UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

ECOLE DOCTORALE: PHYSIQUE, CHIMIE, SCIENCE DE LA TERRE,

DE L'UNIVERS ET DE L'INGENIEUR (PCSTUI)

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Année : 2016 N° d'ordre :

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Mécanique des Fluides

Présentée par :

Madialène SENE

Titre:

Etude numérique de la convection naturelle à l'intérieur d'une enceinte délimitée par deux portions de paraboles cylindriques de génératrice horizontale et une surface plane :

Soutenue le 17/12/2016 devant le jury composé de :

Président : M. Aboubaker Chedikh BEYE, Professeur Titulaire, Université Cheikh Anta Diop

Rapporteurs :

M. Cheikh MBOW, Maître de conférences, Université Cheikh Anta Diop

M. Abdoulaye SENE, Maître de conférences, Université Cheikh Anta Diop

Examinateurs :

M. Bassirou BA, Professeur Titulaire, Université Cheikh Anta DIOP

M. Joseph SARR, Professeur Titulaire, Université Cheikh Anta Diop

Directeur de thèse :

M. Mamadou .L. SOW, Maître de conférences, Université Cheikh Anta Diop

REMERCIEMENTS

Les travaux de recherches qui ont abouti à l'élaboration de cette thèse ont été réalisés au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides et Applications du Département de Physique de la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar (UCAD).

Ce travail a été fait sous la direction de Monsieur Mamadou Lamine SOW, Maître de conférences à la Faculté des Sciences et Techniques de Dakar. Je vous remercie du fond du cœur et vous témoigne de ma profonde gratitude.

A Monsieur Aboubaker Chedickh BEYE, Professeur Titulaire à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Cheikh Anta Diop, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury malgré ses nombreuses occupations, qu'elle trouve ici mes hommages respectueux.

Je remercie sincèrement Monsieur Joseph SARR, Professeur Titulaire à la faculté des Sciences et Techniques de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar que je remercie beaucoup également pour avoir accepté de participer à mon jury d'examen, malgré sa lourde et exaltante tache de Doyen.

Ce travail n'aurait pu se dérouler dans les meilleures conditions sans l'aide précieuse et nécessaire de Monsieur Cheikh MBOW, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et Techniques (FST) de l'Université Cheikh Anta DIOP de Dakar, qui a toujours encadré mon travail et m'a fait partager son savoir et son enthousiasme. Un énorme merci pour sa disponibilité sans bornes, et surtout sa grande patience, qu'il veuille bien trouver ici mes vifs remerciements, l'expression de ma profonde reconnaissance et de ma sincère considération.

Mes vifs remerciements vont aussi à Monsieur Abdoulaye SENE, Maitre de Conférences à département Mathématiques et Informatique de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar, qui a accepté d'examiner ce travail, qu'il trouve ici ma respectueuse reconnaissance.

Je ne saurais oublier, Monsieur Bassirou BA, Professeur Titulaire à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, que je remercie beaucoup également pour avoir accepté de participer à mon jury d'examen.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements Dr Samba DIA à la Faculté des Sciences et Technique de l'UCAD, pour l'appui considérable que vous m'avez apporté pour la réalisation de ce travail.

Mes sincères remerciements à toute personne m'ayant aidé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

DÉDICACES

Je dédie cet humble travail

À mes parents qui me sont les plus chers

À ma femme Mame Fama Diakhaté SENE

À tous les membres de ma famille.

À tous mes amis.

À Mon fils Mouhamad

Madialène. SENE

Table des matières

LISTE DES SYMBOLES

Lettres Latines

b : Facteur de forme

Cf : Coefficient de frottement

$\overline{C}f$: Coefficient de frottement moyen

g : Accélération de pesanteur $\left[m.s^{-2}\right]$

h : Coefficient métrique

L : Longueur de référence $[m]$

Nu : Nombre de Nusselt

$\overline{N}u$: Nombre de Nusselt moyen

Pr : Nombre de Prandtl $\Pr : \dfrac{\nu}{\alpha}$

Ra : Nombre de Rayleigh $Ra : \dfrac{\beta g\left(T_h - T_c\right)L^3}{\alpha \eta_{vis}}$

S : Surface de l'enceinte $\left[m^2\right]$

t : Temps adimensionnel

U, V : Composantes des vitesses adimensionnelles

x, y : Coordonnées cartésiennes[m]

$\vec{n}$: vecteur normal local à la paroi

Cp : Capacité calorifique massique $\left[J.Kg^{-1}.K^{-1}\right]$

T : température [K]

T_0 : température de référence [K]

P : pression $[Pa]$

V_N : *espace* vectoriel lineaire

$r_k(x)$: les polynomes

$c_0, c_1, ...c_{N-1}$: les constantes

$x_1, x_2.......x_N$: les coordonnées des points de maillage.

$a_{ii}, b_{jj}, w_{jk}, w_{ik}, w_{kj}$: Coefficients de pondération.

$w_{i,k}^{(2)}, w_{j,k}^{-(2)}, w_{i,k}^{(1)}, w_{j,k}^{-(1)}$: *les* coefficients correspondant à la discretisation des derivées.

Lettres grecques

α : Diffusivité thermique du fluide $\left[m^2.s^{-1}\right]$

β : Coefficient de dilatation thermique $\left[K^{-1}\right]$

ϕ : Angle d'inclinaison $[rad]$

η, ξ : Coordonnées paraboliques

η_{vis} : Viscosité cinématique $\left[m^2 s^{-1}\right]$.

λ : Conductivité thermique $\left[Wm^{-1}K^{-1}\right]$

ν : viscosité cinématique $\left[m^2 s^{-1}\right]$

ϖ : Vorticité adimensionnelle

θ : Température adimensionnelle $\theta = (T - T_c)/(T_h - T_c)$

Ψ : Fonction de courant adimensionnelle

ε : Précision de calcul

Indices

i, j : Indices de discrétisation

k : Index d'incrémentation du procédé d'itération

TABLE DES FIGURES

.

LISTE DES TABLEAUX

Introduction

La Convection Naturelle, vu son importance dans la technologie moderne et dans les autres disciplines de la Science, a fait l'objet de nombreuses études aussi bien sur le plan expérimental que théorique. Grâce au développement des connaissances scientifiques, de nouveaux paramètres ont été introduits dans les équations les rendant ainsi plus compliquées et de nouveaux concepts ont vu le jour.

Les travaux des pionniers étaient relatifs à des écoulements lisses et réguliers ou à des configurations géométriques simples. Une revue de la littérature indique que la plupart des contributions scientifiques relatives aux écoulements confinés en Convection Naturelles ont porté sur le cas des cavité rectangulaire, cylindrique, sphérique, elliptique, ou bien encore en forme d'anneaux cylindriques, sphériques. Quelques travaux portent aussi sur la lunule et les calottes. Cependant vu la complexité des équations et en particulier leur forte non linéarité les travaux s'orientent vers la convection naturelle numérique grâce à la rapidité et aux grandes capacités des mémoires des ordinateurs.

Malgré cela beaucoup d'efforts restent à fournir pour maîtriser les écoulements complexes et comprendre les instabilités thermo-convectives et la transition vers la turbulence. Notre but est d'étudier numériquement la convection naturelle thermique en régime permanent à l'intérieur d'une enceinte délimitée par deux portions de paraboles cylindriques de génératrice horizontale et une surface plane.

Le présent travail comporte quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous analysons les travaux antérieurs liés aux écoulements confinés afin de bien situer notre étude par rapport à celles relatives à la convection naturelle dans des enceintes.

Le deuxième chapitre concerne la modélisation mathématique du problème. Le problème physique y est posé et les équations qui gouvernent les transferts établies sur la base d'hypothèses simplificatrices réalistes. Grâce à une transformation conforme, notre domaine à frontières curvilignes est ramené en un domaine parallélépipédique afin de formuler plus simplement les conditions aux limites sans pour autant augmenter la complexité de la formulation des équations. Dans le but de généraliser le problème et de réduire le nombre de paramètres qui interviennent, les équations vont être adimensionnalisées grâce à un jeu de grandeurs de référence judicieusement choisi.

Puisque les solutions des équations aux dérivées partielles adimensionnelles du modèle mathématique sont analytiquement inaccessibles, une méthode numérique est choisie pour les résoudre. Les systèmes algébriques non linéaires issus de la discrétisation par la Méthode PDQ sont résolus grâce à une méthode itérative de relaxation de type ligne par ligne. Des estimations des pas d'espace qui confèrent à nos schémas une forte stabilité sont données.

Les résultats issus des simulations numériques font l'objet du chapitre quatre. Les influences des paramètres de contrôle sur les champs dynamique et thermiques et sur les grandeurs moyennes et pariétales sont discutées. Des corrélations reliant les coefficients d'échange et les grandeurs caractéristiques sont aussi établies.

Enfin nous concluons ce travail par une récapitulation des principales remarques et conclusions et nous donnons quelques suggestions qui peuvent compléter et enrichir ce travail.

.

Chapitre 1 : ETAT DE L'ART

1.1 GENERALITES SUR LA CONVECTION NATURELLE

L'étude du phénomène de la convection est primordiale pour la compréhension des interactions fluide-énergie. Vu son importance dans beaucoup de processus industriels et naturels la convection naturelle thermique dans des milieux confinés a fait l'objet de nombreuses études tant sur le plan expérimental que théorique et numérique. La convection est un mode de transfert de chaleur qui se produit uniquement entre un milieu fluide et une paroi ; elle est un transport d'énergie dû à des mouvements macroscopiques et à un processus de diffusion thermique. On distingue habituellement trois formes de convection :

La convection forcée, la convection naturelle et la convection mixte étant un mode de transfert de chaleur pour lequel les deux formes de convection existent. La terminologie convection libre est parfois utilisée dans la littérature pour qualifier la convection naturelle. La différence entre la convection naturelle et la convection forcée est à la fois d'ordre thermodynamique et d'ordre mathématique.

Au plan thermodynamique, le transfert d'énergie d'une région à l'autre du fluide est dû, en convection naturelle, à un écoulement créé par un phénomène dit de « poussée d'Archimède » qui prend naissance du fait de la présence simultanée de l'accélération gravitationnelle et d'inhomogénéités spatiales des températures dans le fluide. En convection forcée, l'écoulement est provoqué par une force due à une puissance mécanique externe.

Du point de vue mathématique, en convection naturelle, le champ des vitesses dans le fluide est intimement lié au champ de température qui y existe car le mouvement est induit par le gradient de température thermique alors que dans le cas de la convection forcée, le problème hydrodynamique est généralement dépendant du problème thermique surtout si les propriétés physiques ne dépendent pas de la température. On distingue habituellement deux formes de convection naturelle : la convection naturelle externe et la convection naturelle interne. En convection naturelle externe, le fluide n'est pas confiné dans un espace ferme alors que la convection naturelle interne désigne la convection naturelle dans une enceinte fermée. La notion de convection naturelle confinée est parfois employée pour qualifier la convection naturelle dans les enceintes fermées. Le phénomène de la convection naturelle dans les enceintes est aussi varié qu'il existe de géométries d'enceintes, de conditions aux limites thermiques d'orientations des enceintes, etc.…

L'orientation des enceintes subdivise les études de la convection naturelle en deux catégories : la catégorie des enceintes chauffées par en dessous et celle des enceintes chauffées latéralement.

1.2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Une revue de la littérature indique que la plupart des contributions scientifiques relatives à ce phénomène ont porté sur le cas de la cavité rectangulaire, cylindrique, sphérique, elliptique, ou bien encore en forme d'anneaux cylindriques, sphériques. Les premiers travaux portant sur la convection naturelle numérique ont été entrepris, dans les années 60 par G. de Vahl Davis et al [1]. Ils ont utilisé la méthode des différences finies pour résoudre le problème de la convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Ces auteurs ont montré pour les valeurs du nombre de Rayleigh inférieure à 10^4, la distribution de température à mi-hauteur de la cavité est presque linéaire et le gradient thermique vertical tend vers zéro. A la fin des années quatre-vingt, et grâce au développement des ordinateurs, G De Vahl a proposé une solution standard dite **Benchmark** pour le cas de la cavité carrée différentiellement chauffée en régime laminaire. Plus tard, les résultats de simulation ont été obtenus par P. Le Queré [2].

De Vahl Davis [3] a étudié numériquement le phénomène de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'air et différentiellement chauffée pour des valeurs du nombre de Rayleigh comprises dans l'intervalle $10^3 \leq R \leq 10^6$. Il a utilisé la formulation fonction de courant-vorticité. Les équations modifiées par l'interaction d'un terme transitoire sont discrétisées par la méthode des différences finies.

Au début des années quatre-vingt, l'attention des chercheurs a été attiré par l'étude de la convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée et inclinée par rapport à un plan horizontal. L'inclinaison a un effet très important sur la structure des écoulements des fluides et du taux de transfert de chaleur. Parmi les auteurs qui ont étudié cette configuration, on peut citer les travaux de H. Q. Yang et al [4], Lee T et al [5], D.C. Lo [6]. Les résultats obtenus montrent que lorsque l'angle de l'inclinaison augmente le nombre de Nusselt décroit pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh **(voir figure 1.1)**.

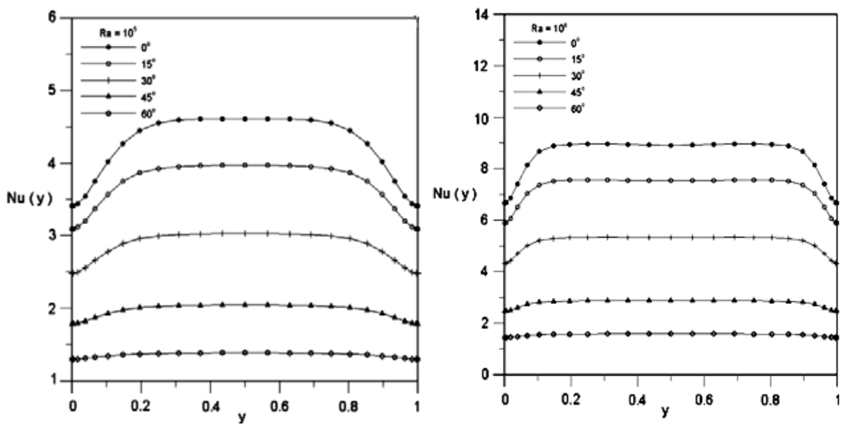

Figure (1.1) : Distribution du nombre de Nusselt moyen suivant y pour : Ra = 10^5 et Ra = 10^6 H. [6].

Hiroyuki Ozoe et Hayatochi Sayama. [7] ont étudié expérimentalement les taux de transfert de chaleur par convection naturelle laminaire pour l'huile de silicone et dans l'air dans une cavité rectangulaire. Le rapport de forme prend les valeurs 1, 2, 3, 4.2, 8.4 et 15.5, le nombre de Rayleigh varie de 3.10^3 à 10^5 et l'inclinaison varie de 0 à 180 degrés. Il a été démontré que lorsque l'angle d'inclinaison passe de 0° à 180° le taux de transfert de chaleur passe par un minimum. L'angle d'inclinaison correspondant à ce minimum dépendait fortement du rapport de la section mais peu du nombre de Rayleigh. Une transition dans le mouvement de convection a lieu pour l'angle correspondant au minimum du taux de transfert thermique.

A. Bairi [8] a étudié expérimentalement la convection naturelle dans une cavité cubique inclinée. Les parois chaude et froide de la cavité sont maintenues à des températures constantes (isothermes) ; les autres parois de la cavité sont adiabatiques. Les mesures expérimentales et la simulation numérique sont effectuées pour les différentes configurations géométriques et thermiques suivantes.

- Les valeurs du nombre de Rayleigh sont comprises entre 10 et 10^{10}.
- L'angle d'inclinaison varie entre 0^0 et 360^0.

Il a mené un calcul numérique bidimensionnel basé sur la méthode des volumes finis et ont examiné l'influence du nombre de Rayleigh et de l'angle d'inclinaison sur la structure de l'écoulement et le taux de transfert de chaleur par convection. Les résultats obtenus indiquent un bon accord entre les résultats numériques et les mesures expérimentales. D'autre part, des corrélations du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh pour différents angles d'inclinaison ont été proposées.

D.C. Lo et al [6] ont utilisé un nouvel algorithme basé sur la méthode quadrature différentielle (DQ) proposée par Bellman. Cette méthode est appliquée par Shu et Xue [12] pour la détermination de la vitesse relative des tourbillons et les variations de températures d'un écoulement de convection naturelle de l'air confiné dans une cavité cubique inclinée et différentiellement chauffée. Ils ont examiné l'effet de l'inclinaison sur le taux de transfert thermique caractérisé par le nombre de Nusselt pour les valeurs du nombre de Rayleigh entre 10^3 et 10^6. L'angle d'inclinaison varie entre 0^0 et 60^0avec un pas de 15^0. Les résultats trouvés pour le cas non incliné sont comparés avec les résultats de Tric et al [9]. Ils ont montré que l'inclinaison a un effet significatif sur la structure thermique et dynamique de l'écoulement et le taux de transfert de chaleur.

Vinoj. Kurian et al [10] ont utilisé le code CFD (fluent) pour étudier l'effet de l'inclinaison sur le tirage thermique induit par les écoulements internes et le transfert thermique par la convection naturelle. Ils ont étudié à l'aide d'une méthode de volume finis, la convection naturelle dans une cavité cylindrique différentiellement chauffée et inclinée ont présenté relatifs aux paramètres de contrôle suivants :

- ✓ La valeur du nombre de Rayleigh entre 10^3 et $3.1x10^4$
- ✓ La valeur du nombre de Prandtl est égale à 0.71
- ✓ L'angle d'inclinaison entre 0^0 et 180^0

Ces auteurs ont étudié les structures thermiques et dynamique des écoulements et déterminé le taux de transfert de chaleur ; ils donnent aussi la valeur critique du nombre de Rayleigh.

Brahim Ben Beya et al [11] ont examiné par voie numérique l'écoulement laminaire de la convection naturelle dans une cavité cubique incline, différentiellement chauffée. Les équations de mouvement et de l'énergie en trois dimensions sont résolues par la méthode de sous- relaxation (SOR), basée sur une discrétisation spatiale avec un schéma de volume finis. Ils ont analysé le taux de transfert de chaleur obtenu pour une large gamme des paramètres suivants :

- ✓ La valeur du nombre de Rayleigh varie entre 10^3 et $1.3x10^5$
- ✓ Le nombre de Prandtl limite entre 0.71 et 0.75
- ✓ L'angle d'inclinaison entre 0^0 et 90^0

Les résultats obtenus par ces auteurs, montrent d'une part, que la structure de l'écoulement du fluide est parfaitement symétrique pour des valeurs du nombre de Rayleigh inférieures ou égales à 10^4. D'autre part, lorsque la valeur du nombre de Rayleigh dépasse cette valeur critique, la symétrie est brisée. Progressivement. Ils ont observé aussi un comportement périodique de l'écoulement pour la valeur du nombre de Rayleigh $8.5x10^4$, ainsi que les caractéristiques de l'écoulement dépendent de l'angle d'inclinaison. Pour $Pr \geq 0.7$ ils ont conclu qu'il y a un effet significatif sur le taux de transfert de chaleur.

C. Shu et al [12] ont développé une méthode globale de la quadrature différentielle généralisée (QDG) qui a été appliquée à la simulation de la convection naturelle dans une cavité carrée. Cette méthode, principalement sur la détermination des coefficients de pondération utiles dans les dérivations, utilise un maillage un peu grossier, et un temps de calcul raisonnable et ne demande pas beaucoup d'espace de stockage. Il est noté que lorsque les points du maillage sont les racines du polynôme de Tchebychev d'ordre n, la méthode QDG donne le même résultat que la méthode des collocations de Tchebychev. Il a fait un **benchmark** pour tester la méthode. Le nombre de Rayleigh varie de 10^3a 10^6 et les maillages utilises sont grossiers (13x13, 15x15 et 21x17). La méthode s'avère précise et a donné des résultats très proches de ceux de Vahl Davis [3] avec des maillages plus fins (41x41 et 81x81) et une méthode de différence finis du premier et du second ordre.

R.J.Janssen et al [13] ont étudié l'effet du nombre de Rayleigh et du nombre de Prandtl sur la convection naturelle. R.A.Kuyper et al [14] ont étudié l'effet de l'angle de l'inclinaison de la cavité.

D.R. Chenoweth et Paolucci [15] ont analysé l'influence du rapport de forme. Tous ces résultats obtenus sous diverses conditions paramétriques ont permis d'acquérir un nombre important de corrélations permettant ainsi, d'évaluer les taux de transfert de chaleur.

