

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THESE DE DOCTORAT UNIQUE

No. d'ordre :

Mention

Mathématiques et Modélisation

Spécialité

Géométrie Différentielle et Applications

Présentée par

Rénovat NKUNZIMANA

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Titre de la thèse :

**SUR LA CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES TENDUS DES
3-VARIETES FIBREES SUR LE CERCLE**

Soutenue le 06 avril 2019 devant le jury composé de :

Président :	M. Cheikh T. GUEYE	Professeur	Université Cheikh Anta Diop, Dakar
Rapporteurs :	M. Hassimiou DIALLO	Professeur	Université Felix Houphouet Boigny, C
	M. Philippe RUKIMBIRA	Professeur	Florida International University, USA
Examineurs :	M. E. H. Cheikh Mbackè DIOP	M. de Conférences	Université Cheikh Anta Diop, Dakar
	M. Athoumane NIANG	M. de Conférences	Université Cheikh Anta Diop, Dakar
Directeur de Thèse :	M. Hamidou DATHE	Professeur	Université Cheikh Anta Diop, Dakar

Dédicaces

A Dieu Tout Puissant qui donne la vie, qui nous a donné l'Esprit de savoir et de chercher à savoir, Lui QUI nous inspire dans tous nos oeuvres et sans doute, n'eût été sa main forte, nous ne serions pas arrivés au terme de ce travail.

Je tiens à dédier cette thèse à mes très chers parents : mon père B. TUNGANEZA et ma mère Concilie KARENZO ; eux qui se sont donnés corps et âme pour mon bien-être depuis ma naissance jusqu'aujourd'hui. Mes chers parents, vous avez tout fait pour me mettre aux bancs de l'Ecole, vous vous êtes privés pas mal de choses durant toute votre vie pour ma scolarité, votre soutien et votre amour envers moi ont fait que je sois ce que je suis aujourd'hui. Cette thèse est le fruit de vos efforts.

A ma fille Ronia Alyssa NKUNZIMANA qui a enduré mon absence depuis sa naissance alors qu'elle avait tellement besoin de ma présence pour pouvoir profiter de l'amour paternel ainsi qu'à sa maman madame Claudine NIYONKURU.

A toute ma famille, pour son soutien moral et matériel qui m'ont été d'une grande importance. Que Dieu Tout Puissant vous bénisse.

Remerciements

Au terme de mon travail, c'est pour moi un agréable devoir et un vif plaisir d'exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation.

Je tiens à remercier plus particulièrement Professeur Hamidou DATHE, promoteur et directeur de cette thèse : vous m'avez guidé avec un esprit tant scientifique qu'humain depuis le Master jusqu'aujourd'hui. Malgré vos multiples responsabilités, vous avez été un véritable guide dans mon apprentissage des mathématiques. Votre gentillesse et votre caractère très social m'ont permis de mener mes recherches dans un climat d'épanouissement et d'enthousiasme. Vous avez toujours été disponible autant de fois que j'ai besoin de votre aide. Vos nombreuses qualités humaines, vos conseils judicieux et surtout votre rigueur scientifique m'ont été d'une grande utilité. Vous m'avez suivi avec une attention particulière que ce soit du point de vue scientifique ou social tant qu'encadreur et en même temps comme un parent. Tout cela m'a encouragé à bien mener mes recherches en me sentant comme chez moi malgré la distance qui me sépare de ma famille. Ça a été une grande chance pour moi de vous avoir pour encadreur. C'est grâce à vous que je suis arrivé au bout du chemin qui n'était pas du tout facile à parcourir. Je vous en suis et en serais toujours reconnaissant.

Au Professeur Cheikh Thiécoumba GUEYE, vous me faites honneur en acceptant de présider le jury de ma thèse. Je vous en remercie infiniment.

Professeur Hassimiou DIALLO m'a honoré en acceptant d'être rapporteur de ma thèse. Il me manque des mots sages pour vous exprimer ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier Professeur Philippe RUKIMBIRA pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail et cela témoigne votre volonté à aider dans la recherche en Afrique malgré vos multiples responsabilités quotidiennes.

Au Professeur El Hadj Cheikh Mbackè DIOP, c'est un honneur pour moi que vous ayez accepté d'être juge de ce travail. Je vous ai connu en Master 2 comme mon Professeur de Topologie Algébrique et vous avez été l'un de mes enseignants exemplaires. Acceptez de ma part tous les compliments propres à votre rang.

J'adresse également mes sincères remerciements au Professeur Athouane NIANG qui vient de me témoigner encore une fois son soutien tant scientifique que moral en acceptant d'être juge de mon travail après avoir été mon excellent professeur de Géométrie Sous Riemannienne en Master 2.

Je dis grand merci à tous les Professeurs du Département de Mathématiques et Informatique, spécialement à ceux de Géométrie Différentielle et Applications, pour la formation tant morale qu'intellectuelle que j'ai acquise auprès d'eux.

Je remercie plus profondément Professeur Moussa BALDE du Département de Mathématiques et Informatique (UCAD) qui, sans lui, avoir une admission à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar n'aurait pas été une tâche facile pour moi. Professeur Bakary MANGA m'a beaucoup aidé à maîtriser l'outil informatique LaTeX qui m'a permis de saisir ce document. Je l'ai connu entant que mon professeur de Géométrie Riemannienne en Master 2 et depuis lors il n'a jamais cessé de me témoigner son immense soutien moral à coeur ouvert. Qu'il trouve ici mes sincères reconnaissances.

Je pense particulièrement au feu Professeur Mamour SANKHE. En plus d'être mon Professeur de la Théorie des représentations en Master 2, il se comportait envers nous en un vrai père de famille pour ses enfants. Il m'a fait l'honneur de présider le jury de mon mémoire de Master en avril 2014. Que son âme se repose en paix là où il est au paradis.

Je tiens à remercier Dr Adamou SAIDOU de l'Université Dan Dicko Dankourodou de Maradi(Niger) qui a réfléchi avec moi sur mes questions ; il m'a accueilli chaleureusement dans son laboratoire durant mon séjour à Maradi et nous avons mené une discussion importante et m'a donné pas mal de suggestions. Qu'il trouve ici mes remerciements les plus chaleureux.

Je suis et je serais toujours reconnaissant envers Dr Ernest BAZUBWABO qui m'a soutenu depuis mon arrivée à l'UCAD et qui m'a suivi de près jusqu'à maintenant. Ses conseils et les discussions scientifiques qu'il manait avec moi ont beaucoup contribué pour que j'arrive là où je suis actuellement. Je lui dis merci pour tout ce qu'il a fait pour moi.

Mes sincères remerciements sont également adressés aux membres du Laboratoire de Géométrie et Applications(LGA) et particulièrement ceux de l'équipe de recherche "Feuilletages et Systèmes Dynamiques" : Dr Ameth NDIAYE, Yatma MBODJ, Mafal Ndiaye DIOP, Moussa SONKO, Ibrahima NDIAYE, Ibrahima DIOP, Ramalani DIALLO, Ibrahima DIAO et Sidate DIOUF dont leur bonne collaboration a rendu agréable mon séjour à Dakar. Leur soutien moral m'a particulièrement touché.

Je n'oublie pas Madame MBAYE secrétaire à l'EDMI qui m'encourageait chaque fois ; elle a été une mère pour moi. A mesdames Fatou Kiné NDIAYE BA et Camara GNIMA je dis merci beaucoup pour votre bonne collaboration.

Je n'oublie pas de dire un grand merci particulier à ces deux personnes : Dr Abdoul Salam DIALLO de l'Université Alioune Diop de Bambey et à Dr Ameth NDIAYE de l'UCAD pour leur soutien moral et matériel qui m'ont vraiment touché du fond de mon coeur. Mes discussions scientifiques avec eux m'ont guidé à bien orienter mes recherches. En plus d'être des meilleurs amis vous êtes sincèrement mes grands frères inoubliables pour votre teranga que vous avez témoigné en ma personne durant tout mon séjour au Sénégal. Que tout ce que vous avez fait pour moi le Dieu Tout Puissant vous le rende au centuple.

Je voudrais enfin, que mes vifs remerciements aillent à l'endroit du Gouvernement du Burundi pour sa contribution primordiale de prise en charge durant mon séjour au Sénégal. En définitif, que tous ceux qui m'ont prêté main forte de près ou de loin durant ma formation et surtout dans la réalisation de cette thèse trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Introduction générale	1
1 Préliminaires	6
1.1 Généralités sur les feuilletages	6
1.1.1 Feuilletages	7
1.1.2 Notion de champs de plans	8
1.1.3 Définition et exemples de feuilletages	11
1.1.4 Feuilletages des variétés à bord	14
1.1.5 Topologie des feuilles d'un feuilletage	15
1.2 Quelques constructions classiques des feuilletages	15
1.2.1 Feuilletage induit et feuilletage produit	16
1.2.2 Feuilletage image directe par un difféomorphisme	16
1.2.3 Feuilletage image inverse par une application transverse	17
1.2.4 Suspension d'un feuilletage par un difféomorphisme	18
1.3 Exemples de feuilletages en dimension 3	19
1.3.1 Feuilletage de Reeb sur la sphère S^3	19
1.3.2 Feuilletages modèles sur \mathbb{T}_A^3	21
1.4 Notion de feuilletages tendus	23
1.5 Holonomie d'un feuilletage	24
2 Feuilletages tendus des 3-variétés fibrées en surfaces sur le cercle	29
2.1 Introduction	29
2.2 Topologie sur l'espace des feuilletages	30
2.3 Difféomorphismes et fibrés pseudo-Anosov	31
2.3.1 Construction du difféomorphisme par revêtement ramifié	33
2.3.2 Construction du difféomorphisme par twists de Dehn	37
2.3.3 Difféomorphismes et Fibrés hyperboliques	39
2.4 Feuilletages modèles sur les fibrés en surfaces	43
2.4.1 Feuilletages modèles sur les fibrés hyperbolique de genre 1	43
2.4.2 Classe d'Euler d'un feuilletage tendu	44

2.4.3	Les feuilletages modèles sur les fibrés en surfaces de genre $g > 1$. . .	45
2.4.4	Feuilletages élémentaires sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$	45
2.4.5	Désingularisation	47
2.5	Feuilletages tendus et structures de contact tendues	49
2.5.1	Déformation des feuilletages et structures de contact tendues	49
2.5.2	Feuilletage en position générale améliorée	55
3	Feuilletages tendus des fibrés hyperboliques et laminations	58
3.1	Feuilletages mesurés et les 1-formes fermées	58
3.2	Ensembles minimaux d'un feuilletages de codimension 1	60
3.3	Feuilletages monotónement équivalents et laminations	65
3.4	Feuilletages tendus et feuilletages \mathbb{R} -couvert	66
	Bibliographie	72

Introduction

Le but de ce travail est de contribuer à la classification des feuilletages tendus sur les variétés de dimension 3 fibrées en surfaces sur le cercle. Lorsque classifié peut être à conjugaison près, à isotopie près et à déformation près, nos résultats s'inscrivent dans le troisième cas. Plusieurs travaux dans ces trois directions existent déjà. Un des plus connus est l'article de E. Ghys et V. Sergiescu publié en 1980 dans "Topology" voir [13]. Les auteurs montrent qu'un feuilletage de codimension 1 de classe C^r ($r \geq 2$) sur un fibré en tores \mathbb{T}^2 sur le cercle dont la monodromie est de type Anosov est C^{r-2} -conjugué à l'un des feuilletages modèles de ce fibré. Ils montrent en plus que ces modèles sont "rigides". H. Dathe a montré que ce théorème ne s'étend pas en classe C^0 et en collaboration avec C. Tarquini [26], ils montrent que ce théorème ne s'étend pas en classe C^1 . Dans les deux cas, des exemples exotiques ont été construits. Lorsque les fibres sont des surfaces fermées de genre supérieur ou égal à 2 et que le difféomorphisme de monodromie de la 3-variété fermée est pseudo-Anosov, en utilisant la méthode de Ghys-Thurston [27] nous avons construit des feuilletages modèles qui étendent d'une certaine façon les modèles de Ghys et Sergiescu. On peut se poser la question de savoir si ces feuilletages modèles sont les seuls, à conjugaison différentiable près, sans feuille compacte sur de telles variétés? Plusieurs auteurs ont travaillé sur la question. Un des résultats remarquables dans cette direction est celui de Nakayama (voir [27]) qui démontre que si M est une variété fermée de dimension 3 fibrée en surfaces sur le cercle (on suppose que les fibres sont des surfaces fermées de genre supérieur ou égal à 2 et que le difféomorphisme de monodromie est pseudo-Anosov orientée dont les singularités sont des selles à quatre branches) il existe à conjugaison différentiable près, quatre feuilletages transversalement affines de codimension 1 de classe C^∞ sans feuille compacte dans la classe d'Euler de la fibration. H. Dathe a étendu ce théorème au cas des feuilletages transversalement affines sans composante de Reeb et a montré par ailleurs que les modèles n'admettent pas de déformations transversalement projectives non affines dans la classe d'Euler de la fibration (voir [18]).

Peut-on décrire tous les feuilletages de codimension 1 de classe C^∞ sans feuille compacte dans la classe d'Euler de la fibration? Peut-on trouver les conditions suffisantes pour qu'un feuilletage tendu sur une 3-variété quelconque soit proche de la fibration? Peut-on classifier les feuilletages transversalement projectifs sans feuille compacte sur de tels fibrés? Les modèles sont-ils rigides? Ce sont ces questions qui font l'objet de cette thèse. La première question est complètement résolue dans cette thèse [23] et récemment, la troisième question a été vidée par le résultat de Dathe-Adamou [25] et la deuxième a trouvé sa réponse dans [24] avec des hypothèses supplémentaires sur la variété.

L'une des motivations de l'étude des feuilletages de codimension 1 sur des 3-variétés est la classification de ces dernières qui reste toujours inachevée. En effet, la classification topologique des surfaces c'est-à-dire les variétés de dimension 2 est bien connue depuis plus d'une centaine d'années. Par contre la classification des variétés de dimension 3 reste jusqu'à maintenant un problème ouvert, bien que la résolution de la conjecture de géométrisation de Thurston ait été une grande avancée. Une manière d'aborder ce problème est de s'intéresser aux plongements de surfaces dans les variétés de dimension 3. On étudie pour cela les plongements des surfaces incompressibles ; donc π_1 -injectives ; dans les variétés de dimension 3. La célèbre conjecture de géométrisation de Thurston qui stipule que toute 3-variété compacte est soit hyperbolique, soit une variété de Seifert, soit possède un tore incompressible montre le rôle important des tores plongés dans les 3-variétés, qui sera confirmé par l'étude des feuilletages. La théorie des feuilletages peut être vue comme l'étape suivante dans l'étude du plongement des surfaces dans les 3-variétés. En effet, elle consiste à décomposer une 3-variété en une réunion disjointe de surfaces, tel que localement, un voisinage ouvert soit découpé en plans horizontaux : c'est le feuilletage de codimension 1.

Définition 0.0.1. *Un feuilletage de dimension p de classe C^r sur une variété M de dimension m est une décomposition de M en une réunion disjointe de p -variétés connexes $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, appelées feuilles du feuilletage, ayant la propriété suivante : pour tout point de M il existe un voisinage U et un système de coordonnées locales $x = (x^1, \dots, x^p, x^{p+1}, \dots, x^m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r tel que pour chaque feuille \mathcal{L}_α les composantes connexes de $U \cap \mathcal{L}_\alpha$ sont définies par les équations $x^{p+1} = \text{constante}, \dots, x^m = \text{constante}$ (Voir la Figure 1). Un tel voisinage U est appelé ouvert distingué et les $x = (x^1, \dots, x^p, x^{p+1}, \dots, x^m)$ sont appelées des applications distinguées.*

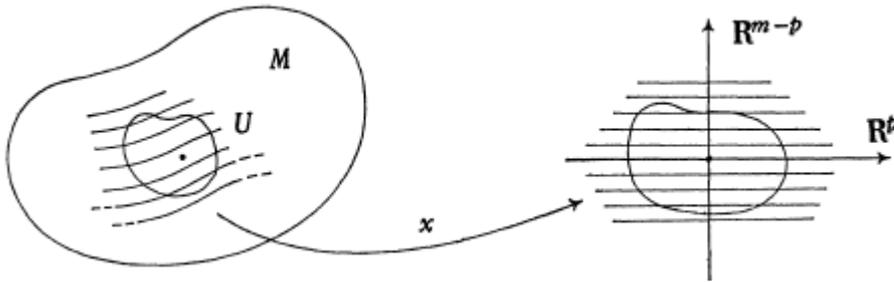


FIGURE 1 – Décomposition de M en feuilles

Notons que si x et y sont de telles coordonnées locales définies sur un voisinage $U \subset M$, alors les applications de changement de coordonnées $y_i = y_i(x^1, \dots, x^p, x^{p+1}, \dots, x^m)$ satisfont les équations

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0$$

pour $1 \leq j \leq p$ et $p+1 \leq i \leq m$. On dit que M est munie d'une structure feuilletée ou d'un feuilletage de dimension p (codimension $m-p$) de classe C^r .

Dans notre travail, nous nous limiterons au cas où $m = 3$ et $p = 2$, donc les feuilletages de codimension 1 sur les 3-variétés. La raison est tout à fait simple car il est bien connu, d'après Thurston, que toute 3-variété compacte porte un feuilletage de codimension 1. Nous nous intéresserons aux feuilletages tendus de codimension 1 dont l'existence sur une 3-variété donne des informations topologiques plus importantes sur la variété ambiante. Par exemple si M est une 3-variété fermée munie d'un feuilletage différent du feuilletage en sphères \mathbb{S}^2 de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ alors le revêtement universel de M est \mathbb{R}^3 (d'après de Palmeira), M est irréductible (d'après de Rosenberg) et le groupe fondamental de M est infini (d'après Novikov).

La notion de feuilletage tendu est due à D. Gabai généralisant les feuilletages sans composante de Reeb. L'étude des feuilletages tendus sur les fibrés en surfaces sur le cercle a trouvé sa motivation dans la recherche des exceptions au théorème de Novikov qui stipule que toute 3-variété dont le groupe fondamental est fini ne porte pas un feuilletage tendu. Historiquement, en 1952 Reeb a introduit la notion de feuilletage avec le point de vue des formes différentielles au cours de sa thèse en répondant affirmativement à la question de Hopf de savoir s'il existe sur la sphère \mathbb{S}^3 un champ de vecteurs sans singularités qui est orthogonal à son rotationnel; ce qui équivaut à l'existence d'un champs de plans de dimension 2 qui est complètement intégrable d'après C. Ehresmann. Reeb mit en évidence un feuilletage particulier de \mathbb{S}^3 , obtenu en recollant deux composantes de Reeb.

Rappelons qu'une composante de Reeb est un feuilletage de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ par une feuille torique au bord et des plans à l'intérieur. Il dégaga également la notion de tourbillonnement de Reeb qui consiste à couper un tore solide feuilleté trivialement d'une 3-variété et de le remplacer par une composante de Reeb sans changer la variété ambiante.

Il est donc naturel de se poser la question de savoir si tous les feuilletages de codimension 1 sur \mathbb{S}^3 possède une composante de Reeb; donc une feuille compacte. C'est vers les années 1960 que Novikov répondit affirmativement à cette question ouvrant ainsi le problème de classification de feuilletages en surfaces non compactes sur les variétés de dimension 3.

Rappelons aussi une notion largement utilisée dans l'étude de feuilletages : un feuilletage de codimension 1 est dit *transversalement orientable* s'il existe un champ de vecteurs continu, ne s'annulant pas, transverse aux feuilles. Cela revient à pouvoir choisir de manière continue une normale aux feuilles. En fait cela est toujours possible quitte à considérer un revêtement double de la variété.

Un feuilletage de codimension 1, transversalement orientable est dit *tendu* s'il existe une transversale fermée qui coupe toutes ses feuilles. Rappelons que le groupe fondamental de la variété support influe sur la topologie du feuilletage et cette influence est très plausible en dimension 3 grâce au célèbre théorème de Novikov qui affirme que tout feuilletage de codimension 1 de classe C^2 sur une 3-variété fermée à groupe fondamental fini possède une composante de Reeb. Les feuilletages sans composante de Reeb généralisé sont dits tendus. Remarquons que ce résultat de Novikov ne se généralise pas pour toutes les 3-variétés fermées. Par exemple la fibration triviale en tores \mathbb{T}^2 de \mathbb{T}^3 est tendue, donc sans composante de Reeb alors que son groupe fondamental est infini. Il est alors naturel pour une 3-variété fermée dont le groupe fondamental est infini de chercher à décrire tous les feuilletages qui font exceptions au théorème de Novikov. Les fibrés en surfaces sur le cercle constitue une famille importante des 3-variétés fermées au groupe fondamental infini et on sait construire les feuilletages modèles sur ces fibrés qui sont des feuilletages sans feuille

compacte ; donc tendus. Il est donc naturel de s'intéresser à la classification des feuilletages tendus sur de tels fibrés.

Dans le cas des fibrés en tores \mathbb{T}^2 sur le cercle \mathbb{S}^1 , ces feuilletages ont été classifiés par E. Ghys et V. Sergiescu [13]. Ils ont montré le résultat suivant :

Théorème 0.0.1. *Tout feuilletage sans feuille compacte de codimension 1 de classe C^r , $r > 1$ et transversalement orientable sur un fibré hyperbolique orientable de genre 1 est C^{r-2} -conjugué à l'un des feuilletages modèles construits sur ce fibré.*

De plus ils ont montré que ces feuilletages modèles sont structurellement stables. La classe de différentiabilité et la compacité jouent ici un rôle important. En effet, H. Dathe et C. Tarquini d'une part ont montré que ce théorème ne s'étend pas en classe C^0 et C^1 et d'autre part H. Dathe et A. Saidou ont construit des feuilletages exotiques pour les fibrés en tores troués.

En 1990, Nakayama a essayé de généraliser le théorème de Ghys et Sergiescu aux feuilletages transversalement affines sans feuilles compactes des fibrés pseudo-Anosov avec des hypothèses supplémentaires sur les espaces propres associés aux valeurs propres de la matrice induite en homologie et sur la classe d'Euler du feuilletage. Il a entre autre montré le théorème suivant :

Théorème 0.0.2. *([27]) Soit Σ une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$ et $\pi : V \rightarrow \mathbb{S}^1$ un Σ -fibré pseudo-Anosov. On suppose que la matrice de monodromie possède deux valeurs propres réelles λ et $1/\lambda$ avec des sous-espaces propres associés de dimension 1, où $\lambda > 1$ est le coefficient de dilatation de la monodromie. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 sans feuille compacte et transversalement affine vérifiant : $\chi(T\mathcal{F}) = \pm\chi(T\pi)$; $\chi(T\mathcal{F})$ et $\chi(T\pi)$ désignent les classes d'Euler de \mathcal{F} et π respectivement. Alors il existe un revêtement fini de \mathcal{F} qui est C^0 -isotope à l'un des modèles.*

Et récemment en 2017 H. Dathe et S. Adamou ont étendu le théorème de Nakayama aux feuilletages transversalement projectifs sans feuille compacte qui ont même classe d'Euler que la fibration.

Nous avons voulu généraliser ces résultats aux feuilletages tendus quelconques mais à vrai dire ce théorème de classification de Nakayama a peu de chances de se généraliser au cas des feuilletages sans feuille compacte quelconques : l'obstruction est que la restriction d'un tel feuilletage sur chaque fibre possède des singularités et n'est donc pas défini par une 1-forme fermée. La seule chose que l'on peut espérer pour les feuilletages tendus quelconques sur des 3-variétés fibrés en surfaces sur le cercle est de trouver les conditions suffisantes pour qu'ils soient proches de la fibration.

Notre thèse s'inscrit dans ce cadre et est articulée comme suit : dans le premier chapitre nous donnons les notions préliminaires concernant la théorie des feuilletages : la définition et les différentes caractérisations d'un feuilletage, des constructions des exemples concrets, etc. Le deuxième chapitre concerne l'étude des feuilletages tendus des fibrés en surfaces de genre quelconque sur le cercle. Nous donnons une construction détaillée des feuilletages modèles sur ces fibrés qui sont des feuilletages minimaux transversalement affines, qui sont dans la même classe d'Euler ou dans la classe d'Euler opposée que la fibration et qui sont en position générale améliorée par rapport à la fibration ; nous avons étudié également les liens entre les feuilletages tendus et les structures de contact tendues sur des fibrés

pseudo-Anosov. Ce qui nous a permis de trouver tous les feuilletages tendus qui sont dans la classe d'Euler de fibration. En effet, on sait que le feuilletage dont les feuilles sont des fibres de la fibration est tendu, il est donc naturel de se poser la question de savoir si tous les feuilletages tendus se déduisent de la fibration par de petites perturbations ? En général la réponse à cette question est fautive ; l'obstruction est la non égalité des classes d'Euler. Nous avons plus précisément démontré le résultat suivant :

Théorème 0.0.3. *Soit V une 3-variété fermée atoroidale et fibrant sur le cercle \mathbb{S}^1 , avec une fibration π . Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement orienté de codimension 1 sur V . Alors \mathcal{F} est un feuilletage tendu ayant même classe d'Euler que la fibration π si et seulement si \mathcal{F} est une perturbation de π .*

Le troisième chapitre fait objet d'un article "Sur les feuilletages tendus des fibrées hyperboliques", soumis dans Afrika Mathematika Journal(à paraître). Il traite la relation qu'il y a en dimension 3 entre les feuilletages tendus et les laminations. En étudiant ce lien, nous avons obtenu un deuxième résultat [23] qui montre que pour les variétés hyperboliques de dimension trois l'existence d'une lamination pure est la seule obstruction à ce qu'un feuilletage tendu de codimension 1 soit, à équivalence monotone près, une perturbation de la fibration. Précisément, on a :

Théorème 0.0.4. *Soit V une 3-variété fermée et \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 tendu sur V . Si \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante et ne contient pas une sous-lamination pure, alors \mathcal{F} est monotone équivalent à la perturbation d'un fibré en surfaces.*

PRÉLIMINAIRES

Sommaire

1.1 Généralités sur les feuilletages	6
1.2 Quelques constructions classiques des feuilletages	15
1.3 Exemples de feuilletages en dimension 3	19
1.4 Notion de feuilletages tendus	23
1.5 Holonomie d'un feuilletage	24

Dans ce premier chapitre nous rappelons certaines notions usuelles de la théorie des feuilletages. Nous commençons par définir les feuilletages de manière générale, puis les feuilletages tendus et en fin nous construisons des exemples explicites. Pour plus de détails voir ([1],[6],[32],[33]).

1.1 Généralités sur les feuilletages

Un peu d'histoire

A la fin du 19^{eme} siècle H. Poincaré constate qu'il est impossible d'intégrer explicitement une équation différentielle générale. On est donc amené à étudier les propriétés des trajectoires sur l'équation elle-même. On étudie donc les équations différentielles du point de vue qualitative à défaut d'une étude quantitative : par des méthodes géométriques et topologiques, on essaie de déterminer l'allure générale des solutions et leurs positions relatives. Ainsi par exemple, pour une équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$, avec $f(t, x)$ une fonction différentiable définie sur une variété M , le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que par tout point x d'un ouvert U de M passe une courbe intégrale unique locale.

Cette approche qualitative est alors développée par I. Bendixon, Denjoy, Painlevé,... et aboutit à la notion de feuilletage introduite par G. Reeb, C. Ehresmann et A. Haefliger dans les années 1940-1950, et bien d'autres. Depuis lors, le sujet est devenu un large champ d'investigation en mathématiques. On peut donc dire que la théorie des feuilletages est née de l'incapacité des mathématiciens à résoudre explicitement les équations différentielles ! On peut donc dire qu'un feuilletage est une généralisation géométrique d'un système différentiel où les variétés intégrales locales correspondant à une condition initiale sont des "morceaux" de feuilles du feuilletage.

1.1.1 Feuilletages

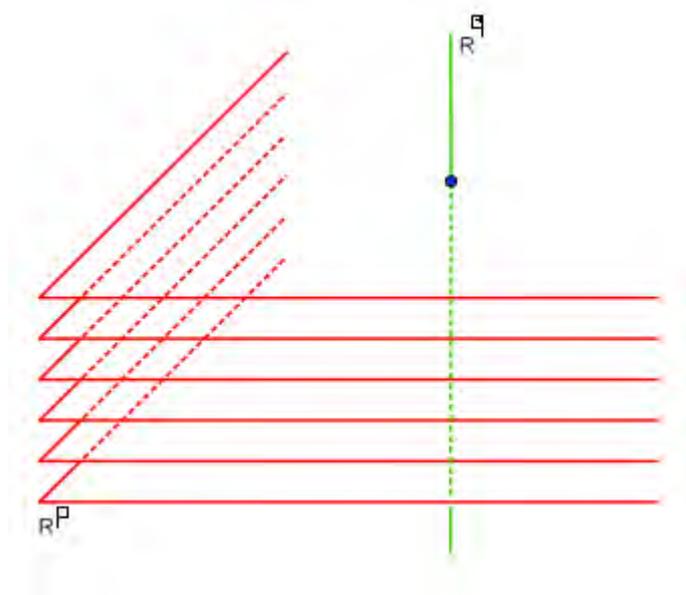
Dans ce paragraphe, nous donnons quelques généralités sur les feuilletages en insistant plus particulièrement sur les feuilletages de codimension 1. Sauf mention du contraire, M désignera une variété différentiable de classe \mathcal{C}^∞ et de dimension n . Intuitivement, un *feuilletage* \mathcal{F} de classe \mathcal{C}^r et dimension p (de codimension $q := n - p$) sur une variété M de dimension n est une partition de la variété M en sous-variétés connexes et immergées qui sont localement empilées comme une famille de sous-espaces affines parallèles appelés *feuilles*. C'est-à-dire que :

- par tout point $x \in M$ passe une sous-variété F_x de M de dimension p de classe \mathcal{C}^r que l'on appelle *feuille* du feuilletage. On demande à chaque feuille F_x d'être une sous-variété connexe et immergée injectivement, mais pas nécessairement plongée ;
- pour tous points $x, y \in M$ les feuilles F_x et F_y sont, ou bien disjointes, ou bien confondues ;

Pour en avoir l'idée de cette représentation, prenons un livre épais. Si on oublie son contour, on peut le voir comme un ouvert de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 ; c'est donc une variété connexe de dimension 3. Mais on peut aussi le voir comme la réunion disjointe de toutes les feuilles qui le composent. Si on convient qu'une feuille n'a aucune épaisseur, ce livre pourra être vu comme une variété de dimension 2 non connexe, ses composantes connexes sont précisément ses feuilles. On dira alors que notre livre est une variété de dimension 3 munie d'un feuilletage de dimension 2 (dimension des feuilles) ou de codimension 1 (la dimension complémentaire de celle des feuilles). Un feuilletage \mathcal{F} de dimension 2 sur une variété M de dimension 3 est localement de ce type : autour de chaque point on peut découper un petit morceau ressemblant à notre livre ! La variété M est ainsi munie d'une deuxième topologie non connexe et dont les composantes connexes sont des morceaux feuilles de \mathcal{F} .

Grosso modo, un feuilletage de dimension p sur une variété M de dimension n est une décomposition de M en sous-variétés connexes de dimension p , appelées *feuilles* du feuilletage, qui sont localement empilées comme des sous-espaces de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ avec la seconde coordonnée constante. L'entier $n - p$ est appelé *codimension* du feuilletage.

