

## Chapitre 2

# Le Formalisme Eulérien Mésoscopique : extension aux écoulements polydispersés

### 2.1 Le Formalisme Eulérien Mésoscopique

#### 2.1.1 Dérivation

Pour résoudre l'EWB, on définit les opérateurs de moyenne statistique et massique :

$$n_l(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} f_p(t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T) d\vec{c}_p dS dT \quad (2.1)$$

$$m_l(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} m_p f_p(t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T) d\vec{c}_p dS dT \quad (2.2)$$

$$\{\Psi\} = \frac{1}{n_l(x, t)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \Psi f_p(t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T) d\vec{c}_p dS dT \quad (2.3)$$

$$\langle \Psi \rangle = \frac{1}{m_l(x, t)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} m_p \Psi f_p(t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T) d\vec{c}_p dS dT \quad (2.4)$$

où  $m_p = \rho_l S^{3/2} / 6\sqrt{\pi}$  la masse d'une particule. Dans le cas monodisperse du FEM, les deux opérateurs sont identiques. On peut définir les grandeurs moyennes de la phase dispersée :

$$u_{l,i}(\vec{x}, t) = \{c_{p,i}\} \quad (2.5)$$

$$H_l(\vec{x}, t) = \{C_{p,l} T\} \quad (2.6)$$

Dans le FEM classique, il n'y a pas de dispersion en taille et en température (distribution de type Dirac), il n'y a donc localement qu'une seule taille et une seule température de gouttes. Par contre, considérant un ensemble statistique de réalisations de la phase dispersée, une dispersion statistique de la vitesse est prise en compte grâce à la décomposition de la vitesse des gouttes en une partie corrélée et une partie décorrélée :

$$c_{p,i} = u_{l,i}(\vec{x}, t) + \delta c_{p,i}(\vec{x}, t) \quad (2.7)$$

$\delta c_{p,i}$  représente la dispersion du champ de vitesse des particules. On peut définir les quantités moyennes suivantes :

$$\delta R_{p,ij} = \frac{1}{n_l(\vec{x}, t)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \delta c_{p,i} \delta c_{p,j} f_p(t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T) d\vec{c}_p dS dT \quad (2.8)$$

$$\delta \Theta_l = \frac{1}{2n_l(\vec{x}, t)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \delta c_{p,i}^2 f_p(t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T) d\vec{c}_p dS dT \quad (2.9)$$

$$\delta S_{p,ijk} = \frac{1}{n_l(\vec{x}, t)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} \delta c_{p,i} \delta c_{p,j} \delta c_{p,k} f_p(t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T) d\vec{c}_p dS dT \quad (2.10)$$

où  $\delta R_{p,ij}$ ,  $\delta S_{p,ijk}$  et  $\delta \Theta_l$  sont les tenseurs de second et troisième ordre, et l'énergie du mouvement décorrélé. En multipliant l'EWB par une fonction quelconque  $\Psi$  et en intégrant sur tout l'espace des phases, on obtient l'équation de Enskog suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_l \{ \Psi \} + \frac{\partial}{\partial x_j} n_l u_{l,j} \{ \Psi \} &= n_l \left\{ F_{d,j} \frac{\partial \Psi}{\partial c_{p,j}} \right\} + n_l \left\{ E_T \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right\} + n_l \left\{ R_S \frac{\partial \Psi}{\partial S} \right\} \\ &+ n_l \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\} + n_l \left\{ c_{p,j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_j} n_l \{ \delta c_{p,j} \Psi \} \end{aligned} \quad (2.11)$$

En remplaçant  $\Psi$  par 1,  $m_p$ ,  $m_p c_{p,i}$ ,  $m_p \delta c_{p,i} \delta c_{p,i}$ ,  $m_p C_{p,l} T$ , on obtient les équations du FEM :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_l + \frac{\partial}{\partial x_m} n_l u_{l,m} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l u_{l,m} = \dot{m}_p \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l u_{l,i} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l u_{l,i} u_{l,m} = \dot{m}_p u_{l,i} - m_l \{ F_{d,i} \} - \frac{\partial}{\partial x_m} m_l \delta R_{l,im} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l \delta \Theta_l + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l \delta \Theta_l u_{l,m} = \dot{m}_p \delta \Theta_l - m_l \{ F_{d,m} \delta c_{p,m} \} - m_l \delta R_{p,im} \frac{\partial U_{l,i}}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} m_l S_{p,im} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l H_l + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l H_l u_{l,m} = \dot{m}_p H_l + m_l C_{p,l} E_T \quad (2.16)$$

### 2.1.2 Termes sources de traînée

Les termes sources  $-m_l \{ F_{d,i} \}$  et  $-m_l \{ F_{d,m} \delta c_{p,m} \}$  sont évalués avec une loi de type traînée de Stokes :

$$\{ F_{d,i} \} = \left\{ \frac{c_{p,i} - U_{g,i@p}}{\tau_p} \right\} = \frac{U_{l,i} - U_{g,i}}{\tau_p} \quad (2.17)$$

$$\{ F_{d,m} \delta c_{p,m} \} = \left\{ \frac{c_{p,m} - U_{g,m@p}}{\tau_p} \delta c_{p,m} \right\} = \frac{2}{\tau_p} \delta \Theta_l \quad (2.18)$$

où  $U_{g,m@p}$  est la vitesse du gaz à la position de la particule, et où  $\tau_p = \rho_l d^2 / 18 \mu_g (1 + 0.15 Re_d^{0.687})$  et  $Re_d = \sqrt{u_{l,i}^2} d / \nu_g$ .

### 2.1.3 Modèles de fermeture des corrélations doubles et triples en vitesse

Les équations de quantité de mouvement et d'énergie décorrélée font intervenir les tenseurs de deuxième et troisième ordres en vitesse décorrélée. Il est donc nécessaire de définir des fermetures.

## 2.2 Dérivation du Formalisme Eulérien Mésoscopique Multi-fluide

Les détails de ces fermetures sont disponibles dans [Kaufmann et al. \[2004\]](#), [Kaufmann et al. \[2008\]](#) et [Riber \[2007\]](#). Le tenseur  $\delta R_{p,ij}$  est décomposé en une partie sphérique et une partie déviatrice :

$$\delta R_{p,ij} = \frac{\delta R_{p,ii}}{3} \delta_{ij} + \delta R_{p,ij}^* = P_{RUM} \delta_{ij} + \delta R_{p,ij}^* \quad (2.19)$$

où  $P_{RUM} = 2/3 \delta \Theta_l$ . La partie déviatrice est modélisée par une hypothèse de viscosité :

$$\delta R_{p,ij}^* = -\nu_{RUM} \left( \frac{\partial u_{l,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{l,i}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{l,k}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.20)$$

où  $\nu_{RUM} = \tau_p \delta \Theta_l / 3$ . Le tenseur de troisième ordre  $\delta S_{l,ij}$  est quant à lui modélisé avec une hypothèse de type loi de Fick :

$$\delta S_{p,ij} = -\kappa_{RUM} \frac{\partial \delta \Theta_l}{\partial x_j} \quad (2.21)$$

où  $\kappa_{RUM} = 10/27 \tau_p \delta \Theta_l$ . La validation a priori de ces fermetures a été effectuée en Turbulence Homogène Isotrope (THI) par [Moreau \[2006\]](#), et montrait des résultats satisfaisants. Des validations a posteriori ont été effectuées en THI par [Riber \[2007\]](#) et [Roux \[2009\]](#) avec le code AVBP, et ont montré une forte influence de la méthode numérique utilisée sur les résultats. Une validation avec des méthodes numériques mieux adaptées est proposée dans le chapitre 4 ([Vié et al. \[2009\]](#)).

