UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Année : 2015-2016 N°d'ordre : **86**

THÈSE DE DOCTORAT UNIQUE

Présentée par

N'DOGOTAR NELIO

En vue de l'obtention du grade de Docteur de l'Université Cheikh AntaDiop de Dakar(Sénégal)

Mention : Mathématiques et Modélisation
Spécialité : Analyse, Statistique et Applications

Thème :

Localisation Optimale de Hubs et Taille Optimale d'une Flotte enVue d'une Mise en Place d'une Compagnie Aérienne en Zone UEMOA.

Soutenue publiquement le 27/08/2016 devant le jury composé de :

Président :	**M. Diaraf SECK**	Professeur, (UCAD)
Rapporteurs :	**M. Blaise SOME**	Professeur, Université de Ouagadougou (Burkina Faso)
	M. Koina RODOUMTA	Maître de conférences, Université de N'djamena (Tchad)
	M. Benjamin MAMPASSI	Professeur, UCAD (Sénégal)
Examinateurs :	**M. Youssou GNINGUE**	Professeur, Université Laurentian (Canada)
	M. Gabriel Birame NDIAYE	Maître de conférences, UCAD (Sénégal)
	M. Papa NGOM	Maître de conférences, UCAD (Sénégal)
	M. Ibrahima FAYE	Maître de conférences, UADB (Sénégal)
Invités		
	M. MaguèyeMarameNDAO	Directeur Général de l'ANACIM (Sénégal)
	Mme OBAME Claire Josette	Directrice de l'Exploitation Technique de l'ASECNA
Directrice de thèse :	**Mme SalimataGuèyeDIAGNE**	Professeur, UCAD (Sénégal)

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

– À Mon feu papa Natoïngar Donaïdou qui m'a toujours encouragé à faire le doctorat mais hélas ne pourra pas voir le fruit de son encouragement ;
– À mon épouse Hemengdi Koumassigue Claudine. Qu'elle trouve ici le fruit de son amour et de sa patience ;
– À mes enfants Ramadji Nélio Arizono, Ladeng Nélio Sandra et Allandigui Nélio Magloire. Que ce travail vous serve d'exemple ;
– À tous les jeunes de mon village LAGUI. Qu'ils puissent emboîter les pas que je viens de poser.

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord le Dieu tout puissant, créateur du ciel et de la terre de m'avoir donné la santé, l'intelligence et la compréhension afin que je puisse arriver à cette fin.
Je tiens à remercier ma directrice Pr Salimata GUEYE DIAGNE de m'avoir accepté dans son laboratoire. Ce travail ne serait pas ce qu'il est sans sa présence, sa disponibilité, sa générosité, sa rigueur scientifique, son enthousiasme et surtout ses précieux conseils qui m'ont permis de travailler et d'en arriver là. Professeur, avec vous j'ai appris beaucoup de choses et surtout une façon scientifique d'aborder des problèmes. Je vous en suis très reconnaissant.

Je remercie aussi le Pr Blaise SOME, Professeur titulaire à l'université de Ouagadougou au Burkina ; le Pr Koina RODOUMTA, Maître de Conférences à l'université de N'djaména au Tchad et le Pr Benjamin MAMPASSI, Professeur titulaire à l'université Cheikh Anta Diop de Dakar au Sénégal d'avoir accepté cette lourde tâche, celle de rapporter cette thèse.

Un grand remerciement au Pr DIARAF SECK pour m'avoir fait honneur de présider mon Jury de thèse.

L'honneur me choit de remercier de vive voix M. Gabriel Birame NDIAYE, Maître de conférences à l'UCAD ; M. Papa NGOM, Maître de conférences à l'UCAD et M. Ibrahima FAYE, Maître de conférences à l'UADB d'avoir accepté d'être membres du jury pour l'évaluation de ce travail malgré leur multiples occupations.

Je remercie aussi la Direction Générale de l'ANACIM plus particulièrement le Directeur Général M. Maguèye Marame NDAO pour sa collaboration et d'avoir accepter de prendre part à la soutenance. Je n'oublie pas Mme OBAME Claire Josette, Directrice de l'Exploitation Technique de l'ASCENA, d'avoir accepté d'être présente à la soutenance.

Toute ma gratitude à tous les membres de l'équipe de Mathématiques de la Décision/Recherche Opérationnelle du Laboratoire de Mathématiques Appliquées (LMA) du Département de Mathématiques et Informatique que j'ai eu à côtoyer que je ne peux citer nommer tous. Vous m'avez aidé dans mes recherches. Les partages scientifiques de tous les jeudis vont me manquer.

Toute ma reconnaissance à la Commission Nationale de Formation des Formateurs (CONFOFOR) pour son appui financier, aux responsables et collègues enseignants de l'Université de Sarh. Chacun de vous a contribué d'une manière ou d'une autre à l'aboutissement de cette thèse.

Je tiens à remercier mes parents, amis et collègues qui m'ont soutenu et encouragé à réaliser ce rêve de faire la thèse.
Un remerciement particulier à ma maman DJIRAB POUGOU Martine qui ne cesse de prier pour que je réussisse ma la vie.

Enfin je remercie ma chère épouse HEMENGDI KOUMASSIGUE CLAUDINE, mes enfants Ramadji Nélio Arizono, Ladeng Nélio Sandra et Allandigui Nélio Magloire pour leur patience. Pendant de longs moments nous nous sommes manqués mais vous avez pu supporter jusqu'au bout. Recevez ici le fruit de votre patience. A toi mon épouse, merci encore une fois pour tes encouragements et ton amour.

« *Il n'y a rien dans le monde qui ne se réalise sans la volonté de minimiser ou de maximiser quelque chose* ». EULER

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous résolvons le problème de localisation de hub et celui de la détermination de la taille d'une flotte d'avions pour une compagnie aérienne de la zone UEMOA en utilisant l'optimisation linéaire en nombres entiers (OLNE). Nous avons établi cinq modèles dont deux pour la localisation d'un hub minimisant la somme des distances et intégrant le coût d'extension des aéroports sous contraintes de capacités ; un pour la localisation de deux hubs et construction de réseau aérien qui minimise la somme des distances sous les contraintes de capacités et de rattachement des aéroports non hubs aux aéroports hubs et deux pour la détermination de la taille d'une flotte d'abord avec un seul type d'avion puis avec deux types d'avion. Nous avons aussi eu à établir quelques résultats dont l'optimalité du hub et l'existence de la solution optimale des modèles de la flotte.
Les logiciels Python et Cplex dans OPL (Optimization Programming Language) ont été utilisés pour les simulations

Mots clés : Localisation optimale, hub, flotte, UEMOA, OLNE.

ABSTRACT

In this thesis, we solve the hub location problem and of determination the size of the aircraft fleet for an airline of the WAEMU zone using linear integer optimization (IO). We established five models whose two for one hub location that minimizes the sum of the distances and that integrates airport extension cost under capacity constraints ; one for two hubs location and air network construction that minimizes the sum of distances under constraints of capacity and of joining to no-hub airports to the hubs and two for determination the size of fleet, at first with a single aircraft type then with two aircraft types. We also had established some results whose optimality of hub and the existence of the optimal solution of the fleet models.
The Python and CPLEX softwares in Optimization Programming Language (OPL) were used for the simulations.

Key words : Optimal location, hub, fleet, WAEMU, IO.

SOMMAIRE

LISTE DES TABLEAUX

TABLE DES FIGURES

ABRÉVIATIONS

- ANACIM : Agence Nationale de l'Aviation Civile et de la Météorologie ;
- ABJ : Abidjan ;
- BKO : Bamako ;
- CFA : Communauté Financière Africaine
- COO : Cotonou ;
- DKR : Dakar ;
- LFW : Lomé ;
- MCLP : Maximum Covering Location Problem ;
- NIM : Niamey ;
- OACI : Organisation de l'Aviation Civile Internationale ;
- OMD : Objectifs du Millénaire pour le Développement ;
- OUA : Ouagadougou ;
- OXB : Bissau ;
- PIB : Produit Intérieur Brut ;
- PL : Programme Linéaire ;
- PLNE : Programme Linéaire en Nombres Entiers ;
- UEMOA : Union Économique Monétaire Ouest Africaine ;
- V.V.C : Valeurs Vérifiant les Contraintes.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Contexte général

L'activité du transport aérien est un processus complexe qui fait intervenir des investissements lourds (les avions et les infrastructures de maintenance), du personnel hautement qualifié (le personnel naviguant, en particulier), une informatique temps réel très coûteuse (les systèmes de réservation et de gestion). En Afrique, le secteur aérien représente 6,9 millions d'emplois et un PIB de plus de 80 millions de dollars [1], ce qui est bien au-dessous de ses potentialités.
L'Afrique, avec 350 millions d'habitants, représente le tiers de la population du monde [2]. Cette masse est appelée à beaucoup de mobilité, surtout que plusieurs secteurs industriels sont en plein développement du Nord au Sud et de l'Est à l'Ouest de l'Afrique.
Avec des moyens de transport routier et ferroviaire sous devéloppés, une classe moyenne voyageuse en pleine expansion et des besoins énormes, l'aérien représente un formidable réservoir de création d'activités et d'emplois. Pourtant, le secteur peine encore à se décoller (l'Afrique représente moins de 3% du trafic mondial), le prix des billets pour les liaisons intra-Africaines reste élevé, de même que les coûts aéroportuaires ; de nombreuses compagnies africaines sont sur la liste noire de l'union européenne et les majors historiques comme Air France/KLM sont encore omniprésentes pour les liai-

1. Source : Africa 24 Magazine n°18. Octobre-Décembre 2015
2. Rapport de la Banque Africaine de Développement de Mai 2011

sons intercontinentales.
L'UEMOA, après plus de vingt ans d'existence, a enregistré des succès indéniables, particulièrement dans la gestion de sa monnaie, de sa politique de change et de l'organisation de son marché de valeurs mobilières. Elle a également su préserver la solidité et la fiabilité de ses institutions ainsi que l'adhésion de ses membres au projet communautaire. Cependant, bien que sa neutralité, son autonomie et son autorité continuent d'être respectées, elle peine à s'améliorer dans le domaine du trafic aérien. Des améliorations significatives qu'on peut attendre de l'union ne sont pas dans le domaine monétaire où elle a su préserver et renforcer les acquis de l'Union Monétaire Ouest Africaine(UMOA) qui l'a précédée[4] mais plutôt dans ceux qui convergent vers l'atteinte des objectifs du Millénaire pour le développement (OMD) parmi lesquels la croissance économique durable et la réduction de la pauvreté. Les transports, en particulier celui aérien, jouent un rôle de premier plan dans la réalisation des objectifs d'élimination de la pauvreté et de développement durable. Ainsi donc un défi à relever dans le transport aérien par l'UEMOA s'impose. Et pour plus de souveraineté dans ce domaine, la création d'une compagnie aérienne est plus que nécessaire.
Mais pour qu'elle soit à la fois compétitive et sûre, une compagnie aérienne doit être gérée judicieusement. Pour ce faire elle doit faire appel à des techniques d'optimisation spécifiques à chacune des étapes de sa création et de sa production.
La Recherche Opérationnelle regroupe ces techniques. D'ailleurs plusieurs méthodes de la Recherche Opérationnelle sont déjà utilisées par de nombreuses compagnies aériennes. Certaines ont même un département de Recherche Opérationnelle comme Air France). Les pays membres de la zone UEMOA doivent eux aussi développer un système de transport aérien qui soit au niveau de la croissance.
Une compagnie aérienne ne peut exister sans les aéroports et les avions. Et avec la concurrence exacerbée dans le transport aérien, le choix d'un des aéroports fréquentés comme hub, plate-forme de correspondance et le dimensionnement de sa flotte sont fondamentaux. Cette thèse a pour ambition d'aider l'UEMOA à un meilleur dimensionnement de sa flotte et à une localisation optimale de son (ou ses) hub(s) pour un réseau d'exploitation

rentable des lignes aériennes. Hub qui est pour une compagnie aérienne l'aéroport pivot où se concentre la majeure partie de ses activités de gestion. Flotte qui coûte extrêmement chère et qui constitue la première richesse d'une compagnie aérienne.

Problématique de recherche

Un hub est une plate-forme aéroportuaire de correspondance permettant aux compagnies aériennes de concentrer leurs avions en un aéroport. Le principe du hub est de permettre la connexion d'un grand nombre de petits flux de trafic (court et moyen courriers) aux flux plus importants de et/vers l'international (long courrier). Il s'agit de créer plusieurs fois par jour des « plages » de rendez-vous sur lesquelles sont concentrés les arrivées et les départs des vols. Les passagers peuvent ainsi rapidement et facilement prendre une correspondance, d'un vol moyen courrier vers un vol long courrier ou vice-versa. Cette organisation par plages multiplie les opportunités de correspondances avec un temps d'attente minimum entre deux vols.
Cependant, le choix d'un aéroport par une compagnie aérienne pour en faire un hub ne doit rien au hasard. Il s'agit tout d'abord d'être bien positionné par rapport aux courants de trafic. Il faut en effet éviter aux passagers des détours trop importants, sans quoi il sera difficile de les capter. Il faut ensuite se localiser dans une région qui génère elle-même une importante demande en transport aérien, ceci afin de contribuer au remplissage des avions et à la diversité géographique des liaisons proposées. De ce fait, la plupart des hubs sont localisés à proximité d'importantes agglomérations urbaines, surtout si celles-ci concentrent des fonctions économiques internationales. Enfin il faut disposer d'un aéroport offrant une capacité suffisante, tant pour y développer l'offre que pour organiser les horaires le plus librement possible et ainsi coordonner efficacement les vols en vue d'optimiser les correspondances. L'objectif de cette thèse est de déterminer un ou des hub(s) suivant un certain nombre de critères et de déterminer la taille de la flotte pour une compagnie aérienne régionale de la zone.
La localisation d'un hub consiste à déterminer l'emplacement d'une ou plusieurs installation(s) (aéroports) de façon à optimiser une fonction écono-

mique dépendant des distances entre ces aéroports et un ensemble d'utilisateurs (ou clients) potentiels.
La taille optimale de flotte aérienne consiste à déterminer le nombre d'avions et à déterminer la meilleure manière de les repartir sur les différents vols. cette répartition a un impact majeur sur le profit d'une compagnie aérienne, puisque'elle détermine le nombre de places disponibles sur les itinéraires du réseau aérien, ainsi que le coût de fonctionnement de celui-ci.
Ce sujet fait partie des préoccupations des gestionnaires des compagnies aériennes de la zone UEMOA pour lesquelles notre équipe de Mathématiques de la Décision/Recherche Opérationnelle a été sollicitée.

État de l'art

Avant de commencer à élaborer des modèles et à développer les méthodes de résolution, il est important de chercher dans la littérature ce qui existe comme travaux en rapport avec le problème traité dans cette thèse.

La localisation d'un hub est un problème crucial dans une compagnie aérienne. C'est depuis plus de trois décennies que les chercheurs ont commencé à étudier ce problème et jusqu'aujourd'hui, le problème de localisation de hub pour une compagnie reste toujours d'actualité puisque des compagnies meurent et d'autres naissent. Avec l'évolution du trafic aérien, les nouvelles compagnies cherchent à moderniser leur hub. Ainsi donc le choix de l'aéroport pour en faire un hub est un problème d'optimisation qui demande des recherches approfondies et surtout scientifiques.
Le premier modèle de localisation industrielle a été élaboré par Weber en 1909[33]. Il a considéré le problème de la localisation d'un point d'offre de service de façon à ce que le coût de transport soit minimisé. Ce modèle est ensuite enrichi par de nombreux travaux comme ceux de Palander en 1935[53], de Hoover en 1937[21], de Lösh en 1940[1], de Ponsard en 1955[8], de Devletoglou en 1965[38], Church et al en 1994[47], O'kelly en 1987[41], Campbell en 1994[9], Ernest et al en 1996[22], Pirkul et al en 1998[44], Campbell et al en 2002[11]. Un état de l'art sur la localisation a été fait par Alumur Sibel en 2007[3].
Plus récemment l'étude de la localisation de hub sous contraintes de capa-

cités a été réalisée par Rodiguez et al. en 2007[57], la relaxation lagragienne du problème de capacité de localisation de hub avec simple affectation a été effectuée par Ivan et al. en 2009[15]. La méthode de Branch and cut pour les problèmes de capacités de localisation de hubs avec affectation simple a été présentée par Ivan et al en 2011[16]. Vingt ans de recherche sur la localisation de hub ont été resumés par Campbell en 2012[12]. Coumba DIALLO [20] a abordé dans sa thèse la localisation de hubs, correspondance des avions et l'ordonnancement des atterrissages.

Le problème d'affectation d'une flotte a aussi fait couler d'encre. Plusieurs recherches sur ce problème ont été faites. Une première étude d'affectation d'avions par la programmation linéaire a été une thèse d'une université américaine sur le prix des avions[23] faite en 1959. Elle avait pour but d'affecter les divers types d'avions pour satisfaire la demande globale segmentée par secteurs. Une approche du caractère combinatoire fut ensuite développée par M. Peyrelevade au Secrétariat Général à l'Avion Civile, et MM. Gretz puis Millan, stagiaire à Air France[30][25]. En 1973, J. Pereyrelevade et al. [30] dans leur modèle de choix d'investissement pour une compagnie aérienne rappellent d'abord les divers modèles qui ont été conçus en vue de déterminer la composition optimale d'une flotte dans le cadre d'une compagnie aérienne pour une année déterminée. Mathilde Peyrega et François Soumis dans[35] ont présenté l'état de l'art sur les sujets de réaffectation des types d'avion, et proposent un modèle qui permettrait aux compagnies aériennes dont le réseau est concentré sur certains aéroports appelés hubs de tirer partie de la structure de leur réseau. D'autres comme Agard J. et al[2], Rexing Brian et al[46], Desaulniers et al.[19], HANE et al.[7], SUBRAMANIAN et al.[45] et Lalongo David[28] ont aussi travaillé sur l'affectation optimale d'une flotte d'avions.