Un exemple plus simple d'un feuilletage de dimension p est le feuilletage de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ où les feuilles sont des p -plans de la forme $\mathbb{R}^p \times \{c\}$ avec $c \in \mathbb{R}^{n-p}$

FIGURE 1.1 – Feuilletage modèle sur \mathbb{R}^n défini par $dy_1 = \dots = dy_q = 0$

C'est un feuilletage trivial sur l'espace euclidien $M = \mathbb{R}^{p+q}$ défini par le système différentiel $dy_1 = dy_2 = \dots = dy_q = 0$.

Il peut être vu comme le produit $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Sa topologie usuelle est le produit des topologies des deux facteurs ; elle est en fait une variété différentiable connexe de dimension $p + q$. Mais on peut aussi l'équiper de la topologie produit de la *topologie usuelle* sur le premier facteur et la *topologie discrète* sur le second ; il devient alors une variété différentiable de dimension p non connexe, ses composantes connexes étant les sous-espaces horizontaux définis par le système différentiel $dy_1 = dy_2 = \dots = dy_q = 0$ qui peuvent être vus comme des *feuilles*. On voit donc que M est équipé de deux topologies : la topologie usuelle et la topologie des feuilles. On peut donc définir un feuilletage de dimension p et de codimension q sur M comme une structure géométrique telle que autour de chaque point on retrouve quelque chose qui "ressemble" à ce modèle.

Deux notions plus importantes sont nécessaires pour pouvoir bien définir un feuilletage. Il s'agit de la notion de champs de plans et celle de submersions. En effet, d'après le théorème de Frobenius un champ de plans complètement intégrable définit un feuilletage ; et il est bien connu que toute submersion définit localement un feuilletage dont les feuilles locales sont les niveaux de la submersion. Nous introduisons dans la suite les notions de champs de plans.

1.1.2 Notion de champs de plans

Nous introduisons ici la notion de champs de p -plans, objets que l'on peut penser comme généralisation des champs de vecteurs. Nous rappelons le célèbre théorème de Frobenius

qui nous permet d'avoir une caractérisation des feuilletages. Pour la démonstration de ce théorème [32] et [6] sont des bonnes références.

On rappelle que si V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , et si $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $\mathbf{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V . Alors $\mathbf{G}_k(V)$ est une variété compacte de dimension $n(n-k)$ appelée *variété grassmannienne* de rang k de V . Soit $q : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel C^r de rang m , et soit $k \in \{0, \dots, m\}$. On note $\mathbf{G}_k(E) := \bigsqcup_{b \in B} \mathbf{G}_k(q^{-1}(b))$ la réunion disjointe des variétés grassmanniennes de rang k des fibres de q . On note aussi $\mathbf{G}_k q : \mathbf{G}_k E \rightarrow B$ l'application qui à un élément de $\mathbf{G}_k(q^{-1}(b))$ associe le point $b \in B$. Cette projection admet une unique structure de fibration C^r telle que, pour toute inverse d'une trivialisatoin locale $h : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow q^{-1}(U)$ de q au dessus d'un ouvert U de B , l'application $(x, A) \mapsto h(x, A)$ de $U \times \mathbf{G}_k(\mathbb{R}^m)$ dans $(\mathbf{G}_k q)^{-1}(U)$ soit l'inverse d'une trivialisatoin locale de $\mathbf{G}_k q$ au dessus de U . Cette fibration s'appelle la *fibration grassmannienne de rang k du fibré vectoriel E , ou fibré des k -plans de E* .

En particulier si M est une variété de classe C^{r+1} alors on appelle fibration grassmannienne de M de rang p la fibration grassmannienne de rang p de son fibré tangent $\pi : TM \rightarrow M$, qui est de classe C^r c'est-à-dire la fibration $\mathbf{G}_p \pi : \mathbf{G}_p TM \rightarrow M$, qui à un sous-espace de dimension p de $T_x M$ associe le point x , pour tout $x \in M$.

Définition 1.1.1. *Un champ de plans de dimension p ou champ de p -plans sur une variété différentiable M de dimension n ($p \leq n$) est la donnée d'une application continue*

$$\begin{aligned} \Delta : M &\rightarrow \mathbf{G}_p TM \\ x &\mapsto \Delta_x \subset T_x M \end{aligned}$$

où Δ_x est un sous-espace vectoriel de dimension p de $T_x M$, l'espace tangent en x de M et $\mathbf{G}_p TM$ est le fibré en grassmanniennes de rang p .

Autrement dit, un champ de p -plans de classe C^r sur une variété M de dimension n est une section C^r de la fibration grassmannienne de rang p de M . En termes intuitifs, un champ de p -plans Δ de classe C^r sur une variété M de dimension n est la donnée en chaque point $x \in M$ d'un sous-espace vectoriel Δ_x de dimension p de $T_x M$.

Exemple 1.1.1. *Si X est un champ de vecteurs sur M sans singularité, l'application $x \mapsto \langle X_x \rangle$ (= sous-espace vectoriel engendré par le vecteur tangent X_x) est un champ de plans de dimension 1, appelé champ de droites.*

Un champ de p -plans Δ sur M est dit *localement trivial* si $\forall x \in M$, il existe un ouvert U autour de x , des champs de vecteurs locaux X_1, \dots, X_p sur U linéairement indépendants tels que $\forall y \in U$ on a $\Delta_y = \langle X_1(y), \dots, X_p(y) \rangle$. On dit que (U, X_1, \dots, X_p) est une trivialisatoin locale. Un champ de plans est dit *différentiable* de classe C^r ($r \geq 1$) s'il admet une trivialisatoin locale formée des champs de vecteurs différentiables de classe C^r .

Définition 1.1.2. *Soit Δ un champ de p -plans C^∞ sur M . On appelle variété intégrale de Δ toute sous-variété connexe N de M ($\dim N \leq p$) telles que :*

- (i) $i : N \rightarrow M$ est une immersion
- (ii) $i_*(T_x N) \subset \Delta_x, \forall x \in N$, où i est l'injection canonique.

En particulier si la dimension de N égale p , alors on dit que N est une *sous-variété intégrale maximale* de Δ ; et si par chaque point $x \in M$ passe une sous-variété intégrale maximale, on dit que Δ est *complètement intégrable*.

Exemple 1.1.2. On considère \mathbb{R}^3 muni de ses coordonnées usuelles (x, y, z) et on note X_1, X_2, X_3 les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 définis par :

$$\begin{cases} X_1 = -2z \frac{\partial}{\partial z} + 2y \frac{\partial}{\partial y} \\ X_2 = -y \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial z} \\ X_3 = z \frac{\partial}{\partial x} - 2x \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

L'application $\Delta : (x, y, z) \mapsto \text{vect}(X_1, X_2, X_3)$ est un champ de 2-plans de classe \mathcal{C}^∞ qui est complètement intégrable sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

En effet, les champs de vecteurs X_1, X_2, X_3 sont \mathcal{C}^∞ et vérifient la relation de colinéarité $xX_1 + zX_2 + yX_3 = 0$. De plus, sur chacun des ouverts d'équation $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ dont la réunion recouvre $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, les couples de champs de vecteurs $(X_2, X_3), (X_1, X_2)$ et (X_1, X_3) sont libres et forment donc une base de Δ .

De plus $[X_1, X_2] = 2X_2; [X_2, X_3] = X_1; [X_1, X_3] = -2X_3$. Donc le champ de 2-plans engendré par $\{X_1, X_2\}, \{X_1, X_3\}$ est complètement intégrable sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Δ définit donc un feuilletage de dimension 2 sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ dont les courbes intégrales sont les niveaux de la submersion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + yz$ et qui sont soit des cylindres soit des plans.

Un champ de p -plans peut également être défini à l'aide des formes différentielles sur la variété. Ainsi donc on a la définition suivante

Définition 1.1.3. Soit M une variété différentiable de dimension n . Un champ de p -plans sur M est la donnée d'une application continue :

$$\begin{aligned} \Delta^* : M &\rightarrow \mathbf{G}_p T^*M \\ x &\mapsto \Delta_x^* \subset T_x^*M \end{aligned}$$

où Δ_x^* est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ de l'espace cotangent T_x^*M à M en x , dual à $T_x M$.

On dit que Δ^* est localement trivial si $\forall x \in M$, il existe un ouvert U autour de x et $\omega_1, \dots, \omega_n$ des formes différentielles de degré 1 sur U , linéairement indépendantes tels que : $\forall x \in U, \Delta_x^*$ est engendré par $((\omega_{p+1})_x, \dots, (\omega_n)_x)$. On note $\Delta^* = \langle \omega_{p+1}, \dots, \omega_n \rangle$.

Remarque 1.1.1. [6] Un champ de plans Δ de codimension k de classe C^r peut être défini localement comme le noyau des k 1-formes différentielles de classe C^r linéairement indépendantes. Inversement, si $\omega_1, \dots, \omega_k$ sont des 1-formes différentielles de classe C^r linéairement indépendantes alors $\Delta(x) = \{v \in T_x M / (\omega_1)_x(v) = \dots, (\omega_k)_x(v) = 0\}$ définit un champ de plans de codimension k de classe C^r sur M .

Le théorème suivant dû à F. G. Frobenius est primordial en théorie des feuilletages.

Théorème 1.1.1. [33] Soit Δ un champ de p -plans \mathcal{C}^∞ sur une variété M de dimension n . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Pour toute trivialisations locale (U, X_1, \dots, X_p) de Δ , on a $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^p C_{ij}^k X_k$; $C_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$ soit une trivialisations locale de ξ sur U ;
2. Δ est complètement intégrable.
3. Au voisinage de tout point de U il existe $q := n - p$ formes différentielles $\omega_1, \dots, \omega_q$ de degré 1 linéairement indépendantes telle que $d\omega_i = \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} \wedge \omega_j$, pour $\alpha_{ij} \in \Omega^1(U)$, avec $i, j = 1, \dots, q$.

La propriété 3. ci-dessus est connue sous le nom de condition d'intégrabilité de Frobenius d'un champ de p -plans. Cette condition peut s'écrire de façon explicite comme $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q \wedge d\omega_i = 0$; avec $q = n - p$ et $i = 1, \dots, q$ (voir [33] proposition 3.7).

Par exemple, si ω est une forme de Pfaff non singulière, la condition d'intégrabilité de Frobenius devient s'écrit $\omega \wedge d\omega = 0$ et par conséquent ω définit un feuilletage de codimension 1. En particulier si α est une 1-forme fermée non singulière, $\Delta^* = \ker \alpha$ est un champ de plans de codimension 1 qui est complètement intégrable. Donc toute forme fermée non singulière définit un feuilletage de codimension 1.

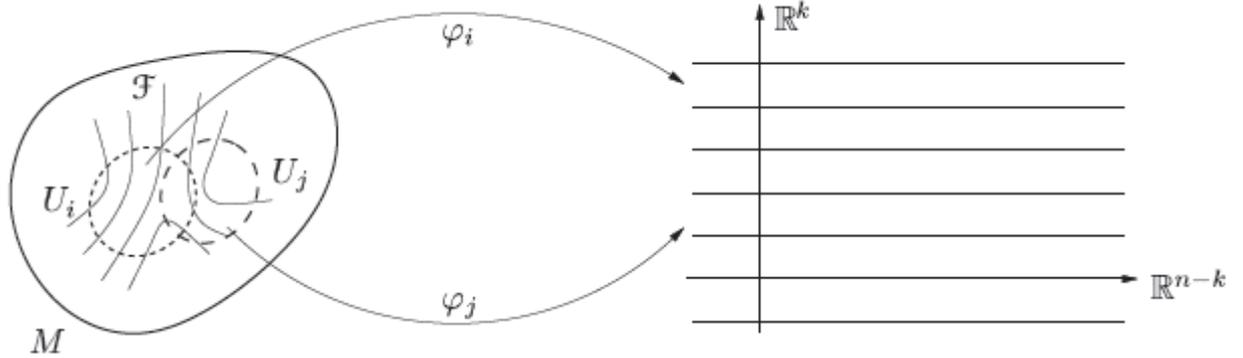
Mais par contre si l'on considère le champ de 2-plans P défini sur \mathbb{R}^3 par la 1-forme différentielle $\omega = xdy - dz$ n'est pas intégrable. En effet, $\omega \wedge d\omega = -dx \wedge dy \wedge dz \neq 0$. Il en est de même pour celui défini par les deux champs de vecteurs $X_1 = \partial_x$ et $X_2 = \partial_y + x\partial_z$ car $[X_1, X_2] = \partial_z$. Un champ de plans complètement non intégrable i.e partout non intégrable est appelé structure de contact.

1.1.3 Définition et exemples de feuilletages

Dans cette section on donne trois définitions de feuilletage toutes équivalentes à la première. Pour l'équivalence de ces définitions [32],[33] ou [6] sont des bonnes références.

Définition 1.1.4. Un feuilletage \mathcal{F} de dimension p ou de codimension $k := n - p$ sur une variété M de dimension n est défini par un atlas $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ où les difféomorphismes $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ sont tels que si l'intersection $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ est non vide alors les changements de cartes $\varphi_{ij} \equiv \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ sont de la forme $\varphi_{ij}(x, y) = (g_{ij}(x, y), h_{ij}(y))$.

Ainsi chaque ouvert U_i est partitionné en *plaques*, qui sont les composantes connexes des sous-variétés $\varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times \{y\})$, $y \in \mathbb{R}^k$ et les changements de cartes préservent cette partition. Les changements des cartes ayant cette forme très particulière, les plaques se recollent localement les unes avec les autres, donnant ainsi une partition de M en sous-variétés connexes et immergées dimension $n - k$ appelées les *feuilles* du feuilletage. Localement les feuilles d'un feuilletage sont parallèles mais le feuilletage peut être compliqué du point de vue global.

FIGURE 1.2 – Feuilletage de dimension $n - k$ ou de codimension k

Puisque M est recouvert par des plaques de \mathcal{F} , on peut définir une relation d'équivalence sur M comme suit : deux points x et y de M appartiennent à une même feuille s'il existe une suite d'ouverts distingués ou chemins de plaques P_1, \dots, P_k , avec $P_j \cap P_{j+1} \neq \emptyset$ pour $j \in \{1, \dots, k-1\}$, et une suite de points $x = p_0, p_1, \dots, p_k = y$ telle que p_{j-1} et p_j appartiennent à la même plaque P_j avec $x \in P_1$ et $y \in P_k$. Ainsi appartenir à une même feuille pour deux points définit une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les feuilles du feuilletage. L'espace des feuilles noté M/\mathcal{F} d'une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) est l'espace quotient de M/\sim par cette relation.

Si \mathcal{F} est défini par un atlas maximal $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, on considère la projection canonique sur le second facteur $\pi : \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Alors l'application $f_i := \pi \circ \varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ est une submersion et sur $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on a $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$, où les γ_{ij} sont les difféomorphismes locaux donnés par la forme normale locale de la submersion. D'où la définition équivalente à la première suivante

Proposition 1.1.1. *Un feuilletage \mathcal{F} de codimension k sur une variété M de dimension n , ($k \leq n$) est équivalent à la donnée d'une famille $\{(U_i, f_i, \gamma_{ij})\}_{i \in I}$ où $\{U_i\}_{i \in I}$ est recouvrement ouvert de M , $f_i : U_i \rightarrow T \subset \mathbb{R}^k$ des submersions au-dessus d'une k -variété T et $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \rightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ des difféomorphismes locaux tel que sur les composantes connexes U_{ij} de $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$ c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} & \xrightarrow{f_i} & T \\ f_j \downarrow & \searrow \gamma_{ij} & \\ & & T \end{array}$$

Démonstration. Soit \mathcal{F} un feuilletage de dimension p et de codimension $n-p$ sur une variété M de dimension n . Si $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ est un atlas définissant \mathcal{F} avec $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ une carte de \mathcal{F} , et si on considère $\pi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ la projection sur le deuxième facteur alors $\pi_2 \circ \varphi : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est une submersion.

Réciproquement, soit $\mathcal{F} = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ avec $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ des submersions tel que le diagramme ci-dessus soit commutatif. D'après le théorème de redressement d'une submersion il existe une carte locale $\varphi : V \subset U_i \rightarrow V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ avec $V_2 \subset f_i(U_i)$ telle que

$f_i \circ \varphi^{-1} : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$ soit la projection canonique sur le deuxième facteur. L'ensemble de telles cartes est un atlas définissant un feuilletage \mathcal{F} de codimension $n - p$ sur M . En effet, si (V, φ) et (W, ψ) sont deux cartes de cet atlas telle que $V \cap W \neq \emptyset$, alors $V \subset U_i$ et $W \subset U_j$ et $f_j \circ \psi^{-1} : W_1 \times W_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow W_2 \subset \mathbb{R}^{n-p}$ est la projection canonique sur le deuxième facteur avec $\psi : W \subset U_j \rightarrow W_1 \times W_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ et $W_2 \subset f_j(U_j)$. D'autre part $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \rightarrow \varphi(V \cap W)$ peuvent s'écrire de la forme suivante $\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.

Alors

$$\begin{aligned} h_2(x, y) &= \pi_2 \circ \varphi \circ \psi^{-1}(x, y) \\ &= f_i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi^{-1}(x, y) \\ &= f_i \circ \psi^{-1}(x, y) \\ &= g_{ij} \circ f_j \circ \psi^{-1}(x, y) \\ &= g_{ij} \circ \pi_2(x, y) \\ &= g_{ij}(y) \end{aligned}$$

□

On dit dans ce cas que $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ est un *cocycle feuilleté* et la variété T est appelée *variété transverse* au feuilletage \mathcal{F} . Les difféomorphismes locaux γ_{ij} satisfont la condition cocycle $\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk} = \gamma_{ik}$. Le feuilletage \mathcal{F} est dit *transversalement orientable* si la variété T peut être munie d'une orientation préservée par tous les difféomorphismes locaux γ_{ij} .

Le feuilletage \mathcal{F} est défini sur chaque ouvert U_i par la submersion f_i . On dit que (U_i, f_i) est une carte locale de \mathcal{F} et les difféomorphismes locaux γ_{ij} sont appelés les changements de cartes ou changements de cordonnées transverses. Les γ_{ij} engendrent un pseudo-groupe Γ de difféomorphismes locaux de la variété T . Ainsi, de manière générale se donner une structure transverse pour \mathcal{F} revient à imposer certaines conditions sur Γ .

Donnons maintenant une troisième caractérisation d'un feuilletage qui résulte du théorème de Frobenius.

Proposition 1.1.2. *Soit M une variété différentiable de classe \mathcal{C}^∞ de dimension n . La donnée d'un feuilletage de dimension p et codimension $n - p$ ($p \leq n$) de classe \mathcal{C}^{r+1} ($r \geq 1$) sur M est équivalente à celle d'un champ de plans de dimension p de classe \mathcal{C}^r qui est complètement intégrable.*

Cela revient à la donnée d'un sous-fibré ξ de TM qui est intégrable. Dire que ξ est intégrable ou involutif signifie que ξ stable par les crochets de Lie : si $X, Y \in \chi(M)$ sont des sections de ξ , alors $[X, Y]$ est aussi une section de ξ .

Démonstration. Si \mathcal{F} est un feuilletage de classe \mathcal{C}^r , $r \leq 1$ sur M , on pose $P(x) = T_x \mathcal{F}$ le sous-espace de $T_x M$ tangent en x à la feuille de \mathcal{F} passant par x . Soit $x_0 \in M$ et (U, φ) une carte locale de \mathcal{F} , avec $x_0 \in U$. Alors pour tout $x \in U$, $P(x)$ est un sous-espace engendré par les vecteurs $(\frac{\partial}{\partial x_i})(x) = (D\varphi(x))^{-1}(e_i)$, $i = 1, \dots, k$ où e_i est le i^{me} vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Puisque φ est de classe \mathcal{C}^r alors les champs $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sont de classe \mathcal{C}^{r-1} et donc P est de classe \mathcal{C}^{r-1} . La réciproque découle du théorème de Frobenius. □

On remarque en particulier que si M n'admet pas de champ de p -plans continu alors M ne peut pas supporter un feuilletage de dimension p . C'est le cas par exemple de la sphère \mathbb{S}^5 qui ne porte pas de feuilletage de dimension 2 car \mathbb{S}^5 n'admet pas de champ de 2-plans continu.

Exemple 1.1.3. Une forme de Pfaff ω sans singularité et complètement intégrable (i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$) sur une variété M définit un feuilletage de codimension 1 dont le champ de plans associé est donné par le noyau de ω . En effet, $\ker\omega = \{v \in TM; \omega(v) = 0\}$ est un sous-fibré intégrable du fibré tangent TM de M . En particulier, une 1-forme fermée non singulière définit un feuilletage de codimension 1 dont le champ de plans associé est $\ker\omega$.

Exemple 1.1.4. Si M est une variété de dimension $n = p + q$, alors une submersion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ définit un feuilletage sur M de dimension p dont les feuilles sont les composantes connexes de $f^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}^{n-p}$.

Exemple 1.1.5. Soit X un champ de vecteurs C^{r-1} sans singularité sur une variété M . Le théorème du redressement local de champ de vecteurs autour d'un point non singulier montre que M admet un feuilletage de classe C^r de dimension 1 dont les feuilles sont les courbes intégrales du champ de vecteurs X .

Exemple 1.1.6. Soit $p : M \rightarrow B$ une fibration localement triviale de fibre F , où M, B et F sont des variétés compactes connexes, et de classe C^r . Alors p est une submersion et définit sur M un feuilletage de classe C^r , de codimension égale à la dimension de la base B et dont les feuilles sont les fibres de p . Dans cet exemple, toutes les feuilles sont des sous-variétés compactes plongées dans M .

1.1.4 Feuilletages des variétés à bord

Soit H^n le demi-plan espace de \mathbb{R}^n constitué des points (x_1, \dots, x_n) avec $x_1 \geq 0$). Pour $n \geq 1$ et $n + k = m$ on pose H_m^n le produit $H^n \times \mathbb{R}^k$, où l'on munit l'espace \mathbb{R}^k de la topologie discrète : H_m^n est une sous-variété à bord de \mathbb{R}_m^n .

Définition 1.1.5. Un feuilletage \mathcal{F} de dimension n et de codimension k de classe C^r transverse au bord sur une variété à bord M de dimension $m = n + k$ est défini par un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ où les difféomorphismes $\varphi_i : U_i \rightarrow H^n \times \mathbb{R}^k$ sont tels que sur l'intersection non vide $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, les changements de cartes $\varphi_{ij} \equiv \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset H^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset H^n \times \mathbb{R}^k$ se mettent sous la forme $\varphi_{ij}(x, y) = (g_{ij}(x, y), h_{ij}(y))$.

Un tel feuilletage \mathcal{F} définit par restriction sur le bord de M un feuilletage $\mathcal{F}|_{\partial M}$ de classe C^r de dimension $n - 1$ et de codimension k sur le bord ∂M de M dont les feuilles sont les composantes connexes des traces sur ∂M des feuilles de \mathcal{F} .

Exemple 1.1.7. Une forme de Pfaff sans singularité et intégrable sur une variété à bord M induisant sur le bord de M une 1-forme sans singularité détermine un feuilletage de codimension 1 de M transverse au bord et transversalement orientable.

Proposition 1.1.3. Soit M une variété différentiable compacte à bord et une variété N différentiable compacte sans bord sur laquelle il existe une forme de Pfaff fermée non singulière. Alors la variété produit $M \times N$ possède un feuilletage de codimension 1.

Démonstration. Soient en effet α une forme de Pfaff fermée non singulière sur N et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable ayant 0 pour valeur régulière et tel que $f^{-1}(0) = \partial M$. Alors la forme

$$\omega = df + \left(\exp\left(-\frac{1}{f^2}\right)\right)\alpha$$

est sans zéro sur $M \times N$ et de plus $\omega \wedge d\omega = 0$. \square

1.1.5 Topologie des feuilles d'un feuilletage

Les feuilles d'un feuilletage \mathcal{F} sont des sous-variétés connexes et immergées injectivement, mais non nécessairement plongées dans la variété ambiante M . Leur topologie ne coïncide donc pas en général avec la topologie induite par celle de M . On distingue plusieurs types de feuilles :

- les *feuilles compactes* de \mathcal{F} : ce sont des sous-variétés compactes de M ;
- les *feuilles propres* de \mathcal{F} sont, par définition, les feuilles plongées dans M c'est-à-dire qu'une feuille F est propre si sa topologie fine coïncide avec celle induite par celle de M ; Une feuille F de \mathcal{F} est propre si pour tout point $x \in F$ il existe un voisinage ouvert U de x et une submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $F \cap U = g^{-1}(0)$, $0 \in \mathbb{R}^{n-p}$.
- les *feuilles localement denses* de \mathcal{F} sont celles dont l'adhérence contient un ouvert de M . Autrement dit une feuille F d'un feuilletage sur une variété M est localement dense s'il existe un ouvert de M dans lequel F est dense ;
- Enfin, on appelle *feuilles exceptionnelles*, les feuilles qui ne sont ni propres ni localement denses.

Remarque 1.1.2. *Les feuilles d'un même feuilletage n'ont pas nécessairement la même nature topologique comme l'on peut le remarquer dans l'exemple suivant*

Exemple 1.1.8. *La submersion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (1 - x^2 - y^2) \exp(z)$ détermine un feuilletage de codimension 1 de \mathbb{R}^3 dont les feuilles sont des plans ou des cylindres.*

En effet, les feuilles de ce feuilletage sont les composantes connexes de $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (1 - x^2 - y^2) \exp(z) = a\}, \forall a \in \mathbb{R}$.

On distingue donc 3 cas suivant la valeur de a :

- *Si $a = 0$, $f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (1 - x^2 - y^2) \exp(z) = 0, \forall z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \forall z \in \mathbb{R}\}$; cette feuille est donc un cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$.*
- *Si $a > 0$, on pose $a = c^2$, $f^{-1}(c^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (1 - x^2 - y^2) \exp(z) = c^2, \forall z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 - c^2 \exp(-z), \forall z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, \forall z \in \mathbb{R}\}$; les feuilles sont donc des cylindres pleins $D^2 \times \mathbb{R}$.*
- *Si $a < 0$, on pose $a = -c^2$, $f^{-1}(-c^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (1 - x^2 - y^2) \exp(z) = -c^2, \forall z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + c^2 \exp(-z), \forall z \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1, \forall z \in \mathbb{R}\}$; les feuilles sont donc des plans \mathbb{R}^2 (complémentaires du disque dans \mathbb{R}^2).*

1.2 Quelques constructions classiques des feuilletages

Il existe plusieurs manières de construire les exemples de feuilletages : soit par construction de nouvelles variétés soit en poussant le feuilletage par les applications différentiables.

Bon nombres de constructions présentées ici sont dues aux “pères” fondateurs de la théorie des feuilletages : C. Ehresmann, G.Reeb et A. Haefliger. Pour plus de détails voir [7]. Nous considérerons que M est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r, r > 0$ et de dimension $n = p + q$.

1.2.1 Feuilletage induit et feuilletage produit

1. Soit \mathcal{F} un feuilletage de classe \mathcal{C}^r , de dimension p et de codimension q de la variété M . Si U est un ouvert de M , les cartes de \mathcal{F} dont la source est contenue dans U constituent une structure de variété feuilletée $\mathcal{F}|_U$ sur U de même nature que \mathcal{F} et ayant pour feuilles les composantes connexes des traces sur U des feuilles de \mathcal{F} : $\mathcal{F}|_U$ est le *feuilletage induit* par \mathcal{F} sur U ou encore *feuilletage restriction* de \mathcal{F} à l’ouvert U .

En effet, si $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, alors $\{(U_i \cap U, \varphi_i|_{U_i \cap U})\}_{i \in I}$ est un atlas de cartes feuilletées et $\mathcal{F}|_U = \{(U_i \cap U, \varphi_i|_{U_i \cap U})\}_{i \in I}$ définit un feuilletage sur U dont les feuilles sont les traces des feuilles de \mathcal{F} sur U . Cette construction est transitive : si V est un ouvert de U on a $\mathcal{F}|_V = (\mathcal{F}|_U)|_V$.

2. Si on considère deux variétés différentiables M de dimension $n = p + q$ et M' de dimension $n' = p' + q'$. Soit $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ une structure de variété feuilletée de classe \mathcal{C}^r , de dimension p et de codimension q sur la variété M et soit $\mathcal{F}' = \{(U'_j, \varphi'_j)\}$ une structure de variété feuilletée de classe \mathcal{C}^r , de dimension p' et de codimension q' sur la variété M' . L’ensemble $\{(U_i \times U'_j, \varphi_i \times \varphi'_j)\}$ est un atlas d’une structure de variété feuilletée $\mathcal{F} \times \mathcal{F}'$ de classe \mathcal{C}^r , de dimension $p + p'$ et de codimension $q + q'$ sur la variété produit $M \times M'$: $\mathcal{F} \times \mathcal{F}'$ est le *feuilletage produit* des feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' .

Les feuilles de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}'$ sont les produits cartésiens des feuilles de \mathcal{F} et celles de \mathcal{F}' . On le note également $\mathcal{F} \times M'$ lorsque \mathcal{F}' est le feuilletage trivial de M' par ses composantes connexes.

1.2.2 Feuilletage image directe par un difféomorphisme

Définition 1.2.1. Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont topologiquement (resp. \mathcal{C}^r -)conjugués s’il existe un homéomorphisme (resp. difféomorphisme f de classe \mathcal{C}^r) tels que $f_*\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ i.e f envoie une feuille de \mathcal{F} sur une feuille de \mathcal{F}' . En particulier, si $f_*\mathcal{F} = \mathcal{F}$, on dit que \mathcal{F} est invariant par f . Pour cela, il suffit que f envoie chaque feuille de \mathcal{F} sur une feuille de \mathcal{F} .

Soit \mathcal{F} un feuilletage de classe \mathcal{C}^r , de codimension q sur la variété différentiable M . On suppose que \mathcal{F} est défini par la famille $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ avec $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ des submersions. Soit $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^r .

$$\begin{array}{ccc} U_i \subset M & \xrightarrow{f} & f(U_i) \subset N \\ \varphi_i \downarrow & \nearrow \psi_i & \\ & & \mathbb{R}^q \end{array}$$

Les $\psi_i = \varphi_i \circ f^{-1}$ sont des submersions car composées d’une submersion et d’un difféomorphisme.

En effet, $d(\varphi_i \circ f^{-1})(x) = d\varphi_i(f^{-1}(x)) \circ df^{-1}(x)$. Comme $d\varphi_i(f^{-1}(x))$ est de rang q et que $df^{-1}(x)$ est un isomorphisme alors $d(\varphi_i \circ f^{-1})(x)$ est de rang q . En effet le rang d’une application linéaire est invariant par la composition avec un isomorphisme. D’où les $\varphi_i \circ f^{-1}$

sont des submersions. La famille $\{(f(U_i), \varphi_i \circ f^{-1})\}_{i \in I}$ définit alors un feuilletage de classe \mathcal{C}^r , de codimension q sur M noté $f_*\mathcal{F}$ et appelé *feuilletage image directe* de \mathcal{F} par f . Les feuilles de $f_*\mathcal{F}$ sont les images par f des feuilles de \mathcal{F} .

Définition 1.2.2. Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont dits isotopes s'ils sont conjugués par un difféomorphisme φ qui est isotope à l'identité i.e $\varphi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ est différentiable et $\forall t \in [0, 1], \varphi_t = \varphi|_{M \times \{t\}}$ est un difféomorphisme tels que $\varphi_0 = id_M$ et $\varphi_1(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.

Rappelons une autre notion importante pour la construction des feuilletages : celle de l'homotopie intégrable entre deux feuilletages.