### 2.1.4 Système d'équations final

$$\frac{\partial}{\partial t} n_l + \frac{\partial}{\partial x_m} n_l u_{l,m} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l u_{l,m} = \dot{m}_p \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l u_{l,i} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l u_{l,i} u_{l,m} = \dot{m}_p u_{l,i} - m_l \frac{u_{l,i} - u_{g@l}}{\tau_p} - \frac{\partial}{\partial x_m} m_l \delta R_{p,im} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l \delta \Theta_l + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l \delta \Theta_l u_{l,m} = \dot{m}_p \delta \Theta_l - 2 m_l \frac{\delta \Theta_l}{\tau_p} - m_l \delta R_{p,im} \frac{\partial u_{l,i}}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} m_l \delta S_{p,iim} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l H_l + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l H_l u_{l,m} = \dot{m}_p H_l + m_l C_{p,l} E_T \quad (2.26)$$

## 2.2 Dérivation du Formalisme Eulérien Mésoscopique Multi-fluide

Le FEM ne prend pas en compte la polydispersion en taille des gouttes. Pour prendre en compte cette polydispersion, il est proposé de coupler ce formalisme à l'approche multi-fluide de [Laurent and Massot \[2001\]](#). Considérant que ces deux approches tendent à résoudre deux dimensions différentes de l'espace des phases, la dérivation du Formalisme Eulérien Mésoscopique Multi-fluide (FEMM) ne pose pas de difficulté particulière, même si quelques précautions doivent être prises avec les quantités transportées. Cette idée de conditionner les statistiques de la phase dispersée en fonction de la taille des particules a déjà été explorée par [Massot et al. \[2004\]](#), et est à la base de l'écriture du FEMM.

L'approche multi-fluide se base sur le sectionnement de l'espace des tailles en  $N$  intervalles  $[S_p, S_{p+1}]$  appelés sections d'après **Greenberg et al. [1993]**. On définit la taille moyenne d'une section  $S_m^{(p)}$  :

$$S_m^{(p)} = \frac{S_p + S_{p+1}}{2} \quad (2.27)$$

Pour intégrer l'EWB avec l'hypothèse d'un sectionnement de l'espace des tailles, deux opérateurs de moyenne sont définis :

$$m_l^{(p)}(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S_p}^{S_{p+1}} m_p f_p d\vec{c}_p dT dS \quad (2.28)$$

$$n_l^{(p)}(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S_p}^{S_{p+1}} f_p d\vec{c}_p dT dS \quad (2.29)$$

$$n_l(\vec{x}, t, S) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} f_p d\vec{c}_p dT \quad (2.30)$$

$$\langle \Psi \rangle^{(p)} = \frac{1}{m_l^{(p)}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S_p}^{S_{p+1}} m_p \Psi f_p d\vec{c}_p dT dS \quad (2.31)$$

$$\{\Psi\}^{(p)} = \frac{1}{n_l^{(p)}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S_p}^{S_{p+1}} \Psi f_p d\vec{c}_p dT dS \quad (2.32)$$

où l'exposant  $(p)$  désigne des quantités intégrées sur la section  $p$ .

La décomposition des vitesses en parties corrélée et décorrélée est faite avec l'opérateur de moyenne massique :

$$U_{l,i}^{(p)} = \langle c_{p,i} \rangle^{(p)} = \frac{1}{m_l^{(p)}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S_p}^{S_{p+1}} \frac{\rho_l S^{3/2}}{6\sqrt{\pi}} c_{p,i} f_p d\vec{c}_p dT dS \quad (2.33)$$

$$\delta c_{p,i}^{(p)}(\vec{x}, t, S) = c_{p,i} - \langle c_{p,i} \rangle^{(p)} = c_{p,i} - U_{l,i}^{(p)} \quad (2.34)$$

$$\langle \delta c_{p,i}^{(p)}(\vec{x}, t, S) \rangle^{(p)} = 0 \quad (2.35)$$

Elle permet de définir des tenseurs similaires à ceux du FEM monodisperse mais obtenus par moyenne massique :

$$\begin{aligned} \delta R_{l,ij}^{(p)}(\vec{x}, t, S) &= \langle \delta c_{p,i}^{(p)} \delta c_{p,j}^{(p)} \rangle^{(p)} \\ \delta \Theta_l^{(p)}(\vec{x}, t, S) &= \delta R_{l,ii}^{(p)}(\vec{x}, t, S) / 2 \\ \delta S_{l,ijk}^{(p)}(\vec{x}, t, S) &= \langle \delta c_{p,i}^{(p)} \delta c_{p,j}^{(p)} \delta c_{p,k}^{(p)} \rangle^{(p)} \end{aligned}$$

En multipliant l'EWB par une fonction  $\Psi$  quelconque, et en intégrant massiquement sur les vitesses, les températures et les tailles, l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} \langle \Psi \rangle^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_j} m_l^{(p)} u_{l,j}^{(p)} \langle \Psi \rangle^{(p)} &= m_l^{(p)} \langle F_{d,j} \frac{\partial \Psi}{\partial c_{p,j}} \rangle^{(p)} + m_l^{(p)} \langle E_T \frac{\partial \Psi}{\partial T} \rangle^{(p)} \\ &+ m_l^{(p)} \langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle^{(p)} + m_l^{(p)} \langle c_{p,j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \rangle^{(p)} - \frac{\partial}{\partial x_j} m_l^{(p)} \langle \delta c_{p,j} \Psi \rangle^{(p)} \\ &- \left[ R_S m_p \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \Psi f_p d\vec{c}_p dT \right]_{S_p}^{S_{p+1}} + n_l^{(p)} \left\{ R_S \frac{\partial}{\partial S} (m_p \Psi) \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Les termes d'évaporation sont regroupés et seront explicités séparément :

$$E^{(p)}(\Psi) = - \left[ R_S m_p \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \Psi f_p d\vec{c}_p dT \right]_{S_p}^{S_{p+1}} + n_l^{(p)} \left\{ R_S \frac{\partial}{\partial S} (m_p \Psi) \right\}^{(p)} \quad (2.37)$$

En remplaçant  $\Psi$  par  $1/m_p$ ,  $1$ ,  $c_{p,i}$ ,  $\delta c_{p,i}^{(p)}$  et  $C_{p,l}T$ , on obtient le système multi-fluide suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} n_l^{(p)} u_{l,m}^{(p)} = -E^{(p)} \left( \frac{1}{m_p} \right) - \frac{\partial}{\partial x_m} n_l^{(p)} \left\{ \delta c_{l,m}^{(p)} \right\}^{(p)} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} u_{l,m}^{(p)} = E^{(p)}(1) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} u_{l,i}^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} u_{l,i}^{(p)} u_{l,m}^{(p)} = E^{(p)}(c_{p,i}) - m_l^{(p)} \langle F_{d,i} \rangle^{(p)} - \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} \delta R_{l,im}^{(p)} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} \delta \Theta_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} \delta \Theta_l^{(p)} u_{l,m}^{(p)} &= E^{(p)}(\delta \Theta_l^{(p)}) - m_l^{(p)} \langle F_{d,m} \delta c_{p,m} \rangle^{(p)} \\ &\quad - m_l^{(p)} \delta R_{p,im}^{(p)} \frac{\partial U_{l,i}^{(p)}}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} \delta S_{p,iim} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} H_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} H_l^{(p)} u_{l,m}^{(p)} = E^{(p)}(h_l) + m_l^{(p)} C_{p,l} E_T^{(p)} \quad (2.42)$$

### 2.2.1 Termes sources de traînée

Pour le FEMM, les termes sources  $-m_l^{(p)} \langle F_{d,i} \rangle$  et  $-m_l^{(p)} \langle F_{d,m} \delta c_{p,m} \rangle$  font intervenir des corrélations taille/vitesse et sont approchés avec les expressions suivantes :

$$\langle F_{d,i} \rangle^{(p)} = \left\langle \frac{c_{p,i} - U_{g,i@l}}{\tau_p} \right\rangle^{(p)} \approx \frac{U_{l,i}^{(p)} - U_{g,i@l}}{\tau_p^{(p)}} \quad (2.43)$$

$$\langle F_{d,i} \delta c_{p,m} \rangle^{(p)} = \left\langle \frac{c_{p,i} - U_{g,i@l}}{\tau_p} \delta c_{p,m} \right\rangle^{(p)} \approx \frac{2}{\tau_p^{(p)}} \delta \Theta_l^{(p)} \quad (2.44)$$

où  $\tau_p^{(p)} = \rho_l S_m^{(p)} / 18\pi\mu_g \left( 1 + 0.15 Re_d^{(p)0.687} \right)$  et  $Re_d = \sqrt{(u_{l,i}^{(p)})^2} \sqrt{S_m^{(p)}} / \sqrt{\pi} v_g$ .

