamma^2}{\nu} |\Omega|^2 + \left\| z_0 \right\|_2^2. \quad (3.3.37)$$

Enfin, si nous intégrons encore une fois sur $[0, 1]$ la relation (3.3.37), alors on obtient

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot) \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2 \frac{\gamma^2}{\nu} |\Omega|^2 + \left\| z_0 \right\|_2^2}. \quad (3.3.38)$$

Dans $L_\#^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$, la norme $\| \cdot \|_{L_\#^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega))}$ se définit comme suit

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega))} &= \left(\int_0^1 \left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{H^1(\Omega)}^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^1 \left(\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 + \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 \right) d\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \\ &= \left(\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 + \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

Ainsi, les estimations (3.3.31) et (3.3.38) de $\mathcal{S}_\mu^\nu$ nous permettent d'écrire le résultat suivant :

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, H^1(\Omega))} \leq \sqrt{2 \frac{\gamma^2}{\nu} |\Omega|^2 + \left\| z_0 \right\|_2^2 + \left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2}. \quad (3.3.40)$$

En multipliant l'équation (3.3.7) par $\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta}$ et en l'intégrant sur Ω alors, on a :

$$\mu \int_\Omega \mathcal{S}_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} dx + \int_\Omega \left| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right|^2 dx - \int_\Omega \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} dx = \int_\Omega \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} dx. \quad (3.3.41)$$

Par la formule de Green, on a :

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} = - \int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right) + \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \quad (3.3.42)$$

ou encore :

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} = - \int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right) + \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \quad (3.3.43)$$

et

$$\int_\Omega \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} dx = - \int_\Omega \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right) dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} dx. \quad (3.3.44)$$

De plus, on a

$$\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right) \cdot \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right) - \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon}}{\partial \theta} |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right]. \quad (3.3.45)$$

En injectant les relations (3.3.43), (3.3.44) et (3.3.45) dans l'équation (3.3.41), on obtient

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right) - \int_{\partial \Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) g \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \\ = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right) dx + \int_{\partial \Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} dx, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right) \right) + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right) - \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon}}{\partial \theta} |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right] - \\ \int_{\partial \Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) g \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right) dx + \int_{\partial \Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} dx, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right) \right) + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon}}{\partial \theta} |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \\ \int_{\partial \Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) g \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right) dx + \int_{\partial \Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} dx, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \frac{d}{d\theta} \left(\|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2 \right) + \left\| \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon}}{\partial \theta} |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx + \\ \int_{\partial \Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) g + \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot n \right) \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} d\sigma - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right) dx. \end{aligned}$$

De l'hypothèse (3.3.8), on en déduit l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \mu \frac{d}{d\theta} \left(\|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2 \right) + \left\| \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon}}{\partial \theta} |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right) dx. \quad (3.3.46)$$

Comme les fonctions $\|\mathcal{S}_{\mu}^{\nu}\|_2^2$ et $\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx$ sont périodiques de période 1, alors en intégrant sur $\theta \in [0, 1]$ on obtient

$$\int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right\|_2^2 d\theta \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon}}{\partial \theta} \right| |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}|^2 dx d\theta + \int_0^1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_{\epsilon}}{\partial \theta} \right| |\nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}| dx d\theta, \quad (3.3.47)$$

ou

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial \theta} \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma \left(\frac{1}{2} \left\| \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 + \left\| \nabla \mathcal{S}_{\mu}^{\nu} \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \right), \quad (3.3.48)$$

d'où, on a l'estimation suivante :

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L(\Omega))} \leq \sqrt{\frac{\gamma^2 |\Omega|}{\nu} \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma |\Omega|}{\nu} + 1 \right)}. \quad (3.3.49)$$

En multipliant l'équation (3.3.7) par $\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu$ et en intégrant sur Ω , on a

$$-\mu \int_{\Omega} \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu \mathcal{S}_\mu^\nu dx - \int_{\Omega} \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu dx. \quad (3.3.50)$$

Le premier et le deuxième terme du premier membre de l'équation (3.3.50) peuvent s'écrire, en utilisant la formule de Green, de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu \mathcal{S}_\mu^\nu dx = - \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 dx + \int_{\partial \Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma \quad (3.3.51)$$

et

$$\int_{\Omega} \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} dx = - \int_{\Omega} \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right) dx + \int_{\partial \Omega} g \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} d\sigma. \quad (3.3.52)$$

Par un calcul simple, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu) &= \nabla (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu + (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \cdot (\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu), \\ \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu) &= \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu + (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

Alors, si on injecte les relations (3.3.51), (3.3.52) et (3.3.53) dans (3.3.50), on obtient

$$\begin{aligned} &\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 dx - \mu \int_{\partial \Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma + \int_{\Omega} \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right) - \int_{\partial \Omega} g \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} d\sigma \\ &+ \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu dx. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} \right) + \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu dx + \mu \int_{\partial \Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma + \int_{\partial \Omega} g \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} d\sigma. \end{aligned}$$

Il est logique de considérer l'espace $L^2(\partial \Omega)$, munie de la norme notée $\|\cdot\|_{L^2(\partial \Omega)}$. On peut prouver qu'il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\forall \mathcal{S}_\mu^\nu \in H^1(\Omega) \quad \|\mathcal{S}_\mu^\nu\|_{L^2(\partial \Omega)} \leq C(\Omega) \|\mathcal{S}_\mu^\nu\|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors, nous en déduisons, par l'inégalité de cauchy Schwarz, l'inégalité suivante :

$$\mu \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 dx \leq - \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu dx - \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu dx +$$

$$\mu \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathcal{S}_\mu^\nu\|_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\partial\Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma \right).$$

On utilise ensuite cette inégalité très importante dans la suite de cette preuve :

$$|UV| \leq \frac{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu}{4} U^2 + \frac{1}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} V^2 \quad (3.3.54)$$

qui se déduit du cas bien connu $\frac{1}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, en posant $V = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon$, $U = \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu$, on a

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu dx = \int_{\Omega} \frac{|\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} + \int_{\Omega} \frac{(\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu)}{4} |\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 \quad (3.3.55)$$

et pour $V = \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu$ et $U = \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu$, on a aussi

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu = \int_{\Omega} \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} |\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 + \int_{\Omega} \frac{(\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu)}{4} |\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu|^2. \quad (3.3.56)$$

À partir des relations (3.3.55) et (3.3.56), on obtient

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\|\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu\|_2^2) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\Delta (\mathcal{S}_\mu^\nu)|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \frac{(\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu)}{4} |\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} |\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 + \\ &\int_{\Omega} \frac{(\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu)}{4} |\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 + \int_{\Omega} \frac{|\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} + \mu C(\Omega) \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathcal{S}_\mu^\nu\|_{H^1(\Omega)} + \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\partial\Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma \right) \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

qui donne

$$\mu \|\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\|\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu\|_2^2) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\Delta (\mathcal{S}_\mu^\nu)|^2 dx \leq \int_{\Omega} \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} |\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 + \int_{\Omega} \frac{|\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} \quad (3.3.58)$$

$$+ \mu C(\Omega) \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathcal{S}_\mu^\nu\|_{H^1(\Omega)} + \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\partial\Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma \right). \quad (3.3.59)$$

Pour obtenir une formulation simplifiée de l'inéquation (3.3.58-3.3.59), on utilise l'hypothèse selon laquelle la fonction $\theta \mapsto \mathcal{S}_\mu^\nu$ est périodique de période 1 permettant de déduire que les fonctions $\theta \mapsto \|\mathcal{S}_\mu^\nu\|_2^2$ et $\theta \mapsto \int_{\partial\Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma$ sont aussi périodiques de période 1. De plus, le premier terme du premier membre de cette estimation est positive. En effet, en intégrant sur $[0, 1]$, on a

$$\frac{1}{2} \nu \|\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\gamma^2}{\nu} \left(\|\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 + |\Omega| \right) + \mu C(\Omega) \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathcal{S}_\mu^\nu\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, H^1(\Omega))}. \quad (3.3.60)$$

Ensuite,

$$\|\Delta \mathcal{S}_\mu^\nu\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{2\gamma^2}{\nu^2} \left(\left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2 + |\Omega| \right) + \frac{2\mu C(\Omega)}{\nu} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \sqrt{2 \frac{\gamma^2}{\nu} |\Omega|^2 + \|z_0\|_2^2 + \left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2}. \quad (3.3.61)$$

D'où

$$\left\| \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma_2$$

À partir des résultats (3.3.31) et (3.3.58-3.3.59) ci-avant, on écrit les estimations suivantes :

Pour tout $\theta_0 \in [0, 1]$, on a

$$\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta_0, \cdot) \right\|_{L^2_{\#}} \leq \frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \quad (3.3.62)$$

et

$$\begin{aligned} \mu \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \nu \left\| \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 &\leq \int_{\Omega} \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} |\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu|^2 + \int_{\Omega} \frac{|\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} \\ &+ \mu C(\Omega) \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{H^1(\Omega)} + \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\partial\Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma \right). \end{aligned} \quad (3.3.63)$$

Puis, en tenant compte de la positivité des termes $\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2$ et $\left\| \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2$, cette dernière inégalité devient plus simple

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 \right) \leq \frac{\gamma^2}{\nu} \left(\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 + |\Omega| \right) + \mu C(\Omega) \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{H^1(\Omega)} + \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\partial\Omega} g \mathcal{S}_\mu^\nu d\sigma \right). \quad (3.3.64)$$

Alors, en intégrant (3.3.64) suivant $\theta \in [\theta_0, \theta_1] \subset [0, 1]$ on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_2^2 \right) d\theta \leq \frac{\gamma^2}{\nu} \left(\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 + |\Omega| \right) + \mu C(\Omega) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{H^1(\Omega)} d\theta. \quad (3.3.65)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, on majore encore une fois le terme de gauche dans le second membre (3.3.65).

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta_1, \cdot) \right\|_2^2 - \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta_0, \cdot) \right\|_2^2 &\leq 2 \frac{\gamma^2}{\nu} \left(\left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2 + |\Omega| \right) \\ &+ 2\mu C(\Omega) \|g\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))} \sqrt{2 \frac{\gamma^2}{\nu} |\Omega|^2 + \|z_0\|_2^2 + \left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

Soit

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta_1, \cdot) \right\|_2^2 &\leq 2 \frac{\gamma^2}{\nu} \left(\left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2 + |\Omega| \right) + 2\mu C(\Omega) \|g\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))} \sqrt{2 \frac{\gamma^2}{\nu} |\Omega|^2 + \|z_0\|_2^2 + \left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2} \\ &+ \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta_0, \cdot) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.3.67)$$

Ainsi, pour tout $\theta \in [0, 1]$, nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot) \right\|_2^2 &\leq 2 \frac{\gamma^2}{\nu} \left(\left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2 + |\Omega| \right) + 2\mu C(\Omega) \|g\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))} \sqrt{2 \frac{\gamma^2}{\nu} |\Omega|^2 + \|z_0\|_2^2 + \left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2} \\ &+ \left(\frac{\gamma}{\nu} |\Omega| \right)^2. \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

Au final, on a :

$$\left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L_\#^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_3 \quad (3.3.69)$$

où γ_3 est une constante positive.

Comme la fonction

$$x \mapsto \mathcal{S}_\mu^\nu(\cdot, x)$$

est périodique sur le domaine Ω , alors on peut utiliser la décomposition de fourier pour obtenir

$$\mathcal{S}_\mu^\nu = \sum_{k \in \mathbb{N}^2} S_k(t, \theta) e^{ik \cdot x}, \quad (k \in \mathbb{N})$$

et

$$\left| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right| = \left| k \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{N}^2} S_k(t, \theta) e^{ik \cdot x},$$

alors, on a

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu(t, \theta, \cdot) \right\|_2^2 \leq \left\| \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu(t, \theta, \cdot) \right\|_2^2.$$

Au final, nous obtenons pour tout $\theta \in [0, 1]$

$$\left\| \mathcal{S}_\mu^\nu \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_3. \quad (3.3.70)$$

Nous allons chercher à montrer l'estimation suivante

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L_\#^\infty(\mathbb{R}, H^1)}^2 \leq \gamma_6. \quad (3.3.71)$$

En dérivant l'équation (3.3.7) suivant le temps, elle devient :

$$\mu \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right) - \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right)) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \quad (3.3.72)$$

avec les conditions aux limites $\frac{\partial \left(\frac{\mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right)}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial t}$ où

$$\tilde{\mathcal{C}}^\epsilon = \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \quad (3.3.73)$$

et

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right) \\ \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \right) \\ \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \right) \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \nabla \cdot (\nabla \mathcal{S}_\mu^\nu) \\ \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon &= \frac{\partial (\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon)}{\partial t} \cdot \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \Delta \mathcal{S}_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (3.3.74)$$

On combine les relations (3.3.73) et (3.3.74) pour donner une estimation sur $\tilde{C}^\epsilon$ et déduire l'existence d'une constante γ_4 dépendant uniquement de ν , γ , Ω et γ_2 telle que

$$\begin{cases} \|\tilde{C}^\epsilon\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_4 \\ \|\nabla \cdot \tilde{C}^\epsilon\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_4 \end{cases} \quad (3.3.75)$$

et

$$\gamma_4 = \gamma \left(|\Omega| + \frac{\gamma |\Omega|}{\nu} + \sqrt{\gamma_2} \right).$$

Multiplions l'équation (3.3.72) par $\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t}$ puis intégrons sur Ω en appliquant la formule de Green dans le but de faire intervenir les termes de bord

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right|^2 \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right)}{\partial n} \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} = - \int_{\Omega} \tilde{C}^\epsilon \nabla \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right) \\ + \int_{\partial\Omega} \tilde{C}^\epsilon \cdot n \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right|^2 \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 = \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} - \int_{\Omega} \tilde{C}^\epsilon \nabla \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right) + \\ \int_{\partial\Omega} \tilde{C}^\epsilon \cdot n \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right|^2 \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 = \int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \tilde{C}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \\ - \int_{\Omega} \tilde{C}^\epsilon \nabla \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Soit

$$\int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \tilde{C}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} = \int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{C}^\epsilon}{\partial t} \cdot n + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \nabla S_\mu^\nu \cdot n \right) \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t}$$

ou

$$\int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \tilde{C}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} = \int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{C}^\epsilon}{\partial t} \cdot n + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} g \right) \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t}$$

ou encore

$$\int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \tilde{C}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g + \tilde{C}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t}$$

Au final, on a :

$$\int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \tilde{C}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} = 0.$$

Alors, nous obtenons

$$\mu \left\| \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx = - \int_{\Omega} \tilde{C}^\epsilon \nabla \left(\frac{\partial S_\mu^\nu}{\partial t} \right) dx. \quad (3.3.76)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, majorons le second membre de l'égalité précédente

$$\mu \left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) + \int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx \leq \gamma_4 \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2. \quad (3.3.77)$$

En utilisant la périodicité de la fonction $\theta \mapsto \left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2$ et la positivité du premier terme dans le premier membre alors, en intégrant sur Ω la relation (3.3.77), on obtient : $\forall \theta \in [0, 1]$

$$\nu \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma_4 \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))},$$

qui donne

$$\left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \frac{\gamma_4}{\nu}. \quad (3.3.78)$$

En prenant $\theta_0 \in [0, 1]$, on obtient donc l'estimation suivante :

$$\left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta_0, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \frac{\gamma_4}{\nu}. \quad (3.3.79)$$

Par ailleurs, on a

$$\mu \left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) + \int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx \leq \gamma_4 \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2,$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) + \nu \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \leq \gamma_4 \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) \leq \gamma_4 \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2. \quad (3.3.80)$$

Alors, en intégrant la relation (3.3.80) sur $[\theta_0, \theta_1] \subset [0, 1]$ où θ_0 est donné dans (3.3.79), on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) d\theta \leq \gamma_4 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_2 d\theta, \quad (3.3.81)$$

ce qui donne

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta_1, \cdot)}{\partial t} \right\|_2^2 \leq 2\gamma_4 \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_{L_\#^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta_0, \cdot)}{\partial t} \right\|_2^2,$$

on en déduit que :

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu(\theta, \cdot)}{\partial t} \right\|_2^2 \leq 2\frac{\gamma_4^2}{\nu} + \left(\frac{\gamma_4}{\nu} \right)^2.$$

Cette relation est vraie pour tout $\theta \in [0, 1]$ alors, on obtient au final

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial t} \right\|_{L_\#^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma_6$$

où γ_6 est une constante positive dépendant uniquement de γ_4 et ν .

Maintenant, en multipliant l'équation (3.3.7) par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur $\mathbb{R} \times \Omega$, on obtient :

$$\mu \int_0^1 \int_\Omega \mathcal{S}_\mu^\nu v dx d\theta + \int_0^1 \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{S}_\mu^\nu}{\partial \theta} v dx d\theta + \int_0^1 \int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}_\mu^\nu \cdot \nabla v dx d\theta = \int_0^1 \int_\Omega \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon v dx d\theta$$

$$+ \int_0^1 \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g v d\sigma d\theta. \quad (3.3.82)$$

En tendant maintenant μ vers 0 alors, on a :

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} v dx d\theta + \int_0^1 \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \cdot \nabla v dx d\theta = \int_0^1 \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon v dx d\theta + \int_0^1 \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g v d\sigma d\theta. \quad (3.3.83)$$

En testant contre $v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} v dx d\theta + \int_0^1 \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \cdot \nabla v dx d\theta = \int_0^1 \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon v dx d\theta. \quad (3.3.84)$$

En utilisant la formule de Green dans le second terme du premier membre dans le but de faire disparaître le terme d'intégrale sur le bord, on montre facilement que le problème

$$\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} - \nabla \cdot \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \right) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \quad (3.3.85)$$

est vérifié au sens des distributions.