Fusegi et al [16] ont étudié les caractéristiques du champ de vitesse et du taux de transfert thermique pour des écoulements stationnaires dans une configuration tridimensionnelle. Ils ont analysé les structures d'écoulement obtenues pour une large gamme du nombre de Rayleigh dans l'intervalle 10^3 à10^{10}. Ils ont constaté que, lorsque le nombre de Rayleigh augmente l'écoulement devient confiné près des parois adiabatiques. D'autre part ils ont proposé une corrélation entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh comme suit:

$$Nu = 0{,}163\ \mathrm{Ra}^{0,282} \text{ si } 10^3 \le Ra \le 10^{10}.$$

ElSherbiny [17] dans ses différents travaux, insiste sur l'importance de l'angle d'inclinaison de la couche d'air et les conséquences de ce paramètre sur le phénomène de convection naturelle. Pour le transfert de chaleur, les corrélations qu'il a établies dépendent de l'angle d'inclinaison de la cavité ainsi que du nombre de Rayleigh. Elles sont valables pour une valeur du rapport de forme égal à 20 et un angle d'inclinaison variant de 120° à 180°. ElSherbiny, a développé d'autres corrélations pour des angles d'inclinaison variant de 60°à 90°, les corrélations trouvées pour 120° <*θ*<*180*° sont les suivantes :

$$Nu = \left[1+\left(0,212.Ra^{0,136}\right)^{11}\right]^{\frac{1}{11}} \quad \text{pour } \theta = 180^0$$

$$Nu = \left[1+\left(0,0566.Ra^{0,332}\right)^{4,76}\right]^{\frac{1}{4,76}} \quad \text{pour} \quad \theta = 120^0$$

$$Nu(\theta) = \mathrm{Nu}\left(180^0\right)+\frac{180-\theta}{60}\left[Nu\left(120^0\right)-Nu\left(180^0\right)\right] \quad \text{pour} \quad 120^0 \prec \theta \prec 180^0.$$

Dans ses travaux, Zhao [18] a effectué des simulations numériques sur des cavités d'air verticales dont l'allongement varie entre 5 et 80 en utilisant la méthode des éléments finis. Il a ensuite comparé les résultats numériques obtenus avec des résultats expérimentaux et a proposé une corrélation qui présente une déviation maximale de plus ou moins 6 % entre les résultats expérimentaux et numériques.

Ghernoug *et al.* [19] ont proposé dans ce travail, l'étude numérique de la convection naturelle laminaire et permanente dans un espace annulaire rempli par un fluide newtonien et incompressible situé entre deux cylindres excentriques horizontaux et incliné d'un angle par rapport à l'horizontale. En utilisant le système de coordonnées bi-cylindriques, ils examinent l'effet du nombre de Grashof, des conditions thermiques pariétales et d'inclinaison du système ; pour $Gr < 5.10^6$, le régime est dominé par la conduction.

Parmi les études de convection naturelle en rapport direct avec le présent travail, on peut citer les travaux menés par Talabi et Nwabuko [20] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte parabolique. Ils ont montré dans leur étude que le taux de transfert de chaleur vers les parois froides augmente en fonction du nombre de Prandtl et Grashof. Les effets géométriques soumis à différentes conditions de chauffage sont étudiés par Mahfoud Djezzar [21]. Mustafa [22] a mis l'accent sur la compréhension du transfert de chaleur par convection naturelle dans une enceinte parabolique que l'on trouve dans des concentrateurs solaires paraboliques. Il a analysé l'effet de la paroi verticale de l'enceinte parabolique chauffé par le bas sur la convection naturelle laminaire.

Khudheyer S. Mushatet [23] a étudié numériquement le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide à l'intérieur d'une cavité carrée inclinée ayant deux parois verticales ondulées différentiellement chauffées et deux parois horizontales planes isolées. Il a étudié l'effet de l'angle d'inclinaison, l'amplitude et le nombre d'ondulations pour Rayleigh $Ra = 10^5$. Les résultats obtenus montrent que le taux du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre d'ondulations, de l'angle d'inclinaison et du nombre de Rayleigh, par contre l'augmentation de l'amplitude de la cavité diminue le nombre de Nusselt local et donc le taux du transfert de chaleur.

M. Belkadi et al [24] ont étudié numériquement l'effet de la géométrie de la paroi chaude sur la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée inclinée différentiellement chauffée. Pour différents angles d'inclinaisons et nombres de Rayleigh, et avec trois configurations géométriques. Les résultats obtenus montrent que la géométrie de la paroi chaude affecte l'écoulement et le taux de transfert de chaleur dans la cavité, et que le nombre de Nusselt moyen diminue en le comparant avec le transfert de chaleur dans la cavité carrée.

Zacharia Kabdi et al [25] ont étudié la convection thermique naturelle laminaire, permanente et bidimensionnelle dans des lunules cylindriques d'axe horizontal. Utilisant un repère bi cylindrique, la fonction de courant et la vorticité, la lunule peut être remplie d'un fluide newtonien ou d'un matériau poreux saturé d'un tel fluide. Les équations de transfert sont résolues par la méthode numérique des volumes finis. Ils ont trouvé que leurs résultats sont en bon accord avec les données de la littérature relatives à d'autres géométries, et ont montré qu'en choisissant convenablement les paramètres, il est possible de contrôler la convection naturelle en privilégiant tel mode de transfert (conductif ou convectif dans telle zone de l'enceinte).

C.L Chen et C.H Cheng [26] ont fait des tests numériques et expérimentaux pour étudier le transfert thermique convectif naturel et le modèle de flux dans une enceinte enforme d'arc inclinée. Une technique de visualisation de flux utilisant la fumée est employée pour observer le modèle de flux, et une comparaison entre les prédictions numériques et les modèles de flux visualisés a été faite. Dans cette étude, le nombre de *Grashof* est compris entre 10^4 et 10^7 et l'angle d'inclination θ l'est entre 0 *et* π. Les résultats montrent que si le nombre de Grashof est supérieur à10^5, la convection naturelle devient significative. Ils ont aussi montré que l'intensité du vortex et le modèle dépendent de l'angle d'inclinaison.

A. Osorio, R. Avila, Jorvantes [27] ont étudié numériquement et expérimentalement la structure de l'écoulement et le transfert thermique dans une cavité d'eau inclinée différentiellement chauffée, à une température proche de celle correspondant à sa densité maximale, en utilisant la méthode des éléments spectraux (S E M), comme méthode numérique. Ce travail a permis d'évaluer la distribution de température dans le plan de la cavité et de mesurer le nombre moyen de Nusselt pour chaque angle d'inclinaison. Les résultats numériques montrent un accord raisonnable avec les mesures expérimentales.

Wright [28] a proposé une corrélation pour modéliser le transfert thermique dans une cavité d'air différentiellement chauffée. Cette corrélation est déterminée par plusieurs résultats expérimentaux de la littérature pour des allongements supérieurs à 40 et pour des nombres de Rayleigh inférieurs à 10^6. Il a déduit, d'après son étude, que le nombre de Nusselt ne dépend plus de l'allongement dans ces plages particulières de Ra et de A (rapport de forme):

$$Nu = 0{,}0673838\ \mathrm{R}_a^{0,3}\ ;\ 5.10^4 \prec R_a \leq 10^6 .$$

Dans l'article de Zhu *et al.* [29], la convection naturelle entre deux cylindres horizontaux elliptiques est numériquement étudiée en utilisant la méthode de différentielle de la quadrature (DQ). Une étude systématique est entreprise par l'analyse de l'écoulement et des champs thermiques à différentes excentricités et positions angulaires. En augmentant de manière sensible la valeur de l'excentricité ε, l'effet de la conduction augmente dans le même sens.

Roschina *et al.* [30] ont étudié la convection naturelle entre deux cylindres concentriques horizontaux avec génération d'énergie à l'intérieur, ils ont considéré un second nombre de Rayleigh thermique concernant le transfert à travers les parois, indépendant du Rayleigh convectif. Pour des faibles nombres Rayleigh, ils observent deux types d'écoulements du fluide avec une structure de vortex différents. Au moyen d'une méthode aux volumes finis et des équations écrites dans un système de coordonnées elliptiques.

Shi *et al.* [31] ont simulé le transfert de chaleur par convection naturelle dans un espace annulaire horizontal concentrique par la méthode de Boltzmann basée sur les différences finies, les champs des vitesses et des températures ont été obtenus pour des nombres de Rayleigh compris entre $2,38.10^3$ et $1,02.10^5$. Ils constatent que si $Ra < 3,20.10^4$, le transfert de chaleur est dominé par la conduction.

Une étude numérique de la convection naturelle laminaire bidimensionnelle en régime permanent dans une enceinte formée par trois cylindres est présentée par Tahri *et al.* [32]. Le fond, qui est représentée par les deux cylindres intérieurs est chauffé par un flux de chaleur de densité constante, la paroi supérieure formée par le cylindre extérieur est isotherme. On étudie les transferts qui s'effectuent par convection naturelle dans l'enceinte et on met en évidence l'influence de l'inclinaison de l'enceinte caractérisée par l'angle (α), sur la structure de l'écoulement du fluide et sur les variations de la température et des nombres de Nusselt locaux et moyens à la surface non uniforme formée par les deux cylindres intérieurs.

Récemment, YAHIAOUI Abdelaziz [33] a étudié le phénomène de la convection naturelle en régime laminaire et permanent dans une enceinte courbée ayant deux parois actives courbées verticales et deux parois inactives courbées horizontales, orienté selon un angle α qu'il a comparé avec l'enceinte carrée. Il a étudié l'effet de l'angle d'inclinaisons pour des nombres de Rayleigh varie de 50 à 10^6 . Les résultats obtenus montrent que la courbure des parois affecte le transfert de chaleur.

Dia et al [34] ont analysé les effets du paramètre de contrôle comme le nombre de Rayleigh dans leur étude sur la convection naturelle bidimensionnelle d'un fluide newtonien confiné dans une enceinte délimitée par deux paraboloïdes de révolution en régime instationnaire. Les résultats obtenus sont liés à des nombres de Rayleigh entre 10^5 et 10^7.

Malgré cela beaucoup d'efforts restent à fournir pour maîtriser les écoulements complexes. Notre but est d'étudier numériquement la Convection Naturelle thermique à l'intérieur d'une Enceinte délimitée par deux portions de Paraboles Cylindriques de génératrice horizontale et une Surface Plane.

1.4 Conclusion

A l'issue de cette étude bibliographique, nous avons constaté que l'ensemble des travaux tant numérique qu'expérimentaux, réalisés sur la convection naturelle dans une espace confinée différentiellement chauffée, sont basés sur deux aspects :

- ✓ La détermination de la température et des champs de vitesse.
- ✓ La recherche des corrélations pour évaluer le taux transfert thermique.

L'ensemble de la littérature examinée indique que la convection naturelle est fortement contrôlée par les paramètres adimensionnels tels que les nombres de Rayleigh et Prandtl, ainsi que le rapport de forme.

Chapitre 2 : FORMULATION MATHEMETIQUE

2.1 INTRODUCTION

En physique, il est nécessaire d'être quantitatif et d'utiliser avec aisance les mathématiques. Certains diront que la nature s'exprime avec le langage des mathématiques. On dit souvent qu'une théorie n'est achevée que lorsqu'on connait l'équation différentielle qui gouverne le phénomène physique.

Dans ce chapitre, nous proposons la modélisation mathématique du problème physique par des équations. En nous basant sur les équations de continuité, de la quantité de mouvement et de la chaleur. En fin, nous définirons le coefficient de transfert de chaleur qui est caractérisé par le nombre de Nusselt.

2.2 DESCRIPTION DU PROBLEME

Considérons une enceinte délimitée par deux portions de paraboles cylindriques d'axes horizontales ouvertes à gauche et à droite et par une paroi plane horizontale, rempli d'un fluide newtonien en l'occurrence de l'air **(voir figure 2. 1)**.

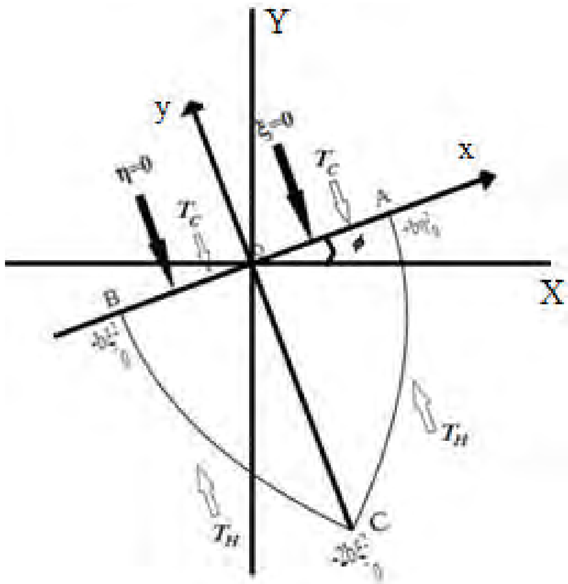

Figure 2.1 : configuration de la géométrie étudiée.

Dans le système de coordonnées (OX, OY) les équations des portions de paraboles cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} x = +b.\eta_0{}^2 - \dfrac{1}{4b}\left(\dfrac{y}{\eta_0}\right)^2 \\ x = -b.\xi_0{}^2 + \dfrac{1}{4b}\left(\dfrac{y}{\xi_0}\right)^2 \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

Avec

- ξ_0 et η_0 les paramètres repérant les portions de paraboles de gauche et de droite.
- La quantité $b.\eta_0^2 + b.\xi_0^2$ représente la longueur du segment AB.

Initialement le système est en équilibre thermodynamique à la température T_C.

A partir de cette date, on porte les deux paraboles (ouvertes à gauche et à droite) à une température T_H et la paroi plane horizontale à une température T_C. L'enceinte étant différentiellement chauffée le fluide se met alors en mouvement et nous nous proposons d'étudier ce phénomène de convection naturelle thermique en partant des équations de Navier- Stokes et du bilan de l'enthalpie massique.

2.3 HYPOTHESES SIMPLIFICATRICES

La résolution des équations complètes de Navier- Stokes et du bilan de l'enthalpie massique dans une telle enceinte étant à l'heure actuelle impossible, nous allons poser certaines hypothèses simplificatrices jugées raisonnables dans la modélisation de notre problème. Ainsi nous admettons que :

- Tous les phénomènes sont indépendants du temps ;
- Le fluide est newtonien et les transferts sont bidimensionnels ;
- Le travail des forces dues à la viscosité ainsi que le rayonnement sont négligés.
- Nous supposons être dans le cadre de l'approximation de Boussinesq consistant à considérer les variations de la masse volumique ρ négligeable au niveau de tous les termes des équations de la quantité de mouvement hormis dans le terme de pesanteur dont les variations avec

la température, engendrent la convection naturelle [35]. Ces variations sont alors traduites par l'équation d'état suivante qui relie la masse volumique à la température.

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \beta \left(T - T_0\right)\right)$$

T et T_0 représentent les températures du fluide en un point donné du système et de référence.

β : Le coefficient de dilatation thermique du fluide défini par : $\beta = -\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$

ρ_0 : Masse volumique du fluide à la température T_0.

2.4 Formulation vectorielle du problème en variables primitives

Les phénomènes dynamiques et thermiques au sein d'un fluide sont alors décrits compte tenu des hypothèses simplificatrices ci- dessus par les trois équations suivantes :

2.4.1. Equation de continuité

Elle traduit le principe de conservation de la masse dans tous les points d'un fluide continu. L'équation de continuité prend la forme suivante.

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \qquad (2.4.1)$$

2.4.2. Equation de la quantité de mouvement

Le bilan de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide et les causes qui les produisent. L'équation du mouvement est donc :

$$\left(\vec{\nabla}\ \vec{V}\right)\ \vec{V} = \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{V}\right).\ \vec{V} = \vec{\nabla}.\left(\vec{V} \otimes \vec{V}\right) = -\frac{1}{\rho_0}\ \vec{\nabla}\ \mathrm{P} - \vec{g}\ \beta\ \left(T - \rho_0\right) + \nu\ \vec{\nabla}.\left\{\vec{\nabla} \otimes \vec{V}\right\} \qquad (2.4.2)$$

En tenant compte de l'équation de continuité, on a :

$$\vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) + \left(\vec{\nabla}\ \Lambda\ \vec{V}\right)\Lambda\vec{V} = -\frac{1}{\rho_0}\ \vec{\nabla}\ \mathrm{P} - \vec{g}\ \beta\ \left(T - \rho_0\right) + \nu\ \vec{\nabla}.\left\{\vec{\nabla} \otimes \vec{V}\right\} \qquad (2.4.2bis)$$

Avec

- $\vec{V}$; Le vecteur champ des vitesses
- $\vec{g} = -g\ (\overrightarrow{e_x}.\sin\phi\ +\ \overrightarrow{e_y}.\cos\phi\ )$
- $P = p +\ \mathrm{g}\ .\ \rho_0\ \mathrm{Y} =\ \mathrm{p} + \mathrm{g}\ .\ \rho_0\left(x\ .\ \sin\ \phi +\ \mathrm{y}\ .\ \cos\ \phi\right)$
- ν : viscosité cinématique.

2.4.3 Equation de la chaleur

En tenant compte des hypothèses simplificatrices, l'équation du bilan de l'enthalpie massique se ramène à l'équation de la chaleur suivante :

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{V}\ \mathrm{T}\right) = \alpha.\left[\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\ \mathrm{T}\right)\right] \qquad (2.4.3)$$

$\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho\ \mathrm{C}_p}$;

λ : Conductivité thermique ;

C_p : Capacité calorifique massique du fluide à pression constante.

2.4.4 Equation de la pression:

Bien que les équations $(2.4.1)$, $(2.4.2)$ et $(2.4.3)$ nous permettent *a priori* d'avoir les champs des vitesses, de la pression et de la température, un problème subsiste car la pression n'apparaît pas de manière explicite dans le problème hydrodynamique. C'est pourquoi on adjoint au système$(2.4.1)$ - $(2.4.3)$, une équation de la pression de type Poisson obtenue en appliquant l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation$(2.4.2)$. Il vient après quelques transformations :

$$\frac{1}{\rho_0}\ \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} p\right) = -\vec{\nabla}.\left\{\left(\vec{\nabla}.\ \vec{V}\right)\vec{V}\right\} - \vec{g}.\beta.\ \vec{\nabla}\left(T - \rho_0\right) \qquad (2.4.4)$$

Le système $(2.4.1)$ - $(2.4.3)$ est fermé par les conditions aux limites suivantes :

- Conditions d'adhérence et de non- pénétration sur toutes les parois de l'enceinte

$$\vec{V} = \vec{0} \qquad (2.4.5.a)$$

Et

$$\vec{n}.\ \vec{\nabla}\left\{\vec{n}.\ \vec{V}\right\} = 0 \qquad (2.4.5.b)$$

$\vec{n}$ avec le vecteur normal local à la paroi.