### 2.2.2 Modèles de fermeture des corrélations doubles et triples en vitesse

Considérant que, du point de vue de l'espace physique, chaque section se comporte comme une phase eulérienne équivalente à celle du FEM, les mêmes fermetures sont utilisées pour le FEMM :

$$\delta R_{p,ij}^{(p)} = \frac{\delta R_{p,ii}^{(p)}}{3} \delta_{ij} + \delta R_{p,ij}^{(p)*} = P_{RUM}^{(p)} \delta_{ij} + \delta R_{p,ij}^{(p)*} \quad (2.45)$$

où  $P_{RUM}^{(p)} = 2/3 \delta \Theta_l^{(p)}$ . La partie déviatrice est modélisée par une hypothèse de viscosité :

$$\delta R_{p,ij}^{(p)*} = -\nu_{RUM}^{(p)} \left( \frac{\partial u_{l,i}^{(p)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{l,i}^{(p)}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_{l,k}^{(p)}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.46)$$

où  $v_{RUM}^{(p)} = \tau_p^{(p)} \delta \Theta_l^{(p)} / 3$ . Le tenseur de troisième ordre  $\delta S_{l,ij}^{(p)}$  est quant à lui modélisé avec une hypothèse de type loi de Fick :

$$\delta S_{p,ij}^{(p)} = -\kappa_{RUM}^{(p)} \frac{\partial \delta \Theta_l^{(p)}}{\partial x_j} \quad (2.47)$$

où  $\kappa_{RUM}^{(p)} = 10/27 \tau_p^{(p)} \delta \Theta_l^{(p)}$ .

### 2.2.3 Termes sources d'évaporation

Une nouvelle moyenne est définie :

$$\{\Psi\}^S = \frac{1}{n_l(S)} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \Psi f_p d\vec{c}_p dT \quad (2.48)$$

Elle permet d'écrire  $E^{(p)}(\Psi)$  sous la forme suivante si  $\Psi$  ne dépend pas de  $S$  :

$$E^{(p)}(\Psi) = - \left[ R_S m_p n_l(S) \{\Psi\}^S \right]_{S_p}^{S_{p+1}} + \int_{S_p}^{S_{p+1}} R_S n_l(S) \{\Psi\}^S \frac{\partial}{\partial S} (m_p) dS \quad (2.49)$$

La fermeture des termes sources d'évaporation  $E^{(p)}(\Psi)$  nécessite donc de connaître la valeur du nombre de gouttes et de  $\Psi$  en tout point de l'espace des tailles.

On définit les moments en taille de chaque section :

$$M^k = \int_{S_p}^{S_{p+1}} S^k n_l(S) dS \quad (2.50)$$

Tout l'enjeu de l'approche multi-fluide repose dans le choix d'une reconstruction de la fdp en taille  $n_l(S)$ . Cette reconstruction est faite à partir des moments qui sont transportés. Le nombre de paramètres de la reconstruction définit le nombre de moments à transporter, et il définit aussi (voire surtout) les propriétés numériques de la méthode. On traitera ici des méthodes d'ordre 1 (un moment en taille transporté) et d'ordre 2 (deux moments en taille transportés). Un deuxième enjeu de l'approche multi-fluide est la méthode utilisée pour traiter le transport dans l'espace des tailles. Pour une méthode d'ordre 1, une approche de type volumes finis classique suffit. Pour les méthodes d'ordre 2, un schéma de type cinétique doit être utilisé (Bouchut et al. [2003], de Chaisemartin [2009]). Ce type de schéma se base sur le transport exact au niveau cinétique de la fdp reconstruite.

#### Approche Multi-fluide d'ordre 1

Un seul moment en taille est transporté. La reconstruction de  $n_l(S)$  se fait donc avec une fonction à un paramètre. Le choix du moment à transporter et de la forme de la reconstruction est discuté dans Laurent [2006]. Il s'avère que le plus intéressant est le moment 3/2, étant donné qu'il représente la masse. Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que les vitesses corrélée et décorrélée et la température ne varient pas

dans chaque section :

$$\{c_{p,i}\}^S = \langle c_{p,i} \rangle^{(p)} = U_{l,i}^p \quad (2.51)$$

$$\{\delta c_{p,i} \delta c_{p,i}\}^S = \langle \delta c_{p,i} \delta c_{p,i} \rangle^{(p)} = \Theta_l^p \quad (2.52)$$

$$\{C_{p,i} T\}^S = \langle C_{p,i} T \rangle^{(p)} = H_l^p \quad (2.53)$$

La reconstruction à un paramètre est choisie comme une fonction constante du rayon :  $n_l(R) = \text{cte}$  (de Chaisemartin [2009]). Considérant que :

$$n_l^{(p)} = \int_{S_p}^{S_{p+1}} n_l(S) dS = \int_{R_p}^{R_{p+1}} n_l(R) dR \Rightarrow n_l(S) dS = n_l(R) dR \quad (2.54)$$

on obtient :

$$n_l(S) = n_l(R) \frac{dR}{dS} = n_l(R) \frac{d\left(\frac{S}{4\pi}\right)^{1/2}}{dS} = \frac{n_l(R)}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{S}} \quad (2.55)$$

Sachant que :

$$m_l^{(p)} = \int_{R_p}^{R_{p+1}} \rho_l \frac{4\pi R^3}{3} n_l(R) dR \quad (2.56)$$

on a :

$$n_l(R) = m_l^{(p)} \frac{48\pi}{\rho_l (S_{p+1}^2 - S_p^2)} = \text{cte} \quad (2.57)$$

Finalement :

$$n_l(S) = \frac{12\sqrt{\pi}}{\rho_l (S_{p+1}^2 - S_p^2)} \frac{m_l^{(p)}}{\sqrt{S}} \quad (2.58)$$

Les flux d'évaporation peuvent maintenant être explicités :

$$E^{(p)}(\Psi) = - \left[ R_S m_p n_l(S) \{\Psi\}^S \right]_{S_p}^{S_{p+1}} + \int_{S_p}^{S_{p+1}} R_S n_l(S) \{\Psi\}^S \frac{\partial}{\partial S} (m_p) dS \quad (2.59)$$

$$= \frac{2S_{p+1}}{S_{p+2}^2 - S_{p+1}^2} R_S m_l^{(p+1)} \langle \Psi \rangle - \frac{2S_p}{S_{p+1}^2 - S_p^2} R_S m_l^{(p)} \langle \Psi \rangle - \frac{3}{S_{p+1} + S_p} R_S m_l^{(p)} \langle \Psi \rangle \quad (2.60)$$

$$E^{(p)}(\Psi) = E_1^{(p+1)} m_l^{(p+1)} \langle \Psi \rangle - E_1^{(p)} m_l^{(p)} \langle \Psi \rangle - E_2^{(p)} m_l^{(p)} \langle \Psi \rangle \quad (2.61)$$

où  $E_1^{(p)} = 2R_S S_p / (S_{p+1}^2 - S_p^2)$  et  $E_2^{(p)} = 3R_S / (S_{p+1} + S_p)$ . Les termes  $E_1^{(p)}$  représente les échanges de la quantité  $\Psi$  entre sections, alors que les termes  $E_2^{(p)}$  représente l'échange avec le gaz.