Cependant à travers toutes ces études, le problème spécifique pour la localisation de hub et l'affectation de flotte optimale pour une compagnie sous régionale de la zone UEMOA n'a pas été étudié. En plus les contraintes sur le nombre de passagers enregistrés et le nombre de mouvements enregistrés n'ont pas été pris en compte dans la localisation de hub.

Plan de la thèse

Cette thèse commence par une introduction générale qui situe le contexte général de notre étude. Nous posons ensuite la problématique de notre recherche et détaillons le plan de notre thèse. Dans le premier chapitre, quelques notions fondamentales utilisées dans cette thèse, ont été rappelées et développées. Il s'agit principalement de la notion de programmation linéaire en nombres entiers qui a permis d'établir nos modèles de localisation de hubs pour la zone UEMOA. Mais avant cela, comme un programme linéaire en nombres entiers étant tout d'abord un programme linéaire auquel on a ajouté une contrainte d'intégrité, nous avons rappelé quelques notions concernant le programme linéaire. Quelques méthodes de résolution y sont aussi présentées. Dans ce chapitre toujours nous avons présenté une revue de littérature sur la localisation d'une manière générale et en particulier celle du hub. Quelques notions de théorie de graphe sont données. Le chapitre finit par la définition du concept de hub, ses avantages et inconvénients ainsi que la flotte et son affectation. Le chapitre deux quant à lui, présente l'UEMOA, donne ses objectifs et ses attentes. Il présente aussi le trafic aérien dans l'UEMOA avec ses objectifs de développement et la stratégie de mise en œuvre. Les chapitres trois, quatre et cinq constituent vraiment notre contribution à la localisation de hub et l'affectation d'une flotte pour une compagnie aérienne de la zone UEMOA. Dans le chapitre trois, nous avons élaboré deux modèles de localisation d'un hub : le premier minimise la somme des distances entre les différents aéroports de la zone sous contraintes de capacités d'aéroports. Le second quant à lui minimise le coût d'extension des aéroports et le coût total de transport sous les contraintes de capacités toujours. Capacité que nous définissons comme étant le nombre de passagers et de mouvements enregistrés dans un aéroport. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication[40]. Dans le chapitre quatre, un modèle de localisation de deux hubs et la construction d'un réseau aérien a été élaboré. Ce modèle minimise la somme des distances sous les contraintes de capacités et de rattachement des aéroports non hubs aux aéroports hubs. Ce chapitre aussi a fait l'objet d'une publication [39]. Dans le chapitre cinq nous avons élaboré deux modèles d'affectation de la flotte d'avions aux vols.

Le premier modèle maximise le nombre de passagers sur les vols et le second modèle minimise le coût d'exploitation des vols. Nous finissons enfin par une conclusion générale qui rappelle les principaux résultats trouvés et qui donne les perspectives de recherche.

CHAPITRE 1

QUELQUES NOTIONS GÉNÉRALES D'OPTIMISATION, DE HUB ET DE FLOTTE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales d'optimisation utilisées dans cette thèse. Il s'agit plus précisément des notions de programmation linéaire et programmation linéaire en nombres entiers, de quelques éléments de la théorie des graphes et des problèmes de localisation. Le concept de Hub, de la flotte et de sa taille y sont aussi développés.

1.2 Optimisation

Le monde des industries, des entreprises est souvent confronté à des problèmes de décision. Une partie importante de ces problèmes que rencontrent les dirigeants dans la pratique sont sans aucun doute les problèmes d'optimisation linéaire ou programme linéaire. Avec la puissante avancée de la technologie informatique, on utilise des logiciels pour résoudre ces problèmes sans connaître la théorie qui se cache derrière. Les logiciels d'optimisation sont nombreux. On peut citer le cplex, Matlab, Lindo, Excel, Maple etc. Ces logiciels résolvent différents types de problèmes d'optimisation parmi lesquels ceux que nous traitons dans le cadre de la programmation linéaire

en nombres entiers(PLNE).
Cette section a pour objet de présenter quelques notions utiles pour comprendre le mystère qui se trouve derrière ces logiciels. Il commence par une présentation de l'optimisation d'une manière générale. Nous introduisons ensuite la notion de programmation Linéaire (PL) car le Programme linéaire en nombres entiers n'est rien d'autre que le programme linéaire auquel on a ajouté des contraintes d'intégrité puis celle de programmation linéaire en nombres entiers(PLNE) proprement dite. Quelques notions de la théorie de graphe y sont présentées car pour la localisation d'un hub, on considère un graphe $G = (N, A)$ où N représente l'ensemble des aéroports et A l'ensemble de lignes aériennes reliant les différents aéroports. Nous finissons cette section par une revue de littérature sur la localisation. Pour plus de détails sur ces notions, le lecteur peut consulter les ouvrages de références[55][48][6][34].

1.2.1 Généralités sur l'optimisation

Selon la nature du domaine réalisable, l'optimisation est continue ou discrète (optimisation combinatoire). La localisation d'un hub étant un problème combinatoire, dans cette thèse, nous approfondissons plus l'optimisation combinatoire.

le problème général d'optimisation combinatoire

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à trouver la meilleure solution dans un ensemble discret, qu'on appelle ensemble de solutions réalisables. En général cet ensemble est fini mais compte un grand nombre d'éléments, d'où l'utilisation du terme « combinatoire ». La notion de meilleure solution est définie au sens d'une fonction, qu'on appelle fonction objectif (ou fonction coût). Mathématiquement cela peut se formuler de la façon suivante :
On se donne :
- une fonction $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ appelée fonction-objectif ;
- un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ appelé ensemble des contraintes.

Le problème d'optimisation consiste à déterminer, lorsqu'il existe, un minimum ou un maximum de J sur U.
Un problème d'optimisation peut se formuler comme suit :

Minimisation

Minimiser J sur U revient à chercher $x^* \in U$ tel que

$$J(x^*) = \min_{x \in U} J(x)$$

Ceci équivaut à : $J(x^*) \leq J(x), \forall x \in U$.
x^* est la solution optimale du problème.

Maximisation

Maximiser J sur U revient à chercher $x^* \in U$ tel que

$$J(x^*) = \max_{x \in U} J(x)$$

Ceci équivaut à : $J(x^*) \geq J(x), \forall x \in U$

Parmi les problèmes d'optimisation combinatoire classique, on peut citer le problème de couverture ou the set covering problem [54][51] qui consiste à déterminer un couplage de valeur maximale. On peut citer aussi le problème de plus court chemin dans un graphe qui, étant donnés un graphe et une valuation sur les arcs du graphe, consiste à trouver le chemin qui minimise la somme des valuations des arcs reliant deux sommets du graphe. Le problème de voyageur de commerce, parmi les plus connus, consiste à trouver, dans un graphe, un cycle Hamiltonien dont le coût est minimal.

1.2.2 La programmation linéaire

Définition 1.2.1. *Un problème d'optimisation linéaire est un probème d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont linéaires.*

Il peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \min Z(x) &= c.x \\ \textit{Sous contraintes} & \\ Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

où A est une matrice $n \times m$ à coefficients réels, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$
Cette forme est appelée forme canonique.

Définition 1.2.2. *La forme standard du PL s'écrit sous la forme*

$$\begin{aligned} \min Z(x) &= c.x \\ \textit{Sous contraintes} & \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Définition 1.2.3. *Le domaine $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \geq b; x \geq 0\}$ est appelé domaine réalisable (ou admissible).*

Remarque 1.
- $\underline{\Omega = \emptyset}$ *: le problème n'a pas de solution réalisable.*
- $\underline{\Omega \neq \emptyset}$ *: le problème est dit réalisable.*
- *Le problème est dit borné s'il existe une constante réelle $k \in \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité suivante : $c.x \geq k$ pour toute solution réalisable $x \in \Omega$*

Définition 1.2.4. *Pour un problème de « minimisation », nous disons que la solution x^* est* solution optimale *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
- *$x^* \in \Omega$ (la solution x^* est admissible)*
- *$x \in \Omega \Rightarrow c.x \geq c.x^*$ (la solution x^* donne la plus petite valeur).*

Théorème 1.2.1. *Un programme linéaire est réalisable et borné si et seulement si il possède une solution optimale*

1.2.2.1 Résolution de programmes linéaires

Dans cette sous section, nous présentons quelques définitions et propriétés puis une description de la méthode du Simplexe, méthode développée par G. Dantzig en 1947, et qui reste jusqu'à présent l'algorithme connu le plus performant pour les tailles classiques.

a) Résolution graphique

Définition 1.2.5. *1. Un ensemble P défini par $P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ est un polyèdre. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.*

2. Un ensemble E est dit convexe, si $\forall x, y \in E, \lambda x + (1-\lambda)y \in E$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$.

Proposition 1.2.1. *Soit $\mathcal{D}_R = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}$ l'ensemble des solutions réalisables d'un programme linéaire sous forme standard. $\mathcal{D}_R$ est un polyèdre convexe, fermé.*

Définition 1.2.6. *Un point $x \in \mathcal{D}_R$ est un sommet (ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas $y, z \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}}$, $y \neq z$ tels que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Théorème 1.2.2. *① x est une solution de base réalisable si et seulement si x est une solution réalisable de $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$;*

② L'optimum de la fonction objectif f, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$.

b) Algorithme du Simplexe

Nous donnons ici une synthèse de l'algorithme du Simplexe. Le lecteur intéressé par cette notion peut consulter [36] [37].
On considère un PL écrit sous forme standard c'est-à-dire si on a par exemple une contrainte de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i$$

. On peut écrire
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i + x_{n+i} = b_i$$
en ajoutant une variable supplémentaire indexée $n+i$ où i est le numéro de la contrainte.
Cette variable n'apparaît pas dans la fonction objectif et prend des valeurs positives.

Base réalisable et solutions associées

On appelle variables de base, m variables parmi les $n+m$ d'une forme standard ; qui peuvent être écrites en fonction des n autres variables. Ces variables forment alors une base du PL, les autres variables sont dites hors-bases.
On associe à une base une solution du PL en fixant les variables hors-bases à 0. Une base est dite *réalisable* si la solution associée est réalisable pour le PL.
On peut facilement vérifier qu'une telle solution est réalisable : il suffit de vérifier que toutes les valeurs sont positives ou nulles.
Il est très facile de savoir si la solution associée à une base admissible est optimale pour le PL. Pour cela, il suffit de réécrire la fonction objectif en fonctions des variables hors-bases.
Cas de maximisation : si les coefficients obtenus sont tous négatifs alors la solution associée est optimale.
Cas de minimisation : si les coefficients obtenus sont tous positifs alors la solution associée est optimale.

Description de l'algorithme du Simplexe

On suppose que l'on dispose d'une base réalisable de départ B^0. Les différentes étapes de l'algorithme sont les suivantes :

(a) B^0 base réalisable de départ. Itération k=0.
(b) k $\leftarrow$ k + 1.
(c) à l'itération k, soit B la base courante, $x = [x_B, x_N]$ la solution de base correspondante. Calculer :
$\bar{b} = B^{-1}.b$, (les valeurs des variables de base)

$\pi = c_B.B^{-1}$, (les multiplicateurs du simplexe)

$\bar{c_N} = c_N - \pi.N$ (les coûts réduits)

(d) si $\bar{c_N} \geq 0$, STOP : l'optimum est atteint.

Si $\exists$ s tel que : $\bar{c_s} < 0$ alors :

(e) Soit A_s la colonne s de A.

Calculer $\bar{A_s} = B^{-1}.A_s$.

Si $\bar{a_{is}} \leq 0$, $\forall i = 1, ..., m$, STOP : optimum non borné$(-\infty)$.

sinon, calculer :

$$\hat{x_s} = \frac{\bar{b_r}}{\bar{a_{rs}}} = \min_{i/\bar{a_{is}}>0} \{\frac{\bar{b_i}}{\bar{a_{is}}}\}$$

.

– Soit x_t la variable correspondante à la r-ième ligne de la base c'est-à-dire telle que $B^{-1}.A = e_r$ (m-vecteur à composantes toutes nulles sauf la composante r égale à +1) ; alors la variable s prend la valeur $\bar{x_r} > 0$ (« rentre en base ») ; la variable t s'annule ($\hat{x_t} = 0$) (« sort de la base ») ; la nouvelle solution courante $\hat{x}$ correspond à la nouvelle base réalisable : $\hat{B} = B + \{A_s\} - \{A_t\}$. Calculer l'inverse de la nouvelle base $\hat{B}^{-1}$ et retourner en (b).

Géométriquement, la procédure s'interprète comme un cheminement de point extrême en point extrême adjacent le long de la frontière de X (ensemble des solutions du problème).

Algébriquement, elle s'interprète comme la détermination d'une suite de bases adjacentes $B^0, B^1, ..., B^q, ...$ et de solution de bases $x^0, x^1, ..., x^q, ...$ telles que $z(x^0) > z(x^1) > ... > z(x^q) > ...$

1.2.3 Programmation linéaire en nombres entiers

La programmation linéaire en nombres entiers(PLNE) étudie des programmes linéaires dans lesquels les variables sont astreintes à être entières. En particulier les variables peuvent être booléennes c'est-à-dire ne prendre que les valeurs 0 ou 1. On parle de PL en 0-1. La contrainte d'intégrité sur la variable est nécessaire pour modéliser certains problèmes tels la localisation des hubs étudiée dans cette thèse, en particulier des problèmes algorithmiques. Cette contrainte complémentaire rend le problème plus complexe et demande des techniques particulières. c'est donc un problème NP-difficile.

Elle est un domaine très riche de la programmation mathématique. Les recherches dans ce domaine sont nombreuses et ont vraiment commencé avec GOMORY en 1958. Pour plus de détails sur la PLNE, le lecteur intéressé peut consulter [48][26][52].

Modélisation mathématique

Considérons la forme matricielle de la programmation linéaire ci-dessus. Si on introduit de nouvelles contraintes (appelées contraintes d'intégrité), on obtient la formulation de la programmation linéaire en nombres entiers.

$$\begin{aligned} \min Z(x) &= c.x \\ Sous\ contraintes & \\ Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \quad x_i \quad entiers (i = 1, 2, ..., n). \\ o\text{ù} \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n). & \end{aligned}$$

Lorsque les variables sont astreintes à prendre que les valeurs 0 ou 1, on parle de programmation linéaire en 0-1 ou programme binaire.

Méthode de résolution

Pour résoudre un PLNE, une des premières idées que l'on pourrait avoir serait d'abord de résoudre le PL continu, puis de prendre la valeur entière la plus proche, un arrondi de la solution optimale non entière que l'on aurait trouvé. Malheureusement, cette méthode est complètement fausse. Il existe des méthodes propres aux PLNE pour les résoudre. Pour résoudre les problèmes de PLNE, il existe aussi de nombreux solveurs commerciaux : par exemple Cplex, Xpress ou Gurobi et des solveurs livres : Glpk ou Scip. Dans cette thèse nous ne présentons que les méthodes de recherches arborescentes par séparation et évaluation. Méthode qu' utilise le logiciel Cplex que nous avons utilisé pour nos simulations. Le lecteur intéressé par ces différentes méthodes peut consulter [52][43].

La méthode séparation et évaluation (Branch and Bound)

L'algorithme de séparation et évaluation, plus connu sous son appellation anglaise *Branch and Bound* (B & B) [32] repose sur une méthode arborescente de recherche d'une solution optimale par séparations et évaluations, en représentant les états solutions par un arbre d'états, avec des nœuds, et des feuilles.
Le *branch-and-bound* est basé sur trois axes principaux :

- L'évaluation ;
- La séparation,
- la stratégie de parcours.

L'évaluation
L'évaluation permet de réduire l'espace de recherche en éliminant quelques sous-ensembles qui ne contiennent pas la solution optimale. L'objectif est d'essayer d'évaluer l'intérêt de l'exploration d'un sous-ensemble de l'arborescence. Le *branch-and-bound* utilise une élimination de branches dans l'arborescence de recherche de la manière suivante : la recherche d'une solution de coût minimal, consiste à mémoriser la solution de plus bas coût rencontré pendant l'exploration, et à comparer le coût de chaque nœud parcouru à celui de la meilleure solution. Si le coût du nœud considéré est supérieur au meilleur coût, on arrête l'exploration de la branche et toutes les solutions de cette branche seront nécessairement de coût plus élevé que la meilleure solution déjà trouvée.

La séparation
La séparation consiste à diviser le problème en sous-problèmes. Ainsi, en résolvant tous les sous-problèmes et en gardant la meilleure solution trouvée, on est assuré d'avoir résolu le problème initial. Cela revient à construire un arbre permettant d'énumérer toutes les solutions. L'ensemble de noeuds de l'arbre qu'il reste encore à parcourir comme étant susceptibles de contenir une solution optimale, c'est-à-dire encore à diviser, est appelé ensemble des noeuds actifs.

La stratégie de parcours

- **La largeur d'abord** : Cette stratégie favorise les sommets les plus proches de la racine en faisant moins de séparations du problème initial. Elle est moins efficace que les deux autres stratégies présentées.
- **La profondeur d'abord** : Cette stratégie avantage les sommets les plus éloignés de la racine (de profondeur la plus élevée) en appliquant plus de séparations au problème initial. Cette voie mène rapidement à une solution optimale en économisant la mémoire.
- **Le meilleur d'abord** : Cette stratégie consiste à explorer des sous-problèmes possédant la meilleure borne. Elle permet aussi d'éviter l'exploration de tous les sous-problèmes qui possèdent une mauvaise évaluation par rapport à la valeur optimale.

La méthode de *Branch and Bound* permet de résoudre le problème de localisation de façon optimale. Toutefois elle n'est efficace que pour les problèmes de petites tailles (problèmes avec au plus 50 noeuds)[22]

1.2.4 Quelques éléments de la théorie des graphes

La théorie des graphes est, avec la combinatoire, une des pierres angulaires de ce qu'il convient de désigner par *mathématiques discrètes* . Les graphes sont utilisés pour modéliser de nombreuses situations et leurs applications sont par conséquent aussi nombreuses que variées : dans d'autres branches des mathématiques (algèbre, combinatoire,...), en informatique, en Recherche Opérationnelle (tournées de distribution, ordonnancement de tâches, construction de réseaux en transport,...), en télécommunication, en cartographie (coloriage de cartes), en chimie, etc.

