

Université Cheikh Anta Diop de Dakar
Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique

Numéro d'ordre : 99



Thèse de Doctorat Unique
Présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Mention : Mathématiques

Option : Analyse Statistiques et Applications

par

Mouhamadou Aliou Mountaga Tall Baldé

Sous la direction de : **Diaraf Seck**

Co-directeur : **Emmanuel Frénod**

Etudes de problèmes de transport : Erosion côtière et aménagement urbain

A soutenir le **10 Mai 2017**, devant les

membres du jury :

Président :	Idrissa Ly	<i>Professeur UCAD</i>
Examineurs :	Babacar Mbaye Ndiaye	<i>Maître de conférences UCAD</i>
	Abdoulaye Sène	<i>Maître de conférences UCAD</i>
Rapporteurs :	Ibrahima Faye	<i>Maître de conférences UADB, Bambey</i>
	Jean De Dieu Zabsonré	<i>Maître de conférences Univ. Poly : Bobo Dioulasso, Burkina Fasso</i>
	Christophe Berthon	<i>Professeur Univ. Nantes, France</i>
Directeurs de Thèse :	Diaraf Seck	<i>Professeur UCAD</i>
	Emmanuel Frénod	<i>Professeur Univ. Bretagne Sud, France</i>

Année Universitaire : 2016-2017

**Etudes de problèmes de
transport: Erosion côtière et
aménagement urbain**

Mouhamadou Aliou Mountaga Tall Balde

Cette thèse contient dans une partie mes contributions dans le projet ORTRANS financé par l'AUF et le gouvernement du Sénégal avec la bourse de troisième cycle.

Résumé

Dans cette thèse nous nous intéressons à différents problèmes de transport en les abordant par diverses techniques. L'un des problèmes étudiés est celui du transport de dunes de sable sous-marines, que nous modélisons ici en couplant un modèle d'équation parabolique de la dynamique des dunes de sables avec un modèle d'équation hyperbolique vectorielle de la dynamique des océans en milieu peu profond dit en anglais, Shallow Water Equation (SWE). Nous proposons ce couplage ici pour modéliser le phénomène d'érosion côtière. Les équations de transport hyperboliques seront encore étudiées en milieu urbain, avec une version simplifiée, sur un problème de transport routier. Le problème de transport routier est également modélisé par des programmes mathématiques en variables mixtes, et dans ce cas nous nous intéressons en plus du dimensionnement du réseau de transport à la localisation des activités génératrices des flux sur le réseau.

Abstract

In this thesis we are interested in different transport problems by approaching them by various techniques. One of the problems studied is the transport of submarine sand dunes, which we model here by coupling a parabolic equation model of the sand dune dynamics with a model of vectorial hyperbolic equation of ocean dynamics In Shallow Water Equation (SWE). We propose this coupling here to model the phenomenon of coastal erosion. Hyperbolic transport equations will still be studied in urban areas, with a simplified version, on a road transport problem. The problem of road transport is also modeled by mathematical programs in mixed variables, and in this case we are also interested in the dimensioning of the transport network to the location of the activities generating flows on the network.

Remerciements

Je ne saurais réellement trouver les mots adéquats à la hauteur de M. Diaraf Seck, pour le remercier comme il se doit. En effet, en tant que mon directeur de thèse, il n'a jamais ménagé ses efforts pour m'apporter son aide tant dans la thèse que dans la vie privée. Je lui exprime ma gratitude infinie.

Je voudrais remercier M. Emmanuel Frénod, en tant que co-directeur de thèse pour toutes ses suggestions qui ont grandement contribué à l'amélioration de cette thèse.

Je remercie également l'AUF(Agence Universitaire de la Francophonie) pour avoir en partie financé cette thèse. De même je remercie la direction des bourses du Sénégal.

Je voudrais remercier le laboratoire d'Informatique d'Avignon et M. Serigne Guèye de ce laboratoire pour l'accueil et le séjour de trois mois passé à Avignon pour la deuxième partie de la thèse. Des remerciements particuliers à M. Serigne Gueye, pour son soutien et ses nombreuses propositions et corrections qui ont permis d'améliorer cette thèse.

Je ne pourrais omettre de remercier les membres du Laboratoire de Mathématiques de la Décision et d'Analyse Numérique(LMDAN) dans lequel ce travail a été effectué. Les membres de ce laboratoire m'ont apporté un grand soutien.

J'aimerais remercier les membres du jury :

M. Idrissa Ly pour avoir accepté de présider ce jury.

M. Babacar Mbaye Ndiaye, M. Abdoulaye Sène d'avoir accepté de faire partie du jury.

M. Ibrahima Faye, M. Jean De Dieu Zabsonré et M. Christophe Berthon d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je leur exprime ma profonde gratitude.

Je voudrais particulièrement remercier M. Babacar Mbaye Ndiaye pour son soutien sans faille tant dans la thèse que dans la vie privée.

J'aimerais remercier tous les membres de ma famille ainsi que mes amis pour leur soutien sans faille. Je ne pourrais jamais suffisamment remercier mes parents pour m'avoir guidé jusque là.

Table des matières

Introduction générale	13
1 Quelques notions importantes	17
1.1 Inégalités de Sobolev	17
1.2 Convergence à deux échelles	18
1.3 Méthode des volumes finis	19
1.4 Problèmes combinatoires	20
1.4.1 Problèmes et Formulations	20
1.4.2 NP-difficile et polynomiale	20
1.4.3 Les heuristiques et métaheuristiques	21
1.4.3.1 Heuristiques gloutonnes	22
1.4.3.2 Recherche d'un optimum local (Hill Climbing)	22
1.4.3.3 Recherche Taboue	23
1.4.3.4 Le recuit simulé (simulated annealing)	23
1.4.3.5 Algorithme génétique	24
1.5 Plan	24
Bibliographie	24
I Transport de dunes de sable sous marine près des côtes¹	27
2 Introduction et modèle	29
2.1 Introduction	29
2.2 Le système couplé	30
2.2.1 Modèle	30

1. Dans cette partie, nous avons tiré une publication : Coupling the shallow water equation with a long dynamic of sand dunes, Mouhamadou Aliou M.T. Baldé and Diaraf Seck, in Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S), Vol. 9, no. 5, pp 1521-1551, october 2016.

2.2.2	Adimensionnement	32
2.2.3	Taille des paramètres	34
2.2.4	Changement de variable et écriture matricielle	35
2.3	Esquisse d'analyse du système couplé adimensionné	39
2.3.1	Equations de Shallow Water(SWE) adimensionné	39
2.3.2	Equation morphodynamique dans le long terme (LTDD)	45
3	Résultats d'existence et homogénéisation	47
3.1	Etude de régularité et estimation	47
3.2	Existence, unicité et estimation	51
3.3	Preuve du théorème d'existence	54
3.4	Homogénéisation	74
4	Analyse et simulations numériques	79
4.1	Introduction	79
4.2	Schéma de volume fini pour le système SWE-LTDD	80
4.2.1	Schéma de volume fini pour SWE	80
4.2.2	Schéma de volume fini pour LTDD	84
4.2.3	Etude de stabilité	86
4.2.3.1	Stabilité du schéma LTDD	87
4.3	Tests numériques	89
4.3.1	Scénario 1	90
4.3.2	Scénario 2	90
4.3.3	Scénario 3	90
	Conclusion et Perspectives	98
	Bibliographie	99
II	Réseau routier et aménagement urbain	103
5	Equation de transport appliquée au réseau routier	105
5.1	Introduction	105
5.2	modèles macroscopiques	106
5.3	Modélisation de jonction	107
5.4	modèles mésoscopiques	110
5.5	Simulation	110