Par contre, donner un sens à la condition aux limites

$$\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega$$

pose des difficultés car $\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n}$ n'est pas défini pour $\mathcal{S}^\nu \in L^2(\mathbb{R}, V)$. Pour pouvoir donner un sens à la condition aux limites, il faut une régularité supplémentaire sur $\mathcal{S}^\nu$. Alors, en utilisant la formule de Green du troisième terme dans le premier membre de la relation (3.3.83), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} v dx d\theta + \int_0^1 \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \cdot \nabla v dx d\theta - \int_0^1 \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} v d\sigma d\theta &= \int_0^1 \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon v dx d\theta \\ &+ \int_0^1 \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g v d\sigma d\theta. \end{aligned} \quad (3.3.86)$$

Comme

$$\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} - \nabla \cdot \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \right) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon, \quad (3.3.87)$$

on a, en fait,

$$\int_0^1 \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left(g - \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} \right) v d\sigma d\theta = 0. \quad (3.3.88)$$

On peut prendre ici n'importe quelle fonction $v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, et en particulier

$$v = g - \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n}.$$

Alors,

$$\int_0^1 \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| g - \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} \right|^2 d\sigma d\theta = 0 \quad (3.3.89)$$

ou

$$\nu \left\| g - \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\partial\Omega))}^2 \leq 0. \quad (3.3.90)$$

On en déduit donc que

$$\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega$$

On a aussi le théorème suivant.

THÉORÈME 3.3.3 *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème (3.3.2), $\forall \epsilon > 0$, $\nu > 0$, le problème (3.3.6) admet une unique solution $\mathcal{S}^\nu = \mathcal{S}^\nu(t, \theta, x)$ périodique de période 1 en θ . De plus, elle vérifie les estimations suivantes dépendant uniquement de γ , γ_1 , $\tilde{\gamma}_4$, Ω , G_{thr} , z_0 et g*

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \int_{\Omega} \mathcal{S}^\nu(\theta, x) dx \right| = 0, \quad (3.3.91)$$

$$\left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma |\Omega|, \quad (3.3.92)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma |\Omega| \left(\frac{1}{2} \gamma + \sqrt{\gamma} \right), \quad (3.3.93)$$

$$\left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \Delta \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma^3 |\Omega| (\gamma |\Omega| + 1), \quad (3.3.94)$$

$$\left\| \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^{\infty}_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq 4\gamma^3 |\Omega| (\gamma |\Omega| + 1) + \frac{\gamma^2 |\Omega|^2}{G_{thr}}, \quad (3.3.95)$$

$$\left\| \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^{\infty}_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq 2\gamma^2 |\Omega|^2 + \|z_0\|_2^2, \quad (3.3.96)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu(\theta, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L^{\infty}_{\#}(\mathbb{R}, H^1(\Omega))}^2 \leq \frac{\tilde{\gamma}_4}{G_{thr}}. \quad (3.3.97)$$

Preuve L'existence de $\mathcal{S}^\nu$ s'obtient directement en tendant μ vers zero dans (3.3.7).

En suivant la même idée que dans la preuve du théorème 3.3.2, on intègre (3.3.6) sur Ω en utilisant la formule de Green pour obtenir

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu) dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon dx$$

ou

$$\frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \mathcal{S}^\nu dx - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n d\sigma$$

ou encore

$$\frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \mathcal{S}^\nu dx = \int_{\partial\Omega} ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu)g + \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n) d\sigma,$$

soit

$$\frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \mathcal{S}^\nu dx = 0. \quad (3.3.98)$$

Comme la fonction

$$\theta \longmapsto \int_{\Omega} \mathcal{S}^\nu(\theta, \cdot) dx$$

est périodique de période 1 en θ , alors la seule possibilité de satisfaire l'équation (3.3.98) est que :

$$\int_{\Omega} \mathcal{S}_{\mu}^{\nu}(\theta, \cdot) dx = 0 \quad \text{pour tout } \theta.$$

Finalement, on a :

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \int_{\Omega} \mathcal{S}^{\nu}(\theta, x) dx \right| = 0. \quad (3.3.99)$$

Pour montrer que la solution du problème (3.3.6) est unique, considérons $\mathcal{S}^{\nu}$ et $\bar{\mathcal{S}}^{\nu}$ deux solutions de (3.3.6), alors, $\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}$ est aussi solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu})}{\partial \theta} - \nabla \cdot \left((\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \nabla(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right) = 0 &]0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \mathcal{S}^{\nu}(0, 0, x) - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}(0, 0, x) = 0 & \Omega \\ \frac{\partial(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu})}{\partial n} = 0 &]0, T] \times \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.100)$$

En multipliant (3.3.100) par $\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}$ et en intégrant suivant Ω , nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \left| (\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \left| \nabla(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \frac{\partial(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu})}{\partial n} (\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) d\sigma = 0.$$

Du fait que la condition aux limites impose la nullité du troisième terme dans le premier membre, nous obtenons donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \left| (\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_{\epsilon} + \nu) \left| \nabla(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right|^2 dx = 0.$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| (\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right\|_2^2 \right) + \nu \left\| \nabla(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right\|_2^2 \leq 0 \quad (3.3.101)$$

qui donne, comme le second terme est positif

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| (\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right\|_2^2 \right) \leq 0. \quad (3.3.102)$$

En intégrant (3.3.101) suivant θ de 0 à 1 et en utilisant la périodicité de $\mathcal{S}^{\nu}$ alors, on obtient :

$$\nu \int_0^1 \left\| \nabla(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right\|_2^2 d\theta \leq 0.$$

Alors,

$$\nu \left\| \nabla(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 = 0.$$

Puisque $\forall t \in [0, T], \theta \in \mathbb{R}, \mathcal{S}^{\nu}(\theta) - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}(\theta) \in H_0^1(\Omega)$, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré : il existe une constante $c(\Omega)$ telle que

$$\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu} \in H_0^1(\Omega), \quad \left\| \mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu} \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq c(\Omega) \left\| \nabla(\mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu}) \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2.$$

Alors,

$$\left\| \mathcal{S}^{\nu} - \bar{\mathcal{S}}^{\nu} \right\|_{L_{\#}^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 = 0.$$

Finalement

$$S^\nu = \bar{S}^\nu.$$

En multipliant l'équation (3.3.6) par S^ν et intégrant suivant Ω , nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |S^\nu|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla S^\nu|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial S^\nu}{\partial n} S^\nu d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon S^\nu dx \quad (3.3.103)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |S^\nu|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla S^\nu|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial S^\nu}{\partial n} S^\nu d\sigma = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla S^\nu dx \\ + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n S^\nu d\sigma \end{aligned} \quad (3.3.104)$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |S^\nu|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla S^\nu|^2 dx = \int_{\partial\Omega} ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu)g + \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n) S^\nu d\sigma - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla S^\nu dx. \quad (3.3.105)$$

En utilisant l'hypothèse (3.3.8) et en majorant le dernier terme dans le second membre de (3.3.105) par l'inégalité de Holder, alors on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |S^\nu|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla S^\nu|^2 dx \leq \gamma |\Omega| \left(\int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon |\nabla S^\nu|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.3.106)$$

Comme la fonction $\theta \mapsto \int_{\Omega} |S^\nu(\theta, \cdot)|^2 dx$ est périodique de période 1 alors, en intégrant (3.3.106) suivant $\theta \in [0, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla S^\nu|^2 dx \leq \gamma |\Omega| \int_0^1 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla S^\nu \right\|_2 d\theta. \quad (3.3.107)$$

Comme $\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu \geq \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon$, on en déduit que

$$\int_0^1 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla S^\nu \right\|_2^2 d\theta \leq \gamma |\Omega| \int_0^1 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla S^\nu \right\|_2 d\theta. \quad (3.3.108)$$

Donc, au final on a :

$$\left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla S^\nu \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma |\Omega|. \quad (3.3.109)$$

En intégrant (3.3.107) suivant $\theta \in [\theta_\alpha, \theta_\omega]$ alors, on obtient :

$$\int_{\theta_\alpha}^{\theta_\omega} \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla S^\nu|^2 dx d\theta \leq \int_0^1 \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla S^\nu|^2 dx d\theta \leq \gamma |\Omega| \int_0^1 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla S^\nu \right\|_2 d\theta \quad (3.3.110)$$

ou

$$\int_{\theta_\alpha}^{\theta_\omega} \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla S^\nu|^2 dx d\theta \leq \gamma |\Omega| \int_0^1 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla S^\nu \right\|_2 d\theta. \quad (3.3.111)$$

Comme $\tilde{G}_{thr} \leq \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu$, pour tout $\theta \in [\theta_\alpha, \theta_\omega]$, alors on obtient :

$$\int_{\theta_\alpha}^{\theta_\omega} \int_{\Omega} \tilde{G}_{thr} |\nabla S^\nu|^2 dx d\theta \leq \gamma |\Omega| \int_0^1 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla S^\nu \right\|_2 d\theta. \quad (3.3.112)$$

Au final, on a :

$$\left(\int_{\theta_\alpha}^{\theta_\omega} \left\| \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\gamma |\Omega|}{\sqrt{\tilde{G}_{thr}}}. \quad (3.3.113)$$

Pour un θ_0 choisi dans $[\theta_\alpha, \theta_\omega]$, on vérifie aisément la relation suivante :

$$\left\| \nabla \mathcal{S}^\nu(\theta_0, \cdot) \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \frac{\gamma |\Omega|}{\sqrt{\tilde{G}_{thr}}}. \quad (3.3.114)$$

Soit la relation (3.3.106) définie par :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \left| \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx + \int_{\Omega} (\mathcal{A}^\epsilon + \nu) \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx \leq \gamma |\Omega| \left\| \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_2. \quad (3.3.115)$$

Comme le second terme dans le premier membre est positif, alors en intégrant sur $[0, \theta]$ on obtient :

$$\frac{1}{2} \left(\left\| \mathcal{S}^\nu(\theta, \cdot) \right\|_2^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\left\| \mathcal{S}^\nu(0, \cdot) \right\|_2^2 \right) \leq \gamma |\Omega| \int_0^1 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_2 \quad (3.3.116)$$

ou

$$\left(\left\| \mathcal{S}^\nu(\theta, \cdot) \right\|_2^2 \right) \leq 2\gamma^2 |\Omega|^2 + \left\| \mathcal{S}^\nu(0, \cdot) \right\|_2^2, \quad (3.3.117)$$

pour tout $\theta \in (0, 1)$. Alors, nous obtenons finalement

$$\left\| \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 \leq 2\gamma |\Omega| + \left\| z_0 \right\|_2^2. \quad (3.3.118)$$

Dans la suite de la preuve du théorème 3.3.3, nous appliquons la même procédure que celle du théorème 3.3.2 pour établir les estimations sur $\mathcal{S}^\nu$. Pour cela, nous commençons par multiplier l'équation (3.3.6) par $-\Delta \mathcal{S}^\nu$. Alors, en intégrant (3.3.6) sur Ω et en utilisant la formule de Green, on vérifie facilement l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial n} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} d\sigma + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \Delta \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx = \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \cdot \nabla \mathcal{S}^\nu \Delta \mathcal{S}^\nu dx \quad (3.3.119)$$

$$+ \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \Delta \mathcal{S}^\nu dx. \quad (3.3.120)$$

Alors, en posant $V = \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \cdot \nabla \mathcal{S}^\nu$, $U = \Delta \mathcal{S}^\nu$ et $V = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon$, $U = \Delta \mathcal{S}^\nu$ dans le but de majorer respectivement le premier et le deuxième termes dans le second membre de l'équation (3.3.119-3.3.120), on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \Delta \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx \leq \int_{\Omega} \frac{\left| \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \right|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\left| \nabla \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \right|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} dx. \quad (3.3.121)$$

La fonction $\theta \mapsto \int_{\Omega} \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx$ est périodique de période 1 et comme les fonctions $\left| \nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \right|$ et $\left| \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \right|$ sont bornées par $\gamma \left| \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \right|$, alors en intégrant suivant $\theta \in [0, 1]$, on a :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \Delta \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx d\theta \leq \gamma^2 \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\left| \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \right|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx d\theta + \gamma^2 \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\left| \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \right|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} dx d\theta. \quad (3.3.122)$$

Comme $\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu \geq \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon$, alors on a :

$$\frac{1}{2} \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \Delta \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma^2 \left(\left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 + \gamma |\Omega| \right). \quad (3.3.123)$$

Au final, on a :

$$\left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \Delta \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq 2\gamma^3 |\Omega| (\gamma |\Omega| + 1). \quad (3.3.124)$$

Par ailleurs, on a à partir de la relation (3.3.121)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_\Omega |\nabla \mathcal{S}^\nu|^2 dx + \frac{1}{2} \nu \left\| \Delta \mathcal{S}^\nu \right\|_2^2 \leq \int_\Omega \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} |\nabla \mathcal{S}^\nu|^2 dx + \int_\Omega \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} dx, \quad (3.3.125)$$

ou simplement

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_\Omega |\nabla \mathcal{S}^\nu|^2 dx \leq \int_\Omega \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} |\nabla \mathcal{S}^\nu|^2 dx + \int_\Omega \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} dx. \quad (3.3.126)$$

Donc, $\forall \theta_0 \in [\theta_\alpha, \theta_\omega]$ on obtient

$$\frac{1}{2} \left\| \nabla \mathcal{S}^\nu(\theta_\omega) \right\|_2^2 \leq \int_0^1 \int_\Omega \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} |\nabla \mathcal{S}^\nu|^2 dx d\theta + \int_0^1 \int_\Omega \frac{|\nabla \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2}{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu} dx + \frac{1}{2} \left\| \nabla \mathcal{S}^\nu(\theta_0) \right\|_2^2, \quad (3.3.127)$$

ou

$$\left\| \nabla \mathcal{S}^\nu(\theta_\omega) \right\|_2^2 \leq 4\gamma^3 |\Omega| (\gamma |\Omega| + 1) + \frac{\gamma^2 |\Omega|^2}{\tilde{G}_{thr}}. \quad (3.3.128)$$

Alors en passant au sup pour $\theta \in [0, 1]$, nous pouvons écrire l'estimation suivante

$$\left\| \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq 4\gamma^3 |\Omega| (\gamma |\Omega| + 1) + \frac{\gamma^2 |\Omega|^2}{\tilde{G}_{thr}}. \quad (3.3.129)$$

On multiplie l'équation (3.3.6) par $\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta}$ et on intègre sur Ω en utilisant la formule de Green, alors on obtient :

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right|^2 dx - \int_\Omega \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} dx = \int_\Omega \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} dx. \quad (3.3.130)$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} dx = - \int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right) dx + \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} d\sigma, \quad (3.3.131)$$

$$\int_\Omega \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} dx = - \int_\Omega \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right) dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} d\sigma \quad (3.3.132)$$

et

$$\int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right) \cdot \nabla \mathcal{S}^\nu dx = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) |\nabla \mathcal{S}^\nu|^2 dx \right) - \int_\Omega \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta} |\nabla \mathcal{S}^\nu|^2 dx \right] \quad (3.3.133)$$

Nous injectons les relations (3.3.131), (3.3.132) et (3.3.133) dans l'équation (3.3.130) pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right|^2 dx + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right) dx - \int_{\partial \Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} d\sigma = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right) dx \\ + \int_{\partial \Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} d\sigma \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx \right) - \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta} \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx \right] - \int_{\partial \Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} d\sigma = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right) dx \\ + \int_{\partial \Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} d\sigma \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta} \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx + \int_{\partial \Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g + \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} d\sigma \\ - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right) dx. \end{aligned}$$

D'après (3.3.8) alors, on obtient

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta} \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right) dx.$$

Comme $\left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta} \right|$, $\left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial \theta} \right|$ sont bornées par $\gamma |\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon|$. En plus, les fonctions $\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon$, $\tilde{\mathcal{C}}_\epsilon$ et $\mathcal{S}^\nu$ sont périodiques en θ et de période 1, alors il en est de même pour la fonction $\tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla \mathcal{S}^\nu$. Par conséquent, en intégrant suivant $\theta \in [0, 1]$, on a :

$$\int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right\|_2^2 d\theta \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta} \right| \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx d\theta + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{d}{d\theta} (\tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \nabla \mathcal{S}^\nu) dx d\theta - \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial \theta} \nabla \mathcal{S}^\nu dx d\theta \quad (3.3.134)$$

ou

$$\int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right\|_2^2 d\theta \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta} \right| \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx d\theta + \int_0^1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial \theta} \right| \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right| dx d\theta \quad (3.3.135)$$

ou encore

$$\int_0^1 \left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right\|_2^2 d\theta \leq \frac{\gamma}{2} \int_0^1 \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right|^2 dx d\theta + \gamma \int_0^1 \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right| dx d\theta. \quad (3.3.136)$$

On majore ensuite le second terme dans le second membre en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz pour obtenir

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \left| \nabla \mathcal{S}^\nu \right| dx d\theta \leq \sqrt{\gamma} |\Omega| \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}. \quad (3.3.137)$$

Si on injecte (3.3.137) dans (3.3.136), on obtient :

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma \left(\frac{1}{2} \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 + \sqrt{\gamma} |\Omega| \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \mathcal{S}^\nu \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \right). \quad (3.3.138)$$