Quelques définitions

Dans notre étude, les lignes aériennes qui seront considérées vont dans les deux sens donc les graphes des réseaux utilisés sont non orientés. Par conséquent nous donnons ici quelques définitions sur le graphe non orienté. Pour plus de détails sur la théorie des graphes, consulter les ouvrages de Berge [13] [14] et aussi par exemples [34][31].

Définition 1.2.7. *Un graphe (non orienté) est constitué d'un ensemble* $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ *de points appelés sommets et d'un ensemble* $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$

d'arêtes tels qu'à chaque a_i sont associés deux éléments de G, appelés extrêmités.

Si les deux extrêmités sont confondues, l'arête est appelée boucle. S'il y a plusieurs arêtes entre deux sommets, on parle d'arêtes multiples.
Un graphe ne présentant ni arête multiple, ni boucle est appelé graphe simple.

Définition 1.2.8.
1. *Une chaîne est une suite quelconque d'arêtes consécutives.*
2. *Sa longueur est le nombre d'arêtes qu'elle comporte.*
3. *Un cycle est une chaîne composée d'arêtes distinctes dont les deux extrémités sont confondues.*
4. *Un graphe est dit connexe si quels que soient les sommets g_i et g_j, il existe toujours une chaîne reliant g_i à g_j.*

Remarque 2.
– *Un graphe est orienté si les arêtes ont un sens de parcours. Chaque arête a alors une origine et une extrémité. Elle est représentée par une flèche et est appelé arc ;*
– *On peut préciser la correspondance entre le vocabulaire utilisé pour les deux graphes :*

Graphe orienté	*graphe non orienté*
arête	*arc*
chaîne	*chemin*
cycle	*circuit*

Définition 1.2.9. *Un graphe valué est un graphe pour lequel chaque arête est associée à un nombre réel appelé poids. Si le nombre réel est positif, on parle de graphe pondéré.*

Exemple

Le graphe de la figure (1.1) représente les aéroports internationaux des capitales des pays de l'UEMOA connectés par un réseau aérien. Le graphe est connexe et est pondéré par les distances.

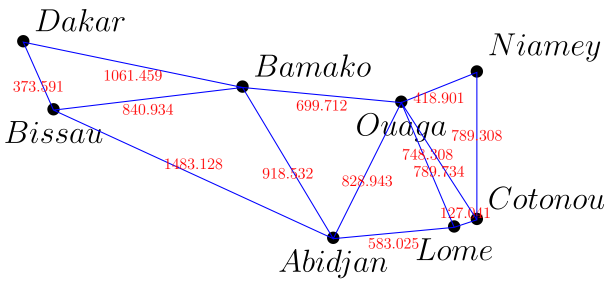

FIGURE 1.1 – Exemple de graphe reliant les aéroports internationaux des capitales de la zone UEMOA

Le problème de plus court chemin

On peut s'intéresser à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe :

1. entre deux sommets donnés ;
2. d'un sommet à tous les autres sommets ;
3. entre tous les couples de sommets.

Le problème 2 n'est pas plus difficile à résoudre que le problème 1 et le problème 3 peut être résolu par application du problème 2 à tous les sommets. Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème 2. En effet pour la localisation de hubs dans les chapitres 3 et 4, nous avons considéré un graphe simple pondéré et le problème de plus court chemin se définit :
Étant donné un graphe pondéré $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des aéroports internationaux des capitales des pays de la zone UEMOA et E l'ensemble des lignes aériennes reliant ces différents aéroports. Le problème fondamental, c'est de trouver un aéroport H parmi les aéroports de V tel que les distances à relier soient minimales.

1.3 Les problèmes de localisation

D'une manière générale, la localisation d'un objet consiste en la détermination de sa position géographique. Ce mot peut aussi faire référence à l'adaptation d'un objet pour une région particulière. Ainsi donc, on peut définir la localisation dans notre contexte d'étude comme :

Définition 1.3.1. *La localisation consiste à déterminer un ou plusieurs aéroports de l'espace donné (UEMOA) en vue d'optimiser un certain nombre de critères.*

Les décisions concernant la localisation des hubs et l'allocation sont des éléments cruciaux de la planification stratégique d'un large éventail d'entreprises privées et publiques.
On trouve dans la littérature plusieurs modèles de localisation [47][16][57]. Sabine Limbourg dans [33] et Revelle et al dans [17] ont montré que ces modèles nécessitent d'une manière générale quatre entrées :

- Les clients (passagers) dont la position est connue ;
- Les équipements à localiser (aéroports) ;
- l'espace où les clients et les équipements sont situés (zone UEMOA) ;
- Une métrique qui indique les distances (ou les temps, les coûts de transport, etc) entre les clients et les équipements.

Des modèles mathématiques ont été développés et utilisés pour résoudre ces problèmes. Ces modèles peuvent être classifiés de plusieurs manières. La classification peut être basée sur la distinction du type d'espace dans lequel les équipements doivent être localisés, sur la nature des entrées (statiques ou dynamiques, déterministes ou probabilistes), sur le type de métrique utilisée, sur le nombre d'installation à localiser, sur la nature de la demande (élastique ou inélastique), selon que la capacité des installations est prise en compte ou non etc.
Si le critère de classification utilisé est le type d'espace dans lequel les installations doivent être localisées, alors les problèmes se diffèrent selon que l'espace est continu ou discret. La formulation de la localisation dans un espace continu suggère qu'un site peut être sélectionné n'importe où dans le plan. Par contre la formulation de la localisation dans un espace discret considère qu'il n'y a qu'un nombre fini de sites potentiels.
La plupart de problèmes réels conduisent à la formulation de problèmes de localisation dans un espace discret. Ceux-ci sont plus faciles à résoudre en pratique et ils sont conceptuellement plus réalistes. Notre étude porte d'une part, sur la localisation d'aéroports hubs, et d'autre part sur la taille de la flotte d'une compagnie sous régionale dans la zone UEMOA. Le nombre d'aéroports étant fini dans une zone bien circonscrite qui est la zone UE-

MOA, le problème de localisation étudié dans cette thèse est un problème de localisation discret.
Pour couvrir un réseau de transport par une compagnie aérienne, la localisation de hub (ou des hubs) est une décision très importante. Le Hub doit être à la fois bien situé par rapport au flux de passagers et offrir une capacité suffisante. Les principales questions à se poser en vue de minimiser les coûts résultants sont :

1. Combien de hubs faut-il créer ?
2. Quels sont les aéroports les mieux indiqués ?
3. Comment y établir les liaisons c'est-à-dire quels sont les critères d'affectation des aéroports non hubs aux hubs ?

Selon la taille de la compagnie, certaines questions trouvent déjà leurs réponses. Le problème de localisation à résoudre prend alors diverses formes. Les problèmes de localisation sur un réseau sont classés en trois catégories :

- le problème de couverture ;
- le problème de type p-centre ;
- et le problème de type p-médiane.

1.3.1 Problème de couverture

Le problème de couverture ou the set covering problem consiste à déterminer un couplage de valeur maximale. L'objectif de ce type de problème est de localiser des installations pour servir toutes les demandes, avec un coût total minimal. Un noeud de demande est couvert par un service, si la distance ou le temps entre ce noeud et l'installation la plus proche n'est pas plus grande qu'une valeur spécifiée.

Entrées :
m = le nombre de clients indexés par i, $i \in I = \{1, ..., m\}$;
n= le nombre de sites potentiels indexés par j, $j \in J = \{1, ..., n\}$;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le site potentiel } j \text{ couvre la demande du noeud } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c_j= le coût pour une installation au site potentiel j.

Variable de Décision

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si on localise une installation au site potentiel j} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Formulation

$$\begin{aligned} & Minimiser & \sum_{j \in J} c_j x_j & & (1.1) \\ Sous \quad & contraintes & & & \\ & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq & 1 & \quad \forall i \in I & (1.2) \\ & x_j \in & \{0,1\} & \quad \forall j \in J & (1.3) \end{aligned}$$

La fonction objectif (1.1) minimise le coût total des installations qui sont sélectionnées. Les contraintes (1.2) stipulent que chaque noeud de demande i doit être servi par au moins une installation ; le membre de gauche de l'inégalité donne le nombre d'installations localisées qui peuvent servir le noeud i. Les contraintes (1.3) sont les contraintes d'intégrité.

Ce problème exige une condition très restrictive : chaque client doit être servi. Dans un problème contenant beaucoup de nœuds dispersés, la condition de couverture complète peut conduire à des solutions avec un nombre d'installations trop important d'un point de vue budgétaire. Church et ReVelle (1974)[47] introduisent alors le problème de couverture maximale (Maximum Covering Location Problem (MCLP)). Le MCLP renonce à la couverture totale pour maximiser la demande couverte avec un nombre limité de sites à ouvrir. Pour formuler ce problème, les paramètres suivants sont utilisés :

Entrées :
m= le nombre de clients indexés par i, $i \in I = \{1, ..., m\}$;
n = le nombre de sites potentiels indexés par j, $j \in J = \{1, ..., n\}$;
p= le nombre d'installations à localiser, $1 \leq p \leq n$;

h_i = la demande au noœud i.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le site potentiel } j \text{ couvre la demande du noeud } i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variables de décision :

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si le noeud i est couvert} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si on localise une installation au site potentiel j} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Avec ces paramètres et variables de décision, le problème de couverture maximale peut alors être formulé comme suit :

$$\begin{aligned}
& Maximiser && \sum_{i \in I} h_i z_i && && (1.4) \\
Sous\quad & contraintes && && && \\
& \sum_{j \in J} a_{ij} x_j &\geq\ & z_i && \forall i \in I && (1.5) \\
& \sum_{j \in J} x_j &\leq\ & p && && (1.6) \\
& x_j &\in\ & \{0,1\} && \forall j \in J && (1.7) \\
& z_i &\in\ & \{0,1\} && \forall i \in J && (1.8)
\end{aligned}$$

La fonction objectif (1.4) maximise le nombre de demandes couvertes. Les contraintes (1.5) indiquent que la demande au noeud i ne peut être couverte tant qu'au moins un site qui couvre le noeud i ne soit sélectionné. La contrainte (1.6) stipule que p installations au maximum peuvent être localisées. Les contraintes (1.7) et (1.8) sont des contraintes d'intégrité sur les variables de décision.

1.3.2 Problème de p-centre

Le problème du p-centre minimise la distance de couverture de façon à ce que chaque noeud de demande soit servi par une des installations située à

une distance inférieure ou égale à une distance déterminée antérieurement. Le problème du p-centre consiste donc à ouvrir p installations et à affecter chaque client à l'une d'entre elles de façon à minimiser la distance maximum entre chaque demande et l'installation la plus proche. Le problème du p-centre peut être formulé comme suit :
W = la distance maximum entre un noeud de demande et l'installation la plus proche à laquelle il est affecté.

Entrées :
p = le nombre d'installations à localiser ;
h_i = la demande au noeud i ;
d_{ij} = la distance d'un nœud de demande i à une localisation potentielle j.
Variables de décision :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si on localise une installation au site potentiel j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

y_{ij} = la fraction de la demande du noeud i qui est affectée à l'installation située au noeud j.

$$\begin{aligned}
& Minimiser && W && && (1.9)\\
& Sous \quad contraintes && && && \\
& \sum_{j\in J} x_j &=\;& p && && (1.10)\\
& \sum_{j\in J} y_{ij} &=\;& 1 && \forall i \in I && (1.11)\\
& y_{ij} - x_j &\leq\;& 0 && \forall i \in I, j \in J && (1.12)\\
& W - \sum_{j\in J} d_{ij} y_{ij} &\geq\;& 0 && \forall i \in I && (1.13)\\
& x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J && && && (1.14)\\
& y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I \quad \forall j \in J && && && (1.15)
\end{aligned}$$

La fonction objectif (1.9) minimise la distance maximum entre un noeud de demande et l'installation la plus proche de ce noeud. La contrainte (1.10) stipule que p installations doivent être localisées. Les contraintes (1.11) exigent que chaque nœud de demande soit affecté à une installation située au noeud j. Les contraintes (1.12) limitent l'affectation des noeuds de

demande aux installations ouvertes. Les contraintes (1.13) indiquent que la distance maximum séparant les points de demande et l'installation la plus proche doit être plus grande ou égale à la distance entre chaque noeud de demande et l'installation à laquelle il est affecté. L'ensemble des contraintes (1.14) et (1.15) sont les contraintes d'intégrité standard.
Dans certains cas, la distance doit être pondérée par la demande, dès lors les contraintes (1.13) doivent être remplacées par :

$$W - h_i \sum_{j \in J} d_{ij} y_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I$$

1.3.3 Le problème de la p-médiane

Dans beaucoup de cas, le coût pour desservir une demande à partir de l'installation la plus proche augmente en fonction de la distance entre cette demande et son installation la plus proche. Le problème de la p-médiane n'est pas de maximiser le nombre de noeuds de demande couverts mais de minimiser les coûts de déplacement.
Le problème de la p-médiane,[49]et[50], consiste à localiser p installations et à servir chaque client à partir des installations établies de façon à ce que les demandes de tous les clients soient servies et que les coûts totaux soient minimisés. Il repose sur trois hypothèses importantes. Il suppose que :

- le nombre d'installations à localiser est connu a priori ;
- le coût d'implantation d'une installation est identique quel que soit le site potentiel ;
- les installations n'ont pas de contrainte de capacité.

La formulation de ce problème est la suivante :
Entrées :
m = le nombre de clients indexés par i, $i \in I = \{1, ..., m\}$;
n = le nombre de sites potentiels indexés par j, $j \in J = \{1, ..., n\}$;
p = le nombre d'installations à localiser, $1 \leq p \leq n$;
h_i = la demande au noeud i ;
c_{ij} = le coût unitaire de déplacement pour satisfaire la demande du nœud i par l'installation du noeud j, $\forall i, j$.

Variables de décision :

Variable de localisation

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si on localise une installation au site potentiel j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variable d'affectation

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la demande i est affectée à l'installation j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Formulation

$$\begin{array}{rrcll}
 & Minimiser & & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i c_{ij} y_{ij} & \quad (1.16) \\
Sous & contraintes & & & \\
 & \sum_{j \in J} x_j & = & p & \quad (1.17) \\
 & \sum_{j \in J} y_{ij} & = & 1 \qquad \forall i \in I & \quad (1.18) \\
 & y_{ij} - x_j & \leq & 0 \qquad \forall i \in I, j \in J & \quad (1.19) \\
 & x_j & \in & \{0,1\} \qquad \forall j \in J & \quad (1.20) \\
 & y_{ij} & \in & \{0;1\} \qquad \forall i \in I, j \in J & \quad (1.21)
\end{array}$$

La fonction objectif (1.16) minimise le coût total nécessaire pour desservir chaque nœud de demande à partir de l'installation la plus proche. La contrainte (1.17) stipule que p installations doivent être localisées. Les contraintes (1.18) exigent que chaque nœud de demande i soit affecté à exactement une installation j. Les contraintes (1.19) limitent l'affectation des noeuds de demande aux installations ouvertes. L'ensemble des contraintes (1.20) et (1.21) sont les contraintes d'intégrité standard.

Cette formulation de la p-médiane suppose que les installations sont localisées aux noeuds du réseau. Cette hypothèse pourrait conduire à une solution suboptimale, cependant Hakimi[49] a montré que même si les installations pouvaient être localisées sur les liens du réseau, le coût total ne serait pas réduit. En conséquence, cette formulation permet d'obtenir une solution optimale, même si les installations pouvaient être situées n'importe où sur un lieu.

Le problème de localisation d'installation sans contrainte de capacité (Uncapacitated Facility Location Problem (UFL)) est similaire au problème de la p-médiane excepté que le nombre d'installations à localiser est déterminé antérieurement. Un coût fixe non négatif est associé à chaque site potentiel et ce coût est encouru seulement si le service est réellement implanté sur ce site. On modifie la formulation du problème de la p-médiane en supprimant la contrainte (1.17) et en ajoutant le terme

$$\sum_{j \in J} f_j x_j$$

à la fonction objectif (1.16) où f_j est le coût pour implanter une installation au nœud j. L'objectif est donc de minimiser les coûts totaux de transport et d'implantation d'installation.

Le « Capacitated Facility Location Problem » (CFLP) ajoute les contraintes de capacité des installations au problème UFL et relaxe donc les trois hypothèses de la p-médiane. Si Γ_j est la capacité de l'installation j, ces contraintes s'écrivent :

$$\sum_{j \in J} (h_i y_{ij} - \Gamma_j x_j) \leq 0 \qquad \forall i \in I \tag{1.22}$$

De plus, la demande du noeud i peut alors être affectée à plusieurs installations, si l'installation la plus proche voit sa limite de capacité atteinte.

1.4 Le concept de Hub

> « *l'un des effets les plus surprenants de la déréglementation aura été la transformation d'un système de liaisons aéronautiques*

constitué d'un réseau complexe de lignes en un système composé de plusieurs réseaux en étoile, dits hubs and spokes ».

Jacques Pavaux [1]

Pour déterminer son vol, le consommateur, cible de chaque compagnie aérienne doit choisir parmi plusieurs possibilités. Les compagnies entrent donc en concurrence. Par exemple pour une personne qui se trouve à Niamey au Niger et qui désire se rendre à Dakar au Sénégal, elle pourra prendre un vol via Lomé sur Asky, mais aussi via Ouagadougou et Bamako avec sénégal airlines, etc. C'est là que va se jouer l'efficacité d'un hub. A défaut d'un vol direct, le consommateur va en général choisir une combinaison de vols dont le temps de connexions entre deux vols soit le plus court possible. Il faut donc que les compagnies aériennes organisent leurs hubs dans cette optique afin que le client poursuive dans le plus bref délai son vol jusqu'à la destination finale.
Dans cette section nous donnons dans un premier temps le concept de hub : ses avantages et inconvénients ainsi que les différents types de hubs. Dans un second temps nous définissons la flotte et donnons les différents types de flotte puis montrons comment se fait l'affectation d'une flotte.