- Conditions thermique sur les parois de l'enceinte

  - Sur les portions de paraboles :

$$T = T_H \qquad (2.4.5.c)$$

- Sur la plaque plane

$$T = T_C \qquad (2.4.5.d)$$

- Conditions sur la pression

  L'une des difficultés de l'étude des transferts en convection réside à poser des conditions aux limites sur le champ des pressions au niveau d'une paroi. Puisque qu'il n'existe pas de conditions intrinsèques sur la pression, des auteurs proposent :

  Sur toute la paroi : $\vec{n}.\ \vec{\nabla} p = 0 \qquad (2.4.5.e)$

  Cependant cette condition est réductrice car elle ne tient pas compte des effets de frottement qui ont lieu au niveau des parois. Pour avoir une condition sur le champ des pressions plus générale on projette l'équation du mouvement normalement à la paroi. Alors l'équation (2.4.2), en tenant compte des conditions d'adhérence, se ramène à :

$$0 = \vec{n}.\left\{-\frac{1}{\rho_0}\ \vec{\nabla} p + \vec{g}\left[1-\beta\left(T-\rho_0\right)\right]\right\} + \nu\ \vec{n}.\ \vec{\nabla}\left\{\vec{n}.\ \vec{\nabla}\left[\vec{n}.\ \vec{V}\right]\right\} \qquad (2.4.5.f)$$

Nous voyons que la formulation du problème thermo- convectif dans cette enceinte en variables vitesse-pression est très compliquée car les équations sont fortement couplées et non linéaires. En outre le champ de pression pose problème car il est très délicat de poser des conditions aux limites sur ce dernier. Cependant en convection naturelle l'importance de la pression est moindre et par-dessus tout il n'est pas le moteur. Pour diminuer le degré de non linéarité des équations et éliminer le terme de pression qui est gênant, on profite de la bidimensionnalité des transferts pour reformuler en utilisant le formalisme vorticité - fonction de courant. On pose :

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \omega.\ \vec{e}_z \qquad (2.4.6)$$

Et

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\psi} = \vec{\nabla} \wedge \left(\psi.\ \vec{e}_z\right) = \vec{\nabla}\ \psi \wedge \vec{e}_z \qquad (2.4.7)$$

En appliquant l'opérateur rotationnel aux deux membres de l'équation $(2.4.2\ \text{bis})$ il vient après quelques transformations :

$$\vec{\nabla}.\ \left\{\vec{V}.\ \omega\right\} = -\vec{\nabla}\left(T - \rho_0\right) \wedge \left(\beta.\ \vec{g}\right) + \nu\ \vec{\nabla}.\left\{\vec{\nabla}\omega\right\} \qquad (2.4.8)$$

En procédant de même avec l'équation $(2.4.7)$ et compte tenu de la définition de la vorticité, nous obtenons :

$$-\omega = \vec{\nabla}.\left\{\vec{\nabla}\psi\right\} \qquad (2.4.9)$$

Avec le formalisme Vorticité – Fonction de courant le système que nous aurons à résoudre est alors le suivant :

$$-\omega = \vec{\nabla}.\left\{\vec{\nabla}\psi\right\}$$

$$\vec{\nabla}.\left\{\vec{V}.\omega\right\} = -\vec{\nabla}\left(T - \rho_0\right) \wedge \left(\beta.\vec{g}\right) + \nu\ \vec{\nabla}.\left\{\vec{\nabla}\omega\right\}$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{V}\ \mathrm{T}\right) = \alpha.\left[\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}T\right)\right]$$

Avec

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\psi \wedge \vec{e}_z$$

Les conditions aux limites hydrodynamiques sur toutes les parois de l'enceinte deviennent

$$\psi = \vec{n}.\ \vec{\nabla}\left\{\psi\right\} = 0 \qquad (2.4.10)$$

Et

$$-\omega = \vec{n}.\ \vec{\nabla}\left\{\vec{n}.\ \vec{\nabla}\left[\psi\right]\right\} \qquad (2.4.11)$$

2.5 Formulation des équations dans le système de coordonnées paraboliques

Puisque notre enceinte est délimitée par des surfaces courbes de traces paraboliques il est préférable d'utiliser du système de coordonnées dans lequel nos frontières peuvent être repérées par des lignes de coordonnées constantes. Vu notre géométrie le système de coordonnées le plus adapté est le système de coordonnées paraboliques. Le passage des coordonnées cartésiennes $(x\ , y)$ aux coordonnées paraboliques $(\eta\ ;\xi)$ est donné par les relations suivantes : [S. DIA thèse de doctorat] [36].

$$\begin{cases} x = b.\ (\eta^2 -\ \xi^2) \\ y = -2.\ b.\ (\eta.\ \xi) \end{cases} \qquad (2.5.1.a)$$

La transformation inverse conduit à

$$\begin{cases} 4.\ \mathrm{b}.\ \eta^2.\ x + \mathrm{y}^2 - 4.\ \mathrm{b}^2.\ \eta^4 = 0 \\ 4.\ \mathrm{b}.\ \xi^2.\ x - \mathrm{y}^2 + 4.\ \mathrm{b}^2.\ \xi^4 = 0 \end{cases} \qquad (2.5.1.b)$$

Dans ce système de coordonnées, les surfaces paraboliques ouvertes à gauche et à droite sont respectivement repérées par les coordonnées $\eta = cte$ et $\xi = \mathrm{cte}$. Les demies droites $]-\infty;\ 0[$ et $[0;\ +\infty[$ constituant le plan $y = 0$, sont respectivement paramétrés par $\eta = 0$ et $\xi = 0$. Ainsi notre enceinte délimitées par les portions de paraboles $(C\ A)$ et $(C\ \mathrm{B})$ et le segment $[B\ \mathrm{O}]\cup[O\ \mathrm{A}]$ sont repérés respectivement par $\eta = \eta_0$; $\xi = \xi_0$; $\eta = 0$ et $\xi = 0$ **(voir figure 2.2)**.

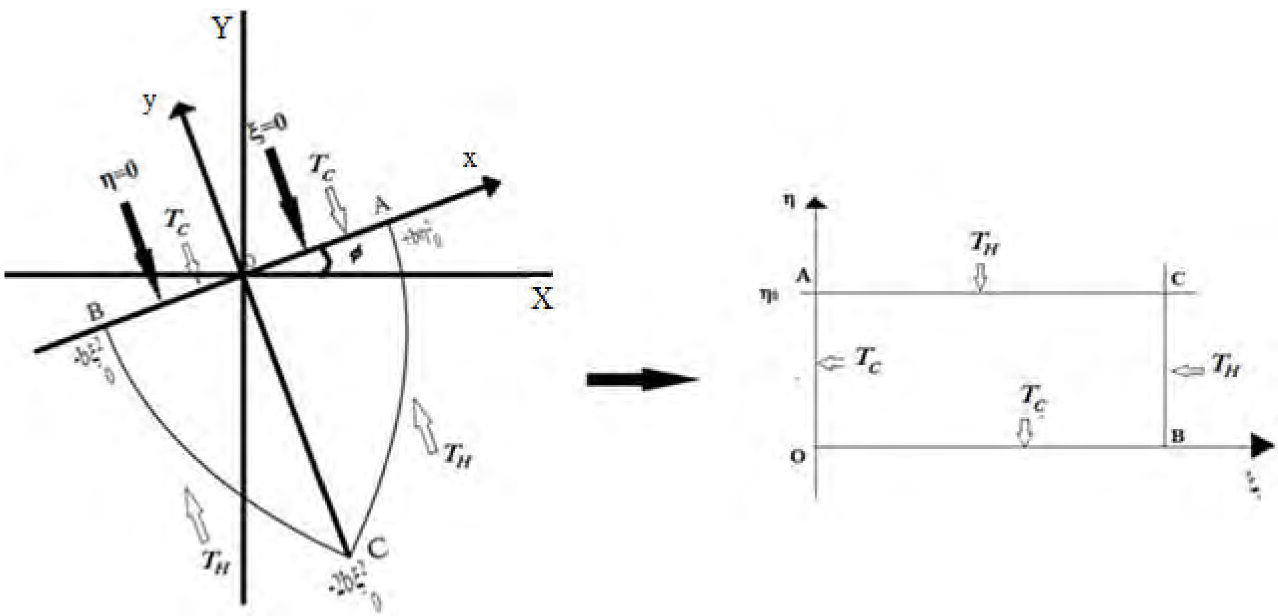

Figure 2.2: Représentation conforme

D'après la définition des vecteurs de la base naturelle, alors les vecteurs unitaires de base des systèmes de coordonnées $(\eta\ ;\xi)$ et $(x\ ,y)$ sont reliés par

$$\left.\begin{aligned}\vec{e}_\eta &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}.\left(\eta.\vec{e}_x - \xi.\vec{e}_y\right)\\ \vec{e}_\xi &= -\frac{1}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}.\left(\xi.\vec{e}_x + \eta.\vec{e}_y\right)\end{aligned}\right\}(2.5.2.a)$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{e}_x &= \frac{1}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}.\left(\eta.\vec{e}_\eta - \xi.\vec{e}_\xi\right)\\ \vec{e}_y &= -\frac{1}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}.\left(\xi.\vec{e}_\eta + \eta.\vec{e}_\xi\right)\end{aligned}\right\}(2.5.2.b)$$

Les relations montrent que la base $\left(\vec{e}_\eta\ ;\ \vec{e}_\xi\right)$ est orthonormée.

Par la suite nous poserons, afin de simplifier les écritures,

$$h_0 = \sqrt{\eta^2+\xi^2} \quad \text{et} \quad h = 2.b.\sqrt{\eta^2+\xi^2}$$

Si $\vec{U}$ est un vecteur, alors à cause de son invariance, nous avons

$$\vec{U} = U_x.\ \vec{e}_x - U_y.\ \vec{e}_y = U_\eta.\ \vec{e}_\eta - U_\xi.\ \vec{e}_\xi$$

En tenant compte des relations $(2.5.2.a)$ et $(2.5.2.b)$, il vient

$$\left.\begin{aligned}U_x &= \frac{1}{h_0}.\left(\eta.\ \mathrm{U}_\eta - \xi.\ \mathrm{U}_\xi\right)\\ U_y &= -\frac{1}{h_0}.\left(\xi.\ \mathrm{U}_\eta + \eta.\ \mathrm{U}_\xi\right)\end{aligned}\right\}(2.5.3.a)$$

$$\left.\begin{aligned}U_\eta &= \frac{1}{h_0}.\left(\eta.\ \mathrm{U}_x - \xi.\ \mathrm{U}_y\right)\\ U_\xi &= -\frac{1}{h_0}.\left(\xi.\ \mathrm{U}_x + \eta.\ \mathrm{U}_y\right)\end{aligned}\right\}(2.5.3.b)$$

En projetant les équations dans le système de coordonnées paraboliques, et en tenant compte des expressions des différents opérateurs différentiels [voir annexe], nous obtenons :

Equation de la fonction de courant

$$-\omega = \frac{1}{(h)^2}.\ \left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\right\} \qquad (2.5.4)$$

Equation de la vorticité (équation du mouvement)

$$\frac{1}{h^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h.\ \mathrm{V}_\eta.\ \omega\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(h.\ \mathrm{V}_\xi.\ \omega\right)\right\}=$$

$$\frac{\beta.\ \mathrm{g}}{h.\ h_0}\left\{\begin{matrix}\left[\xi.\ \cos\phi\ +\ \eta.\ \sin\phi\right].\dfrac{\partial T}{\partial\eta}+\\ \left[\eta.\ \cos\phi\ -\ \xi.\ \sin\phi\right].\dfrac{\partial T}{\partial\xi}\end{matrix}\right\}+\frac{\nu}{h^2}.\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\right\} \qquad (2.5.5)$$

Equation de la chaleur

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h.\ \mathrm{V}_\eta.\ \mathrm{T}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(h.\ \mathrm{V}_\xi.\ \mathrm{T}\right)\right\}=\alpha\left\{\frac{\partial^2T}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2T}{\partial\xi^2}\right\} \qquad (2.5.6)$$

Avec

$$V_\eta = -\frac{1}{h}.\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \qquad (2.5.7.a)$$

$$V_\xi = \ \frac{1}{h}.\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \qquad (2.5.7.b)$$

Dans le système de coordonnées paraboliques, les conditions aux limites se traduisent par

- $\eta = 0$:

$$\psi(0,\xi) = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0 \qquad (2.5.8.a)$$

$$-\omega(0,\xi) = \frac{1}{h^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \qquad (2.5.8.b)$$

$$T(0,\xi) = T_C \qquad (2.5.8.c)$$

- $\xi = 0$:

$$\psi(\eta,0) = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0 \qquad (2.5.9.a)$$

$$-\omega(\eta,0)=\frac{1}{h^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} \quad (2.5.9.b)$$

$$T(\eta,0)=T_C \quad (2.5.9.c)$$

- $\eta=\eta_0$:

  - $$\psi(\eta_0,\xi)=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0 \quad (2.5.10.a)$$
  - $$-\omega(\eta_0,\xi)=\frac{1}{h^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \quad (2.5.10.b)$$
  - $$T(\eta_0,\xi)=T_C \quad (2.5.10.c)$$

- $\xi=\xi_0$:

  - $$\psi(\eta,\xi_0)=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=0 \quad (2.5.11.a)$$
  - $$-\omega(\eta,\xi_0)=\frac{1}{h^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} \quad (2.5.11.b)$$
  - $$T(\eta,\xi_0)=T_C \quad (2.5.11.c)$$

2.6 Adimensionnalisation des équations et des conditions aux limites

Dans le but de généraliser le problème et de réduire le nombre de paramètres qui interviennent, les équations vont être adimensionnalisées grâce à un jeu de grandeurs de référence judicieusement choisi. Ainsi les groupements adimensionnels qui sont générés et qui caractérisent les transferts vont nous permettre d'estimer la prépondérance de tel ou tel phénomène sur un autre.

Nous introduisons les grandeurs de référence suivantes :

$$L = b.\sqrt{(\eta_0)^2+(\xi_0)^2} : \text{ Longueur de référence}$$

$$V_r = \frac{\alpha}{L} : \text{ Vitesse de référence}$$

$$\omega_r = \frac{\alpha}{L^2} : \text{ Vorticité de référence}$$

$$\psi_r = \alpha : \text{ Fonction de courant de référence}$$

$$T_r = \mathrm{T}_H - T_C : Ecart \text{ de temperature de référence}$$

Pour comparer chaque grandeur par rapport à sa grandeur de référence, on introduit des grandeurs adimensionnelles appelées aussi grandeurs réduites. Nous posons :

$$h^* = \frac{h}{L} : Facteur \text{ d'échelle réduite}$$

$$\overrightarrow{V^*} = \frac{1}{V_r} . \vec{V} = Vitesse \text{ réduite}$$

$$\omega^* = \frac{\omega}{\omega_r} : Vorticité \text{ réduite}$$

$$\psi^* = \frac{\psi}{\psi_r} : Fonction \text{ de courant réduite}$$

$$\theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C} : Ecart \text{ de temperature réduite}$$

En introduisant ces grandeurs adimensionnelles dans les équations $(2.5.4) - (2.5.7)$ et dans les conditions aux limites $(2.5.8) - (2.5.11)$, nous obtenons, en omettant l'exposant (*) :

Equation de la fonction de courant adimensionnelle

$$-\omega = \frac{1}{(h)^2} . \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right\} \qquad (2.6.1)$$

Equation de la vorticité adimensionnelle (équation du mouvement adimensionnelle)

$$\frac{1}{h^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h.\,\mathrm{V}_\eta.\,\omega\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(h.\,\mathrm{V}_\xi.\,\omega\right)\right\}=$$

$$\frac{Ra.Pr}{h.\,h_0}\left\{\begin{array}{l}\left[\xi.\cos\phi+\eta.\sin\phi\right].\dfrac{\partial T}{\partial\eta}+\\ \left[\eta.\cos\phi-\xi.\sin\phi\right].\dfrac{\partial T}{\partial\xi}\end{array}\right\}+\frac{Pr}{h^2}.\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\right\}\qquad(2.6.2)$$

Equation de la chaleur adimensionnelle

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h.\,\mathrm{V}_\eta.\,\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(h.\,\mathrm{V}_\xi.\,\theta\right)\right\}=\left\{\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}\right\}\qquad(2.6.3)$$

Avec

$$V_\eta=-\frac{1}{h}.\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\qquad(2.6.4.a)$$

$$V_\xi=\frac{1}{h}.\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\qquad(2.6.4.b)$$

Conditions aux limites adimensionnelles

- $\eta=0$:

$$\psi\left(0,\xi\right)=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0\qquad(2.6.5.a)$$

$$-\omega\left(0,\xi\right)=\frac{1}{h^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\qquad(2.6.5.b)$$

$$\theta\left(0,\xi\right)=T_C\qquad(2.6.5.c)$$

- $\xi=0$:

$$\psi\left(\eta,0\right)=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=0\qquad(2.6.6.a)$$

$$-\omega\left(\eta,0\right)=\frac{1}{h^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\qquad(2.6.6.b)$$

$$\theta(\eta,0)=T_C \qquad (2.6.6.c)$$

- $\eta=\eta_0$:

 - $$\psi(\eta_0,\xi)=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0 \qquad (2.6.7.a)$$
 - $$-\omega(\eta_0,\xi)=\frac{1}{h^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \qquad (2.6.7.b)$$
 - $$\theta(\eta_0,\xi)=1 \qquad (2.6.7.c)$$

- $\xi=\xi_0$:

 - $$\psi(\eta,\xi_0)=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=0 \qquad (2.6.8.a)$$
 - $$-\omega(\eta,\xi)=\frac{1}{h^2}.\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} \qquad (2.6.8.b)$$
 - $$\theta(\eta,\xi_0)=1 \qquad (2.6.8.c)$$

Le nombre de **Rayleigh Ra** est le paramètre moteur de l'étude de la convection. A ce nombre vient s'associer le nombre de **Prandtl Pr** qui s'exprime le rapport entre la viscosité cinématique ν et la diffusivité thermique α .

2.7 Coefficients d'échanges de la chaleur :

L'étude du transfert de chaleur dans notre enceinte nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur, donnés par le biais du nombre de Nusselt et le coefficient de frottement. Les valeurs de ces derniers sur les parois des enceintes sont définies comme suit :

$$Nu=-\frac{1}{1-\overline{\theta}_f}.\frac{1}{h}.\frac{\partial\theta}{\partial(\eta,\xi)}_{sur\ \text{les parois}} \qquad (2.7.1) \qquad Cf=\frac{2.Pr}{h}.\frac{\partial(V_\eta,V_\xi)}{\partial(\eta,\xi)}_{sur\ \text{les parois}} \qquad (2.7.2)$$

Où $\overline{\theta}f$ est la température moyenne adimensionnelle du fluide à l'intérieur de l'enceinte.

Chapitre 3 : FORMULATION NUMERIQUE

3.1. Introduction :

L'analyse de tout phénomène physique, tel que les écoulements de fluide en régime laminaire ou turbulent ou le transfert de chaleur sont décrits par le système d'équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire et fortement couplés qui ne peuvent être résolues analytiquement.

Cette analyse peut être effectuée par les méthodes numériques qui sont des méthodes performantes en matière d'analyse des phénomènes physiques. La résolution numérique par une méthode de discrétisation des équations du problème qui consiste à transformer une équation différentielle en une équation discrétisée (équation algébrique, facile à résoudre).

Les méthodes de discrétisation les plus utilisées sont :

- Les différences finies
- Les volumes finis
- Les éléments finis

En général, ces méthodes ont besoin d'un grand nombre de points de maillage pour obtenir des résultats numériques et exigent ainsi beaucoup d'effort informatique et stockage virtuel.

C'est pourquoi nous avons opté pour la méthode de Quadrature différentielle polynomiale (PDQ) qui est plus économique que les méthodes numériques classiques en volume de calcul.

Les systèmes des équations algébriques résultant de la discrétisation sont résolus par une méthode finie de sur relaxation successive (successive over relaxation (SOR)).

3.2 Méthode de la quadrature différentielle

La méthode de quadrature différentielle a été présentée par R.E. BELLMAN *et a*l [37] au début des années 1970. C'est une technique numérique de discrétisation qui permet d'effectuer l'approximation des dérivées. Dans la recherche d'une technique efficace de discrétisation permettant d'obtenir des solutions numériques exactes qui utilisent un très faible nombre de nœuds, BELLMAN (1971, 1972) a introduit la méthode de quadrature différentielle où la dérivée d'une fonction par rapport à l'abscisse d'une direction donnée est une sommation linéaire de toutes les valeurs de la fonction en tous les points le long de cette direction.

La quintessence de la méthode DQ consiste à déterminer les coefficients de pondération pour la discrétisation d'une dérivée d’ordre quelconque. Une avancée capitale a été réalisée par SHU et RICHARDS [38] sur le calcul des coefficients de pondération où toutes les méthodes actuelles de détermination des coefficients de pondération sont généralisées selon l'analyse d'une approximation par des polynômes d'ordre élevé mais aussi l'analyse d'un espace vectoriel linéaire.

Dans l'approche de SHU, les coefficients de pondération de la dérivée de premier ordre se déterminent par une formule algébrique simple, sans aucune restriction sur le choix des points nodaux tandis que les coefficients de pondération des dérivées de deuxième ordre mais aussi celles d’ordre plus élevé se caractérisent par une des relations récurrentes. De façon claire, tous les travaux de recherche sont fondés sur l’approximation polynômiale et, de ce fait, la méthode DQ, définie plus haut, peut être considérée comme une méthode différentielle de la quadrature basée sur les polynômes(ou méthode PDQ).

Récemment, SHU et CHEW [39] mais aussi SHU et XUE [40] ont développé de simples formules algébriques afin de calculer les coefficients pondéraux des dérivées de premier et deuxième ordres par la méthode DQ. Pour simplifier, le problème unidimensionnel est choisi pour démontrer la méthode PDQ.