Au final, $\mathcal{S}^\nu$ la solution du problème (3.3.6) satisfait l'estimation suivante

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma |\Omega| \sqrt{\left(\frac{1}{2} \gamma + \sqrt{\gamma} \right)}. \quad (3.3.139)$$

Nous montrons maintenant l'estimation suivante :

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu(\theta, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L^\infty_{\#}(\mathbb{R}, H^1(\Omega))}^2 \leq \frac{\gamma_8}{\tilde{G}_{thr}}. \quad (3.3.140)$$

Comme la solution $\mathcal{S}^\nu$ du problème (3.3.6) est différentiable par rapport à la variable t , alors il devient :

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right)}{\partial \theta} - \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right)) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \quad (3.3.141)$$

avec les conditions aux limites $\frac{\partial \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right)}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial t}$ où

$$\tilde{\mathcal{C}}^\epsilon = \frac{\partial \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \nabla \mathcal{S}^\nu \quad (3.3.142)$$

et

$$\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon = \frac{\partial (\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial (\nabla \cdot \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon)}{\partial t} \cdot \nabla \mathcal{S}^\nu + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t} \Delta \mathcal{S}^\nu. \quad (3.3.143)$$

On se base sur la relation (3.3.143) pour majorer $\tilde{\mathcal{C}}^\epsilon$ par une constante positive γ_8 dépendant uniquement de γ et Ω telle que

$$\begin{cases} \left\| \mathcal{C}^\epsilon \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_8 \\ \left\| \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \right\|_{L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_8 \end{cases} \quad (3.3.144)$$

où

$$\gamma_8 = \gamma^2 |\Omega| \left((1 + \sqrt{\gamma} |\Omega|) + \sqrt{|\Omega| (\gamma^2 |\Omega| + 1)} \right).$$

En multipliant l'équation (3.3.141) par $\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t}$ et en intégrant sur Ω on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right|^2 dx \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx - \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right)}{\partial n} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} d\sigma = \\ - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} d\sigma. \end{aligned}$$

En utilisant la condition sur le bord du domaine, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right|^2 dx \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx = \\ \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} d\sigma - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \cdot n \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} d\sigma. \end{aligned}$$

En regroupant, les termes sur le bord, on obtient finalement

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right|^2 dx \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx = \int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} d\sigma - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) dx. \quad (3.3.145)$$

Le premier terme du second membre de la relation (3.3.145) se réécrit comme suit :

$$\int_{\partial\Omega} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \frac{\partial g}{\partial t} + \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g + \mathcal{C}^\epsilon \cdot n \right) \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t}$$

et donc s'annule d'après l'hypothèse (3.3.8). À partir de la relation (3.3.145), nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx = - \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) dx. \quad (3.3.146)$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy Schwarz, nous majorons le second membre

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx \leq \gamma_8 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2.$$

En utilisant la périodicité de la fonction $\theta \mapsto \left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2^2$, on obtient la formulation suivante : $\forall \theta \in [0, 1]$

$$\left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma_8 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}.$$

D'où

$$\left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \gamma_8. \quad (3.3.147)$$

Il existe donc un $\theta_0 \in [0, 1]$ telle que

$$\left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu(\theta_0, \cdot)}{\partial t} \right\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \frac{\gamma_8}{\sqrt{\tilde{G}_{thr}}}. \quad (3.3.148)$$

En utilisant la décomposition en série de Fourier de $\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t}$, on a :

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu(\theta_0, \cdot)}{\partial t} \right\|_2 \leq \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu(\theta_0, \cdot)}{\partial t} \right\|_2 \leq \frac{\gamma_8}{G_{thr}}. \quad (3.3.149)$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) + \int_{\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \left| \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right) \right|^2 dx \leq \gamma_8 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2.$$

Soit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left(\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \right) + \nu \left\| \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2^2 \leq \gamma_8 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_2.$$

$\forall (\theta_0, \theta_1) \in [0, 1]^2$ tel que $\theta_0 < \theta_1$:

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu(\theta_1, \cdot)}{\partial t} \right\|_2^2 \leq 2\gamma_8 \left\| \sqrt{\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon} \nabla \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_{L^2_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu(\theta_0, \cdot)}{\partial t} \right\|_2^2$$

et par conséquent

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu(\theta, \cdot)}{\partial t} \right\|_2^2 \leq 2\gamma_8^2 + \left(\frac{\gamma_8}{\tilde{G}_{thr}} \right)^2.$$

Cette relation étant vraie pour tout $\theta \in [0, 1]$, on obtient au final

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial t} \right\|_{L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \gamma_8^2 \left(2 + \frac{1}{\tilde{G}_{thr}^2} \right).$$

■

Par ailleurs, nous avons la formulation variationnelle du problème (3.3.6) : pour toute fonction test $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} v dx d\theta + \int_0^1 \int_\Omega (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu \cdot \nabla v dx d\theta &= \int_0^1 \int_\Omega \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon v dx d\theta \\ &+ \int_0^1 \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon + \nu) g v d\sigma d\theta. \end{aligned} \quad (3.3.150)$$

Comme nous venons d'établir des estimations sur $\mathcal{S}^\nu$ dans le théorème 3.3.3 telle que la suite $(\mathcal{S}^\nu)_\nu$ est bornée indépendamment de ν en norme $L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$. Alors, on peut extraire une sous-suite de la suite $(\mathcal{S}^\nu)_\nu$ qui converge faiblement vers une fonction $\mathcal{S} \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ dès que ν tend vers 0. D'où, en passant à la limite on obtient

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} v dx d\theta + \int_0^1 \int_\Omega \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla \mathcal{S} \cdot \nabla v dx d\theta = \int_0^1 \int_\Omega \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon v dx d\theta + \int_0^1 \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon g v d\sigma d\theta. \quad (3.3.151)$$

En prenant v dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} v dx d\theta + \int_0^1 \int_\Omega \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla \mathcal{S} \cdot \nabla v dx d\theta = \int_0^1 \int_\Omega \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon v dx d\theta. \quad (3.3.152)$$

En utilisant la formule de Green au second terme de l'égalité précédente, on montre facilement que

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla \mathcal{S}) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon. \quad (3.3.153)$$

En utilisant encore la formule de Green dans le second terme de (3.3.151), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} v dx d\theta + \int_0^1 \int_\Omega \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla \mathcal{S}) v dx d\theta + \int_0^1 \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial n} v d\sigma d\theta &= \int_0^1 \int_\Omega \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon v dx d\theta + \\ &\int_0^1 \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon g v d\sigma d\theta. \end{aligned} \quad (3.3.154)$$

Alors d'après (3.3.153), on obtient

$$\int_0^1 \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \left(g - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial n} \right) v d\sigma d\theta = 0. \quad (3.3.155)$$

On en déduit donc que

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

THÉORÈME 3.3.4 *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.3.3, quelque soit $\epsilon > 0$ il existe $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t, \theta, x)$, périodique de période 1, unique solution du problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla \mathcal{S}) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \mathcal{S}(0, 0, x) = z_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.156)$$

De plus, il existe une constante $\tilde{\gamma}_1$ dépendant uniquement de γ , Ω telle que

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left| \int_{\Omega} \mathcal{S}(\theta, x) dx \right| = 0, \quad (3.3.157)$$

$$\left\| \mathcal{S} \right\|_{L^\infty_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))} \leq \tilde{\gamma}_1, \quad (3.3.158)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right\|_{L^\infty_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\tilde{\gamma}_8}{\tilde{G}_{thr}}. \quad (3.3.159)$$

Preuve Pour montrer que la solution de (3.3.156) est unique, on suppose que $\mathcal{S}$ et $\bar{\mathcal{S}}$ sont deux solutions de (3.3.156). Alors, $\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}}$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\mathcal{S}-\bar{\mathcal{S}})}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla (\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}})) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \mathcal{S}(0, 0, x) - \bar{\mathcal{S}}(0, 0, x) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial(\mathcal{S}-\bar{\mathcal{S}})}{\partial n} = 0 \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.160)$$

En multipliant (3.3.156) par $\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}}$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |(\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}})|^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon |\nabla(\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}})|^2 dx - \int_{\Gamma} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \frac{\partial(\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}})}{\partial n} (\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}}) d\sigma = 0.$$

D'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \int_{\Omega} |(\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}})|^2 dx + \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}}_\epsilon |\nabla(\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}})|^2 = 0.$$

Ainsi, avec la positivité du deuxième terme de l'égalité précédente, on obtient

$$\frac{d}{d\theta} \left\| (\mathcal{S} - \bar{\mathcal{S}}) \right\|_2^2 \leq 0$$

Puisque les solutions $\mathcal{S}$ et $\bar{\mathcal{S}}$ sont périodiques de période 1, nous obtenons

$$\left\| (\mathcal{S}(\theta) - \bar{\mathcal{S}}(\theta)) \right\|_2^2 = 0.$$

Ainsi, on a finalement

$$\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}.$$

Les inégalités (3.3.157), (3.3.158) et (3.3.159) s'obtiennent directement des relations (3.3.91), (3.3.97) et (3.3.96), en faisant tendre ν vers 0, ce qui est justifié par le fait que la solution $\mathcal{S}^\nu$ est bornée indépendamment de ν dans $L^\infty_{\#}(\mathbb{R}, H^1(\Omega))$. $\blacksquare$

Preuve du Théorème 3.3.1

On suppose que z_1^ϵ et z_2^ϵ sont deux solutions de l'équation (3.3.4), alors, $z_1^\epsilon - z_2^\epsilon$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial(z_1^\epsilon - z_2^\epsilon)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla (z_1^\epsilon - z_2^\epsilon)) = 0 \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ z_1^\epsilon(0, x) - z_2^\epsilon(0, x) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial(z_1^\epsilon - z_2^\epsilon)}{\partial n} = 0 \text{ dans } [0, T) \times \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.161)$$

En multipliant (3.3.161) par $z_1^\epsilon - z_2^\epsilon$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |(z_1^\epsilon - z_2^\epsilon)|^2 dx + \int_{\Omega} \mathcal{A}^\epsilon |\nabla(z_1^\epsilon - z_2^\epsilon)|^2 dx - \int_{\partial\Omega} \mathcal{A}^\epsilon \frac{\partial(z_1^\epsilon - z_2^\epsilon)}{\partial n} (z_1^\epsilon - z_2^\epsilon) d\sigma = 0.$$

En tenant compte de la condition sur le bord, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |(z_1^\epsilon - z_2^\epsilon)|^2 dx + \int_{\Omega} \mathcal{A}^\epsilon |\nabla(z_1^\epsilon - z_2^\epsilon)|^2 = 0, \quad (3.3.162)$$

comme le second terme est positif, alors on a

$$\frac{d(\|(z_1^\epsilon(t, \cdot) - z_2^\epsilon(t, \cdot))\|_2^2)}{dt} \leq 0. \quad (3.3.163)$$

En intégrant suivant la variable t , et tenant compte de la condition initiale, on a :

$$\|z_1^\epsilon(t, \cdot) - z_2^\epsilon(t, \cdot)\|_2^2 \leq 0, \quad (3.3.164)$$

donc

$$\|z_1^\epsilon(t, \cdot) - z_2^\epsilon(t, \cdot)\|_2^2 = 0, \quad (3.3.165)$$

finalemt

$$z_1^\epsilon = z_2^\epsilon.$$

Maintenant, nous considérons la fonction $Z^\epsilon = Z^\epsilon(t, x) = S(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ où S est donnée par le théorème 3.3.4. On a alors

$$\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial \theta}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \quad (3.3.166)$$

donc on déduit de (3.3.156) que Z^ϵ est la solution de l'équation

$$\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla Z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot C^\epsilon + \frac{\partial S}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x). \quad (3.3.167)$$

En combinant les deux relations (3.3.4) et (3.3.167), nous en déduisons alors que $z^\epsilon - Z^\epsilon$ est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial(z^\epsilon - Z^\epsilon)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla (z^\epsilon - Z^\epsilon)) &= \frac{\partial S}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ (z^\epsilon - Z^\epsilon)|_{t=0} &= z_0 - S(0, 0, \cdot), \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial(z^\epsilon - Z^\epsilon)}{\partial n} &= 0 \text{ sur } [0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.168)$$

En multipliant (3.3.168) par $(z^\epsilon - Z^\epsilon)$ et en intégrant sur Ω , on a :

$$\frac{d(\|z^\epsilon - Z^\epsilon\|_2^2)}{dt} \leq \sqrt{\frac{\gamma_8}{G_{thr}}} \|z^\epsilon - Z^\epsilon\|_2. \quad (3.3.169)$$

Ainsi,

$$\|z^\epsilon(t, \cdot) - Z^\epsilon(t, \cdot)\|_2 \leq \|z_0 - S(0, 0, \cdot)\|_2 \sqrt{\frac{\gamma_8}{G_{thr}}} t. \quad (3.3.170)$$

Comme

$$\|z^\epsilon(t, \cdot)\|_2 \leq \|z^\epsilon(t, \cdot) - Z^\epsilon(t, \cdot)\|_2 + \|Z^\epsilon(t, \cdot)\|_2$$

alors

$$\|z^\epsilon(t, \cdot)\|_2 \leq \|z_0 - S(0, 0, \cdot)\|_2 \sqrt{\frac{\gamma_8}{G_{thr}}} T + \|z_0\|_2^2 + 2\gamma^2 |\Omega|^2.$$

Au final, on a donc

$$\tilde{\gamma} = \|z_0 - S(0, 0, \cdot)\|_2 \sqrt{\frac{\gamma_8}{G_{thr}}} T + \|z_0\|_2^2 + 2\gamma^2 |\Omega|^2.$$

■

REMARQUE 3.3.2 Il est bien possible de remplacer la condition aux limites du problème (3.2.12) par une condition de Dirichlet $z(t, x) = \tilde{g}(t, x)$ sur $\partial\Omega$. Dans ce cas, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon & \text{dans } [0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) & \text{dans } \Omega \\ z^\epsilon = \tilde{g} & \text{sur } [0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.171)$$

On peut aussi remarquer que, sous les mêmes conditions que dans le théorème 3.3.1, si on considère l'équation (3.3.4) avec la condition au bord homogène $\frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g = 0$ sur $\partial\Omega$ ou bien l'équation (3.3.171) avec la condition au bord $\tilde{g} = 0$ sur $\partial\Omega$, les solutions z^ϵ de (3.3.4) et (3.3.171) restent bornée dans $L^\infty([0, T), L^2(\Omega))$.

3.4 Homogénéisation

3.4.1 La convergence à deux échelles

La convergence à deux échelles est un concept dû à Nguetseng [40] et est développée par Allaire [1]. C'est une branche de la théorie de l'homogénéisation. Le but de l'homogénéisation et donc de la convergence à deux échelles est d'étudier le comportement de u^ϵ quant $\epsilon \rightarrow 0$. ou u^ϵ est la solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} L^\epsilon u^\epsilon &= f^\epsilon & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ B^\epsilon u^\epsilon &= g^\epsilon & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4.1)$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$.

Par conséquent, il s'agit d'identifier une équation de la forme

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ Bu = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4.2)$$

sans la présence explicite de ϵ , dont la solution u est proche de u^ϵ . L^ϵ et B^ϵ sont des opérateurs différentiels dont certains coefficients présentent des oscillations de taille ϵ .

DÉFINITION 3.4.1 Une suite de fonction $(u^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^p(\Omega)$ converge à deux échelles vers une fonction U appartenant $L^p(\Omega, L^p_\#(Y))$ si, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, L^\infty_\#(Y))$ on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega u^\epsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\epsilon}) dx = \int_\Omega \int_Y U(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (3.4.3)$$

U est la limite à deux échelles de u^ϵ dans $L^p(\Omega, L^p_\#(Y))$ où $Y = [0, 1]^N$

THÉORÈME 3.4.1 Soit $(u_\epsilon)_\epsilon$ une suite bornée indépendamment de ϵ dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une suite extraite encore notée $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui converge à deux échelles vers U . De plus, $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge faiblement $-^*$ dans $L^p(\Omega)$ vers la fonction u définie par $x \mapsto u(x) = \int_Y U(x, y) dy$.

Pour une preuve de ce théorème, nous vous renvoyons à [1,9].

Dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation, le critère de convergence à deux échelles permet d'aborder beaucoup de modèles mathématiques. On s'intéresse à la convergence à deux échelles des équations paraboliques. En effet, nous donnons la définition suivante.

DÉFINITION 3.4.2 Une suite de fonction $(z^\epsilon)_{\epsilon>0} \subset L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$ converge à deux échelles vers une fonction U appartenant $L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$ si, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, T], \mathcal{C}_\#(\mathbb{R}, \mathcal{C}(\Omega)))$ on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \int_0^T z^\epsilon(t, x) \psi(t, \frac{t}{\epsilon}, x) dt dx = \int_\Omega \int_0^T \int_0^1 U(t, \theta, x) \psi(t, \theta, x) d\theta dt dx. \quad (3.4.4)$$

THÉORÈME 3.4.2 Si $(z^\epsilon)_\epsilon$ est une suite bornée indépendamment de ϵ dans $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$, alors il existe une suite extraite encore notée $(z^\epsilon)_{\epsilon>0}$ qui converge à deux échelles vers la fonction $U \in L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$.