Définition 1.2.3. Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sur M sont dits intégrablement homotopes s'il existe un feuilletage \mathcal{H} sur $M \times [0, 1]$ de même codimension que \mathcal{F} et \mathcal{F}' transverse à $M \times \{t\}$ pour tout $t \in [0, 1]$ et induisant \mathcal{F} sur $M \times \{0\}$ et \mathcal{F}' sur $M \times \{1\}$.

Exemple 1.2.1. Soient ω_0 et ω_1 deux 1 formes fermées non singulière sur une variété différentiable M transverse à un feuilletage de \mathcal{L} dimension 1 i.e que si X est un champ de vecteurs non singulier tangent à \mathcal{L} alors $\omega_0(X) > 0$ et $\omega_1(X) > 0$. Ces deux formes définissent deux feuilletages \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 de codimension 1 transversalement orientables dont l'orientation transverse est donnée par l'orientation de \mathcal{L} . On suppose en plus que les deux formes sont cohomologues i.e $\omega_1 - \omega_0 = df$ pour une fonction différentiable f sur M . Sur $M \times [0, 1]$ définissons la 1-forme

$$\Omega_{(x,t)} = t\omega_{1x} + (1-t)\omega_{0x} + f(x)dt_{(x,t)}$$

pour tout $(x, t) \in M \times [0, 1]$. La forme Ω est fermée et non singulière, elle définit un feuilletage \mathcal{H} de codimension 1 sur $M \times [0, 1]$ transverse à toutes les fibres $M \times \{t\}$, $\forall t \in [0, 1]$ et qui induit \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 respectivement sur $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$. En effet, le champ de vecteurs X peut être vu comme un champ de vecteurs sur $M \times [0, 1]$ indépendant de t et donc $\Omega(X) > 0$. Le feuilletage \mathcal{H} est une homotopie intégrable entre les feuilletages \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 .

Remarque 1.2.1. Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' isotopes sur une variété M sont intégrablement homotopes mais la réciproque n'est vraie que si la variété M est compacte.

1.2.3 Feuilletage image inverse par une application transverse

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions m et n respectivement. On suppose que M supporte un feuilletage \mathcal{F} de codimension q . On dit qu'une application différentiable $f : N \rightarrow M$ est *transverse* à \mathcal{F} si f est transverse à chacune des feuilles de \mathcal{F} , c'est-à-dire que pour tout point x de N , l'espace tangent $T_{f(x)}M$ à M au point $f(x)$ est engendré par $T_{f(x)}\mathcal{F}_{f(x)}$ et $(d_x f)(T_x N)$ (où $d_x f$ est l'application tangente à f en x). Ce qui se traduit par : $T_{f(x)}M = T_{f(x)}\mathcal{F}_{f(x)} + (d_x f)(T_x N)$. Si \mathcal{F} est défini par une famille $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, avec φ_i des submersions :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_i) \subset N & \xrightarrow{f} & U_i \subset M \\ \varphi_i \circ f \downarrow & \nearrow \varphi_i & \\ \mathbb{R}^q & & \end{array}$$

et si f est transverse à \mathcal{F} alors les $\varphi_i \circ f : f^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^q$ sont des submersions et définissent un feuilletage de codimension q sur N noté $f^*\mathcal{F} = \{(f^{-1}(U_i), \varphi_i \circ f)\}_{i \in I}$ et appelé *feuilletage image inverse* de \mathcal{F} par f . En effet, soit $x \in f^{-1}(U_i)$, on a :

$$T_{f(x)}\varphi_i : T_{f(x)}M \rightarrow \mathbb{R}^q$$

et

$$T_x(\varphi_i \circ f)(T_xN) = T_{f(x)}\varphi_i \left((T_x f)(T_xN) \right)$$

Par l'hypothèse de transversalité et par la règle de composition des applications, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^q &= T_{f(x)}\varphi_i.T_{f(x)}M \\ &= T_{f(x)}\varphi_i.T_{f(x)}\mathcal{F} + T_{f(x)}\varphi_i.T_x f.T_xN \\ &= T_{f(x)}\varphi_i.T_{f(x)}\mathcal{F} + T_x(\varphi_i \circ f).T_xN \end{aligned}$$

Puisque $\varphi_i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^q$ est constante sur chaque plaque de \mathcal{F} passant par $f(x)$ on a $T_{f(x)}\varphi_i = \{0\}$; donc $T_x(\varphi_i \circ f).T_xN = \mathbb{R}^q$ et $\varphi_i \circ f$ est une submersion. Les feuilles de $f^*\mathcal{F}$ sont les composantes connexes des images inverses des feuilles de \mathcal{F} par f . En particulier, si $W \subset M$ est une sous-variété transverse à \mathcal{F} , l'injection canonique $i : W \rightarrow M$ est une application transverse à \mathcal{F} c'est-à-dire pour tout $x \in W, T_xM = T_x\mathcal{F}_x + T_xW$. Alors $i^*\mathcal{F} = \mathcal{F}|_W$ est un feuilletage induit par \mathcal{F} sur W . De plus, $\mathcal{F}|_W$ est un feuilletage de même codimension que la codimension de \mathcal{F} puisque si $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une submersion sur M alors $\varphi_i|_W : U_i \cap W \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une submersion.

1.2.4 Suspension d'un feuilletage par un difféomorphisme

Soit h est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^r (r \geq 1)$ d'une variété M . On appelle *variété suspension* de h et on le note par

$$M_h := \frac{M \times \mathbb{R}}{(x, t) \sim (h^n(x), t + n)}$$

la variété obtenue en quotientant le produit $M \times \mathbb{R}$ par l'action du groupe \mathbb{Z} définie par $(x, t) \rightarrow (h^n(x), t + n)$ c'est-à-dire \mathbb{Z} opère sur M par itération de h et sur \mathbb{R} par translation. Dans ces conditions, si \mathcal{F} est un feuilletage de classe \mathcal{C}^r et de codimension q de M invariant par h , le feuilletage produit $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ est invariant par l'action de \mathbb{Z} et détermine un feuilletage \mathcal{F}_h de classe \mathcal{C}^r et de codimension q de M_h . Le feuilletage \mathcal{F}_h est appelé *feuilletage suspension* du feuilletage \mathcal{F} par difféomorphisme h . Un cas typique est celui où h est un difféomorphisme d'Anosov de \mathbb{T}^2 induit par l'automorphisme de \mathbb{R}^2 ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui sera traité ci-dessous. On donne ici un autre exemple de suspension. il s'agit de la suspension d'une rotation d'angle α du cercle \mathbb{S}^1 .

Exemple 1.2.2. On considère un difféomorphisme du cercle $f_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ défini par $f_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}.z$. Il s'agit d'une rotation d'angle $2\pi\alpha$. La suspension de f_α définit un feuilletage \mathcal{F}_α sur le tore \mathbb{T}^2 . Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec p et q premiers entre eux, tous les points de \mathbb{S}^1 sont périodiques pour f_α ce qui signifie en termes de feuilletages que toutes les feuilles de \mathcal{F}_α sont homéomorphes à \mathbb{S}^1 et coupe $N_0 = \pi(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$ q fois avec $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ la projection canonique. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ alors toutes les feuilles de \mathcal{F}_α sont denses dans \mathbb{T}^2 .

1.3 Exemples de feuilletages en dimension 3

On donne ici deux exemples classiques de feuilletages de codimension 1 en dimension 3 : le feuilletage de Reeb sur la sphère \mathbb{S}^3 et les feuilletages modèles sur \mathbb{T}_A^3 .

1.3.1 Feuilletage de Reeb sur la sphère \mathbb{S}^3

C'est la question de Hopf suivante "Existe-t-il sur la sphère \mathbb{S}^3 un champ de vecteurs sans singularité orthogonal à son rotationnel? C'est-à-dire un champ de vecteurs X tels que $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{\text{rot}X} = 0$ " qui est à l'origine de ce feuilletage.

Mais C. Ehresmann remarqua que la question de Hopf revient à se demander s'il existe sur la sphère \mathbb{S}^3 un champ de plans de dimension 2 qui est complètement intégrable c'est-à-dire qu'il existe sur \mathbb{S}^3 une 1-forme ω tel que $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{\text{rot}X} = 0 \iff \omega \wedge d\omega = 0$.

En effet soit (U, x, y, z) un système de coordonnées locales sur la sphère \mathbb{S}^3 et considérons le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{X} = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

et la forme de Pfaff associée

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

définis sur \mathbb{S}^3 où $P, Q, R \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}X} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{\text{rot}X} &= P \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Calculons maintenant $d\omega$.

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx \wedge dz \\ \omega \wedge d\omega &= P \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + Q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dy \wedge dy \wedge dz + R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left(P \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned} \quad (1.2)$$

De (1.1) et (1.2), on a $\omega \wedge d\omega = (\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{\text{rot}X}) dx \wedge dy \wedge dz$.

D'où $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{\text{rot}X} = 0 \iff \omega \wedge d\omega = 0$.

C'est en 1944 que G. Reeb a répondu positivement à la question de Hopf en construisant sur la sphère \mathbb{S}^3 un feuilletage de codimension 1. En identifiant \mathbb{R}^4 à \mathbb{C}^2 la sphère unité $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ peut être défini par $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. On note par $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de \mathbb{C} et par $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ son adhérence.

En Considérant alors les ensembles suivants : $M_+ = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 \leq \frac{1}{2}\}$ et $M_- = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 \geq \frac{1}{2}\}$, on a $\mathbb{S}^3 = M_- \cup M_+$.

Pour $(z_1, z_2) \in M_+$, on a $|z_2|^2 \geq \frac{1}{2}$ donc $z_2 \neq 0$. L'application continue

$$\begin{aligned} \varphi : M_+ &\rightarrow \bar{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1 \\ (z_1, z_2) &\mapsto \left(\sqrt{2}z_1, \frac{1}{|z_2|}z_2 \right) \end{aligned}$$

est bijective donc un homéomorphisme par compacité de M_+ et $\bar{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$; et donc M_+ est un tore plein. Il en est de même pour l'ensemble M_- .

On constate que $M_- \cup M_+ = \mathbb{S}^3$ et $M_- \cap M_+ = \partial M_+ = \partial M_- = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2}\}$ est un tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Bref la sphère \mathbb{S}^3 est obtenue en recollant deux exemplaires de $\bar{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$ le long de leur bord.

Construction de la composante de Reeb en dimension 2

On considère la fonction $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. on a $f^{-1}(0) = \partial\mathbb{D}^2 \simeq \mathbb{S}^1$. On considère alors la 1-forme $\omega = df - fd\theta$ sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ où $d\theta$ est la forme volume sur \mathbb{S}^1 . La 1-forme ω est sans singularité et intégrable. Elle définit donc sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 ayant une seule feuille compacte \mathbb{T}^2 .

En effet, sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus (f^{-1}(0) \times \mathbb{S}^1)$ le feuilletage \mathcal{F} est conjugué à un feuilletage défini par une 1-forme ω' fermée sans singularité et de rang 1; par conséquent toutes ses feuilles sont denses. Pour le voir on pose

$$\omega = f \underbrace{\left(\frac{df}{f} - d\theta \right)}_{\omega'} = f \cdot \omega'$$

Le tore plein $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ muni de ce feuilletage est appelé *composante de Reeb* (voir la figure ci dessous).

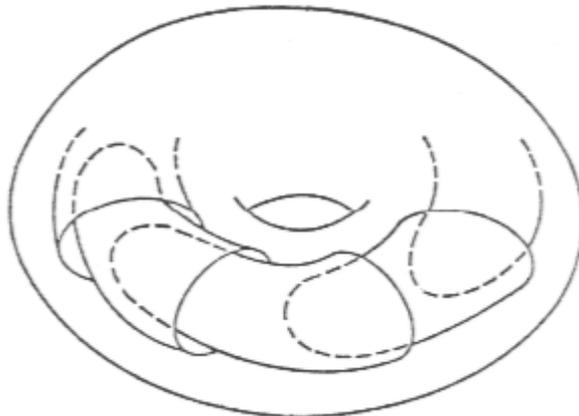


FIGURE 1.3 – Composante de Reeb

Si les deux tores pleins utilisés pour la construction de \mathbb{S}^3 sont feuilletés en composantes de Reeb, on obtient sur \mathbb{S}^3 un feuilletage de codimension 1 ayant une seule feuille compacte \mathbb{T}^2 et toutes les autres feuilles sont homéomorphes au plan \mathbb{R}^2 . C'est le *feuilletage de Reeb* sur \mathbb{S}^3 .

Une question naturelle est alors de savoir si tous les feuilletages de codimension 1 sur \mathbb{S}^3 possèdent une composante de Reeb ? Le théorème de S. Novikov [6] (1965) selon lequel tout feuilletage de codimension 1 de classe \mathcal{C}^2 sur une variété fermée de dimension 3 dont le groupe fondamental est fini (en particulier sur \mathbb{S}^3) possède une composante de Reeb répond affirmativement à cette question ouvrant ainsi la problématique de classification des feuilletages.

1.3.2 Feuilletages modèles sur \mathbb{T}_A^3

Un deuxième exemple très important est celui des feuilletages modèles construits par Ghys-Sergiescu sur une 3-variété fermée qui est un fibré en tores sur le cercle et hyperbolique. Commençons par la construction d'un tel fibré. Pour tout $A \in GL(2, \mathbb{Z})$, on désigne par \mathbb{T}_A^3 le fibré en tores sur le cercle obtenu en quotientant $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ par la relation $(x, 0) \sim (Ax, 1)$. On peut encore dire que \mathbb{T}_A^3 est obtenu en identifiant $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$ dans $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ à l'aide de A .

Un tel fibré est dit hyperbolique si A est hyperbolique c'est-à-dire si $|tr(A)| > 2$.

On considère le difféomorphisme $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ induit par l'isomorphisme $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appelé difféomorphisme d'Anosov. On définit \mathbb{T}_A^3 par

$$\mathbb{T}_A^3 := \mathbb{T}^2 \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$$

Les deux directions propres λ_1 et λ_2 de A donnent sur \mathbb{R}^2 deux feuilletages notés \mathcal{F}_{λ_1} et \mathcal{F}_{λ_2} dont les feuilles sont des droites de pentes $\lambda_i (i = 1, 2)$. Ces feuilletages définis sur \mathbb{R}^2 sont invariants par l'action par translations entières de \mathbb{Z}^2 sur \mathbb{R}^2 et passent donc au quotient sur le tore \mathbb{T}^2 en deux feuilletages minimaux \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de codimension 1 et transverses entre eux. Les feuilletages produits $\mathcal{F}_i \times \mathbb{R}$, ($i = 1, 2$) sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ sont invariants par φ et induisent sur \mathbb{T}_A^3 deux feuilletages de codimension 1 \mathcal{H}_i , ($i = 1, 2$) minimaux

transverses entre eux et transverses aux fibres \mathbb{T}^2 de la fibration $\pi : \mathbb{T}_A^3 \rightarrow \mathbb{S}^1$, appelés feuilletages modèles. Dans [13] Ghys-Sergiescu ont montré le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. [13] *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement orientable, de classe C^r , ($r \geq 2$), sans feuille compacte sur un fibré hyperbolique orientable, en particulier sur \mathbb{T}_A^3 . Alors \mathcal{F} est C^{r-2} -conjugué à l'un des feuilletages modèles.*

Esquisse de la preuve : La preuve de ce théorème consiste à faire la démarche inverse de la construction des feuilletages modèles. Par de petites isotopies, ils mettent une fibre \mathbb{T}_0^2 en position transverse au feuilletage sans toucher ce dernier (théorème de Roussarie) ; et puis ils coupent le fibré \mathbb{T}_A^3 le long de ce tore en position transverse par rapport au feuilletage ; ils montrent ensuite que le feuilletage induit par \mathcal{F} sur chaque fibre est sans feuille compacte et qu'il est conjugué à l'un des feuilletages définis par les directions propres de la matrice A (théorème de Denjoy) ; et enfin ils montrent que le feuilletage induit par \mathcal{F} sur $\mathbb{T}_0^2 \times [0, 1]$ est isotope à un feuilletage produit. De ce résultat, on déduit le corollaire suivant

Corollaire 1.3.1. *Soit M un \mathbb{T}^2 -fibré sur le cercle \mathbb{S}^1 dont la monodromie est isotope à un automorphisme hyperbolique. Si \mathcal{F} est un feuilletage C^∞ transversalement orientable sans feuille compacte alors \mathcal{F} est transversalement affine.*

En plus ils ont montré que les feuilletages modèles sur ce fibré sont structurellement stables. Plus précisément, ils ont montré le théorème suivant

Théorème 1.3.2. [13] *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement orientable de classe C^r ($r \geq 2$), sans feuille compacte, sur un fibré hyperbolique orientable. Alors, tout feuilletage de classe C^r suffisamment C^1 -proche de \mathcal{F} est C^{r-2} conjugué à \mathcal{F} .*

Pour prouver cela, ils ont montré que dans de telles conditions, ce feuilletage est sans feuille compacte et donc le résultat. Ces deux résultats sont la source de plusieurs travaux de recherche dont parmi les auteurs on peut citer H. Nakayama, H. Dathe, A. Saidou, et bien d'autres. Il est donc naturel de penser à généraliser de ces résultats aux 3-variétés fibrés en surfaces de genre $g > 1$ sur le cercle. Mais contrairement à ce que l'on peut penser ces résultats ont peu de chance de se généraliser en genre supérieur à 1. Parmi les obstructions, on peut citer le premier nombre de Betti qui n'est pas égal nécessairement à 1 et d'autre part la restriction du feuilletage à chaque fibre qui admet des singularités. Mais pas mal de résultats ont été obtenus dans cette direction parmi lesquels celui de H. Nakayama [27] dans le cas des feuilletages transversalement affines sans feuille compacte sur les fibrés en surfaces de genre > 1 , ceux de H. Dathe [19] pour les feuilletages transversalement affines sans composante de Reeb puis pour les feuilletages transversalement projectifs proches des modèles et récemment H. Dathe et A. Saidou [25] dans le cas des feuilletages transversalement projectifs ayant même classe d'Euler que la fibration sur V_ψ^3 . Comme nous l'avons déjà indiqué notre étude porte sur les feuilletages tendus. Introduisons pour cela cette notion qui est une sorte de généralisation des feuilletages sans composante de Reeb.

1.4 Notion de feuilletages tendus

Historiquement, en 1964 Novikov a démontré un résultat spectaculaire qui affirme que tous les feuilletages de la sphère \mathbb{S}^3 ressemblent au feuilletage de Reeb ; possède donc une composante de Reeb. On rappelle qu'une composante de Reeb est un feuilletage de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ par une feuille torique au bord et des plans à l'intérieur. Par tourbillonnement de Reeb, Lickorish [1965] et Novikov [1964] ont indépendamment réalisé comment construire explicitement un feuilletage avec une composante de Reeb. Ils partirent du fait de Lickorish [1962] et Wallace [1960] que toutes les variétés de dimension 3 compactes et fermées s'obtiennent en effaçant le voisinage tubulaire d'un entrelacs de \mathbb{S}^3 puis en le recollant à la 3-variété. En voyant cet entrelacs dans le feuilletage de Reeb de \mathbb{S}^3 et en le rendant transverse aux feuilles, ce qui est toujours vrai par le théorème d'Alexander [1923], ils effacent un voisinage de cet entrelacs feuilleté trivialement par $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ puis recollent par le bon homéomorphisme avec le procédé de tourbillonnement de Reeb. Le cas des variétés à bord est clair en considérant le double de la variété. Finalement les feuilletages admettant une composante de Reeb sont trop courants pour donner des informations sur la variété sous-jacente.

Ainsi se pose alors la question de savoir quelles sont les 3-variétés admettant un feuilletage sans composante de Reeb ? Ou encore, peut-on généraliser le théorème de Novikov ? Notons qu'à vrai dire, ce théorème ne se généralise pas. Ainsi d'après Novikov toute variété fermée orientable de dimension 3 de groupe fondamental fini possède un feuilletage en surfaces transversalement orientable ayant au moins une composante de Reeb ; l'existence de feuilletages transversalement orientables sans composante de Reeb devient une question importante. Le théorème de Novikov selon lequel, "*si M est une 3-variété différentiable de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ compacte connexe et orientée admet un feuilletage transversalement orienté et sans composante de Reeb alors $\pi_1(M)$ est fini, les feuilles sont incompressibles et $\pi_2(M) = \{0\}$* ", nous indique quelles sont les 3-variétés admettant un feuilletage sans composante de Reeb.

Pour une variété fermée de groupe fondamental infini, quelles sont les "exceptions" au théorème de Novikov ? Le premier qui s'est intéressé à ce problème fut D. Gabai(1983). L'auteur a amélioré cette théorie en introduisant la notion de feuilletage tendu, plus générale que feuilletage sans composante de Reeb.

Définition 1.4.1. *Soit M une variété de dimension n muni d'un feuilletage \mathcal{F} de dimension k . Une sous-variété Σ est transverse à \mathcal{F} si pour tout point $m \in \Sigma$ la feuille L de \mathcal{F} passant par m vérifie $T_m\Sigma + T_mL = T_mM$. Si de plus $\dim\Sigma + \dim\mathcal{F} = \dim M$ on dit que Σ est une section transverse à \mathcal{F} ou une transversale.*

En particulier une transversale fermée à un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sur une variété M de dimension 3 est une sous-variété plongée fermée difféomorphe à \mathbb{S}^1 et tel que $\forall x \in \mathbb{S}^1$ on a $T_xM = T_x\mathcal{F}_x + T_x\mathbb{S}^1$.

Une propriété importante des feuilletages de codimension 1 d'une variété compacte est qu'ils possèdent toujours une transversale fermée.

Définition 1.4.2. *Un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sur une variété M est tendu s'il possède une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles de \mathcal{F} .*

D'après un résultat de D. Sullivan [12] cela est équivalent à l'existence d'une métrique riemannienne g qui rend toutes les feuilles des sous-variétés minimales. Notons que toutes

les variétés fermées de dimension 3 ne portent pas de feuilletages tendus comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. [42] *Soit M une 3-variété fermée munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée alors \mathcal{F} n'est pas tendu :*

- (i) $\pi_1(M)$ est fini.
- (ii) M contient une courbe fermée transverse à \mathcal{F} et homotope à 0.
- (iii) \mathcal{F} possède une feuille L compressible (c'est-à-dire $\pi_1(L)$ ne s'injecte pas dans $\pi_1(M)$).

Exemple 1.4.1. 1. *Tout feuilletage sans feuille compacte est tendu.*

2. *Si \mathcal{F} est un feuilletage sans composante de Reeb sur une 3-variété M atoroidale (c'est-à-dire ne contenant pas de tore plongé dont le groupe fondamental s'injecte dans $\pi_1(M)$), alors \mathcal{F} est tendu.*

3. *Un feuilletage tendu est sans composante de Reeb.*

Une question qu'on peut se poser est alors de savoir quelles sont les variétés de dimension 3 qui portent des feuilletages tendus ? Et quelles informations géométriques ou topologiques renferment de telles variétés ? Il est clair que la sphère \mathbb{S}^3 n'admet pas de feuilletage tendu car son groupe fondamental est fini. Par contre D. Gabai [1983] donna une construction explicite de feuilletages tendus sur les 3-variétés ayant une homologie non triviale.

1.5 Holonomie d'un feuilletage

Nous introduisons ici la notion d'holonomie d'une feuille d'un feuilletage et quelques propriétés relatives à celle-ci. Ce concept qui généralise celui de l'application de premier retour de Poincaré des orbites d'un champ de vecteurs, a été introduit par Ereshmann et joue un rôle très important dans la théorie des feuilletages, en particulier dans la théorie de déformation des feuilletages.

Rappelons d'abord la notion d'application de premier retour ou application de Poincaré. Soit X un champ de vecteurs sur une variété M de dimension n et φ_t^X le flot associé à X . On suppose que l'orbite d'un point m de M est périodique de période T . On peut trouver une sous-variété Σ de dimension $n - 1$ transverse au flot au point m . Il existe alors un voisinage U de M dans Σ et une fonction $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $\tau(m) = m$ et pour tout $y \in U$, $\varphi_t^X(\tau(y), y) \in \Sigma$, mais $\varphi_t^X(t, y) \notin \Sigma$, pour $0 < t < \tau(y)$. Cette fonction correspond au temps que met la trajectoire passant par un point voisin de m pour recouper Σ . On définit l'application de premier retour sur la transversale Σ l'application $h : U \rightarrow \Sigma$ donnée par $h(y) = \varphi_t^X(\tau(y), y)$. Comme on l'a déjà indiqué dans l'introduction, la théorie des feuilletages trouvent ses origines dans l'analyse globale des solutions des équations différentielles ordinaires. Sur une variété M de dimension n une équation différentielle ordinaire est définie par un champ de vecteurs X . Si ce champ de vecteurs est sans singularité alors ses trajectoires forme une partition de M en courbes qui sont les feuilles d'un feuilletage de codimension $n - 1$ et de dimension 1 de M . La notion d'holonomie est alors une généralisation de cette application de Poincaré aux feuilletages d'une variété M de dimension n .

Soient alors L_0 une feuille d'un feuilletage \mathcal{F} sur une variété M et T_0 et T_1 deux transversales passant respectivement par deux points x_0 et x'_0 de L_0 . L'objectif est de définir une application de T_0 dans T_1 qui à tout point x de $T_0 \cap L_0$ associe un point x_1 de $T_1 \cap L_0$. Dans le cas d'un feuilletage simple c'est-à-dire si chaque feuille L_i coupe un ouvert distingué en une seule plaque, on a l'application triviale obtenue par une identification naturelle entre les germes des transversales T_i au feuilletage en différents points de la feuille. C'est l'holonomie triviale. Mais dans le cas général, le problème est que sur un ouvert distingué U une feuille voisine de la feuille L_0 peut couper plusieurs fois une transversale T_0 passant par un point x_0 de L_0 ou ne la coupe jamais. Dans ce cas l'identification des transversales est remplacée par la notion intuitive de "glissement le long des feuilles". C'est cette notion qu'on utilise pour définir l'holonomie de la feuille L_0 .

Le lemme suivant est fondamental pour définir la notion d'holonomie.

Lemme 1.5.1. [6] *Soit \mathcal{F} un feuilletage sur une variété M . Il existe un recouvrement $\{V_i\}_{i \in I}$ par des domaines de cartes de \mathcal{F} tel que si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ alors $V_i \cup V_j$ est contenu dans un domaine de cartes de \mathcal{F} .*

En utilisant ce lemme on montre le théorème suivant

Théorème 1.5.1. *Soient \mathcal{F} un feuilletage de dimension p sur une variété M de dimension $n \geq p$, L une feuille de \mathcal{F} , $\gamma : [0, 1] \rightarrow L$ un chemin continu, Σ_0 et Σ_1 deux sections transverses de \mathcal{F} passant par les points m_0 et m_1 respectivement. Alors il existe un difféomorphisme f_γ défini sur un voisinage V_0 de m_0 dans Σ_0 et à valeurs dans un voisinage V_1 de m_1 dans Σ_1 telle que pour toute feuille L' de \mathcal{F} on a $f_\gamma(V_0 \cap L') = V_1 \cap L'$.*

Démonstration. En utilisant le lemme ci-dessus on voit qu'il existe une chaîne subordonnée à γ , c'est-à-dire une suite U_1, \dots, U_k de cartes et une partition $0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1$ de $[0, 1]$ telles que

1. $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$
2. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ alors $U_i \cup U_j$ est contenu dans un domaine de carte.

Pour $1 \geq i \geq k + 1$, on choisit une transversale Σ_i de \mathcal{F} qui est contenu dans $U_i \cap U_j$ et est homéomorphe à un disque de dimension $n - p$. Pour $m \in \Sigma_i$ assez proche de $\gamma(t_i)$, la plaque de U_i passant par m coupe Σ_{i+1} en un unique point $f_i(m)$. Puisque les transversales que l'on considère sont lisses, le théorème de différentiabilité des solutions d'une équation différentielle en fonctions des conditions initiales, assure que f_i est lisse. On en déduit que chaque f_i est un difféomorphisme d'un voisinage de $\gamma(t_i)$ de Σ_i sur son image ; puisque son inverse est défini de manière analogue. L'application $f_\gamma = f_k \circ \dots \circ f_0$ est donc bien un difféomorphisme d'un voisinage V_0 de m_0 dans Σ_0 sur son image qui est un voisinage V_1 de m_1 dans Σ_1 . \square

L'application f_γ s'appelle l'holonomie du chemin γ relativement aux transversales Σ_0 et Σ_1 . A priori f_γ dépend des transversales et de la chaîne subordonnée à γ . Plus précisément, le germe de f_γ ne dépend que de γ et des transversales Σ_0 et Σ_1 . Dans le cas où γ est un lacet et $\Sigma_0 = \Sigma_1$ le germe de f_γ , noté $[f_\gamma]$ est un élément du groupe des germes de difféomorphismes de Σ_0 en m_0 . On dit que $[f_\gamma]$ est l'holonomie de γ relativement à Σ_0 .

Définition 1.5.1. Soient \mathcal{F} un feuilletage de dimension p sur une variété M de dimension n , L une feuille de \mathcal{F} , $m \in L$ et Σ une transversale de \mathcal{F} telle que $m \in \Sigma$. La représentation d'holonomie de L relativement à m et Σ est l'application

$$H_{L,m,\Sigma} : \begin{array}{ccc} \pi_1(L, m) & \rightarrow & \text{Diff}(\Sigma, m) \\ [\gamma] & \mapsto & f_\gamma \end{array}$$

où γ est un représentant de $[\gamma]$ et f_γ le germe d'holonomie de γ . L'image de $\pi_1(L, m)$ par $H_{L,m,\Sigma}$ s'appelle groupe d'holonomie de L relativement à m et Σ et se note $\text{Hol}(L, m, \Sigma)$.

On dit qu'un feuilletage \mathcal{F} est sans holonomie si le groupe d'holonomie de chaque feuille est trivial. C'est le cas par exemple d'un feuilletage simple où l'application d'holonomie est triviale.

Proposition 1.5.1. [6]

1. La représentation d'holonomie est un homomorphisme de groupes.
2. Soient L une feuille de \mathcal{F} , $m_0, m_1 \in L$ et Σ_0, Σ_1 deux transversales de \mathcal{F} telles que $m_0 \in \Sigma_0$ et $m_1 \in \Sigma_1$ et $\alpha : [0, 1] \rightarrow L$ un chemin tel que $m_0 = \alpha(0)$ et $m_1 = \alpha(1)$. Alors $\text{Hol}(L, m_0, \Sigma_0) = (f_\alpha)^{-1} \circ \text{Hol}(L, m_1, \Sigma_1) \circ f_\alpha$, où f_α est le germe d'holonomie de α relativement aux transversales Σ_0 et Σ_1 .

Chaque transversale étant difféomorphe à un voisinage de \mathbb{R}^k où k est la codimension du feuilletage $\text{Diff}(\Sigma_i, m_i)$ est difféomorphe à $\text{Diff}_0(\mathbb{R}^k)$ et on déduit la définition suivante :

Définition 1.5.2. Le groupe d'holonomie de L , noté $\text{Hol}(L)$, est l'image de $\pi_1(L, m)$ par l'homomorphisme d'holonomie

$$\text{hol} : \begin{array}{ccc} \pi_1(L, m) & \rightarrow & \text{Diff}_0(\mathbb{R}^k) \\ [\gamma] & \mapsto & f_\gamma \end{array}$$

où $\text{Diff}_0(\mathbb{R}^k)$ est le groupe de difféomorphismes de \mathbb{R}^k qui fixent 0.