6 Réseaux de transport et localisation d'activités	117
6.1 Introduction	117
6.2 Formulation du modèle	118
6.3 Linéarisation et borne inférieure	121
6.3.1 Linéarisation	121
6.3.1.1 Linéarisation classique	122
6.3.1.2 Linéarisation de Kaufmann et Broeckx	126
6.3.2 Une méthode de décomposition	132
6.3.2.1 Problème de Plus Court Chemin (PCC)	132
6.3.2.2 Problème de Localisation d'Activités (LA)	132
6.3.2.3 Première linéarisation	133
6.3.2.4 Linéarisation de Kauffman et Broeckx	133
6.3.2.5 Linéarisation de Xia et Yuan	134
6.3.2.6 Problème de Conception de Réseau de transport (CR)	134
6.3.2.7 Etude de la méthode	135
6.3.3 Borne inférieure de ONQAP	136
6.4 Résolution par des heuristiques	139
6.4.1 Introduction	139
6.4.2 Heuristique Gloutonne	140
6.4.2.1 Méthode de suppression	142
6.4.2.2 Heuristique de recherche locale 2-opt	143
6.4.3 Algorithme Génétique	144
6.4.3.1 Schéma d'encodage	145
6.4.3.2 Initialisation de la population	146
6.4.3.3 Sélection	146
6.4.3.4 Croisement	146
6.4.3.5 Mutation	147
6.4.3.6 Algorithme hybride Génétique-Glouton	147
6.5 Simulations numériques	149
6.5.1 Simulations avec les méthodes linéaires	150
6.5.1.1 Données académiques	150
6.5.1.2 Test sur Dakar	151
6.5.2 Simulations avec les méthodes heuristiques	152
6.5.2.1 Données académiques	153
6.5.2.2 Test sur Dakar	157
Conclusion et Perspectives	161

Bibliographie	161
Conclusion générale et Perspectives	169

Notations

- $[r]$ est la partie entière de $r \in \mathbb{R}$.
- $\partial\Omega$ est la frontière ou le bord de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- $D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$ est l'opérateur différentiel, exprime la dérivée partielle par rapport à la coordonnée x_i de la variable x .
- D_v^α est la dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$ par rapport à $v \in \mathbb{R}^n$ où α est un multi-indice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $v \in \mathbb{R}^n$.
- $D^\alpha f = (D^\alpha f_1, \dots, D^\alpha f_m)$ est la dérivée partielle d'ordre $|\alpha|$ par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$ où α est un multi-indice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et f une fonction telle que $f(x) \in \mathbb{R}^m$.
- $D^k f$ est l'ensemble des dérivées partielles d'ordre k par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$ où k est un entier et f une fonction telle que $f(x) \in \mathbb{R}^m$. C'est à dire $D^k f = \{D^\alpha f, |\alpha| = k\}$ où α est un multi-indice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.
- $\|D^k f\| = (\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f|^2)^{1/2}$ est la norme dans \mathbb{R}^{n^k} .
- $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ est le tore de dimension n .
- $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ est l'opérateur gradient.
- $\nabla \cdot$ est l'opérateur divergence.
- $L^p(\Omega)$: ensemble des fonctions u de Ω dans \mathbb{R} mesurables sur Ω et telles que $\int_{\Omega} |u|^p < \infty$.
- $L^p(\Omega, X)$ est l'ensemble des fonctions u de Ω dans X mesurables sur Ω et telles que $\int_{\Omega} \|u\|_X^p < \infty$.
- $L^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions u de Ω dans X mesurables sur Ω et il existe C telles que $|u(x)| < C$.
- $L_{per}^p(\Omega, X)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p$ 1-périodiques à valeur dans un ensemble X .

- $\mathbb{B}(\mathbb{R}^3)$ est l'espace des opérateurs bornés de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .
- $C_{per}^k(\Omega, X)$ est l'ensemble des fonctions $u \in C^k$ 1-périodiques à valeur dans un ensemble X .
- $C^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ est l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 k -fois différentiable.
- $C_b^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ est l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 k -fois différentiable et dont les dérivées sont continues et bornées.
- $W^{k,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique des fonctions dont les dérivées partielles au sens des distributions sont dans les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$.
- $H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$ est l'espace de Sobolev classique des fonctions définies dans le tore \mathbb{T}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^3 dont les dérivées partielles au sens des distributions sont dans les espaces de Lebesgue $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$.

NB :

Chaque chapitre 1 et les deux parties ont leur propre bibliographie. Les deux parties sont indépendantes et peuvent être lues indépendamment.

Introduction générale

La mobilité a toujours été une préoccupation humaine, les déplacements sont des activités inhérentes à la vie que ce soit sur de courtes ou de longues distances. La pratique et l'expérience des déplacements a conduit à chercher les meilleurs itinéraires possibles. Cependant, cette recherche s'est faite de manière empirique. Ainsi au fur et à mesure du développement des connaissances humaines, certaines disciplines parmi lesquelles les mathématiques, se sont emparées de ces questions de transport pour en faire des sujets d'investigations.

De nos jours, encore plus que jamais, les questions de transport intéressent encore l'homme. Cependant avec la diversité actuelle des branches de recherches en mathématiques, on est obligé de se demander : "quelle méthode utiliser ?, sous quels aspects faut-il regarder ces questions de transports ?, à quoi s'intéresse-t-on réellement ?, quelles branches des mathématiques faut-il utiliser ?, peut-on en combiner plusieurs en même temps ?, etc. En effet au fil du temps des chercheurs ont travaillé sur des questions de transport en s'intéressant le plus souvent séparément à des modèles continus utilisant des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles et à des modèles discrets basés sur la programmation mathématique.

Dans cette thèse nous nous intéressons à différents problèmes de transport en les abordant par ces techniques. L'un des problèmes étudiés est celui du transport de dunes de sable sous-marines modélisé par le couplage d'équations aux dérivées partielles de types parabolique et hyperbolique. Le dernier type d'équations sera encore étudié en milieu urbain, avec une version simplifiée, sur un problème de transport routier. Le problème de transport routier est également modélisé par des programmes mathématiques en variables mixtes, et dans ce cas nous nous intéressons en plus du dimensionnement du réseau de transport à la localisation des activités génératrices des flux sur le réseau.

Par problèmes de transport on comprend le mouvement ou le déplacement d'une entité quelconque : un individu, un véhicule, une particule. En effet qu'il s'agisse des océans ou des dunes de sédiments sous-marines en milieu maritime, des véhicules en milieu urbain on arrive à décrire le mouvement de ces phénomènes par des équations de transport qui appartiennent à la grande famille des équations aux

dérivées partielles.

La modélisation mathématique de l'évolution des dunes sous-marines et du mouvement de la mer peut permettre l'étude des phénomènes d'érosion particulièrement au niveau des côtes. L'érosion côtière est un problème grave que subit l'Homme dont les dangers environnementaux sont reconnus. Elle a lieu quand la mer gagne du terrain sur la terre, entraînant une rupture de la protection naturelle des côtes, et la perte progressive de terrains. Dans une partie de la thèse nous allons étudier la dynamique des dunes de sable en eau peu profonde près des côtes. Notre travail consiste à coupler un modèle d'équation de la dynamique des dunes de sables, présenté dans l'article[6] avec un modèle d'équation vectorielle de la dynamique des océans en milieu peu profond dit en anglais, Shallow Water Equation (SWE). On fait l'étude du couplage de ces équations sur une longue période, en nous intéressant dans un premier temps à l'existence et à l'unicité de la solution, puis à l'homogénéisation du système. Nous avons fait à la suite de cette étude théorique une simulation du phénomène.