1.4.1 Qu'est ce qu'un Hub Aérien

Un hub est un terme anglais qui recouvre deux concepts : administratif et technique puis commercial.
Dans son concept administratif et technique : un hub est l'aéroport où une compagnie concentre la plus grande partie de ses activités de gestion et où elle assure la maintenance de ses avions. Dans le contexte commercial : il est l' aéroport qui permet aux passagers de changer rapidement et facilement de vols donc c'est une plate-forme de correspondance aéroportuaire.
Cette organisation du trafic en étoile, autour d'un nœud géographique (aéroport), permet d'optimiser les liaisons vers les villes secondaires, dont les flux de passagers intercontinentaux sont faibles et ne justifient pas l'ouverture de vols directs, en faisant converger toutes les liaisons vers une plateforme unique. Outils d'aménagement du territoire, les hubs donnent aux

1. Directeur Général de l'Institut du Transport Aérien de la France de 1985 à 2010

compagnies aériennes le moyen de construire un réseau plus efficace, tout en réalisant, grâce à la concentration des moyens, des économies d'échelle (meilleure rentabilité des équipements et meilleur amortissement des investissements). Un hub peut être schématisé comme dans la figure (1.2).

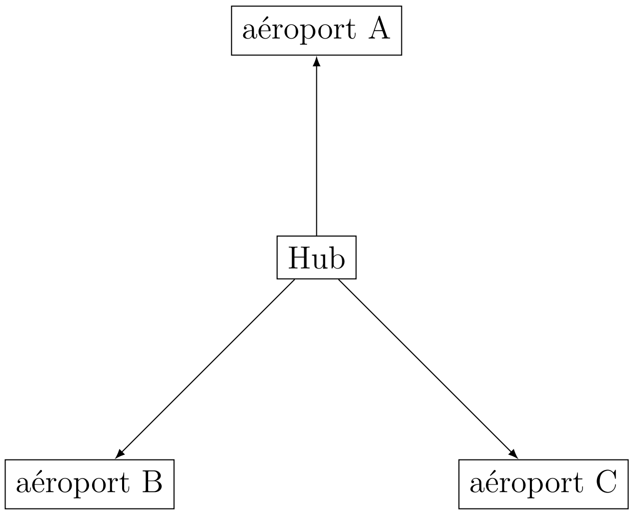

FIGURE 1.2 – Logique d'un Hub
Dans ce système hub, nous avons quatre aéroports, six marchés et trois lignes.

1.4.2 Principes de fonctionnement d'un Hub aérien

Le trafic entre deux aéroports n'est pas toujours suffisant pour qu'une compagnie puisse assurer une liaison directe dans des conditions de rentabilité satisfaisante. Les compagnies nationales américaines ont développé, vers la fin des années 1980, un concept commercial, le hub qui offre aux passagers la possibilité de relier de nombreuses destinations entre elles en effectuant une correspondance.
Ce système (hub) qui s'étend actuellement est régi par trois principes [58] :

1. Géographique : Le réseau de la compagnie se structure entièrement autour d'un ou de quelques aéroports pivots. Il s'agit d'un réseau fonctionnel étoilé. Il est essentiel que ce rôle de pivot soit assuré par un aéroport dont le courant de trafic est significatif par rapport aux autres aéroports. L'aéroport doit permettre de réaliser, dans les meilleures

conditions possibles, des correspondances rapides de passagers entre de nombreux vols arrivant dans une même tranche horaire et d'autres vols partant 30 à 45 minutes plus tard ;

2. Économique : Avec l'introduction de la concurrence entre les compagnies, le maintien d'un bon niveau de compétitivité devient un souci constant pour chacune des compagnies, lesquelles doivent continuer à offrir à la clientèle à la fois des services de qualités et des tarifs attractifs. En cela il est un réseau économique ;
3. Stratégique : Il est caractérisé par l'offre en destination, en fréquences, en correspondances et en tarifs. Le choix de localisation géographique est un élément capital pour l'implantation d'un hub. Les expériences des compagnies américaines qui ont choisi d'implanter des hubs « au milieu de nulle part », se sont traduites par des échecs. D'où, l'émergence de plates-formes de correspondance au cœur des bassins de population considérable.

En résumé, l'importance de ce mode organisationnel est bien exprimée par Jean-Cyril Spinetta[2] : *« Le sujet n'est pas de savoir s'il faut faire des hubs : ou bien une compagnie construit un hub efficace et elle vit économiquement bien, ou bien elle ne le fait pas et elle disparaît ».*

1.4.3 Les atouts d'un hub aérien

Un hub aérien présente des atouts pour les compagnies, les passagers ainsi que pour le pays où il est implanté.

Pour les compagnies

La structure même des hubs permet *une réduction des coûts d'exploitation* du fait de la combinaison des passagers regroupés en un même lieu. Il en résulte une optimisation des moyens de production et d'importantes économies d'échelle. L'efficacité du système est telle que la pénétration d'un concurrent est rendue difficile.

2. Président Directeur Général du groupe Air France de 1997 à 2008

Pour les usagers du transport aérien

- Multiplication des destinations desservies par une même compagnie à partir de son aéroport de départ ;
- Enregistrement unique au départ sur l'ensemble des segments de son vol, transfert et traçabilité des bagages ;
- Correspondance rapide (souvent inférieure à une heure) ;
- Correspondance garantie, dans une certaine mesure ;
- Les deux (ou plus) segments du vol sont assurés par des appareils de même type de confort.

Pour les territoires aéroportuaires

Le hub est considéré comme un puissant moteur de développement pour les territoires d'accueil en raison de la création de richesse et d'emploi qu'il induit.

Proposition 1.4.1. *Considérons une compagnie aérienne desservant* $n(n \geq 3)$ *aéroports avec p membres d'équipage par avion.*
Avec l'existence du hub :

1. *le nombre de vols par rapport au système point à point est réduit de* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$
2. *le nombre d'équipage est réduit de* $\frac{1}{2}p(n-1)(n-2)$

Démonstration. 1. Dans le système point à point :
Le premier aéroport joint (n-1) aéroports, le second (n-2) aéroports, le troisième (n-3) aéroports, ..., le $(n-1)^{\text{ème}}$ le dernier aéroport.
Le nombre total de vols joignant les n aéroports est la somme :
$(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Dans le système hub, le hub joint (n-1) aéroports. Le nombre de vol est donc (n-1).
Soit V la différence de vols entre les deux systèmes.
$V = \frac{1}{2}n(n-1)-(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Donc le nombre de vols est réduit de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

2. Si on considère p équipages par vol alors :
Dans le système point à point on a $p \times \dfrac{n(n-1)}{2}$ équipages et dans le

système hub on a $p \times (n-1)$. Si E est la différence alors on :
$E = p \times \dfrac{n(n-1)}{2} - p \times (n-1) = \frac{1}{2}p(n-1)(n-2)$

$\square$

Cette proposition met en évidence l'atout du hub, de même que sa conséquence positive sur le nombre de membres d'équipage.

1.4.4 Application

système point à point

Considérons les huit aéroports des capitales des pays de l'UEMOA tous reliés entre eux par des liaisons aériennes comme le montre la figure

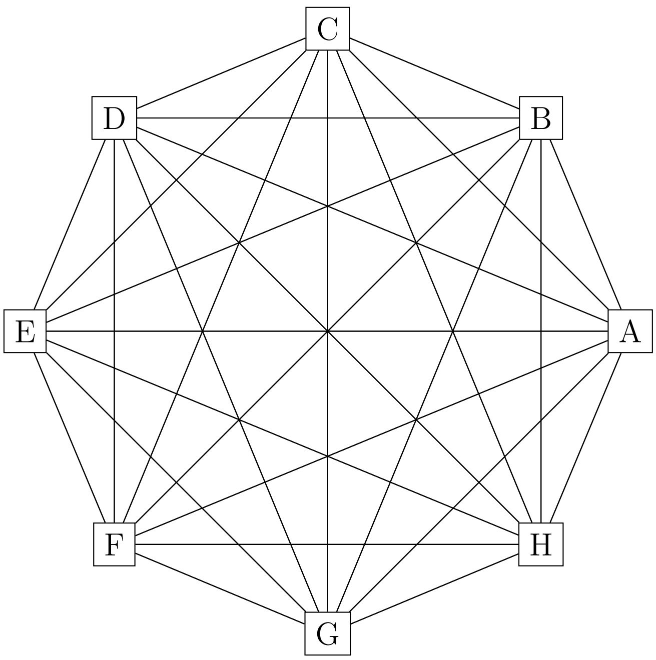

FIGURE 1.3 – graphe connexe reliant les aéroports

Les traits reliant deux aéroprts quelconques i et j matérialisent chacun un aller-retour en avion en début de matinée. Le nombre d'allers-retours à partir de chaque aéroport est de 7 pour chacun des 8 aéroports. Soit un total de 56 allers-retours.
or le vol (i,j) est le même que le vol (j,i) donc le nombre de vol est $\dfrac{56}{2} = 28$ Si on considère trois membres d'équipage par avion alors le nombre de membres d'équipages est 84.

Système Hub

Considérons maintenant qu'un des 8 aéroports est un hub et les 7 autres aéroports lui sont reliés comme indique la figure

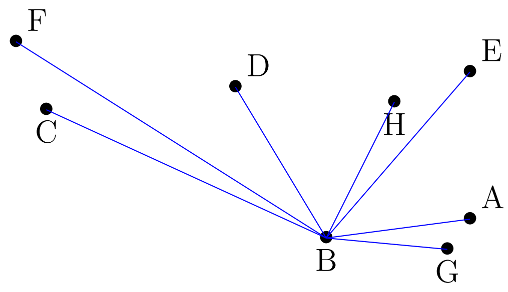

FIGURE 1.4 – Connexion des aéroports au hub

Les traits reliant les aéroports au hub matérialisent aussi un aller-retour en avion en debut de matinée.
Le nombre d'aller-retour à partir du hub est de 7 et le nombre de vol est aussi de 7.
Le nombre d'équipage est de 21 toujours en considérant 3 membres d'équipage par avion.

Le nombres de vols est passé de 28 à 7 soit une baisse de $21 = \frac{1}{2}(7 \times 6)$
Le nombre d'équipage est passé de 84 à 21 soit une réduction de $63 = \dfrac{3}{2}(7 \times 6)$

Remarque 3. *Il est à remarquer qu'avec le système hub l'ensemble des distances parcourues est réduit entrainant ainsi une économie sur le carburant et l'émission du CO_2 est réduit.*
Cette dimunition du nombre de flotte, du nombre d'équipage et des distances parcourues implique une dimunition des charges de la compagnie et donc du billet pour compenser la durée du temps de vols des passagers si la compagnie a un nombre suffisant d'avions pour assurer ces vols.

Remarque 4. *la politique de hub engendre également un certain nombre de problèmes :*

– *Saturation de l'espace aérien ;*
– *augmentarion des nuisances : bruit, pollution etc ;*

- *le temps de voyage par rapport au vol direct est augmenté.*
- *L'aéroport perd un peu plus de son autonomie et qu'à terme les tarifs pratiqués par la compagnie contrôlant le hub finissent par augmenter. Or, le contrôle d'un hub par une compagnie est un instrument de pouvoir économique et territorial*

Pierre Graff[3], résume bien les avantages de ce type de réseau, en disant que la « *création des hubs est une technique pour faire gagner de l'argent aux compagnies aériennes, de ramener du trafic et de remplir des avions. Mais c'est aussi pour le passager, un moyen de se rendre sur n'importe quel point de la planète, en partant de n'importe quel point de notre territoire* ».

1.4.5 Typologie des Hubs aériens

On distingue plusieurs types de hubs :

Hubs des grands aéroports

Ils servent à alimenter les gros porteurs sur une destination de long courrier. L'objectif est d'optimiser le remplissage des avions sur les tronçons du trajet. Ce sont ceux qui sont les plus développés et les plus étudiés. A l'intérieur de cette catégorie, on distingue plusieurs variantes (passagers, fret).

Hubs des petits aéroports

Ils facilitent le transfert de petit porteur sur des lignes qualifiées. Leur but est d'éviter aux passagers le transit par les grands aéroports, afin que le voyage puisse gagner en rapidité et en confort.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux hubs de grands aéroports et plus précisement à détermination des hubs de passagers.

3. Président Directeur Général de la société des aéroports de paris de 2003 à 2012

1.5 le problème de Localisation d'un Hub (Hub Location Problem : HLP)

Le problème de localisation d'un hub en abrégé HLP (Hub Location Problem) est un problème dans lequel on considère un réseau de n noeuds. Un flux de matières ou d'informations (P_{ij}) doit être transféré entre les deux nœuds i et j. Il est donc simple de connecter tous les nœuds en créant donc des arcs entre les couples de nœuds. On veut donc transférer une matière ou une information d'un noeud i à un noeud j via un ou des noeud(s) appelé(s) hub(s). Un hub doit nécessairement être un des nœuds du réseau. A partir du hub, on fait la collecte des matières (passagers) qu'il faut transférer dans un autre hub s'il existe et si cela est possible et ce dernier est chargé de les distribuer aux autres nœuds. La figure (1.2) donne un exemple d'un réseau de deux hubs.

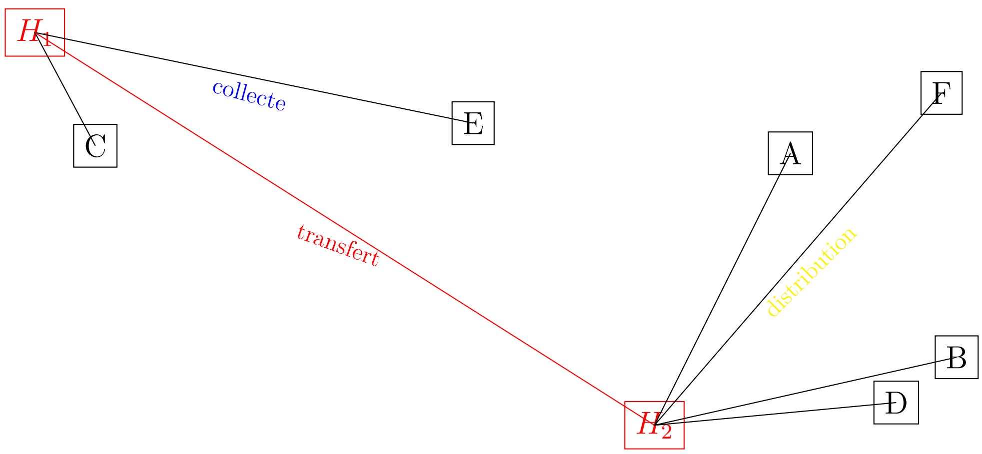

FIGURE 1.5 – Exemple d'un réseau à deux hubs

La formulation mathématique du problème se présente comme suit :

Entrées

N : Le nombre des noeuds du réseau ;

h_{ij} : le nombre de passagers du noeud i au noeud j ;

c_{ij} : coût unitaire de transport entre i et j ;

α : facteur de remise dû au transport hub-hub ($0 < \alpha < 1$).

Variables de décision

$x_k = \begin{cases} 1 & \text{si un hub est localisé au noeud k} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
$y_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si la demande du noeud j est affecté au hub localisé en k} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Le modèle est donc :

$$Min[\sum_{j\in J}\sum_{k\in J} h_{jk}(\sum_{l\in J} c_{jl}y_{jl} + \sum_{m\in J} c_{km}y_{km} + \alpha\sum_{l\in J}\sum_{m\in J} c_{lm}y_{jl}y_{km})] \tag{1.23}$$

$$\sum_{k\in J} x_k = p \tag{1.24}$$

$$\sum_{k\in J} y_{jk} = 1 \quad \forall j \in J \tag{1.25}$$

$$y_{jk} \leq x_k \quad \forall i, j \in J \tag{1.26}$$

$$x_k \in \{0,1\} \tag{1.27}$$

$$y_{jk} \in \{0,1\} \tag{1.28}$$

La fonction objectif (1.23) minimise la somme des coûts de collecte, de transfert, et de distribution des matières. La contrainte (1.24) assure qu'on doit localiser exactement p hubs. La contrainte (1.25) impose qu'un noeud non hub est affecté à un et un seul hub. La contrainte (1.26) assure que la demande du noeud j ne peut être affectée qu'au hub k. Les contraintes (1.27) et (1.28) indiquent que les variables sont binaires.
Le problème LHP se distingue des autres problèmes de localisation par :
- Les demandes sont exprimées entre les paires de noeuds ;
- La fonction objectif est quadratique.

1.6 Flotte et Dimensionnement de la Taille de la Flotte

1.6.1 La Flotte

La flotte est composée par un ensemble d'avions classés par type de constructeur (Airbus, Boeing, Bombardier, etc) et réparti par version ou

module (A319, A380, B747, etc). Ce qui permet de mieux faire l'affectation suivant la demande des clients sur les itinéraires.
Par ailleurs, la flotte d'une compagnie aérienne constitue la ressource principale qu'il faut optimiser et bien entourer d'outils et de compétences nécessaires et suffisantes afin d'améliorer son indicateur de performance. Ce dernier consiste à maximiser la moyenne d'utilisation journalière par module d'avion relative au volume de production allouée aux différentes dessertes du réseau de la compagnie.
En d'autres termes, l'objectif est d'évaluer la composition de la flotte de façon à ce qu'elle réponde au mieux à la stratégie commerciale de la compagnie. Vu la diversité des dessertes et la nature de la clientèle il est préférable d'avoir une flotte qui réponde à la stratégie commerciale et en parfaite synergie avec le potentiel du trafic existant c-à-d une flotte composée d'une partie de Airbus et d'une autre de Boeing et si possible d'autres constructeurs de petits modules[24] [5].
De leur côté, les constructeurs avioniques, conçoivent leurs appareils pour qu'ils soient les plus avantageux et par conséquent les plus compétitifs. Pour ce faire, ils doivent agir sur les rubriques de compétition telles que le nombre de sièges par appareil, le rayon d'action, la consommation carburant, la vitesse de croisière, etc.
Face à cette offre diversifiée, les compagnies aériennes doivent acquérir une flotte d'avions qui puisse les permettre de satisfaire la demande de la clientèle du point de vue confort, regularité, sécurité et à un bas prix.. Ce choix est fortement lié à la structure du réseau opéré et aux objectifs de la compagnie dans un souci de trouver la solution optimale : rapport coût-revenu.