- Exemple 1.5.1.**
1. Si L est une feuille fermée alors son holonomie est triviale.
 2. Pour le feuilletage linéaire du tore, si la pente est rationnelle alors l'holonomie est triviale.
 3. Si la feuille L de \mathcal{F} est simplement connexe alors son groupe d'holonomie est triviale. En particulier si toutes les feuilles sont simplement connexes le feuilletage est sans holonomie.

Comme nous l'avons déjà signalé cette notion est très importante en théorie des feuilletages et surtout dans la théorie de leurs déformations. Par exemple le lemme de déformation de Thurston qui stipule que si deux feuilletages transversalement homogènes sont assez proches et si leurs groupes d'holonomie sont conjugués alors ces deux feuilletages sont isotopes [19]; le théorème de Sacksteder pour les feuilletages de codimension 1 sur les variétés fermées qui stipule que si \mathcal{F} est un feuilletage de classe C^2 sans holonomie alors il est topologiquement conjugué à un feuilletage défini par une 1-forme fermée et que par conséquent la variété fibre sur le cercle [11].

Feuilletages transversalement affines et feuilletages transversalement projectifs

On définit ici deux notions importantes pour l'étude des feuilletages de codimension 1 sur les 3-variété : feuilletages transversalement affines et feuilletages transversalement projectifs.

Proposition 1.5.2. (*Définition*)[14] *Soit N une variété analytique et Γ un pseudo-groupe de difféomorphismes locaux de N obtenu par localisation d'un groupe des difféomorphismes analytiques de N et soit M une variété différentiable connexe munie d'un feuilletage \mathcal{F} avec une Γ -structure transverse. Il existe un revêtement galoisien $p : P \rightarrow M$, une représentation $h : \pi_1(M) \rightarrow G$ et une submersion $D : P \rightarrow N$ ayant les propriétés suivantes :*

- i) *le revêtement p correspond au sous-groupe $\ker h$ de $\pi_1(M)$;*
- ii) *la submersion D est équivariante pour h (i.e $D(\alpha.x) = h(\alpha)D(x), \forall x \in P, \alpha \in \pi_1(M)$) ;*
- iii) *le feuilletage $p^*\mathcal{F}$ est défini par la submersion D .*

On dit que cette construction constitue un développement du feuilletage \mathcal{F} ; que la submersion D est la développante et que la représentation h est la représentation globale d'holonomie. Son image est un sous-groupe de G appelé groupe d'holonomie globale de \mathcal{F} .

Exemple 1.5.2. *Soit $M = \mathbb{T}^2$ le tore de dimension 2 ; son revêtement universel est \mathbb{R}^2 et son groupe fondamental est $\Gamma = \mathbb{Z}^2$. Soit $h : \Gamma \rightarrow G = \mathbb{R}$ le morphisme donné par $h(x, y) = n + \alpha m$ où α est un réel positif. Considérons l'action d'un élément $(m, n) = \gamma \in \Gamma$ sur \mathbb{R}^2 donnée par l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - m, y + n) \in \mathbb{R}^2$. Soit $D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la submersion définie par $D(x, y) = y - \alpha x$. On a alors $D(\gamma(x, y)) = h(\gamma)D(x, y)$. Donc on a un feuilletage du tore \mathbb{T}^2 admettant une structure transverse modélée sur le groupe \mathbb{R} . L'application $h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est le morphisme d'holonomie globale de \mathcal{F} . Le groupe d'holonomie globale est un sous-groupe de \mathbb{R} .*

Définition 1.5.3. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 transversalement orienté sur une variété M . On dit que \mathcal{F} est transversalement affine s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M et une famille de submersions $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ tels que sur les composantes connexes $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on a $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$, avec $\gamma_{ij}(x) = a_{ij}x + b_{ij}$ des transformations affines préservant l'orientation de \mathbb{R} .*

Cela signifie également que l'on peut choisir une atlas de cartes distinguées tel que les changements de cartes soient affines dans la direction transverse. D'après [5] ces feuilletages \mathcal{F} transversalement affines peuvent être définis de manière équivalente par un couple des 1-formes différentielles (ω, ω_1) vérifiant :

- i) $T\mathcal{F} = \ker \omega$;
- ii) $d\omega = \omega \wedge \omega_1$;
- iii) $d\omega_1 = 0$

modulo l'équivalence identifiant les couples (ω, ω_1) et (ω', ω'_1) s'il existe une fonction f sans zéro sur M telle que $\omega' = f\omega$ et $\omega'_1 = \omega_1 - df/f$.

Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine sur une variété M et $p : \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M . D'après le développement d'un feuilletage avec une structure transverse, il existe une représentation $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Aff}^+(\mathbb{R})$ et une submersion $D : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $p^*\mathcal{F}$ est défini par la submersion D et $\forall \gamma \in \pi_1(M), x \in \tilde{M}, D(\gamma)D(x) = \rho(\gamma)D(x)$. Par exemple les feuilletages modèles construits par Ghys sur le fibré T_φ^3 sont transversalement affines.

Remarque 1.5.1. [5] *Si un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sur une variété compacte est sans holonomie alors il possède au plus une structure transversalement affine.*

Définition 1.5.4. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 transversalement orienté sur une variété M . On dit que \mathcal{F} est transversalement projectif s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M et une famille de submersions $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ tels que sur les composantes connexes $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ on a $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$, avec*

$$\gamma_{ij}(x) = \frac{a_{ij}x + b_{ij}}{c_{ij}x + d_{ij}}$$

des transformations homographiques de \mathbb{S}^1 .

D'après [5] les feuilletages \mathcal{F} transversalement projectifs peuvent être définis de manière équivalente par un triplets des 1-formes différentielles $(\omega, \omega_1, \omega_2)$ vérifiant :

i) $T\mathcal{F} = \ker \omega$;

ii) $d\omega = 2\omega_1 \wedge \omega$, $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ et $d\omega_2 = 2\omega_2 \wedge \omega_1$;

modulo l'équivalence identifiant les triplets $(\omega, \omega_1, \omega_2)$ et $(\omega', \omega'_1, \omega'_2)$ s'il existe une fonction f strictement positive et une fonction g sur M telle que $\omega' = f\omega$, $\omega'_1 = \omega_1 + \frac{1}{2}df/f$ et $\omega'_2 = (\omega_2 - dg - 2g\omega_1 - g^2\omega)/f$.

Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement projectif sur une variété M et $p : \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M . D'après le développement d'un feuilletage avec une structure transverse, il existe une représentation $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ et une submersion $D : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{S}^1$ telles que $p^*\mathcal{F}$ est défini par la submersion D et $\forall \gamma \in \pi_1(M), x \in \tilde{M}, D(\gamma)D(x) = \rho(\gamma)D(x)$.

Remarquons que si \mathcal{F} est transversalement affine alors il est transversalement projectif. En dimension 3, les feuilletages de codimension 1 sans feuille compacte transversalement affines et ceux transversalement projectifs ont été classifiés à isotopies près respectivement par Nakayama dans [27] et Dathe-Adamou dans [25]. Dans notre travail on s'intéresse à la classification des feuilletages sans feuille compacte sans tenir compte de leurs structures transverses.

FEUILLETAGES TENDUS DES 3-VARIÉTÉS FIBRÉES EN SURFACES SUR LE CERCLE

Sommaire

2.1	Introduction	29
2.2	Topologie sur l'espace des feuilletages	30
2.3	Difféomorphismes et fibrés pseudo-Anosov	31
2.4	Feuilletages modèles sur les fibrés en surfaces	43
2.5	Feuilletages tendus et structures de contact tendues	49

2.1 Introduction

Soit φ un difféomorphisme d'Anosov du tore \mathbb{T}^2 et T_φ^3 la 3-variété obtenue par suspension de φ . Ghys et Sergiescu ont montré dans ([13]) qu'il existe, à conjugaison différentiable près, deux feuilletages de codimension 1 de classe C^∞ et sans feuille compacte sur T_φ^3 . Un tel théorème a peu de chances de se généraliser aux fibrés pseudo-Anosov pour plusieurs raisons parmi lesquelles on peut citer d'une part le fait que le premier nombre de Betti des fibrés pseudo-Anosov n'est pas nécessairement égal à 1 et d'autre part la restriction du feuilletage à chaque fibre admet des singularités. Soit maintenant Σ une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$ et φ un difféomorphisme *pseudo-Anosov* sur Σ dont le feuilletage stable et le feuilletage instable sont orientés et n'admettent que des singularités de type selle à quatre branches. Soit V la 3-variété obtenue par suspension de φ . Combien y a-t-il à conjugaison différentiable près de feuilletages de codimension 1 de classe C^∞ sans feuille compacte sur V ?

Rapellons certains résultats sur cette question; notamment ceux de H. Nakayama [27] et H. Dathe [18], [20],[19] et [25]. Dans [27] Nakayama a montré le résultat suivant

Théorème 2.1.1. ([27]) *Soit Σ une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$ et $\pi : V \rightarrow \mathbb{S}^1$ un Σ -fibré pseudo-Anosov. On suppose que la matrice de monodromie possède deux valeurs propres réelles λ et $1/\lambda$ avec des sous-espaces propres associés de dimension 1, où $\lambda > 1$ est le coefficient de dilatation de la monodromie. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 sans feuille compacte et transversalement affine vérifiant : $\chi(T\mathcal{F}) = \pm\chi(T\pi)$; $\chi(T\mathcal{F})$ et $\chi(T\pi)$ désignent les classes d'Euler de \mathcal{F} et π respectivement. Alors il existe un revêtement fini de \mathcal{F} qui est C^0 -isotope à l'un des modèles.*

Et H. Dathe a étendu ce théorème au cas des feuilletages transversalement affines sans composante de Reeb et a par ailleurs montré que les modèles n'admettent pas de déformations transversalement projectives non affines dans la classe d'Euler de la fibration. Et plus récemment, H. Dathe et A. Saidou ont étendu ce résultat dans le cas des feuilletages transversalement projectifs. Plus précisément ils ont montré le

Théorème 2.1.2. [25] *Soit \mathcal{F} un feuilletage sur la variété V_ψ^3 de codimension 1 sans feuille compacte transversalement projectif qui est dans la classe d'Euler de la fibration. Alors \mathcal{F} est, à revêtement fini près, C^0 -isotope à l'un de ses feuilletages modèles.*

Il est possible comme dans le cas de T_φ^3 de construire des feuilletages modèles ayant ces propriétés. Mais la question ci-dessus reste complexe même pour des fibrés particuliers comme V_ψ^3 . Ainsi pour un feuilletage de codimension 1 tendu quelconque, la seule chose à espérer est de trouver des conditions suffisantes pour qu'un feuilletage tendu sur des tels fibrés soit proche de la fibration. C'est l'objet de notre travail.

Pour cette raison définissons d'abord une topologie sur l'espace des feuilletages de codimension 1 et de classe C^r qui nous permet de parler de la proximité entre deux feuilletages.

2.2 Topologie sur l'espace des feuilletages

Pour plus de détails pour la construction de la topologie sur l'espace des feuilletage voir [9]. Soit V une variété différentiable de dimension n , on désigne par $\mathcal{F}(V)$ l'ensemble des feuilletages de codimension 1 de classe C^r ($r \geq 2$) sur V . On note $\pi : G_{n-1}(V) \rightarrow V$ le fibré en grassmanniennes des hyperplans tangents à V . L'identification d'un feuilletage avec son champ d'hyperplans tangents permet de considérer $\mathcal{F}(V)$ comme un sous-ensemble de l'espace $\Gamma^{r-1}(\pi)$ des sections de classe C^{r-1} de π ; de sorte que si l'on munit cet espace des sections de la C^s -topologie faible de Whitney ($0 \leq s \leq r-1$), on obtient une topologie sur $\mathcal{F}(V)$ qui est à base dénombrable d'ouverts et métrisable. Dans toute la suite c'est cette topologie que nous considérons sur l'espace des feuilletages.

Définition 2.2.1. *Soient \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 deux feuilletages de classe C^r ($r \geq 0$) sur une variété M . On dit que \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sont C^r -conjugués s'il existe un difféomorphisme de classe C^r (un homéomorphisme si $r = 0$) qui envoie toute feuille de \mathcal{F}_0 sur une feuille de \mathcal{F}_1 . Si le difféomorphisme est C^r -isotope à l'identité, on dit que \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sont C^r -isotopes.*

Intuitivement, si \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sont C^0 -isotopes, il existe un chemin continu de feuilletages C^0 -conjugués d'origine \mathcal{F}_0 et d'extrémité \mathcal{F}_1 .

Définition 2.2.2. *Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux feuilletages sur V . On dit que \mathcal{F}_1 est une perturbation de \mathcal{F}_2 si tout voisinage de \mathcal{F}_2 pour la C^0 -topologie contient un feuilletage topologiquement conjugué à \mathcal{F}_1 .*

Exemple 2.2.1. *Fixons un feuilletage \mathcal{F} sur une variété M . S'il existe une famille continue à un paramètre réel t de feuilletages \mathcal{F}_t telle que : $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ et $\forall t > 0, \mathcal{F}_t$ est topologiquement conjugué à \mathcal{F}_1 , alors \mathcal{F}_1 est une perturbation de \mathcal{F} . En effet, par continuité de la famille de feuilletages \mathcal{F}_t , tout voisinage \mathcal{U} de \mathcal{F} pour la C^0 -topologie contient tous les \mathcal{F}_t pour t suffisamment petit.*

Remarque 2.2.1. [46] Soit \mathcal{F}_1 un feuilletage sur M . Alors il existe un voisinage \mathcal{U} de \mathcal{F}_1 pour la C^0 -topologie tel que le fibré tangent de tout feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ est homotope à celui de \mathcal{F}_1 .

Définition 2.2.3. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux feuilletages sur une variété riemannienne de dimension 3. On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont ε -coarse (resp. coarse) isotope au sens de Gabai si, à l'isotopie près de chacun des deux feuilletages, leurs plans tangents orientés se diffèrent d'un angle inférieur à ε (resp. π).

Remarquons que si un feuilletage \mathcal{F} est ε -coarse isotope au sens de Gabai à un feuilletage \mathcal{G} alors \mathcal{F} est une perturbation de \mathcal{G} .

2.3 Difféomorphismes et fibrés pseudo-Anosov

Dans cette section considère une surface fermée Σ de genre $g > 1$ et un difféomorphisme

$$\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma.$$

Définition 2.3.1. On appelle mesure transverse invariante une mesure μ définie sur chaque arc transverse au feuilletage et vérifiant la propriété suivante : soient $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ deux arcs transversaux au feuilletage, isotopes à travers des arcs transversaux dont les extrémités restent dans la même feuille, alors $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$. Lorsque la mesure de tout arc transverse non réduit à un point est strictement positive, nous dirons que μ est de support total et sans atome. Dans ce cas le feuilletage sera dit mesuré.

Définition 2.3.2. On dit qu'un feuilletage \mathcal{F} est mesuré s'il est muni, sur chaque arc compact transverse à \mathcal{F} , d'une mesure μ qui est équivalente à la mesure de Lebesgue sur un intervalle compact de \mathbb{R} ; cette mesure étant invariante par les applications d'holonomie locales i.e. les applications obtenues en déplaçant l'arc de telle sorte que chaque point reste sur la même feuille.

Autrement dit, si $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ sont deux arcs transverses à \mathcal{F} et homotopes par une homotopie h_t qui garde les points sur les mêmes feuilles, alors $h_t^*(\mu_\alpha) = \mu_\beta$ où μ_α et μ_β sont respectivement les mesures de Lebesgue sur α et β (voir la figure ci dessous).

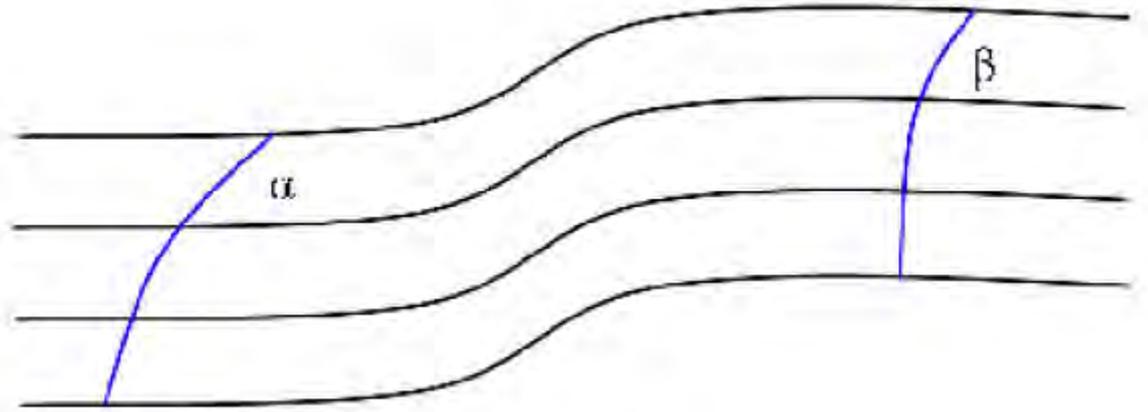


FIGURE 2.1 – Feuilletage mesuré

Définition 2.3.3. *Le difféomorphisme φ est dit pseudo-Anosov à quatre branches s'il existe deux feuilletages notés \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sur Σ vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont transversalement orientés et mesurés. \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont singuliers avec des singularités qui sont des selles à quatre séparatrices, ils ont le même ensemble singulier K et transverses sur $\Sigma - K$.
- (ii) Il existe une constante $\lambda > 1$ telle que

$$\varphi_*(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s)$$

et

$$\varphi_*(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u).$$

Les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont appelés respectivement *feuilletage stable* et *feuilletage instable* et sont préservés par φ . On suppose que les feuilletages stable et instable sont définis par des 1-formes fermées singulières ω^s et ω^u de classe C^∞ sauf aux singularités. Un difféomorphisme pseudo-Anosov à 4 branches est un difféomorphisme de classe C^∞ dans le complémentaire des singularités, mais il n'est pas de classe C^1 . Au voisinage de chaque singularité nous avons un modèle topologique canonique. La propriété *ii*) de la définition ci-dessus signifie que les feuilles qui ne sont pas des singularités du feuilletage stable d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sont dilatées et celles du feuilletage instable contractées. Les singularités du feuilletage stable et du feuilletage instable d'un difféomorphisme pseudo-Anosov à 4 branches sont sans liaison entre elles puisqu'une singularité serait alors contractée ou dilatée. En effet, cette condition implique l'existence d'une métrique riemannienne sur Σ singulière seulement au niveau des points singuliers communs à \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u telle que, pour tout segment I dans une feuille de \mathcal{F}^s (resp. de \mathcal{F}^u), on ait $\text{longueur}(\varphi(I)) \geq \lambda \times \text{longueur}(I)$ (resp. $\text{longueur}(\varphi(I)) \leq \lambda^{-1} \times \text{longueur}(I)$).

Une façon de construire un fibré pseudo-Anosov est la suivante : on part d'un difféomorphisme pseudo-Anosov $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ où Σ est une surface fermée de genre $g > 1$, on suspend

φ c'est-à-dire on considère le produit $\Sigma \times [0, 1]$ et on quotiente ce produit par la relation $(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$. La variété obtenue

$$V := \frac{\Sigma \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)}$$

est un Σ -fibré sur \mathbb{S}^1 dont φ est le difféomorphisme de monodromie.

Remarque 2.3.1. *A difféomorphisme près, V ne dépend que de la classe d'isotopie du difféomorphisme φ .*

En effet, le champ de vecteurs horizontal $\frac{\partial}{\partial t}$ de $\Sigma \times [0, 1]$ est invariant par l'action \sim et induit sur V un champ de vecteurs X transverse aux fibres de V . Si $(\varphi_t)_t$ est le flot de X , φ n'est rien d'autre que la restriction de φ_1 à Σ .

Nous présentons dans la suite deux méthodes de construction des fibrés en surfaces sur le cercle dont la monodromie est un difféomorphisme pseudo-Anosov.

2.3.1 Construction du difféomorphisme par revêtement ramifié

Soit Σ une surface fermée genre $g > 1$. Alors $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{T}^2$ est un revêtement ramifié à deux feuillettes avec un lieu de ramification $K = \{x_1, x_2, \dots, x_{2g-2}\}$ sur le tore \mathbb{T}^2 . En effet, perçons \mathbb{T}^2 en $n = 2g - 2$ trous, on obtient une variété ouverte dont le groupe fondamental admet $n + 1$ générateurs u_0, \dots, u_n .

Si $n = 0$, alors on sait que $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$. Supposons maintenant que $n > 0$, quitte à faire agir deux rotations, on peut supposer qu'aucun des x_1, \dots, x_n n'est sur le cercle $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ ni sur $\{1\} \times \mathbb{S}^1$.

Considérons le tore comme le quotient du carré par le recollement des côtés opposés. On note γ_n un lacet issu du sommet dans le carré, et dont la composante connexe du complémentaire dans le carré ne contenant pas le bord, contient exactement un des points $x_k, k = 2, \dots, n$. Alors l'espace topologique $\mathbb{T}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}$ se rétracte par déformation forte sur le bouquet de $n + 1$ cercles, qui est la réunion des deux lacets correspondant au bord du carré et des $n - 1$ lacets γ_n . Donc $\pi_1(\mathbb{T}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}) = *_{n+1}\mathbb{Z}$ est un groupe libre à $n + 1$ générateurs. On considère l'homomorphisme

$$p : \pi_1(\mathbb{T}^2 - K) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

qui envoie u_0, \dots, u_{n-2} sur 1 et u_{n-1}, u_n sur 0 ou 1 et on prend le revêtement associé à p . Prenons ensuite un difféomorphisme hyperbolique φ de \mathbb{T}^2 .

Par une isotopie de p , on peut placer K dans l'ensemble infini des points périodiques de φ et quitte à remplacer φ par une de ses puissances, on peut supposer que φ fixe les points de K .

Soient \mathcal{G}_0 et \mathcal{G}_1 le feuilletage stable et le feuilletage instable de φ . Le relevement de φ par p , donne un difféomorphisme ψ de Σ qui est alors un difféomorphisme pseudo-Anosov.

En effet, \mathcal{G}_0 et \mathcal{G}_1 se relèvent en deux feuilletages \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 orientables singuliers dont les singularités sont les lieux de ramification du revêtement. Les feuilletages \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sont invariants par φ .

Exemple 2.3.1. On considère ψ le difféomorphisme du tore \mathbb{T}^2 induit par la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des points fixes de ψ est :

$$\text{Fix}(\psi) = \left\{ [(0, 0)], \left[\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \right], \left[\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right) \right], \left[\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right) \right], \left[\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right] \right\}$$

Posons

$$T = \mathbb{T}^2 - \left\{ \left[\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \right], \left[\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right] \right\}$$

La variété ouverte T se rétracte sur un bouquet de trois cercles $\{\alpha, \beta, \varepsilon\}$ et le groupe fondamental $\pi_1(T)$ de T est donc le groupe libre engendré par α, β et ε où α et β sont générateurs de $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ et ε entoure le trou $\left[\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \right]$.

Soit

$$\mu : \pi_1 T \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

la représentation qui envoie α, β et ε sur 1 et $q : S \rightarrow T$ le revêtement de T correspondant à $\ker \mu$. On a $a : S = \Sigma_2 - \{x_1, x_2\}$ où Σ_2 est la surface fermée de genre 2.

La variété S est ouverte et difféomorphe à une surface fermée Σ_2 de genre 2 percée en deux points. On a $a : \pi_1(S) = \ker \mu$.

$\pi_1(S)$ est un groupe libre engendré par 5 éléments a, b, c, d, e .

Le revêtement de q s'étend en un revêtement ramifié $p : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dont le lieu de ramification est $\left\{ \left[\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \right], \left[\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right) \right] \right\}$.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Le relèvement φ de ψ dans Σ_2 est un difféomorphisme pseudo-Anosov.

Calculons maintenant l'action de φ en homologie. On a que $\pi_1(S)$ est un groupe libre à 5 générateurs a, b, c, d, e .

Choisissons comme système de générateurs de $\pi_1(S)$: $\{a = \alpha\varepsilon, b = \beta\varepsilon, c = \varepsilon\alpha, d = \varepsilon\beta, e = \varepsilon^2\}$.

L'action de ψ sur $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ est donnée par les relations suivantes

$$\psi_*\alpha = \alpha^5\beta^3$$

et

$$\psi_*\beta = \alpha^3\beta^2.$$

Si ψ_T est la restriction de ψ à T , pour connaître l'action de ψ_T sur $\pi_1(T)$, on représente respectivement les droites

$$D_1 : y = \frac{2}{3}x$$

et

$$D_2 : y = \frac{2}{5}x.$$

Le principe est de joindre les extrémités de D_1 et D_2 en utilisant α, β et le trou ε .

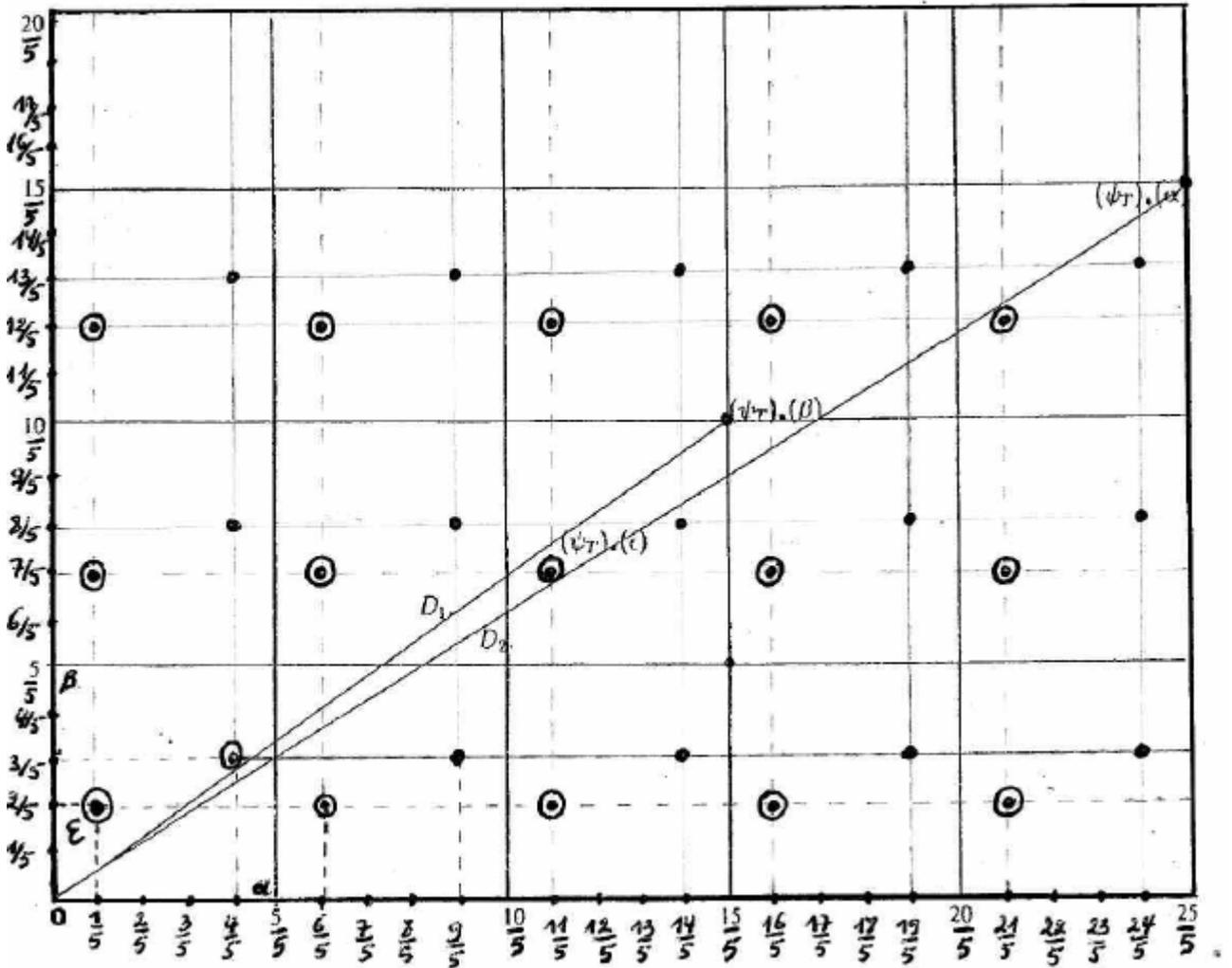


FIGURE 2.2 – Action de ψ_T sur $\pi_1(T)$

On a alors :

$$\begin{aligned} (\psi_T)_*\alpha &= \alpha\beta\alpha^2\beta\varepsilon\alpha\beta\alpha \\ (\psi_T)_*\beta &= \alpha\beta\alpha\beta\alpha \\ (\psi_T)_*\varepsilon &= \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon\alpha\beta\alpha \end{aligned}$$

On en déduit alors l'action de φ sur $\pi_1(\Sigma_2)$:

$$\varphi_*a = abac(ab)^2$$

$$\begin{aligned}\varphi_*b &= adcbc \\ \varphi_*c &= c^{-1}b^{-1}c^{-1}adacbcadcbc \\ \varphi_*d &= c^{-1}b^{-1}c^{-1}adac(bc)^2\end{aligned}$$

Avec $\alpha\beta = aed, \alpha^2 = aec, \beta\alpha = bec, \beta^2 = bed$.

L'abélianisée de cette action nous donne :

$$\begin{aligned}\varphi_*[a] &= 2[a] + 2[b] + 3[c] + [d] \\ \varphi_*[b] &= [a] + [b] + 2[c] + [d] \\ \varphi_*[c] &= 3[a] + [b] + 2[c] + 2[d] \\ \varphi_*[d] &= 2[a] + [b] + [c] + [d]\end{aligned}$$

Ainsi la matrice M induite par φ sur $H_1(\Sigma_2)$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après [29], on sait que le groupe fondamental $\pi_1(V)$ de la 3-variété suspension est engendré par $\pi_1(\Sigma)$ et un élément t avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi_*a &= tat^{-1} \\ \varphi_*b &= tbt^{-1} \\ \varphi_*c &= tct^{-1} \\ \varphi_*d &= tdt^{-1} \\ [a, b][c, d] &= 1\end{aligned}$$

Ainsi donc le difféomorphisme $\psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ se relève en un difféomorphisme $\varphi : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ et les feuilletages stable et instable en deux feuilletages singulieres dont les singularités sont les points de ramification du revêtement ; et donc φ est un difféomorphisme pseudo-Anosov dont ces deux feuilletages sont ses feuilletages invariants. On note par V_ψ^3 un tel fibré pseudo-Anosov.

D'après [18], on sait que la représentation d'holonomie ρ^1 de \mathcal{F}^1 est à valeurs dans le groupe affine de \mathbb{R} et est telle que : $\rho^1(\pi_1\Sigma) \subset \mathbb{R}$; $\rho^1(t) \in \mathbb{R}_+^*$, où t est l'élément de π_1V qui est un relèvement du générateur $1 \in \pi_1\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{Z}$ par une section de la fibration de V sur \mathbb{S}^1 .

La notion d'holonomie joue un rôle important dans l'étude des déformations des feuilletages. En effet, selon [45] le problème de déformation d'un feuilletage se ramène à une déformation de sa représentation d'holonomie. Par exemple dans [18], l'auteur montre un résultat de classification, à déformation près, des feuilletages sans feuille compacte transversalement projectifs sur V_ψ^3 . Plus précisément, il montre que le théorème suivant

Théorème 2.3.1. [18] *Tout feuilletage sans feuille compacte transversalement projectif sur V_ψ^3 suffisamment proche d'un modèle est conjugué à ce modèle.*

Pour démontrer ce théorème, il montre que l'espace de déformations de tels feuilletages est un espaces de dimension 5 ; ce qui correspondent aux deux modèles positifs, deux modèles négatifs, la fibration ainsi que leurs conjugués. Et récemment, H. Dathe et S. Adamou ont montré que le théorème reste vrai si on remplace le fait "d'être suffisamment proche d'un modèle" par "être dans la classe d'Euler de la fibration" [25].