3.4.2 Homogénéisation du problème de transport du sable

La solution z^ϵ de (3.3.4) est bornée indépendamment de ϵ , dans $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$. On peut donc en déduire un résultat d'homogénéisation qui permet de décrire le comportement asymptotique de z^ϵ lorsque ϵ est très petit. z^ϵ converge à deux échelles vers $Z \in L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$. L'objectif de cette partie est de caractériser l'équation vérifiée par la fonction Z , limite à deux échelles de z^ϵ , solution de (3.3.4). Partant du fait que

$$\mathcal{A}^\epsilon(t, x) \text{ converge à deux échelles vers } \tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) \in L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))) \quad (3.4.5)$$

et

$$\mathcal{C}^\epsilon(t, x) \text{ converge à deux échelles vers } \tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) \in L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega))) \quad (3.4.6)$$

on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3.4.3 *Sous les hypothèses (3.3.9) et (3.3.10), pour tout $T > 0$ indépendant de ϵ , la suite z^ϵ solution de (3.3.4) converge à deux échelles vers $Z \in L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$ solution unique du système :*

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla Z) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \frac{\partial Z}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4.7)$$

où $\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x)$ et $\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x)$ sont donnés par

$$\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) = ag_a(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|)$$

et

$$\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) = cg_c(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \times \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|}.$$

Preuve

Considérons $\psi^\epsilon(t, x) = \psi(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ une fonction régulière à support compact sur $[0, T] \times \Omega$ et périodique en θ de période 1. En multipliant la première équation du problème (3.3.4) par ψ^ϵ et en intégrant sur $[0, T] \times \Omega$ on a :

$$\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} \psi^\epsilon dt dx - \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \int_0^T \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) \psi^\epsilon dt dx = \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \int_0^T \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \psi^\epsilon dt dx. \quad (3.4.8)$$

En intégrant par parties pour le premier terme et en utilisant la formule de Green pour le second terme, on a :

$$\begin{aligned} - \int_\Omega z_0(x) \psi(0, 0, x) dx - \int_\Omega \int_0^T \frac{\partial \psi^\epsilon}{\partial t} z^\epsilon dt dx + \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \int_0^T \mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon \nabla \psi^\epsilon dt dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \mathcal{A}^\epsilon \frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} \psi^\epsilon d\sigma = \\ - \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \int_0^T \mathcal{C}^\epsilon \cdot \nabla \psi^\epsilon dt dx + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^\epsilon \psi^\epsilon n d\sigma. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Comme $\frac{\partial \psi^\epsilon}{\partial t}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \psi^\epsilon}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^\epsilon, \quad (3.4.10)$$

où

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^\epsilon(t, x) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \text{ et } \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^\epsilon(t, x) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \quad (3.4.11)$$

alors, on a :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^T z^\epsilon \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla \psi^\epsilon) \right) dt dx - \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \mathcal{A}^\epsilon g \psi^\epsilon d\sigma \\ = - \frac{1}{\epsilon} \int_\Omega \int_0^T \mathcal{C}^\epsilon \cdot \nabla \psi^\epsilon dt dx - \int_\Omega z_0(x) \psi(0, 0, x) dx. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

En multipliant par ϵ , nous obtenons l'égalité suivante :

$$\epsilon \int_\Omega \int_0^T z^\epsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^\epsilon dt dx + \int_\Omega \int_0^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^\epsilon z^\epsilon dt dx + \int_\Omega \int_0^T \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla \psi^\epsilon) z^\epsilon dt dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \mathcal{A}^\epsilon g \psi^\epsilon d\sigma$$

$$= - \int_{\Omega} \int_0^T \mathcal{C}^\epsilon \cdot \nabla \psi^\epsilon dt dx - \epsilon \int_{\Omega} z_0(x) \psi(0, 0, x) dx. \quad (3.4.13)$$

Comme ψ^ϵ est régulière à support compact sur $(0, T) \times \Omega$, et comme $\mathcal{A}^\epsilon$ est une fonction régulière bornée, alors les fonctions $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^\epsilon$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^\epsilon$, $\nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla \psi^\epsilon)$ et $\nabla \psi^\epsilon$ peuvent être considérées comme fonctions test. Ainsi, en passant à la limite lorsque ϵ tend vers 0, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\Omega} \int_0^T \frac{\partial \psi}{\partial \theta} Z dt d\theta dx + \int_0^1 \int_{\Omega} \int_0^T \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla \psi) Z dt d\theta dx - \int_0^T \int_{\partial \Omega} \tilde{\mathcal{A}} g \psi d\sigma dt d\theta \\ = - \int_0^1 \int_{\Omega} \int_0^T \tilde{\mathcal{C}} \cdot \nabla \psi dt d\theta dx. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

En prenant ψ tel que

$$\psi = 0 \text{ sur } \partial \Omega,$$

et en appliquant la formule de Green au second terme du membre de gauche de l'égalité précédente se réécrit sous la forme suivante

$$\int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^T \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla Z) \right) \psi dt d\theta dx = \int_0^1 \int_{\Omega} \int_0^T \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \psi dt d\theta dx. \quad (3.4.15)$$

D'où, au sens des distributions, on a :

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla Z) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \text{ dans } [0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega. \quad (3.4.16)$$

Par ailleurs, en utilisant cette dernière équation dans (3.4.2) on a directement

$$\int_0^1 \int_{\partial \Omega} \int_0^T \tilde{\mathcal{A}} g \psi dt d\sigma d\theta = \int_0^1 \int_{\partial \Omega} \int_0^T \tilde{\mathcal{A}} \frac{\partial Z}{\partial n} \psi d\sigma d\theta dt = 0, \quad (3.4.17)$$

pour toute fonction test ψ . Ainsi, on en déduit que

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \mathbb{R} \times \partial \Omega.$$

De plus, on peut caractériser les coefficients $\tilde{\mathcal{A}}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ qui sont les limites à deux échelles des coefficients $\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{C}^\epsilon$. On a donc,

$$\int_{\Omega} \int_0^T \mathcal{A}^\epsilon \psi^\epsilon dt dx = \int_{\Omega} \int_0^T a(1 - b\epsilon \mathcal{M}(t, \theta, x) g_a(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|)) \psi^\epsilon dt dx.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_{\Omega} \int_0^T \int_0^1 a g_a(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \psi dt dx = \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^1 \tilde{\mathcal{A}} \psi d\theta dt dx.$$

De même,

$$\int_{\Omega} \int_0^T \mathcal{C}^\epsilon \psi^\epsilon dt dx = \int_{\Omega} \int_0^T c(1 - b\epsilon \mathcal{M}(t, \theta, x) g_c(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|)) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|} \psi^\epsilon dt dx,$$

et en passant à la limite, on a

$$\int_{\Omega} \int_0^T \int_0^1 c g_c(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|} \psi d\theta dt dx = \int_{\Omega} \int_0^T \int_0^1 \tilde{C} \psi d\theta dt dx.$$

Ainsi

$$\tilde{A} = a g_a(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \text{ et } \tilde{C} = c g_c(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|}.$$

■

3.4.3 Résultat de correcteur

Comme les coefficients $\mathcal{A}^\epsilon(t, x)$ et $\mathcal{C}^\epsilon(t, x)$ de l'équation (3.3.4) convergent à deux échelles respectivement vers $\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x)$ et $\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x)$, alors ils peuvent se mettre sous la forme suivante

$$\mathcal{A}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon(t, x) + \epsilon \tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon(t, x) \text{ et } \mathcal{C}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon(t, x) + \epsilon \tilde{\mathcal{C}}_1^\epsilon(t, x) \quad (3.4.18)$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{A}}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \quad \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{C}}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \quad (3.4.19)$$

et

$$\tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{A}}_1(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \quad \tilde{\mathcal{C}}_1^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{C}}_1(t, \frac{t}{\epsilon}, x). \quad (3.4.20)$$

En se plaçant dans le cadre des hypothèses du théorème (4.0.5), les coefficients

$$\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{A}}_1, \tilde{\mathcal{C}}_1, \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon, \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon, \tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon, \text{ et } \tilde{\mathcal{C}}_1^\epsilon \text{ sont réguliers et bornés.} \quad (3.4.21)$$

THÉORÈME 3.4.4 *Sous les hypothèses (3.3.9), (3.3.10) et (3.4.21), si z^ϵ est la solution de (3.3.4) et $Z^\epsilon(t, x) = Z(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ où Z est la solution de (3.4.7), alors pour tout $T \geq 0$ ne dépendant pas de ϵ , $z^\epsilon - Z^\epsilon$ vérifie :*

$$\left\| \frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon} \right\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))} \leq \alpha \quad (3.4.22)$$

où α est une constante positive ne dépendant pas de ϵ .

De plus, la suite $\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon}$ converge à deux échelles vers $Z^1 \in L^\infty([0, T], L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$ unique solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z^1}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla Z^1) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_1 + \frac{\partial Z}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_1 \nabla Z) \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega, \\ \frac{\partial Z^1}{\partial n} = 0 \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4.23)$$

Preuve En utilisant (4.3.10), l'équation (3.3.4) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon + \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon \nabla z^\epsilon) + \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \nabla z^\epsilon) \text{ dans } [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4.24)$$

Comme

$$\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} = \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)^\epsilon, \quad (3.4.25)$$

où

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^\epsilon(t, x) = \frac{\partial Z}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \text{ et } \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)^\epsilon(t, x) = \frac{\partial Z}{\partial \theta}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$$

alors, Z^ϵ est la solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon \nabla Z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon + \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^\epsilon & \text{dans } [0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial n} = g & \text{sur } [0, T) \times \mathbb{R} \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4.26)$$

À partir des formules (3.4.24) et (3.4.26), nous déduisons que $\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon}$ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \left(\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon} \right)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \left((\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon + \epsilon \tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon) \nabla \left(\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon} \right) \right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_1^\epsilon + \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^\epsilon + \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon \nabla Z^\epsilon) \right) & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \frac{\partial \left(\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon} \right)}{\partial n} = 0 & \text{sur } [0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4.27)$$

Comme tous les coefficients du problème (3.4.27) sont réguliers et bornés, alors l'existence de $\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon}$ est une conséquence directe du résultat de Ladyzenskaja, Solonnikov et Ural' Ceva [34]. En plus, comme la condition aux limites de (3.4.27) est homogène, d'après ce qui précède, nous montrons que $\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon}$ solution de (3.4.27) est bornée dans $L^2([0, T), L^2(\Omega))$, et donc converge vers une solution Z^1 solution de (3.4.23). ■

Chapter 4

Méthode numérique pour le problème de transport de sable

La compréhension du transport de sable est un défi pour les scientifiques comme tous les phénomènes naturels. De nombreux modèles ont été construits par des chercheurs. On peut citer ceux de Bagnold et Gadd, Van Rijn, Gerkerma, Meyer-Peter et Muller. Tous ces modèles se basent sur l'équation d'Exner :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{1-p} \nabla \cdot q = 0$$

o z est la hauteur de la dune, p ($0 < p < 1$) la porosité du lit et q le flux de volume de sable. Des travaux récents sont réalisés dans ce domaine par Faye et al [23]. Les auteurs démontrent dans ce travail que l'équation (4.0.1) converge vers l'équation (4.0.5) à deux échelles sous certaines hypothèses. Ils ont construit une méthode numérique à deux échelles [24] pour approcher la solution z^ϵ de (4.0.1). Le principe utilisé est la décomposition de Fourier de la solution Z de (4.0.5) pour simuler numériquement leur problème limite et de la comparer avec la solution numérique du problème de référence quand ϵ tend vers zéro.

Dans ce présent travail, on utilise le principe de la méthode des éléments finis.

Nous considérons le modèle à court terme de la dynamique des dunes et bancs de sable à proximité des côtes dans les zones soumises à la marée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial z^\epsilon(t, x)}{\partial n} = g \text{ sur } [0, T) \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.0.1)$$

où $z^\epsilon(t, x)$ est l'altitude du fond marin, $t \in [0, T)$, pour T donné et $x \in \Omega$, Ω étant un domaine $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{C}^\epsilon$ sont donnés par

$$\mathcal{A}^\epsilon(t, x) = a(1 - b\epsilon \mathcal{M}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)) |\mathcal{U}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)|^3 \quad (4.0.2)$$

et

$$C^\epsilon(t, x) = c(1 - b\epsilon \mathcal{M}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)) |\mathcal{U}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)|^3 \cdot \frac{\mathcal{U}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)}{|\mathcal{U}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)|}, \quad (4.0.3)$$

avec a, b et c sont des constantes positives. Le petit paramètre ϵ impliqué dans le modèle est le rapport entre la période de la marée principale $\frac{1}{\bar{\omega}} = 13$ heures et le temps d'observation qui est d'environ trois mois, c'est-à-dire $\epsilon = \frac{1}{t\bar{\omega}} = \frac{1}{200}$. Nous supposons que le domaine Ω est borné et que les fonctions $\mathcal{U}$ et $\mathcal{M}$ vérifient les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \mapsto (\mathcal{U}, \mathcal{M}) \text{ est périodique de période } 1 \\ |\mathcal{U}|, \left| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \right|, |\nabla \cdot \mathcal{U}| \\ |\mathcal{M}|, \left| \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} \right|, |\nabla \mathcal{M}| \text{ are bounded by } d, \\ \exists U_{thr} \text{ tel que } \forall (t, \theta, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega, |\mathcal{U}(t, \theta, x)| \leq U_{thr} \implies \\ \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(t, \theta, x) = 0, \nabla \cdot \mathcal{U}(t, \theta, x) = 0 \right. \\ \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(t, \theta, x) = 0, \nabla \mathcal{M}(t, \theta, x) = 0 \right) \\ \exists \theta_\alpha < \theta_\omega \in [0, 1] \text{ tel que } \forall \theta \in [\theta_\alpha, \theta_\omega] \implies |\mathcal{U}(t, \theta, x)| \geq U_{thr}. \end{array} \right. \quad (4.0.4)$$

Pour la construction de la méthode numérique, nous utilisons le résultat (4.0.1). La solution z^ϵ , sous les hypothèses citées plus hauts, est bornée et converge à deux échelles lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ vers une fonction Z donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 4.0.5 *On se place dans le cadre des hypothèses (4.0.2), (4.0.3) et (4.0.4). Pour tout $T > 0$ indépendant de ϵ ; la suite (z^ϵ) solution de (4.0.1) converge à deux échelles vers $Z \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2((0, T), L^2(\Omega)))$ solution unique de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla Z) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \frac{\partial Z}{\partial n} = g \text{ dans } [0, T) \times \mathbb{R} \times \partial \Omega \end{array} \right. \quad (4.0.5)$$

où $\tilde{\mathcal{A}}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont donnés par

$$\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) = a g_a(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \text{ et } \tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) = c g_c(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|}. \quad (4.0.6)$$

De plus, si cette relation

$$U_{thr} = 0 \quad (4.0.7)$$

est vérifiée, alors nous avons :

$$\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) \geq \tilde{G}_{thr} \text{ pour tout } (t, \theta, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega, \quad (4.0.8)$$

et pour $Z^\epsilon = Z^\epsilon(t, x) = Z(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$, l'estimation sur $z^\epsilon - Z^\epsilon$ est donnée par

$$\left\| \frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon} \right\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))} \leq \alpha, \quad (4.0.9)$$

où α est une constante dépendant uniquement de ϵ .

Pour la preuve de ce théorème, nous vous renvoyons au chapitre précédent.

4.1 Méthode des éléments finis du problème limite à deux échelles

Le but de cette section est de développer une méthode numérique basée sur la méthode des éléments finis permettant de construire une solution numérique de l'équation (4.0.1); $z^\epsilon(t, x) \sim Z(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$.

4.1.1 Formulation variationnelle

Pour approcher le problème en espace, nous allons utiliser une forme équivalente, dite variationnelle. La première étape consiste à dériver une formulation variationnelle : trouver $Z \in C^0([0, T], \mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap L^2([0, T], \mathbb{R}, H^1(\Omega))$ tel que $Z(0, 0, x) = Z_0$ et

$$\text{pour tout } v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial Z}{\partial \theta} v dx + \int_{\Omega} \tilde{A} \nabla Z \nabla v dx = \int_{\partial \Omega} \tilde{A} g v d\sigma + \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{C} v dx \quad (4.1.1)$$

Discretisation en espace par éléments finis P_1

Le domaine Ω (ici un carré) est découpé en n_t éléments (finis) triangulaires T_k , $k = 1, \dots, n_t$. La famille des triangles T_k forme une triangulation $\mathcal{T}_h$, indexée par le paramètre h , la longueur du plus grand des côtés de tous les triangles. Si l'on définit le fermé $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{k=1}^{n_t} T_k$, nous observons que $\bar{\Omega}_h = \Omega \cup \Gamma$ si, et seulement, si Γ est une frontière polygonale. La construction de la triangulation $\mathcal{T}_h$ doit respecter (par définition) quelques hypothèses :

1. les triangles sont d'aires non-nulles,
2. deux triangles voisins peuvent avoir en commun, soit un sommet, soit un côté entier,
3. les sommets définissant $\Gamma_h = \partial \Omega_h$ doivent être situés sur Γ ,
4. les coins de Ω (quand ils existent) sont des sommets de triangles.

Les sommets $i = 1, \dots, n_t$ des triangles T_k sont les sommets de la triangulation. Ils vont également servir comme noeuds du maillage (les points où la solution est calculée), car nous allons utiliser des éléments finis P_1 (polynômes de degré ≤ 1).