La modélisation d'un trafic routier peut se faire suivant plusieurs considérations donnant ainsi trois échelles de représentation du trafic : des modèles microscopiques, macroscopiques et mésoscopiques. Les modèles microscopiques traduisent l'évolution individuelle de chaque véhicule. Ce modèle prend en compte le temps de réaction du conducteur à travers la distance qui le sépare du véhicule qui le précède ou véhicule leader. La vitesse d'un véhicule est directement fonction de cette distance. On parle de modèle de poursuite.

Concernant les modèles macroscopiques, le trafic automobile est assimilé à un fluide où les véhicules sont identifiés à des particules en interaction. Ces modèles sont généralement décrits par des Equations aux Dérivées Partielles (EDP). un modèle simple bien connu est celui développé par Lighthill-Whitham [10] et Richards [14], également appelé LWR, qui est une EDP hyperbolique du premier ordre. Le modèle LWR est un modèle macroscopique dont la résolution par automate cellulaire a été proposé par Daganzo [3]. C'est un modèle régi par une simple loi de l'offre et de la demande. Cependant des travaux récents utilisent plutôt des formulations basées sur l'équation d'Hamilton Jacobi pour simuler les trafics(see [2], [4]).

Quant aux modèles mésoscopiques, il s'agit d'une échelle de représentation intermédiaire obtenue, par exemple en regroupant les véhicules par paquets homogènes et en modélisant les interactions entre chaque paquet de véhicules. Ils décrivent la manière dont les véhicules passent d'un nœud du réseau à l'autre. Les nœuds sont généralement les lieux de singularités géométriques : les points de convergences de routes, divergences de routes, la réduction du nombre de voies, le changement

de la vitesse réglementaire, etc. Ce sont les extrémités des sections homogènes du réseau et permettent de les relier entre elles.

Tous les représentations ci-dessus ne font au final que modéliser l'écoulement du trafic routier, c'est à dire des véhicules, sur les voies et les nœuds d'un réseau routier. Elles ne résolvent pas la problématique opérationnelle qui est de savoir comment devrait être ce réseau pour permettre une circulation adéquate. Cette question se pose avec acuité de nos jours dans la plupart des grandes agglomérations du monde, toutes caractérisées par un trafic très important, créant des problèmes journaliers de congestion, avec comme corollaire la pollution urbaine due aux gaz nocifs émanant des pots d'échappement des véhicules. Le seul fait de construire des feux ou des routes supplémentaires ne constitue pas une solution vraiment efficace. Pour mieux agir sur ces phénomènes, nous proposons de s'intéresser aux sources génératrices de mouvements à savoir les activités. Marc Los [11] a été l'un des premiers auteurs à s'intéresser à un problème d'optimisation simultanée de la localisation des activités et du réseau de transport consistant à déterminer le réseau de routes et la localisation des activités sur ce réseau permettant de minimiser une fonctionnelle exprimant le coût de construction du réseau et les coûts de transport pour les individus entre les origines et les destinations où ils se rendent. Nous proposons dans cette thèse un modèle plus général que celui de Los. Ce modèle est basé sur la programmation non linéaire en variables mixtes (réelles, binaires). Nous le résolvons par des méthodes de résolutions exactes et des heuristiques.

Dans le chapitre suivant, nous allons donner quelques notions importantes qui seront utilisées dans nos travaux, puis un plan y sera présenté.

Chapitre 1

Quelques notions importantes

1.1 Inégalités de Sobolev

Nous allons donner quelques inégalités classiques dans les espaces de Sobolev munis des normes de Sobolev usuelles. Certaines inégalités sont généralisées dans un théorème et d'autres sont données dans des lemmes.

Théorème 1.1.1 (Inégalités de Sobolev généralisées). *Soit Ω un sous ensemble borné, ouvert de \mathbb{R}^n tel que $\partial\Omega \in C^1$. Supposons que $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

1. Si $k < \frac{n}{p}$, alors $u \in L^q(\Omega)$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$.

De plus on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

la constante C ne dépend que de k , p , n et Ω .

2. Si $k > \frac{n}{p}$, alors $u \in C^{k - [\frac{n}{p}] - 1, \gamma}(\bar{\Omega})$, où

$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{si } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \\ \text{toute valeur positive } < 1, & \text{si } \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

De plus on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{C^{k - [\frac{n}{p}] - 1, \gamma}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

la constante C ne dépend que de k , p , n et Ω .

Démonstration. cf. [5].

□

D'autres inégalités concernent les produits de fonctions.

Lemme 1.1.1. *Soient $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$. Alors pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq s$, on a :*

1. $\|D^\alpha(fg)\|_{L^2} \leq C_s(\|f\|_{L^\infty} \cdot \|D^s g\|_{L^2} + \|g\|_{L^\infty} \cdot \|D^s f\|_{L^2})$
2. $\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_{L^2} \leq C_s(\|Df\|_{L^\infty} \cdot \|D^{s-1}g\|_{L^2} + \|g\|_{L^\infty} \cdot \|D^s f\|_{L^2})$

Lemme 1.1.2. *Soient $f, g \in H^s(\mathbb{T}^n)$ et s_0 le plus petit entier plus grand que $n/2$. Alors pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq s_0$, on a :*

1. $\|D^\alpha(fg)\|_{L^2} \leq C_s(\|f\|_{s_0} \cdot \|g\|_s + \|g\|_{s_0} \cdot \|f\|_s)$
2. $\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_{L^2} \leq C_s(\|Df\|_{s_0} \cdot \|g\|_{s-1} + \|g\|_{s_0} \cdot \|Df\|_{s-1})$

On a des résultats similaires pour le produit matricielle entre une fonction matricielle et un vecteur.

Lemme 1.1.3. *Soient $B \in H^s(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $w \in H^s(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ et s_0 le plus petit entier plus grand que $n/2$. Alors pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq s_0$, on a :*

1. $\|Bw\|_s \leq C_s(\|B\|_{s_0} \cdot \|w\|_s + \|w\|_{s_0} \cdot \|B\|_s)$
2. $\|D^\alpha(Bw) - BD^\alpha w\|_{L^2} \leq C_s(\|DB\|_{s_0} \cdot \|w\|_{s-1} + \|w\|_{s_0} \cdot \|DB\|_{s-1})$

Pour plus de détails voir [9].

1.2 Convergence à deux échelles

La convergence à deux échelles, introduite par Ngetseng[13], est un outil de la théorie de l'homogénéisation. L'homogénéisation d'une EDP consiste à étudier son comportement ainsi que celle de sa solution lorsqu'un paramètre tend vers zéro. Dans notre situation, le paramètre est communément noté ϵ .

Nous allons donc donner ici quelques définitions et théorème sur la convergence à deux échelles (en anglais two-scale convergence) comme introduits dans les travaux de Allaire[1] et Ngetseng[13].

On commence par la remarque suivante :

Remarque 1.2.1. *Les espaces $L^p_{per}(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty]$ et $C^s_{per}(\mathbb{R}, X)$ traduisent respectivement les espaces L^p , C^s des fonction 1-périodique à valeur dans un ensemble X .*

Dans notre situation l'ensemble X est un espace de Banach.

Définition 1.2.1. *Une suite de fonctions (v^ϵ) dans $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3))$ converge à 2-échelle vers $V \in L^\infty([0, T], L^\infty_{per}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)))$ si pour tout*

$$\psi \in C([0, T], C_{per}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3))),$$

on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T v^\epsilon(t, x) \psi(t, \frac{t}{\epsilon}, x) dt dx = \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \int_0^1 V(t, \theta, x) \psi(t, \theta, x) d\theta dt dx$$

On note souvent cette limite par : $v^\epsilon \xrightarrow{2-s} V$.