2.3.2 Construction du difféomorphisme par twists de Dehn

Définition 2.3.4. Soit C une courbe fermée simple essentielle et orientée sur une surface fermée Σ . On considère un voisinage A de C dans Σ homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. On choisit les coordonnées $(\theta, s) \in \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ sur A telles que C soit la courbe d'équation $s = 1/2$ et θ soit croissant lorsqu'on parcourt Σ dans le sens de son orientation. Un twist de Dehn sur l'anneau A est l'application qui coïncide à l'identité sur $\Sigma - A$ et définie sur A par

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \\ (\theta, s) &\longmapsto (\exp(2i\pi s)\theta, s) \end{aligned}$$

C'est un difféomorphisme qui ne dépend pas du choix du voisinage A et des coordonnées (θ, s) .

En 1987, Dehn a montré que le groupe modulaire d'une surface de genre g est engendré par des twists de Dehn sur un nombre fini de courbes fermées simples et essentielles et quelques années plus tard Lickorish a prouvé que ce nombre est égal à $3g - 1$.

Théorème 2.3.2. [4] Soit $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un difféomorphisme de surface et $P(x)$ le polynôme caractéristique de l'application linéaire induite par h en homologie. Si $P(x)$ est irréductible sur \mathbb{Z} , n'est pas un polyôme en x^k , $k > 1$ et n'a pas de racines de l'unité alors h est isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov.

Proposition 2.3.1. Soit dans Σ , la surface fermée orientée de genre 2, les courbes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 comme indiqué dans la figure ci-dessous. Soit T_i les Twists de Dehn associés respectivement aux courbes C_i . Le difféomorphisme $\varphi = T_1 T_3 (T_5)^2 (T_2)^{-1} (T_4)^{-1}$ est pseudo-Anosov.

Démonstration. En effet, considérons le système générateur de $H_1(\Sigma)$ donné par les courbes dessinées ci-dessous :

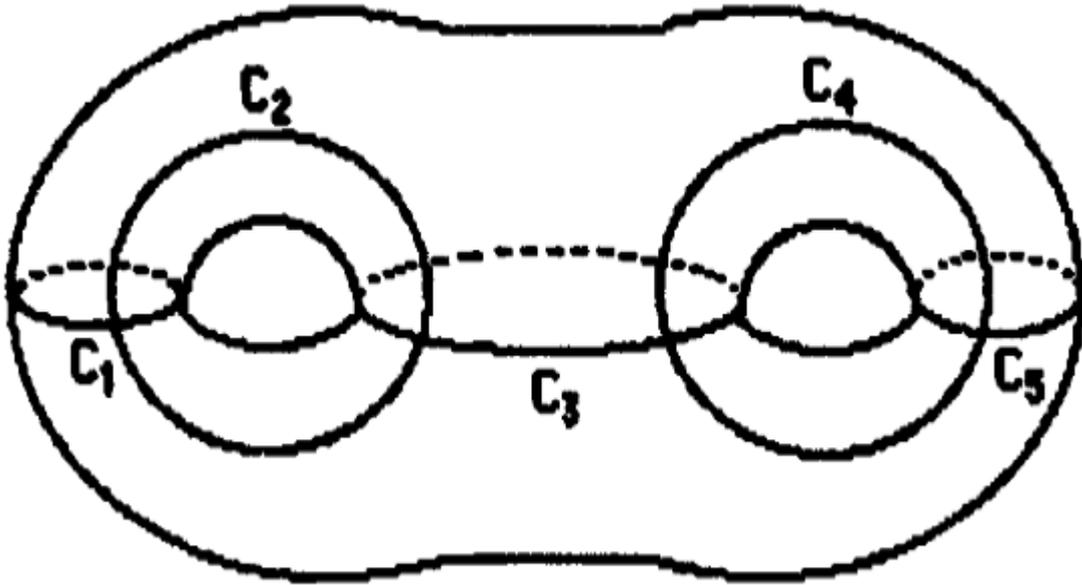


FIGURE 2.3 – Les courbes C_1, \dots, C_5 autour desquelles on effectue un Twist de Dehn

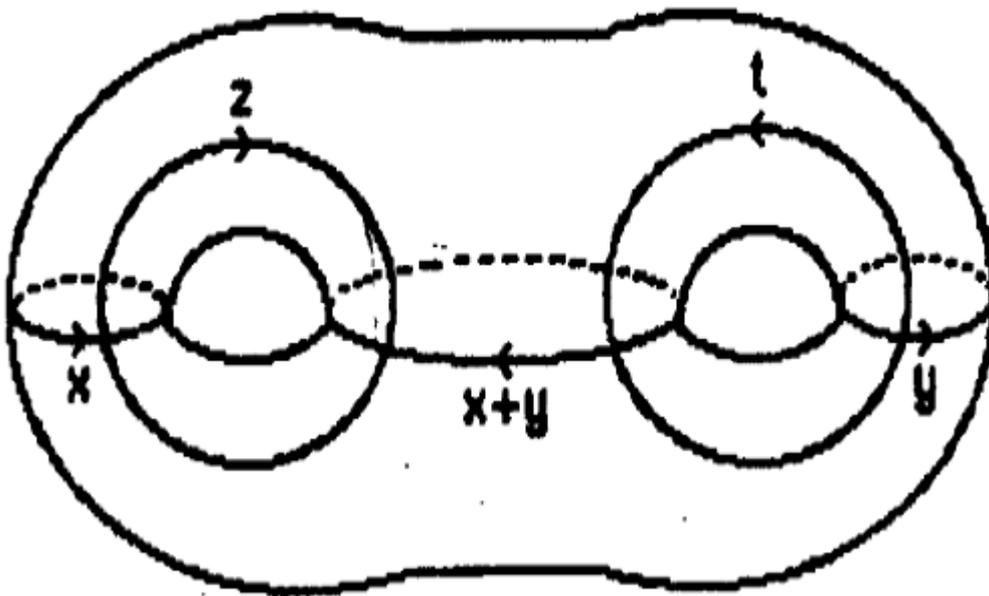


FIGURE 2.4 – Une base (x, y, z, t) de l'homologie de la surface Σ_2

Dans la base $\{x, y, z, t\}$ on a :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de l'isomorphisme φ_* induit par φ sur $H_1(\Sigma)$ dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de M est $P(t) = t^4 - 9t^3 + 21t^2 - 9t + 1$. Puisque $P(t)$ n'a pas 0 comme racine, on divise par t^2 et on pose $Z = t + \frac{1}{t}$ et on obtient un polynôme du second degré en Z $Q(Z) = Z^2 - 9Z + 19$ admettant comme racine $Z_1 = \frac{9-\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$. Le polynôme $P(t)$ a donc quatre racines réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et φ est hyperbolique. \square

De cette construction on en déduit le théorème suivant

Théorème 2.3.3. *Il existe un fibré pseudo-Anosov cyclique V qui porte un feuilletage tendu transversalement affine de même classe d'Euler que la fibration mais qui n'est conjugué ni à la fibration ni à un modèle de V .*

Démonstration. Soit V la suspension de φ . Soit λ le coefficient de dilatation de la monodromie φ de V . Soit ω une 1-forme fermée de type-selle dont la classe de cohomologie est un vecteur propre de φ_* de valeur propre μ distincte de λ et $1/\lambda$, il existe (voir [18]) sur V un feuilletage tendu transversalement affine \mathcal{F}_ω dans la classe d'Euler de la fibration et qui n'est conjugué ni à un modèle ni à la fibration. \square

2.3.3 Difféomorphismes et Fibrés hyperboliques

Dans toute cette section Σ désigne une surface fermée orientée de genre $g > 1$.

Définition 2.3.5. *Soit $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un difféomorphisme et $\varphi_* : H_1(\Sigma, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\Sigma, \mathbb{R})$ l'isomorphisme induit par φ en homologie. On dit que φ est hyperbolique si pour tout $n > 0$, le sous-espace $Fix(\varphi_*^n)$ des points fixés par $(\varphi)_*^n$ est trivial.*

La notion de difféomorphisme pseudo-Anosov est une généralisation naturelle de la notion de difféomorphisme d'Anosov linéaire du tore. De manière générale on peut dire qu'un difféomorphisme pseudo-Anosov est un difféomorphisme d'Anosov où on autorise les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u à avoir des singularités. Donnons la définition de ce qu'est un feuilletage singulier.

Définition 2.3.6. *Un feuilletage singulier \mathcal{F} sur une surface Σ est une partition de Σ en sous-ensembles que l'on appelle feuilles avec les propriétés suivantes : il existe un ensemble fini $K = Sing(\mathcal{F}) \subset \Sigma$ tel que*

1. *tout point $x \in \Sigma - K$ admet un voisinage U et une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui envoie $\mathcal{F} \cap U$ sur une partition $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$ en segments horizontaux ;*
2. *tout point de K admet un voisinage U avec une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui envoie $\mathcal{F} \cap U$ sur un voisinage d'une singularité à k séparatrices pour un certain $k \geq 3$.*

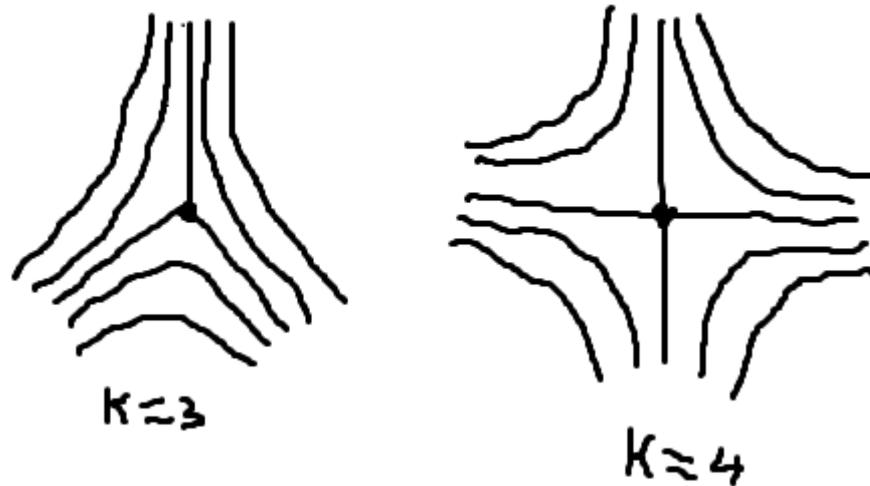


FIGURE 2.5 – Voisinages des points singuliers

Pour nous un *feuilletage singulier* sur Σ est un feuilletage de codimension 1 singulier dont les singularités sont des selles à 4 branches et sans liaison entre elles. Les feuilletages singuliers possèdent deux types de feuilles : les feuilles régulières L vérifiant $L \cap K = \emptyset$ et les feuilles singulières pour lesquelles $L \cap K \neq \emptyset$. Un feuilletage mesuré sur Σ sera un feuilletage (éventuellement singulier) muni d'une mesure transverse invariante par l'holonomie et de support égal à Σ .

Remarquons d'après [17] qu'un feuilletage mesuré est transversalement orienté si et seulement si il est défini par une 1-forme différentielle fermée.

Deux feuilletages mesurés seront dits *transverses* s'ils possèdent le même ensemble singulier K , ils sont transverses sur $\Sigma - K$ et au voisinage de chaque point de K on impose le modèle local suivant :

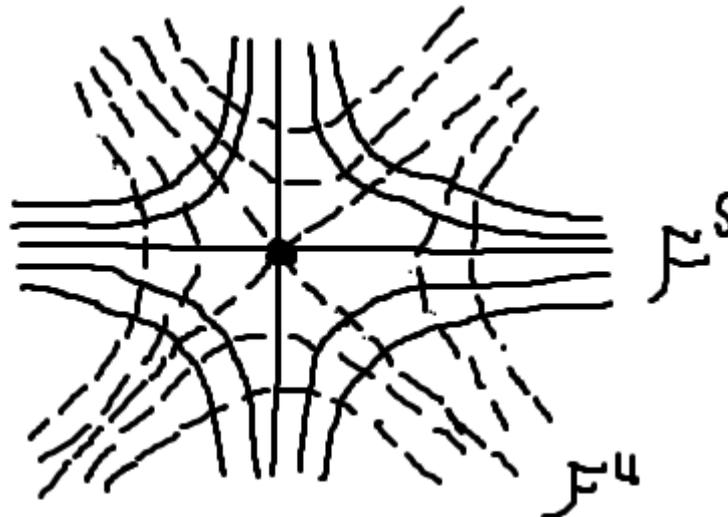


FIGURE 2.6 – Feuilletages mesurés transverses au voisinage d'une selle

Le difféomorphisme φ sera dit *périodique* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $\varphi^n = Id$. On dira que φ est *réductible* s'il existe une famille finie de courbes simples $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ de Σ non homotopes à 0 et non homotopes entre elles qui sont échangées par φ .

Lorsque les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont orientés on dit que φ est un *difféomorphisme pseudo-Anosov orienté*. Dans ce cas les feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont définis par des 1-formes fermées.

Ainsi un difféomorphisme pseudo-Anosov orienté est la donnée d'un difféomorphisme $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$, de deux formes fermées ω^s, ω^u et d'une constante $\lambda > 1$ vérifiant :

- i) ω^s et ω^u ont le même ensemble singulier K formé de points isolés (donc en nombre fini), elles sont de classe C^∞ sur $\Sigma - K$ et au voisinage de chaque point de K , il existe un ouvert U dans lequel on a : $\omega = \omega_0 = xdx - ydy$
- ii) ω^s et ω^u sont transverses l'une à l'autre, i.e $(\omega^s \wedge \omega^u)_x \neq 0$ pour tout $x \in \Sigma - K$
- iii) $\varphi^* \omega^s = \frac{1}{\lambda} \omega^s$ et $\varphi^* \omega^u = \lambda \omega^u$.

Les singularités de type-centre sont celles qui sont localement définies par la 1-forme $\omega' = xdx + ydy$.

Les formes ω^s et ω^u sont appelées les *formes caractéristiques* de φ .

Proposition 2.3.2. *Les feuilletages définis par les formes caractéristiques d'un difféomorphisme pseudo-Anosov orienté φ ont toutes leurs feuilles régulières denses.*

Démonstration. En effet, soient \mathcal{F}_{ω^s} et \mathcal{F}_{ω^u} les feuilletages associés aux formes caractéristiques de φ . Les feuilletages \mathcal{F}_{ω^s} et \mathcal{F}_{ω^u} sont sans feuille compacte car s'il y a une feuille compacte γ celle-ci n'est pas homotope à 0 vu la nature des singularités. Comme Σ possède

à homotopie près un nombre fini de feuilles compactes (voir [1]) et est invariant par φ , il existe $n > 0$ tel que $\varphi^n[\gamma] = [\gamma]$, ce qui est impossible pour un difféomorphisme pseudo-Anosov. D'autre part, il n'existe pas de liaison entre les singularités puisqu'une liaison devrait être contractée ou dilatée, ce qui est impossible. En définitive, \mathcal{F}_{ω^s} et \mathcal{F}_{ω^u} sont sans cycle de feuilles (i.e un ensemble homéomorphe à \mathbb{S}^1 qui est réunion de singularités et de séparatrices). Comme ce sont des feuilletages mesurés, d'après [17], les feuilles régulières non compactes sont denses, donc \mathcal{F}_{ω^s} et \mathcal{F}_{ω^u} sont à feuilles régulières denses. \square

Rappelons le théorème suivant :

Théorème 2.3.4. [3] Soit φ un difféomorphisme de Σ . Alors φ est isotope à un difféomorphisme qui est soit périodique, soit réductible ou pseudo-Anosov.

Proposition 2.3.3. Soit φ un difféomorphisme hyperbolique de Σ alors φ est pseudo-Anosov.

Démonstration. Si φ est périodique, il existe $n > 0$ tel que $\varphi^n = Id$ et le sous-espace des points fixes par φ_* est $H_1(\Sigma)$, donc φ n'est pas hyperbolique.

Supposons maintenant que φ est réductible, soit alors $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ une famille finie de courbes fermées simples non homotopes à 0 et non homotopes entre elles et qui sont échangées par φ . On distingue deux cas :

- Un des γ_i , soit γ_1 par exemple est non séparante, il existe alors $n > 0$ tel que $\varphi_*^n[\gamma_1] = [\gamma_1]$ et comme $[\gamma_1] \neq 0$, φ n'est pas hyperbolique.

- Tous les γ_i sont séparantes, soit $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ les composantes connexes de Σ coupé le long des γ_i . On a $\partial(\Sigma_i) = \gamma_i$. On peut supposer que $\varphi^{n-1}(\Sigma_1) \neq \Sigma_1$ et $\varphi^n(\Sigma_1) = \Sigma_1$ et φ^n n'est pas un difféomorphisme d'Anosov sur Σ_1 qui est une surface compacte de genre 1. Ainsi $Fix(\varphi_*^n) \neq 0$, i.e que φ n'est pas hyperbolique. Ce qui prouve la proposition. \square

Lorsque le feuilletage stable et le feuilletage instable d'un difféomorphisme hyperbolique φ est orienté, on dit que φ est un difféomorphisme *hyperbolique orienté*.

Proposition 2.3.4. Si \mathcal{F} est un feuilletage mesuré orientable sur Σ qui est invariant par un pseudo-Anosov orienté φ (i.e $\varphi_*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$), alors \mathcal{F} est isotope à l'un des feuilletages définis par les formes caractéristiques de φ .

Démonstration. Soit $\lambda > 1$ le coefficient de φ et \mathcal{F}_{ω^s} et \mathcal{F}_{ω^u} les feuilletages associés aux formes caractéristiques de φ . Soit ω la 1-forme définissant \mathcal{F} , si ω est non proportionnelle à ω^u , on sait ([3], exposé 5) que $\lambda^{-n}\varphi^n(\mathcal{F})$ converge dans l'espace des feuilletages mesurés vers $i(\mathcal{F}, \mathcal{F}_{\omega^u}) \cdot \mathcal{F}_{\omega^s}$, où $i(\mathcal{F}, \mathcal{F}_{\omega^u})$ est le nombre d'intersections de \mathcal{F} et \mathcal{F}_{ω^u} et "." la multiplication scalaire définie comme suit : si $r > 0$, $r \cdot (\mathcal{F}, \mu) = (\mathcal{F}, r\mu)$. Ceci entraîne que $\mathcal{F}_{\omega^s} = 0$, ce qui est absurde. Donc ω est proportionnel à ω^u . \square

Définition 2.3.7. Soit V un Σ -fibré sur \mathbb{S}^1 , on dit que V est hyperbolique si la monodromie $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ est un difféomorphisme hyperbolique.

Proposition 2.3.5. Soit V un Σ -fibré sur \mathbb{S}^1 hyperbolique, alors $b_1(V) = b_2(V) = 1$.

Démonstration. Par dualité on a $b_1(V) = b_2(V)$. D'autre part $\pi_1(V)$ est engendré par $\pi_1(\Sigma)$ et un élément t tel que $\forall a \in \pi_1(\Sigma)$, $\varphi_*a = tat^{-1}$. Ainsi $H_1(V)$ est engendré par t et des éléments t_1, t_2, \dots, t_n invariants par φ_* (i.e $\varphi_*t_i = t_i$). Comme V est hyperbolique $Fix(\varphi_*) = 0$, i.e $t_i = 0$ et alors $dimH_1(V) = 1$. \square

2.4 Feuilletages modèles sur les fibrés en surfaces

Cette partie est consacré à l'étude des feuilletages tendus sur des 3-variétés fermées fibrées en surfaces fermées de genre $g > 1$ sur le cercle \mathbb{S}^1 . Considérons d'abord le cas où la fibre est un tore \mathbb{T}^2 . Dans ce cas la monodromie φ est un difféomorphisme d'Anosov du tore \mathbb{T}^2 induit par une matrice hyperbolique A de \mathbb{R}^2 . La matrice A possède alors deux valeurs propres réelles distinctes λ et $1/\lambda$. Les feuilletages de \mathbb{R}^2 par droites de pente λ et $1/\lambda$ sont invariants par l'action de \mathbb{Z}^2 et induisent alors sur \mathbb{T}^2 deux feuilletages invariants par φ . En suspendant ces feuilletages sur la 3-variété \mathbb{T}_φ^3 obtenue par suspension de φ , on obtient deux feuilletages minimaux sur \mathbb{T}_φ^3 qu'on appelle les *modèles*. Ce sont des feuilletages réguliers sans feuille compacte, transversalement orientables et transversalement affines.

2.4.1 Feuilletages modèles sur les fibrés hyperbolique de genre 1

Soit A une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$. On dit que A est hyperbolique si $Tr(A) > 2$. Dans ce cas A admet deux valeurs propres réelles $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$. Soit $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un difféomorphisme et $\varphi_* H_1 \mathbb{T}^2 \rightarrow H_1 \mathbb{T}^2$ le morphisme induit en homologie. On note $A(\varphi)$ la matrice de φ_* . On dit que φ est hyperbolique si $A(\varphi)$ est hyperbolique.

Définition 2.4.1. *Une 3-variété M sera dite fibré hyperbolique fermé de genre 1 lorsque M est fibrée en tores \mathbb{T}^2 sur le cercle \mathbb{S}^1 avec une monodromie isotope à un difféomorphisme hyperbolique.*

Un fibré hyperbolique de genre 1 est obtenu par suspension d'un difféomorphisme hyperbolique φ de \mathbb{T}^2 . Ainsi donc $T_\varphi^3 := \mathbb{T}^2 \times [0, 1]/(x, 0) \sim (x, 1)$. Sur de tels fibré, E. Ghys et V. Sergiescu ont construits deux feuilletages minimaux transversalement affines appelés de *feuilletages modèles*. Ils procèdent comme suit : on considère sur \mathbb{R}^2 les deux feuilletages donnés par les directions propres de φ_* . Ces feuilletages sont invariants par l'action par translation entière de \mathbb{Z}^2 sur \mathbb{R}^2 et induisent donc sur \mathbb{T}^2 deux feuilletages minimaux notés \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 et qui sont préservés par φ . On prend ensuite les feuilletages produits $\mathcal{F}_1 \times [0, 1]$ et $\mathcal{F}_2 \times [0, 1]$ et on identifie les deux composantes du bord par φ . On obtient alors sur T_φ^3 deux feuilletages minimaux \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 transversalement affines. En effet, soit $\lambda_i, i = 1, 2$ la valeur propre de A et on note y la deuxième coordonnée propre. La forme $\omega_i = \lambda_i^t dy$ sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ est non singulière et intégrable. Elle définit donc sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ un feuilletage de codimension 1 invariant par φ et passe donc au quotient T_φ^3 en un feuilletage de codimension 1 qu'on appelle feuilletage modèle.

Les auteurs ont montré que tous les feuilletages sans feuille compacte sur des fibrés hyperboliques de genre 1 ressemblent à ces feuilletages ainsi construits. Plus précisément, ils montrent le théorème suivant :

Théorème 2.4.1. *([13]) Tout feuilletage de codimension 1, de classe C^r , $r \geq 2$ et sans feuille compacte sur \mathbb{T}_φ^3 est C^{r-2} -conjugué à l'un des modèles.*

Pour la preuve ils utilisent la procédure inverse à celle de la construction des feuilletages modèles : on coupe le fibré T_φ^3 le long d'une fibre transverse au feuilletage et on montre que le feuilletage obtenu sur $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ est un feuilletage produit. Ils ont également démontré que les feuilletages modèles ainsi construits sont structurellement stables. Autrement dit ils ont démontré théorème suivant

Théorème 2.4.2. [13] *Sur les fibrés hyperboliques de genre 1 de dimension 3 tout feuilletage de codimension 1 suffisamment proche d'un feuilletage modèle est conjugué à ce modèle.*

Il est donc naturel de penser à étendre ces résultats aux fibrés en surfaces de genre quelconque sur le cercle; mais cette généralisation semble impossible dans certains cas. L'une des obstructions est la classe d'Euler des feuilletages définis sur de tels fibrés qui n'est pas nécessairement égale à celle de la fibration.

Introduisons d'abord cette notion de classe d'Euler d'un feuilletage tendu qui est importante car renferme beaucoup d'informations topologiques, géométriques et dynamiques d'un feuilletage.

2.4.2 Classe d'Euler d'un feuilletage tendu

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 transversalement orienté sur une variété V . On dit que \mathcal{F} est *transversalement affine* s'il est défini par une 1-forme α tel que $d\alpha = \alpha \wedge \beta$, où β est une 1-forme vérifiant $d\beta = 0$. Le feuilletage \mathcal{F} est dit *tendu* s'il possède une transversalement fermée qui coupe toutes ses feuilles. En particulier si \mathcal{F} ne possède pas de feuille compacte, il est tendu. Si par contre \mathcal{F} possède une composante de Reeb, il n'est pas tendu.

Considérons V une 3-variété fermée fibrée sur \mathbb{S}^1 et hyperbolique. Si \mathcal{F} est un feuilletage transversalement orienté de codimension 1 sur V , on appelle *classe d'Euler* de \mathcal{F} , la classe d'Euler habituelle du fibré tangent $T\mathcal{F}$ à \mathcal{F} considéré comme fibré vectoriel orienté de rang 2. La classe d'Euler $\chi(T\mathcal{F})$ est un élément de $H^2(V, \mathbb{R})$ qui est isomorphe à \mathbb{R} pour les fibrés hyperboliques. Or la classe d'homologie $[\Sigma]$ de toute fibre Σ de V est un générateur de $H_2(V, \mathbb{R})$, donc $\chi(T\mathcal{F})$ est déterminé par sa valeur sur $[\Sigma]$, cette valeur est appelée *nombre d'Euler* de \mathcal{F} et sera notée $E(\mathcal{F})$ dans toute la suite.

Calcul de $e(\mathcal{F})$ pour un feuilletage tendu \mathcal{F} : On suppose \mathcal{F} un feuilletage tendu de codimension 1 sur une 3-variété V fermée fibrée sur \mathbb{S}^1 et cyclique. Soit Σ une fibre de V , on sait d'après ([38]) que Σ est isotope à une surface fermée qu'on note encore Σ qui est transverse à \mathcal{F} sauf en un nombre fini de points qui sont des singularités de type selle à 4 branches pour \mathcal{F} (on dira que Σ est en *position optimale* par rapport à \mathcal{F}). Une singularité s sera dite positive (resp. négative) si l'orientation du fibré tangent $T\mathcal{F}$ à \mathcal{F} en s est la même (resp. opposée) que celle du fibré tangent à la fibration en s . Notons I_p la somme des indices des singularités positives et I_n la somme des indices des singularités négatives. D'après ([46]), on a :

$$I_p - I_n = e(T\mathcal{F}) \quad (1)$$

$$I_p + I_n = \chi(\Sigma) \quad (2),$$

où $\chi(\Sigma)$ est la caractéristique d'Euler Poincaré de Σ .

2.4.3 Les feuilletages modèles sur les fibrés en surfaces de genre $g > 1$

Supposons maintenant que la fibre est une surface fermée de genre ≥ 2 . D'après la proposition 2.3.3, la monodromie φ est un pseudo-Anosov, nous supposons en plus qu'il est orienté et notons ω^+ et ω^- les 1-formes caractéristiques de φ et λ le coefficient de dilatation. Nous construisons les feuilletages modèles sur V en utilisant la méthode de Ghys-Thurston qui consiste à la suspension par φ des feuilletages stable et instable de Σ suivie de la désingularisation. Sur $\Sigma \times I$, on considère la 1-forme $\Omega^\sigma = \lambda^{\varepsilon(\sigma)t} \omega^\sigma \pm dt$, où $\varepsilon(\sigma) = 1$ si $\sigma = s$ et $\varepsilon(\sigma) = -1$ si $\sigma = u$. La forme Ω^σ est intégrable et est invariante par l'action $(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$; elle définit quatre feuilletages \mathcal{H}^σ sur $V = \Sigma \times I / \sim$. Ce sont des feuilletages singuliers minimaux, transversalement affines et ayant un nombre fini de cercles de contact $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ avec la fibration de V sur \mathbb{S}^1 . Chaque cercle γ_i possède un voisinage tubulaire V_i difféomorphe à $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ feuilleté comme dans la figure ci-dessous, tel que ∂V_i est transverse à \mathcal{H}^σ et $\mathcal{H}^\sigma|_{\partial V_i}$ est le feuilletage \mathcal{F}_k du tore \mathbb{T}^2 décrit dans le paragraphe ci-dessus pour $k = \text{Log} \lambda$.

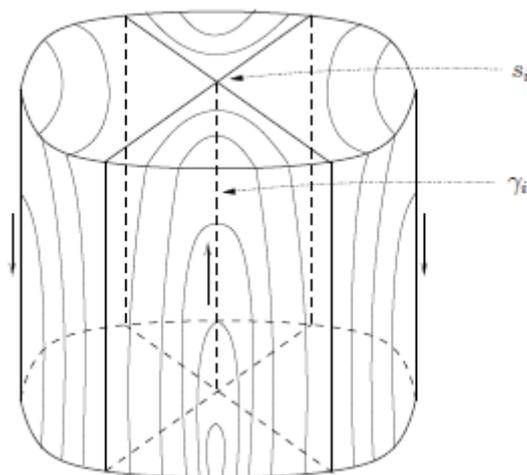


FIGURE 2.7 – Voisinage tubulaire V_i .

On note \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^- les feuilletages définis respectivement par les 1-formes $\Omega^+ = \lambda^t \omega^+ \pm dt$ et $\Omega^- = \lambda^{-t} \omega^- \pm dt$. Nous allons construire deux feuilletages sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ transverses au bord $\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)$ qui vont nous servir de chirurgie des feuilletages modèles de V .

2.4.4 Feuilletages élémentaires sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$

Un feuilletage sans singularité sur \mathbb{T}^2 .

Sur $\mathbb{S}^1 = [0, 2]/0 \sim 2$ on considère une fonction f différentiable définie par

$$\begin{aligned} f : [0, 2]/\sim &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = -\cos 2\pi x \end{aligned}$$

On pose $T = f^{-1}(0) = \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\}$ et on considère sur \mathbb{T}^2 , le feuilletage \mathcal{F}_k défini par la 1-forme $\omega_k = df + kfdz$, où (x, z) sont les coordonnées sur \mathbb{R}^2 et 0 est une valeur régulière de f ; avec $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et $k \in \mathbb{R}$. Les composantes connexes de $T \times \mathbb{S}^1$ sont les seules feuilles compactes de \mathcal{F}_k et ont de l'holonomie.

Proposition 2.4.1. *Les feuilletages \mathcal{F}_k sont transversalement affines et ont de l'holonomie.*

Démonstration. En effet, $d\omega_k = kdf \wedge dz = df \wedge kdz$ et $\omega_k \wedge kdz = df \wedge kdz$. De plus, en posant $\alpha_k = kdz$ on remarque que α_k est fermée. D'où $\omega_k = d\omega_k \wedge \alpha_k$ avec α_k une 1-forme fermée; donc \mathcal{F}_k est transversalement affine pour tout k réel. \square

Ainsi donc, comme \mathcal{F}_k est transversalement affine l'holonomie est donnée par l'holonomie linéaire $\int_0^2 kdz = 2k \neq 0$. Les feuilles compactes ont de l'holonomie et celles qui sont non compactes s'enroulent vers ces feuilles compactes. Sur l'ouvert $U = \mathbb{T}^2 - (T \times \mathbb{S}^1)$, \mathcal{F}_k peut être défini par une 1-forme fermée non singulière $\beta_k = \frac{df}{f} + kdz$. Comme β_k est de rang 1 toutes les feuilles de $(\mathcal{F}_k)|_U$ sont denses dans U . Donc \mathcal{F}_k est un feuilletage de \mathbb{T}^2 avec quatre composantes de Reeb planes. \mathcal{F}_k est une famille à un paramètre réel k de feuilletages transversalement affines avec holonomie de \mathbb{T}^2 .