### Approches Multi-fluides d'ordre 2

On utilise deux moments pour reconstruire la fdp, ce qui augmente nettement la précision. Deux types de reconstruction existent dans la littérature : l'approche exponentielle de Dufour and Villedieu [2005] et l'approche linéaire de Laurent [2006]. L'approche exponentielle utilise la forme suivante :

$$n_l(S) = A \cdot \exp(-B \cdot S) \quad (2.62)$$

et l'approche linéaire utilise celle-ci :

$$n_l(S) = A.S + B \quad (2.63)$$

Ces deux reconstructions font appel à deux paramètres ( $A$  et  $B$ ), et nécessitent donc deux moments pour les fermer.

Pour la méthode exponentielle, les deux moments utilisés sont la densité de nombre de gouttes et la masse. La reconstruction doit donc vérifier :

$$n_l^{(p)} = \int_{S_p}^{S_{p+1}} A.exp(-B.S)dS \quad (2.64)$$

$$m_l^{(p)} = \int_{S_p}^{S_{p+1}} m_p.A.exp(-B.S)dS \quad (2.65)$$

On obtient un système non-linéaire à 2 équations et 2 inconnues ( $A$  et  $B$ ), dont la résolution fait appel à des méthodes itératives très coûteuses en temps de calcul. Cependant la reconstruction exponentielle est définie positive, ce qui est un avantage considérable pour représenter des moments qui sont physiquement toujours positifs.

Pour la méthode linéaire, les deux moments utilisés sont la densité de nombre de gouttes et la surface. La reconstruction doit vérifier :

$$n_l^{(p)} = \int_{S_p}^{S_{p+1}} (A.S + B) dS \quad (2.66)$$

$$S_l^{(p)} = \int_{S_p}^{S_{p+1}} S.(A.S + B) dS \quad (2.67)$$

On obtient un système à 2 équations et 2 inconnues, qui peut être résolu de manière directe. L'inconvénient est que cette reconstruction n'est pas définie positive, et il faut prendre des précautions particulières pour que la méthode d'évaporation reste positive (Laurent [2006]).

Pour tenter de lever les limitations des méthodes d'ordre 2 existantes, une troisième reconstruction de second ordre est proposée ici :

$$n_l(S) = A(S + B)^2 \quad (2.68)$$

Cette reconstruction a l'avantage d'être définie positive, comme la méthode exponentielle. On utilise les mêmes moments que la reconstruction linéaire :

$$n_l^{(p)} = \int_{S_p}^{S_{p+1}} A(S + B)^2 dS = A \left[ \frac{1}{3} (S_{p+1}^3 - S_p^3) + B (S_{p+1}^2 - S_p^2) + B^2 (S_{p+1} - S_p) \right] \quad (2.69)$$

$$S_l^{(p)} = \int_{S_p}^{S_{p+1}} S.A(S + B)^2 dS = A \left[ \frac{1}{4} (S_{p+1}^4 - S_p^4) + \frac{2B}{3} (S_{p+1}^3 - S_p^3) + \frac{B^2}{2} (S_{p+1}^2 - S_p^2) \right] \quad (2.70)$$

En définissant le rapport surface sur densité de nombre de gouttes :

$$\frac{S_l^{(p)}}{n_l^{(p)}} = \frac{\frac{1}{4} (S_{p+1}^4 - S_p^4) + \frac{2B}{3} (S_{p+1}^3 - S_p^3) + \frac{B^2}{2} (S_{p+1}^2 - S_p^2)}{\frac{1}{3} (S_{p+1}^3 - S_p^3) + B (S_{p+1}^2 - S_p^2) + B^2 (S_{p+1} - S_p)} \quad (2.71)$$

on peut écrire l'équation du deuxième ordre permettant de trouver le paramètre  $B$  :

$$C_1 \cdot B^2 + C_2 \cdot B + C_3 = 0 \quad (2.72)$$

avec :

$$C_1 = \frac{S_l^{(p)}}{n_l^{(p)}} (S_{p+1} - S_p) - \frac{S_{p+1}^2 - S_p^2}{2} \quad (2.73)$$

$$C_2 = \frac{S_l^{(p)}}{n_l^{(p)}} (S_{p+1}^2 - S_p^2) - 2 \frac{S_{p+1}^3 - S_p^3}{3} \quad (2.74)$$

$$C_3 = \frac{S_l^{(p)}}{n_l^{(p)}} \left( \frac{S_{p+1}^3 - S_p^3}{3} \right) - \frac{S_{p+1}^4 - S_p^4}{4} \quad (2.75)$$

Le paramètre est alors immédiatement calculable. L'équation quadratique Eq. 2.72 peut admettre 0, 1 ou 2 solutions. Dans le cas où elle n'a pas de solution, on bascule sur une reconstruction d'ordre 1. Si il y a une ou deux solutions, on impose à la reconstruction d'être monotone sur chaque section, ce qui laisse au maximum une seule solution (si aucune solution ne remplit ce critère on revient à l'ordre 1). L'avantage de cette reconstruction est qu'elle est positive comme la méthode exponentielle, et que les paramètres sont calculés de manière directe comme la méthode linéaire. Cependant quelques inconvénients demeurent : cette méthode n'est pas une perturbation de l'ordre 1 (annuler  $B$  ne suffit pas pour revenir à l'ordre 1, alors que c'est le cas pour les méthodes linéaires et exponentielles), et n'est pas bijective (un couple de moments peut conduire à deux reconstructions différentes, sans le critère de monotonie par section).

## 2.2.4 Système d'équations final

Dans le cadre des calculs effectués ici avec AVBP, on utilisera uniquement la méthode multi-fluide d'ordre 1 (même si d'autres méthodes intégrées dans d'autres codes seront utilisées pour les comparaisons sur cas tests canoniques). Le système final d'équations en résultant est le suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} u_{l,m}^{(p)} = - \left( E_1^{(p)} + E_2^{(p)} \right) m_l^{(p)} + E_1^{(p+1)} m_l^{(p+1)} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} u_{l,i}^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} u_{l,i}^{(p)} u_{l,m}^{(p)} &= - \left( E_1^{(p)} + E_2^{(p)} \right) m_l^{(p)} u_{l,i}^{(p)} + E_1^{(p+1)} m_l^{(p+1)} u_{l,i}^{(p+1)} \\ &\quad - m_l^{(p)} \frac{u_{l,i}^{(p)} - u_{g@l}}{\tau_p^{(p)}} - \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} \delta R_{l,im}^{(p)} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} \delta \Theta_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} \delta \Theta_l^{(p)} u_{l,m}^{(p)} &= - \left( E_1^{(p)} + E_2^{(p)} \right) m_l^{(p)} \delta \Theta_l^{(p)} + E_1^{(p+1)} m_l^{(p+1)} \delta \Theta_l^{(p+1)} \\ &\quad - \frac{2m_l^{(p)} \delta \Theta_l^{(p)}}{\tau_p^{(p)}} - m_l^{(p)} \delta R_{p,im}^{(p)} \frac{\partial U_{l,i}^{(p)}}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} \delta S_{p,iiim} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m_l^{(p)} H_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l^{(p)} H_l^{(p)} u_{l,m}^{(p)} &= - \left( E_1^{(p)} + E_2^{(p)} \right) m_l^{(p)} H_l^{(p)} + E_1^{(p+1)} m_l^{(p+1)} H_l^{(p+1)} \\ &\quad + m_l^{(p)} C_{p,l} E_T^{(p)} \end{aligned} \quad (2.79)$$

## 2.3 Simulation aux Grandes Echelles

Les systèmes d'équations détaillés précédemment sont applicables à une approche de type DNS (Direct Numerical Simulation), au sens où toutes les échelles des phases gazeuse et liquide sont simulées. Le calcul de toutes ces échelles est concevable pour des applications simples et/ou à faible Reynolds, où les échelles minimales et l'étendue du spectre sont faibles. Pour des calculs plus complexes, avec de grandes disparités d'échelles, on ne peut résoudre tout le spectre. On utilise donc pour cela la Simulation aux Grandes Echelles (SGE), qui permet de s'affranchir de la résolution complète des plus petites échelles de l'écoulement.