Nous terminons en donnant un théorème de convergence à deux échelles.

Théorème 1.2.1. *Si une suite de fonctions (v^ϵ) est bornée dans $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3))$, alors il existe une sous-suite encore notée (v^ϵ) et une fonction*

$V \in L^\infty([0, T], L_{per}^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)))$ telle que $v^\epsilon \xrightarrow{2-s} V$.

Pour la preuve du théorème cf [12], [1].

1.3 Méthode des volumes finis

La méthode des Volumes Finis est une méthode de discrétisation qui est bien adaptée pour la simulation numérique de divers types d'équation aux dérivées partielles (elliptique, parabolique ou hyperbolique). La méthode a été largement utilisée dans plusieurs domaines de l'ingénierie : en mécanique des fluides, en calorimétrie, les problèmes transfert de masse, en ingénierie pétrolière etc.

La méthode de Volumes Finis est construite à partir d'une formulation intégrale basée directement sur la forme forte des équations à résoudre. Les intégrales ne portent pas sur tout le domaine dans lequel sont posées les équations, mais sur des cellules disjointes appelées volumes de contrôles. En comparaison, la méthode des Éléments Finis s'appuie également sur une formulation intégrale des équations, appelée formulation variationnelle (ou encore formulation faible) faisant intervenir des "fonctions tests" et où les intégrales portent sur tout le domaine. Dans la méthode des Volumes Finis, les termes de divergence apparaissant dans les EDP à résoudre sont traités en utilisant le théorème de la divergence. Ainsi, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface. Ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes de contrôle et les flux aux interfaces sont approchés par une fonction de flux numérique. La méthode des Volumes Finis a été initialement développée et mise au point pour des lois de conservation hyperboliques. Elle est conservative car on impose que le flux entrant dans un volume de contrôle soit égal au flux sortant du volume adjacent. Cette méthode est par conséquent très bien adaptée à la résolution de lois de conservation. Son développement pour des équations elliptiques et paraboliques est plus récent. Un avantage de la méthode des Volumes Finis par rapport à la méthode des Différences Finies est qu'elle permet de résoudre des EDP avec des géométries complexes dans la mesure où elle utilise des maillages non-structurés.

Dans la méthode des Volumes Finis, le domaine (supposé polygonal) est discrétisé par un maillage constitué de volumes de contrôles qui sont des (petits) volumes disjoints en 3D, des polygones en 2D, des segments en 1D.

1.4 Problèmes combinatoires

1.4.1 Problèmes et Formulations

Un problème d'optimisation combinatoire est un problème mathématique consistant à trouver dans un ensemble discret la ou les “meilleures” solutions minimisant ou maximisant une fonction donnée. En général, l'ensemble discret où les solutions sont cherchées est trop grand pour être exploré exhaustivement. La résolution du problème se heurte à une explosion dite combinatoire du nombre de combinaisons possibles. On peut formellement caractériser cette explosion par la théorie de la complexité qui propose une classification des problèmes en fonction de la complexité de leur résolution. Par complexité, on comprend généralement une estimation du nombre d'instructions à exécuter ou du temps d'exécution pour résoudre les instances de ce problème, par un algorithme donné. Cette estimation est un ordre de grandeur par rapport à la taille de l'instance. Les travaux théoriques dans ce domaine ont permis d'identifier différentes classes de problèmes en fonction de la complexité de leur résolution.

1.4.2 NP-difficile et polynomiale

Les classes de complexité ont été introduites pour les problèmes de décision, c'est-à-dire les problèmes posant une question dont la réponse est “oui” ou “non”. Pour ces problèmes, on définit notamment les classes suivantes :

- La classe \mathcal{P} : c'est l'ensemble des problèmes polynomiaux, i.e., pouvant être résolus par un algorithme de complexité polynomiale. Cette classe caractérise l'ensemble des problèmes que l'on peut résoudre “efficacement”.
- La classe \mathcal{NP} : c'est l'ensemble des problèmes polynomiaux non déterministes, i.e., pouvant être résolus par un algorithme de complexité polynomiale pour une machine non déterministe (que l'on peut voir comme une machine capable d'exécuter en parallèle un nombre fini d'alternatives). Intuitivement, cela signifie que la résolution des problèmes de \mathcal{NP} peut nécessiter l'examen d'un grand nombre (éventuellement exponentiel) de cas, mais que l'examen de chaque cas doit pouvoir être fait en temps polynomial.
- La classe \mathcal{NPC} ou \mathcal{NP} -complets : c'est l'ensemble des problèmes \mathcal{NP} qui ne sont pas plus compliqués à résoudre, à un facteur polynomial près, que n'importe quel autre problème \mathcal{NP} -complet. Ainsi l'existence d'un algorithme

capable de résoudre un problème \mathcal{NP} -complet en temps polynomiale entraîne l'obtention d'un algorithme efficace pour la résolution de tous les autres problèmes de cette classe.

Du fait de la conjecture $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, largement approuvée, il n'existe aucun algorithme à ce jour capable de résoudre en temps polynomiale un problème \mathcal{NP} -complet. Dans le cas d'un problème d'optimisation associé à un problème de décision \mathcal{NP} -complet on parle de problème \mathcal{NP} -difficile (\mathcal{NP} -hard). Malgré la puissance actuelle des ordinateurs le temps d'exécution d'un algorithme exact de résolution d'un problème \mathcal{NP} -difficile reste très élevé dès que les instances deviennent "grandes".

Le "problème du voyageur de commerce" est par exemple l'un des problèmes combinatoires NP-difficile les plus connus en optimisation. Il est étudié depuis le 19ème siècle. Il consiste à déterminer une tournée de coût minimal pour un voyageur de commerce lui permettant de rendre visite à ses clients supposés se trouver dans des villes différentes. Cette tournée doit passer sur chaque ville une et une seule fois avant de revenir à la ville de départ. Le problème a d'innombrables applications pratiques notamment pour la collecte d'entités ou les tournées de véhicules. La plus grande instance qui ait été traitée jusqu'à présent compte 7397 villes. Il a fallu trois années à une station Sun pour déterminer la solution optimale. La difficulté de résoudre exactement ces problèmes couplée à la nécessité de trouver des solutions pour les applications pratiques a favorisé l'émergence de méthodes heuristiques ou méta-heuristiques permettant de calculer rapidement (en temps polynomial) de bonnes solutions mais sans garantie d'optimalité.

1.4.3 Les heuristiques et métaheuristiques

Les heuristiques sont des méthodes de résolution de problèmes d'optimisation qui n'offrent pas de garantie d'optimalité mais qui peuvent fournir une bonne solution approchée en temps raisonnable. Les métaheuristiques sont généralement des algorithmes pouvant optimiser une large gamme de problèmes différents, sans nécessiter de changements profonds dans l'algorithme employé contrairement aux heuristiques qui sont des algorithmes particulièrement adaptés pour un type de problèmes. On compte de nos jours une grande variété d'heuristiques et métaheuristiques : recherche tabou, algorithme génétique, essais particuliers, colonie de fourmis etc. Suivant les cas, ces méthodes se sont avérées être très efficaces pour donner de très bonnes solutions. N'ayant pas de garanti d'optimalité les valeurs correspondantes à ces solutions sont des bornes supérieures (resp. inférieures) dans le cas d'un problème de minimisation (resp. maximisation). En calculant par une autre technique, une borne inférieure à la valeur optimale, on obtient ainsi un encadrement de la solution optimale, appelé Gap en anglais qui permet de mesurer l'erreur ou l'erreur (ou écart) relative entre la borne supérieure et la borne

inférieure. Une petite erreur indique une solution heuristique proche de la valeur optimale. Nous allons donner quelques détails sur certaines des heuristiques que nous avons utilisées dans cette thèse. D'une manière générale, toutes ces heuristiques sont soit sur la notion de voisinage ou sur celle de population. Le voisinage d'une solution donnée est l'ensemble des solutions que l'on peut atteindre depuis la solution de départ par une ou des séries d'opération élémentaires de transformation. La population quant à elle est un ensemble de solutions que l'on fait évoluer en essayant de l'améliorer par rapport à l'objectif recherché.