3.2.1 Méthode Différentielle De Quadrature en une dimension :

Selon la conception de la quadrature intégrale, la méthode de quadrature différentielle représente l’approximation de la dérivée d'une fonction continue en un point nodal de l’axe par une somme pondérée de toutes les valeurs de la fonction sur le domaine numérique entier SHU [41]. Par exemple, les approximations des dérivées de premier et deuxième ordres de la fonction $f\left(x\right)$ en un point x_i peuvent être obtenues respectivement par:

$$f_x\left(x_i\right)=\frac{df}{dx}\Big|_{x_i}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\,f\left(x_j\right), \qquad i=1,2...N \qquad (3.2.1)$$

$$f_{xx}\left(x_i\right)=\frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{x_i}=\sum_{j=1}^{N}b_{ij}\,f\left(x_j\right), \qquad i=1,2...N \qquad (3.2.2)$$

Où a_{ij}, b_{ij} désignent les coefficients de pondération et le N représente le nombre de points de maillage sur tout le domaine. Notons que les coefficients de pondération $a_{ij}\ \left(et\ b_{ij}\right)$ varient en fonction des valeurs de x_i puisqu'ils dépendent des coordonnées de ces points. La procédure importante dans l'approximation DQ réside dans la détermination des coefficients de pondération a_{ij} et bij d'une manière efficace

Quand l'approximation de la fonction $f\left(x\right)$ se réalise par un polynôme d'ordre élevé, il sera nécessaire d'utiliser des formules explicites pour calculer les coefficients de pondération entre dans le domaine de l'approximation des polynômes d'ordre élevé ainsi que celui d'un espace vectoriel linéaire. Suivant le théorème d'approximation polynômiale de Weierstrass, on sait que la solution d'une équation différentielle unidimensionnelle est approximativement donnée par le polynôme de degré qui s'écrit ainsi :

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{N-1}c_k x^k \qquad (3.2.3)$$

où les c_k sont des constantes. Le polynôme de degré inférieur ou égal à $N-1$ dans l'espace vectoriel linéaire V_N constitue N dimensions eu égard à l'opération de l'addition des vecteurs et de la multiplication des scalaires. Évidemment, dans l'espace vectoriel linéaire V_N, un ensemble de vecteurs $1, x, x^2, ..., x^{N-1}$ est linéairement indépendant. Ainsi :

$$s_k\left(x\right)=x^{k-1}, \qquad \text{k=1,2,...,N} \qquad (3.2.4)$$

représente une base de V_N.

Pour la solution numérique d'une équation différentielle, il faut trouver la solution en certains nombres de points discrets. Maintenant, nous supposons que, dans un intervalle fermé [a, b], il existe N points de maillage distincts dont les coordonnées sont $a=x_1, x_2, ..., x_N=b$ et la valeur fonctionnelle à un point de maillage x_i est $f\left(x_i\right)$. Alors les constantes dans l'équation (3.2.3) peuvent être déterminées à partir du système des équations suivant :

$$\begin{array}{l} c_0+c_1x_1+c_2x_1^2+...+c_{N-1}x_1^{N-1}=f\left(x_1\right) \\ c_0+c_1x_2+c_2x_2^2+...+c_{N-1}x_2^{N-1}=f\left(x_2\right) \\ \text{...} \\ c_0+c_1x_N+c_2x_N^2+...+c_{N-1}x_N^{N-1}=f\left(x_N\right). \end{array} \qquad (3.2.5)$$

La matrice de l'équation $(3.2.5)$ est la forme de Vandermonde qui n'est pas singulière. Ainsi, l'équation donne des solutions uniques pour les constantes $c_0, c_1, ..., c_{N-1}$.. Ces solutions une fois déterminées, le polynôme approché est obtenu. Néanmoins, pour des valeurs de N élevées, la matrice est très mal conditionnée et il est considérablement difficile de trouver son inversion. Alors, il n'est pas aisé de déterminer les constantes $c_0, c_1, ..., c_N$.

Ici, si $r_k(x)$, $k = 1, 2, ..., N$ désignent les polynômes de base V_N, $f(x)$ peut être exprimée par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} d_x r_k(x). \qquad (3.2.6)$$

En clair, si tous les polynômes de base satisfont à une relation de contrainte linéaire telle que l'équation $(3.2.1)$ ou l'équation $(3.2.2)$, il en sera de même que $f(x)$. Dans l'espace vectoriel linéaire, plusieurs ensembles de polynômes de base peuvent exister. Chaque ensemble de polynômes de base peut s'exprimer uniquement en fonction d'un autre ensemble de polynômes de base.

Ceci signifie que chaque ensemble de polynômes de base peut fournir les mêmes coefficients de pondération. Cependant, l'utilisation de différents ensembles de polynômes de base aboutit à différentes approches permettant de calculer les coefficients de pondération. Puisqu'il existe maints ensembles de polynômes de base dans l'espace vectoriel linéaire, nous avons suffisamment d'approches pour calculer les coefficients de pondération.

Les propriétés de l''espace vectoriel linéaire nous permettent également d'appliquer les coefficients de pondération pour la discrétisation d'une équation différentielle. Sachant que la solution d'une équation différentielle est approximativement fournie par un polynôme de degré $(N-1)$ qui constitue l'espace vectoriel linéaire de dimension N, l'expression réelle du polynôme contient des constantes inconnues c_k qui doivent être déterminées.

D' autre part, dans l'espace vectoriel linéaire, l'ensemble des polynômes de base peut être choisi indépendamment de la solution. D'après les propriétés d'un espace vectoriel linéaire, si un ensemble de polynômes de base obéit à un opérateur linéaire il en sera de même que n'importe quel polynôme dans l'espace. Ceci indique que la solution de l'équation différentielle partielle satisfait également à l'opérateur linéaire.

Ici, généralement, deux ensembles de polynômes de base sont utilisés afin de déterminer les coefficients de pondération SHU [41]. Le premier ensemble de polynômes de base est choisi comme polynômes interpolés de Lagrange qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$r_k\left(x\right)=\frac{M\left(x\right)}{\left(x-x_k\right)M^{(1)}\left(x_k\right)}\ ,\qquad \text{k=1,2,...,N} \qquad (3.2.7)$$

où

$$\mathrm{M}\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)....\left(x-x_N\right) \qquad (3.2.8)$$

et

$$M^{(1)}\left(x_k\right)=\prod_{j=1,\, j\neq k}^{N}\left(x_k-x_j\right) \qquad (3.2.9)$$

Cette dernière relation désigne la dérivée de M(x).

Ici, $x_1, x_2, ..., x_N$ sont les coordonnées des points de maillage et peuvent être choisis arbitrairement mais elles seront distinctes les unes des autres. Pour obtenir un procédé efficace de calcul des polynômes $r_k(x)$ aux points discrets, nous nous servons de l'opérateur de Kronecker défini ainsi:

$$M\left(x\right)=N\left(x,x_k\right)\left(x-x_k\right),\quad \text{K= 1,2,...,N} \qquad (3.2.10)$$

Avec

$$\mathrm{N}\left(x_i,x_j\right)=M^{(1)}\left(x_i\right)\delta_{ij} \qquad (3.2.11)$$

L'équation (3.2.10) permet la simplification de l'équation (3.2.7) sous la forme:

$$r_x\left(x\right)=\frac{N\left(x,x_k\right)}{M^{(1)}\left(x_k\right)},\ \ \text{k=1,2,....N} \qquad (3.2.12)$$

Et, au point x_i :

$$r_x\left(x_i\right)=\frac{N\left(x_i,x_k\right)}{M^{(1)}\left(x_k\right)},\quad \text{i =1,2,....N, k=1,2,....N.} \qquad (3.2.13)$$

Partant de l'équation$(3.2.11)$, nous pouvons obtenir l'expression suivante:

$$N(x_i, x_k) = M^{(1)}(x_i)\delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{i} \neq \mathrm{k} \\ M^{(1)}(x_i) & \text{si} \quad \mathrm{i} = \mathrm{k} \end{cases} \qquad (3.2.14)$$

En donnant $\mathrm{r}_k(x_i) = 0$ si $\mathrm{i} \neq \mathrm{k}$ et $\mathrm{r}_k(x_i) = 1$ pour i = k. En utilisant cette propriété de $\mathrm{r}_k(x)$ quand $i = k$ dans l'équation $(3.2.6)$ au point x_i, nous obtenons.

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^{N} d_k r_k(x_i) = d_i. \qquad (3.2.15)$$

Alors la fonction $f(x_i)$ prend la forme,

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) r_k(x_i). \qquad (3.2.16)$$

Ainsi le premier et le second dérivé d'ordre de la fonction $f(x)$ en ce qui concerne x au point x_i sont

$$f_x(x_i) = \sum_{k=1}^{N} r'_k(x_i)\, f(x_k). \qquad (3.2.17)$$

$$f_{xx}(x_i) = \sum_{k=1}^{N} r''_k(x_i)\, f(x_k). \qquad (3.2.18)$$

Dans l'équation $(3.2.1)$ et l'équation$(3.2.2)$, les coefficients a_{ij} et b_{ij} dans les dérivées de premier et deuxième ordres de la fonction $f(x)$ au point x_i deviennent alors:

$$r'_k(x_i) = a_{ik} \qquad (3.2.19)$$

$$r''_k(x_i) = b_{ik} \qquad (3.2.20)$$

Ainsi les coefficients a_{ij} et b_{ij} peuvent être calculés en prenant d'abord les dérivées des premier et deuxième ordres de $r_k(x)$ comme suit,

$$r'_j(x_i) = \frac{N^{(1)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} = a_{ij} \qquad (3.2.21)$$

$$r''_j(x_i) = \frac{N^{(2)}(x_i, x_j)}{M^{(1)}(x_j)} = b_{ij} \qquad (3.2.22)$$

qui

Là où $N^{(1)}\left(x, x_j\right)$ et $\mathrm{N}^{(2)}\left(x, x_j\right)$ sont les dérivés du premier et du second ordre de la fonction $\mathrm{N}\left(x, x_j\right)$.

Nous différencions successivement l'équation $(3.2.10)$ par rapport à x et nous obtenons la formule de récurrence suivante :

$$M^{(m)}(x) = N^{(m)}\left(x, x_k\right)\left(x - x_k\right) + m\,\mathrm{N}^{(m-1)}\left(x, x_k\right) \text{ pour m = 1,2,...,N, k = 1,2,...,N} \qquad (3.2.23)$$

Où $M^{(m)}(x)$ et $\mathrm{N}^{(m)}\left(x, x_k\right)$ indiquent les m$^{\text{ème}}$ dérivées respectives de $\mathrm{M}(x)$ et de $\mathrm{N}\left(x, x_k\right)$. De l'équation $(3.2.23)$, nous pouvons déduire facilement,

$$N^{(1)}\left(x_i, x_j\right) = \frac{M^{(1)}\left(x_i\right)}{x_i - x_j}, \qquad i \neq j \qquad (3.2.24)$$

$$\mathrm{N}^{(1)}\left(x_i, x_i\right) = \frac{M^{(1)}\left(x_i\right)}{2} \qquad i = j \qquad (3.2.25)$$

De même, en utilisant l'équation $(3.2.23)$ pour $m = 2$ nous pouvons écrire,

$$\mathrm{N}^{(2)}\left(x_i, x_j\right) = \frac{M^{(2)}\left(x_i\right) - 2N^{(1)}\left(x_i, x_j\right)}{x_i - x_j} \qquad i \neq j \qquad (3.2.26)$$

$$\mathrm{N}^{(2)}\left(x_i, x_i\right) = \frac{M^{(3)}\left(x_i\right)}{3} \qquad i = j \qquad (3.2.27)$$

En substituant l'équation $(3.2.24)$ dans l'équation $(3.2.21)$ et l'équation $(3.2.25)$ dans l'équation $(3.2.22)$, nous obtenons finalement les coefficients a_{ij} et b_{ij} sous la forme :

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}\left(x_i\right)}{\left(x_i - x_j\right) M^{(1)}\left(x_j\right)}, \qquad i \neq j \qquad (3.2.28)$$

$$a_{ij} = \frac{M^{(2)}\left(x_i\right)}{2M^{(1)}\left(x_i\right)} \qquad (3.2.29)$$

$$b_{ij} = 2a_{ij}\left(a_{ii} - \frac{1}{x_i - x_j}\right), \qquad i \neq j \qquad (3.2.30)$$

$$b_{ii} = \frac{M^{(3)}(x_i)}{3M^{(1)}(x_i)}, \qquad (3.2.31)$$

Il faut remarquer que, si x_i est donné, il est facile de procéder au calcul de $M^{(1)}(x_i)$ dans l'équation $(3.2.9)$ et a_{ij}, b_{ij} pour $i \neq j$. Cependant, le calcul de a_{ij} (équation $(3.2.29)$) et de b_{ij} (équation $(3.2.31)$) implique l'estimation de la dérivée du deuxième $M^{(2)}(x_i)$ et du troisième dérivé d'ordre $M^{(3)}(x_i)$ dont le calcul n'est pas aisé. Il est possible d'éliminer cette difficulté en utilisant les propriétés de l'espace vectoriel linéaire.

Selon la théorie d'un espace vectoriel linéaire, un ensemble de polynômes de base peut être exprimé uniquement à l'aide d'un autre ensemble de polynômes de base. Ainsi, si un ensemble de polynômes de base satisfait à un opérateur linéaire, ainsi que l'équation $(3.2.1)$ ou une équation linéaire $(3.2.2)$, tout autre ensemble de polynômes de base obéira à cet opérateur.

Par conséquent, les équations $(3.2.1)$ et $(3.2.2)$ devraient également satisfaites par le deuxième ensemble polynômes de base $x^k, k = 0,1,2,\ldots, N-1$. Pour k=0, cet ensemble de polynômes base donne :

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad a_{ii} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} a_{ij} \qquad (3.2.32)$$

et

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij} = 0 \quad \text{ou} \quad b_{ii} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} b_{ij} \qquad (3.2.33)$$

qui permettent la détermination des coefficients a_{ij} et b_{ij}.($i \neq j$).

3.3 Choix des points de la maille

Puisque les coefficients $w_{ik}^{(2)}, \overline{w}_{jk}^{(2)}$, et $w_{ik}^{(1)}, \overline{w}_{jk}^{(1)}$, qui correspondent à la discrétisation des dérivées de premier et deuxième ordres respectivement, englobent les nœuds (x_i, y_j), le choix de ces points devient tout à fait important.

La plupart des chercheurs emploient les points nodaux équidistants, à cause leur commodité évidente. Toutefois, les nœuds non équidistants, particulièrement les zéros des polynômes orthogonaux comme les polynômes de Legendre et de Tchebychev, fournissent d'habitude des solutions précises mieux que les points nodaux équidistants. Le choix normal des points nodaux porte sur les nœuds équidistants suivants:

$$x_i = \frac{i-1}{N-1}a; \quad \text{i = 1,2,...,N} \qquad (3.3.1)$$

Et

$$y_j = \frac{j-1}{M-1}b; \quad \text{i = 1,2,...,M} \qquad (3.3.2)$$

Les nœuds x_i et y_j se situent sur les axes x et y, respectivement, pour un intervalle $[0,a]$ x $[0,b]$. Pour ce maillage uniforme (équidistant) dont les pas en espace suivant les directions x et y sont respectivement Δx et Δy il est possible d'obtenir :

$$x_k - x_i = (k-i)\Delta x, \qquad y_k - y_j = (k-j)\Delta y$$

$$M^{(1)}(x_i) = (-1)^{N-1}(\Delta x)^{N-1}(i-1)!(N-i)! \qquad \text{i = 1,2,...,N}$$

$$M^{(1)}(y_j) = (-1)^{M-1}(\Delta y)^{M-1}(j-1)!(M-j)! \qquad \text{j = 1,2,...,M}$$

Ainsi, les coefficients des dérivées du premier ordre se réduisent à;

$$w_{ij}^{(1)} = (-1)^{i+j}\frac{(i-1)!(N-i)!}{\Delta x(i-j)(j-1)!(N-j)!} \qquad \text{i,j = 1,2,...,N, i} \neq \text{j}$$

$$\overline{w}_{ij}^{(1)} = (-1)^{i+j}\frac{(i-1)!(M-i)!}{\Delta y(i-j)(j-1)!(M-j)!} \qquad \text{i,j = 1,2,...,M, i} \neq \text{j}$$

La distribution de points de Chebyshev-Gauss-Lobatto offre un meilleur choix et a été trouvé logiquement meilleur que les points de Legendre et de Chebyshev dans divers types de problèmes BERT et MALIK [42].

Ces points sont les points de collocation de Chebyshev qui sont les racines de $|T_N(x)| = 1$ et s'écrivent ainsi SHU [41].

$$x_k = \cos\left(\frac{k-1}{N-1}\pi\right) \qquad 1 \leq \text{k} \leq \text{N}$$

Pour un intervalle $[-1,1]$. Pour une région sur $[a,b]$

$$x_i = \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi\right]a, \qquad i = 1,2,..,N \qquad (3.3.3)$$

Et

$$y_j = \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{j-1}{M-1}\right)\pi\right]b, \qquad j = 1,2,..,M \qquad (3.3.4)$$

Dans les directions respectives de x et de y .

Pour les points de Chebyshev-Gauss-Lobatto, nous avons (dans la direction de x)

$$M^{(1)}(x_i) = (-1)^{i+1} N^2$$

$$M^{(2)}(x_i) = (-1)^i N^2 \frac{x_i}{1-x^2}$$

Et les coefficients de pondération correspondants se simplifient considérablement.

Dans cette thèse pour la discrétisation des intervalles, la distribution de points de Chebyshev-Gauss-Lobatto va être adoptée puisqu'elle donne la mesure réelle de toutes les valeurs propres de matrices PDQ strictement négatives.

3.4 Les conditions aux limites

La mise en œuvre des conditions aux limites est très importante pour la solution exacte. L'insertion des conditions aux limites de type de Dirichlet est simple puisque la connaissance de ces valeurs contribue au vecteur de droite {b} dans le système suivant :

$$[A]\{a\} = \{b\}$$

Si les conditions aux limites impliquent des dérivées normales de la fonction inconnue u, alors ces dérivées peuvent également être approximativement données par la méthode de quadrature différentielle.

3.4.1. Les conditions aux limites de type Dirichlet

Pour imposer les conditions aux limites de type Dirichlet, l'équation de diffusion devrait seulement être appliquée aux points intérieurs puisque la solution aux points de maillage limites est connue. Ainsi, l'équation peut être réécrite comme suit:

$$\sum_{k=2}^{N-1} w_{ik}^{(2)} u_{kj} + \sum_{k=2}^{M-1} \overline{w}_{jk}^{(2)} u_{ik} = -s_{ij} \qquad (3.4.1)$$

Ou $2 \le i \le N-1, \;\; 2 \le j \le M\text{-}1$ et $s_{ij} = \left(w_{i1}^{(2)} u_{1j} + w_{iN}^{(2)} u_{Nj} + \overline{w}_{j1}^{(2)} u_{i1} + \overline{w}_{jM}^{(2)} u_{iM} \right).$

L'équation (3.4.1) est un ensemble d'équations algébriques de quadrature différentielle pouvant être écrit sous matricielle :

$$[A]\{u\} = -\{s\} \qquad (3.4.2)$$

Où $\{u\}$ est un vecteur qui renferme des valeurs de fonction inconnues en tout point intérieur donné,

$$\{u\} = \{u_{22}, u_{23}, \ldots, u_{2,M-1}, u_{32}, \ldots, u_{3,M-1}, \ldots, u_{N-1,2}, \ldots, u_{N-1,M-1}\}^T$$

Et {b} est un vecteur contenant les dérivées temporelles discrétisées mais aussi le vecteur $\{s\}$ renferme des valeurs données de u aux points de maillage limites. La dimension de la matrice $[A]\ est\ (N-2)(M-2)x(N-2)(M-2).$

3.4.2. Les conditions aux limites de type Neumann

En ce qui concerne les conditions de Neumann, les dérivées normales aux limites devraient en conséquence être discrétisées grâce à la méthode de quadrature différentielle de polynômes de base.

La dérivée normale de u peut-être formulée comme suit ;

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \qquad (3.4.3)$$

Ainsi, les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont discrétisées en employant la méthode de PDQ.

Maintenant :

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial x} = \sum_{K=1}^{N} w_{ik}^{(1)} u_{kj}, \qquad i = 1,2,\ldots,N \qquad (3.4.4)$$

et

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial y} = \sum_{K=1}^{M} w_{jk}^{(1)} u_{ik}, \qquad j = 1,2,\ldots,M \qquad (3.4.5)$$

Où $w_{ik}^{(1)}$ et $\overline{w}_{jk}^{(1)}$ sont les coefficients pondéraux suivant les directions x et y qui s'obtiennent de façon analogue dans le cas unidimensionnel (équation$(3.4.1)$).