La base de la SGE est le filtrage des équations DNS. Le filtre permet de définir des équations qui sont des moyennes spatiales. On applique aux quantités transportées un filtre spatial conditionné par la masse (moyenne de Favre) ou un filtre spatial non conditionné (moyenne de Reynolds) :

$$\bar{m}_\Phi \widehat{f_\Phi}(\vec{x}) = \int_{\Delta_f} m_\Phi f_\Phi(\vec{x}') G_{\Delta_f}(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (2.80)$$

$$\bar{f}_\Phi(\vec{x}) = \int_{\Delta_f} f_\Phi(\vec{x}') G_{\Delta_f}(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (2.81)$$

où  $\Phi$  est la phase considérée (l pour liquide, g pour gaz),  $\Delta_f$  la taille du filtre et  $G_{\Delta_f}$  l'opérateur du filtre. Du point de vue spectral, ce filtrage impose une fréquence de coupure sur la physique qui sera résolue

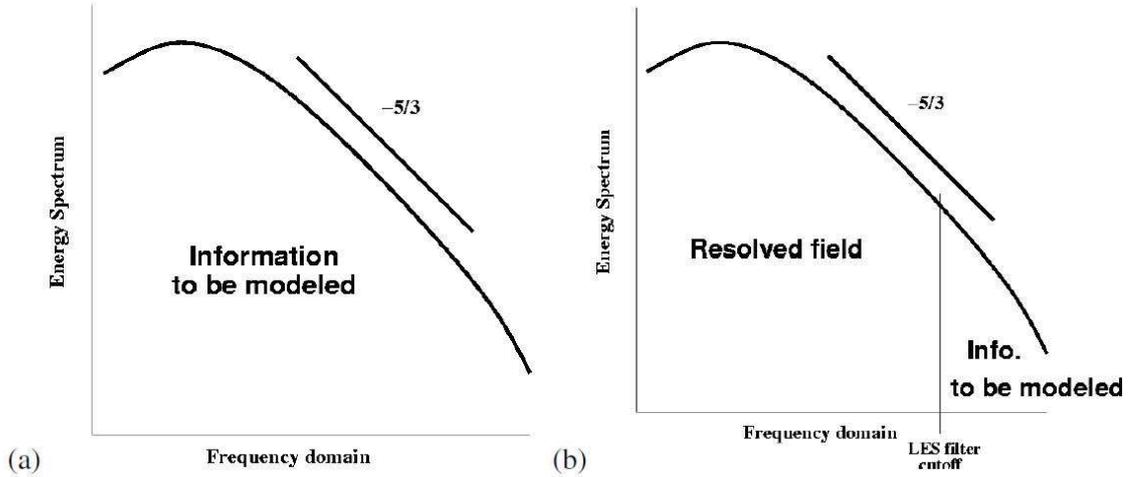


FIGURE 2.1 – Représentation de l’effort de modélisation en RANS (a) et en LES (b) sur un spectre d’énergie en fonction de la fréquence.

(figure 2.1). Deux différences fondamentales ressortent de ce filtrage, en comparaison à la méthode RANS : la méthode LES modélise une plus faible partie du spectre turbulent, et elle ne fait pas de moyenne en temps (pas de filtrage sur un ensemble de réalisations).

### 2.3.1 Equations filtrées du FEM

L’extension à la SGE du FEM a été étudiée par Moreau [2006], Moreau et al. [2010], Riber et al. [2006] et Riber [2007]. Le système d’équation résultant du filtrage spatial est le suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{n}_l + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{n}_l \hat{u}_{l,m} = 0 \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_l + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l \hat{u}_{l,m} = \dot{m}_{evap} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_l \hat{u}_{l,i} + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l \hat{u}_{l,i} \hat{u}_{l,m} = \dot{m}_{evap} \hat{u}_{l,i} - \bar{m}_l \frac{\hat{u}_{l,i} - \hat{u}_{g,i}}{\tau_p} - \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l \hat{\delta R}_{l,im} - \frac{\partial}{\partial x_m} T_{l,im} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_l \hat{\delta \Theta}_l + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l \hat{\delta \Theta}_l \hat{u}_{l,m} &= \dot{m}_{evap} \hat{\delta \Theta}_l - 2 \frac{\bar{m}_l}{\tau_p} \hat{\delta \Theta}_l - \bar{m}_l \hat{\delta R}_{p,im} \frac{\partial \hat{u}_{l,i}}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l \hat{\delta S}_{p,iim} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} Q_{p,m} + \Pi_{\delta \Theta_l} \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_l \hat{H}_l + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l \hat{H}_l \hat{u}_{l,m} = \dot{m}_{evap} \hat{H}_l + \bar{m}_l C_{p,l} \hat{E}_T \quad (2.86)$$

On considère que les fermetures proposées pour les termes décorrélés filtrés dans le FEM classique

restent valables pour le FEM en LES. Il reste donc à modéliser 3 termes :

$$T_{l,ij} = \bar{m}_l (\widehat{u_{l,i}u_{l,j}} - \widehat{u_{l,i}}\widehat{u_{l,j}}) \quad (2.87)$$

$$\Pi_{\delta\Theta_l} = \bar{m}_l \left( \widehat{\delta R_{p,im} \frac{\partial u_{l,i}}{\partial x_m}} - \widehat{\delta R_{p,im}} \frac{\partial \widehat{u_{l,i}}}{\partial x_m} \right) \quad (2.88)$$

$$Q_{l,j} = \bar{m}_l (\widehat{u_{l,i}\delta\Theta_l} - \widehat{u_{l,i}}\widehat{\delta\Theta_l}) \quad (2.89)$$

Moreau [2006], Moreau et al. [2010] ont proposé un modèle pour  $T_{l,ij}$  basé sur le modèle de Smagorinsky compressible (Smagorinsky [1963]) et le modèle de Yoshizawa (Yoshizawa [1986]) :

$$T_{l,ij} = -C_s^2 \Delta_f^2 \bar{m}_l |\hat{S}_l| \left( \hat{S}_{l,ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \hat{S}_{l,kk} \right) + C_l^2 \Delta_f^2 \bar{m}_l |\hat{S}_l|^2 \delta_{ij} \quad (2.90)$$

où  $S_{l,ij} = \frac{\partial u_{l,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{l,j}}{\partial x_i}$  est le tenseur de cisaillement. Le terme  $Q_{p,j}$  de diffusion du mouvement décorréolé n'est pas modélisé (Moreau [2006], Riber [2007]). Et le terme de production de sous-maille de RUE filtré  $\Pi_{\delta\Theta_l}$  est modélisé en considérant que toute l'énergie de sous-maille produite par le mouvement corrélé est intégralement transférée en énergie décorréolée :

$$\Pi_{\delta\Theta_l} \approx -T_{l,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \widehat{u_{l,i}} \quad (2.91)$$