1.4.3.1 Heuristiques gloutonnes

Le fonctionnement d'une heuristique gloutonne est similaire à celui d'un algorithme glouton exact. En effet un algorithme glouton construit pas à pas une solution localement optimale dans l'espoir que ce choix mènera à la solution globalement optimale. De plus, sans jamais revenir sur ses décisions, à chaque étape il effectue le choix censé être le meilleur. Ainsi dans certains cas cette approche permet d'arriver à une solution globalement optimale, on parle d'algorithme glouton exact, mais en général c'est une heuristique dite gloutonne.

```

1 Initialisation  $Ens = E$ ;
2  $Solpartielle =$  ensemble (ou suite) "vide";
3 Calcul "glouton"
4 while  $Solpartielle$  non Solution ( et  $Ens$  non vide) do
5   |  $select(x, Ens)$  on choisit  $x$  selon critère glouton;
6   | if  $Solpartielle + x$  est une solution partielle then
7     |  $S = S + x$ ;
8   | end
9   | dans certains problèmes, c'est toujours le cas
10  |  $Ens = Ens - x$ ,  $x$  ne sera plus considéré;
11 end

```

Algorithme 1 : Heuristiques gloutonnes

Il existe de nombreuses heuristiques gloutonnes dédiées à des problèmes classiques : coloriage de graphes, affectation, mise en sachets,... certaines donnant de bons résultats et étant très utilisées.

1.4.3.2 Recherche d'un optimum local (Hill Climbing)

Les méthodes de recherche locale consiste à partir d'une solution donnée, à explorer le voisinage de celle-ci à la recherche d'une meilleure solution. S'il n'existe pas de voisin meilleur que notre solution, le processus s'arrête. Un optimum local a été trouvé. Sinon, le meilleur des voisins est choisi et on recommence. Une autre implémentation consiste non pas à passer au meilleur des voisins à chaque étape

mais au premier meilleur. La convergence vers un optimum local pouvant être très lente, on peut éventuellement fixer un nombre de boucles maximum, si on veut limiter le temps d'exécution. Cette méthode a l'inconvénient de "rester bloqué" dans un optimum local qui peut être très bon ou très mauvais selon le point de départ. Si la solution de départ est donnée par une heuristique déterministe, l'algorithme sera déterministe. Si elle est tirée au hasard, on a un algorithme stochastique. Dans ce cas, plusieurs exécutions sur la même instance pourront donner des solutions différentes. La taille du voisinage d'une solution est ici importante. Si les voisins sont très nombreux, on a de fortes chances de trouver l'optimum global mais les visiter tous peut prendre du temps. Inversement, un voisinage restreint permet une exploration plus rapide mais avec le risque de rester bloqué dans un optimum local de "mauvaise qualité". La taille du voisinage est donc un compromis entre efficacité et qualité.

1.4.3.3 Recherche Taboue

Dans ce type de métaheuristique, on recherche à chaque étape le meilleur voisin, mais en limitant la recherche aux voisins non tabous. Un voisin est considéré comme tabou si on a exploré cette solution durant les N précédentes itérations. La maintenance d'une liste tabou de voisins peut être très coûteuse. On se borne donc souvent à stocker les transformations effectuées et non les solutions tabous. A chaque itération, on choisit le meilleur voisin (ou un meilleur voisin selon le cas) correspondant à une transformation non tabou. On effectue cette transformation, puis on la place dans la liste (file) tabou, et on élimine la plus ancienne transformation de cette liste si la file est pleine. Si la solution actuelle est la meilleure trouvée depuis le début, on la stocke. On s'arrête soit après un nombre fixé d'itérations, soit après un nombre fixé d'étapes n'ayant pas améliorées la solution. La méthode "tabou" peut être vue comme une généralisation de la recherche d'un optimum local qui correspond au cas où $N = 0$.

1.4.3.4 Le recuit simulé (simulated annealing)

La méthode du recuit simulé est inspirée de la technique dite du recuit utilisée dans la fabrication du verre ou de métaux [15]. L'idée de la technique physique du recuit consiste à porter d'abord à très haute température la matière que l'on veut façonner. La forte chaleur a pour conséquence la mise en mouvement des atomes constituant la matière qui ainsi s'entrechoquent et changent souvent de position. La matière est ensuite portée progressivement à des températures basses qui ont pour effet de ralentir le mouvement des atomes jusqu'à l'atteinte d'un niveau d'énergie minimale où la matière prend sa forme définitive. L'interprétation de ce procédé en terme d'algorithme d'optimisation est la suivante. Partant d'une

solution quelconque, on tire au hasard une autre solution dans son voisinage. Si elle est meilleure, on l'adopte ; sinon elle n'est retenue qu'avec une certaine probabilité. Cette probabilité va dépendre de la dégradation de la valeur de la fonction objectif et du temps écoulé depuis le lancement de l'algorithme. Au début cette probabilité sera forte à l'image de la haute température du procédé du recuit induisant de multiples changements de position pour les atomes. A mesure que le temps avance, cette probabilité va diminuer à l'image de la diminution de la température. L'algorithme s'arrête quand aucune solution ne permet de réduire le coût de l'objectif, et qu'aucune de celle-ci ne peut être choisie pour une nouvelle exploration.

1.4.3.5 Algorithme génétique

Les algorithmes génétiques ont été créés par J. Holland (75)[8] puis développés par David Goldberg. Ils sont basés sur la notion de population et sur des principes de génétique dont la survie des individus les mieux adaptés et la recombinaison génétique. Contrairement aux algorithmes précédents qui essaient d'améliorer un unique "individu-solution", les algorithmes génétiques font évoluer une population de solutions. Le principe de base est de simuler l'évolution d'une population de solutions avec les règles citées ci-dessus en vue d'obtenir une solution ou un ensemble de solutions les plus adaptées. Le principe de la méthode comme énoncé par Goldberg est qu'à chaque génération, un nouvel ensemble de créatures artificielles est créé en utilisant des parties des meilleures solutions précédentes avec éventuellement des parties innovatrices [7].

1.5 Plan

Notre travail est ainsi réparti. Dans la partie 1, le problème de transport de dunes de sable sous-marines est traité. Le modèle proposé pour ce problème est détaillé dans le chapitre 2. L'étude en termes d'existence de solutions et d'homogénéisation est faite dans le chapitre 3. Cette partie se termine sur des résultats de simulations numériques présentés au chapitre 4. La partie 2 est dévolue à un cas simple de modèle de trafic routier et au problème d'optimisation simultanée d'un réseau de transport et de la localisation de ses activités. Le modèle développé pour ce problème est présenté au chapitre 6. Ce modèle est reformulé à la section 6.3 par des techniques de linéarisation permettant l'utilisation des techniques de résolution exacte. Une méthode heuristique de résolution est présentée à la section 6.4. Les algorithmes proposés sont ensuite testés à la section 6.5 sur des données académiques et sur des cas réels de la ville de Dakar.