Approximation par éléments finis P_1

On suppose réaliser un maillage du domaine (Ω) en éléments finis triangulaires T_k . Soit N_s le nombre de sommets du maillage. Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_s sommets $q^{(i)} \in \mathbb{R}^2$ du maillage. Pour un élément T_k quelconque, on pose $\varphi^i = \varphi(q^{(i)})$ $i = 0, 1, 2$ (numérotation locale). Si $T_k \subset \mathbb{R}^2$ alors

$$P_1(T_k) = \{p|_{T_k} / p \in P_1\}$$

est un espace vectoriel de même dimension que P_1 or $\dim(P_1) = 3$ alors,

$$\varphi(x) = ax + by + c \quad \forall X \in T_k. \quad (4.1.2)$$

Par définition de la fonction φ sur l'élément T_k , on a :

$$\varphi^0 = a q_x^0 + b q_y^0 + c,$$

$$\varphi^1 = aq_x^1 + bq_y^1 + c,$$

$$\varphi^2 = aq_x^2 + bq_y^2 + c,$$

qui se met aussi sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x^0 & q_y^0 & 1 \\ q_x^1 & q_y^1 & 1 \\ q_x^2 & q_y^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)$$

L'élément T_k est un triangle, par conséquent la matrice est non dégénérée d'où l'existence des constantes a, b et c . On peut facilement montrer que l'aire du triangle T_k notée $|T_k|$ est égale à la moitié de la valeur absolue du déterminant de la matrice. La fonction φ est une fonction affine donc

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Donc, les composantes a et b sont obtenues par la méthode de Grammer :

$$a = \frac{1}{2|T_k|} \begin{vmatrix} \varphi^0 & q_y^0 & 1 \\ \varphi^1 & q_y^1 & 1 \\ \varphi^2 & q_y^2 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.1.4)$$

et

$$b = \frac{1}{2|T_k|} \begin{vmatrix} q_x^0 & \varphi^0 & 1 \\ q_x^1 & \varphi^1 & 1 \\ q_x^2 & \varphi^2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.1.5)$$

Il faut savoir qu'en pratique, on n'utilise jamais l'écriture de la fonction φ donnée par (4.1.2), mais plutôt l'expression utilisant les coordonnées barycentriques.

DÉFINITION 4.1.1 Les coordonnées barycentriques d'un point $x \in \mathbb{R}^2$ par rapport au triangle T_k de sommets $q^0, q^1, q^2 \in \mathbb{R}^2$, sont les nombres réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, solution unique du système :

$$\begin{cases} x = \lambda_0 q^0 + \lambda_1 q^1 + \lambda_2 q^2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Les coordonnées barycentriques sont des fonctions $\lambda_i(x)$ vérifiant $\lambda_i(q^j) = \delta_{ij}$ (1 si $i = j$, 0 sinon). D'un point de vue pratique, l'introduction des coordonnées barycentriques nous permet :

- de vérifier si $x \in \mathbb{R}^2$, quelconque, est dans le triangle T_k . Effectivement, on peut calculer les coordonnées barycentriques de x par rapport au triangle T_k en résolvant le système de trois équations (4.1.6); si la solution $\{(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)\}$ vérifie $0 \leq \lambda_i \leq 1, \forall i = 0, 1, 2$, le point x appartient au triangle T_k ;

- de définir une fonction $\varphi \in P^1(T_k)$ par l'expression obtenue directement de (4.1.6)

$$\varphi(x) = \lambda_0(x)\varphi(q^0) + \lambda_1(x)\varphi(q^1) + \lambda_2(x)\varphi(q^2). \quad (4.1.7)$$

PROPOSITION 4.1.1 *La dimension de l'espace V_h est égale au nombre de sommets N_s de la triangulation.*

Comme la dimension de l'espace V_h est égale au nombre N_s de la triangulation, on choisit comme base de V_h , les fonctions chapeaux ω^i , $i = 0, 1, \dots, N_s$ avec la propriété $\omega^i \in V_h$,

$$\omega^i(q^{(j)}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1.8)$$

À partir de (4.1.7) et (4.1.8), nous pouvons établir une liaison directe entre les fonctions de base P^1 et les coordonnées barycentriques sur le triangle T_k , à savoir

$$\omega^i(x) = \lambda_i(x), \quad \forall x \in T_k, \quad \forall i = 0, 1, 2. \quad (4.1.9)$$

Pour finir cette section, calculons les coordonnées du gradient de ω^i . Suivant (4.1.4) et (4.1.5), $\nabla \omega^i \neq 0$ sur un triangle T_k si, et seulement si, q^i est un sommet de ce triangle.

Par exemple, si $q^i = q^0$, autrement dit le sommet

$$q^0 = \begin{pmatrix} q_x^0 \\ q_y^0 \end{pmatrix},$$

alors,

$$a = \frac{1}{2|T_k|} \begin{vmatrix} \omega^0(q^{(0)}) & q_y^0 & 1 \\ \omega^0(q^{(1)}) & q_y^1 & 1 \\ \omega^0(q^{(2)}) & q_y^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2|T_k|} \begin{vmatrix} 1 & q_y^0 & 1 \\ 0 & q_y^1 & 1 \\ 0 & q_y^2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{q_y^2 - q_y^1}{2|T_k|}, \quad (4.1.10)$$

et

$$b = \frac{1}{2|T_k|} \begin{vmatrix} q_x^0 & \omega^0(q^{(0)}) & 1 \\ q_x^1 & \omega^0(q^{(1)}) & 1 \\ q_x^2 & \omega^0(q^{(2)}) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2|T_k|} \begin{vmatrix} q_x^0 & 1 & 1 \\ q_x^1 & 0 & 1 \\ q_x^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{q_x^1 - q_x^2}{2|T_k|}. \quad (4.1.11)$$

Par conséquent, on a :

$$\nabla \omega^i|_{T_k} = \frac{1}{2|T_k|} \begin{pmatrix} -(q_y^2 - q_y^1) \\ q_x^2 - q_x^1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.12)$$

4.1.2 Formulation variationnelle discrète

La deuxième étape consiste à remplacer $H^1(\Omega)$ dans (4.1.1) par un espace vectoriel de dimension finie

$$V_h = \{v_h \in H^1(\Omega_h), v_h \in C^0(\Omega_h), v_h|_K \in P^1(K), \forall K \in T_h\}.$$

où h est un paramètre de discrétisation en espace.

La propriété importante que nous rappellons est la suivante : pour des éléments finis P^k sous une hypothèse de régularité du maillage, on a estimé l'interpolation pour tout l tel que $0 \leq l \leq m \leq k+1$,

$$\exists C, \forall Z \in H^m, \inf_{Z_h \in V_h} \sum_{k \in T_h} \|Z - Z_h\|_{H^l(k)} \leq Ch^{m-l} \|Z\|_{H^m}.$$

En particulier, si on introduit l'opérateur d'interpolation

$$\Pi_h : C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow V_h,$$

on a :

$$\sum_{k \in T_h} \|Z - \Pi_h(Z)\|_{H^l(k)} \leq Ch^{m-l} \|Z\|_{H^m}. \quad (4.1.13)$$

Dans le cas où la fonction $Z \in L^2(\mathbb{R}, H^m(\Omega))$ n'est pas suffisamment régulière pour que ses valeurs aux mieux soient bien définies (H^m n'est pas inclu dans $C^0(\bar{\Omega})$), $\Pi_h(Z)$ n'est pas défini.

On peut cependant définir un opérateur d'interpolation linéaire vérifiant (4.1.13) même pour des fonctions $Z \in H^m(\Omega)$.

On a alors le problème discret : trouver $Z_h \in C^0([0, T], \mathbb{R}, V_h) \cap L^2([0, T], \mathbb{R}, V_h)$ tel que $Z_h(0, 0, x) = \Pi_h(Z_0)$

$$\text{pour tout } v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega_h} \frac{\partial Z_h}{\partial \theta} v_h dx + \int_{\Omega_h} \tilde{\mathcal{A}} \nabla Z_h \nabla v_h dx = \int_{\partial \Omega_h} \tilde{\mathcal{A}} g v_h d\sigma + \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} v_h dx. \quad (4.1.14)$$

Discrétisation en temps

Pour discrétiser ensuite le problème (4.1.14) en temps, on utilise typiquement les schémas des différences finies dont le principe consiste à approcher les dérivées dans les opérateurs par des développements limités par rapport à un paramètre positif. Ainsi, le schéma d'euler implicite s'écrit comme suit : notons $Z_h^n(\cdot, \cdot, x)$ la valeur de Z_h calculée au point $x \in \Omega$ et à l'instant $n\delta\theta$,

$$\frac{\partial Z_h}{\partial \theta}(t, \theta_n, x) \sim \frac{Z_h(t, \theta_{n+1}, x) - Z_h(t, \theta_n, x)}{\delta\theta} = \frac{Z_h^{n+1} - Z_h^n}{\delta\theta}.$$

L'équation (4.1.14) discrétisée en temps s'écrit : pour $Z_h^0 = \Pi_h(Z_0)$ et $n \geq 1$, trouver Z_h^n tel que

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \frac{Z_h^{n+1} - Z_h^n}{\delta\theta} v dx + \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}} \nabla Z_h^{n+1} \nabla v_h dx = \int_{\partial \Omega} \tilde{\mathcal{A}} g^{n+1} v_h d\sigma + \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} v_h dx \quad (4.1.15)$$

discrétisation en espace

Ce problème est bien un problème de dimension finie. On considère V_h sous la forme

$$V_h = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{N_s}).$$

Les fonctions de base ω^i associées aux éléments finis choisis sont donc indépendantes du temps. Notons I l'ensemble des indices des Noeuds du maillage correspondant à une valeur inconnue de la solution Z_h^n . La solution approchée Z_h^n sera cherchée sous la forme (décomposition suivant les fonctions de base) :

$$Z_h^n = \sum_{i \in I} Z_i^n \omega^i(x), \quad (4.1.16)$$

où Z_i^n est la valeur de Z_h^n en ce sommet.

La formulation variationnelle discrète (4.1.15) étant linéaire par rapport à $v_h \in V_h$, en posant successivement comme fonctions tests $v_h = \omega^j$ pour $j \in I$ pour s'assurer que l'équation est vérifiée pour tout $v_h \in V_h$, alors on a le problème discret suivant :

$$\sum_{i \in I} \frac{1}{\delta\theta} (Z_i^{n+1} - Z_i^n) \int_{\Omega_h} \omega^i \omega^j dx + \sum_{i \in I} Z_i^{n+1} \int_{\Omega_h} \tilde{\mathcal{A}} \nabla \omega^i \nabla \omega^j dx = \int_{\partial\Omega_h} \tilde{\mathcal{A}} g^{n+1} \omega^j d\sigma + \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \omega^j dx \quad (4.1.17)$$

ou

$$\sum_{i \in I} \left(\frac{1}{\delta\theta} \int_{\Omega_h} w^i w^j + \int_{\Omega_h} \tilde{\mathcal{A}} \nabla w^i \nabla w^j \right) Z_i^{n+1} = \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{\delta\theta} \int_{\Omega_h} w^i w^j \right) Z_i^n + \int_{\partial\Omega_h} g^{n+1} w^j d\sigma + \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} w^j dx. \quad (4.1.18)$$

L'équation (4.1.18) s'écrit sous la forme générique suivante :

$$\left(\frac{1}{\delta\theta} M + A \right) Z^{n+1} = \frac{1}{\delta\theta} M Z^n + B^{n+1}, \quad (4.1.19)$$

où Z est le vecteur solution de dimension N_s , A et M sont respectivement les matrices de raideur et de masse de taille $N_s \times N_s$ tels que

$$A_{i,j} = \int_{\Omega_h} \tilde{\mathcal{A}} \nabla w^i \nabla w^j dx,$$

$$M_{i,j} = \int_{\Omega_h} w^i w^j dx$$

et

$$B_j = \int_{\partial\Omega_h} g w^j d\sigma + \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} w^j dx.$$

4.2 Stabilité et convergence de la méthode

Il nous reste maintenant à analyser la stabilité du schéma que nous avons introduit. Nous allons pour cela introduire des conditions suffisantes de stabilité, qui s'avèrent en pratique être aussi nécessaires. On a le résultat de stabilité suivant :

THÉORÈME 4.2.1 Soit $\left\| \left(I + \delta\theta M^{-1} A \right)^{-1} \right\|$ la norme matricielle de $\left(I + \delta\theta M^{-1} A \right)^{-1}$. Alors, pour tout

$$\delta\theta > 0 \text{ et } h > 0, \text{ si } \left\| \left(I + \delta\theta M^{-1} A \right)^{-1} \right\| \leq 1$$

on a la stabilité du schéma numérique. De plus, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\left\| Z^n \right\| \leq \left\| \left(I + \delta\theta M^{-1} A \right)^{-1} \right\|^n \left\| Z^0 \right\| + \delta\theta \left\| M^{-1} \right\| \sum_{k=1}^n \left\| \left(I + \delta\theta M^{-1} A \right)^{-1} \right\|^k \left(\sup_{0 \leq n \leq N} \left\| B \right\|^n \right). \quad (4.2.1)$$

Preuve À partir de la relation (4.1.19) on a :

$$\left(M + \delta\theta A \right) Z^{n+1} = M Z^n + \delta\theta B^{n+1}.$$

Comme la matrice $M + \delta\theta A$ est inversible, la relation précédente s'écrit :

$$Z^{n+1} = \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M Z^n + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^{n+1}.$$

Ainsi, en faisant varier n , on a de manière successive les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z^n &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M Z^{n-1} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^n \\ Z^{n-1} &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M Z^{n-2} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^{n-1} \\ Z^{n-2} &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M Z^{n-3} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^{n-2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Z^1 &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M Z^0 + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^1. \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de Z^n devient :

$$\begin{aligned} Z^n &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M Z^{n-1} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^n \\ Z^n &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M \left[\left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M Z^{n-2} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^{n-1} \right] + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^n \\ Z^n &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-2} M^2 Z^{n-2} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-2} M B^{n-1} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^n \\ Z^n &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-2} M^2 \left[\left(M + \delta\theta A\right)^{-1} M Z^{n-3} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^{n-2} \right] \\ &\quad + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-2} M B^{n-1} + \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^n \\ Z^n &= \left(M + \delta\theta A\right)^{-3} M^3 Z^{n-3} + \left(M + \delta\theta A\right)^{-3} M^2 \delta\theta B^{n-2} + \left(M + \delta\theta A\right)^{-2} M \delta\theta B^{n-1} + \\ &\quad \delta\theta \left(M + \delta\theta A\right)^{-1} B^n. \end{aligned}$$

De proche en proche, on a finalement :

$$Z^n = \left(M + \delta\theta A\right)^{-n} M^n Z^0 + \delta\theta \sum_{k=1}^n \left(M + \delta\theta A\right)^{-k} M^{k-1} B^{n-k+1}. \quad (4.2.2)$$

En factorisant par M dans le second membre de l'égalité, on a :

$$Z^n = \left[\left(I + \delta\theta M^{-1} A\right)^{-1} \right]^n Z^0 + \delta\theta M^{-1} \sum_{k=1}^n \left[\left(I + \delta\theta M^{-1} A\right)^{-1} \right]^k B^{n-k+1}.$$

Ce qui donne finalement en prenant la norme, la relation suivante :

$$\|Z^n\| \leq \left\| \left(I + \delta\theta M^{-1}A \right)^{-1} \right\|^n \|Z^0\| + \delta\theta \|M^{-1}\| \sum_{k=1}^n \left\| \left(I + \delta\theta M^{-1}A \right)^{-1} \right\|^k \|B\|^{n-k+1},$$

d'où

$$\|Z^n\| \leq \left\| \left(I + \delta\theta M^{-1}A \right)^{-1} \right\|^n \|Z^0\| + \delta\theta \|M^{-1}\| \sum_{k=1}^n \left\| \left(I + \delta\theta M^{-1}A \right)^{-1} \right\|^k \left(\sup_{0 \leq n \leq N} \|B\|^n \right).$$

Ce qui donne le résultat. ■

4.3 Méthode des éléments finis du problème de référence

Dans cette partie, nous résolvons par la méthode des éléments finis le problème de référence. Pour cela, nous utilisons le même principe que dans la résolution du problème limite à deux échelles. En effet, nous discrétisons en temps le problème référence en utilisant la méthode d'euler implicite. Notre problème discrétisé s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{z_{n+1}^\epsilon - z_n^\epsilon}{\delta t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z_{n+1}^\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \quad \text{dans} \quad [0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) &= z_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial z_{n+1}^\epsilon(t, x)}{\partial n} &= g \quad \text{sur} \quad [0, T) \times \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

4.3.1 Formulation variationnelle

En s'inspirant de la formulation variationnelle de notre problème limite, en multipliant (4.3.1) par une fonction test v et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} (z_{n+1}^\epsilon - z_n^\epsilon) v dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \mathcal{A}^\epsilon(x) \nabla z_{n+1}^\epsilon \cdot \nabla v dx = \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial\Omega} \mathcal{A}^\epsilon g v dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \nabla \mathcal{C}^\epsilon v dx. \quad (4.3.2)$$

On multiplie l'équation (4.3.2) par ϵ pour obtenir :

$$\frac{\epsilon}{\delta t} \int_{\Omega} (z_{n+1}^\epsilon - z_n^\epsilon) v dx + \int_{\Omega} \mathcal{A}^\epsilon(x) \nabla z_{n+1}^\epsilon \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \mathcal{A}^\epsilon g v dx + \int_{\Omega} \nabla \mathcal{C}^\epsilon v dx. \quad (4.3.3)$$