Dès lors :

$$w_{ik}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k)M^{(1)}(x_k)}, \quad i \neq k \qquad (3.4.6)$$

$$w_{ii}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2M^{(1)}(x_i)}, \qquad (3.4.7)$$

$$\overline{w}_{jk}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(y_i)}{(y_j - y_k)M^{(1)}(y_k)}, \quad j \neq k \qquad (3.4.8)$$

$$\overline{w}_{jj}^{(1)} = \frac{M^{(2)}(y_i)}{2M^{(1)}(y_i)}, \qquad (3.4.9)$$

En admettant que $\frac{\partial u_{N,j}}{\partial x} = c_j \quad (j = 1, 2, ..., M)$ et $\frac{\partial u_{Nj}}{\partial y} = 0$ sont donnés sur une partie de la frontière, nous pouvons écrire,

$$\frac{\partial u_{N,j}}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N} w_{Nk}^{(1)} u_{kj} = c_j \qquad (3.4.10)$$

En réécrivant l'équation $(3.4.10)$ comme suit :

$$w_{NN}^{(1)} u_{Nj} + \sum_{K=1}^{N-1} w_{Nk}^{(1)} u_{kj} = c_j \qquad (3.4.11)$$

u_{Nj} est facilement obtenu comme une valeur sur la frontière

$$u_{Nj} = \frac{1}{w_{NN}^{(1)}} \left(c_j - \sum_{k=1}^{N-1} w_{Nk}^{(1)} u_{kj} \right) \qquad j = 1,2,...M \qquad (3.4.12)$$

Ces M équations dont les inconnus u_{Nj}, $(j = 1, 2, ..., M)$ vont être combinées au système d'équations DQ $(3.4.1)$ qui sont écrits pour $i \neq N$, $j = 1, 2, ...M$ pour le cas des conditions aux limites de type Neumann $\frac{\partial u_{Nj}}{\partial x} = c_j$ pour $x = x_N$, $(i = N)$. Quand les conditions de limite normales sont réalisées à tous les points de maillage liés, le système final des équations DQ sera aussi sous forme d'équations $(3.4.2)$

$$\left[A\right]\left\{u\right\}=\left\{b\right\}-\left\{s\right\}$$

Où les vecteurs $\left\{b\right\}$ et $\left\{s\right\}$ comportent toujours les dérivées discrétisées des valeurs connues de u aux points de maillage limites respectivement.

Ainsi, les équations qui sont obtenues par le biais de la discrétisation des dérivées normales de u à la limite représentent des valeurs intérieures mises à jour de u qui ne sont pas connues encore.

3.5. Discrétisation des équations de transferts.

Les équations qui décrivent le comportement du fluide sont résolues par une méthode différentielle de quadrature polynôme (PDQ). En utilisant cette méthode PDQ, nos équations discrétisées deviennent alors :

3.5.1. Equation de la Vorticité

$$-\varpi_{i,j}=-\frac{1}{h_{i,j}^{2}}\left[\sum_{k}^{N}b_{i,k}\psi_{k,j}+\sum_{k}^{M}\bar{b}_{j,k}\psi_{i,k}\right] \qquad (3.5.1)$$

3.5.2. Equation de la quantité de mouvement

$$h_{i,j}\left[u_{i,j}\sum_{k}^{N}a_{i,k}\varpi_{k,j}+v_{i,j}\sum_{k}^{M}\bar{a}_{j,k}\varpi_{i,k}\right]=$$

$$\Pr\left[\sum_{k}^{N}b_{i,k}\varpi_{k,j}+\sum_{k}^{M}\bar{b}_{j,k}\varpi_{i,k}\right]+Ra\Pr\left[\begin{array}{l}\cos\phi\left(\eta_{j}\sum_{k}^{M}\bar{a}_{j,k}\theta_{i,k}-\xi_{i}\sum_{k}^{N}a_{i,k}\theta_{k,j}\right)-\\ \sin\phi\left(\xi_{i}\sum_{k}^{M}\bar{a}_{j,k}\theta_{i,k}+\eta_{j}\sum_{k}^{N}a_{i,j}\theta_{k,j}\right)\end{array}\right] \qquad (3.5.2)$$

3.4.3 Equation de la chaleur

$$h_{i,j}\left[u_{i,j}\sum_{k}^{N}a_{i,k}\theta_{k,j}+v_{i,j}\sum_{k}^{M}\bar{a}_{j,k}\theta_{i,k}\right]=\left[\sum_{k}^{N}b_{i,k}\theta_{k,j}+\sum_{k}^{M}\bar{b}_{j,k}\theta_{i,k}\right] \qquad (3.5.3)$$

Là où les indices i,j indiquent un point de grille et N,M représente le nombre total de points de grille dans les directions respectives ξ et η .

$a_{i,k}$, $b_{i,k}$ sont les coefficients de pondération du premier et du second dérivé suivant la direction ξ ; $\bar{a}_{j,k}$, $\bar{b}_{j,k}$ sont également les coefficients de pondérations du premier et du second dérivé d’ordre suivant la direction η .Les points de grille sont produits par quadrature de Tchebychev-Gauss-Lobatto:

$$\begin{cases} \xi_i = \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi\right] \text{ i = 1...N} \\ \eta_j = \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{j-1}{M-1}\right)\pi\right] \text{ j = 1...M} \end{cases} \qquad (3.5.4)$$

3.5. Méthode de résolution

On présente tout d'abord les techniques de résolution des systèmes linéaires par les trois grandes catégories de méthodes classiques, à savoir [43] :

- ✓ Les méthodes directes (méthodes de Gauss, Cholesky, Householder),
- ✓ Les méthodes itératives (méthode de Jacobi, Gauss – Seidel, relaxation),
- ✓ Les méthodes de projectives (méthode de la plus profonde descente et méthode du gradient conjugué).

Pour la résolution numérique de notre système d'équations algébriques, nous avons adopté les méthodes d'itératives suivantes.

Dans les méthodes itératives, le système $Ax = b$ est mis sous la forme $Mx = Nx + b$. Lorsque la matrice M est réversible, $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. Remarque que cette équation est une équation de la forme $x = f(x)$. Par conséquent, les méthodes itératives sont des méthodes de point fixe. La détermination du point fixe repose sur l'itération de l'équation :

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b \qquad (3.5.5)$$

En notant x_k le vecteur de composantes $x_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$. L'algorithme est initialise par un vecteur arbitraire $x_0 = \left(x_1^{(o)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ et s'arrête quand $\forall i \in N, \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \prec \varepsilon$ pour un ε donné. Lorsque la suite x_k converge, i.e. $\lim\limits_{x\to\infty} x_k = x$, on dit que la méthode converge.

La convergence de la méthode ne dépend pas du choix de x_0, mais la rapidité de la convergence en dépend. Selon les choix des matrices M et N on a différentes méthodes itératives pour la résolution des systèmes d'équations algébriques issus du processus de discrétisation.

➢ Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi décompose une matrice $A(n \times n)$ en une somme de trois matrices.

$$A = D - L - U$$

D : Matrice diagonale de A

U : Matrice triangulaire supérieure de A

L : Matrice triangulaire inferieure de A

On a alors :

$$Ax = (D - L - U)x = b$$

Ce qui donne :

$$Dx = (L + U)x + b$$

On a donc :

$$x = \frac{(L+U)}{D} x + \frac{b}{D}$$

L'itération de Jacobi est :

$$x^k = \frac{(L+U)}{D} x^{k-1} + \frac{b}{D}$$

Ou bien :

$$x_i^k = \sum_{j=1, i=1}^{n} \frac{(-a_{ij} x_j^{k-1}) + b_i}{a_{ii}}; \text{ i = 1,2,..,n}$$

On arrête les calculs lorsque les valeurs successives de sont suffisamment voisines.

Pour cela, on peut utiliser le critère de convergence absolue $\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \le \varepsilon$.

Méthode de Gauss – Seidel

On procède de la même manière que la méthode de Jacobi en décomposant la matrice A comme en (1), puis on transforme le système :

$$Ax = b \leftrightarrow (D-L)x - Ux = b \leftrightarrow x = (D-L)^{-1} b + u(D-L)^{-1} x$$

On définit ensuite une suite de vecteur $(x)^k$ par la formule :

$$x_i^{(k)} = \frac{U}{(D-L)} x^{(k-1)} + \frac{b}{(D-L)}, \quad \mathrm{k} \succ 0$$

Et la relation d'itération fournit l'algorithme de Gauss – Seidel :

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} -a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}}; \text{ (i = 1,....n)}$$

Le principal de l'algorithme de Gauss – Seidel est de partir d'un vecteur x^0 dont les composantes $x_i^{(0)}$ sont choisies de façon arbitraire et de chercher à affiner, au fur et a mesure des itérations du vecteur de départ.

Dans notre cas nous avons opté la méthode de relaxation, comme la convergence d'une méthode itérative ne dépend pas du choix du vecteur initial x_0, mais la rapidité de convergence en dépend. D'où l'idée d'introduire un facteur de relaxation ω non nul. Les matrices M et N sont choisies comme dans la méthode de Gauss mais pondérés par le facteur de relaxation $\mathrm{M} = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$.

La matrice $L = M^{-1} N = \left(\frac{1}{\omega} D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$ est appelée matrice de relaxation. L'algorithme est fondé sur le calcul des itérées.

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ii} x_j^k \right)$$

On démontre que si le facteur de relaxation dépasse 2, la méthode diverge.

Pour $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss – Seidel. Lorsque $0 \prec \omega \prec 1$, on parle de sous relaxation et lorsque $1 \prec \omega \prec 2$, on parle de sur relaxation (SOR, Successive Over Relaxation).

3.6. Critère de convergence

Pour les processus itératifs le critère d'arrêt est $\frac{\left|\sum_{i,j}\left(F_{i,j}^{k+1}\right)-\sum_{i,j}F_{i,j}^{k}\right|}{\left|\sum_{i,j}F_{i,j}^{k+1}\right|} \le \varepsilon$ en d'autres termes la valeur absolue entre deux itérations successives doit être inférieure à ε.

Avec ε, la précision de calcul. k L'index d'incrémentation du procédé d'itération, F est une fonction qui peut être représentée par ϖ, θ, Ψ.

3.7 Conclusion

Apres avoir optimisé pour faire les tests en trouvant les maillages les plus économiques en fonction des paramètres caractéristiques jugés les plus importants. L'étude numérique de la convection naturelle dans l'enceinte a été faite sans l'emploi d'aucun logiciel commercial. Le code de calcul que nous avons mis au point est transcris en Fortran et les différents scripts ayant servis aux traitements des données sont écrit en Python.

Ce code de calcul est exécuté sur un micro-ordinateur ayant la vitesse 2.16GHZ et une ram de 3.89 Go. Le temps d'exécution est très réduit.

Les résultats issus des simulations numériques seront exposés, analysés et commentés dans le chapitre suivant. Des corrélations reliant les coefficients d'échange et les grandeurs caractéristiques seront aussi données.

Chapitre 4 : RESULTATS ET COMMENTAIRES

4.1 Validation et conditions de calcul

Le code de calcul que nous avons mis au point est transcris en Fortran et les différents scripts ayant servis aux traitements des données sont écrit en Python.

Ce code de calcul est exécuté sur un micro-ordinateur ayant la vitesse 2.16GHZ et une ram de 3.89 Go. Le temps d’exécution est très réduit.

4.2. Validation du code

Nous avons validé, notre code de calcul en comparant nos étapes de calcul avec ceux issus de la littérature. A titre d’exemple, nous avons adopté la démarche utilisée par Shu (44) pour résoudre ces types d’équations.

4.3 Etude de la sensibilité

Pour chaque valeur du nombre Rayleigh Ra et de l’angle d’inclinaison ϕ, la taille des différentes grilles ont été testées afin de savoir l’influence de la maille sur les résultats.

TABLE I

SENSIBILITE DE Ψ_{min} A LA TAILLE DES MAILLES POUR $Ra = 10^4$

ϕ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
11/11	−0.583				−4.251	−1.586
15/15	−0.559	−2.719	−4.443	−4.567	−4.143	−1.735
21/21	−0.587	−2.768	−4.439	−4.495	−4.382	−1.768
25/25	−0.582	−2.766	−4.505	−4.503	−4.429	−1.753
31/31	−0.583	−2.741	−4.443	−4.722	−4.465	

Dans le tableau 1 plusieurs maillages ont été utilisés pour un nombre de Rayleigh (Ra) égale a 10^4 et l'angle ϕ varie de 0 a π , pour voir leur effet sur les résultats. Nous remarquons que la solution de $\psi_{\min}$ ne change pas de manière significative au-delà du nombre de nœuds, pour chaque valeur de l'angle. Nous pouvons donc conclure que les résultats sont peu sensibles au maillage. On note un bon compromis entre précision et temps de calculs.

Apres avoir discrétisé les équations différentielles, en les transformant en systèmes d'équations algébriques linéarisées par une méthode de discrétisation avant de les résoudre par une méthode itérative et validé notre code de calcul avec des résultats disponibles dans la littérature dans les chapitres précédents.

Nous obtenons des résultats pour des angles d'inclinaison compris entre 0 et πet des valeurs du nombre de Rayleigh allant de 10^4à 10^5.

Pour illustrer les champs dynamique et thermique de l'écoulement, nous avons tracés plusieurs types de courbes à savoir, les isocourants et les isothermes pour un nombre de Rayleigh qui varie de 10^4 et 10^5.

L'analyse des coefficients pariétaux se fait en fonction de l'angle d'inclinaison avec les paramètres de contrôles.

4.4. Effets de l'inclinaison et du nombre de Rayleigh.

Les champs dynamiques et thermiques sont examinés pour des nombres de Rayleigh compris entre 10^4 et 10^5 et diverse angle d'inclinaison de l'enceinte ($\phi = 0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4; 5\pi/6; \pi$). Pendant toute la simulation le nombre de Prandtl est fixe à 0.7, le facteur de forme b est égale à½ et nous prenons pour $\eta_0 = \xi_0 = 1$.

Nous ne ferons varier que deux grandeurs :

- ✓ Le nombre de Rayleigh
- ✓ $L'angle$ d'inclinaison ϕ.