Définition 1.6.1. *on appellera taille de la flotte, le nombre d'avions nécessaires pour desservir tout le réseau.*

1.6.2 Dimensionnement de la Taille de la Flotte

La première richesse d'une compagnie aérienne est constituée par sa flotte. C'est sa « machine de production ». Cette machine de production est à la fois extrêmement coûteuse et particulièrement complexe. Il s'agit donc de l'utiliser au mieux. Pour utiliser au mieux sa flotte, une compagnie

aérienne doit établir soigneusement ses programmes de maintenance et ses programmes de vols, planifier le travail des personnels au sol et les rotations d'équipages, etc.
Le dimensionnement ou l'affectation de la flotte, en anglais « Fleet Assignment » consiste à allouer à chaque vol opéré par une compagnie aérienne un type d'avion et donc une capacité en sièges en maximisant le profit. C'est une phase amont de la construction du plan opérationnel des compagnies aériennes qui dépend notamment des prévisions de demandes.

1.6.3 Présentation du problème

Une compagnie aérienne doit effectuer sur une période de temps donnée, par exemple la semaine, un ensemble de vols $J = \{1, 2, ..., n\}$. Pour composer sa flotte, elle a la possibilité de choisir parmi un ensemble $I = \{1, 2, ..., m\}$ des avions. Si un avion de type $i \in I$ est choisi pour effectuer le vol $j \in J$, on donne le nombre d'heures de vol correspondant a_{ij}, ainsi que le coût correspondant c_{ij}.
Pour chaque type d'avion $i \in I$, une contrainte limite à b_i le nombre maximum d'heures total disponible dans la période de temps considérée. Le problème de choix optimal de la composition de la flotte se ramène à la résolution du problème d'affectation généralisé. Cependant pour l'affectation de la flotte, les contraintes suivantes sur le modèle sont exigées :

- Il doit avoir un avion à l'aéroport pour le vol,
- Pour les vols avec escale, le même avion doit être affectée aux deux tronçons d'itinéraire,
- chaque aéroport doit commencer et finir la semaine avec la même distribution d'avions.

Pour le lecteur intéressé par les différentes méthodes d'affectations de types d'avions aux vols, il peut consulter la thèse de David [29] et les articles synthèses de Klabjan[18] et Sherali[27].

1.6.4 Modèle du problème d'affectation généralisé

En utilisant les notations précédentes et en posant :
a_{ij} le nombre d'heures de vol j effectuées par l'avion i.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'avion de type i est choisi pour effectuer le vol j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le modèle se présente comme suit :

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \tag{1.29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leq b_i \quad i \in \{1,2,...,m\} \tag{1.30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j \in \{1,2,...,n\} \tag{1.31}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i \in \{1,2,...,m\}, j \in \{1,2,...,n\} \tag{1.32}$$

$$a_{ij} \geq 0 \quad i \in \{1,2,...,m\}, j \in \{1,2,...,n\} \tag{1.33}$$

$$b_i \geq 0 \quad i \in \{1,2,...,m\} \tag{1.34}$$

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait ressortir les principales notions de la Recherche opérationnelle utilisées dans cette thèse. Ces notions nous ont permis de montrer comment la combinatoire, la programmation linéaire en nombres entiers, la théorie des graphes peuvent être utilisées pour le problème de localisation de hub et l'affectation de la flotte. L'importance et l'utilité du hub, tant pour le passager que pour la compagnie aérienne, ont été mises en évidence. Quelques modèles mathématiques sur la localisation des hubs sont présentés. L'importance d'une flotte pour une compagnie fait que son affectation doit se faire de manière judicieuse. Ainsi le problème d'affectation a été présenté ainsi que son modèle mathématique. Nous passons maintenant à la description de notre espace d'étude : l'espace UEMOA.

CHAPITRE 2

L'UEMOA ET LE TRAFIC AÉRIEN

2.1 Introduction

La part du trafic aérien est essentielle dans le transport des passagers et des marchandises. Le trafic aérien joue un rôle clé dans le développement du tourisme. Cependant l'Afrique en général, et la zone UEMOA en particulier accuse un retard important dans ce secteur et sa part de marché reste faible. Les compagnies aériennes africaines ne contrôlent que 20% du trafic aérien international [1]. Dans la zone UEMOA, le sous-secteur du transport aérien a, en effet, connu des progrés importants depuis l'adoption de la déclaration de Yamoussoukro en 1999. Cette décision a débouché sur une libéralisation progressive de l'accés au marché du transport aérien dans la région. Elle a également entraîné des réformes de la gestion des aéroports et de l'espace aérien.
Les aéroports des capitales et dans certains cas des villes secondaires, font face à l'augmentation du trafic passager et fret. Cependant, le ciel aérien est obscurci par des drames qui se rèpètent et s'ajoutent ceux que connait le continent depuis la déréglementation de ce secteur et la faillite d'Air Afrique.

1. www.ectar.fr consulté le 14 août 2015

2.2 Présentation, objectifs et attentes de l'UEMOA

2.2.1 Présentation de l'UEMOA

L'Union Économique et Monétaire Ouest-Africaine (UEMOA) est une organisation ouest-africaine qui a comme mission la réalisation de l'intégration économique des États membres, à travers le renforcement de la compétitivité des activités économiques dans le cadre d'un marché ouvert et concurrentiel et d'un environnement juridique rationalisé et harmonisé. L'UEMOA a été créée le 10 Janvier 1994 par le traité signé à Dakar par les chefs d'États et de gouvernement des pays de l'Afrique de l'Ouest ayant en commun l'usage d'une monnaie commune, le Franc CFA (Communauté Financière d'Afrique). Il s'agit du Bénin, du Burkina Faso, de la Côte d'Ivoire, du Mali, du Niger, du Sénégal et du Togo. Le traité est entré en vigueur le 1^{er} août 1994, après sa ratification par les États membres. Le 02 mai 1997, la Guinée-Bissau est devenue le 8^{eme} État membre de l'union. L'UEMOA renferme une superficie de 3.509.600 km^2, une population estimée à environ 107.977.398 habitants en 2014 [2] et son PIB est de 32355,3 milliards F CFA en 2009. Sa carte géographique est présenté dans la figure 2.1

2.2.2 Les objectifs de l'UEMOA dans le transport aérien

Les objectifs du programme commun de transport aérien pour la zone de l'UEMOA sont de :

- désenclaver le territoire de l'Union ;
- développer un système de transport aérien sûr, ordonné et efficace dans la zone UEMOA et répondant aux normes internationales définies par l'OACI ;
- promouvoir l'efficacité de l'administration de l'aviation civile et la compétitivité des entreprises de transport aérien ;
- rendre accessible et au moindre coût le transport aérien aux popula-

2. source : www.statistiques-mondiales.com

Figure 2.1 – Carte géographique de l'UEMOA

tions de l'Union ;
- assurer la convergence des politiques sectorielles nationales ;
- accroître les échanges commerciaux et les flux touristiques pour stimuler la croissance économique et renforcer l'intégration des États membres.

2.2.3 Les attentes de l'UEMOA dans le trafic aérien

À l'ère de la mondialisation actuelle, l'UEMOA apparaît comme un véritable outil d'intégration sous régional. Cette structure est donc la bienvenue dans la mesure où elle prend en compte l'aspect économique et monétaire de la sous région ouest africaine. Vu que cette structure ne comprend que 8 États, elle sera en mesure de mieux appréhender les défis à relever. Plus concrètement elle s'est dotée d'un puissant outil économique et financier, en l'occurrence la BRVM (Bourse Régionale des Valeurs Mobilières). L'UEMOA a donc su se démarquer de ses prédécesseurs (Conseil de l'entente . . .) car les chefs d'états des pays membres ont compris qu'il fallait mettre en place des outils sous régionaux puissants et qui apportent de l'amélioration aux vécus des populations.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'espace dans lequel notre recherche s'est effectuée. Il nous a permis aussi de connaître les objectifs et les attentes de l'UEMOA dans le domaine du transport aérien. Le chapitre suivant donne notre première contribution sur la localisation d'un hub.

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE LOCALISATION OPTIMALE D'UN HUB AÉRIEN DANS LA ZONE UEMOA PAR UN PROGRAMME LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIER

3.1 Introduction

L'un des objectifs de l'UEMOA est le désenclavement du territoire communautaire par des liaisons aériennes suffisantes et coordonnées permettant de relier en moins de 24 heures tous les États membres de l'UEMOA entre eux comme avec leurs principaux partenaires économiques [56]. Pour atteindre ce noble objectif, le développement du transport aérien semble fondamental. La création d'une compagnie aérienne est donc nécessaire. Une compagnie aérienne pour mieux fonctionner a besoin d'un hub ou des hubs selon son réseau et la demande des usagers.

Un hub est une plate-forme aéroportuaire. Sa localisation consiste à déterminer un aéroport idéal de manière à optimiser une fonction économique. Celui-ci peut dépendre de la distance entre les aéroports, du coût de l'extension de l'aéroport, du coût de transport par unité de distance (il intègre le coût d'exploitation du kérosène), du nombre de passagers enregistrés à l'aéroport, etc.

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur la localisation des hubs. Un état de l'art sur le problème de la localisation du hub a été étudié par A. SIBEL et Y. KARA[3] et par CAMPELL J.F[10]. IVAN Contreras et al. ont utilisé le Branch and price[16] et la relaxation lagrangienne[15] pour le problème de localisation de hub avec capacités et affectation simple. O'Kelly[41] donne une formulation quadratique du programme entier de la localisation d'un hub sans capacité avec affectation simple. Rodíguez et al. [57] ont résolu le problème de localisation et d'affection de hub sous contraintes de capacités avec branch and price. Tous ces auteurs dont la liste n'est pas exhaustive ont apporté une contribution dans le système de trafic aérien. Mais jusqu'à présent, aucune contribution spécifique pour la zone UEMOA.
Dans ce chapitre, nous apportons notre contribution dans la gestion du système de trafic aérien dans la zone UEMOA, en proposant et en résolvant des modèles de localisation de hub aérien.

3.2 Position du problème

Nous considérons ici les huit pays de l'UEMOA : le Benin, le Burkina Faso, la Côte d'Ivoire, la Guinée Bissau, le Mali, le Niger, le Sénégal et le Togo, représentés par les aéroports internationaux de leurs capitales respectives. Notre objectif est de sélectionner un aéroport parmi les huit pour en faire un hub. D'abord, nous supposons que la localisation du hub tient compte du flux de passagers et des distances parcourues. Puis nous considérons le coût d'extension des aéroports parce que les aéroports de la zone UEMOA n'ont pas les mêmes dimensions et qu'il faut les étendre en respectant les normes internationales de l'OACI (Organisation de l'Aviation Civile Internationale).

3.3 Formulation mathématique

Pour la formulation mathématique, nous proposons deux modèles. Le premier modèle minimise la somme des distances entre les différents aéroports. Le deuxième modèle minimise la somme des coûts d'extension et le

total de coûts de transport.
Nous considérons un graphe $G = (N, A)$ où N est l'ensemble des nœuds correspondant aux aéroports internationaux des capitales de la zone UEMOA et A l'ensemble des lignes aériennes reliant les différents aéroports.

3.3.1 Modèle mathématique minimisant les distances

Nous utiliserons les paramètres suivants :

- N : le nombre des aéroports internationaux de la zone UEMOA ;
- d_{ij} : la distance entre deux nœuds i et j ;
- δ_{ikj} : la distance entre les nœuds i et j via le nœud k ;
- P_i : Le nombre de passagers enregistrés en une année à l'aéroport i ;
- $\overline{X}$: la moyenne arithmétique du nombre de passagers enregistrés dans la zone UEMOA ;

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P_i$$

- m_i : le nombre de mouvements commerciaux enregistrés en une année à l'aéroport i ;
- $\overline{M}$:la moyenne arithmétique des mouvements enregistrés dans la zone UEMOA.

La variable de décision est :

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{si le hub est localisé en k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction à minimiser est :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{N} x_k (\sum_{i=1}^{N} d_{ik} + \sum_{j=1}^{N} d_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_k \delta_{ikj} \end{aligned}$$

où $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$; $\delta_{ikk} = d_{ik}$; $\delta_{kkj} = d_{kj}$ et $\delta_{kkk} = 0$.

Notre modèle mathématique en programmation linéaire en nombres entiers (PLNE), appelé problème $\mathcal{P}$, est :

$$min \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{ikj} x_k \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = 1 \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{N} P_k x_k \geq \overline{X} \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k x_k \geq \overline{M} \tag{3.4}$$

$$x_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in \{1, ..., N\} \tag{3.5}$$

L'objectif (3.1) minimise la somme des distances entre les différents aéroports et l'aéroport hub.
La contrainte (3.2) signifie qu'exactement un hub doit être localisé.
La contrainte (3.3) montre que si le hub est localisé à l'aéroport k alors le nombre de passagers enregistrés dans cet aéroport doit être supérieur à la moyenne des passagers enregistrés dans la zone UEMOA.
La contrainte (3.4) montre que si le hub est localisé à l'aéroport k alors le nombre de mouvements enregistrés dans cet aéroport doit être supérieur à la moyenne des mouvements enregistrés dans la zone UEMOA.
Les contraintes (3.5) signifient que les variables de décision x_k sont binaires.

Définition 3.3.1. *Un aéroport est dit hub potentiel s'il vérifie les contraintes (3.3) et (3.4)*

Définition 3.3.2. *Un aéroport est dit hub optimal s'il est un hub potentiel et si la somme des distances qui le séparent des autres aéroports est minimale.*

Proposition 3.3.1. *Un aéroport h^* est hub optimal si et seulement si il est solution du problème $(\mathcal{P})$*

Démonstration. 1. Supposons que h^* est le hub optimal et montrons que h^* est solution de $(\mathcal{P})$

h^* est un hub optimal alors :

– h^* est un hub d'abord c'est-à-dire

$$x_{h^*} = 1 = \sum_{k=1}^{N} x_k$$

et les contraintes (3.2) et (3.5) sont vérifiées ;

– Par définition h^* est un hub potentiel donc les contraintes (3.3) et (3.4) sont vérifiées.

– Par définition la somme des distances qui le séparent des autres aéroports est minimale c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N} d_{ih^*} \leq \sum_{i=1}^{N} d_{ij}$$

or

$$\sum_{i=1}^{N} d_{ih^*} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{ih^*j}$$

donc h^* réalise

$$\min \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{ikj}$$

et l'objectif (3.1) est vérifiée.

Par conséquent h^* est solution de $\mathcal{P}$

2. Supposons que h^* est solution de $\mathcal{P}$. Montrons que h^* est le hub optimal.

   h^* solution de $\mathcal{P}$ alors le hub est placé en h^* ce qui implique que $x_{h^*} = 1$.

   h^* est solution de $\mathcal{P}$ alors toutes les contraintes sont vérifiées.

$$(3.2) \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} x_k = 1$$

et $x_{h^*} = 1$ alors $x_k = 0 \quad \forall k \neq h^*$

$$(3.3) \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} P_k x_k \geq \bar{X}$$

et $\quad \forall k \neq h^*,\ x_k = 0 \Rightarrow P_{h^*} x_{h^*} \geq \bar{X} \qquad (\alpha)$

$$(3.4) \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} m_k x_k \geq \bar{M}$$

et $\forall k \neq h^*, x_k = 0$ alors $m_{h^*} x_{h^*} \geq \bar{M} \qquad (\beta)$

(α) et $(\beta) \Rightarrow h^*$ est un hub potentiel.

$$(3.1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{ih^*j} \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{ikj} x_k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} d_{ih^*} \leq \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{ikj} x_k$$

Donc la somme des distances de h^* aux autres aéroports est minimale h^* est hub potentiel et la somme des distances de h^* aux autres aéroports est minimale donc h^* est le hub optimal.

□

3.3.2 Modèle mathématique intégrant les coûts d'extension

Dans ce modèle, en plus de minimiser la somme des distances parcourues, nous minimisons le coût total d'extension des aéroports. En plus des paramètres ci-dessus, nous utilisons les paramètres :

- c_{ikj} : le coût de transport de l'aéroport i à l'aéroport j via l'aéroport k ;
- $c_{ikj} = \alpha\delta_{ikj}$ où α est le coût de transport par unité de distance ;
- $c_{ikk} = \alpha d_{ik}$ est le coût de transport entre les aéroports i et k ;
- $c_{kkj} = \alpha d_{kj}$ est le coût de transport entre les aéroports k et j ;
- $c_{kkk} = 0$;
- f_{ikj} : flux de passagers venant de tout aéroport i via l'aéroport k vers la destination $j \neq i$;
- f_k : le coût d'extension de l'aéroport k.