Bibliographie

- [1] G. Allaire. Homogenization and Two-Scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 1482–1518.
- [2] G. Costeseque, J.P. Lebacque, Intersection modeling using a convergent scheme based on Hamilton-Jacobi equation. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* Vol 54, 2012, Pages 736–748.
- [3] C. F. Daganzo, The cell transmission model, Part II : Network traffic. *Transportation Research*, Vol. 29B, No. 2, (1995), pp. 79-93
- [4] C.F. Daganzo, A variational formulation of kinematic waves : Basic theory and complex boundary conditions, *Transportation Research* 39B (2005) pp. 187-196
- [5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Math Society. Vol. 19, 1998.
- [6] I. Faye, E. Frénod and D. Seck. long term behavior of singularity perturbed parabolic degenerated equation. *Journal of Non linear Analysis and Applications*. 192(2016), 1-24.
- [7] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1989.
- [8] J. H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI., 1975.
- [9] S. Klainerman and A. Majda. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Commun. Appl. Math* **34** (1981), 481-524.
- [10] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, On kinetic waves. II. Theory of Traffic Flows on Long Crowded Roads, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 229 (1955), pp. 317-345
- [11] M. Los. Simultaneous optimization of land use and transportation. A Synthesis of the Quadratic Assignment Problem and the Optimal Network Problem, *Regional Science and Urban Economics* 8 (1978) 21-42.

- [12] D. Lukkassen, G. Nguetseng and P. Wall. Two-scale convergence. *Int. J. of Pure and Appl. Math.* 2, 1, 35-86, 2002.
- [13] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 608–623.
- [14] P. I. Richards, Shock Waves on the Highway. *Oper. Res.*, 4 (1956), pp. 42-51.
- [15] L. Sean, 2013, Essentials of Metaheuristics, Lulu, second edition, available at [http://cs.gmu.edu/~sim\\$sean/book/metaheuristics/](http://cs.gmu.edu/~sim$sean/book/metaheuristics/)

Première partie

Transport de dunes de sable sous marine près des côtes¹

1. Dans cette partie, nous avons tiré une publication : Coupling the shallow water equation with a long dynamic of sand dunes, Mouhamadou Aliou M.T. Baldé and Diaraf Seck, in Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S), Vol. 9, no. 5, pp 1521-1551, october 2016.

Chapitre 2

Introduction et modèle

2.1 Introduction

L'érosion côtière est un phénomène naturel qui existe depuis des temps immémoriaux. Elle a un impact humain et économique important sur le monde en particulier pour les pays côtiers. Par exemple, ce phénomène menace l'ensemble de la côte sénégalaise en Afrique de l'Ouest. L'érosion côtière peut être décrite comme un problème de transport de sable ou de sédiments causé par le mouvement de la mer.

Dans ce travail, nous couplons une équation dynamique des dunes de sable à long terme (LTDD *en anglais*) cf [9] avec une équation dynamique d'océan peu profonde (SWE *en anglais*). Ce couplage modélise le mouvement des dunes de sable sur une longue période sous l'effet du mouvement de la mer en zone côtière.

Certains auteurs ont travaillé sur le couplage de l'équation de Saint-Venant avec des équations de la dynamique des sédiments et des résultats intéressants en ont été obtenus, voir [3], [7]. Dans leurs études, les auteurs de ces travaux ont considérés tout type de sédiments, avec l'accent mis sur un point de vue numérique. Dans [4] C. Berthon et al ont donné une solution analytique exacte pour l'équation de shallow water couplée à l'équation d'Exner sous l'hypothèse d'un état d'équilibre de l'écoulement c'est à dire pour une décharge d'eau uniforme donnée. Et cette solution est valable pour une large famille de sédiments qui sont utilisés dans la modélisation de l'érosion, comme le modèle de Grass ou ceux proposés par Meyer-Peter & Müller (voir [4]). Dans [32], les auteurs ont étudié le système couplé d'une version visqueuse en eau peu profonde et l'équation d'Exner dans le tore bidimensionnelle \mathbb{T}^2 . Dans [2], les auteurs ont montré l'existence d'une solution de l'équation adimensionnée de shallow water en s'appuyant sur [17] et [18]. En outre ils ont prouvé que le temps d'existence de la solution ne dépend pas du paramètre petit ϵ .

Notre travail est consacré au cas où l'on considère un type de sédiments : le sable. Et notre objectif est d'apporter des résultats supplémentaires. En fait, dans notre étude nous couplons une équation dynamique des dunes de sables à long terme avec l'équation de shallow water. Et ce couplage implique des situations intéressantes et plus complexes à étudier.

Ainsi, nous étudions l'évolution des dunes de sable sous marines sur de longues périodes en zone côtière. Un tel problème est connu dans la littérature comme problème morphodynamique, qui consiste à coupler un modèle hydrodynamique décrivant l'écoulement de l'océan et une équation modélisant l'évolution de la topographie.

Pour étudier le phénomène morphodynamique couplant le SWE et le LTDD, nous utilisons un modèle mathématique, où les variables inconnues sont une combinaison de celles provenant des deux équations d'hydrodynamique et de topographie. Nous réécrivons les deux équations couplé à la même échelle en fonction d'un paramètre petit utilisé dans [9] pour obtenir un système sans dimension.

2.2 Le système couplé

2.2.1 Modèle

On considère le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\xi - z) + \nabla \cdot [(\xi + H - z)u] = 0 \quad (1.1) \\ \frac{\partial}{\partial t} [(\xi + H - z)u] + \nabla \cdot [(\xi + H - z)u \otimes u] + \\ \quad g(\xi + H - z) \cdot \nabla(\xi + H - z) + g(\xi + H - z)\nabla z + \\ \quad \quad \quad f(\xi + H - z)u^\perp + ku = 0 \quad (1.2) \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\alpha}{1-p} \nabla \cdot \left[\chi(D_G \rho \frac{|u|^2 - u_c}{c^2}) \left(\frac{u}{|u|} - \lambda \nabla z \right) \right] = 0 \quad (1.3) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où :

- t et x sont respectivement les variables de temps et d'espace à deux dimensions.
- La fonction $\xi(t, x)$ est la variation d'altitude de la surface libre de l'eau autour de sa valeur moyenne.
- H est l'altitude moyenne de l'eau.
- $z(t, x)$ est la hauteur de la dune de sable par rapport au niveau $y = -H$.
- $h(t, x)$ est la hauteur de l'eau depuis la surface libre de l'eau à la hauteur de la dune sur la même verticale. Ainsi $h = \xi + H - z \Rightarrow h - H = \xi - z$.
- On définit $m = h - H = \xi - z$ la variation de la hauteur d'eau.
- $u(t, x) = (u_1, u_2)$ est la vitesse de l'eau et $u^\perp(t, x) = (-u_2, u_1)$.

— Le produit tensoriel

$$u \otimes u = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_2 u_1 & u_2^2 \end{bmatrix}$$

Les deux premières équations (2.1.1)-(2.1.2) représentent l'équation shallow water avec la gravité g , le terme de Coriolis f et le coefficient de frottement k .

Les équations en eau peu profonde (SWE) sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens. Le SWE modélise l'évolution de l'océan et d'autres fluides newtoniens incompressibles dans l'hypothèse que la profondeur est faible par rapport à la longueur d'onde du fluide newtonien. Les équations en eau peu profonde sont la forme la plus simple des équations de mouvement qui peuvent être utilisées pour décrire l'évolution horizontale d'un fluide incompressible, en présence d'une accélération gravitationnelle et de rotation.