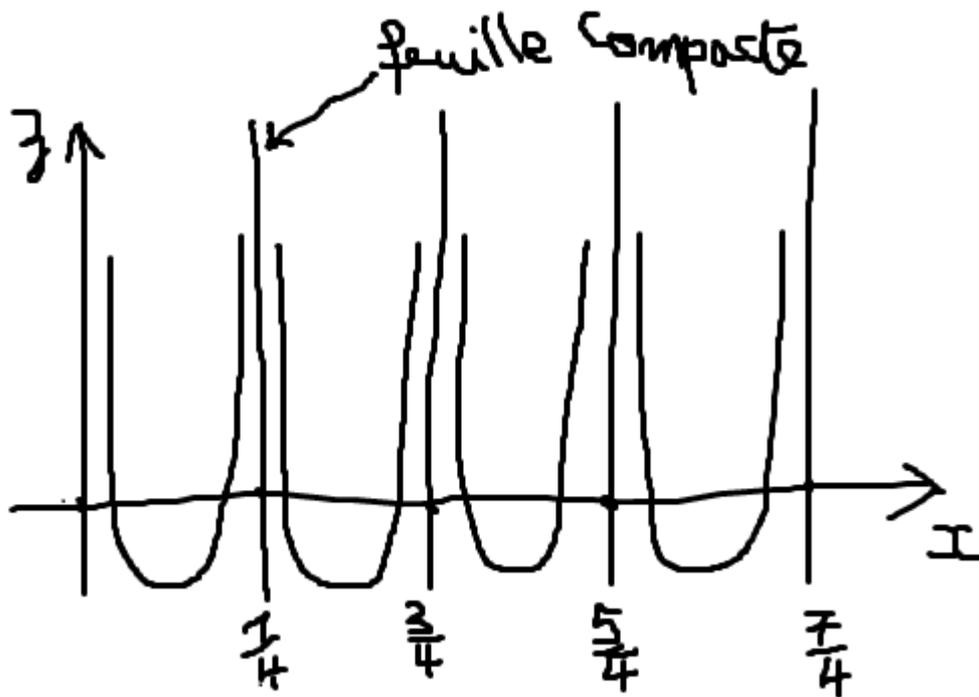


FIGURE 2.8 – Quatre composantes de Reeb planes

Une famille de feuilletages réguliers sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Soit $\omega_0 = xdx - ydy$ la 1-forme de type selle sur \mathbb{R}^2 et on considère sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ la 1-forme $\tilde{\Omega}_\lambda = \lambda^z \omega_0 + dz$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$. C'est une 1-forme non singulière vérifiant : $d\tilde{\Omega}_\lambda = \tilde{\alpha}_\lambda \wedge \tilde{\Omega}_\lambda$

avec $\tilde{\alpha}_\lambda = (\text{Log}\lambda)dz$. Alors $\tilde{\Omega}_\lambda$ définit un feuilletage transversalement affine sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} h_\lambda : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, z) &\longmapsto (\lambda u, z + 1) \end{aligned}$$

Le quotient par l'action engendrée par h_λ donne un revêtement cyclique $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Le couple $(\tilde{\Omega}_\lambda, \tilde{\alpha}_\lambda)$ est invariant par cette action et passe donc au quotient en un couple $(\Omega_\lambda, \alpha_\lambda)$ qui définit un feuilletage régulier $\mathcal{F}_{\Omega_\lambda}$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Proposition 2.4.2. *Fixons $\mathcal{F}_{\Omega_\lambda}$ comme ci-dessus.*

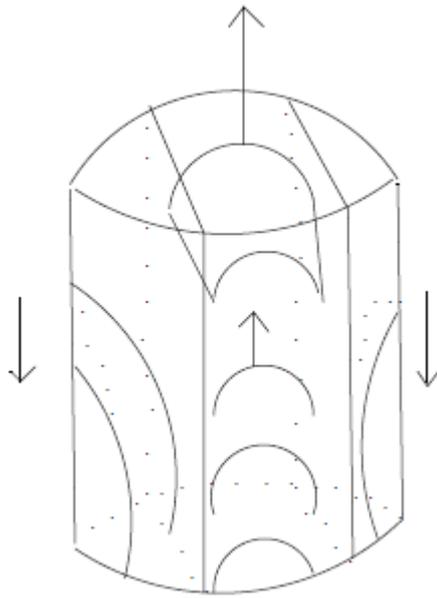
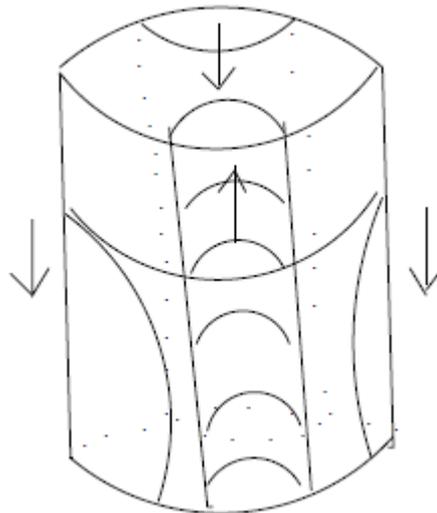
a) *Il existe un voisinage $M \subset V$ de $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ difféomorphe à $D^2 \times \mathbb{S}^1$ tel que le bord ∂M de M est transverse à $\mathcal{F}_{\Omega_\lambda}$.*

b) *Pour tout M vérifiant a), la trace de $\mathcal{F}_{\Omega_\lambda}$ sur $\partial M \simeq \mathbb{T}^2$ est difféomorphe au feuilletage \mathcal{F}_k de \mathbb{T}^2 pour $k = \text{Log}\lambda$.*

Démonstration. Soit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et σ_4 les séparatrices de la singularité selle 0 de ω_0 . Les feuilles $\sigma_i \times \mathbb{S}^1$ de $\mathcal{F}_{\Omega_\lambda}$ ont toutes l'holonomie. On peut donc trouver un voisinage tubulaire $M \subset V$ de $0 \times \mathbb{S}^1$ tel que $\partial M \simeq \mathbb{T}^2$ soit transverse à $\mathcal{F}_{\Omega_\lambda}$. L'holonomie des feuilles $\sigma_i \times \mathbb{S}^1$ est déterminée par l'holonomie linéaire $-\text{Log}\lambda dz$. Donc $(\mathcal{F}_{\Omega_\lambda})|_{\partial M}$ est un feuilletage du tore \mathbb{T}^2 avec quatre feuilles compactes circulaires ayant de l'holonomie (de coefficient $\text{Log}\lambda$). Les autres feuilles sont non compactes et spiralent sur les quatre feuilles compactes pour donner un feuilletage de \mathbb{T}^2 avec quatre composantes de Reeb planes et dont les feuilles compactes ont pour coefficient d'holonomie $\text{Log}\lambda$; $(\mathcal{F}_{\Omega_\lambda})|_{\partial M}$ est alors un feuilletage du type \mathcal{F}_{α_k} pour $k = \text{Log}\lambda$. \square

2.4.5 Désingularisation

Passons maintenant à la désingularisation : soit S l'ensemble (fini) singulier commun à ω^+ et ω^- . Nous avons construit deux feuilletages sur $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ qui vont permettre de compléter par chirurgie les feuilletages \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^- sur toute la variété V . Sur $(\Sigma - S) \times \mathbb{R}$, les 1-formes $\Omega_1^+ = \lambda^t \omega^+ + dt$ et $\Omega_2^+ = \lambda^t \omega^+ - dt$ définissent deux feuilletages non singuliers \mathcal{V}_1^+ et \mathcal{V}_2^+ sur $V - S'$ qui ont respectivement pour classe d'Euler $\chi(T\pi)$ et $-\chi(T\pi)$. Chaque cercle γ_i de S' possède un voisinage W_i dont le bord est transverse à \mathcal{V}_i ($i = 1, 2$). On découpe alors les V_i et on les remplace par les W_i .


 FIGURE 2.9 – Voisinage tubulaire (W_i, \mathcal{V}_1) .

 FIGURE 2.10 – Voisinage tubulaire (W_i, \mathcal{V}_2) .

Lorsque l'orientation transverse de $\mathcal{H}_{|\partial V_i}^+$ est la même que l'orientation de γ_i , on remplace V_i par W_i muni de \mathcal{V}_1 , sinon V_i est remplacé par W_i muni de \mathcal{V}_2 . On obtient ainsi deux feuilletages réguliers \mathcal{F}_+^1 et \mathcal{F}_+^2 transversalement affines sans feuille compacte sur V dont l'un est dans la même classe d'Euler de la fibration et l'autre dans la classe opposée. De même \mathcal{H}^- donne deux feuilletages réguliers \mathcal{F}_-^1 et \mathcal{F}_-^2 transversalement affines et minimaux de même (resp. opposée) classe d'Euler.

En effet, si on considère une fibre en position optimale par rapport au feuilletage \mathcal{F}^σ , l'orientation transverse du feuilletage \mathcal{F}^σ est donnée par l'orientation positive des formes

Ω_σ . Une singularité s est dite positive si l'orientation du fibré tangent $T\mathcal{F}^\sigma$ de \mathcal{F}^σ est la même que celle de l'espace tangent à la fibre en s et négative si elles sont opposées. Donc les singularités sont soit toutes positives ou toutes négatives. Si les singularités sont toutes positives les deux classes d'Euler sont les mêmes et opposées sinon. Les modèles qui ont la même classe d'Euler que la fibration sont dits modèles positifs tandis que ceux qui ont la classe d'Euler opposé à celle de la fibration sont dits modèles négatifs. D'après les formules (1) et (2), le nombre d'Euler de \mathcal{F}_+^i et \mathcal{F}_-^i est un entier relatif pair n tel que $|n| \leq -\chi(\Sigma)$.

Proposition 2.4.3. *Les feuilletages modèles sur les 3-variétés fibrées en surfaces fermées de genre $g > 1$ sur le cercle \mathbb{S}^1 sont transversalement affines.*

Démonstration. Soit $\Omega^\sigma = \lambda^{\epsilon(\sigma)t}\omega^\sigma \pm dt$ la 1-forme définissant les feuilletages modèles. Posons $\Omega_1^\sigma = -\epsilon(\sigma)\text{Log}\lambda dt$, on a $d\Omega^\sigma = \Omega^\sigma \wedge \Omega_1^\sigma$ et $d\Omega_1^\sigma = 0$ \square

En appliquant la technique de désingularisation ci-dessus et le théorème de Matsumoto [27], on montre le

Théorème 2.4.3. *Soit V une 3-variété fermée fibrée sur le cercle \mathbb{S}^1 avec une monodromie pseudo-Anosov. Si les fibres de V sont de genre g , il existe au moins $4g - 2$ classes d'isotopie de feuilletages transversalement affines tendus sur V .*

Démonstration. En effet, pour tout entier $|k| \leq -\chi(\Sigma)/2$, il existe un feuilletage tendu transversalement affine \mathcal{F}_k dont le nombre d'Euler est $2k$ puisqu'il suffit de supposer que Ω^+ et Ω^- possèdent $(n - \chi(\Sigma))$ singularités positives et $(-n - \chi(\Sigma))$ singularités négatives puis d'appliquer la construction précédente. \square

2.5 Feuilletages tendus et structures de contact tendues

Le résultat de cette partie est motivé par le théorème de Gabai. En effet, dans [10] Gabai démontre que si V est une 3-variété fermée atoroidale, il existe un entier $N(V) > 0$ tel que pour tout feuilletage tendu \mathcal{F} , on peut construire $N(V)$ feuilletage tendus sur V tels que l'un au moins soit une perturbation de \mathcal{F} . Comme le feuilletage dont les feuilles sont les fibres de la fibration est tendu, on se demande si tous les feuilletages tendus ne proviennent pas de la fibration par de petites perturbations? Dans cette section nous supposons qu'en plus des hypothèses ci-dessus que la variété V est une 3-variété qui fibre sur le cercle avec une fibration π et atoroidale. On s'intéresse à la question de savoir est-ce qu'un feuilletage tendu sur V est une perturbation de π ? En général, la réponse à une telle question est négative. En effet, une obstruction est l'égalité des classes d'Euler du feuilletage et de la fibration.

2.5.1 Déformation des feuilletages et structures de contact tendues

Afin de pouvoir donner les conditions suffisantes pour qu'un feuilletage tendu soit proche de la fibration, introduisons d'abord la notion de déformation et de perturbation des champs de plans [47]. Premièrement, rappelons quelques notions sur les structures de contact. Contrairement aux feuilletages les structures de contact sont des champs de plans qui sont

complètement non intégrables. En général une structure de contact sur une variété M de dimension $2n + 1$ est la donnée d'un sous-fibré tangent de rang $2n$ qui est localement défini par une forme de contact i.e une 1-forme α telle que $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$. Pour nous les structures de contact que nous considérons seront supposées transversalement orientées et sont donc globalement définies par des 1-formes de contact.

Définition 2.5.1. *Une structure de contact ξ sur une variété fermée M de dimension 3 est la donnée d'un champs de plans orientable défini localement par une 1-forme α telle que $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$. On a $\xi = \ker \alpha$.*

Soit ξ un champ de plans défini par la 1-forme α sur une 3-variété M . Munissons M d'un système de coordonnées locales (x, y, z) tel que z soit la direction transverse à ξ et y la direction tangente. On peut alors écrire dans ce système $\alpha = dz - a(x, y, z)dx$ où a est une fonction numérique. Le champ de plans ξ est de contact si et seulement si $\frac{\partial a}{\partial y} > 0$; et cette condition signifie géométriquement que si on suit le flot de $\frac{\partial}{\partial y}$ on voit les plans de ξ tourner dans le plan (x, z) . En dimension 3, l'existence des structures de contact est garantie par le théorème de J. Martinet stipulant que sur une variété fermée de dimension 3 tout champ de plans est homotope à une structure de contact. Une classe importante des structures de contact nous intéresse ici, à savoir les structures de contact tendues. Elles possèdent des propriétés de rigidité géométriques qui leurs donnent des caractéristiques communes avec les feuillements sans composante de Reeb.

Définition 2.5.2. *Si ξ est une structure de contact sur une variété de dimension 3, on dit que ξ est vrillée si elle contient un disque vrillé i.e un disque plongé D qui est tangent à ξ en son centre et le long de son bord. La structure de contact ξ est dite tendue si elle n'est pas vrillée.*

Par exemple la structure de contact canonique de \mathbb{R}^3 définie par la 1-forme $\alpha = dz - xdy$ avec (x, y, z) les coordonnées canoniques de \mathbb{R}^3 est tendue (d'après Bennequin). Un autre fait important pour les structures de contact tendues est que si elles sont définies sur une variété de dimension 3 compacte sans bord et atoroidale alors le nombre de leurs classes d'isotopie est fini. En particulier si la 3-variété est obtenue par suspension d'un difféomorphisme pseudo-Anosov alors la classe d'isotopie de structures tendues est unique [30].

Définition 2.5.3. **i** . *Un feuilletage \mathcal{F} sur une variété M est perturbable en une structure de contact si tout voisinage de \mathcal{F} dans la C^0 -topologie des champs de plans contient une structure de contact.*

ii . *Un feuilletage \mathcal{F} sur M est dit déformable en structures de contact s'il existe une famille à un paramètre réel de champs de plans $(\xi_t), t \in \mathbb{R}$ tel que : $\xi_0 = \mathcal{F}$ et $\forall t > 0, \xi_t$ est une structure de contact.*

iii . *Si dans (ii) ξ_0 est défini par une 1-forme α_0 et ξ_t par des 1-formes α_t tel qu'il existe une 1-forme β avec $\alpha_t = \alpha_0 + t\beta$ on dit que la déformation est linéaire.*

Il est remarquable que dans la définition ci-dessus si un feuilletage est linéairement déformable en structure de contact, alors il est déformable en structure de contact et il est aussi perturbable en structure de contact.

En dimension 3, le premier type de déformation a été étudié par Thurston-Eliasberg [47] et le troisième de déformation a été traité par Dathe-Rukimbira [22] qui ont montré que si \mathcal{F} est un feuilletage défini par une 1-forme fermée, localement, il est toujours possible de déformer linéairement \mathcal{F} en structures de contact.

Proposition 2.5.1. *Les feuilletages modèles construits sur les 3-fibrés en surfaces de genre $g > 1$ sur le cercle qui ont même classe d'Euler que la fibration sont des perturbations de la fibration.*

Démonstration. Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' les modèles de V dont la classe d'Euler est la même que celle de la fibration π . Les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont respectivement définis par les 1-formes $\Omega^0 = \lambda^t \omega^+ + dt$ et $\Omega^1 = \lambda^{-t} \omega^- + dt$. On considère la famille à un paramètre continu \mathcal{F}_m^- et \mathcal{F}_m^+ de feuilletages transversalement affines définis par : $\Omega_m^+ = m\lambda^t \omega^+ + dt$ et $\Omega_m^- = m\lambda^{-t} \omega^- + dt$. Pour $m = 0$, \mathcal{F}_m^+ et \mathcal{F}_m^- ne sont rien d'autre que la fibration et pour tout $m > 0$, \mathcal{F}_m^+ et \mathcal{F}_m^- ont des représentations d'holonomie conjuguées à celles de \mathcal{F} et \mathcal{F}' et leurs sont donc respectivement isotopes. \square

Le théorème suivant permet de passer d'un feuilletage à une structure de contact :

Théorème 2.5.1. [47] *Tout feuilletage de classe \mathcal{C}^2 de codimension 1 sur V , différent du feuilletage en sphères de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, peut être perturbé en une structure de contact.*

Définition 2.5.4. *Supposons que V borde une 4-variété symplectique (W, ω) , W est un remplissage symplectique d'une structure de contact ou d'un feuilletage ξ si la restriction de la 2-forme ω à ξ est sans singularité ; on dit que ξ est symplectiquement remplissable. Si V est une composante connexe du bord de W , ξ est semi-symplectiquement remplissable.*

Par exemple, on sait d'après [15] que si V est un 3-variété fermée orientée fibrée en surfaces sur le cercle munie d'un champ de plans ξ tangents aux fibres alors (V, ξ) est, à revêtement fini près, symplectiquement remplissable.

Théorème 2.5.2. [47]

- i) *Les structures de contact sur V semi-symplectiquement remplissables sont tendues.*
- ii) *Les feuilletages tendus sur V sont semi-symplectiquement remplissables.*

On sait que pour les 3-variétés fibrées en surfaces sur le cercle le feuilletage dont les feuilles sont les fibres de la fibration est tendu, il est naturel de penser que tous les feuilletages tendus sur V se déduisent de la fibration par perturbation. Nous montrons que pour des 3-variétés atoroidales la fibration et ses C^1 -perturbations sont les seuls feuilletages tendus dans la classe d'Euler que la fibration.

Question : Soit V une 3-variété fermée fibrant en surfaces de genre $g > 1$ sur le cercle et atoroidale, combien y-a-t-il (à perturbation près) de feuilletages tendus sur V ?

L'un des principaux résultats dans cette direction est théorème de Gabai suivant

Théorème 2.5.3. [10] *Soit V une 3-variété fermée riemannienne et atoroidale, il existe un entier $N(V) > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout feuilletage tendu \mathcal{F} sur V , il existe $N(V)$ feuilletages tendus sur V tels que \mathcal{F} soit " ε -coarse isotope" à l'un de ces $N(V)$ feuilletages tendus.*

Il y a ainsi à perturbation près un nombre fini de feuilletages tendus sur V puisque si un feuilletage \mathcal{F}_1 est " ε -coarse isotope" au sens de Gabai à un feuilletage \mathcal{F}_2 alors \mathcal{F}_1 est une perturbation de \mathcal{F}_2 [10].

Exemple 2.5.1. *Sur la 3-variété \mathbb{T}_φ^3 suspension d'un automorphisme hyperbolique φ du tore \mathbb{T}^2 , tous les feuilletages tendus sont explicitement connus à conjugaison différentiable près. En effet considérons les feuilletages \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de \mathbb{T}_φ^3 obtenus en suspendant les feuilletages de \mathbb{T}^2 donnés par les directions propres de φ . Les feuilletages \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont minimaux (i.e à feuilles denses) donc tendus. Soit \mathcal{F} un feuilletage tendu sur \mathbb{T}_φ^3 , on distingue deux cas :*

- i) Si \mathcal{F} est sans feuille compacte, il est différentiablement conjugué à l'un des modèles $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$ [13].*
- ii) Si \mathcal{F} possède une feuille compacte F , alors $\pi_1(F)$ est résoluble puisqu'il s'injecte dans $\pi_1(\mathbb{T}_\varphi^3)$ qui est résoluble. Ainsi soit F est difféomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 ou bien au tore \mathbb{T}^2 . Si F est la sphère \mathbb{S}^2 , la variété \mathbb{T}_φ^3 serait difféomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ et \mathcal{F} au feuilletage en \mathbb{S}^2 , ce qui est impossible donc F est difféomorphe à \mathbb{T}^2 , comme \mathcal{F} est tendu ce tore ne sépare pas \mathbb{T}_φ^3 . En coupant alors le long de ce tore on obtient un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ tangent au bord, un tel feuilletage est connu [36].*

Exemple 2.5.2. *Soit V une 3-variété fermée fibrée sur \mathbb{S}^1 , avec une fibration π , et \mathcal{F} un feuilletage défini par une 1-forme fermée non singulière ω . Alors \mathcal{F} est tendu et est isotope à π . En effet si $[dt]$ est le générateur de $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$, on a $[\omega] = \pi^*(c[dt])$, où c est une constante non nulle. Ainsi d'après le théorème de Laudénbach-Blank [16], \mathcal{F} est isotope à π .*

Proposition 2.5.2. *Sur un 3-variété fermée fibrée en surfaces sur le cercle \mathbb{S}^1 et hyperbolique, il existe à isotopie près un seul feuilletage tendu défini par une 1-forme fermée non singulière.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 2.3.5 et de l'exemple précédent. \square

Définition 2.5.5. *Une variété V est dite irréductible si toute sphère \mathbb{S}^2 plongée différentiablement dans V borde une 3-boule. Elle est dite toroidale si elle contient un tore incompressible c'est-à-dire un tore plongé π_1 -injecté. La variété V est dite atoroidale si elle ne contient pas un tore incompressible ou si elle est irréductible et que tout tore incompressible est isotope à une composante du bord de V .*

Par exemple la variété \mathbb{T}_A^3 construit par E. Ghys n'est pas atoroidale car elle contient beaucoup de tores incompressibles. Soit V une 3-variété fibrée sur le cercle \mathbb{S}^1 avec une fibration π . Comme le feuilletage de V dont les feuilles sont les fibres de π est tendu, il est naturel de penser que tous les feuilletages tendus sur V se déduisent de π par perturbation, mais notre théorème suivant montre que ce n'est pas toujours le cas.

Théorème 2.5.4. *Il existe des 3-variétés fermées hyperboliques fibrées sur le cercle avec une fibration π , atoroidales admettant des feuilletages tendus qui ne sont pas des perturbations de π .*

La preuve de ce théorème repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 2.5.1. *On considère maintenant une 3-variété V fermée fibrant sur le cercle \mathbb{S}^1 et atoroidale quelconque, avec comme fibre Σ une surface fermée de genre $g > 1$. Posons $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ le difféomorphisme de monodromie de π , la variété V est difféomorphe à la suspension de φ , i.e $V = \Sigma \times [0, 1]/(x, 0) \sim (\varphi(x), 1)$. Alors le difféomorphisme φ est isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov.*

Démonstration. On sait que d'après [3] que φ est isotope à un difféomorphisme qui est soit périodique, soit réductible ou soit pseudo-Anosov. La variété V est suffisamment grande puisque les fibres ont des groupes fondamentaux qui s'injectent dans celui de V . La variété obtenue en coupant V le long de la fibre Σ est difféomorphe à $\Sigma \times [0, 1]$. Si φ est d'ordre fini, le feuilletage en intervalles de $\Sigma \times [0, 1]$ donne par identification des composantes du bord par φ une variété fibrée en cercles, ce qui est absurde car V est irréductible, atoroidale et contient des surfaces plongées dont les groupes fondamentaux s'injectent. Si φ est irréductible, alors φ laisse invariante une collection de courbes fermées plongées simples Γ , après suspension de φ ces courbes donnent des tores plongés incompressibles, ce qui est absurde puisque V est atoroidale. □

Lemme 2.5.2. *Soient ξ_1 et ξ_2 deux feuilletages ou structures de contact sur V . Si ξ_1 est une perturbation de ξ_2 alors la classes d'Euler $e(\xi_1)$ de ξ_1 et $e(\xi_2)$ de ξ_2 sont égales.*

Démonstration. La variété V étant orienté, ainsi que les champs de plans ξ_1 et ξ_2 , si la perturbation est suffisamment petite ξ_1 et ξ_2 restent transversent à un même fibré normal, sont donc isomorphes et ont donc même classe d'Euler. □

Démonstration. (du théorème 2.5.4.)

Fixons V une 3-variété fermée fibrant sur le cercle \mathbb{S}^1 , avec une fibration π et atoroidale. D'après le lemme 3.1 la monodromie φ est isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov que nous notons encore φ . Soit g le genre des fibres Σ_g de π . Il existe alors deux feuilletages mesurés \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u transverses singuliers avec des singularités qui sont des selles à $2p$ séparatrices et un réel $\lambda > 1$ tels que :

$$\varphi_*(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s)$$

et

$$\varphi_*(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u).$$

Posons $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{2g-2}\}$ l'ensemble singulier commun aux feuilletages \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u . Sur $(\Sigma_g - S) \times \mathbb{R}$, on considère le feuilletage défini par la 1-forme $\Omega_\sigma = \lambda^{\varepsilon(\sigma)t}\omega^\sigma$, ω^σ est la 1-forme fermée définissant \mathcal{F}^σ avec $\varepsilon(\sigma) = 1$ si $\sigma = s$ et $\varepsilon(\sigma) = -1$ si $\sigma = u$. Ω_σ définit sur V un feuilletage singulier $\tilde{\mathcal{F}}^\sigma$ dont l'ensemble singulier est $(S \times \mathbb{R})/(x, t) \sim (\varphi(t), t + 1)$.

On peut étendre $\tilde{\mathcal{F}}^\sigma$ en un feuilletage \mathcal{F}^σ non singulier sur V , puisque le s_i sont les 4-selles(selles à un nombre pair de séparatrices).

Comme les s_i sont des 4-selles, les formules (1) et (2) introduites dans le paragraphe 2.4.2 deviennent :

$$\begin{cases} \text{nombre de } (s_i \text{ positives}) - \text{nombre de } (s_i \text{ négatives}) = e(T\mathcal{F}).\Sigma; \\ \text{nombre de } (s_i \text{ positives}) + \text{nombre de } (s_i \text{ négatives}) = -\chi(\Sigma). \end{cases}$$

Soit $n > 0$ un entier tel que $-\chi(\Sigma) = 2n$ et $\tilde{\mathcal{F}}^\sigma$ ait $\frac{n-1}{2}\chi(\Sigma)$ singularités positives et $\frac{-n-1}{2}\chi(\Sigma)$ singularités négatives. Alors $e(T\mathcal{F}).\Sigma$ est différent de $-\chi(\Sigma)$. Donc la classe d'Euler $e(\mathcal{F}^\sigma)$ de \mathcal{F} est différente de celle $e(\pi)$ de π . Ainsi d'après le lemme ci haut \mathcal{F}^σ n'est pas une perturbation de la fibration π . \square

Cependant pour de telles variétés, la fibration et ses perturbations sont les seuls feuilletages tendus dans la classer d'Euler de la fibration comme le montre notre premier théorème principal suivant :

Théorème 2.5.5. *Soit V une 3-variété fermée atoroidale et fibrant sur le cercle \mathbb{S}^1 , avec une fibration π . Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement orienté de codimension 1 sur V . Alors \mathcal{F} est un feuilletage tendu ayant même classe d'Euler que la fibration π si et seulement si \mathcal{F} est une perturbation de π .*

Démonstration. La preuve dans un sens est évident.

En effet la fibration π étant tendue, il existe une courbe fermée γ transverse à toutes les fibres. Si \mathcal{F} est une perturbation suffisamment petite de π , γ reste tranverse à toutes les feuilles de \mathcal{F} puisque la transversalité est une propriété ouverte. Donc \mathcal{F} est tendu, de plus \mathcal{F} a même classe d'Euler que π d'après le lemme 3.2.

Réciproquement, supposons que \mathcal{F} est tendu et a même classe d'Euler que π . On utilise le lemme suivant :

Lemme 2.5.3. *Le feuilletage \mathcal{F} et la fibration π se perturbent respectivement en deux structures de contact ξ_1 et ξ_2 tendues et isotopes.*

Démonstration. D'après le théorème 3.3, π se perturbe en une structure de contact ξ_1 ; comme π est tendue, π est semi-symplectiquement remplissable. La propriété de semi-symplectiquement remplissable étant une propriété ouverte, donc ξ_1 est semi-symplectiquement remplissable, or les structures de contact semi-symplectiquement remplissable sont tendues, donc ξ_1 est tendue. De même, \mathcal{F} se perturbe en une structure de contact ξ_2 tendue. Comme \mathcal{F} et π ont même classe d'Euler, il en est de même pour ξ_1 et ξ_2 . D'après le lemme 3.1, la variété V est difféomorphe à suspension d'un difféomorphisme isotope à un pseudo-Anosov φ isotope à la monodromie de V ; et par unicité des structures tendues de classe d'Euler maximale sur des fibrés pseudo-Anosov [30] on déduit que ξ_1 est isotope à ξ_2 . par conséquent \mathcal{F} est une perturbation de π . \square

D'où la preuve du théorème. \square

Ce théorème indique que les feuilletages tendus sur des 3-variétés fibrées en surfaces de genre $g > 1$ sur le cercle \mathbb{S}^1 sont les seules feuilletages qui sont des perturbations de la fibration dans la classe d'Euler de la fibration.

2.5.2 Feuilletage en position générale améliorée

La technique de mis en position optimale d'un feuilletage introduite par R. Roussarie [38] nous permet d'avoir presque les mêmes hypothèses de transversalité que dans le cas des fibrés d'Anosov. La position générale améliorée en est une généralisation.

Définition 2.5.6. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 sur un fibré hyperbolique $\pi : V \rightarrow \mathbb{S}^1$.

a) On dit que \mathcal{F} est en position générale par rapport à π si :

i) Il existe une famille finie $\Gamma \subset V$ de cercles plongés (on dit tresse) telle que $T_u\mathcal{F} = T_u\pi$ si et seulement $u \in \Gamma$.

ii) Toute composante γ de Γ admet un voisinage tubulaire $V(\gamma)$ dans lequel \mathcal{F} est transverse à π sauf en un nombre fini de points (en restriction à chaque fibre) qui sont des singularités de type selle ou centre.

b) \mathcal{F} est en position générale améliorée si dans ii) on n'admet que des singularités de type-selle.