La variable de décision est toujours

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{si le hub est localisé en k} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition : Nous appelons poids du coût de transport, le réel λ_{ikj} défini par $\lambda_{ikj} = \frac{1}{f_{ikj}}$

La fonction objectif est la suivante :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k x_k + \sum_{k=1}^{N} x_k \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ikj} c_{ikj}$$

Remplaçant c_{ikj} par son expression, nous obtenons :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k x_k + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ikj} \alpha \delta_{ikj} x_k$$

On peut encore écrire :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (f_k + \lambda_{ikj} \alpha \delta_{ikj}) x_k$$

Notre modèle mathématique est :

$$\begin{aligned}
(PLNE) z &= \min \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (f_k + \lambda_{ikj} \alpha \delta_{ikj}) x_k && (3.6) \\
\sum_{k=1}^{N} x_k &= 1 && (3.7) \\
\sum_{k=1}^{N} P_k x_k &\geq \overline{X} && (3.8) \\
\sum_{k=1}^{N} m_k x_k &\geq \overline{M} && (3.9) \\
x_k &\in \{0, 1\} \forall k \in \{1, ..., N\} && (3.10)
\end{aligned}$$

Le premier terme de la fonction objectif représente les coûts d'extension des aéroports et le second terme, les coûts totaux de transport pondérés par un cœfficient. (3.6) minimise la somme des deux coûts. La contrainte (3.7) assure qu'exactement un hub est à localiser. La contrainte (3.8) montre que si le hub est localisé à l'aéroport k alors le nombre de passagers enregistrés dans cet aéroport doit être supérieur à la moyenne des passagers enregistrés dans la zone UEMOA. La contrainte (3.9) montre que si le hub est localisé à l'aéroport k alors le nombre de mouvements enregistrés dans cet aéroport doit être supérieur à la moyenne des mouvements enregistrés dans la zone UEMOA. Les contraintes (3.10) sont des contraintes d'intégrité.

Remarque 5. *Les définitions (3.3.1), (3.3.2) et la proposition (3.3.1) restent valables pour le modèle minimisant les coûts d'extension.*

3.4 Résolution

Pour la résolution, nous avons élaboré un algorithme pour chaque modèle. L'algorithme NAS pour le premier modèle et l'algorithme SYNA pour le second.

3.4.1 Algorithme NAS

Étape 1

- Entrer la valeur de N ;
- Entrer les P_i $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$;
- Calculer la moyenne $\overline{X}$;
- Entrer les valeurs m_i $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$;
- Calculer la moyenne $\overline{M}$.

Étape 2

- Entrer les valeurs d_{ij} ;
- Donner la matrice distancier ;
- Calculer la somme SL_i pour toute ligne i de la matrice.

Étape 3

- Initialiser une somme (prendre une valeur supérieure à $maxSL_i$) ;
- $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$
  si $P_i \geq \overline{X}$ et $m_i \geq \overline{M}$ donner la ligne i et SL_i ;
  $SL_i < somme$ $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$ alors $solution = SL_i$;
- Donner la valeur minimale des SL_i et l'indice i ;
- la localisation optimale du hub est i.

3.4.2 Algorithme SYNA

Étape 1

- Entrer la valeur de N ;
- Entrer les $P_i \ \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, N\}$;
- Entrer les $m_i \ \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, N\}$;
- Calculer $\overline{X}$;
- Calculer $\overline{M}$.

Étape 2

- Entre les valeurs d_{ij} ;
- Donner la matrice distancier ;
- Calculer $\delta_{ikj} = d_{ik} + d_{kj} \ \forall i, k, j, \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

Étape 3

- Entrer les flux entre les différents aéroports origine/destination f_{ikj} ;
- Calculer $\lambda_{ikj} = 1/f_{ikj}, f_{ikj} \neq 0$.

Étape 4

- Entrer les coûts d'extension des aéroports f_k ;
- Entrer le coût de transport par unité de distance α ;
  Calculer $S_k = f_k + \lambda_{ikj}\alpha\delta_{ikj}$.

Étape 5

- Pour $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ si $P_i \geq \overline{X}$ et $m_i \geq \overline{M}$ alors donner les valeurs de S_i suivant l'ordre croissant. La localisation optimale est l'indice de la plus petite valeur.

3.4.3 Simulation et résultats

Pour la simulation, nous avons utilisé le logiciel Python version 2.7, sur un ordinateur HP PROBOOK dont les caractéristiques sont les suivantes :
Processeur : Intel(R) core(TM)i5-421OU CPU @170GHz 240GHz
Mémoire installée (RAM) : 6.00Go (5.88Go utilisable).
Type de système : système d'exploitation 64bits, processeur$\times$64.

Les distances entre les différents aéroports sont calculés par un logiciel de détermination des distances à vol d'oiseau entre les aéroports qui se trouve sur le site : www.ephemeride.com.

Pour le nombre de passagers et le nombre de mouvements enregistrés en une année dans la zone UEMOA, les données sont celles du trafic mondial 2012 (Enac Air Transport Data).

aéroports de	Passagers	Mouvements
COO	481389	5890
OUA	405000	12000
ABJ	646942	19212
OXB		
BKO	533054	10348
NIM	215872	7631
DKR	1732687	28014
LFW	472313	4431

TABLE 3.1 – Passagers transportés et mouvements

Les passagers aériens transportés comprennent les passagers des vols intérieurs et internationaux des transporteurs aériens autorisés dans le pays. Dans ces données de « Enac Air Transport Data » comme dans les données de l'OACI, le nombres de passagers enregistrés dans l'aéroport de Bissau dont le code IATA (International Air Transport Association) est OXB n'y figure pas.

Le premier modèle

Après simulation par le logiciel python 2.7, la moyenne du nombre de passagers enregistrés dans la zone UEMOA est de $\overline{X} = 560907$ passagers et la moyenne des mouvements est de $\overline{M} = 10940$ mouvements. La somme des distances de chaque aéroport à tous les autres aéroports est donnée dans la table (3.2)

	COO	OUA	ABJ	OXB	BKO	NIM	DKR	LFW	Sum	V.V.C
COO	0	789,734	710,061	2073,561	1324,38	789,308	2363,256	127,041	8117.341	
OUA	789,734	0	828,943	1539,151	699,712	418,901	1749,6	748,308	6774.349	
ABJ	710,061	828,943	0	1483,128	918,532	1130,158	1818,472	583,025	7472.319	7472.319
OXB	2073,561	1539,151	1483,128	0	840,934	1942,843	373,591	1961,805	10215.013	
BKO	1324,38	699,712	918,532	840,934	0	1102,383	1061,459	1231,227	7178.627	
NIM	789,308	418,901	1130,158	1942,843	1102,383	0	2127,439	815,437	8326.469	
DKR	2363,256	1749,6	1818,472	373,591	1061,459	2127,439	0	2258,757	11752.574	11752.574
LFW	127,041	748,308	583,025	1961,805	1231,227	815,437	2258,757	0	7725.6	

TABLE 3.2 – Tableau des simulations et résultats du premier modèle

Dans ce tableau :

- De la première colonne au huitième colonne, nous avons la matrice distancier.
- La neuvième colonne donne la somme des distances de chaque aéroport à tous les autres aéroports.
- La dernière colonne donne les V.V.C (Valeurs vérifiant les contraintes). Il y a deux aéroports : les aéroports d'Abidjan et de Dakar.

Parmi ces deux valeurs, la valeur minimale est 7472.319 Km et correspond à l'aéroport d'Abidjan. La localisation optimale est donc l'aéroport d'Abidjan.

Remarque 6. *Les aéroports de Ouagadougou et de Bamako ne respectent pas les contraintes imposées. Mais les valeurs de la fonction objectif dans ces aéroports sont plus petites que celle de l'aéroport d'Abidjan. Sans ces contraintes, la meilleure localisation serait l'aéroport de Ouagadougou suivi de celui de Bamako.L'aéroport d'Abidjan viendrait en troisième position.*
Cela signifie qu'une compagnie aérienne , pour le choix de son hub, ne doit pas seulement chercher à minimiser la somme des distances pour faire une économie sur le kérosène dans le but de maximiser ses profits, mais doit prendre en compte en particulier le facteur remplissage des avions et la capacité des aéroports qui sont exprimées par les contraintes (3.3)(flux des passagers) et (3.4)(mouvements des avions).

Le second modèle

Pour le second modèle, nous avions fait les simulations avec des valeurs estimées comparativement à la classification des aéroports(les prix estimés sont en millier de francs CFA).

Aéroports des capitales	COO	OUA	ABJ	OXB
	2300000	920000	3220000	3680000
aéroports des capitales	BKO	NIM	DKR	LFW
	2700000	2040000	920000	460000

TABLE 3.3 – Coût d'extension des aéroports

	COO	OUA	ABJ	OXB	BKO	NIM	DKR	LFW
COO	0	1897	7106	2561	2328	7898	2356	2971
OUA	1897	0	2143	1251	6912	5101	2746	3418
ABJ	7105	2143	0	1838	8532	4158	6872	5025
OXB	2561	1251	1838	0	1834	1942	1591	2961
BKO	2328	6912	8532	1824	0	2383	1459	2007
NIM	7898	5101	4158	1942	2383	0	2139	3057
DKR	2356	2746	6872	1591	1459	2139	0	4587
LFW	2971	3418	5025	2961	2007	3057	4587	0

TABLE 3.4 – Tableau des flux entre les aéroports.

Nous avons pris $\alpha = 500$.
Après simulation, les valeurs de la fonction objectif sont données dans le tableau (3.5).

capitales	COO	OUA	ABJ	OXB
Fonction objectif	2264062.5	905625	3169687.5	3622500
capitales	BKO	NIM	DKR	LFW
Fonction objectif	2657812.5	2008125	905625	452812.5

TABLE 3.5 – Résultats de la simulation du second modèle.

Seuls les aéroports de ABJ et de DKR qui vérifient toutes les contraintes. Notre objectif étant de minimiser le coût total alors la localisation optimale est DKR c'est-à-dire l'aéroport de Dakar.

Remarque 7. *L'aéroport LFW (Lomé) a le plus petit coût mais ne vérifient pas toutes contraintes. De la même manière, l'aéroport OUA(Ouagadougou) a le même coût que celui de Dakar mais ne vérifie pas aussi toutes les contraintes.*
Au vu de ces résultats, nous pouvons dire que nos contraintes de capacité sont fondamentales dans la localisation de hubs.

Remarque 8. *En faisant varier les valeurs du coût d'extension des aéroports et le flux des passagers ainsi que les mouvements, on trouve tantôt l'aéroport d'Abidjan, tantôt celui de Dakar.*

3.5 Conclusion

Ce chapitre est une première contribution à la mise en place d'une compagnie sous régionale en zone UEMOA. Ce travail répond à une des préoccupation des gestionnaires des compagnies aériennes de la zone UEMOA. Nous avons proposés deux modèles de programmation linéaire en nombres entiers pour la localisation d'un hub et nous avons élaboré un algorithme pour chacun d'eux. Les simulations ont été faites par le logiciel Python. Après les simulations, deux aéroports à savoir celui d'Abidjan et celui de Dakar vérifient toutes les contraintes imposées. Pour le premier modèle, la localisation optimale du hub pour une compagnie aérienne de la zone UEMOA est l'aéroport d'Abidjan. Pour le second modèle, la localisation optimale est l'aéroport de Dakar.
Comme un hub peut être déplacer pour une raison ou une autre, et qu'on peut avoir plusieurs hubs, dans les chapitres qui suivent, nous établissons :

1. Un modèle de deux hubs ;
2. Des modèles d'affectation de la flotte d'avions.

CHAPITRE 4

LOCALISATION OPTIMALE DE DEUX HUBS ET CONSTRUCTION DE RÉSEAU POUR UNE COMPAGNIE SOUS-RÉGIONALE DE LA ZONE UEMOA

4.1 Introduction

Le problème de localisation de hubs consiste à restructurer le réseau en vue d'une utilisation optimale. On rencontre ce genre de problème dans le transport aérien, le transport terrestre, dans les réseaux de télécommunications pour ne citer que ceux-là. Dans le domaine du transport aérien, une compagnie aéérienne qui a pour ambition de pérenniser et vivre économiquement bien, doit structurer son réseau entièrement autour d'un ou de quelques aéroports pivots appelés hubs. Il est essentiel que ce rôle de pivot soit assuré par un (ou des) aéroport(s) dont le courant de trafic est significatif par rapport aux autres aéroports. Dans ce chapitre nous résolvons le problème de localisation de deux hubs et la construction de réseau aérien pour une compagnie des pays de la zone UEMOA. L'UEMOA est constituée de huit pays qui sont le Benin, le Burkina Faso, la Côte d'Ivoire, la Guinée Bissau, le Mali, le Niger, le Sénégal et le Togo (figure 2.1 du chapitre 2).

Ce nombre ne justifie pas tellement la création de deux hubs compte tenu de leur position géographique. Cependant, vu les menaces terroristes de ces derniers temps, vu certaines épidémies telles Ebola, pour qu'un jour la compagnie ne puisse pas s'arrêter complètement à causes de ces raisons, la création de deux hubs se justifie. Si une compagnie dispose de deux hubs, deux situations peuvent se présenter :

1. les passagers pour aller d'un aéroport origine à un aéroport destination tous deux différents des hubs, doivent passer obligatoirement par les deux hubs ;
2. les passagers ont la possibilité de passer par un seul hub ou par les deux hubs selon la position des pays origine et destination par rapport aux hubs.

Le rôle d'un hub, c'est aussi de permettre d'optimiser le remplissage de vol surtout des moyens courriers vers les longs courriers. Un long courrier est un vol qui dure plus de cinq heures de temps. Donc si on considère un avion qui a une vitesse moyenne de 750 km/h cela fera au moins 3750 km. Or aucune distance entre deux pays quelconques de la zone UEMOA atteint 3000km. De ce fait, nous estimons que le premier cas est irréaliste. Dans ce chapitre, on ne prendra en compte que le deuxième cas c'est-à-dire les passagers ont la possibilité de passer par un seul hub ou par les deux hubs selon la position des pays origine et destination par rapport aux hubs.

Cependant pourquoi la localisation d'un hub ou des hubs pour la zone UEMOA ? Dans le domaine du transport aérien, l'UEMOA s'est fixée pour objectifs entre autres de :

- Renforcer la compétivité des activités économiques et financières des Etats membres dans le cadre d'un marché ouvert et concurrentiel et d'un environnement juridique rationalisé et harmonisé ;
- Assurer la convergence des performances et des politiques des États membres par l'institution d'une procédure de surveillance multilatérale ;
- Créer entre États membres un marché commun basé sur la libre circulation des personnes, des biens, des services, des capitaux et le droit d'établissement des personnes exerçant une activité indépendante ou salariée, ainsi que sur un tarif extérieur commun et une politique com-

merciale ;
– Instituer une coordination des politiques sectorielles nationales par la mise en œuvre d'actions communes, et éventuellement, de politiques communes notamment dans les domaines suivants : ressources humaines, aménagement du territoire, agriculture, énergie, industries, mines, transports, infrastructures et télécommunications ;
– Harmoniser, dans la mesure nécessaire au bon fonctionnement du marché commun, les législations des États membres et particulièrement le régime de la fiscalité.

Pour atteindre ses objectifs, elle s'est dotée des instruments tels :
– une politique de transports et des télécommunications ;
– une politique industrielle et minière ;
– un marché commun et intégré.

C'est dans ce cadre que nous voulons apporter notre contribution dans la localisation d'aéroports hubs car l'aéroport est aujourd'hui un moyen de pénétration de l'économie mondiale dans l'économie régionale voire nationale. De ce fait, les aéroports qui seront localisés comme hubs doivent être les principales portes d'entrée aérienne dans la zone UEMOA et les lieux d'échanges mondiaux puis être demain l'un des pôles majeurs de développement de la zone UEMOA.

Plusieurs problèmes de localisation de hubs sont étudiés dans la littérature : les problèmes de p-hub médian, les problèmes de localisation de hub sans capacités, les problèmes de p-hub centre, les problèmes de couverture de hubs. Pour plus d'informations sur les problèmes de localisations de hubs, se référer à [11],[12].

Un état de l'art sur le problème de localisation des hubs a été dressé par A. Sibel et Y. Kara [3] et par Campbell J.F [10]. Une linéarisation de cette formulation est donnée par Campbell dans [9]. Ivan Contreras et al ont utilisé le Branch and price [16] et la relaxation lagrangienne [15] pour le problème de localisation et d'affectation unique d'un hub avec une grande capacité. O'Kelly [41] donne une formulation quadratique du programme entier de la localisation d'un hub sans capacité avec affectation simple. Rodíguez et al[57] ont résolu le problème de localisation et d'affectation unique d'un hub avec une grande capacité par le Branch and Price.

Nous, nous proposons un modèle de programmation linéaire en nombres entiers avec capacité des aéroports. Nous entendons par capacité des aéroports le nombre de passagers enregistrés et le nombre de mouvements annuels.