### 2.3.2 Equations filtrées du FEMM

Etant donné que le filtrage LES agit sur l'espace physique, et que le FEM et le FEMM sont identiques du point de vue de l'espace physique, on utilisera les mêmes méthodes de filtrage pour le FEMM en LES :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{u_{l,m}^{(p)}} = - \left( E_1^{(p)} + E_2^{(p)} \right) \bar{m}_l^{(p)} + E_1^{(p+1)} \bar{m}_l^{(p+1)} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{u_{l,i}^{(p)}} + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{u_{l,i}^{(p)}} \widehat{u_{l,m}^{(p)}} &= - \left( E_1^{(p)} + E_2^{(p)} \right) \bar{m}_l^{(p)} \widehat{u_{l,i}^{(p)}} + E_1^{(p+1)} \bar{m}_l^{(p+1)} \widehat{u_{l,i}^{(p+1)}} \\ &\quad - \bar{m}_l^{(p)} \frac{\widehat{u_{l,i}^{(p)}} - \widehat{u_{g@l}}}{\tau_p^{(p)}} - \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{\delta R_{l,im}^{(p)}} - \frac{\partial}{\partial x_m} T_{l,im}^{(p)} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{\delta\Theta_l^{(p)}} + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{\delta\Theta_l^{(p)}} \widehat{u_{l,m}^{(p)}} &= - \left( E_1^{(p)} + E_2^{(p)} \right) \bar{m}_l^{(p)} \widehat{\delta\Theta_l^{(p)}} + E_1^{(p+1)} \bar{m}_l^{(p+1)} \widehat{\delta\Theta_l^{(p+1)}} \\ &\quad - \frac{2\bar{m}_l^{(p)} \widehat{\delta\Theta_l^{(p)}}}{\tau_p^{(p)}} - \bar{m}_l^{(p)} \widehat{\delta R_{p,im}^{(p)}} \frac{\partial U_{l,i}^{(p)}}{\partial x_m} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{\delta S_{p,iim}^{(p)}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} \widehat{Q_{p,m}^{(p)}} + \Pi_{\delta\Theta_l}^{(p)} \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{H}_l^{(p)} + \frac{\partial}{\partial x_m} \bar{m}_l^{(p)} \widehat{H}_l^{(p)} \widehat{u_{l,m}^{(p)}} &= - \left( E_1^{(p)} + E_2^{(p)} \right) \bar{m}_l^{(p)} \widehat{H}_l^{(p)} + E_1^{(p+1)} \bar{m}_l^{(p+1)} \widehat{H}_l^{(p+1)} \\ &\quad + \bar{m}_l^{(p)} C_{p,l} E_T^{(p)} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Comme pour le FEM en LES, les termes de sous-maille sont :

$$T_{l,ij}^{(p)} = \bar{m}_l^{(p)} \left( \widehat{u_{l,i}^{(p)} u_{l,j}^{(p)}} - \widehat{u_{l,i}^{(p)}} \widehat{u_{l,j}^{(p)}} \right) \quad (2.96)$$

$$\Pi_{\delta\Theta_l}^{(p)} = \bar{m}_l^{(p)} \left( \widehat{\delta R_{p,im}^{(p)} \frac{\partial u_{l,i}^{(p)}}{\partial x_m}} - \widehat{\delta R_{p,im}^{(p)}} \frac{\partial \widehat{u_{l,i}^{(p)}}}{\partial x_m} \right) \quad (2.97)$$

$$Q_{l,j}^{(p)} = \bar{m}_l^{(p)} \left( \widehat{u_{l,i}^{(p)} \delta\Theta_l} - \widehat{u_{l,i}^{(p)}} \widehat{\delta\Theta_l} \right) \quad (2.98)$$

et sont modélisés comme précédemment :

$$\begin{aligned} T_{l,ij}^{(p)} &= -C_s^2 \Delta_f^2 \bar{m}_l^{(p)} |\hat{S}_l^{(p)}| \left( \hat{S}_{l,ij}^{(p)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \hat{S}_{l,kk}^{(p)} \right) + C_l^2 \Delta_f^2 \bar{m}_l^{(p)} |\hat{S}_l^{(p)}|^2 \delta_{ij} \\ &= -\nu_{TURB,1pf}^{(p)} \left( \hat{S}_{l,ij}^{(p)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \hat{S}_{l,kk}^{(p)} \right) + P_{TURB,1pf}^{(p)} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$\Pi_{\delta\Theta_l}^{(p)} = -T_{l,ij}^{(p)} \frac{\partial}{\partial x_j} \widehat{u_{l,i}^{(p)}} \quad (2.100)$$

$$Q_{l,j}^{(p)} = 0 \quad (2.101)$$

avec où  $S_{l,ij}^{(p)} = \frac{\partial u_{l,i}^{(p)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{l,j}^{(p)}}{\partial x_i}$

### 2.3.3 Equations filtrées de la phase gazeuse

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_g + \frac{\partial}{\partial x_m} \rho_g \widehat{u_{g,m}} = S_{m_l} \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_g \widehat{u_{g,i}} + \frac{\partial}{\partial x_m} \rho_g \widehat{u_{g,i}} \widehat{u_{g,m}} = -\frac{\partial \widehat{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_m} \rho_g \nu_g \widehat{D_{g,im}} + \frac{\partial}{\partial x_m} T_{g,ij} + S_{m_l u_i} \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_g \widehat{E_g} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\rho_g \widehat{E_g} + \widehat{P}) \widehat{u_{g,m}} = -\frac{\partial}{\partial x_m} \rho_g \nu_g \widehat{D_{g,im}} \widehat{u_{g,i}} + \frac{\partial}{\partial x_m} \overline{Q_{g,ij}} + S_{m_l E_g} \quad (2.104)$$

où  $\rho_g$ ,  $u_{g,i}$  et  $E_g$  sont la densité, la vitesse et l'énergie totale non chimique du gaz. La viscosité du tenseur terme de sous-maille  $T_{g,ij} = 2\nu_t \bar{S}_{ij}$  est modélisé avec le modèle WALE de [Nicoud and Ducros \[1999\]](#) :

$$\nu_t = (C_w \Delta_f)^2 \frac{\left( S_{ij}^d S_{ij}^d \right)^{3/2}}{\left( \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \right)^{5/2} + \left( S_{ij}^d S_{ij}^d \right)^{5/4}} \quad (2.105)$$

avec :

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij}^2 + \bar{g}_{ij}^2) - \frac{1}{2} \bar{g}_{kk}^2 \quad (2.106)$$

$$\bar{g}_{ij}^2 = \bar{g}_{ik} \bar{g}_{kj} \quad (2.107)$$

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (2.108)$$

$C_w$  est ici fixée à 0.4929.

Les termes  $S_{\Phi}$  sont les termes sources venant du liquide. Pour le FEM, ces termes sources sont :

$$S_{m_l} = -\dot{m}_p \quad (2.109)$$

$$S_{m_l u_{l,i}} = -\dot{m}_p \hat{u}_{l,i} + \bar{m}_l \frac{\hat{u}_{l,i} - \hat{u}_{g,i}}{\tau_p} \quad (2.110)$$

$$S_{m_l E_g} = -\dot{m}_p \hat{H}_l - \bar{m}_l C_{p,l} \hat{E}_T + \frac{\bar{m}_l}{\tau_p} (\hat{u}_{l,i} - \hat{u}_{g,i}) \hat{u}_{g,i} \quad (2.111)$$

Pour le FEMM, les termes sources sont :

$$S_{m_l} = \sum_{p=1}^N E_2^{(p)} \bar{m}_l^{(p)} \quad (2.112)$$

$$S_{m_l u_{l,i}} = \sum_{p=1}^N \left( \frac{\bar{m}_l^{(p)}}{\tau_p^{(p)}} (\hat{u}_{l,i}^{(p)} - \hat{u}_{g,i}^{(p)}) + E_2^{(p)} \bar{m}_l^{(p)} \hat{u}_{l,i}^{(p)} \right) \quad (2.113)$$

$$S_{m_l E_g} = + \sum_{p=1}^N \left( E_2^{(p)} \bar{m}_l^{(p)} \hat{u}_{g,i}^{(p)} \hat{u}_{l,i}^{(p)} - \bar{m}_l^{(p)} C_{p,l} E_T^{(p)} + \frac{\bar{m}_l^{(p)}}{\tau_p^{(p)}} (\hat{u}_{l,i}^{(p)} - \hat{u}_{g,i}^{(p)}) \hat{u}_{g,i}^{(p)} \right) \quad (2.114)$$

## 2.4 Discussion générale sur les approches utilisées

### 2.4.1 Prise en compte du two-way coupling

L'influence d'une phase dispersée sur la phase gazeuse a souvent été étudiée sur des cas de Turbulence Homogène Isotrope. [Elgobashi and Truesdell \[1993\]](#), et plus récemment [Ferrante and Elghobashi \[2003\]](#), observent l'effet de la force de traînée d'une phase dispersée sur l'écoulement gazeux. Ils montrent une différence de comportement en fonction du nombre de Stokes. La figure 2.2 montre le spectre d'énergie du champ gazeux en THI, pour différentes caractéristiques de la phase dispersée.