L'équation (2.1.3) est une équation de transport de dunes de sable (cf [9]), obtenue en utilisant la loi de transport de Van Rijn [30] (voir [10], [14] pour plus de détails). D_G est le diamètre du grain de sable, ρ est la densité du fluide liquide, α est une constante quel ordre de grandeur est de 100, $p \in [0, 1)$ est la porosité du sable, λ est la valeur inverse de la pente maximale de la surface des sédiments lorsque la vitesse de l'eau est de 0, u_c est le seuil en dessous duquel la vitesse de l'eau ne fait pas le déplacement de sable, C est une constante définie par $C = \ln(\frac{12h}{3D_G})$, h est la hauteur de l'eau (voir [10]).

$$\text{Et } \chi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma < 0 \\ |\sigma|^{3/2} & \text{if } \sigma \geq 0 \end{cases}$$

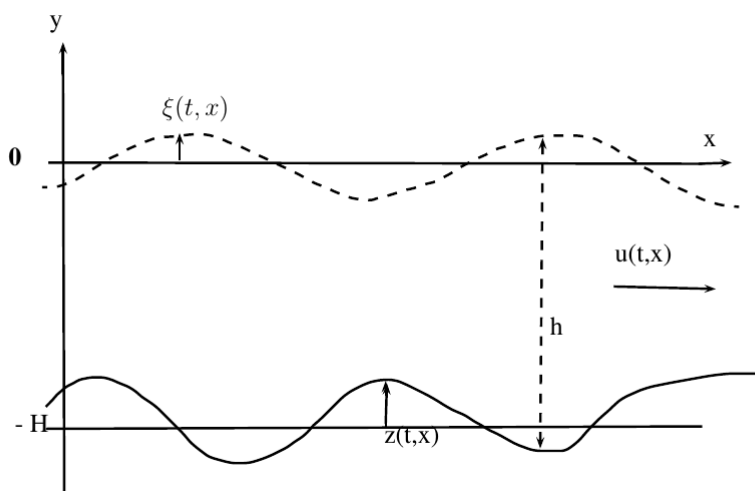


FIGURE 2.1 – Dunes de sable sous marines

2.2.2 Adimensionnement

Cette technique permet de rendre les équations sans dimension donc intrinsèques. Les valeurs des caractéristiques que nous utilisons pour la mise à l'échelle sont les mêmes que dans [9] et [10].

2.2.2.0.1 Les caractéristiques :

- \bar{t} caractéristique du temps.
- \bar{L} caractéristique de l'espace.
- $\bar{\xi}$ caractéristique de la surface libre de l'eau.
- \bar{M} caractéristique de la variation d'hauteur.

2.2.2.0.2 Calculs des nouvelles variables et fonctions :

- $\bar{t} \cdot t' = t; \bar{L} \cdot x' = x.$
- $\bar{\xi} \cdot \xi'(t', x') = \xi(\bar{t}t', \bar{L}x')$
- $\bar{z} \cdot z'(t', x') = z(\bar{t}t', \bar{L}x').$
- $\bar{u} \cdot u'(t', x') = u(\bar{t}t', \bar{L}x').$
- $\bar{M} \cdot m'(t', x') = \xi(\bar{t}t', \bar{L}x') - z(\bar{t}t', \bar{L}x').$

Les variables avec le symbole prime (') sont sans dimension.

2.2.2.0.3 Calcul des dérivées :

- Dérivation par rapport à l'espace : $\nabla' z'(t', x') = \frac{\bar{L}}{\bar{z}} \nabla z(\bar{t}t', \bar{L}x')$
- Dérivation par rapport au temps : $\frac{\partial}{\partial t'} z'(t', x') = \frac{\bar{t}}{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial t} z(\bar{t}t', \bar{L}x')$

2.2.2.0.4 Mise à l'échelle de SWE :

Prenons d'abord la première équation dans (2.1) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\xi - z) + \nabla \cdot [(\xi + H - z)u] = 0.$$

Elle devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial t'} (\bar{\xi} \cdot \xi' - \bar{z} \cdot z') + \nabla \cdot [(\bar{\xi} \cdot \xi' + H - \bar{z} \cdot z') \bar{u} \cdot u'] &= 0 \\ \frac{\bar{z}}{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \cdot \xi' - z' \right) + \frac{\bar{z} \bar{u}}{\bar{L}} \nabla' \cdot \left[\left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \cdot \xi' + \frac{H}{\bar{z}} - z' \right) \cdot u' \right] &= 0 \end{aligned}$$

En simplifiant par $\frac{\bar{z}}{\bar{t}}$ on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' \right) + \frac{\bar{t} \bar{u}}{\bar{L}} \nabla' \cdot \left[\left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' + \frac{H}{\bar{z}} \right) u' \right] = 0 \quad (2.2)$$

Considérons la seconde équation dans (2.1) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\xi + H - z)u] + \nabla \cdot [(\xi + H - z)u \otimes u] + g(\xi + H - z) \cdot \nabla(\xi + H - z) + g(\xi + H - z)\nabla z + f(\xi + H - z)u^\perp = -ku \quad (2.3)$$

En utilisant les mêmes techniques que pour la première équation et en simplifiant par $\frac{\bar{z}\bar{u}}{\bar{t}}$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t'} \left[\left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' + \frac{H}{\bar{z}} \right) u' \right] + \frac{\bar{t}\bar{u}}{\bar{L}} \nabla' \cdot \left[\left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' + \frac{H}{\bar{z}} \right) u' \otimes u' \right] + \\ & g \frac{\bar{t}\bar{z}}{\bar{L}\bar{u}} \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' + \frac{H}{\bar{z}} \right) \nabla' \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' + \frac{H}{\bar{z}} \right) + g \frac{\bar{t}\bar{z}}{\bar{L}\bar{u}} \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' + \frac{H}{\bar{z}} \right) \nabla' z' + \\ & \bar{f}\bar{t}\bar{f}' \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' + \frac{H}{\bar{z}} \right) u'^\perp = -\frac{\bar{t}\bar{k}}{\bar{z}} k' u' \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'expression adimensionnée de m est donnée par :

$$\begin{aligned} m' &= \frac{1}{\bar{M}} m = \frac{1}{\bar{M}} (h - H) = \frac{1}{\bar{M}} (\xi - z) = \frac{1}{\bar{M}} (\bar{\xi} \xi' - \bar{z} z') = \frac{\bar{z}}{\bar{M}} \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' \right) \\ &\Rightarrow m' = \frac{\bar{z}}{\bar{M}} \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' \right) \Rightarrow \frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} \xi' - z' = \frac{\bar{M}}{\bar{z}} m' \end{aligned}$$

Par un changement de variable dans (2.2) et (2.4), suivi d'une simplification par $\frac{\bar{M}}{\bar{z}}$ et en éliminant la notation ($'$), on a le système adimensionné suivant équivalent à SWE :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (m) + \frac{\bar{t}\bar{u}}{\bar{L}} \nabla \cdot \left[\left(m + \frac{H}{\bar{M}} \right) u \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(m + \frac{H}{\bar{M}} \right) u \right] + \frac{\bar{t}\bar{u}}{\bar{L}} \nabla \cdot \left[\left(m + \frac{H}{\bar{M}} \right) u \otimes u \right] + \\ g \frac{\bar{t}\bar{M}}{\bar{L}\bar{u}} \left(m + \frac{H}{\bar{M}} \right) \nabla \left(m + \frac{H}{\bar{M}} \right) + g \frac{\bar{t}\bar{z}}{\bar{L}\bar{u}} \left(m + \frac{H}{\bar{M}} \right) \nabla z + \\ \bar{f}\bar{t}\bar{f} \left(m + \frac{H}{\bar{M}} \right) u^\perp = -\frac{\bar{t}\bar{k}}{\bar{M}} k u \end{array} \right. \quad (2.5)$$