Le problème variationnel discret du problème de référence s'écrit : trouver $z_{h,n}^\epsilon$ tel que $\forall v_h \in V_h$

$$\frac{\epsilon}{\delta t} \int_{\Omega_h} (z_{h,n+1}^\epsilon - z_{h,n}^\epsilon) v_h dx + \int_{\Omega_h} \mathcal{A}^\epsilon \nabla z_{h,n+1}^\epsilon \cdot \nabla v_h dx = \int_{\partial\Omega_h} \mathcal{A}^\epsilon g v_h dx + \int_{\Omega_h} \nabla \mathcal{C}^\epsilon v_h dx. \quad (4.3.4)$$

Comme ce problème est bien un problème de dimension finie, alors

$$V_h = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{N_s}).$$

Notons I l'ensemble des indices des noeuds du maillage correspondant à une valeur inconnue de la solution $z_{h,n}^\epsilon$. La solution approchée $z_{h,n}^\epsilon$ sera cherchée sous la forme :

$$z_{h,n}^\epsilon = \sum_{i \in I} z_{i,n}^\epsilon \omega^i(x) \quad (4.3.5)$$

où $z_{i,n}^\epsilon$ est la valeur de $z_{n,h}^\epsilon$ en ce sommet. En posant successivement comme fonctions tests $v_h = \omega^j$ pour $j \in I$, alors le problème discret devient :

$$\sum_{i \in I} \frac{\epsilon}{\delta\theta} (z_{i,n+1}^\epsilon - z_{i,n}^\epsilon) \int_{\Omega_h} \omega^i \omega^j dx + \sum_{i \in I} z_{i,n+1}^\epsilon \int_{\Omega_h} \mathcal{A}^\epsilon \nabla \omega^i \nabla \omega^j dx = \int_{\partial\Omega_h} \mathcal{A}^\epsilon g^{n+1} \omega^j d\sigma + \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \omega^j dx. \quad (4.3.6)$$

D'où, on a :

$$\sum_{i \in I} \left(\frac{\epsilon}{\delta\theta} \int_{\Omega_h} w^i w^j + \int_{\Omega_h} \mathcal{A}^\epsilon \nabla w^i \nabla w^j \right) z_{i,n+1}^\epsilon = \sum_{i \in I} \left(\frac{\epsilon}{\delta\theta} \int_{\Omega_h} w^i w^j \right) z_{i,n}^\epsilon + \int_{\partial\Omega_h} g^{n+1} w^j d\sigma + \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon w^j dx. \quad (4.3.7)$$

L'équation (4.3.7) s'écrit sous la forme générique suivante :

$$\left(\frac{\epsilon}{\delta\theta} M + A \right) z_{n+1}^\epsilon = \frac{\epsilon}{\delta\theta} M z_n^\epsilon + B_{n+1} \quad (4.3.8)$$

où z_n^ϵ est le vecteur solution de dimension N_s , A et M sont respectivement les matrices de raideur et de masse de taille $N_s \times N_s$.

4.3.2 Résultat de convergence

Dans cette partie, nous établirons un résultat de convergence entre les deux solutions approchées z_h^ϵ et Z_h respectivement du problème de référence et du problème limite. On doit être sûr dans la théorie que z_h^ϵ est la limite de Z_h quand ϵ tend vers 0. On rappelle que la méthode des éléments finis nous garantit ces approximations suivantes : pour $h > 0$ et pour tous $z_h^\epsilon, Z_h \in V$

$$\|z^\epsilon - z_h^\epsilon\|_V \leq \tau_h \text{ et } \|Z - Z_h\|_V \leq \tau_h.$$

Donc, en premier temps, nous allons énoncer ce théorème de convergence suivant :

THÉORÈME 4.3.1 *Pour tout $\epsilon > 0$ et $t \in [0, T)$, soit z^ϵ la solution de (4.0.1) et $Z^\epsilon(t, x) = Z(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$, où Z est la solution de (4.0.5) alors, si les hypothèses (4.0.2), (4.0.3) et (4.0.4) sont satisfaites, $z^\epsilon - Z^\epsilon$ vérifie l'estimation suivante :*

$$\|z^\epsilon - Z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))} \leq \epsilon \alpha, \quad (4.3.9)$$

où α est une constante positive.

Preuve Comme les coefficients $\mathcal{A}^\epsilon(t, x)$ et $\mathcal{C}^\epsilon(t, x)$ de l'équation (4.0.1) convergent à deux échelles respectivement vers $\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x)$ et $\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x)$, alors ils peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon(t, x) + \epsilon \tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon(t, x) \text{ et } \mathcal{C}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon(t, x) + \epsilon \tilde{\mathcal{C}}_1^\epsilon(t, x) \quad (4.3.10)$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{A}}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \quad \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{C}}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \quad (4.3.11)$$

et

$$\tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{A}}_1(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \quad \tilde{\mathcal{C}}_1^\epsilon(t, x) = \tilde{\mathcal{C}}_1(t, \frac{t}{\epsilon}, x). \quad (4.3.12)$$

En se plaçant dans le cadre des hypothèses du théorème (4.0.5), les coefficients

$$\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{A}}_1, \tilde{\mathcal{C}}_1, \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon, \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon, \tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon, \text{ et } \tilde{\mathcal{C}}_1^\epsilon \text{ sont réguliers et bornés.} \quad (4.3.13)$$

En utilisant (4.3.10), l'équation (4.0.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon + \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon \nabla z^\epsilon) + \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{C}}^\epsilon \nabla z^\epsilon) \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial n} = g. \end{cases} \quad (4.3.14)$$

Comme

$$\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} = \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)^\epsilon, \quad (4.3.15)$$

où

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^\epsilon(t, x) = \frac{\partial Z}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \text{ et } \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)^\epsilon(t, x) = \frac{\partial Z}{\partial \theta}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$$

alors, Z^ϵ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon \nabla Z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}^\epsilon + \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^\epsilon \\ \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial n} = g. \end{cases} \quad (4.3.16)$$

À partir des formules (4.3.14) et (4.3.16), nous déduisons que $\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon}$ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \left(\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon} \right)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \left((\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon + \epsilon \tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon) \nabla \left(\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon} \right) \right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_1^\epsilon + \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^\epsilon + \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_1^\epsilon \nabla Z^\epsilon) \right) &]0, T[\times \Omega \\ \frac{\partial \left(\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon} \right)}{\partial n} = 0 &]0, T[\times \partial \Omega. \end{cases} \quad (4.3.17)$$

Comme tous les coefficients du problème (4.3.17) sont réguliers et bornés, l'existence de $\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon}$ est une conséquence directe du résultat de Ladyzenskaja, Solonnikov et Ural' Ceva [34]. En plus, comme la condition aux limites de (4.3.17) est homogène, alors en se plaçant dans le cadre des hypothèses du théorème (4.0.5), nous montrons que $\frac{z^\epsilon - Z^\epsilon}{\epsilon}$ solution de (4.3.17) est bornée dans $L^2([0, T], L^2(\Omega))$. ■

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant en s'appuyant sur la méthode de convergence de Galerkin.

THÉORÈME 4.3.2 *L'espace V_h sera en pratique construit à partir d'un maillage du domaine Ω , l'indice h désignant la taille typique des mailles. Pour $\epsilon > 0$, $h > 0$, $V \subset H^1(\Omega)$, z_h^ϵ et Z_h^ϵ dans (V_h) sont les solutions approchées de z^ϵ et Z^ϵ dans (V) solutions respectives de (4.0.1) et (4.0.5), si les hypothèses (4.0.2), (4.0.3) et (4.0.4) sont vérifiées, alors $z_h^\epsilon - Z_h^\epsilon$ vérifie :*

$$\left\| z_h^\epsilon - Z_h^\epsilon \right\|_V \leq \tau_h + \epsilon \alpha, \quad (4.3.18)$$

où α est une constante positive.

Preuve Nous partons de la relation suivante :

$$\left\| z_h^\epsilon - Z_h^\epsilon \right\| = \left\| z_h^\epsilon - Z_h^\epsilon + z^\epsilon - z^\epsilon + Z^\epsilon - Z^\epsilon \right\|.$$

Ensuite, nous majorons le second membre

$$\left\| z_h^\epsilon - Z_h^\epsilon \right\|_V \leq \left\| z^\epsilon - z_h^\epsilon \right\|_V + \left\| Z^\epsilon - Z_h^\epsilon \right\|_V + \left\| z^\epsilon - Z^\epsilon \right\|_V.$$

En se munissant du théorème (4.3.1) et pour $V \subset H^1(\Omega)$, alors on obtient :

$$\left\| z_h^\epsilon - Z_h^\epsilon \right\|_V \leq \tau_h + \left\| z^\epsilon - Z^\epsilon \right\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}.$$

Au final, on a :

$$\left\| z_h^\epsilon - Z_h^\epsilon \right\|_V \leq \tau_h + \epsilon \alpha.$$

■

4.4 Comparaison entre la solution numérique du problème limite à deux échelles et celle du problème de référence

Dans cette section, nous considérons les deux approximations : $Z_h^\epsilon(t, x_1, x_2)$ pour la solution Z^ϵ du problème limite à deux échelles et z_h^ϵ pour $z^\epsilon(t, x)$ solution de (4.0.1). Le but de cette partie est de comparer, pour des valeurs de ϵ fixées, pour un temps t donné, les champs $\mathcal{U}$ et $\mathcal{M}$ donnés, les deux solutions numériques suivantes: $z_h^\epsilon(t, x_1, x_2)$ et $Z_h^\epsilon(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$. On rappelle que ce résultat est établi dans la section ci-avant. Donc, il s'agit ici en pratique de prouver notre résultat de convergence quand ϵ est fixé au voisinage de zéro. Nous commencerons d'abord, par donner la représentation graphique des champs de vitesse $\mathcal{U}(t, \theta, x)$ et du coefficient de diffusion $\mathcal{A}(t, \theta, x)$ pour un temps t où $x \in \Omega$ fixés. En ce qui concerne les données, le champs de vitesse $\mathcal{U}$ est donné par

$$\mathcal{U}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) = \sin 2\pi x_1 \cos 2\pi x_2 \sin 2\pi \theta \mathbf{e}_1, \quad (4.4.1)$$

où $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ désigne les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la donnée initiale au temps $t = 0$ est donnée par $z_0(x) = z_0(x_1, 0)$ et la fonction g définie sur le bord $\partial\Omega$ est donnée par $g(x) = 1$.

Dans les figures suivantes, pour θ fixé, on représente l'évolution du champs de vitesse $\mathcal{U}$ en fonction de $x = (x_1, x_2)$.

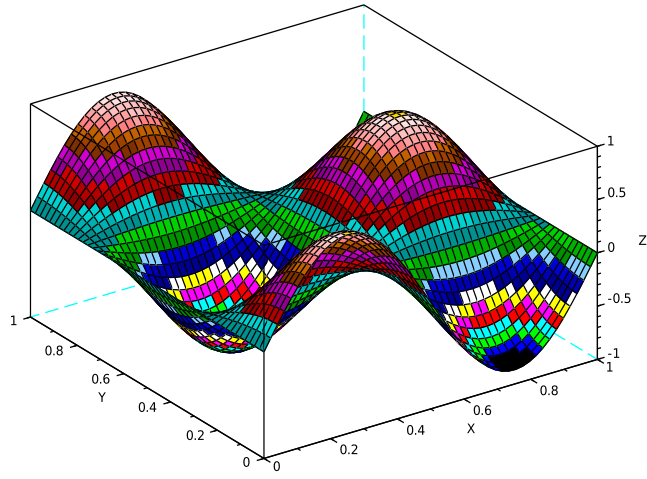


Figure 4.1: Distribution de $\mathcal{U}$ en espace pour $\theta = \frac{1}{4}$.

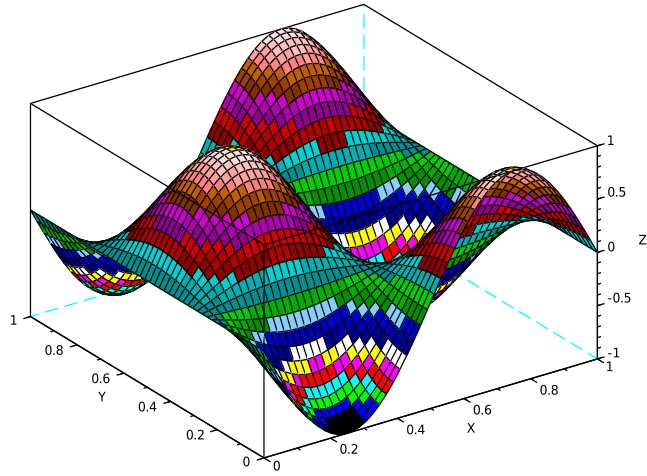


Figure 4.2: Distribution de $\mathcal{U}$ en espace pour $\theta = \frac{3}{4}$.

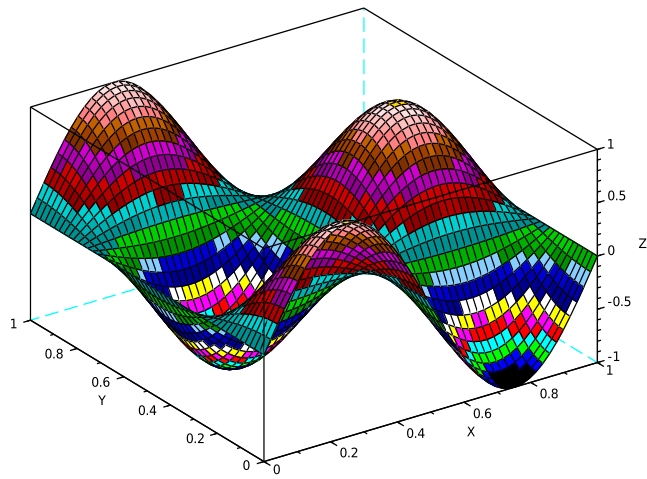


Figure 4.3: Distribution de $\mathcal{U}$ en espace pour $\theta = \frac{1}{6}$.

Dans les figures ci-après , pour un point (x_1, x_2) fixé, on montre comment varie le champs de vitesse $\mathcal{U}$ en fonction de θ .

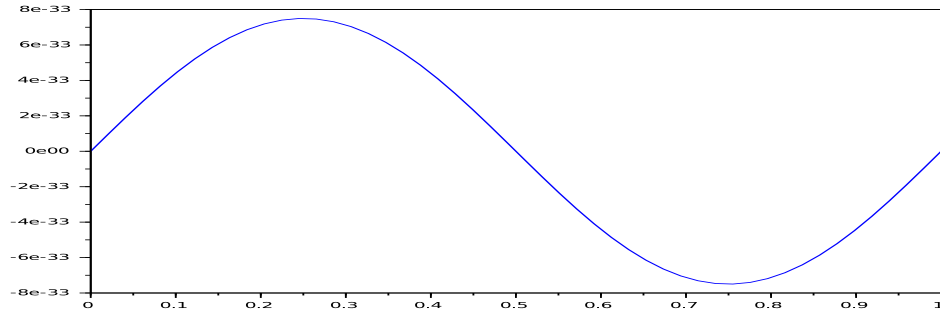


Figure 4.4: L'évolution de $\mathcal{U}(\theta, x_1, x_2)$ pour $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{4}$

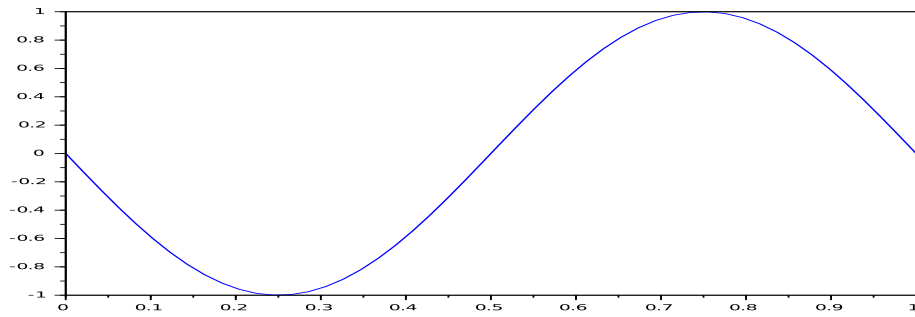


Figure 4.5: L'évolution de $\mathcal{U}(\theta, x_1, x_2)$ pour $x_1 = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{4}$

Dans les figures ci-après , pour un point (x_1, x_2) fixé, on représente la distribution de $\tilde{\mathcal{A}}(\theta, x_1, x_2)$ en θ .