Les particules à nombre de Stokes faible ( $\ll 1$ , cas B) se comportent comme des traceurs. Elles sont piégées par les petites échelles (nombres d'onde élevés). Cependant, en raison de leur forte densité, elles modifient la rhéologie du gaz à ces petites échelles en augmentant la densité effective (comportement de "gaz lourd" ([Saffmann \[1962\]](#))). Cette augmentation conduit à une plus forte dissipation et donc une réduction accélérée de l'énergie des grandes échelles.

Les particules à nombre de Stokes élevé ( $\gg 1$ , cas E) n'interagissent pas avec les petites échelles, en raison de la différence des temps caractéristiques. Cependant la force de traînée induite est à l'origine d'un effort contra-rotatif par rapport au sens des tourbillons (figure 2.3, [Ferrante and Elghobashi \[2003\]](#)) qui conduit à une diminution de leur intensité. Les résultats de [Ferrante and Elghobashi \[2003\]](#) montrent que cet effet de "puits" d'énergie se retrouve principalement aux grandes échelles. Les particules à grand nombre de Stokes interagissent donc avec les grandes échelles de la turbulence.

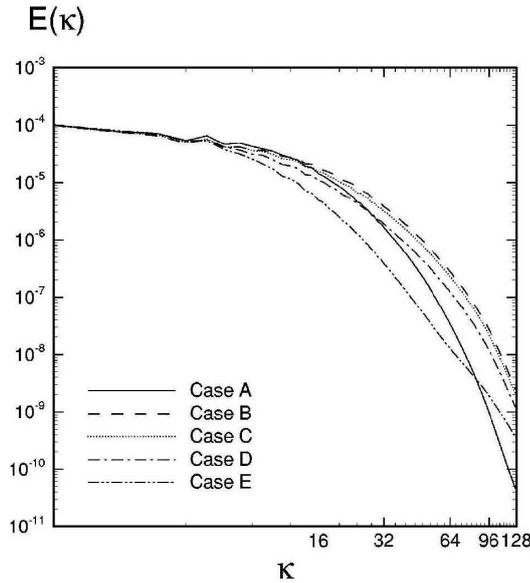


FIGURE 2.2 – Spectre d'énergie de la phase gazeuse pour une THI avec phase dispersée à différents nombre de Stokes (Ferrante and Elghobashi [2003]) : sans particules (A), avec particules à nombre de Stokes 0.1 (B), 0.25 (C), 1.0 (D), et 5.0 (E).

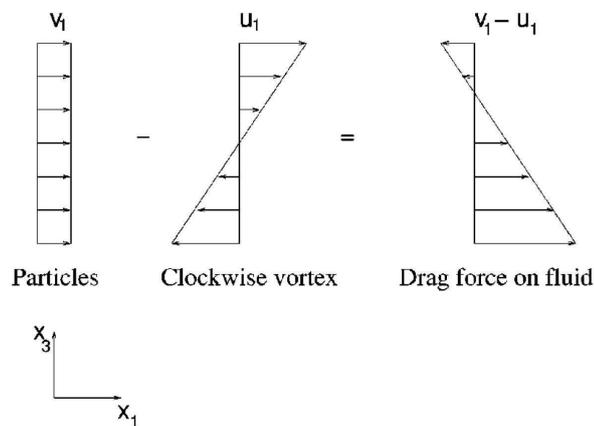


FIGURE 2.3 – Principe de l'effort contra-rotatif exercé par une phase dispersée à fort nombre de Stokes sur une structure tourbillonnaire.

Les particules à nombre de Stokes critique ( $\approx 1$ , cas D) ont un comportement intermédiaire par rapport aux deux cas précédents. En effet, elles ont suffisamment de temps pour interagir avec les petites échelles, en augmentant l'énergie de ces dernières et donc la dissipation. Elles agissent aussi sur les grandes échelles, en raison de l'effort contra-rotatif évoqué précédemment. Les particules interagissent donc avec tout le spectre de la turbulence. Elles sont qualifiées de critique parce qu'elles maximisent l'ef-

fet de concentration préférentielle de la phase dispersée (forte variation de la concentration de gouttes).

Quand on résout toutes les échelles de la turbulence, la question de savoir comment agissent les particules sur la phase gazeuse ne pose de problème particulier, si on "oublie" le problème du conditionnement qui est développé dans la suite. Les interactions entre la phase dispersée et la phase gazeuse se font à toutes les échelles, puisqu'elles sont toutes résolues.

Dans le cadre de calculs LES, la question est plus compliquée. En effet, les petites échelles de la turbulence ne sont pas résolues, et on doit se demander comment appliquer le forçage par traînée. Comme l'analyse de Ferrante and Elghobashi [2003] le montre, les comportements du forçage étant différents selon le nombre de Stokes, une procédure de distribution en fonction du Stokes semble nécessaire.

A faible nombre de Stokes, le transfert direct d'énergie est faible, les particules étant en équilibre avec le gaz. Cependant les particules agissent sur les petites échelles, en augmentant la densité effective du gaz. L'effet du forçage devra donc apparaître dans un terme de sous-maille pour la phase gazeuse, de manière à augmenter la dissipation d'énergie.

A nombre de Stokes critique, les particules interagissent avec tout le spectre de la turbulence. On doit donc prendre en compte l'effet de la traînée sur la quantité de mouvement résolue du gaz, mais aussi sur le mouvement de sous-maille. Ici les particules augmentent l'énergie des petites échelles. La LES introduit un autre nombre de Stokes, associé à l'échelle de coupure. Ce nombre compare le temps de relaxation des particules avec celui de la plus petite échelle résolue de la LES. Si ce nombre est fort, le forçage est effectif sur le mouvement résolu et sur le mouvement de sous-maille. Si ce nombre est faible, seul l'effet sur le mouvement de sous-maille subsiste et sera mixte, à savoir une augmentation de l'énergie des plus petites échelles, et une diminution de l'énergie en s'approchant de l'échelle de coupure. La modélisation de sous-maille devra représenter ces deux effets.

A fort nombre de Stokes, les particules interagissent seulement avec le mouvement de grandes échelles, qui est le mouvement résolu en LES. La modélisation ne fait donc intervenir que des échanges entre le mouvement moyen des phases dispersée et gazeuse.

Les calculs LES effectués dans le cadre de cette thèse, comme dans les travaux précédents (Riber [2007], Lamarque [2007], Vié and Habchi [2008], Martinez et al. [2009], Martinez [2010], Sanjosé [2009], Jaegle [2009], Vié et al. [2010b]), n'incluent qu'un forçage sur les grandes échelles. Cette simplification de la physique réelle conduit à une modification de la distribution locale d'énergie. La question est donc de savoir qu'elle est l'impact et l'importance d'une telle simplification, et nécessiterait une étude plus approfondie, mais ne fait pas partie des objectifs de cette thèse.

## 2.4.2 Problème du conditionnement

Le deuxième point lié au two-way coupling est le problème du conditionnement. La fdp de départ qui permet d'écrire le FEM représente la statistique d'un ensemble de réalisations de la phase dispersée,

conditionnée par une seule réalisation de la phase gazeuse.