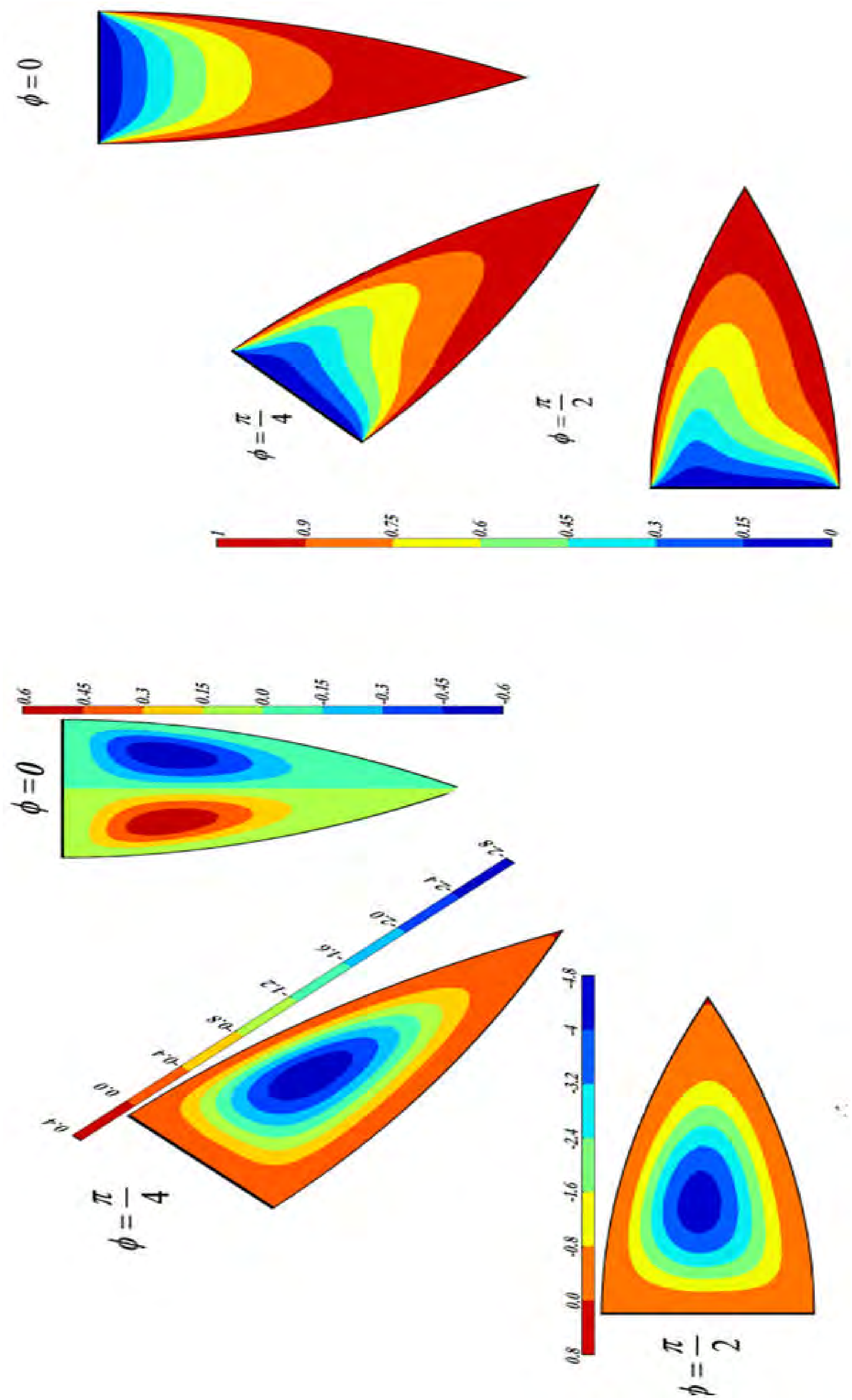

Fig. (4.1.a) : Isocourants (en bas) et isothermes (en haut) pour $Ra = 10^4$

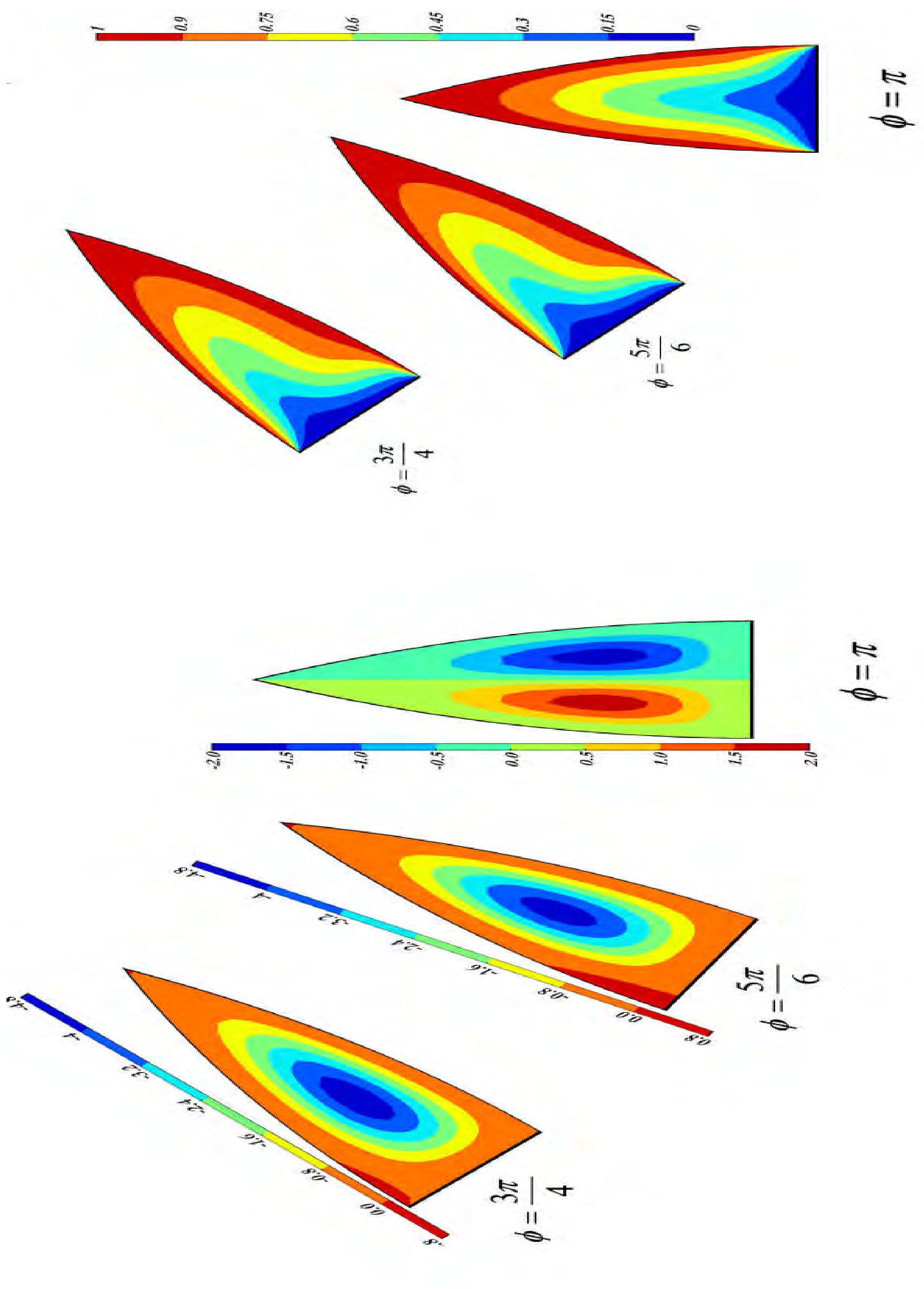

Fig. (4.1.b) : Isocourants (en bas) et isothermes (en haut) pour $Ra = 10^4$

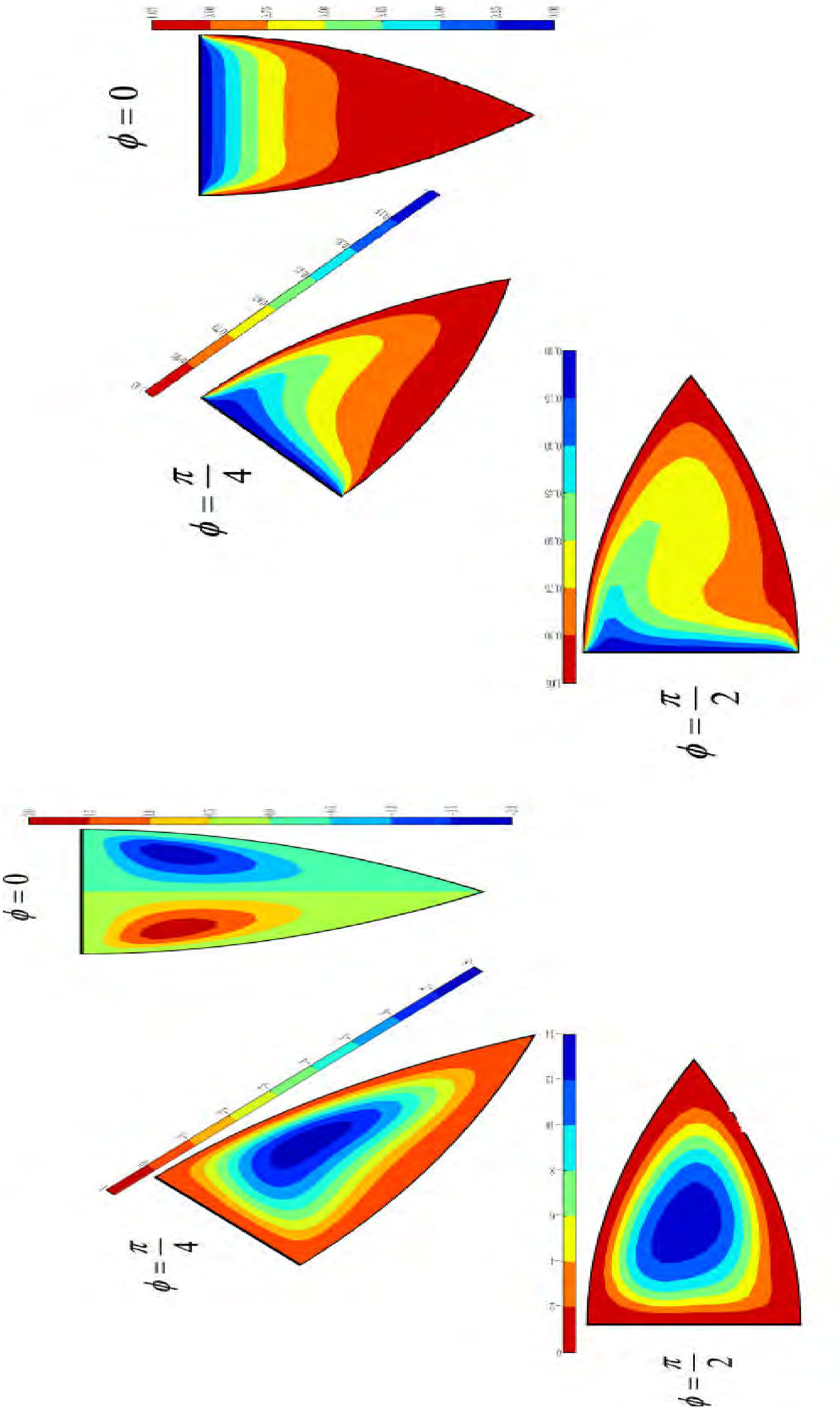

Fig. (4.1.c) : Isocourants (gauche) et isothermes (droite) pour $Ra = 10^5$

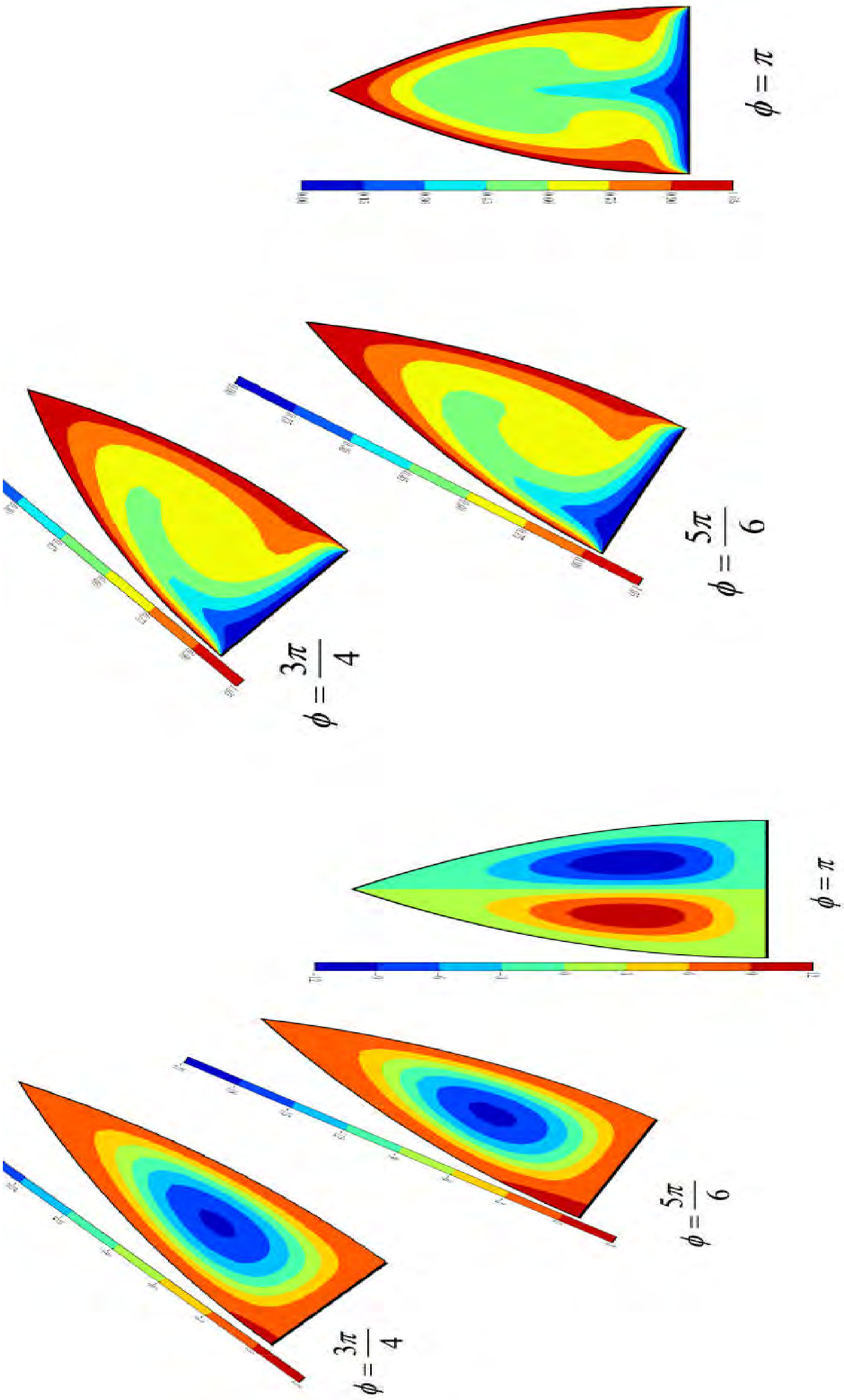

Fig. (4.1.d) : Isocourants (en bas) et isothermes (en haut) pour $Ra = 10^5$

4.4.1. Interprétation

Sur les figures ci-dessus, on peut observer le profil des isothermes(en haut) et des isocourants(en bas) pour différentes inclinaisons de notre enceinte.

En observant l'allure des isothermes, on constate que le mode de transfert à l'intérieur de l'enceinte, pour des nombres de Rayleigh inferieurs ou égales à 10^4(Ra≤10^4) est pseudo-conductif. En effet pour toutes les valeurs de ϕ les isothermes suivent la trace des parois actives plus on monte les isothermes ont une forme paraboliques. On constate un tassement des isothermes vers la paroi plane. Lorsqu'on incline l'enceinte l'allure ne change pas de façon significative. Les isothermes ont toujours une forme parabolique. Donc pour un nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$, l'inclinaison de l'enceinte ne modifie pas le mode de transfert de chaleur.

Regardons le comportement dynamique du système, pour $\phi = 0$ le champ dynamique est composé de deux cellules. Lorsqu'on incline progressivement l'enceinte de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on constate la disparition de l'une des cellules : le système devient monocellulaire. Et au delà de $\frac{\pi}{2}$ s'est le phénomène contraire qui se produit. En effet on note la lente progressive reformation de la seconde cellule. Pour le champ dynamique l'angle ϕ permet la transition d'un état bicellulaire à un état monocellulaire.

Les transferts ne deviennent réellement convectifs qu'à partir de $Ra = 10^5$. Si durant le régime pseudo-conductif la forme des isothermes est assez semblables, le passage à un régime convectif fait apparaitre la dépendance entre l'angle d'inclinaison ϕ et la distribution de chaleur à l'intérieur de l'enceinte. Le champ dynamique est lui aussi fortement affecté par l'inclinaison ϕ de l'enceinte.

Commençons encore par les isothermes, à $\phi = 0$ les isothermes n'ont plus une forme parabolique mais se sont des droites. Lorsqu'on augmente l'angle ϕ, on constate que les isothermes sont de plus en plus déformées.

Pour $\phi = 0$ et $\phi = \pi$ cas où il y a une symétrie de part et d'autre de l'axe des Y, le champ dynamique est composé de deux cellules convectives d'égale intensité mais tournant dans des directions opposées. En partant de $\phi = 0$ (sens trigonométrique) la rupture de la symétrie entraine la résorption de la cellule trigonométrique. Ainsi pour $\phi = \frac{\pi}{4}$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$ le champ dynamique est monocellulaire (cellule horaire). Pour des valeurs de $\phi \succ 90$ d'une cellule trigonométrique de faible intensités reforme augurant le retour à un état symétrique$\left(\phi = \pi\right)$. Le est convectif quelque soit la valeur de l'angle ϕ,les cellules sont plus intenses. Comme pour le nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$ l'angle ϕ permet de passer d'un état bicellulaire à un état monocellulaire. Mais aussi on note la recirculation du fluide de forte intensité pour $Ra = 10^5$.

- **Conséquences de la présence de cette cellule trigonométrique.**

Les conséquences de la présence de cette cellule trigonométriques sont observables sur la figure (1.6).Sur cette dernière on constate qu'avant son apparition$\left(\phi \leq \pi/2\right)$ la valeur de Ψ_{min} qui indique l'intensité de la cellule horaire croît avecϕ, au fur et à mesure que la cellule trigonométrique se développe au détriment de la cellule horaire la valeur de Ψ_{min} décroît.

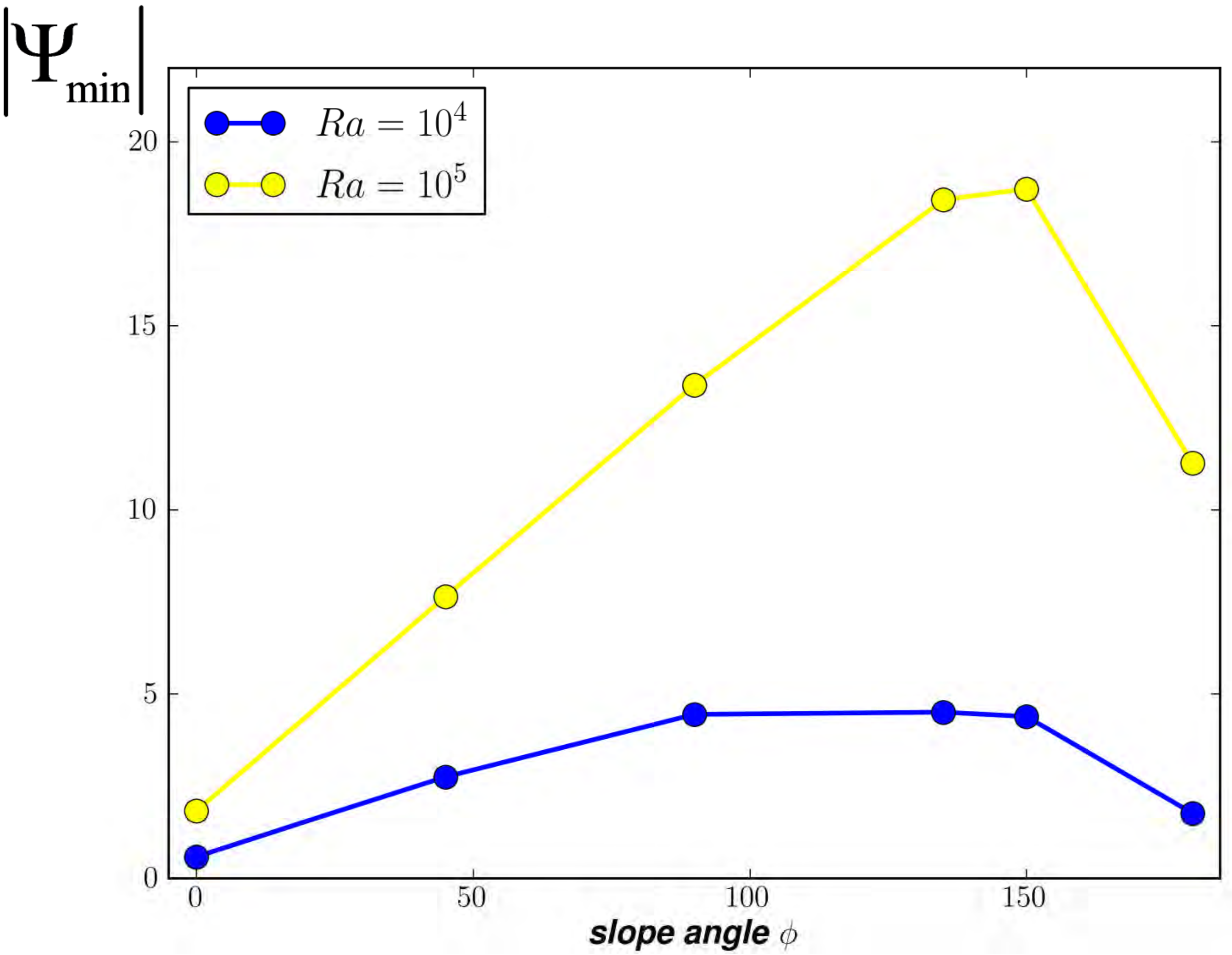

Fig. : (4.2) variation de Ψ_{min} en fonction de ϕ .

4.5 Variation des coefficients pariétaux

Les variations des coefficients que sont le nombre de Nusselt (Nu) et le coefficient de frottement (Cf) en fonction de l'inclinaison ϕ de l'enceinte sont illustrées sur les figures ci-dessous.