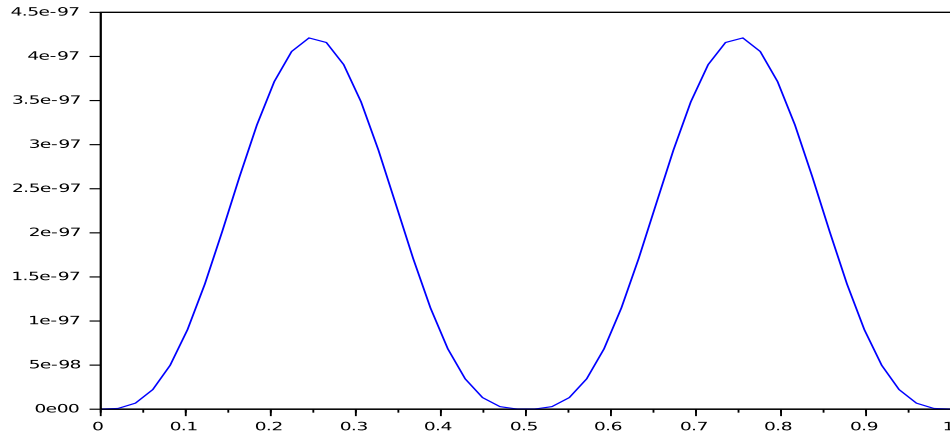


Figure 4.6: L'évolution de $\tilde{\mathcal{A}}(\theta, x_1, x_2)$ pour $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{4}$

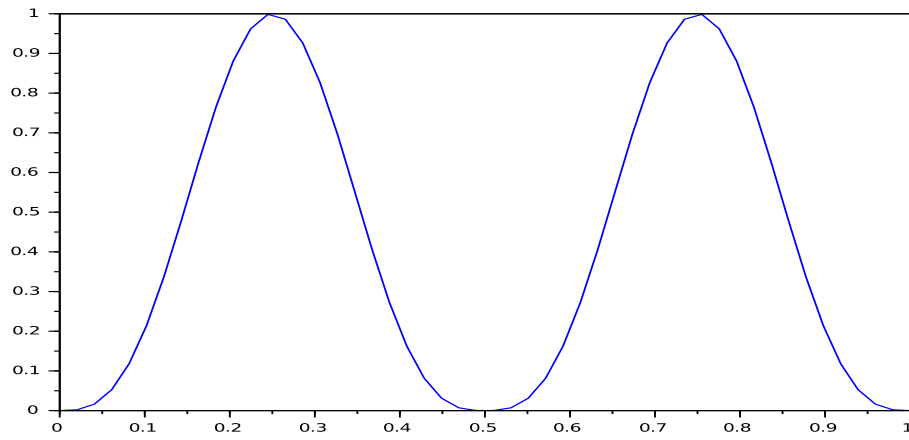


Figure 4.7: L'évolution de $\tilde{\mathcal{A}}(\theta, x_1, x_2)$ pour $x_1 = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{4}$

Dans ce qui suit, on essaie de voir comment la solution $z^\epsilon(t, x)$ pour un temps t fixé varie en fonction de ϵ . La solution initiale au temps $t = 0$ est donné par $z_0(x) = \sin(2\pi x_1)$. En utilisant scilab pour les codes de résolution alors, on observe, dans les figures qui suivent, que le champs de dune évolue fortement lorsque ϵ varie.

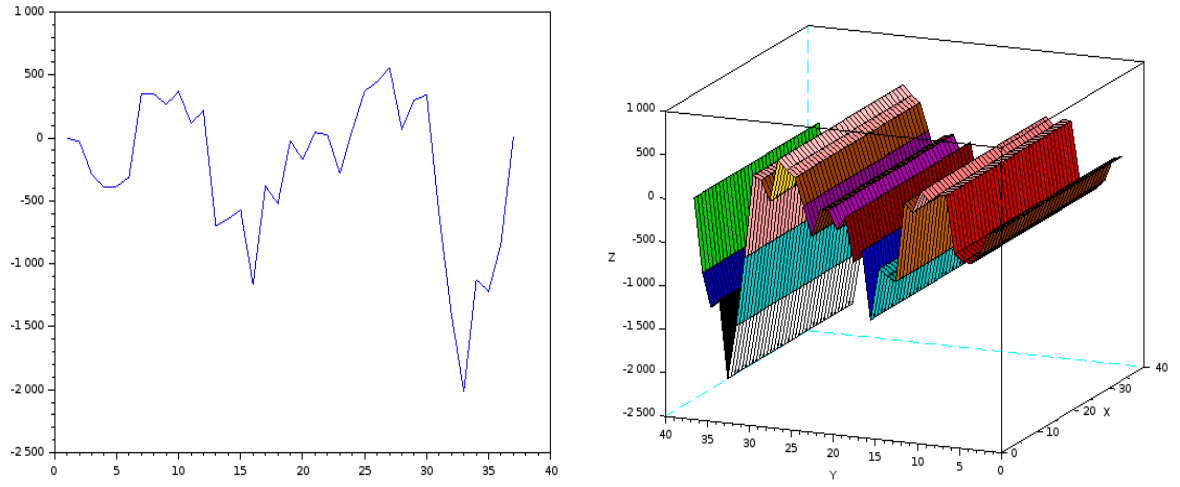


Figure 4.8: L'évolution en 2D et en 3D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ pour $t = 10^4$ et $\epsilon = 0, 1$,

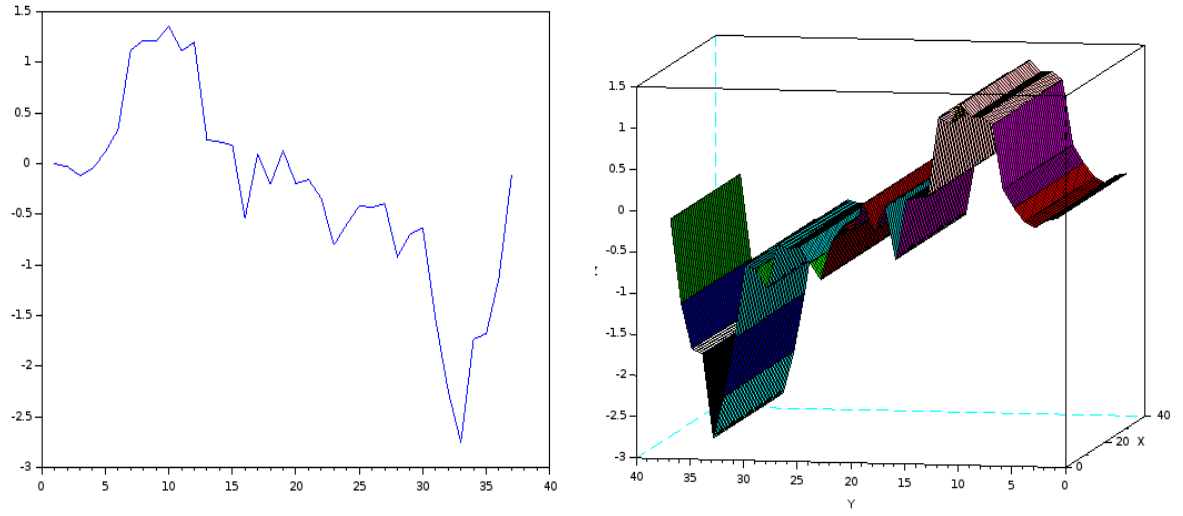


Figure 4.9: L'évolution en 2D et 3D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ pour $t = 10^{-2}$ et $\epsilon = 0,001$

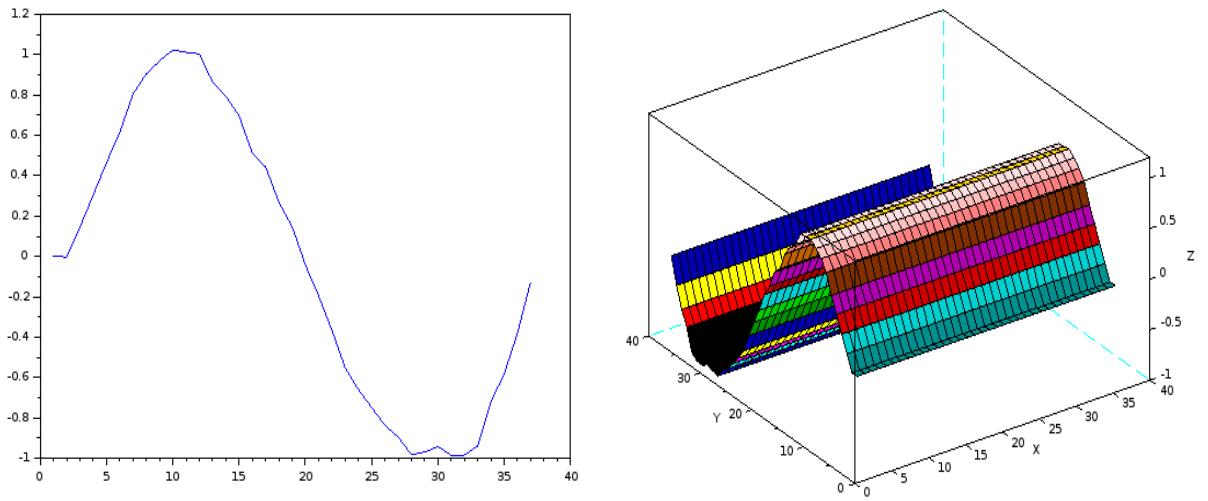


Figure 4.10: L'évolution en 2D et en 3D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ pour $t = 10^{-4}$ et $\epsilon = 0,0001$

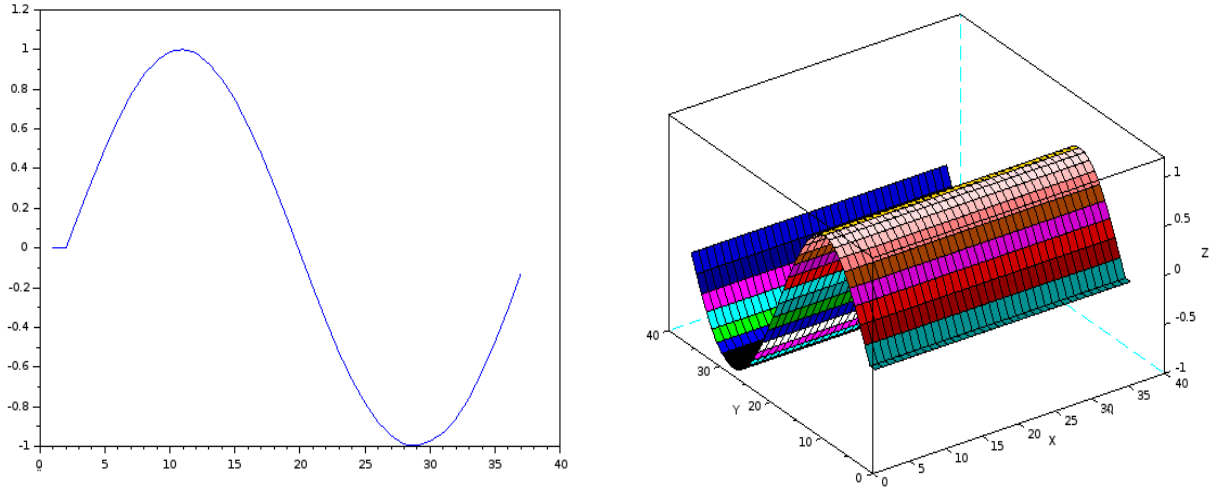


Figure 4.11: L'évolution en 2D et en 3D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ pour $t = 10^{-6}$ et $\epsilon = 10^{-5}$

Dans cette dernière partie, nous comparons pour ϵ très petit fixé, en 2D et 3D, l'évolution de la solution de référence et de la solution limite. Les figures suivantes donnent les résultats obtenus.

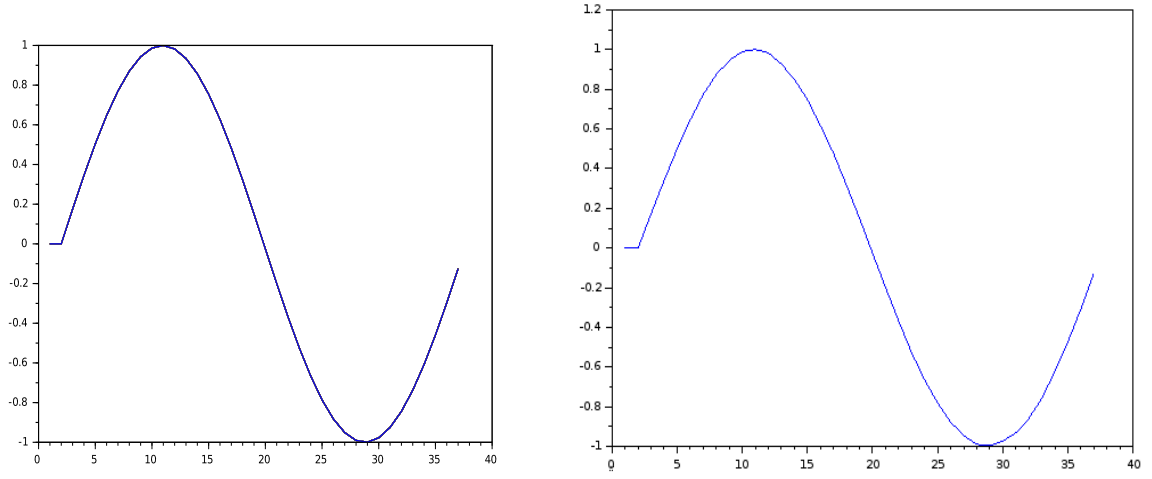


Figure 4.12: L'évolution en 2D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ et de $Z(t, \frac{t}{\epsilon}, \cdot)$ pour $t = 10^{-6}$ et $\epsilon = 10^{-5}$

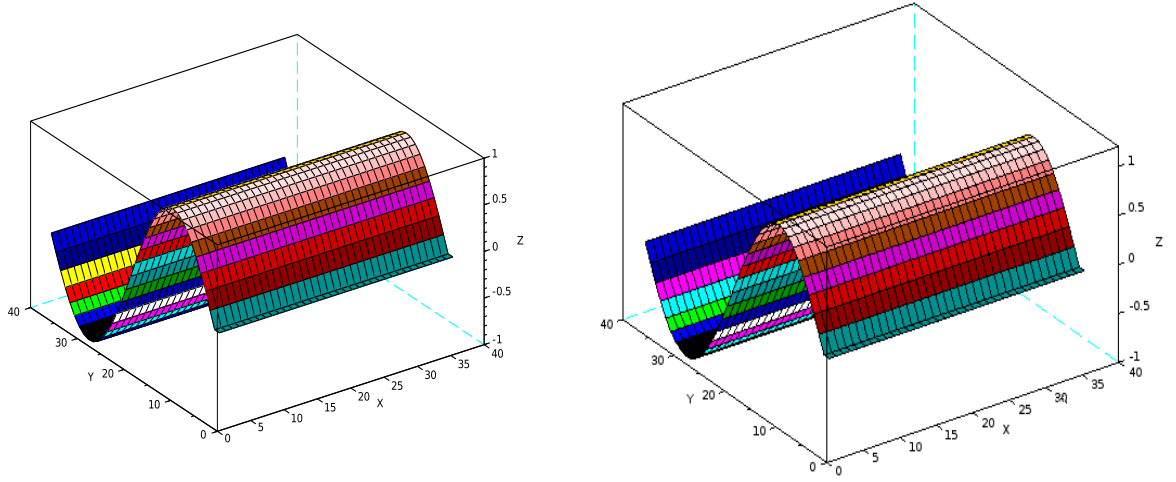


Figure 4.13: L'évolution en 2D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ et de $Z(t, \frac{t}{\epsilon}, \cdot)$ pour $t = 10^{-6}$ et $\epsilon = 10^{-5}$

Par analogie, pour la donnée initiale $t = 0$ et $z_0(x) = \cos(2\pi x_1) + \cos(4\pi x_1)$, en utilisant le logiciel freefem++ pour la résolution numérique de la solution $z^\epsilon(t, x)$, pour un temps t fixé, en fonction de ϵ alors, on observe, dans les figures qui suivent, que le champ de dune évolue fortement lorsque ϵ varie.

4.4 Comparaison entre la solution numérique du problème limite à deux échelles et celle du problème de référence⁸⁸

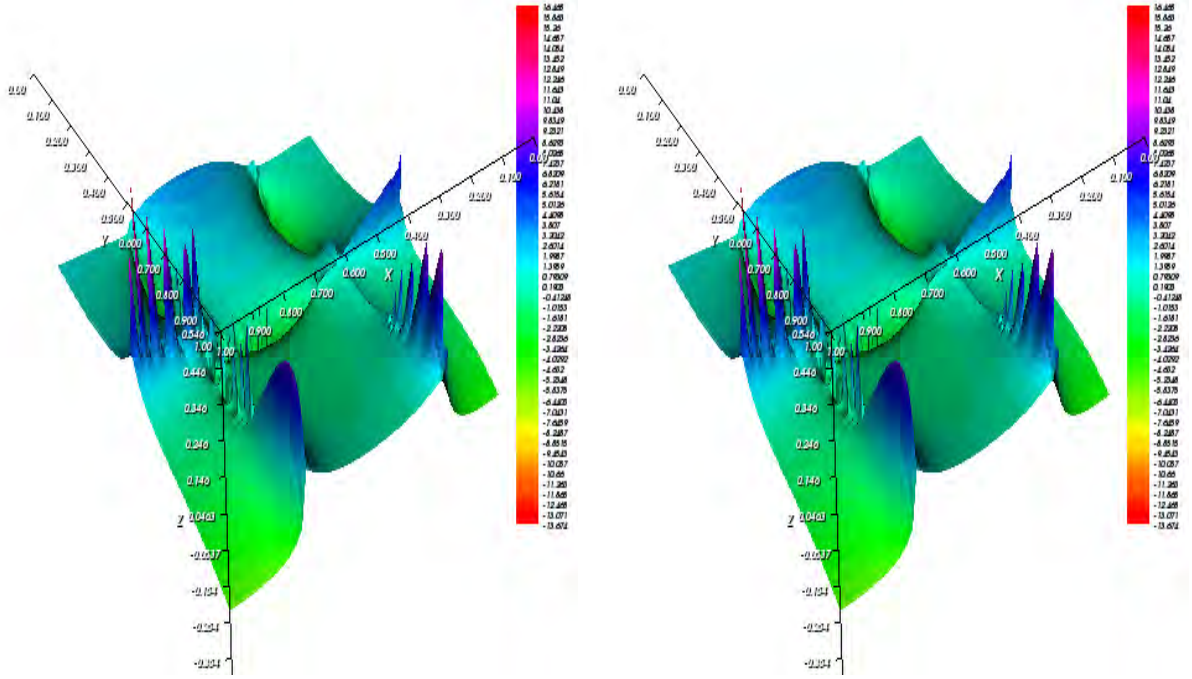


Figure 4.14: L'évolution en 3D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ à gauche et de $Z(t, \frac{t}{\epsilon}, \cdot)$ à droite pour $t = 1$ et $\epsilon = 0.5$.