Proposition 2.5.3. Les feuilletages modèles construits sur les fibrés en surfaces sur le cercle sont en position générale améliorée par rapport à la fibration $\pi : V \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Démonstration. Il suffit de calculer le produit extérieur $\Omega_\sigma \wedge dt$. En effet les feuilletages modèles possèdent des singularités selles isolées. \square

On rappelle le théorème suivant dû à Roussarie

Théorème 2.5.6. Soit V une 3-variété fermée et \mathcal{F} un feuilletage tendu de classe C^2 sur V . Soit $\rho : \Sigma \rightarrow V$ un plongement d'une surface fermée de Σ dans V . On suppose que $\rho_* : \pi_1\Sigma \rightarrow \pi_1V$ est injectif. Alors ρ est isotope à un plongement ρ' qui est soit tangent à \mathcal{F} , soit transverse à \mathcal{F} sauf en un nombre fini de points qui sont des singularités selles (sans liaisons entre elles) à nombre pair de séparatrices pour \mathcal{F} .

Ce théorème est démontré par Roussarie dans le cas où la surface Σ est un tore \mathbb{T}^2 (Voir [38]). La même technique s'applique pour une surface de genre quelconque. Ici nous démontrons ce théorème en utilisant des techniques de la géométrie riemannienne.

Démonstration. On sait d'après le résultat de J. Hass [28] qu'il existe une métrique riemannienne g faisant des feuilles de \mathcal{F} des sous-variétés minimales. Toute fibre Σ est incompressible et est donc isotope à une surface fermée orientable minimale.

Appliquant le résultat de Schoen-Yao [39] on peut dire que ρ est isotope à un plongement ρ' qui est minimal relativement à g et on utilise le même résultat sur les intersections des surfaces minimales selon lequel la trace d'un feuilletage minimal sur une surface minimale qui n'est pas une feuille est singulier avec des singularités qui sont des selles avec un nombre pair de séparatrices. On peut ensuite par une petite isotopie éclater les selles à $2n$ -branches en des selles isolées à 4 branches. \square

Proposition 2.5.4. Soit V une 3-variété fermée fibrée sur le cercle \mathbb{S}^1 et \mathcal{F} un feuilletage tendu de classe C^2 sur V . Si \mathcal{F} est sans feuille compacte, alors toute fibre de V est isotope à une surface fermée en position optimale (i.e transverse à \mathcal{F} sauf en un nombre fini de points qui sont des selles à 4 séparatrices).

Démonstration. En effet, on considère la suite exacte d'homotopie suivante associée à la fibration $p : V \rightarrow \mathbb{S}^1$ de fibre Σ

$$0 \longrightarrow \pi_1 \Sigma \xrightarrow{i_*} \pi_1 V \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

Cette suite exacte d'homotopie associée à la fibration montre que l'injection canonique de chaque fibre de V est injective au niveau des groupes fondamentaux. On applique alors le théorème ci-dessus pour avoir les points de contact qui sont des selles à nombres paires de séparatrices, on peut ensuite par une petite isotopie éclater les selles en des selles isolées et à 4 séparatrices. \square

Dans [23] nous avons montré un résultat partiel suivant

Théorème 2.5.7. *Soit V une 3-variété fermée fibrée en surfaces Σ sur le cercle \mathbb{S}^1 avec la fibration $\pi : V \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un difféomorphisme pseudo-Anosov munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sans feuille compacte. Si \mathcal{F} est en position générale améliorée par rapport à la fibration π alors le feuilletage \mathcal{F} est conjugué à l'un des feuilletages modèles.*

La preuve de ce théorème repose sur la proposition suivante

Proposition 2.5.5. *Soit M une variété fermée fibrée en surfaces sur le cercle munie d'un feuilletage \mathcal{F} de classe C^∞ sans feuille compacte et d'une fibration à fibre compacte. Si \mathcal{F} est transverse aux fibres de la fibration, alors les traces de \mathcal{F} sur les fibres sont isotopes.*

Démonstration. En effet, comme \mathcal{F} est transverse aux fibres, en coupant le fibré le long d'une fibre transverse à \mathcal{F} on obtient sur $\Sigma \times [0, 1]$ un feuilletage \mathcal{H} sans feuille compacte et transverse aux fibres. On va construire une isotopie entre \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 .

Par transversalité la projection naturelle $p : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de $\Sigma \times [0, 1]$ sur $[0, 1]$ induit une application surjective $p_* : T_{(x,t)}\mathcal{H} \rightarrow T_t[0, 1]$ du fibré tangent à \mathcal{H} sur celui de $[0, 1]$. On peut choisir une section s du fibré tangent à \mathcal{H} qui est horizontale (i.e. $p_*s = \frac{\partial}{\partial t}$). Et comme $T\mathcal{H}$ est localement trivial, on construit un tel champ dans tout ouvert distingué et on recolle au moyen de la partition de l'unité. Notons $\varphi_t(x, 0)$ le flot de s passant par $(x, 0)$. Comme Σ est compacte le flot $\varphi_t(x, 0)$ de s est défini pour tout $0 \leq t \leq 1$ et tout $x \in S$. Ce flot est entièrement contenu dans la feuille de \mathcal{H} passant par $(x, 0)$ et coupe toutes les fibres $\Sigma \times \{t\}$, donc φ_t envoie \mathcal{F}_0 sur $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}|_{\Sigma \times \{t\}}$. L'isotopie cherchée peut être définie en posant $\psi(x, t) = \pi \circ \varphi_t(x, 0)$ où $\pi : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ est la projection canonique sur le premier facteur. \square

Démonstration. (du théorème 2.5.7)

Comme \mathcal{F} est en position générale améliorée par rapport à la fibration π , les feuilletages induit sur les fibres sont isotopes. Ainsi $\forall t \in [0, 1], \mathcal{H}|_{\Sigma \times \{t\}}$ est isotope à $\mathcal{F}_0 = \mathcal{H}|_{\Sigma \times \{0\}}$. En particulier \mathcal{F}_0 est isotope à \mathcal{F}_1 . De plus le pseudo-Anosov φ envoie les feuilles de \mathcal{F}_0 sur celle de \mathcal{F}_1 . Ainsi, la classe d'isotopie de \mathcal{F}_0 est un invariant du pseudo-Anosov φ isotope à la monodromie de V (i.e. $\varphi_*(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0$) et comme \mathcal{F} est sans feuille compacte alors \mathcal{F}_0 est isotope à l'un des feuilletages de pseudo-Anosov. Donc \mathcal{F} est isotope à un feuilletage suspension d'un pseudo-Anosov. Il est donc isotope à l'un des feuilletages modèles. \square

Une question qui reste ouverte maintenant est celle de savoir quelles sont les conditions qu'un feuilletage sans feuille compacte sur des fibrés en surfaces sur le cercle soit mis en position générale améliorée? Cela conduirait à la classification, à isotopies près, des

feuilletages de codimension 1 sans feuille compacte sur ces variétés. Une autre question importante est de savoir si les modèles sur ces fibrés sont rigides. Dans nos perspectives, ces deux questions constituent le champ prioritaire de notre recherche.

FEUILLETAGES TENDUS DES FIBRÉS HYPERBOLIQUES ET LAMINATIONS

Sommaire

3.1	Feuilletages mesurés et les 1-formes fermées	58
3.2	Ensembles minimaux d'un feuilletages de codimension 1 . . .	60
3.3	Feuilletages monotónément équivalents et laminations	65
3.4	Feuilletages tendus et feuilletages \mathbb{R}-couvert	66

Dans ce chapitre nous étudions les liens entre les feuilletages tendus de codimension 1 et les laminations sur des 3-variétés fibrées en surfaces sur le cercle et hyperboliques. Pour cela nous introduisons une relation dite d'équivalence monotone entre les feuilletages, puis nous définissons les notions de laminations, de surfaces branchées et de feuilletages \mathbb{R} -covered utiles pour la suite. Le résultat principal de ce chapitre nous donne des conditions suffisantes pour qu'un feuilletage tendu de codimension 1 sur une 3-variété hyperbolique soit, à équivalence monotone près, une perturbation de la fibration. Nous démontrons en outre que l'existence d'une lamination pure est la seule obstruction à ce qu'un tel feuilletage tendu soit, à équivalence monotone près, une perturbation de la fibration.

3.1 Feuilletages mesurés et les 1-formes fermées

Rappelons que si μ est une mesure transverse invariante pour un feuilletage \mathcal{F} d'une variété M son support noté $\text{supp}(\mu)$ est l'ensemble des points $x \in M$ vérifiant la propriété suivante : si N est une sous-variété de M transverse à \mathcal{F} contenant x dans son intérieur alors $\mu(N) > 0$.

Si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension 1 singulier dont l'ensemble singulier est $\text{sing}(\mathcal{F})$ alors $\text{supp} \mu = \{x \in M^* \text{ tel que pour tout intervalle } J \text{ transverse contenant } x, \mu(J) > 0\} \cup \{\text{sing}(\mathcal{F})\}$, avec $M^* = M - \text{sing}(\mathcal{F})$. Le support d'une mesure invariante pour \mathcal{F} est un sous-ensemble de M compact et invariant par \mathcal{F} . On dit que la mesure μ est de support total si $\text{supp}(\mu)$ est égal à M . On dit qu'un élément $x \in M$ est un atome pour μ si $\mu(\{x\}) > 0$. S'il n'existe pas un tel élément, on dit que la mesure μ est sans atome ou est diffuse. Par exemple une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue est sans atome. Dans ce chapitre, les feuilletages mesurés que nous considérons sont munis d'une mesure transverse invariante de support total et sans atome. Rappelons aussi qu'un

feuilletage singulier dont les singularités sont des $2p$ -selles avec ($p \geq 2$) sur une surface est topologiquement conjugué à un feuilletage mesuré ssi ses feuilles non compactes sont toutes denses [17]; et très peu de feuilletages remplissent cette condition même en classe C^∞ .

En considérant un feuilletage non singulier sans feuille compacte sur le tore de dimension 2, il est connu d'après A. Denjoy [2] qu'un tel feuilletage, s'il est de classe C^2 , est topologiquement conjugué au flot irrationnel du tore. Il donne également des feuilletages exotiques en classe C^0 et même en classe C^1 . L'exemple de Denjoy peut être obtenu à partir d'un flot irrationnel par l'ouverture d'une feuille F , et en la remplaçant par deux feuilles F^+ et F^- dont la distance tend vers zéro en se déplaçant vers l'infini le long de chaque feuille et en poussant les autres feuilles pour avoir de l'espace. On remplit ensuite l'espace entre les feuilles F^+ et F^- par de nouvelles feuilles, et le complémentaire de ces nouvelles feuilles est un ensemble minimal compact non trivial.

Proposition 3.1.1. *Un feuilletage d'une surface muni d'une mesure transverse invariante régulière par rapport à la mesure de Lebesgue (i.e tout point possède un voisinage distingué de coordonnées lisses (x, y) dans lequel le feuilletage est défini par dy et la mesure est induite par dy) de support total est défini par une 1-forme fermée si et seulement si il est transversalement orienté.*

Démonstration. Supposons que \mathcal{F} est un feuilletage mesuré transversalement orienté. L'existence d'une mesure transverse invariante par l'holonomie signifie l'existence d'une mesure transverse telle que si un arc transverse α se déplace transversalement au feuilletage de sorte que les extrémités restent sur les mêmes feuilles alors la mesure ne change pas. On peut alors trouver une trivialisatation locale (U_i, f_i) avec $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_{x,y}^2$ une carte locale telle que $f_i^{-1}(y = \text{constante})$ soient les feuilles de $\mathcal{F}|_{U_i}$. Sur l'intersection non vide $U_i \cap U_j$ on a les fonctions de transitions de la forme $f_{ij}(x, y) = (h_{ij}(x, y), c_{ij} + y)$ où c_{ij} est une constante; donc $\mathcal{F}|_{U_i}$ est défini par une 1-forme fermée ω_i . Comme \mathcal{F} est transversalement orienté, les ω_i se recollent en une 1-forme ω définissant \mathcal{F} . Et comme les formes ω_i sont fermées, ω est fermée.

Réciproquement, si \mathcal{F} est définie par une 1-forme fermée ω on considère l'homomorphisme noté $[\omega] : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ obtenu en intégrant ω le long d'un lacet γ . Sur tout ouvert simplement connexe U de M , ω admet une primitive locale unique à une constante additive près. Sur $M^* = M - \text{Sing}(\omega)$, la forme ω est non singulière et définit donc un feuilletage de codimension 1, donné par les niveaux des primitives locales de ω . La 1-forme ω détermine une mesure transverse invariante du feuilletage \mathcal{F} obtenue en associant à un arc transverse γ sa longueur $|\omega| = |\int_\gamma \omega|$. Le feuilletage possède également une orientation transverse, donnée par le sens de croissance des primitives locales. \square

Les feuilletages définis par une 1-forme fermée mérite une attention particulière dans l'étude des feuilletages en dimension 3 car ils sont intimement liés aux feuilletages dont les feuilles sont les fibres de la fibration. Une telle liason se remarque à travers le théorème de Tischler [11] qui stipule qu'un feuilletage de classe C^2 d'une variété de dimension n est défini par une 1-forme fermée non singulière si et seulement si il est la perturbation de la fibration. D'autre part, Sacksteder a montré qu'un feuilletage orientable de codimension un de classe C^2 et sans holonomie peut être défini par une 1-forme fermée non singulière et par conséquent la variété ambiante fibre en surfaces sur le cercle.

3.2 Ensembles minimaux d'un feuilletages de codimension 1

L'étude des ensembles minimaux pour un feuilletage de codimension trouve ses origines dans l'étude, par H. Poincaré, du comportement des orbites d'un difféomorphisme $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ du cercle. Il introduisit le concept du nombre de rotation du cercle et montra que ce dernier est rationnel ssi f possède un point périodique. Et en termes de la théorie des feuilletages cela équivaut à dire qu'un feuilletage de codimension 1 du tore \mathbb{T}^2 est sans feuille compacte ssi il est topologiquement équivalent à un feuilletage obtenu par suspension d'un difféomorphisme du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel.

Définition 3.2.1. *Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée. Un sous-ensemble A de M est invariant pour \mathcal{F} ou saturé s'il contient une feuille passant par chacun de ses points.*

Les sous-ensembles invariants sont d'une importance capital dans l'étude des systèmes dynamiques car les orbites qui y entrent n'en sortent plus. Une orbite qui entre dans un ensemble invariant reste dans cet ensemble pour tous les temps futurs i.e que si φ_t est le flot d'un champ de vecteurs défini sur un sous ensemble invariant $A \subset M$ alors $\varphi_t(A) \subset A$.

Définition 3.2.2. *On appelle ensemble minimal K d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 d'une variété M un sous-ensemble de M , non vide, compact et invariant par \mathcal{F} (i.e K contient la feuille passant par chacun de ses points) et minimal parmi les ensembles possédant ces propriétés.*

Il n'y a que trois possibilités pour un ensemble minimal : une feuille fermée ; toute la variété ; ou un minimal exceptionnel (i.e un minimal qui est transversalement un ensemble triadique de Cantor).

Exemple 3.2.1. 1. *Toute feuille fermée d'un feuilletage \mathcal{F} sur une variété M est un ensemble minimal.*

2. *Le seul ensemble minimal pour le feuilletage de Reeb sur \mathbb{S}^3 est la feuille compacte homéomorphe au tore \mathbb{T}^2 .*

3. *Soit \mathcal{F}_α le feuilletage du tore \mathbb{T}^2 obtenu par suspension d'une rotation $f_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $f_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}.z$. Si α est irrationnel, toutes les feuilles de \mathcal{F}_α sont denses dans \mathbb{T}^2 (théorème de Kronecker) et par conséquent \mathbb{T}^2 est le seul ensemble minimal pour \mathcal{F}_α .*

Théorème 3.2.1. [6] *Soit $K \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble compact parfait et d'intérieur vide. Alors il existe un homéomorphisme $h : K \rightarrow \mathcal{C}$ où \mathcal{C} est l'ensemble triadique de Cantor dans $[0, 1]$.*

Sur le tore de dimension 2, Kneser (en 1924) a construit des feuilletages de classe C^0 ayant un minimal exceptionnel et en 1932, Denjoy a construit de tels feuilletages en classe C^1 . Poincaré a posé le problème d'existence des feuilletages de classe C^2 sur le tore \mathbb{T}^2 ayant un minimal exceptionnel ; et c'est Denjoy [2] qui en donna une réponse négative en montrant que si \mathcal{F} est un feuilletage du tore \mathbb{T}^2 de classe C^2 et μ un ensemble minimal alors $\mu = \mathbb{T}^2$ ou μ est une feuille compacte. En particulier si \mathcal{F} est sans feuille compacte, le théorème de Denjoy implique que \mathcal{F} est topologiquement équivalent à un feuilletage par suspension de la rotation irrationnelle du cercle. Plus généralement pour un feuilletage de

classe C^2 défini par une 1-forme fermée sur une variété compacte, les feuilles sont toutes fermées ou toutes denses. T. Cherry a montré qu'il existe des feuilletages singuliers de classe C^2 de \mathbb{T}^2 ayant un quasiminimal i.e un minimal exceptionnel qui porte une singularité; ce sont les feuilletages dits de Cherry.

A. Exemple de Denjoy d'un feuilletage ayant un minimal exceptionnel sur \mathbb{T}^2

L'exemple de Denjoy est obtenu par suspension d'un C^1 -difféomorphisme $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ du cercle ayant un ensemble minimal exceptionnel. Un ensemble minimal est dit exceptionnel s'il est parfait et d'intérieur vide c'est-à-dire homéomorphe à un ensemble de Cantor. La construction d'un difféomorphisme ayant un minimal exceptionnel peut se faire de la manière suivante : on considère une rotation irrationnelle $R_\alpha(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi(t+\alpha)}$ du cercle et on coupe \mathbb{S}^1 en tous les points d'une orbite $\{\theta_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de R_α . A chaque coupure on insère un segment J_n de longueur l_n tel que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n = L < \infty$. On obtient ainsi un nouveau cercle de longueur plus grande que celle du cercle de départ. L'ensemble $\mathbb{S}^1 - \cup_{n \in \mathbb{Z}} J_n = \mu$ sera homéomorphe à un ensemble de Cantor.

Le difféomorphisme f sera construit de telle manière que $f|_{\mu'}$ soit conjugué à $R_\alpha|_{(\mathbb{S}^1 - \{\theta_n, n \in \mathbb{Z}\})}$ où $\mu' = \mu - \cup_{n \in \mathbb{Z}} J_n$ et est appelé l'échange d'intervalles sur le cercle. De ce fait, on peut remarquer que toute orbite de f est dense dans μ . Explicitement, pour construire f on part d'un difféomorphisme croissant $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $\tilde{f}(t) = t + \varphi(t)$ avec φ périodique de période 1. Le difféomorphisme \tilde{f} induit un C^1 -difféomorphisme $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ du cercle qui peut être défini par $f(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi \tilde{f}(t)}$.

Construction de l'ensemble minimal μ

Fixons $\alpha \in]0, 1[- \mathbb{Q}$ et $y_0 \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ le nombre $y_0 + n\alpha$ n'est pas un entier donc $y_0 + n\alpha \in]m, m + 1[$ pour $m \in \mathbb{Z}$. Soit $y_n = y_0 + n\alpha - m \in]0, 1[$; puisque α est irrationnel l'ensemble $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $]0, 1[$ et de plus $y_m \neq y_n$ pour $m \neq n$. On considère la suite $\{l_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ des nombres positifs vérifiant les conditions suivantes :

- (1) $\sum_{-\infty}^{\infty} l_n = L < \infty$;
- (2) $\sum_{n \rightarrow \infty} l_{n+1}/l_n = 1$;
- (3) $1/3 < l_{n+1}/l_n < 5/3, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Par exemple on peut vérifier que la suite $l_n = (n^2 + 1)^{-1}$ satisfait ces propriétés. A partir des suites $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{l_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ on construit un ensemble $K \subset]0, L + 1[$ homéomorphe à un ensemble de Cantor qui sera un ensemble minimal pour le feuilletage de Denjoy. L'idée de la construction de l'ensemble K est de couper l'intervalle $[0, 1]$ au point $y_n, \forall n \in \mathbb{Z}$ et d'y insérer un segment de longueur l_n . De façon formelle, on procède comme suit : on considère deux suites $\alpha_n = y_n + \sum_{0 < y_i < y_n} l_i$ et $\beta_n = \alpha_n + l_n$. Soit $I_n =]\alpha_n, \beta_n[$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $0 < \alpha_n < \beta_n < 1 + L$ donc $I_n \subset]0, 1 + L[$. On peut montrer que si $y_n < y_m$ alors $\beta_n < \alpha_m$ et par la suite $I_n \cap I_m = \emptyset$. On pose $K = [0, 1 + L] - \cup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$. Il est clair que K est compact.

Lemme 3.2.1. *L'ensemble K est parfait et est d'intérieur vide.*

Démonstration. Définissons deux fonctions auxiliaires $h^-, h^+ : [0, 1] \rightarrow [0, 1 + L]$ par $h^-(y) = y + \sum_{0 < y_i < y} l_i$ et $h^+(y) = y + \sum_{0 < y_i \leq y} l_i$. Les fonctions h^- et h^+ sont croissantes et semi-continues respectivement à gauche et à droite (i.e $\lim_{s \rightarrow y, s < y} h^-(s) = h^-(y)$)

et $\lim_{s \rightarrow y, s > y} h^+(s) = h^+(y)$. En outre, $h^-(y_n) = \alpha_n$ et $h^+(y_n) = \beta_n, n \in \mathbb{Z}$, et si $y \notin \{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ alors $h^-(y) = h^+(y)$. Montrons maintenant que K est d'intérieur vide. Supposons $[a, b] \subset K$ tel que $a, b \in \partial K$. Puisque $a \in \partial K$, il existe une suite de $\{\beta_{n_k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que $\beta_{n_k} < \beta_{n_{k+1}} < a$ pour tout k et $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{n_k} = a$. Comme $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$ nous avons $\beta_{n_k} < \alpha_{n_{k+1}} < \beta_{n_{k+1}} < a$ donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = a$. La suite $\{\alpha_{n_k}\}$ étant croissante, la suite correspondante $\{y_{n_k}\}$ l'est également, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$ pour $y \in [0, 1]$ et donc $a = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} h^-(y_{n_k}) = h^-(y)$. De même, $b = h^+(y')$ pour $h' \in [0, 1]$. Dans le cas où $y = y_n$ nous avons $a = \alpha_n$ ce qui implique que $a = b$ puisque $K \cap I_n = \emptyset$. Et si $y \notin \{y_n; n \in \mathbb{Z}\}$ alors $h^-(y) = h^+(y) = a$. Ainsi $h^-(y) = a \leq b = h^+(y')$ et on conclut donc que $y \leq y'$ car h^- est croissante. D'autre part, si $y < y'$ il existe $y_n \in]y, y'[$ car $\{y_n; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0, 1]$ donc $a = h^+(y) < h^+(y_n) < h^+(y') = b$ or nous avons $[a, b] \cap I_n \neq \emptyset$ qui est une contradiction. On conclut donc que $y = y'$ donc $a = b$ et par conséquent K est d'intérieur vide.

Montrons ensuite que K est parfait. Pour cela soit $x \in K$. D'une part si $x = \alpha_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ on considère la suite $\{y_{n_k}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $y_{n_k} < y_n$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_n$. Nous avons alors $\alpha_n = \lim_{k \rightarrow \infty} h^-(y_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k}$ et par conséquent α_n est un point d'accumulation de K . Si $x = \beta_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, par un raisonnement similaire, on montre que $\beta_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{n_k}$ avec $\beta_{n_k} > \beta_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc β_n est un point d'accumulation de K . D'autre part si $x \notin \{\alpha_n, \beta_n; n \in \mathbb{Z}\}$, on peut montrer que $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k}$ pour une suite $\{\alpha_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, puisque K est d'intérieur vide. Ce qui montre que K est parfait. \square

On pose maintenant $\tilde{X} = K - \{\alpha_n, \beta_n; n \in \mathbb{Z}\}$ et $\tilde{Y} = [0, 1] - \{y_n; n \in \mathbb{Z}\}$ et on définit l'application $\tilde{h} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ par $\tilde{h}(y) = h^+(y) = h^-(y), y \in \tilde{Y}$.

Lemme 3.2.2. \tilde{h} est un homéomorphisme.

Démonstration. \tilde{h} est continue car h^- et h^+ sont semi-continues respectivement à gauche et à droite. De plus, \tilde{h} est croissante car h^- l'est. La réciproque de \tilde{h} est donnée par $\tilde{h}^{-1}(x) = x - \sum_{0 < \alpha_i < x} l_i = x - \sum_{0 < \beta_i < x} l_i, x \in \tilde{X}$ \square

On considère maintenant l'application $\psi(x) = (1 + L)^{-1}x$. C'est un homéomorphisme qui envoie $K \subset [0, 1 + L]$ sur $\psi(K) \subset [0, 1]$ qui est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Posons $\tilde{\mu} = \psi(K) + \mathbb{Z}$. Par abus de notation on confondra souvent $\psi(I_n)$ avec I_n , $\psi(\alpha_n)$ avec α_n et $\psi(\beta_n)$ avec β_n . Avec ces notations nous avons $[0, 1] - \tilde{\mu} = \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Construction de \tilde{f}

Proposition 3.2.1. [6] Il existe une fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- φ est positive et périodique de période 1
- $\varphi|_{\tilde{\mu}} \equiv 1$
- $\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi(\tau) d\tau = \beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = (1 + L)^{-1}l_{n+1}$

On pose maintenant $c = (1 + L)^{-1}(\alpha + \sum_{0 < y_i < \alpha} l_i)$ où α est un nombre irrationnel utilisé dans la définition de la suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. On définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\tilde{f}(x) = c + \int_0^x \varphi(\tau) d\tau$. Alors \tilde{f} est un difféomorphisme de classe C^1 .

Proposition 3.2.2. [6] *Les propriétés suivantes sont vraies*

1. $\tilde{f}(t) = t + \theta(t)$ où θ est une fonction périodique de période 1,
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y_n + \alpha < 1$, on a $\tilde{f}(\alpha_n) = \alpha_{n+1}$ et $\tilde{f}(\beta_n) = \beta_{n+1}$,
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y_n + \alpha > 1$, on a $\tilde{f}(\alpha_n) = 1 + \alpha_{n+1}$ et $\tilde{f}(\beta_n) = 1 + \beta_{n+1}$.

On désigne par $\mu = \{e^{2i\pi t}; t \in \tilde{\mu}\}$, $a_n = e^{2i\pi\alpha_n}$, $b_n = e^{2i\pi\beta_n}$, $J_n = \{e^{2i\pi t}; t \in I_n\}$ et $f(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi\tilde{f}(t)}$. Alors l'application $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est bien un difféomorphisme de classe C^1 . En outre $\mu \subset \mathbb{S}^1$ est homéomorphe à un ensemble de Cantor et $\mu = \mathbb{S}^1 - \cup_{n \in \mathbb{Z}} J_n$.

Lemme 3.2.3. μ est un ensemble minimal.

Démonstration. D'après la proposition précédente $f(J_n) = J_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et donc $f(\mu) = \mathbb{S}^1 - \cup_{n \in \mathbb{Z}} f(J_n) = \mu$; μ est invariant par f . Pour montrer que μ est minimal pour f il suffit alors de montrer que l'orbite $\mathcal{O}(\theta) = \{f^n(\theta); n \in \mathbb{Z}\}$ de $\theta \in \mu$ par f est dense dans μ .

Premier cas : $\theta = a_k$ (ou b_k) pour $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\mathcal{O}(a_k) = \{a_n; n \in \mathbb{Z}\}$ qui est dense dans $\mathbb{S}^1 - \mu = \cup_{n \in \mathbb{Z}} J_n$; μ est homéomorphe à un ensemble de Cantor et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, a_n est une extrémité de J_n .

Deuxième cas (cas général) : Considérons la rotation $R_\alpha(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi(t+\alpha)}$ d'angle $2\pi\alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose $\theta_n = e^{2i\pi y_n}$. On peut montrer que $\theta_n = R_\alpha^n(\theta_0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. L'homéomorphisme $\tilde{h} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X} \subset [0, 1 + L]$ induit un homéomorphisme $h : Y = (\mathbb{S}^1 - \{\theta_n; n \in \mathbb{Z}\}) \rightarrow (\mathbb{S}^1 - \{a_n, b_n; n \in \mathbb{Z}\}) = X$ donné par $h(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi(1+L)^{-1}\tilde{h}(t)}$, $t \in \tilde{Y}$. On remarque que Y est invariant par R_α et X est invariant par f . □

En résumé nous avons montré que le diagramme suivante est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{R_\alpha} & Y \\
 h \downarrow & \searrow & \downarrow h \\
 X & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

En effet, comme toutes les orbites de R_α sont denses, les orbites de f sont denses dans X et sont donc denses dans μ . La commutativité du diagramme est équivalent à montrer que $\tilde{f}(\tilde{h}(y)) - \tilde{h}(y + \alpha) \in \mathbb{Z}$ pour tout y dans Y .

B. Feuilletages de Cherry sur le tore \mathbb{T}^2

Considérons un champ de vecteurs X sur une variété compacte M et notons $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ le flot de X . Pour tout $x \in M$, on définit les ensembles limites suivants :

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} \varphi_t(x)}$$

et

$$\alpha(x) = \bigcap_{T \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq T} \varphi_t(x)}$$

Les ensembles $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ sont des compacts invariants par le flot appelés respectivement les ensembles ω -limite et α -limite de x .

Définition 3.2.3. *Un quasiminimal d'un flot singulier est un compact invariant contenant une feuille récurrente et tel que toute feuille régulière y soit dense.*

Définition 3.2.4. *Un flot \mathcal{F} sur \mathbb{T}^2 est dit de type Cherry s'il possède exactement un quasiminimal $\Omega(\mathcal{F})$ et un nombre fini de singularités selles O_1, O_2, \dots, O_k qui appartiennent à $\Omega(\mathcal{F})$. Chaque selle O_i possède des séparatrices $L_1^i, L_2^i, L_3^i, L_4^i$ telles que :*

$$\Omega(\mathcal{F}) \cap [\omega(L_3^i) \cup \alpha(L_3^i)] = O_i$$

et

$$\Omega(\mathcal{F}) \subset \omega(L_j^i) \cup \alpha(L_j^i)$$

pour $j = 1, 2, 4$. Les ensembles $\omega(L_j^i)$ et $\alpha(L_j^i)$ sont respectivement les ensembles ω -limite et α -limite de L_j^i .

Il ressort de la définition que $\Omega(\mathcal{F})$ est nullepart dense car ne contenant pas les séparatrices $L_3^i (i = 1, 2, \dots, k)$. Ainsi $\Omega(\mathcal{F}) - \{O_1, O_2, \dots, O_k\}$ est localement homéomorphe au produit d'un ensemble de Cantor par un segment. Une construction géométrique d'un flot de Cherry est la suivante : on part d'un flot irrationnel du tore \mathbb{T}^2 , on ouvre une demi-orbite en créant une selle et une centre ; la demi-orbite est remplacée par deux demi-orbités dont la distance tend vers zéro quand on s'éloigne vers l'infini d'un côté. Le complémentaire Ω de la région résultant de l'ouverture (bordée par deux séparatrices) est l'unique quasiminimal de \mathcal{F} . Ω porte la selle et est bordé par ses trois séparatrices. Toutes les feuilles sauf la selle y sont denses. L'ensemble Ω est transversalement un ensemble de Cantor.