Dans l'hypothèse d'une phase dispersée à très faible fraction massique et donc d'un couplage "one-way", cette hypothèse est valide. Mais, dans le cas d'un "two-way coupling", chaque réalisation de la phase dispersée modifie différemment la phase gazeuse, et donc le conditionnement par une réalisation unique de la phase gazeuse n'est plus valide.

Février et al. [2005] suggère qu'une approche de type FEM pour les écoulements fortement chargés est cependant possible si le temps de réponse des particules est du même ordre que celui des grandes échelles de la phase gazeuse. En effet, il est alors possible de tirer avantage du filtrage LES de la phase gazeuse, en conditionnant les statistiques de la phase dispersée non pas sur une réalisation du gaz mais sur une réalisation du gaz filtrée. Comme expliqué à la section précédente, pour de faibles nombres de Stokes, les particules ne modifient pas le champ filtré du gaz, et le conditionnement par une seule phase gazeuse reste donc valide. Une telle approche ne fait cependant plus appel à l'EWB mais une équation de type Fokker-Planck, qui prend en compte l'effet de la turbulence du gaz non-résolue sur l'équation d'évolution de la fdp (voir Reeks [1991] notamment).

### 2.4.3 Validité des fermetures des flux décorrélés

Les fermetures de type viscosité pour le tenseur de second ordre de l'équation de quantité de mouvement ont été déjà validées a priori (Moreau [2006]) et a posteriori (Vié et al. [2009], annexe C) sur des cas tests de turbulence homogène isotrope chargée en particules. Cependant, Riber [2007] avait déjà observé sur le cas de canal de Hishida et al. [1987] que de telles fermetures pouvaient être mal adaptées pour les écoulements cisailés, comme montré également par Reeks [2005]. Les travaux de Masi [2010], Masi et al. [2010] confirment cette tendance. Dans ces travaux, une couche de fluide est chargée en particules et déposée dans une turbulence homogène isotrope (figure 2.4).

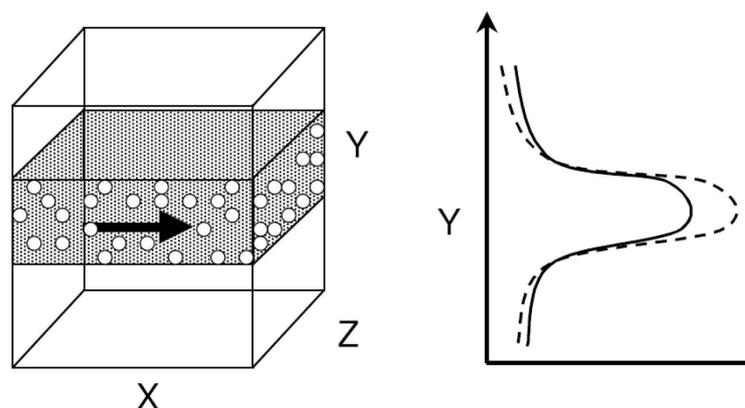


FIGURE 2.4 – Cas test de Masi et al. [2010].

L'objectif de Masi et al. [2010] est d'établir des corrélations pour l'évaluation du tenseur de second

ordre, et de les comparer à des calculs de référence lagrangiens. La figure 2.5 compare les niveaux de dissipation moyenne au travers de la nappe de particules, et la figure 2.6 compare la fdp de dissipation locale à la périphérie de la couche, dans la zone de cisaillement.

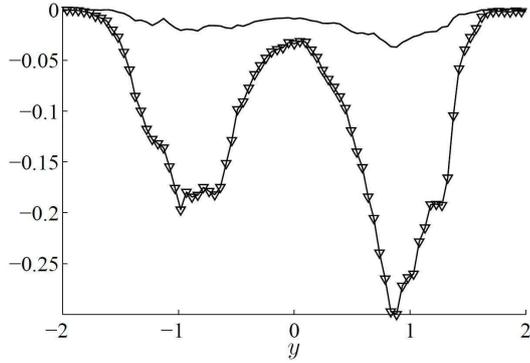


FIGURE 2.5 – Profil exact (ligne continue) et profil modélisé (triangles) de dissipation moyenne à  $St \approx 1$  (Masi et al. [2010]).

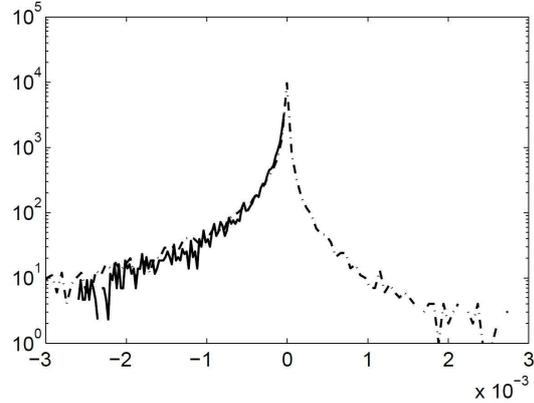


FIGURE 2.6 – Fdp exacte (ligne discontinue) et fdp modélisé (ligne continue) de dissipation locale à  $St \approx 1$  (Masi et al. [2010]).

Deux points importants sont à noter : la dissipation moyenne est largement surestimée en tout point de la nappe, et les zones de dissipation locale négative ne sont pas modélisées. En effet, la figure 2.6 montre que le tenseur de second ordre a aussi un effet anti-diffusif correspondant à un échange du mouvement décorrélié vers le mouvement moyen, ce qui n'est pas reproductible avec le modèle à viscosité utilisé ici. Le travail de Masi [2010] a donc consisté à définir de nouvelles fermetures en prenant en compte d'autres paramètres pour le calcul de la viscosité effective, comme les invariants du tenseur de cisaillement. Elle a proposé ainsi des fermetures permettant de revenir à des niveaux de dissipation moyenne raisonnable, et permettant de résoudre les échanges mouvement moyen - mouvement décorrélié dans les deux sens. Ces travaux nécessiteront certainement d'être intégrés au modèle FEM dans AVBP, même si le traitement de termes anti-diffusifs est un problème délicat.

#### 2.4.4 Flux décorrélié pour les moments en taille des particules dans les approches polydisperses

Dans le FEMM, on a considéré que la vitesse moyenne  $U_{l,i}(x,t,S)$  est constante dans chaque section. Cependant, elle ne l'est pas nécessairement. Il faudrait donc prendre en compte dans le calcul de la vitesse moyenne une distribution de vitesse en fonction de la taille :

$$U_{l,i}^{(p)} = \frac{1}{m_l^{(p)}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S_p}^{S_{p+1}} \frac{\rho_l S^{3/2}}{6\sqrt{\pi}} c_{p,i} f_p d\vec{c}_p dT dS = \frac{1}{m_l^{(p)}} \int_{S_p}^{S_{p+1}} \frac{\rho_l S^{3/2}}{6\sqrt{\pi}} U_{l,i}(x,t,s) n(S) dS \quad (2.115)$$

## 2.4 Discussion générale sur les approches utilisées

---

En pratique, cela reviendrait à faire apparaître dans chaque équation un terme correctif supplémentaire. Ce terme correctif correspond à la convection de chaque moment avec une vitesse résiduelle supplémentaire  $\delta U^{(p)}(\vec{x}, t, S)$  :

$$\delta U^{(p)}(\vec{x}, t, S) = U_{l,i}(\vec{x}, t, S) - U_{l,i}^{(p)}(\vec{x}, t) \quad (2.116)$$

Cependant, la définition de ce terme convectif supplémentaire nécessite de présumer la forme de cette vitesse résiduelle, et n'est pas évidente. De plus, le même problème apparaît sur la définition de la vitesse décorrélée  $\delta c_{p,i}(\vec{x}, t, S)$  qui doit aussi dépendre de la taille. On a donc choisi dans ce travail de se limiter à une approche à une vitesse corrélée et une vitesse décorrélée par section.