4.2 Formulation mathématique

Nous considérons un graphe $G = \{N, A\}$ où $N = \{1, 2, ..., n\}$ est l'ensemble des nœuds correspondant aux aéroports origine/destination et A l'ensemble des lignes aériennes(arêtes) reliant les différents aéroports.
les paramètres suivants seront utiliséÏs :

- N : ensemble des aéroports qui sont des potentiels hubs ;
- E : ensemble des aéroports de l'UEMOA vérifiant les contraintes de capacité ;
- H ensemble des pays hors zone UEMOA ;
- d_{ij} : distance entre l'aéroport i et l'aéroport j ;
- si i est l'origine et j la destination alors le chemin de i à j sera de la forme $i - k - m - j$ où k et m sont des hubs auxquels i et j sont rattachés respectivement. on notera cette distance δ_{ikmj} et $\delta_{ikmj} = d_{ik} + d_{km} + d_{mj}$;
- P_i : le nombre de passagers enrégistrés par an à l'aéroport i ;
- M_i : le nombre de mouvements commerciaux enregistrés par an à l'aéroport i ;
- $\overline{P}$: la moyenne arithmétique du nombre de passagers enrégistrés dans les aéroports. On a

$$\overline{P} = \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^{|N|} P_i$$

- $\overline{M}$: la moyenne arithmétique des mouvements d'avions commerciaux enrégistrés dans les aéroports. On a

$$\overline{M} = \frac{1}{|N|} \sum_{i=1}^{|N|} M_i$$

Notre but est de déterminer deux hubs et les aéroports rattachés à ceux-ci de façon à minimiser la somme totale des distances. nous définissons alors deux variables de décision. Pour indiquer le hub, $\forall k \in N$

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{si le hub est localisé en k} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour montrer que le flux d'une origine i à une destination j passe par au moins un des hubs k et m, $\forall i, k, m, j \in N$

$$x_{ikmj} = \begin{cases} 1 & \text{si le flux de i à j passe via les hubs k et/ou m} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notre formulation du problème de localisation de hubs en programmation linéaire en nombres entiers avec capacité des aéroports se présente comme suit :

$$
\begin{aligned}
minz &= \sum_{i \in N \cup H} \sum_{k \in E} \sum_{m \in E} \sum_{j \in N \cup H} \delta_{ikmj} x_{ikmj} && (4.1) \\
\sum_{k \in N} y_k &= 2 && (4.2) \\
\sum_{k \in N} \sum_{m \in N} x_{ikmj} &= 1 \quad \forall i, j \in N && (4.3) \\
x_{ikmj} &\leq y_k \quad \forall i, k, m, j \in N && (4.4) \\
x_{ikmj} &\leq y_m \quad \forall i, k, m, j \in N && (4.5) \\
\sum_{k \in N} P_k y_k &\geq \overline{X} && (4.6) \\
\sum_{m \in N} P_m y_m &\geq \overline{X} && (4.7) \\
\sum_{k \in N} M_k y_k &\geq \overline{M} && (4.8) \\
\sum_{m \in N} M_m y_m &\geq \overline{M} && (4.9) \\
\sum_{k \in N} d_{ik} y_k &\leq d_{im} \quad \forall i, m \in N && (4.10) \\
\sum_{m \in N} d_{im} y_m &\leq d_{ik} \quad \forall i, k \in N && (4.11) \\
y_k &\in \{0, 1\} \quad \forall k \in N && (4.12) \\
x_{ikmj} &\in \{0, 1\} \quad \forall i, k, m, j \in N && (4.13)
\end{aligned}
$$

La fonction objectif (4.1) minimise la somme des distances pour aller d'une origine à une destination. La contrainte (4.2) signifie que exactement deux hubs sont à localiser. Les contraintes (4.3) signifient que chaque paire origine/destination doit être affectée à exactement une paire de hubs. Puisque k peut être égal à m dans (4.3), le flux entre une origine i et une destination j peut passer par un seul hub. Les contraintes (4.4) et (4.5) stipulent que le flux d'une origine i à une destination j ne peut qu'être affecté au hub localisé en k (4.4) ou en m (4.5). Les contraintes (4.6), (4.7), (4.8) et (4.9) signifient que si les hubs sont localisés en k et en m alors le nombre de passagers enregistrés ainsi que le nombre de mouvements enregistrés dans ces aéroports pendant une année doivent être au moins au delà de la moyenne des passagers et des mouvements dans les différents aéroports. les contraintes (4.10) et (4.11) sont les contraintes de rattachement aux hubs c'est-à-dire si la distance d'un aéroport i au hub k est plus petit que celle de i au hub m alors l'aéroport i est rattaché au hub k et vice-versa. Les contraintes (4.12) et (4.13) montrent que les variables de décision sont des variables binaires.

4.3 Méthode de résolution et simulation

4.3.1 Description de la méthode de résolution

Notre résolution du modèle se fait en deux étapes :

- Première étape : nous déterminons l'ensemble E des aéroports de la zone UEMOA qui vérifient les critères de capacité. Nous faisons ensuite $C_{|E|}^{2}$ (combinaison de 2 dans le cardinal de E) aéroports et retenons celle qui minimise la fonction objectif (4.1). Ces deux aéroports sont alors les aéroports hubs.
- Deuxième étape : Les hubs étant connus, nous cherchons à faire l'affectation des aéroports aux hubs c'est-à-dire nous cherchons à vérifier les critères (4.10) et (4.11). Pour cela nous vérifions si $d_{ik} \leq d_{im}$ alors l'aéroport i est affecté au hub k.

4.3.2 Simulation

Nous avons utilisé pour la simulation le logiciel Cplex en utilisant OPL (Optimization Programming Language).
Pour la première étape, les données utilisées sont celles de Enac air traffic data : Trafic mondial 2012.

Données

aéroports de	Passagers	Mouvements
COO	481389	5890
OUA	405000	12000
ABJ	646942	19212
OXB		
BKO	533054	10348
NIM	215872	7631
DKR	1732687	28014
LFW	472313	4431

Table 4.1 – Passagers et mouvements enregistrés

	COO	OUA	ABJ	OXB	BKO	NIM	DKR	LFW
COO	0	789,734	710,061	2073,561	1324,38	789,308	2363,256	127,041
OUA	789,734	0	828,943	1539,151	699,712	418,901	1749,6	748,308
ABJ	710,061	828,943	0	1483,128	918,532	1130,158	1818,472	583,025
OXB	2073,561	1539,151	1483,128	0	840,934	1942,843	373,591	1961,805
BKO	1324,38	699,712	918,532	840,934	0	1102,383	1061,459	1231,227
NIM	789,308	418,901	1130,158	1942,843	1102,383	0	2127,439	815,437
DKR	2363,256	1749,6	1818,472	373,591	1061,459	2127,439	0	2258,757
LFW	127,041	748,308	583,025	1961,805	1231,227	815,437	2258,757	0

Table 4.2 – Distance entre les différents aéroports des capitales de l'UE-MOA.

programmes de simulation

Localisation de deux hubs

```
int p= ...;
int X= ...;
int M= ...;
{string} aeroportuemoa = ...;
int passagers[aeroportuemoa]= ...;
```

```
int Priorite[aeroportuemoa]= ...;
int table[aeroportuemoa]= ...;
{string} aeroportHORSUEMOA = ...;
float Distance[aeroportuemoa][aeroportuemoa] = ...;
//Variables
dvar boolean hub[aeroportuemoa];
dvar boolean fluxvia[aeroportuemoa][aeroportuemoa][aeroportuemoa][aeroportue
dvar boolean Y[aeroportuemoa][aeroportuemoa];
//Objectif
minimize sum( i in aeroportuemoa , j in aeroportuemoa, k in aeroportuemoa, m
Distance[i][j]*fluxvia[i][k][m][j];
subject to {
ct_localisation:
forall (k in aeroportuemoa)
{

if ( Priorite[k] >= X && table[k] >= M)

hub[k] == 1;

}
```

Affectation des aéroports aux hubs

```
{string} hub = ...;
{string} aeroports = ...;
float Distances[aeroports][hub] = ...;
dvar boolean Y[aeroports][hub];
fluxvia[aeroports][aeroports][aeroports][aeroports];
subject to {

forall(i in aeroports , j in aeroports, k in hub, m in hub)
if (Distances[i][k]<= Distances[i][m] || Distances[i][k]== 1818.472)
sum(k in hub) Y[i][k] == 1;
else
```

```
Y[i][k] == 0;
```

Résultats de la localisation

Après simulation, nous avons obtenu les résultats suivants présentés dans le table(4.3)
Avec une fonction objectif égale à 1.081.956,672 km.

Aéroports	valeur de y_k
coo	0
oua	0
abj	1
oxb	0
bko	0
nim	0
dkr	1
lfw	0

TABLE 4.3 – Valeurs de la variable de localisation

Ce tableau montre que les hubs sont localisés à Abidjan et à Dakar.

Données complémentaires pour l'affectation

	PCD	Casablanca
ABJ	4887.863	3158.158
DKR	4219.084	2309.764

TABLE 4.4 – Distances entre les hubs et les pays hors UEMOA

Résultats d'affectation des hubs

Pour la deuxième étape après simulation nous avons obtenu les résultats suivants (table 4.5)

Ce tableau peut s'interpréter comme suit :
Tous les pays de la zone UEMOA hormis la Guinée-Bissau sont affectés au Hub d'Abidjan. Vu la position géographique des deux pays : Côte d'Ivoire et Sénégal, le hub d'Abidjan peut être considéré comme la porte d'entrée dans

Aéroports	hubs	valeur d'affectation
coo	dkr	0
coo	abj	1
oua	dkr	0
oua	abj	1
abj	dkr	1
abj	abj	0
oxb	dkr	1
oxb	abj	0
bko	dkr	0
bko	abj	1
nim	dkr	0
nim	abj	1
dkr	dkr	1
dkr	abj	1
lfw	dkr	0
lfw	abj	1
pcd	dkr	1
pcd	abj	0
casa	dkr	1
casa	abj	0

TABLE 4.5 – Résultats d'affectation des aéroports

la zone UEMOA des passagers de l'Afrique Centrale, du sud de l'Afrique. La Guinée-Bissau, Casablanca et la France sont affectées au hub de Dakar. Le Hub de Dakar peut être considéré comme la porte d'entrée dans la zone UEMOA des passagers venant de l'Europe, de l'Asie, de l'Afrique arabe et de l'Amérique représentées par PCD (Paris Charles Dégaule) et Casa (Casablanca au Maroc).
Les résultats de l'affectation peuvent est schématisés par la figure (4.1)

4.4 Conclusion

Ce chapitre est une contribution des sciences mathématiques à la localisation de hubs et à la construction de réseau pour une compagnie aérienne de la zone UEMOA. Dans ce chapitre, nous avons élaboré un modèle qui permet d'une part, de déterminer deux hubs pour la zone UEMOA et d'autre

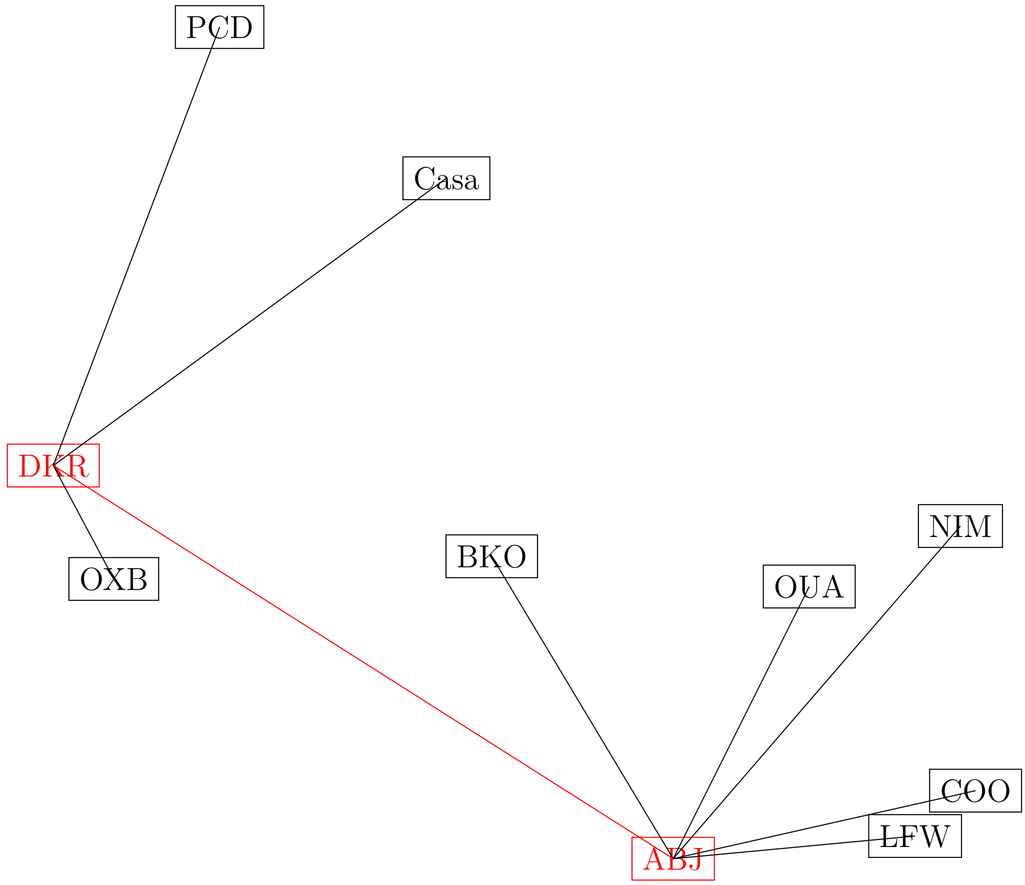

Figure 4.1 – Exemple d'un réseau à deux hubs pour la zone UEMOA

part de construire un réseau pour une compagnie sous-régionale de cette zone. Les résultats de nos simulations, au vu des données que nous avons, donnent les aéroports d'Abidjan en Côte d'Ivoire et de Dakar au Sénégal comme hubs. Ces résultats confirment le rôle que jouent ces deux pays dans l'UEMOA et leur poids économique par rapport aux autres pays de la zone. Comme perspectives, nous comptons prendre en compte les aéroports des villes non capitales des pays de la zone UEMOA tels l'aéroport Blaise Diagne au Sénégal, l'aéroport de Yamoussokro en Côte d'Ivoire, l'aéroport de Bobo Dioulasso au Burkina Faso, etc.

CHAPITRE 5

TAILLE OPTIMALE DE LA FLOTTE D'AVIONS

5.1 Introduction

Le concept de taille de la flotte et de sa composition sont étroitement liés à la demande. La détermination de ces notions revêt une grande importance due à l'impact direct sur les coûts d'exploitation. Une flotte de très grande taille engendre des frais et une flotte de très petite taille occasionne des dépense de location. Il importe donc de déterminer de façon adéquate la taille et la composition de la flotte [59].

5.2 Affectation Optimale d'une Flotte d'avion

Le problème d'affectation est un problème combinatoire pour lequel il existe un algorithme efficace. Étant donné un horaire de vol (qui est un ensemble de segments de vol avec des heures de départ et d'arrivée spécifiques) et un ensemble d'avions, le problème d'affectation d'une flotte consiste à déterminer quel type d'avion doit voler dans chaque segment de vol. Le type d'avion est une classe particulière d'avion définie par :

- La capacité en sièges ;
- La consommation de carburant ;
- D'autres facteurs pouvant affecter les recettes et les coûts.

Il s'agit de construire les rotations d'avions c'est-à-dire affecter à chaque appareil disponible l'enchaînement de vols qu'il devra effectuer. Ainsi le problème d'affectation d'une flotte d'avion consiste essentiellement à affecter les avions disponibles aux vols destinés de manière à réaliser l'ensemble du programme avec le nombre minimal des avions et à minimiser le coût d'exploitation. Autrement dit, l'objectif consiste à maximiser les recettes moins les coûts d'exploitations.

Remarque 9.
- *La recette est une fonction de la demande pour le segment, le coût des billets et la capacité en sièges de l'avion.*
- *Les coûts d'exploitation dépendent de la taille de la flotte et de l'efficacité de l'avion ainsi que de la longueur du segment.*

Pour déterminer la taille de la flotte d'avion, nous sommes en mode conceptuel. Nous considérons le réseau de la figure 5.1 où les nœuds sont les aéroports internationaux des capitales des pays de la zone UEMOA.

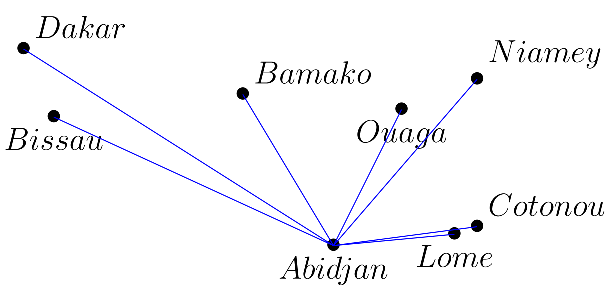

FIGURE 5.1 – Réseau de lignes aériennes de la zone UEMOA

5.2.1 Modèle d'affectation avec un seul type d'avion

Problèmatique

Une compagnie aérienne sous régionale de la zone UEMOA concentre ses correspondances dans son hub d'Abidjan (figure 5.1). Elle souhaite coupler les vols arrivant et partant de cet hub, afin qu'un maximum de passagers puisse continuer leur voyage sans changer d'avion.
On considère qu'il y a n vols arrivant au hub et n vols partant du hub. Le

but est de déterminer pour chaque vol arrivant, le vol partant avec lequel il doit être couplé.

Paramètres

- n_{ij} : le nombre de passagers arrivant par le vol numéro i $(i = 1, 2, ..., n)$ et poursuivant sur le vol numéro j $(j = 1, 2, ..., n)$;
- θ_{ij} : Le nombre total des heures de vol du couple (vol i, vol j) ;
- n_k : la demande de passagers sur le vol k ;
- δ_k : le nombre de passagers n'effectuant que le vol numéro k ;
  NB : Le vol k peut être un vol arrivant ou partant du hub.

- P_n : la demande totale des passagers pour les n vols partant du hub ;
- α : Le nombre minimal de sièges à occuper pour que le vol ait lieu ;
- β : la capacité de l'avion ;
- b : Le nombre maximal d'heures disponibles pour l'avion.

Variables de décision

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si le vol arrivant i est couplé au vol partant j} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{Si le vol k est rentable} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction objectif

L'objectif étant de maximiser le nombre de passagers sur les vols à partir du hub, la fonction objectif peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_{ij}$$

Le modèle mathématique du problème est :

$$
\begin{aligned}
Maxz = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_{ij} & & & & (5.1)\\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 & \forall i = 1,...,n & & (5.2)\\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 & \forall j = 1,...,n & & (5.3)\\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}x_{ij} &\leq b & & & (5.4)\\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (n_{ij}+\delta_j)y_j x_{ij} &= P_n & & & (5.5)\\
\sum_{j=1}^{n} (n_{ij}+\delta_j)y_j &\geq \alpha & \forall i & & (5.6)\\
\sum_{j=1}^{n} (n_{ij}+\delta_j)y_j &\leq \beta & \forall i & & (5.7)\\
x_{ij} &\in \{_{0,1}\} & & & (5.8)\\
y_k &\in \{0,1\} & & & (5.9)
\end{aligned}
$$

La fonction objectif (5.1) maximise le nombre de passagers sur les vols à partir du hub. Les contraintes (5.2) stipulent que chaque avion arrivant poursuit un seul arc. De même les contraintes (5.3) montrent que chaque avion partant vient d'un seul arc. La contrainte (5.4) limite le nombre d'heures disponibles pour un avion dans la période fixée. La contrainte (5.5) est une contrainte de satisfaction de la clientèle. Les contraintes (5.6) fixent le nombre minimum pour que le vol soit rentable. Les contraintes (5.7) sont des contraintes de limitation de la capacité des avions. Les contraintes (5.8) et (5.9) sont des contraintes d'intégrité.