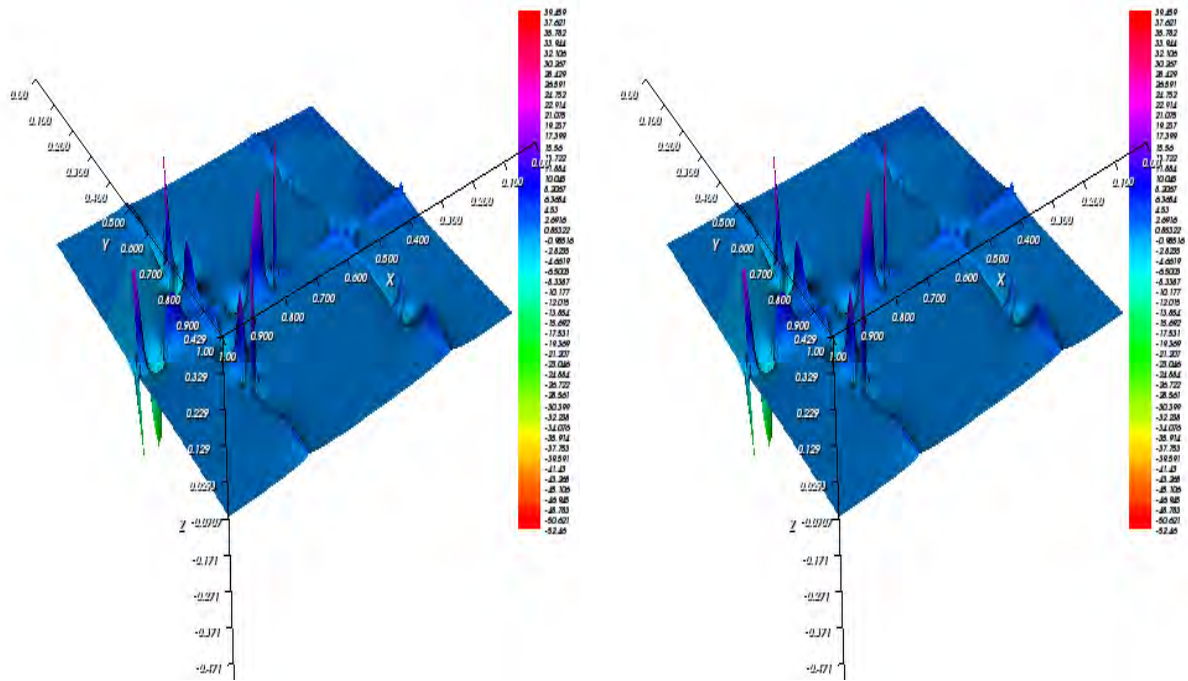


Figure 4.15: L'évolution en 3D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ à gauche et de $Z(t, \frac{t}{\epsilon}, \cdot)$ à droite pour $t = 0.5$ et $\epsilon = 0.1$.

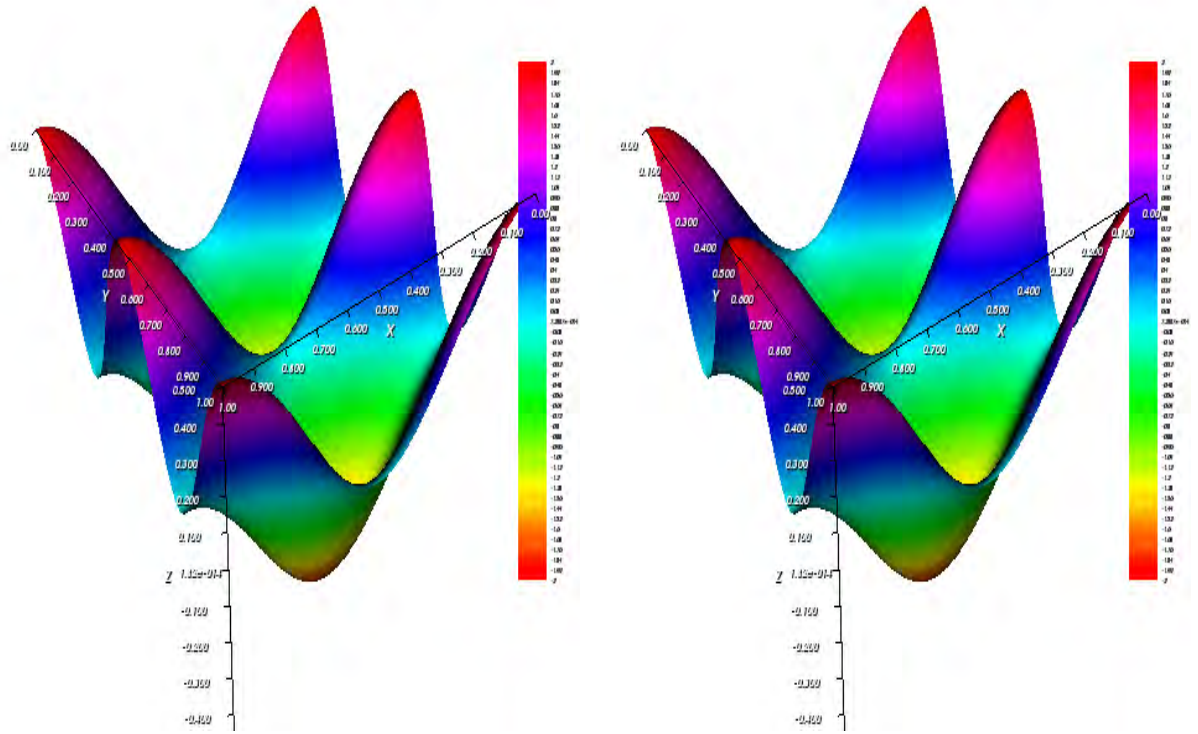


Figure 4.16: L'évolution en 3D de $z^\epsilon(t, \cdot)$ à gauche et de $Z(t, \frac{t}{\epsilon}, \cdot)$ à droite pour $t = 0.5$ et $\epsilon = 0.01$.

En somme, nous constatons que la solution $z^\epsilon(t, \cdot)$ est aussi proche que l'on veut de $Z(t, \frac{t}{\epsilon}, \cdot)$ lorsque ϵ prend des valeurs de plus en plus proche de zéro. Du coup, le résultat de la convergence à deux échelles, établi dans le chapitre 4, est confirmé c'est-à-dire $z^\epsilon(t, \cdot) \sim Z(t, \frac{t}{\epsilon}, \cdot)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Chapter 5

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons proposé une étude mathématique des problèmes de transport de sable sous-marin dans les zones soumises à la marée. D'une part, des modèles mathématiques de la dynamique des dunes de sable sous-marin ont de ce fait été mis en oeuvre, parmi lesquels le modèle valide à court terme suivant:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial z^\epsilon(t,x)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) & = & \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \quad \text{dans} \quad (0, T) \times \Omega \\ z^\epsilon(0, x) & = & z_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial z^\epsilon(t,x)}{\partial n} & = & g \quad \text{sur} \quad [0, T) \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.0.1)$$

où les coefficients $\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{C}^\epsilon$ sont définis par

$$\mathcal{A}^\epsilon(t, x) = a(1 - b\epsilon \mathbf{m})g_a(|\mathbf{u}|), \text{ et } \mathcal{C}^\epsilon(t, x) = c(1 - b\epsilon \mathbf{m})g_c(|\mathbf{u}|) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad (5.0.2)$$

avec $\epsilon > 0$, a, b, c sont des nombres réels et g_a et g_c des fonctions régulières vérifiant certaines hypothèses.

D'autre part, nous nous sommes intéressés aux résultats d'existence et d'unicité du modèle à court terme de notre problème d'étude. En effet, après avoir établi quelques estimations sur la suite de solution $\left(z^\epsilon\right)_{\epsilon>0}$, nous avons démontré que cette suite de solution de (5.0.1) converge à deux échelles vers $Z \in L^\infty(\mathbb{R}, L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\Omega)))$ solution unique du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla Z) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \text{ dans } (0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \\ \frac{\partial Z}{\partial n} = g \text{ sur } (0, T) \times \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.0.3)$$

où $\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x)$ et $\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x)$ sont donnés par

$$\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) = ag_a(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|)$$

et

$$\tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) = cg_c(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|) \times \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|}.$$

Nous avons ensuite construit une méthode numérique basée sur la méthode des éléments finis permettant de résoudre les problèmes de référence (5.0.1) et limite (5.0.3) de transport de sable sous-marin. Nous avons pu comparer la solution du modèle homogénéisé, par la convergence à deux échelles que nous avons construite, à la solution du modèle de référence. En comparant les résultats, nous avons constaté que la convergence à deux échelles est confirmée à travers des simulations numériques de cas induisant des valeurs de ϵ très proches de zéro.

Ce travail pourrait être étendu de nombreuses manières. Nous énonçons quelques possibilités.

1. L'étude mathématique sur un domaine ouvert borné Ω des problèmes de transport de sable dans l'océan côtier à proximité des zones soumises à la marée à moyen et long terme compléterait l'étude théorique des différents modèles valides à la dynamique des dunes de sable.
2. Il serait intéressant aussi de construire une méthode numérique basée sur les éléments finis qui nous permettrait de comparer les modèles de référence et limite à deux échelles à moyen et long terme de la dynamique des dunes de sable.
3. Le problème de référence du problème de transport de sable avec la condition aux limites de Dirichlet pourrait être considéré.

Bibliography

- [1] G. Allaire, *Homogenization and Two-Scale convergence*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 1482–1518.
- [2] J. R. L. Allen (1982d) *Simple Models for the shape and symmetry of tidal sand waves: Dynamically stable symmetric equilibrium forms* Marine Geology, 48:51-73.
- [3] C.L Amos et E.L King (1984) *Bed forms of the canadian eastern seabord: a comparaison with global occurences* Marine Geology, 57: 167-208.
- [4] B. Andreotti, P. Claudin, S. Douady, *Selection of dunes shpes and velocities. Part 1: Dynamics of sand wind barchans*, Eur. Phys J. B., p341-352, 2002.
- [5] M. O. Badahi, *Analyse de la stabilité de forme géométrique et asymptotique d'équations aux dérivées partielles*, PHD thesis, UCAD, 2016.
- [6] M. O. Badahi, I. Faye, D. Seck, Homogenization and transport equation: the case of desert and and piles, to appear in Non linear studies.
- [7] R.A. Bagnold, *The physics of blown sand and desert dunes*, Chapman and Hall, 1941.
- [8] R.A. Bagnold, *The movement of desert sand*, Proceedings of the Royal Society of London A **157** (1936), 594–620.
- [9] J.A Baillard and D.L Inman (1981), *An energetics bed load model for plane sloping beach local transport*, Journal of Geophysical research, vol.86 (C3), pp.2035-2043
- [10] S. Berné, G Allen *Essai de synthèse sur les dunes hydrauliques gántes tidales actuelles*. Bulletin de la société Géologique de France 6: 1145-1160
- [11] S. Berné 1991 *Architecture et dynamique des dunes tidales*. PhD thesis, University of lille Villeneuve-d'escq; 295 pp.
- [12] E.W Bijker (1967) *Some consideration about scales for coastal models with movable bed*, Deft Hydraulic lab, Publication No:50. the Netherlands
- [13] E.W Bijker (1971) *long shore transport computation*, journal of water ways ASCE, vol.97, WW4, pp.687-703
- [14] P. Blondeaux, *Mechanics of coastal forms*, Ann. Rev. Fluid Mech., **33** (2001), 339- 370. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.33.1.339>.
- [15] H.Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

- [16] R.Coke, A. Warren, *Desert Geomorphology*, UCL Press, 1993.
- [17] C. Diedhiou, B. K. Thiam, I. FAYE, *Numerical simulations of sand transport*, in Festschrift in honor of the late professor Galaye Dia, Euclid projecteuclid.org. **(SPAS) Books Series. Calgary, Alberta 2018.**
- [18] G.P. Dawson, B. Johns, and R.L. Soulsby, *A numerical model of shallow-water flow over topography*, in *Physical Oceanography of Coastal and Shelf Seas, Elsevier Oceanography Series*, Vol. **35**, Elsevier, 1983, 267-320. [https://doi.org/10.1016/s0422-9894\(08\)70504-x](https://doi.org/10.1016/s0422-9894(08)70504-x).
- [19] H. J. De Vriend *Steady Flow in Shallow Channel Bends*, PhD thesis, Delft Univ. of Technology, 1981.
- [20] F. Engelund and E. Hansen, *Investigation of Flow in Alluvial Streams*, Technical Report 9, Tech. Univ. Denmark Hydraulic Lab. Bull., 1966.
- [21] L. C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, Vol. **19**, American Mathematical Society, 1998. <https://doi.org/10.1090/gsm/019>.
- [22] P. Hersen, *Morphogénese et dynamique des Barchanes*, Thèse de doctorat, 2004.
- [23] I. Faye, E. Frénod, D. Seck, *Singularly perturbed degenerated parabolic equations and application to seabed morphodynamics in tided environment*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Vol 29 N°3 March 2011, pp 1001-1030.
- [24] I. Faye, E. Frénod, D. Seck, *Two scale simulations of sand transport*, DCDS-S, Series S 8, No 1, February 2015, pp. 151-168.
- [25] I. Faye, E. Frénod, D. Seck, *Long term behaviour of singularly perturbed parabolic degenerated equation*, *Journal of Nonlinear Analysis and Application*, **2** (2016), 82- 105. <https://doi.org/10.5899/2016/jnaa-00297>.
- [26] Komarova N.L. and Newell A, *Nonlinear dynamics of sandbanks and sandwaves*. J. Fluid Mech., vol. 415, pp. 285-321, 2000.
- [27] B. W. Flemming, *The role of the grain size, water depth and flow velocity as scaling factors controlling the size of subaqueous dunes*, Marine Sandwave Dynamics, International Workshop, March 23-24 2000(A. Trentesaux and T. Garlan, eds), University of Lille 1, France, 2000.
- [28] D. Idier, *Dunes et Bancs de Sables du Plateau Continental: Observations In-situ et Modélisation Numérique*, PhD thesis, 2002.
- [29] Frijlink.H.C (1952) *Discussion des formules de débit solide de Kalinske, Einstein et Meyer-Peter et Mueller compte tenu des mesures récentes de transport dans les rivières Néerlandaises 2eme journal hydraulique société hydraulique de france, Grenoble* pp.98-103.
- [30] D. Idier, D. Astruc and S.J.M.H. Hulscher, *Influence of bed roughness on dune and megaripple generation*, *Geophysical Research Letters*, **31** (2004), 1-5. <https://doi.org/10.1029/2004gl019969>.
- [31] B. Johns, R.L. Soulsby and T.J. Chesher, *The modelling of sandwave evolution resulting from suspended and bed load transport of sediment*, J. Hydraul. Research, **28** (1990), n°3, 355-374. <https://doi.org/10.1080/00221689009499075>.

- [32] J.F. Kennedy, *The formation of sediment ripples, dunes and antidunes*, Ann. Rev. Fluids Mech., 1 (1969), 147-168. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.01.010169.001051>
- [33] N. L. Komarova and A. C. Newell, *Nonlinear dynamics of sandbanks and sandwaves*, J. Fluid Mech., **415** (2000), 285-321. <https://doi.org/10.1017/s0022112000008855>.
- [34] O. A. Ladyzenskaia, V. A. Solonnikov and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Vol. **23**, Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Soc., 1968.
- [35] S. Le bot 2001. *morphodynamique des dunes sous-marines sous l'influence des marées et des tempêtes* Exemple du Pas de calais, PhD thesis, University of lille, 300 pp
- [36] J. L. Lions, *Remarques sur les equations différentielles ordinaires*, Osaka Math. J., **15** (1963), 131-142.
- [37] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, 1969.
- [38] J. L. Lions, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Presses universitaires de Montreal, 1965.
- [39] J. L. Lions, E. Magenes, *Non- homogeneous Boundary Value Problems and Applications (3 volumes)*, Springer, 1992.
- [40] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), 608–623.
- [41] B. K. Thiam, M. M. T. Baldé, I. Faye, D. Seck, *Numerical Analysis of a corrector result: the case a short term dynamical of sand dunes*, in Festschrift in honor of the late professor Galaye Dia, Euclid projecteuclid.org.(SPAS) Books Series. Calgary, Alberta 2018.
- [42] B. K. Thiam, M. M. T. Baldé, I. Faye, D. Seck, *A Neumann boundary value problem of sand transport problems: Existence and homogenization result. Work, in progress.*
- [43] B. K. Thiam, I. Faye, D. Seck, *A Neumann boundary value problem of sand transport: Existence and homogenization of short term case*, Int. J. of Maths Anal., **12**, 2018, no 1, 25-52, <https://doi.org/10.12988/ijma/2018.711147>
- [44] L.C Van Rijn, *Sediment transport, Part I: Bed Load Transport*, October, 1984, Vol. 110.ASCE, N°10.