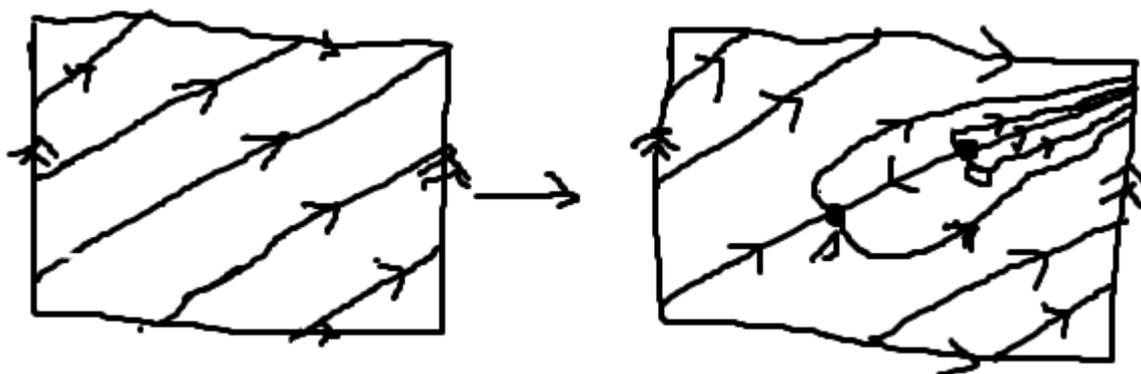


FIGURE 3.1 – Flot de Cherry

3.3 Feuilletages monotónement équivalents et laminations

Les laminations constituent en quelques sortes une généralisation des feuilletages. Beaucoup de théorèmes généraux sur les feuilletages se généralisent sur les laminations.

On rappelle qu'un ensemble minimal K pour un feilletage \mathcal{F} un sous-ensemble de M , non vide, compact et invariant pour \mathcal{F} qui ne contient pas strictement de sous-ensemble vérifiant ces propriétés. D'une manière générale une lamination est feilletage sur un sous-ensemble fermé d'une variété fermée de dimension n . Par exemple un ensemble minimal exceptionnel d'un feilletage de codimension 1 d'une variété de dimension 3 est une lamination.

Définition 3.3.1. *Soit M une variété fermée de dimension 3. Une lamination \mathcal{L} de M est un sous-ensemble fermé de M feilleté par des surfaces, les feuilles, avec la condition de trivialité locale suivante : M est recouvert par des cartes de la forme $D^2 \times T$ tels que les $D^2 \times \{t\}$ soient les traces des feuilles sur les cartes ; D^2 est le disque ouvert de \mathbb{R}^2 et T un sous-ensemble compact de I ; où I un intervalle ouvert de \mathbb{R} (Typiquement T est un point isolé ou un cantor).*

Définition 3.3.2. *On appelle régions complémentaires de \mathcal{L} les composantes connexes de $M - \mathcal{L}$.*

Définition 3.3.3. *La lamination \mathcal{L} est dite essentielle si elle vérifie les conditions suivantes :*

- i) Les régions complémentaires de \mathcal{L} sont irréductibles.*
- ii) Aucune feuille de \mathcal{L} n'est un tore qui borde un tore solide.*
- iii) Si A est la fermeture d'une région complémentaire, alors le bord et les bouts de A sont incompressibles.*

Les laminations essentielles généralisent la notion de feuilletages tendus.

Définition 3.3.4. *Une lamination \mathcal{L} est dite pure si elle est essentielle et possède une région complémentaire qui n'est pas un fibré en intervalles.*

Une opération importante qui permet de construire une lamination en dimension 3 est "l'équivalence monotone". Cette opération est l'analogue du "pompage" de Denjoy pour les feuilletages linéaires en dimension 2. Voici une description géométrique de cette opération. On part d'un feilletage tendu \mathcal{F} de codimension 1, sur une 3-variété. Soient \mathcal{L} un feilletage de dimension 1 transverse à \mathcal{F} et L_i une feuille de \mathcal{F} . On ouvre une feuille L_i en poussant sur les feuilles voisines, i.e on remplace L_i par deux feuilles dont la distance tend vers 0 quand on s'éloigne vers l'infini et on remplit la région résultant de l'ouverture par de nouvelles feuilles de sorte que l'on ait un ouvert W saturé de feuilles de \mathcal{F} et telle que \mathcal{L} le fibre en intervalles au dessus de L_i ; W s'identifie donc à $L_i \times]0, 1[$.

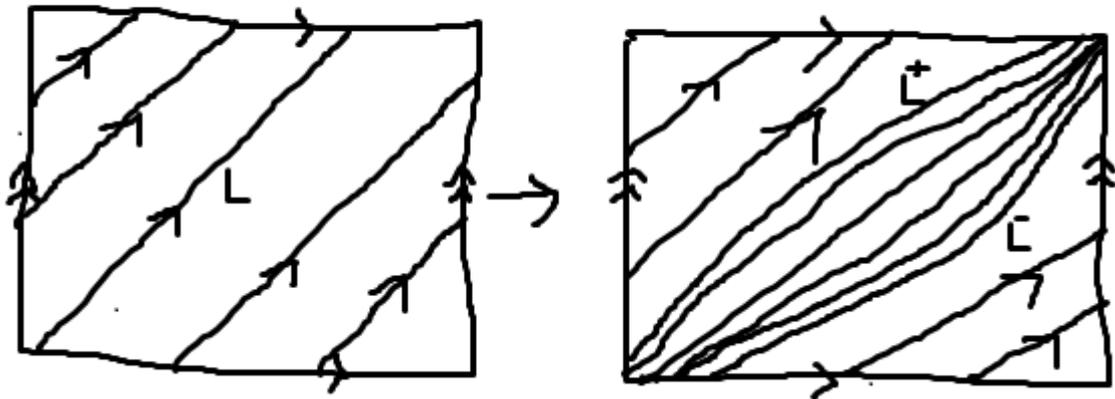


FIGURE 3.2 – Opération de Denjoy sur le tore

Cette opération effectuée sur un nombre fini de feuilles fournit un nouveau feuilletage \mathcal{F}' . On dit que \mathcal{F} est *monotonement équivalent* à \mathcal{F}' . Le feuilletage \mathcal{F}' contient une lamination qui est le complémentaire de l'ouvert W . Les régions complémentaires se décomposent en des parties compactes et des parties non compactes qui sont des fibrés en intervalles. Une *lamination pure* est précisément une lamination qui ne s'obtient pas par ce procédé ; autrement dit une lamination est pure s'il existe au moins une région complémentaire qui n'est pas un fibré en intervalles. Cette opération détruit la différentiabilité du feuilletage et la lamination obtenue est a priori de classe C^0 (théorème de M. Hermann sur les difféomorphismes du cercle).

3.4 Feuilletages tendus et feuilletages \mathbb{R} -couvert

Un feuilletage \mathcal{F} d'une 3-variété fermée M peut être relevé en un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ dans le revêtement universel \tilde{M} de M . Si le feuilletage \mathcal{F} est sans composante de Reeb, les feuilles du feuilletage relevé sont toutes difféomorphes au plan \mathbb{R}^2 . Palmeira a montré que dans ce cas le revêtement universel de M est homéomorphe à \mathbb{R}^3 et que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est conjugué au (feuilletage de \mathbb{R}^2 par droites) $\times \mathbb{R}$. Cela nous conduit à introduire la notion de feuilletage \mathbb{R} -couvert qui nous servira dans la suite. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 sur une 3-variété M . On note $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M , $\tilde{\mathcal{F}}$ le relevé de \mathcal{F} dans \tilde{M} et L l'espace des feuilles du relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ qui est un espace topologique quotient, en général non séparé, obtenu en identifiant les points de la même feuille ($L := \tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}}$).

Définition 3.4.1. *Un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sur une 3-variété M est dit \mathbb{R} -couvert si le feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ est un feuilletage standard de \mathbb{R}^3 par des plans horizontaux \mathbb{R}^2 . Dans ce cas l'espace des feuilles L est homéomorphe à \mathbb{R} .*

Proposition 3.4.1. *Un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 sur une 3-variété M est \mathbb{R} -couvert si et seulement si l'espace des feuilles L du feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ est séparé.*

Démonstration. Si \mathcal{F} est \mathbb{R} -couvert, il est évident que l'espace des feuilles est séparé. Supposons que L est séparé. Par absurde, on suppose qu'il existe une courbe fermée γ dans \tilde{M} transverse à $\tilde{\mathcal{F}}$. Alors γ borde un disque D immergé qui peut être mis en position générale par rapport à $\tilde{\mathcal{F}}$. Alors pour le feuilletage induit sur D il existe deux feuilles α_1, α_2 telle que α_1 est une courbe fermée et α_2 s'enroule sur α_1 . Soit F_i la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ contenant α_i . Alors F_2 tend vers F_1 , et par conséquent tout voisinage de F_1 contient F_2 et donc par unicité de la limite L n'est pas séparé. Ce qui est contradictoire. Ainsi une courbe transverse à $\tilde{\mathcal{F}}$ se projette injectivement sur L , et donc L est une variété de dimension 1 à base dénombrable d'ouverts. Elle est aussi séparée, ce qui fait que L est soit le cercle \mathbb{S}^1 , soit la droite réelle \mathbb{R} . Dans le cas du cercle, c'est une transversale fermée à $\tilde{\mathcal{F}}$; ce qui est impossible. Donc L est \mathbb{R} ; d'où \mathcal{F} est \mathbb{R} -couvert. \square

On donne ici quelques résultats liant les feuilletages \mathbb{R} -couvert et les feuilletages tendus. On cite surtout le résultat important de Goodman and Shields qui stipule que si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension 1 \mathbb{R} -couvert sur une 3-variété $M \neq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ alors \mathcal{F} est sans composante de Reeb.

La proposition suivante montre que tout feuilletage R -couvert est tendu. Mais notons que la réciproque n'est pas toujours vraie.

Proposition 3.4.2. [40] *Si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension 1 qui est \mathbb{R} -couvert sur une 3-variété fermée $M \neq \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ alors \mathcal{F} est tendu.*

Le théorème suivant, connu sous le nom de *lemme de dichotomie*, lie en dimension 3 la théorie des feuilletages tendus et celle des laminations.

Théorème 3.4.1. [8] *Soit \mathcal{F} un feuilletage tendu sur une 3-variété M . Si \mathcal{F} ne contient pas une lamination pure alors il est monotonement équivalent à un fibré en surfaces sur le cercle ou à un feuilletage minimal.*

En utilisant ce lemme de dichotomie, le résultat de Tischler [11] ainsi que le résultat de Bieri-Neumann-Strebel [34], on montre le

Théorème 3.4.2. *Soit V un fibré hyperbolique et \mathcal{F} un feuilletage tendu sur V qui possède une mesure transverse invariante. Si \mathcal{F} ne contient pas une lamination pure, alors \mathcal{F} est monotonement équivalent à la perturbation de la fibration de V en surfaces sur le cercle.*

Avant de prouver ce théorème, rappelons quelques résultats. Comme nous l'avons rappelé précédemment, l'opération d'équivalence monotone est l'analogue de l'opération de Denjoy pour les feuilletages linéaires de \mathbb{T}^2 . Cette opération détruit donc la différentiabilité du feuilletage et les feuilletages obtenus après ces opérations sont au plus de classe C^1 .

Théorème 3.4.3. (Novikov, Rosenberg, Palmeira)[8] *Soit M une 3-variété munie d'un feuilletage tendu \mathcal{F} , alors le revêtement universel \tilde{M} de M est difféomorphe à \mathbb{R}^3 ou à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.*

Remarquons alors que l'espace des feuilles L du relevé de \mathcal{F} dans \tilde{M} est une variété de dimension 1, simplement connexe mais non Hausdorff en général. Il y a deux possibilités pour L : soit L est homéomorphe à \mathbb{R} , auquel cas on dit que \mathcal{F} est \mathbb{R} -couvert, soit L possède des branchements. On dit dans ce dernier cas que \mathcal{F} est un feuilletage tendu branché et on distingue deux cas selon que les branchements sont dans une seule direction ou dans les deux directions. Si L est ramifié dans une seule direction on dit que \mathcal{F} est branché dans une direction (\mathcal{F} has one-sided branching) et s'il est ramifié dans les deux directions on dit que \mathcal{F} est branché en deux directions (\mathcal{F} has two-sided branching). L'action naturelle de $\pi_1 M$ sur \tilde{M} induit sur L une action par homéomorphismes ; et donc $\pi_1 M$ opère sur L par homéomorphismes.

Si le feuilletage \mathcal{F} est co-orientable, la co-orientation de \mathcal{F} induit une co-orientation sur $\tilde{\mathcal{F}}$ et donc une orientation sur L . Ce qui nous permet de définir une relation d'ordre partiel sur L .

Définition 3.4.2. *On définit sur l'espace des feuilles L du relevé d'un feuilletage \mathcal{F} un ordre partiel comme suit : si F et F' sont deux feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$, on dit que $F' > F$ s'il existe une transversale positivement orientée de F à F' ; on dit que $F > F'$ s'il existe une transversale négativement orientée de F à F' . Dans ces conditions on dit que F et F' sont comparables. S'il n'existe pas une transversale de F à F' on dit qu'elles sont incomparables.*

Si L est totalement ordonné, alors $L = \mathbb{R}$ et \mathcal{F} est \mathbb{R} -couvert.

Définition 3.4.3. *Un feuilletage \mathcal{F} est branché en une seule direction positive (resp. négative) si deux intervalles quelconques λ et μ de L ont la même borne inférieure (resp. supérieure) relativement à l'ordre partiel sur L .*

Définition 3.4.4. *Soit $I=[0,1]$. Un I -fibré feuilleté (en dimension 3) est un couple (N, \mathcal{G}) , avec N homéomorphe au produit $S \times I$ où S est une surface compacte ou non, fermée ou non muni d'un feuilletage \mathcal{G} tel que $S \times \{0\}$ et $S \times \{1\}$ sont des feuilles de \mathcal{G} et que \mathcal{G} est transverse aux fibres du I -fibré dans N .*

Les propositions suivantes résument les propriétés des feuilletages \mathbb{R} -covered.

Proposition 3.4.3. [41] *Soit \mathcal{F} un feuilletage \mathbb{R} -covered sur une variété M . Alors l'une des trois situations suivantes est réalisée :*

1. *Il existe une feuille compacte ;*
2. *\mathcal{F} est un feuilletage minimal ;*
3. *\mathcal{F} n'est pas minimal et il existe un unique ensemble minimal.*

Proposition 3.4.4. [40] *Supposons que \mathcal{F} est un feuilletage \mathbb{R} -covered et sans feuille compacte sur une variété M et qui n'est pas minimal. Alors on peut transformer \mathcal{F} en un feuilletage minimal : c'est-à-dire qu'il existe un feuilletage \mathcal{F}' qui est minimal obtenu à partir de \mathcal{F} en écrasant un nombre dénombrable de I -fibrés feuilletés de \mathcal{F} en une feuille.*

Lemme 3.4.1. [8] *Soit M une 3-variété qui contient une lamination essentielle λ et munissons M d'une métrique riemannienne. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute feuille F dans $\tilde{\lambda}$ soit quasi-isométriquement plongée dans son ε -voisinage et qu'il est impossible que deux feuilles non comparables F et F' de $\tilde{\lambda}$ contiennent des points aussi proches devant ε dans \tilde{M} .*

Théorème 3.4.4. Thurston-Rubinstein [8]. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si une 3-variété hyperbolique contient une géodésique de longueur $> \varepsilon$ alors M n'admet pas de feuilletage minimal.*

Le lemme suivant nous donne les conditions pour qu'un feuilletage tendu soit \mathbb{R} -couvert.

Lemme 3.4.2. *Soit \mathcal{F} un feuilletage tendu minimal sur une 3-variété fermée. Si \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante μ alors \mathcal{F} est \mathbb{R} -couvert.*

Avant de démontrer ce lemme rappelons les définitions suivantes

Définition 3.4.5. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques tels que $X \subset Y$. On dit que X est uniformément proprement plongé dans Y s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ propre tel que $\forall p, q \in X, d_Y(p, q) < t \Rightarrow d_X(p, q) < f(t)$.*

Définition 3.4.6. *Soit (X, d_X) un espace métrique et soient $k > 1$ et $\varepsilon > 0$. Une application $l : \mathbb{R} \rightarrow X$ est dite (k, ε) -quasi-géodésique si $\forall p, q \in \mathbb{R}, \frac{1}{k}d_X(l(p), l(q)) - \varepsilon \leq d(p, q) \leq kd_X(l(p), l(q)) + \varepsilon$, avec $d_X(., .)$ une distance sur X et $d(., .)$ la distance euclidienne sur \mathbb{R} .*

Les quasi-géodésiques d'un espace métrique X sont alors les quasi-isométries de la droite réelle dans X . On peut aussi définir les quasi-géodésiques locales dans X qui sont des applications $l : \mathbb{R} \rightarrow X$ dont les restrictions à des intervalles convenables sont quasi-isométriques.

Démonstration. (du lemme 3.4.2)

Pour démontrer ce lemme, il faut montrer que dans ces conditions \mathcal{F} n'est pas branché : ni dans une direction ni dans deux directions. Puisque \mathcal{F} est minimal la mesure transverse μ de \mathcal{F} est nécessairement de support total et est sans atome. Par absurde supposons que \mathcal{F} est branché dans les deux directions, l'espace des feuilles L du feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ n'est pas séparé, il existe alors une suite F_i de feuilles dans $\tilde{\mathcal{F}}$ dont la limite contient deux feuilles F et F' distinctes et non comparables de $\tilde{\mathcal{F}}$. On peut trouver alors une suite de points p_i et q_i de F_i qui sont arbitrairement proches de deux points $p \in F$ et $q \in F'$. Donc pour i assez grand, la feuille F_i n'est pas proprement uniformément plongé, par minimalité aucune feuille de \mathcal{F} n'est proprement uniformément plongée. De plus les feuilles sont quasi-géodésiquement plongées dans leur ε -voisinage pour ε suffisamment petit par conséquent l'application normale $F_i \rightarrow F$ (i.e le flot d'un champ de vecteurs normal) est homotope à un homéomorphisme (voir [8] lemma 3.2.5). L'image par cet homéomorphisme d'un arc joignant p_i et q_i est un arc contenu dans F et joignant p à un point $q' \in F$, mais alors la trajectoire normale passant par q' rencontre $q \in F'$ pour ε suffisamment petit, ce qui contredit le fait que F et F' sont non comparables. Il s'en suit donc que les feuilles F_i contiennent des points r_i assez éloignés de F i.e qui sont à une distance $> \varepsilon$ de F .

Considérons donc la trajectoire normale T d'origine dans F et d'extrémité r_i de longueur d très grand devant ε . Puisque \mathcal{F} est minimal, il existe un nombre R tel que tout disque de rayon R dans n'importe quelle feuille intersecte toute transversale de longueur plus grande que $d/3$ (voir [8] lemma 2.4.3). Ainsi il existe un disque de rayon R dans F_i qui intersecte un translaté par α de $T/3$; avec α l'application d'holonomie fixant dans la même feuille les extrémités d'un chemin transverse au feuilletage et $T/3$ un arc transverse de longueur $d/3$. Pour i assez grand, l'holonomie de F_i le long d'un chemin g dans F_i se confond

avec une petite partie de la transversale orthogonale et les feuilles F_i et F rencontrent l'intérieur de $\alpha(T)$ mais les extrémités de T sont dans F et F_i . Puisque V est compacte, l'holonomie de \mathcal{F} le long d'un chemin g dans F_i de longueur R contracte $\alpha(T)$ ce qui est impossible puisque le feuilletage \mathcal{F} étant minimal le support de μ est total et T ne peut être contractée par l'holonomie. Ainsi l'holonomie ne peut contracter une transversale, ce qui contredit l'existence de α et donc de F et F' . En conclusion le feuilletage \mathcal{F} n'est pas branché, il est donc \mathbb{R} -couvert. \square

Démonstration. (du théorème 3.4.2) .

Le théorème découle du théorème 3.4.1 et du lemme 3.4.2 ci-dessus. En effet, d'après le lemme de dichotomie, comme \mathcal{F} ne contient pas une lamination pure alors il est monotone-ment équivalent à un fibré en surfaces sur le cercle ou monotone-ment équivalent à un feuilletage minimal. Dans le premier cas, nous avons le résultat souhaité. Pour montrer que le feuilletage est la perturbation d'une fibration dans le deuxième cas, utilisons le lemme 3.4.2. En effet, la mesure étant de support total et sans atome, on sait que si \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante alors il est topologiquement équivalent à un feuilletage défini par une 1-forme fermée. En particulier si \mathcal{F} est différentiable de classe C^2 , alors il est défini par une 1-forme fermée non singulière et donc est un fibré en surfaces sur S^1 (d'après Tischler [11]). Si \mathcal{F} est de classe C^1 alors μ est dans la même classe que la mesure de Lebesgue et comme \mathcal{F} est \mathbb{R} -couvert (d'après le lemme 3.3) et V est hyperbolique alors l'action du groupe fondamental $\pi_1(V)$ de V sur l'espace des feuilles L du relevé de \mathcal{F} est conjugué à une action par translation. Et d'après le résultat de Bieri-Neumann-Strebel [34] le feuilletage \mathcal{F} est la perturbation de la fibration . \square

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons démontré deux résultats principaux : l'un qui donne les conditions suffisantes pour qu'un feuilletage tendu sur une 3-variété atoroidale soit proche de la fibration ; et un autre qui donne une sorte de classification, à équivalence monotone près, des feuilletages tendus des fibrés hyperboliques. Au cours de notre travail nous avons remarqué que sur des fibrés pseudo-Anosov quelconques les feuilletages de codimension 1 sans feuille compacte qui sont en position générale améliorée par rapport à la fibration sont isotopes aux feuilletages modèles. Toutefois une question importante reste de savoir quelles sont les conditions pour qu'un feuilletage sans feuille compacte quelconque sur un fibré pseudo-Anosov soit en position générale améliorée ? Une autre question importante qui reste ouverte est celle de la rigidité des feuilletages modèles sur des fibrés pseudo-Anosov, en particulier sur V_ψ^3 .

Bibliographie

- [1] A. Candel and L. Conlon *Foliations I*, Graduate studies in Mathematics AMS **13**.
- [2] A. Denjoy *Sur les courbes définies par une équation différentielle à la surface du tore*, J. Math. Pures et Appli. **13**(1932), 333-375 .
- [3] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, S.M.F, astérisque (1979), 66-67.
- [4] A. J. Casson, S. Bleiler; *Automorphism of surfaces after Nielsen and Thurston*, Cambridge University Press (1988).
- [5] B. Seke, *Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension 1*, Ann. Inst. Fourier **30** (1980), 1-29.
- [6] C. Camacho; *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser Boston, Inc. (1985).
- [7] C. Godbillon; *Feuilletages (Etudes géométriques)*; Birkhauser Bassel (1991).
- [8] D. Caligari; *Promoting essential laminations*, Invent. Math. **166**, (2006) 583-643.
- [9] D. B. A . Epstein, *A topology for the space of foliation*, JLMS **339** (1986), 99-130.
- [10] D. Gabai; *Essential laminations and Kneser Normal Form*, J. Differential Geometry **53** (1999), 517-574.
- [11] D. Tischler, *On fibering certain manifold over the circle*, Topology **9** (1970), 153-154.
- [12] D. Sullivan; *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 218-223.
- [13] E. Ghys, V. Sergiescu, *Stabilité et Conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, Topology **19**, (1980).
- [14] E. Fedida, *Feuilletages du plan, feuilletages de Lie*, Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg (1973).
- [15] E. Giroux, *Topologie de contact en dimension 3*, Séminaire N. Bourbaki, (1992-1993), exp. No 760, p. 7-33.
- [16] F. Laudenbach, S. Blank, *Sur l'isotopie des formes fermées en dimension 3*, Invent. Math. **54** (1979), 103-177 .
- [17] G. Levitt, *Feuilletages des surfaces*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 7 (1983).
- [18] H. Dathe, *Sur les feuilletages tendus transversalement affines des 3-variétés fibrées sur S^1* , African Diaspora Journal of Mathematics, **9**, No. 2 (2010), 17-33 .

- [19] H. Dathe; *Feuilletages des variétés fibrés et structures de contact*, Ed. Universitaire Européenne, Südwestdeutscher Verlag für Hochschulschriften GmbH & Co.KG, 2012. ISNN .
- [20] H. Dathe, A. Saidou, *Feuilletages sans feuille compacte sur les fibrés en surfaces sur le cercle*, African Diaspora Journal of Mathematics, **11**, No. 2 (2011), 78-89 .
- [21] H. Dathe, C. Tarquini, *Sur les feuilletages des variétés fibrées*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, **15** (2008), 211-232.
- [22] H. Dathe, P. Rukimbira, *Foliations and contact structures*, Advances in Geometry **4** (2004), 75-81.
- [23] H. Dathe, R. Nkuzimana and A. Saidou; *Sur les feuilletages tendus des fibrés hyperboliques*, Afrika Matematika, A paraitre.
- [24] H. Dathe and R. Nkuzimana; *Taut foliations of some surface bundles over Circle*, Journal of Pure and Applied Mathematics :Advances and Applications, vol 18, No.1 (2017), 1-24 .
- [25] H. Dathe and A. Saidou; *On the classification of transversely projective foliations on pseudo-Anosov bundle*, Afrika Matematika, **27** (2016).
- [26] H. Dathe et C. Tarquini; *Sur les feuilletages des variétés fibrés*, Annales mathématiques Blaise Pascal, Volume 15, No.2 (2008).
- [27] H. Nakayama, *Transversely affine foliations on some surfaces bundles over S^1 of pseudo-Anosov type*, Ann. Inst. Fourier **41** (1991).
- [28] J. Hass, *Minimal surfaces in manifolds*, Comment.Math.Helv **61**, (1986), 1-32.
- [29] J.P. Otal, *Le théorème hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, S.M.F, astérisque **235** (1996).
- [30] K. Honda, W. Kazez, G. Matic, *Tight contact structures on fibered hyperbolic 3-manifolds*, J. Differential Geometry **64** (2003), 305-358.
- [31] M. Hermann, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. IHES **49** (1979), 5-234.
- [32] P. Molino; *Riemannian Foliations*, Progress in Mathematics, volume 73, Birkhäuser.
- [33] P. Tondeur; *Foliations on Riemannian Manifolds*, Springer-Verlag, New York Inc.
- [34] R. Bieri, D. Neumann, R. Strebel *A geometric invariant of discrete groups*, Invent.math. **90** (1987), 451-477.
- [35] R. Moussu; *Sur les problèmes de classification de feuilletages*, Revista Colombiana de Matemáticas, **6** (1972), p.59-68.
- [36] R. Moussu and R. Roussarie; *Relations de conjugaison et cobordisme entre feuilletages*, Publications mathématiques de l' I.H.E.S., **43** (1979), p.143-168.
- [37] R. Roussarie, *Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S., **43** (1974), p.101-141.
- [38] R. Roussarie, *Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie*, Publ. Math. IHES **43** (1974), 101-141.

-
- [39] R. Schoen, S. Yao, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature*, Ann. Math. **110** (1979), 127-142.
- [40] Sérgio Fenley, *Foliations, topology and geometry of 3-manifolds : \mathbb{R} -covered foliations and transverse pseudo-Anosov flows*, Comment. Math. Helv. **77**, 415-490.
- [41] S. Fenley, R. Feres, K. Parwani ; *Harmonic functions on \mathbb{R} -covered foliations*, Erg. Th. Dyn. Sys. **29** (2009), 1141-1161.
- [42] S.P. Novikov, *Topology of foliations*, Trans. Moscow Math. Soc. **14** (1965).
- [43] S.P. Novikov, *Foliations of codimension one*, Soviet. Math. Dokl. **5** (1964).
- [44] T. Cherry, *Analytic quasi periodic curves of discontinuous type on torus*, Proc. London Math. Soc **43**(1938), 175-215.
- [45] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton University Press, **1** (1997).
- [46] W. Thurston, *Norm on the homology of 3-manifolds*, Memoirs of the A.M.S **339** (1986), 99-130.
- [47] Y.M. Eliasberg, W.P. Thurston, *Confoliations*, University Lecture Series, A.M.S. **13**.

Résumé

Dans ce travail nous étudions la topologie et la dynamique de certains feuilletages sur des variétés de dimension 3 qui fibrent en surfaces sur le cercle \mathbb{S}^1 . Ces variétés sont obtenues par suspension d'un difféomorphisme d'une surface de genre $g \geq 1$. Dans le cas du genre 1, les travaux de Ghys et Sergiescu en donnent une étude complète. Dans [13] les auteurs ont pu classer tous les feuilletages sans feuille compacte transversalement orientables et de classe C^r ($r \geq 2$). Ils ont pour cela construit deux feuilletages de référence qu'ils nomment de "feuilletages modèles" qui sont des feuilletages sans feuille compacte, transversalement affines et minimaux. De plus, ils montrent que ces modèles sont structurellement stables. La recherche d'une généralisation de ces travaux de Ghys et Sergiescu a fait objet de plusieurs travaux de recherche en théorie des feuilletages depuis les années 80 parmi lesquels on peut citer celui de Nakayama en 1990 [27] qui a obtenu un résultat similaire à celui de Ghys-Sergiescu pour les feuilletages transversalement affines et sans feuille compacte sur les fibrés pseudo-Anosov ; celui de H. Dathe qui étend le résultat de Nakayama aux feuilletages transversalement affines et sans composante de Reeb. Ce dernier a également montré que les feuilletages modèles n'admettent pas de déformations transversalement projectives non affines. Notons que la classe de différentiabilité et l'hypothèse de compacité dans la classification de Ghys-Sergiescu sont cruciales. En effet, H. Dathe et C. Tarquini ont montré que en classe C^0 et en classe C^1 le théorème de Ghys-Sergiescu ne s'étend pas [21]. Et dans le cas des fibrés ouverts de genre 1 c'est-à-dire que les fibres sont des tores troués, H. Dathe et A. Saidou ont construit des feuilletages exotiques de classe C^∞ .

Dans le même ordre d'idée, H. Dathe et A. Saidou ont récemment montré un résultat analogue à celui de Nakayama dans le cas des feuilletages transversalement projectifs [25]. La question n qui nous de généraliser ces résultats sans se restreindre au groupe transverse est le centre de notre recherche ? Mais à vrai dire ces résultats ont peu de chances de se généraliser. La seule chose qu'on peut espérer pour une 3-variété quelconque est de trouver les conditions pour qu'un feuilletage tendu quelconque soit proche à la fibration.

Ce sont les travaux de D. Gabai [10] selon lesquels, sur une 3-variété M fermée atoroidale, il existe un entier $N(M) > 0$ tel que pour tout feuilletage tendu quelconque \mathcal{F} , on peut construire $N(M)$ feuilletages tendus sur M dont l'un au moins soit une perturbation de \mathcal{F} , qui sont la source de notre motivation. En effet, on sait que les feuilletages dont les feuilles sont les fibres de la fibration ainsi que leurs C^1 -perturbations sont tendus. On se demande alors si tous les feuilletages tendus sur une 3-variété M proviennent de la fibration par de petites perturbations ? Dans ce travail nous avons démontré que l'obstruction à ce qu'un feuilletage tendu quelconque sur une 3-variété atoroidale ne provienne pas de la fibration est l'égalité des classes d'Euler [24]. Nous avons démontré également que pour les 3-variétés fibrées hyperboliques (c'est-à-dire dont le premier nombre de Betti est égal à 1) l'existence d'une lamination pure est la seule obstruction à ce qu'un feuilletage tendu quelconque soit, à équivalence monotone près, une perturbation de la fibration [23].