4.5.1 Variation du coefficient de frottement Cf en fonction de l'inclinaison ϕ

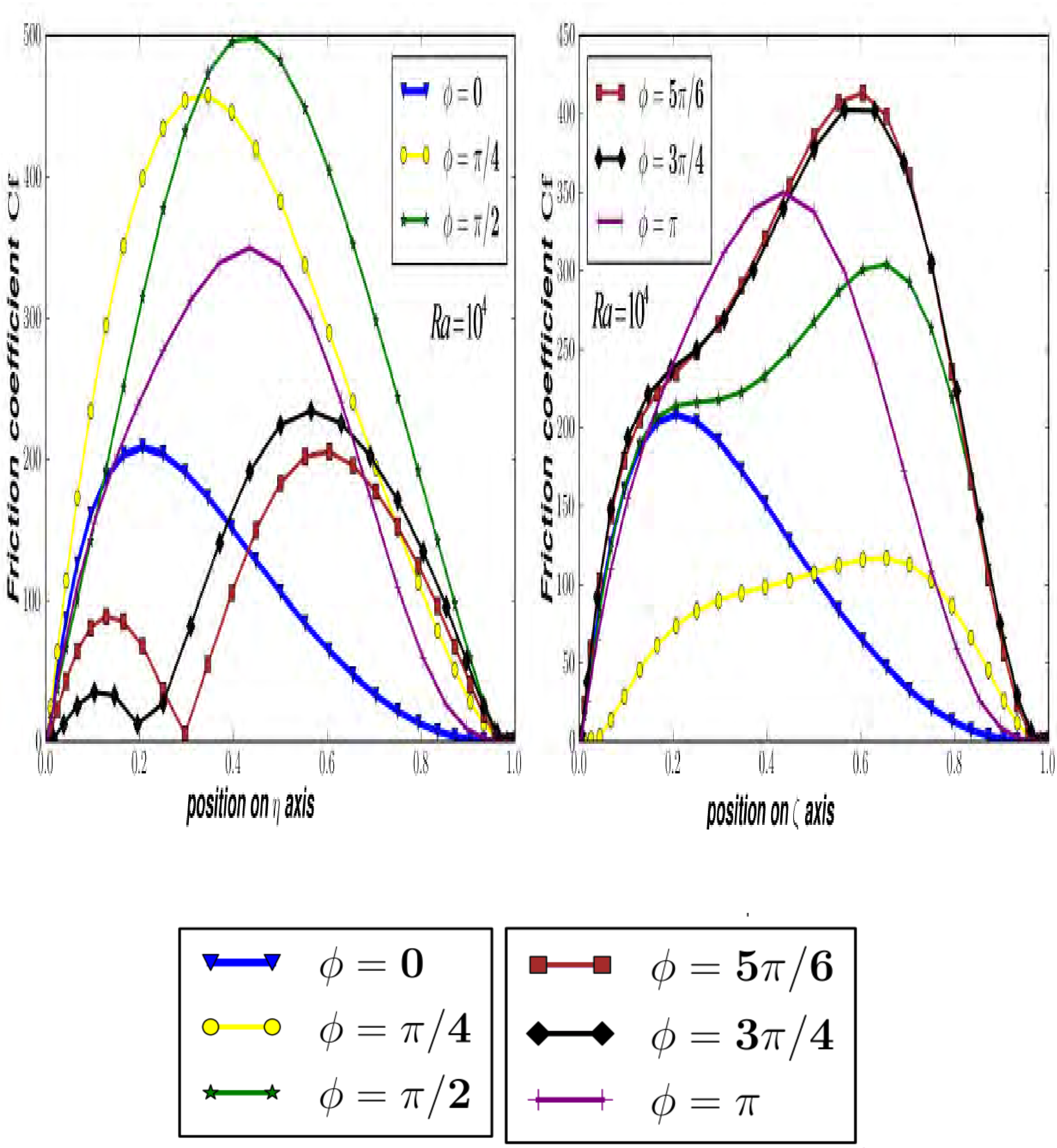

Fig. (4.3.a) : Variations de Cf **sur les deux parois paraboliques** 10^4

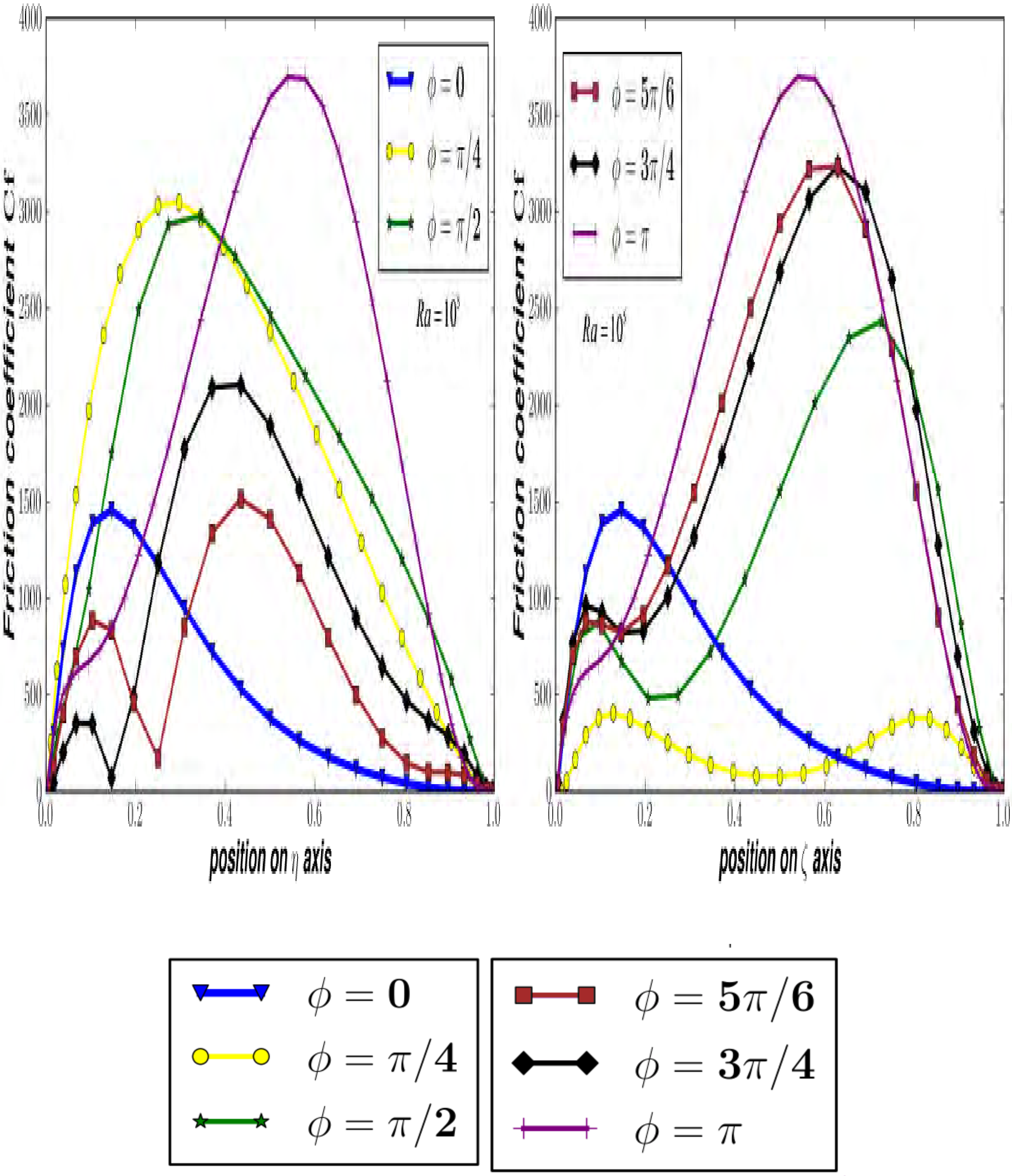

Fig. (4.3.b) : Variations de Cf **sur les deux parois paraboliques** 10^5

4.5.2 Variations des nombre de Nusselt local en fonction de l'inclinaison

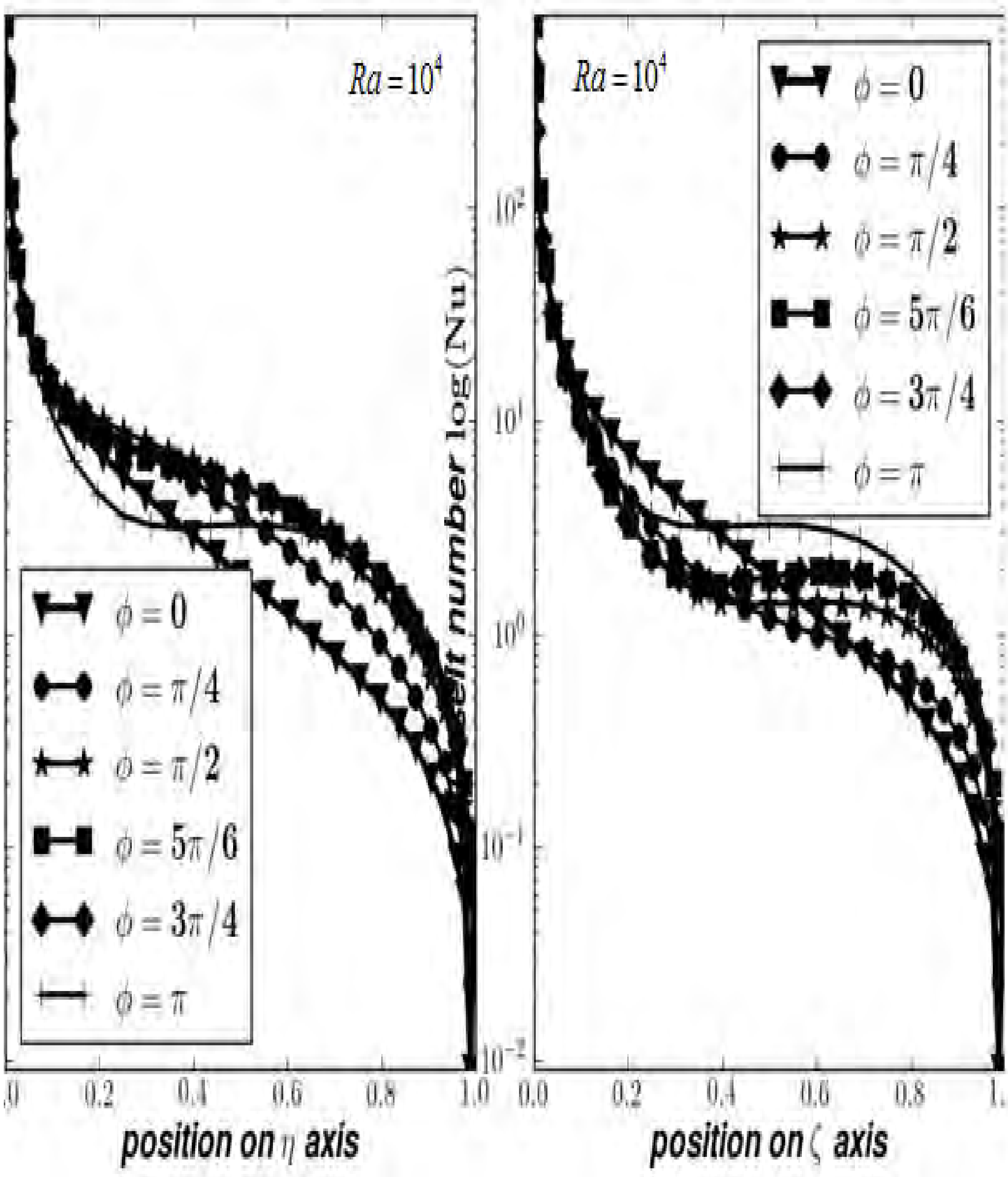

Fig. (4.4.a) : Variation du nombre des Nusselt locaux sur les parois 10^4

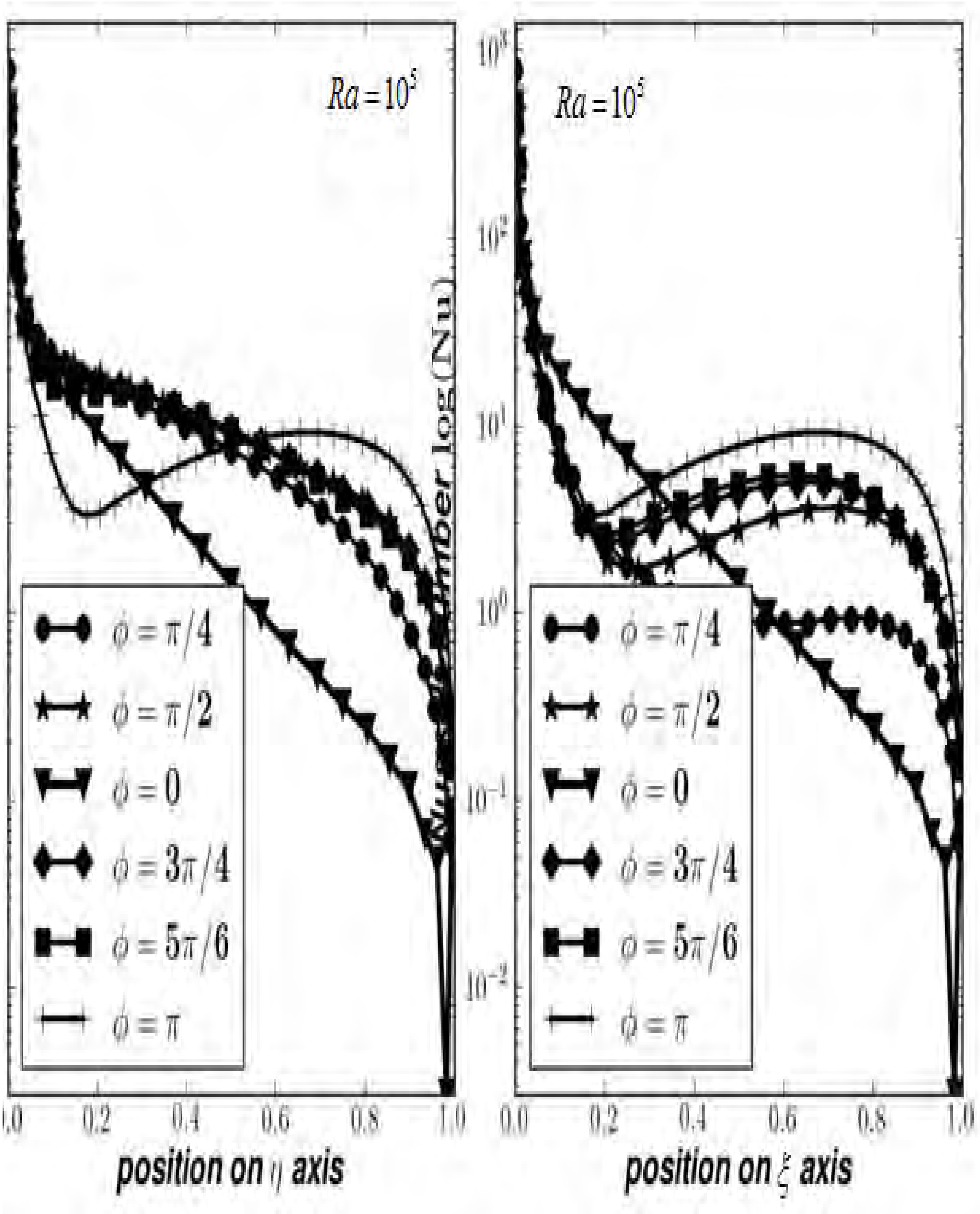

Fig. (4.4.b) : Variation du nombre des Nusselt locaux sur les parois 10^5

4.5.3 Interprétation

A $\phi = 0$, on voit sur les figure (**4.3.a**) et (**4.3.b**) que les frottements augmentent très rapidement quand on est proche des parois supérieurs de l'enceinte pour être nuls lorsqu'on se rapproche du fond de l'enceinte. En effet, quel que soit la valeur du nombre de Rayleigh $\left(Ra = 10^4 \, ou \; \mathrm{Ra} = 10^5\right)$ les cellules convectives sont localisées au sommet de l'enceinte.

Mais au fur et à mesure que l'on incline l'enceinte et que s'allonge les cellules convectives, les frottements deviennent de plus en plus repartis sur les parois de l'enceinte.

Sur la paroi gauche de coordonnée $\xi = 1$, à $\mathrm{Ra} = 10^4$ les frottements les plus importants correspondent à une inclinaison $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ de l'enceinte tandis que pour $\mathrm{Ra} = 10^5$ c'est à $\phi = \pi$. Sur l'autre paroi active de coordonnée $\eta = 1$, à $Ra = 10^4$ c'est à des inclinaisons $\phi = \dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$ que les frottements sont les plus importants cela explique par l'apparition de la cellule trigonométriques qui est adjacente à la paroi. Mais quand le régime devient convectif la valeur supérieure du coefficient de frottement Cf correspond à $\phi = \pi$.

Les figures (**4.4.a**) et (**4.4.b**) représentent les influences de l'inclinaison et du nombre de Rayleigh sur les variations des nombres de Nusselt locaux (caractérise la capacité du fluide à extraire de la chaleur sur les parois). Les résultats numériques ont été obtenus dans la gamme des valeurs du nombre de Rayleigh $Ra = 10^4$ et $Ra = 10^5$. Nous remarquons que les nombres de Nusselt sur les deux parois diminuent rapidement lorsqu'on s'éloigne des points A ou B et lorsqu'on se rapproche du point anguleux représenté par C. En effet en ce point les lignes de coordonnées $\eta = cte$ et $\xi = cte$ sont perpendiculaires et se trouvent à la même température donc l'échange de chaleur est nul en ce point. Puis il commence à diminuer jusqu'à atteindre son minimum 10^{-2} au point haut de la paroi.

Cela traduit que les taux des transferts de chaleur donné par l'intermédiaire du nombre de Nusselt local est important à cet endroit où $\eta = 0$ et $\xi = 0$. Il est moins important à l'autre endroit de la paroi où $\eta = 1$ et $\xi = 1$.

Pour $R_a = 10^5$ et $\phi = 0$, nous notons que quel que soit la paroi considérée, le taux des transferts de chaleur entre les parois et le fluide est important.

Pour $\phi = \pi$ correspond aux transferts les plus faibles et les transferts les moins intenses correspondent à des angles d'inclinaison $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$. Du fait de la symétrie le même phénomène se produit de part et d'autre de la paroi.

4.5.4 Variation du nombre des Nusselt moyen $\overline{Nu}$ en fonction de l'inclinaison ϕ

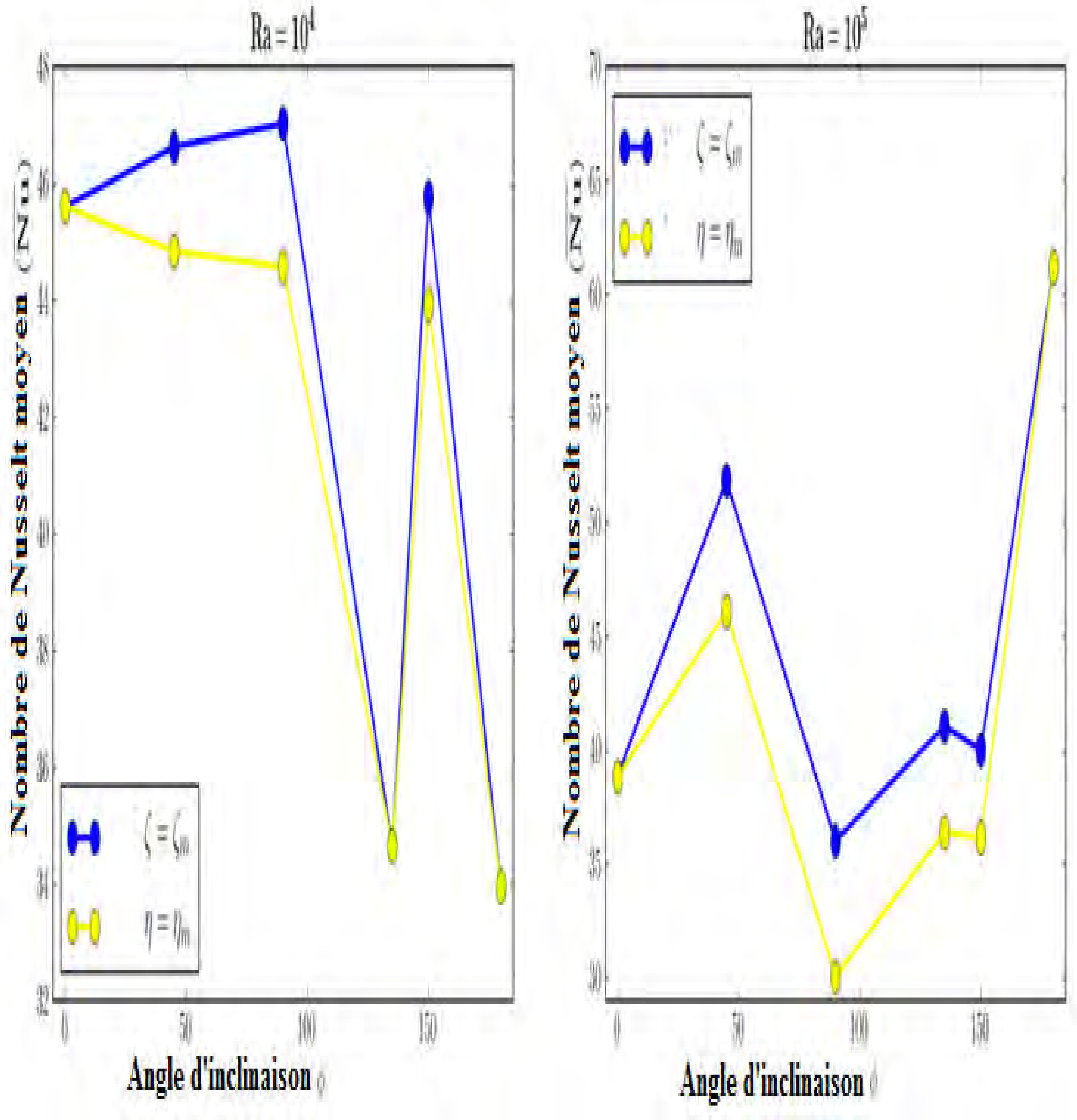

Fig: (4.5) Variations de $\overline{Nu}$ sur les deux parois paraboliques.

4.5.5 Variation du coefficient de frottement $\overline{C}f$ en fonction de l'inclinaison ϕ

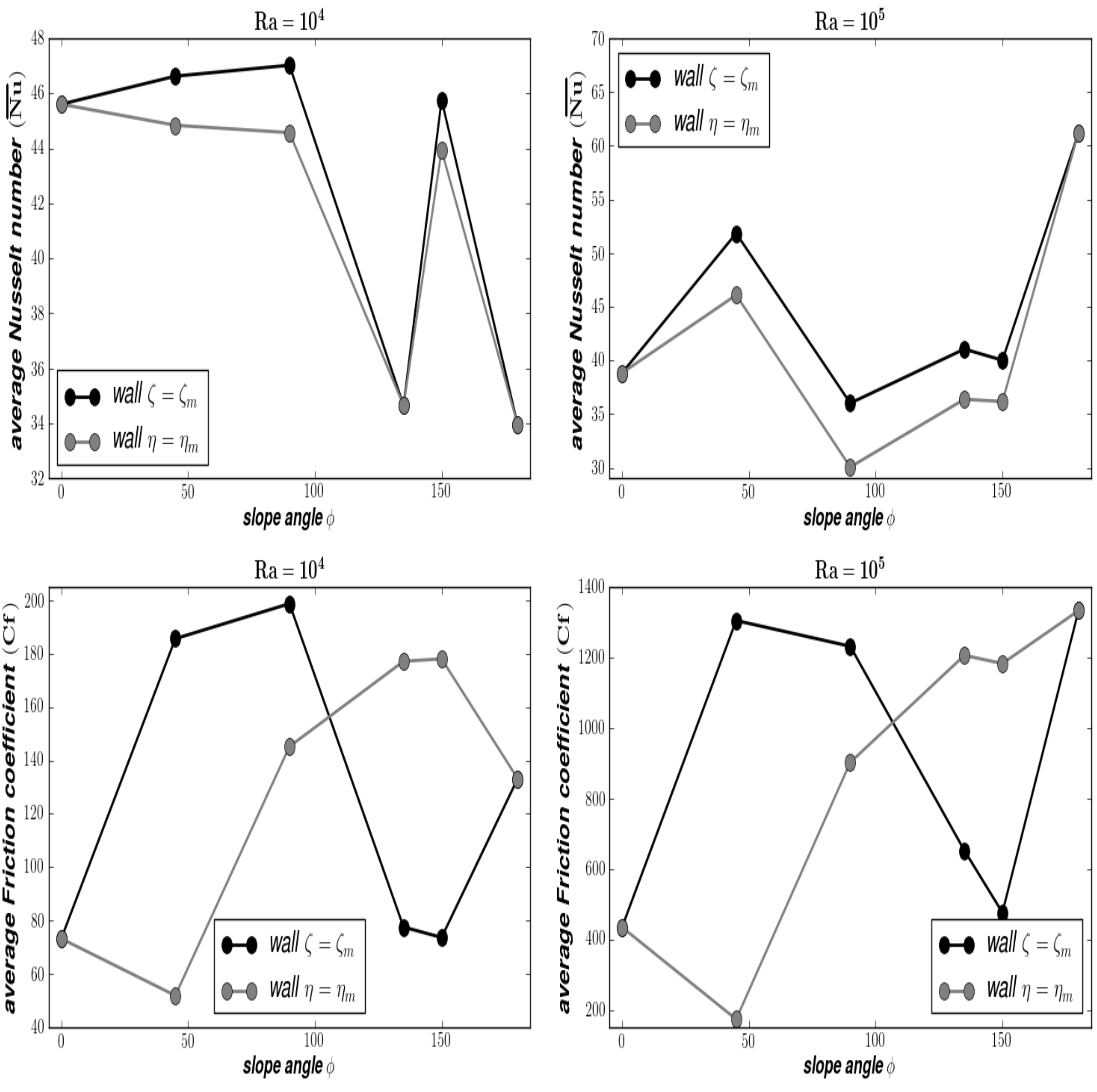

Fig.: (4.6). Variations de $\overline{C}_f$ en fonction de l'inclinaison.