5.2.2 Modèle d'affectation avec deux types d'avion

Pour le modèle d'affectation avec deux type d'avion, la problèmatique reste la même que pour un seul type d'avion.
Pour la modélisation, les notations, les paramètres et la variable de décision

suivants sont définis.

Notations

- H : l'horaire de vol ;
- F : l'ensemble de types d'avions indexés par i. on a $F = \{1, 2\}$ où 1 est le type d'avion ayant le nombre de sièges le plus élevé ;
- K : l' ensemble de nœuds(aéroports) du réseau ;
- A : l'ensemble des arcs(lignes aériennes reliant deux aéroports origine/destination) indexés par l.

Paramètres

- P_l : la demande de transport sur l'arc l ;
- α^i : le nombre minimal de sièges à occuper pour que le vol de l'avion de type i soit rentable ;
- β : le nombre maximal de passagers que le plus grand avion peut transporter ;
- c_l : coût d'exploitation de l'arc l ;
- Z_l^i le flux de passagers à transporter sur l'arc l par l'avion de type i ;
- θ_l^i : le nombre d'heures de vol si un avion de type i est choisi pour effectuer le vol de l'arc l ;
- b_i : le nombre maximal d'heures disponibles dans la période de temps considéré pour l'avion de type i.

Variable de décision

$$x_l^i = \begin{cases} 1 & \text{si l'avion de type i est affecté à l'arc l} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i pouvant être 1 ou 2.

Notre objectif est de minimiser les coûts d'exploitation des arcs c'est-à-dire les coûts d'exploitation des itinéraires. Le programme linéaire en nombres entiers noté $(\mathcal{P})$ peut se formuler comme suit :

$$\min \sum_{i\in F}\sum_{l\in A} c_l x_l^i \tag{5.10}$$

$$\sum_{i\in F} x_l^i = 1 \qquad \forall l \in A \tag{5.11}$$

$$\sum_{l\in A} \theta_l^i x_l^i \leq b_i \quad \forall i \in F \tag{5.12}$$

$$\sum_{i\in F} Z_l^i x_l^i = P_l \quad \forall l \in A \tag{5.13}$$

$$\alpha^i \leq Z_l^i x_l^i \leq \beta \quad \forall i \in F \quad \forall l \in A \tag{5.14}$$

$$x_l^i \in \{0,1\} \quad \forall i \in F \quad \forall l \in A \tag{5.15}$$

La fonction objectif (5.10) minimise le coût d'exploitation des itinéraires. Les contraintes (5.11) indiquent qu'un et un seul avion est affecté à chaque itinéraire. Les contraintes (5.12) sont les contraintes de limitation du nombre d'heures dans la période de temps donnée. Les contraintes (5.13) montrent que le flux transporté par les avions sur un arc est égal à la demande de transport sur cet arc. Les contraintes (5.14) sont des contraintes de limitation du nombre de passagers en fonction du nombre de sièges et le nombre minimal pour que le vol s'effectue pour permettre à la compagnie de réaliser un profit. Enfin les contraintes (5.15) sont des contraintes d'intégrité.

5.3 Existence de la solution

Proposition 5.3.1. *Soit D l'ensemble admissible du programme linéaire en nombres entiers* ($\mathcal{P}$)*.*
($\mathcal{P}$) *admet une solution optimale dans D.*

Démonstration. 1. Les contraintes peuvent s'écrire de la forme $AX \leq b$ donc D est un polyèdre.
Les fonctions $g(X)$ définissant les contraintes sont linéaires par conséquent continues. Les demi-espaces $[g(X) \leq 0]$ qu'elles déterminent sont convexes et fermés. D étant l'intersection de ces demi-espaces est convexe et fermé car l'intersection de convexes est convexe et des fermés est fermé.
D'où D est un polyèdre convexe fermé.

2. α_i, β, b_i, $P_l \in \mathbb{R}^+$ donc finis. Par conséquent les contraintes (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) et (5.15) définissent un ensemble borné qui est D. D'où D est borné.é
   D est fermé et borné alors D est compact.
3. La fonction objectif f(X) est continue car somme des fonctions continues.

f continue et D compact, d'après le théorème de Weierstrass toute fonction continue sur un compact y atteint son minimum d'où le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution optimale. $\square$

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'affectation optimale d'une flotte d'avions et nous avons élaboré deux modèles de détermination de la taille de la flotte. Le premier avec un seul type d'avion et le second avec deux types d'avion. L'existence de la solution de ces modèles a été demontrée.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Contributions

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux problèmes industriels dans le domaine du transport aérien. Le premier problème est le problème de localisation de hub pour une compagnie aérienne de la zone UEMOA et le second problème est le problème de l'affectation de la taille optimale d'une flotte pour une compagnie aérienne de la zone UEMOA. Les deux problèmes sont des problèmes pratiques que rencontrent les compagnies aériennes qui sont à leur début.
Nos contributions pour accompagner les gestionnaires de la compagnie aérienne sous régionale de la zone UEMOA pour une localisation optimale du (ou des) hub(s) et l'affectation optimale de la flotte ont porté sur cinq thèmes de la Recherche Opérationnelle : l'optimisation combinatoire, la programmation linéaire en nombres entiers, la modélisation, la théorie des graphes et la résolution.
Tout d'abord, nous avons commencé par montrer comment le problème de localisation de hub et d'affectation de la flotte sont des problèmes combinatoires. Ils peuvent être modélisés par la programmation linéaire en nombres entiers et que les liens qui lient les différents aéroports, qui sont l'objet de la localisation, peuvent être représentés sous forme de graphe (figure 1.1). Ensuite, viennent les contributions personnelles. Nous avons eu à élaborer cinq modèles :

- Un premier modèle qui minimise la somme des distances sous des contraintes dites de capacité ;
- Un deuxième modèle qui minimise la somme de coût d'extension des aéroports et du coût total de transport.

  Les deux modèles ont permis de localiser un hub et ont fait l'objet de notre premier article intitulé : **Modélisation et résolution d'un programme linéaire en nombres entiers pour la localisation optimale d'un hub aérien pour la zone UEMOA**. Article qui a été publié dans *Mathematics and Computers in Science and Engineering Series*. Journal indexé et abstracté dans Zentralblatt Math.
- Un troisième modèle qui minimise la somme des distances et qui a permis à la localisation de deux hubs. Ce modèle nous a permis de publier notre deuxième article intitulé : **Localisation optimale de deux hubs et construction de réseau pour une compagnie sous-régionale de la zone UEMOA**. Article indexé et abstracté dans *Journal of Mathematics Research*. Journal indexé et abstracté par Mathscinet and Zentralbalt.
- Un quatrième modèle qui maximise le nombre de passagers sur les vols avec un seul type d'avion.
- Un cinquième modèle qui minimise le coût d'exploitation des vols avec deux types d'avion . Ces deux modèles font aussi l'objet d'un article à publier.

Pour les trois premiers modèles, nous avons élaboré un algorithme pour chacun qui nous a permis de faire la simulation avec les logiciels Python et Cplex . Pour le premier modèle la localisation optimale est l'aéroport d'Abidjan et pour le second c'est celui de Dakar.

Dans la localisation de deux hubs et construction de réseau aérien pour la zone UEMOA, la fonction objectif minimise la somme des distances sous les contraintes de capacité et les contraintes de rattachement des aéroports aux hubs. Un algorithme pour ce modèle est aussi élaboré. Après simulation, il n'y a que les deux aéroports : Abidjan et Dakar qui vérifient toutes les contraintes de capacité imposées. Par conséquent les deux hubs sont les aéroports d'Abidjan et de Dakar. Les rattachements des aéroports aux deux hubs et aux pays hors UEMOA (d'Afrique, d'Europe, d'Asie et d'Amérique)

sont donnés par la table (4.1) .
De toutes ces modèles et des simulations que nous avions eu à faire, nous disons que les aéroports d'Abidjan et de Dakar sont bien placés pour en faire de hub(s) pour une compagnie aérienne de la sous-région de la zone UEMOA.
Pour les deux derniers modèles nous avons démontrer que les solutions optimales existent. Mais comme la compagnie n'est pas encore mise sur pied, nous n'avons pu avoir des données pour faire les simulations.

Perspectives

Comme tout travail scientifique, nous ne pouvons conclure cette thèse sans les perspectives. Ces perspectives sont nombreuses vu l'importance d'un hub et de la flotte pour une compagnie aérienne. Mais nous ciblons quelques unes. Nous comptons augmenter le nombre des aéroports c'est-à-dire nous allons prendre en compte certains aéroports des villes secondaires de la zone UEMOA compte tenu de leurs activités économiques et de leur stabilité. Le nombre des aéroports des pays hors UEMOA sera aussi revu en hausse. Nous pensons introduire l'aspect politique c'est-à-dire le poids de chaque pays membre dans l'UEMOA. Nous comptons également introduire des critères logiques c'est-à-dire par exemple deux aéroports de deux pays voisins ne peuvent être tous deux des hubs ou encore si un tel aéroport est hub alors l'autre ne peut l'être. Le nombre de type de flotte aussi sera revu en hausse. Dans le modèle de détermination de la taille de la flotte, nous pensons introduire une contrainte qui prenne en compte l'horaire de vol. Le transport aérien demande des investissements très coûteux, ce qui rend impossible la couverture de l'ensemble du marché par une seule compagnie[42]. Donc on envisagera le cas d'alliance avec une compagnie pour l'affectation de la taille de la flotte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lösch A. *Die raümliche ordnung der wirtschaft. Traduction anglaise : « The economics of location.» Yale university Press, Neaw Haven.*, 1940.

[2] J Agard, J Sudarovich, and F. Hemmer. Sélection et affectation optimales d'une flotte d'avions. *Revue française d'automatique, d'informatique et de Recherche opérationnelle*, 2 :3–26, 1973.

[3] Sibel Alumur and Bahar Y. Kara. Network hub location problems : The state of the art. *Europian journal of operational research 2007*, pages 1–21, juin 2007.

[4] Niang Babacar. *Statut des compagnies aériennes dans l'UEMOA*. Mémoire de maîtrise, UCAD-Dakar, 2010.

[5] Christophe Le Bec. *Dossier transport aérien : les flottes africaines décollent*, 2012.

[6] Pierre Borne, Abdelkader El Kamel, and Khaled Mallouli. *Programmation linéaire et Applications.* 2004.

[7] Hane C., Barhart C., Johnson E., Marsten R., Nemhauser G., and Siglismondi G. The fleet assigment problem : solving a large-scale integer program. *Mathematical Programming*, 70 :211–232, 1995.

[8] Ponsard C. *Economie et espace. Sedes, Paris.*, 1955.

[9] J.F Campbell. Integer programming of dicrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*, 72 :387–405, 1994.

[10] J.F Campbell, A.Ernest, and Krishnamoorthy. Hub location problems. *In H. Hamacher and Z. Drezner, editors, location theory : Application and theory.*

[11] J.F Campbell, A.T Ernest, and Krishnamoorthy M. Hub location problems.facility location :applications and theory. pages 373–407, 2002.

[12] J.F Campbell and O'Kelley M.E. Twenty-five years of hub location research. *Transportation science*, 46 :153–169, 2012.

[13] Berge Claude. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1973.

[14] Berge Claude. *Graphes*. Gauthier-Villars, 1983.

[15] IVAN Contreras, Juan A. Días, and ELENA Fernández. Lagrangian relaxation for the capacited hub location problem with single assignment. *Regular Article,*, 31 :483–505, 2009.

[16] Ivan Contreras, Juan A. Dias, and Elena Fernandez. Branch and price for large-scale capacitated hub location problems with single assignment. *INFORMS Journal on Computing,*, 23 :41–55, 2011.

[17] Revelle C.S and Eiselt H.A. Location analysis : A synthesis and survey. *European Journal of Operational Research,*, 165 :1–19, 2005.

[18] Klabjan D. Large scale models in the airline industry. culumn generation. *Springer,*, pages 163–195, 2005.

[19] Guy Desaulniers, Jacques Desrosiers, Yvan Dumas, Marius M. Solomon, and Francois Soumis. Daily aircraft routing and schedling. *Management Science*, 14 :841–854, 1997.

[20] Coumba Diallo. *Problème d'Optimisation de structure : Applications en élasticités et en transport aérien.* Thèse de doctorat unique, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal, 2013.

[21] Hoover E. *Location theory and the shoe and leather industies. Harvard University Press, Cambridge*, 1937.

[22] A.T Ernest and M. Krishnomoorthy. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *location science*, 4(3) :139–154, 1996.

[23] N.V Evanston. *Price of used commercial aircraft.* Thèse de doctorat, Northwestern University, 1959.

[24] Ayari Faycal. *Stratégie de développement d'une desserte aérienne sur le continent africain : cas de Tunisair*. Mémoire de mastère professionnelle, Université virtuelle de Tunis, 2013.

[25] D. Gretz and M. Baklouti. Optimisation d'une flotte aérienne. *Document interne du SGAC et BCEOM*, 1964.

[26] Christelle Gueret, Christian Prins, and Marc Sevaux. *Programmation linéaire : 65 problèmes d'optimisation modélisés et résolus par visual express*. Eyrolles, 2000.

[27] Sherali H.D, Bish E.K, and Zhu X. Airline fleet assignment concepts, models and algorithms. *European Journal of Operational Research,*, 172 :1–30, 2006.

[28] David Ialongo. Design d'un réseau aérien : intégration de l'élaboration d'un horaire de vols et de l'affectation des types d'avion. 2010.

[29] David Lasalle Ialongo. *Problème d'affectation des types d'avion aux vols : optimisation robuste et intégration de la demande des passagers*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, 2014.

[30] Peyrelevade Jean and Germain Gervais. Modèle de choix d'investissement d'une compagnie aérienne. *Revue française d'automatique, d'informatique et de Recherche opérationnelle*, (2) :27–51, 1973.

[31] P. Lacomme, C. Prins, and M. Sevaux. *Algorithme de graphes*. Eyrolles, 2003.

[32] A.H Land and A.G Doig. An automatic method for solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28 :497–520, 1960.

[33] Sabine Limbourg. *planification stratégique de systèmes de transport de marchandises en Europe :Modèles de localisations optimales de hubs de conteneurs sur un réseau multimodal*. Thèse de doctorat de sciences de gestion, Facultés Universitaires Catholiques de Mons, 2007.

[34] Didier Maquin. *Elements de théorie de graphes et programmation linéaire*. Institut National Polytechnique de Lorraine, Mai 2008.

[35] Peyrega Mathilde and François Soumis. Optimisation stochastique de l'affectation des types d'avions dans un réseau étoilé. Août 2012.

[36] M. Minoux. *Programmation mathématiques Tome 1 : Théories et algorithmes*. Collection technique et scientifique des télécommunications, 1983.

[37] M. Minoux. *Programmation mathématiques Tome 2 : Théories et algorithmes*. Collection technique et scientifique des télécommunications, 1989.

[38] Devletoglou N. *A Dissenting View of Duopoly and Spatial Competition. Duopoly and Spatial Competition, Economica*, 1965.

[39] N'dogotar Nélio, SAlimata Guèye D., and Yousou Gningue. Optimal two hubs location and network construction for a regional company of waemu zone. *Journal of Mathematics research*, 8(2) :49–54, 2016.

[40] N'dogotar Nélio, Salimata Guèye D, and Abdouramane Guèye. Modelling and resolution of a linear problem in integer numbers for an optimal air hub location in the waemu zone. *Mathematics and Computers in Sciences and Engineering Series*, pages 144–148, 2015.

[41] M. O'Kelly. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Recherch*, 32 :393–404, 1987.

[42] Biplan P. les compagnies aériennes entre la nation et la modialisation. *Operations research letters*, 114 :57–70, 2004.

[43] Christos H. Papadimitriou and Kenneth Steiglitz. *Combinatorial optimization*. Dover, 1998.

[44] H. Pirkul and D.A Schilling. An efficient procedure for designing single allocation hub and spoke systems. *Management Science*, 44(12) :235–242, 1998.

[45] Subramanian R. and al. Cold start : fleet assignment at delta air lines. *Interfaces*, 24 :104–120, 1994.

[46] Brian Rexing, Cynthia Barnhart, Tim Kniker, Ahmad Jarrah, and Nirup Krishnamurthy. Airline fleet assignment with time windows. *transportation Science*, 20 :1–20, 2000.

[47] Church R.L and Revelle C. The maximal covering location problem. *Papers of the Regional Science Association*, 32 :101–118, 1994.

[48] Rémi Ruppli. *Programmation linéaire.* 2005.

[49] Hakimi S. Optimum location of switching centers and the absolute medians of a graph. *Operations Research*, 12 :450–459, 1964.

[50] Hakimi S. Optimal distribution of switching centers in a communication network and some related theoretic graph theoretic problems. *Operations Research*, 13 :462–475, 1965.

[51] Michel Sakarovitch. *Optimisation combinatoire : Méthodes mathématiques et algorithmiques.* 1984.

[52] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming.* 1986.

[53] Palander T. *Beitrage zur standortstheorie. Almqvist et Wiksells Boktryckeri, Uppsala*, 1935.

[54] Jacques Teghem. *Programmation linéaire.* 1996.

[55] Jacques Teghem. *Programmation linéaire.* Collection statistique et mathématiques appliquées, 2003.

[56] UEMOA. *Programmme commun de transport aérien dans les Etats membres de l'UEMOA*, juin 2002. Commision de L'UEMOA.

[57] Rodiguez V, M. J. Alvarez, and L. Barcos. Hub location under capacity constraints,. *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review,*, 43 :495–505, 2007.

[58] Jean Varlet. La déréglementation du transport aérien et ses conséquences sur les réseaux et sur les aéroports. *Annales de Géographie*, 106 :205–217, 1997.

[59] Claude Wafer. *Une approche intégrée pour l'exploitation et la gestion d'une flotte de véhicules.* Mémoire de maitrise, Université Laval. Québec, 1997.