4.5.6 Interprétation

Sur la figure (4.5), pour $Ra = 10^4$ nous pouvons noter que quel que soit la paroi considérée, les transferts de chaleurs entre les parois paraboliques et le fluide sont important quand $\phi \leq \frac{\pi}{2}$.Les transferts les plus intenses correspondent à $\phi = \frac{\pi}{2}$ et le plus faible est l'inclinaison $\phi = \pi$ .Pour $Ra = 10^5$, contraire au cas précédent avec $\phi = \pi$ les échanges convectifs sont plus intenses et plus faibles avec l'inclinaison $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion

Dans le présent travail, nous avons étudié l'effet de l'angle d'inclinaison ϕ sur les phénomènes dynamiques et thermiques à l'intérieur d'une enceinte délimitée par deux paraboles cylindriques de génératrice horizontale et une surface plane. D'après l'analyse des différents résultats obtenus nous pouvons conclure que :

- ✓ Le passage d'un état pseudo-conductif $\left(Ra \leq 10^4\right)$ a un état convectif $\left(Ra \geq 10^5\right)$ est peu influencé par l'angle d'inclinaison ϕ .

- ✓ Pour $\phi = 0$ et $\phi = \pi$ le champ dynamique est multicellulaire même pour des régimes conductifs. Pour d'autres valeurs de ϕ, nous prenons seulement les cellules convectives dans le sens des aiguilles d'une montre. Cependant, pour $\phi = \frac{3\pi}{5}$ et $\phi = \frac{5\pi}{6}$, la cellule trigonométrique de faible intensité peut être vu à l'intérieur de l'enceinte.

- ✓ Pour $Ra = 10^4$, les coefficients de frottements sont intenses pour $\phi = \frac{\pi}{4}$ mais quand $Ra = 10^5$ les coefficients de frottements les plus intenses sont obtenus pour l'inclinaison $\phi = \pi$.

- ✓ Pour $Ra = 10^4$ les transferts les plus intenses correspondent à $\phi = \frac{\pi}{2}$ et les plus faibles pour $\phi = \pi$.

- ✓ Pour $Ra = 10^5$ les transferts les plus intenses correspondent à $\phi = \frac{\pi}{2}$ et les plus faibles pour $\phi = \pi$.

Conclusion générale.

Dans le cadre de notre travail, nous avons réalisé une étude numérique de la convection naturelle à l'intérieur d'une enceinte délimitée par deux portions de parabole cylindrique de génératrice horizontale et une surface plane : l'effet de l'angle l'inclinaison.

Le premier chapitre constitue une généralité sur le phénomène de la convection et une revue bibliographique sur la convection naturelle dans les milieux confinés. Au second chapitre, nous avons établi un modèle mathématique décrivant les phénomènes de la convection naturelle dans notre enceinte. Ce modèle repose sur l'approximation de Boussinesq et sur un écoulement bidimensionnel. L'analyse théorique a permis de réduire l'équation du mouvement en une seule équation en utilisant le formalisme vorticité – fonction de courant.

Dans les équations adimensionnelles figurent un certain nombre de paramètres physiques tels que le nombre de Rayleigh et le nombre de Prandtl.

La discrétisation des équations de transferts fut effectuée par la méthode de quadrature différentielle polynôme (PDQ). Le système d'équation algébriques issu de cette discrétisation est résolue par une méthode de sur relaxation (SOR). Apres avoir validé nos calculs, un code de numérique a été mis au point. La simulation numérique a été réalisée par des nombres de Rayleigh qui varie entre 10^4 *et* 10^5.

Les résultats obtenus ont été détaillés comme suit :

Le passage d'un état pseudo-conductif a un état convectif est peu influencé par l'angle d'inclinaison ϕ.

Pour $\phi = 0$ et $\phi = \pi$ le champ dynamique est multicellulaire même pour des régimes conductifs. Pour d'autres valeurs de ϕ, nous prenons seulement les cellules convectives dans le sens des aiguilles d'une montre. Cependant, pour $\phi = \dfrac{3\pi}{5}$ et $\phi = \dfrac{5\pi}{6}$, la cellule trigonométrique de faible intensité peut être vu à l'intérieur de l'enceinte.

Pour $Ra = 10^4$, les coefficients de frottements sont intenses pour $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ mais quand $Ra = 10^5$ les coefficients de frottements les plus intenses sont obtenus pour l'inclinaison $\phi = \pi$.

Pour $Ra = 10^4$ les transferts les plus intenses correspondent à $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ et les plus faibles pour $\phi = \pi$.

Pour $Ra = 10^5$ les transferts les plus intenses correspondent à $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ et les plus faibles pour $\phi = \pi$. Nous constatons que la convection naturelle devient de plus en plus importante lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

Une suite intéressante à ce travail serait de prendre des géométriques plus complexes et d'autres types de fluides en généralisant l'algorithme développé. Mais aussi, applique d'autres conditions aux limites telles qu'une densité de flux de chaleur variant avec le temps.

ANNEXE

Rappels sur les opérateurs différentiels

Nous rappelons ici la définition des différents opérateurs différentiels que l'on peut appliquer à un champ vectoriel.

1. **Formules de base**

   1. $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}U\right)=\vec{\nabla}^2 U$ soit $\operatorname{div}\left(gradU\right)=\Delta U$

   2. $\vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\nabla}U\right)=\vec{0}$ soit $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{gradU}\right)=\vec{0}$

   3. $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\ \Lambda\ \vec{a}\right)=\vec{0}$ soit $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{a}\right)=\vec{0}$

   4. $\vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\nabla}\ \Lambda\ \vec{a}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{a}\right)$ - $\vec{\nabla}^2\vec{a}$ soit $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{a}\right)=\overrightarrow{grad}\left(div\vec{a}\right)-\Delta\vec{a}$

2. **Expressions de l'opérateur gradient dans divers systèmes de coordonnées**

   <u>Définition :</u>

   L'opérateur gradient est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ scalaire et le transforme en un champ vectoriel.

   $\vec{\nabla}U=\overrightarrow{gradU}=\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right).\vec{e}_x+\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right).\vec{e}_y+\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right).\vec{e}_z$ Système de coordonnées cartésiennes

   $\overrightarrow{grad}\ U=\left(\dfrac{\partial U}{\partial r}\right).\vec{e}_r+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right).\vec{e}_\theta+\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right).\vec{e}_z$ Système de coordonnées cylindriques

3. **Expressions de l'opérateur divergence dans divers systèmes de coordonnées**

   <u>Définition :</u> L'opérateur divergence est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ vectoriel et qui renvoie un champ scalaire.

   $\vec{\nabla}.\vec{a}=div\vec{a}=\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial x}\right)+\left(\dfrac{\partial a_y}{\partial y}\right)+\left(\dfrac{\partial a_z}{\partial z}\right)$ Système de coordonnées cartésiennes

   $div\vec{a}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(r.a_r\right)}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial a_z}{\partial z}$ Système de coordonnées cylindriques

4. **Expressions de l'opérateur rotationnel dans divers systèmes de coordonnées**

   <u>Définition :</u> L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel qui transforme un Champ vectoriel en un autre champ vectoriel.

$$\overrightarrow{rot}\vec{a} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$ Système de coordonnées cartésiennes.

$$\overrightarrow{rot}\vec{a} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}, \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right)$$ Système de coordonnées cylindriques.

5. Expressions de l'opérateur laplacien dans divers systèmes de coordonnées

<u>Définition :</u>

L'opérateur laplacien scalaire est un opérateur différentiel d'ordre deux qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire. Le laplacien scalaire s'obtient en prenant la divergence du gradient.

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}U\right) = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$ Système de coordonnées cartésiennes

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$ Système de coordonnées cylindriques

- **Le laplacien vectoriel**

Le laplacien s'applique également à un champ vectoriel. Dans ce cas il renvoie un autre champ vectoriel.

Par définition, le laplacien vectoriel s'obtient à l'aide de l'identité suivante :

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{a} = \vec{\nabla}\Lambda\left(\vec{\nabla}\ \Lambda\ \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{a}\right) - \nabla^2\vec{a} = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{a}\right) - \Delta\vec{a}$$

En coordonnées cartésiennes, les vecteurs unitaires étant fixes, le laplacien vectoriel d'un champ $\vec{a}$ est tout simplement, un vecteur dont les composantes sont les laplaciens scalaires des composantes de $\vec{a}$:

$$\Delta\ \vec{a} = \left(\Delta a_x\right)\vec{U}_x + \left(\Delta a_y\right)\vec{U}_y + \left(\Delta a_z\right)\vec{U}_z$$

Références

[1] G.DE Vahl Davis, "laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity vol.ll, pp.l675-1693 Int. J. Heat Mass Transfer**,** 1960.

[2] P.Le.Quéré, "*étude de la transition à l'instationnarité des écoulements de convection naturelle en cavité verticale différentiellement chauffée par méthode spectrale Chebyshev*", thèse de doctorat en sciences physiques université de Poitiers, 1987.

[3] G. De Vahl Davis, Natural convection of air in a square cavity: A benchmark numerical solution, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 3, pp. 249_264, 1983.

[4] H.Q. Yang, KT. Yan, J.R Lloyd Laminar natural convection flow transition in tilted three dimensional longitudinal rectangular enclosures, 1987.

[5] Lee T, Lin TF, Three dimensional natural convection of air in an inclined cubic cavity. Numer Heat Transfer, 1995.

[6] D.C. Lo, D.L. Young , K. Murugesan , C.C. Tsai , M.H. Gou, Velocity–vorticity formulation for 3D natural convection in an inclined cavity by DQ method, 2007.

[7] Hiroyuki Ozoe et Hayatochi Sayama, Natural convection in an inclined rectangular channel at various aspect ratios and angles – experimental Measurements, int. J. Heat Mass transfer. Vol. 18, pp.1 425-1431.

[8] A. Bairi, N. Laraqi, J.M. Garcıa de Marıa, Numerical and experimental study of natural convection in tilted parallelepipedic cavities for large Rayleigh numbers. Experimental Thermal and Fluid Science 31 309–324, 2007.

[9] E. Tric, G. Labrosse, M. Betrouni, A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cubic cavity, from accurate numerical solutions, International Journal of Heat and Mass Transfer 43-4043-4056,2000.

[10] Vinoj. Kurian, Mahesh N. Varma, A. Kannan l**,** Numerical studies on laminar natural convection inside inclined cylinders of unity aspect ratio International Journal of Heat and Mass Transfer 52 (822–838)**,** 2009.

[11] Brahim Ben Beya, Taieb Lili, Transient natural convection in 3D tilted enclosure heated from two opposite sides, International Communications in Heat and Mass Transfer 36- 604–613, 2009.

[12] C. Shu, B. C. Khoo, K. S. Yeo et Y.T. Chew , Application of GDQ scheme to simulate natural convection in square cavity, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 21, No. 6, pp. 809-817, 1994.

[13] R.J.Janssen, R.A.W.M.Henkes and C.J.Hoogendoorn, "transition to time periodicity of natural convection flow in a 3D differentially heated cavity", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 36 N°l 1, pp. 2927-2940, 1993.

[14] R.A.Kuyper, C.J.Hoogendoorn and R.A.W.M.Henkes, "numerical study of laminar and turbulent natural convection in an inclined square cavity", Int J.Heat Mass Transfer.vol.36, N^{0}11 , pp.2899 2911, **1993.**

[15] D.R.Chenoweth and Paolucci, "natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences", J.Fluid Mech, vol, pl. 169, pp. 173-210, 1986.

[16] T. Fusegi, J.M. Hyun, K. Kuwahara, Transient Three-dimensional Natural Convection in a Differentially Heated Cubical Enclosure, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 34, N° 6, pp. 1559-1564, 1991.

[17] S.M. ElSherbiny, Free convection in inclined air layers heated from above, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 39, No.18, 3925-3930, 1996.

[18] [Zhao, 1997, 2] Y. Zhao, D. Curcija, W.P. Goss, Prediction of the multicellular flow regime of natural convection in fenestration glazing cavities, ASHRAE Transactions: Symposia 1009-1020, 1997.

[19] C. Ghernoug, *Etude numérique du modèle de Boussinesq de la convection naturelle, laminaire et permanente, entre deux cylindres excentres horizontaux*, thèse de doctorat, Université Mentouri Constantine(2008).

[20] Talabi S.O., and Nwabuko U. (1993). Numerical solution of natural convective heat transfer in parabolic enclosures, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36, 17, 4275–4281, 1993.

[21] M. Djezzar, A. Chaker and M. Daguenet, Numerical Study of Bidimensional Steady Natural Convection in a Space Annulus Between Two Elliptic Confocal Ducts Influence of the Internal Eccentricity, *Rev. Energ. Ren,* Vol. 8, 2005, pp. 63 – 72.

[22] A. W. Mustafa, Natural convection in Parabolic Enclosure Heated from Below, *Modern Applied Science*, Vol. 5, n. 3, pp. 213-220, 2011.

[23] Khudheyer S. Mushatet, Simulation of Natural Convection in an Inclined Square Cavity with Two Wavy Walls, Journal of Applied Sciences Research 6(12): 2111 – 2122, (2010).

[24] M. Belkadi, M. Aounallah, A. Azzi, O. Imine and L. Adjlout, Effect of the Hot Wall Geometry on Laminar Natural Convection in an Inclined Cavity, Journal of Applied Sciences 5(8):1496 -1503, (2005).

[25] Zacharia Kabdi, U-Cheul Shin, Cheikh Mbow, Michel Daguenet .Convection thermique naturelle laminaire, permanente et bidimensionnelle dans des lunules cylindriques, Rev GénTherm (1997) 36, 319-329.

[26] Chin-Lung Chen, Chin-Hsiang Cheng. Buoyancy-induced flow and convective heat transfer in an inclined arc-shape enclosure, International Journal of Heat and Fluid Flow 23 (2002) 823–830.

[27] A. Osorio , R. Avila , J. Cervantes, On the natural convection of water near its density inversion in an inclined square cavity, International Journal of Heat and Mass Transfer 47 - 4491–4495, 2004.

[28] J.L. Wright, A correlation to quantify convective heat transfer between vertical window glazings, ASHRAE Trans; 102 (1) (1996) 940-946, 1996.

[29] Y. D. Zhu, C. Shu, J. Qiu, and J. Tani, Numerical Simulation of natural convection between two elliptical cylinders using DQ method, Int. J. Heat. Mass. Trans., 47, pp. 797-808. (2004).

[30] N.A. Roschina, A.V. Uvarov and A.I. Osipov. 2005. Natural convection in an annulus between coaxial horizontal cylinders with internal heat generation. Int. J. Heat. Mass. Transfer., vol.48, pp: 4518–4525.

[31] Y. Shi, T.S. Zhao and Z.L. Guo, 2006. Finite difference-based Lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer in a horizontal concentric annulus. J. Computers & Fluids. Vol. 35, pp: 1–15.

[32] B.Tahri, K. Bouhadef, A. Slimani Et M. Rebhi, Effet de l'inclinaison sur la convection naturelle dans un espace forme par trois cylindres, 10ème Séminaire International Sur La Physique Energétique, Journal of Scientific Research *N° 0 vol. 1 (2010).*

[33] Yahiaoui Abdelaziz, *Etude de la convection naturelle dans les enceintes courbées ayant deux parois actives courbées verticales et deux parois inactives courbées horizontales ;* Mémoire,
Université Mentouri Constantine, Faculté des Sciences Exactes département de physique-Algérie 2012.

[34] S. Dia, C. Mbow and J. Sarr, Effects of the Heater Location on the Unsteady Two Dimensional Natural Convection in Enclosure Bounded by Two Paraboloids of Revolution. *American Journal of Fluid Dynamics*, Vol.3, N.3, p 49-57, 2013.

[35] J. Boussinesq : *Théorie analytique de la chaleur, volume 2*, Bibliothèque nationale de France, Paris CNAM-8-Ca-283 (2), 1903.

[36] S. Dia, "*Etude de la convection naturelle bidimensionnelle d'un fluide newtonien confinée dans une enceinte délimitée par deux paraboloïdes de révolution en régime instationnaire*", Thèse de doctorat unique, Université de Cheikh Anta Diop, 2013.

[37] R.E. Bellman, B.G. Kashef and J. Casti, Differential Quadrature a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation.*Journal of Computational Physics*, Vol.10, p 40-52, 1972.

[38] Shu, C. and Richards B. E. High resolution of natural convection in a square cavity by generalized differential quadrature, Proc of 3rd Conf on Adv in Num Meth in Eng: Theory and Appl, 2, 978-985, (1990).

[39] Shu, C. and Chew, Y.T. Fourier expansion-based differential quadrature and its application to Helmholtz eigenvalue problems, *Commun Numer Methods Eng*, 13(8), 643-653, (1997).

[40] Shu, C. and Xue, H. Explicit computation of weighting coefficients in the harmonic differential quadrature, *J Sound Vib*, 204(3), 549-555, (1997)

[41] Shu, C. Differential quadrature and its application in engineering, Springer-Verlag, London, (2000).

[42] Bert, W. and Malik, M. Differential quadrature method in computational me-chanics: A review, *Appl Mech Rev*, 49, (1996).

[43] Franck Jedrzejewski « *Introduction aux méthodes numériques, deuxième édition* ». Springer-Verlag France, Paris 2005.

[44] C. Shu, Application of Differential Quadrature to Simulate Natural Convection in a Concentric Annulus. Int. J. Numer. Meth. Fluids 30: 977-993 (1999).

Résumé:

Dans le cadre de ce travail, l'auteur avait étudié numériquement la convection naturelle à l'intérieur d'une enceinte délimitée par deux portions de parabole cylindrique de génératrice horizontale et une surface plane. Le modèle mathématique régissant notre problème a été développé en se basant sur l'approximation de Boussinesq. Le formalisme vorticité – fonction de courant est utilisé pour résumer l'équation de mouvement en une seule équation. Les équations de transferts sont exprimées dans un système de coordonnées paraboliques pour transformer les profils curvilignes de l'enceinte en domaine parallélépipédique et formuler plus simplement les conditions aux limites. Les équations qui gouvernent notre écoulement sont discrétisées par la méthode quadrature différentielle polynôme (PDQ). Le système d'équations algébriques issu de cette discrétisation est résolu par la méthode successive de sur relaxation (SOR). Les résultats obtenus, ont été représentés sous forme de courbe à savoir, les isocourants et les isothermes pour illustrer les champs dynamiques et thermiques de l'écoulement, pour des angles d'inclinaison compris entre 0 et π et des valeurs du nombre de Rayleigh Ra compris entre 10^4 et 10^5. L'analyse des coefficients pariétaux se fait en fonction de l'angle d'inclinaison avec les paramètres de contrôles.

Mot clé : angle d'inclinaison, parabolique, PDQ, convection, transfert de chaleur, vorticité.

Abstract:

Within the frame work of this work, the author had numerically studied the natural convection inside an enclosure delimited by two portions of cylindrical parabola of horizontal generator and a plane surface. The mathematical model governing our problem was developed while being based on the approximation of Boussinesq. The formalism vorticity - function of current is used to summarize the equation of motion in only one equation. The equations of transfers are expressed in a parabolic frame of reference to transform the curvilinear profiles of the enclosure into parallelepipedic field and to more simply formulate the conditions with the limites.Les equations which control our flow are discretized by the method differential squaring polynomial (PDQ). The system of algebraic equations resulting from this discretization is solved by the successive method of on relieving (SOR). The results obtained, were represented in the form of curve to know, the isocourants and the isotherms to illustrate the fields dynamic and thermal of the flow, for angles of inclination ranging between 0 and π and of the values of the number of Rayleigh included/understood enters. The analysis of the parietal coefficients is done according to the angle of inclination with the parameters of controls.

Key words: angle of inclination, parabolic, PDQ, convection, transfer of heat, vorticity.