2.2.2.0.5 Mise à l'échelle de l'équation de la dynamique des dunes de sable en long terme (LTDD) :

Comme on utilise la mise à l'échelle du papier [9] on donne directement le résultat de l'équation LTDD sans dimension pour de petites diamètres de sable :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\lambda}{1-p} \alpha \frac{\bar{t}\bar{u}^3 (\rho D_G)^{3/2}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L}^2} \nabla \cdot \left[\left(1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} m \right) \chi(|u|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}) \nabla z \right] \\ & = \frac{1}{1-p} \alpha \frac{\bar{t}\bar{u}^3 (\rho D_G)^{3/2}}{(\ln(\frac{4H}{D_G}))^3 \bar{L}\bar{z}} \nabla \cdot \left[\left(1 - 3 \frac{\bar{M}}{H \ln(\frac{4H}{D_G})} m \right) \chi(|u|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}) \frac{u}{|u|} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

On définit un paramètre ϵ donnée par : $\epsilon = \frac{1}{\bar{t}\bar{\omega}_c} \sim \frac{1}{192}$

Calculons à présent les constantes du système SWE-LTDD :

$$\begin{aligned} \frac{H}{\bar{M}} &= \frac{50}{5} = 10, \quad \frac{\bar{t}\bar{u}}{\bar{L}} = \frac{5 \cdot 10^9}{10} = 5 \cdot 10^8 \sim \frac{1}{3}\epsilon^{-4} \\ g \frac{\bar{t}\bar{M}}{\bar{L}\bar{u}} &= \frac{\bar{t}\bar{u}}{\bar{L}} \cdot \frac{g\bar{M}}{\bar{u}^2} \sim \frac{1}{3\epsilon^4} \cdot 9.8 \cdot 5 \sim \frac{16}{\epsilon^4} \\ g \frac{\bar{t}\bar{z}}{\bar{L}\bar{u}} &= \frac{\bar{t}\bar{u}}{\bar{L}} \cdot \frac{g\bar{z}}{\bar{u}^2} \sim \frac{1}{3\epsilon^4} \cdot 9.8 \cdot 1 \sim \frac{10}{3\epsilon^4} \end{aligned}$$

$$\text{Posons : } \bar{f} = \bar{\omega}_c = 3.8 \cdot 10^{-7}/s, \text{ alors } \bar{f}\bar{t} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\text{Posons : } \bar{k} = \bar{M}\bar{\omega}_c = 19 \cdot 10^{-7} \sim 2 \cdot 10^{-6}/s \text{ alors } \frac{\bar{k}\bar{t}}{\bar{M}} = \bar{\omega}_c\bar{t} = \frac{1}{\epsilon}$$

Le système SWE-LTDD devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{1}{3\epsilon^4} \nabla \cdot [(m+10)u] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [(m+10)u] + \frac{1}{3\epsilon^4} \nabla \cdot [(m+10)u \otimes u] + \\ \quad \frac{16}{\epsilon^4} (m+10) \nabla(m+10) + \frac{10}{3\epsilon^4} (m+10) \nabla z + \\ \quad \quad \quad \frac{f}{\epsilon} (m+10)u^\perp = -\frac{k}{\epsilon} u \\ \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [(1-4\epsilon m)|u|^3 \nabla z] - \frac{20}{\epsilon^2} \nabla \cdot [(1-4\epsilon m)|u|^2 u] = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Remarque 2.2.1. — *Il est à souligner que les variables m , u et z dépendent de ϵ .*

— *Nous allons utiliser les méthodes introduites par T. Kato [17] et S. Klainerman et A. Majda [18] pour étudier le système ci-dessus. Mais il est important de souligner que les matrices provenant de ces systèmes ne sont pas symétriques. Avant d'adapter les méthodes citées juste ci-dessus, nous avons besoin de symétriser l'équation SWE adimensionnée.*

Posons : $m = m^\epsilon$, $u = u^\epsilon$ et $z = z^\epsilon$.

2.2.4 Changement de variable et écriture matricielle

Dans cette section nous faisons un changement de variables puis nous réécrivons nos équations sous forme matricielle. Le système SWE-LTDD peut être exprimé

dans sa forme la plus générale comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m^\epsilon}{\partial t} + \frac{a^1}{\epsilon^4} \nabla \cdot [(m^\epsilon + b^1)u^\epsilon] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} [(m^\epsilon + b^1)u^\epsilon] + \frac{a^1}{\epsilon^4} \nabla \cdot [(m^\epsilon + b^1)u^\epsilon \otimes u^\epsilon] \\ \quad + \frac{c^1}{\epsilon^4} (m^\epsilon + b^1) \nabla (m^\epsilon + b^1) + \frac{d^1}{\epsilon^4} (m^\epsilon + b^1) \nabla z^\epsilon \\ \quad + \frac{f}{\epsilon} (m^\epsilon + b^1) u^{\epsilon \perp} = -\frac{k}{\epsilon} u^\epsilon \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{a}{\epsilon^2} \nabla \cdot [(1 - b\epsilon m^\epsilon) |u^\epsilon|^3 \nabla z^\epsilon] \\ \quad - \frac{c}{\epsilon^2} \nabla \cdot [(1 - b\epsilon m^\epsilon) |u^\epsilon|^2 u^\epsilon] = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Avec m^ϵ la variation de la hauteur d'eau, z^ϵ la hauteur de la dune et $u^\epsilon = (u_1^\epsilon, u_2^\epsilon)$ la vitesse de l'eau avec $u^{\epsilon \perp} = (-u_2^\epsilon, u_1^\epsilon)$, et $a^1, b^1, c^1, d^1, a, b, c$ des constantes strictement positives.

On prend les variables de temps et d'espace respectivement telles que $t \in [0, T]$, $T > 0$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$, où le \mathbb{T}^2 désigne le tore de dimension 2, c'est à dire $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

Nous allons transformer notre système en faisant le changement de variables suivant :

$$q^\epsilon = (m^\epsilon + b^1)u^\epsilon = \begin{pmatrix} q_1^\epsilon \\ q_2^\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m^\epsilon + b^1)u_1^\epsilon \\ (m^\epsilon + b^1)u_2^\epsilon \end{pmatrix}$$

Le vecteur q^ϵ est appelé dans certaines littératures décharge d'eau ou débit. Nous le considérons ici comme tel.

Alors dans ce cas, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_1^\epsilon &= \frac{q_1^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \text{ et } u_2^\epsilon = \frac{q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \\ |u^\epsilon| &= \sqrt{u_1^{\epsilon 2} + u_2^{\epsilon 2}} = \sqrt{\frac{q_1^{\epsilon 2} + q_2^{\epsilon 2}}{(m^\epsilon + b^1)^2}} = \frac{|q^\epsilon|}{|m^\epsilon + b^1|} \\ |u^\epsilon|^2 u^\epsilon &= \frac{|q^\epsilon|^2 q^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^3} \end{aligned}$$

Dans ce travail, nous supposons que : les dunes sont sous-marines. C'est à dire la hauteur moyenne de l'eau est plus grande que celle des dunes. Cela se traduit par : $h > 0$ et $H > z(t, x) \forall t, x$. Ce qu'on pourra simplifier en considérant :

$$\exists \nu > 0 \text{ tel que } m^\epsilon + b^1 \geq \nu > 0$$

Alors le système (2.9) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \frac{\partial}{\partial x} \cdot [a^1 q_1^\epsilon] + \frac{1}{\epsilon^4} \frac{\partial}{\partial y} \cdot [a^1 q_2^\epsilon] = 0 \\ \frac{\partial q_1^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a^1 q_1^{\epsilon 2}}{m^\epsilon + b^1} + \frac{c^1}{2} (m^\epsilon + b^1)^2 \right] + \frac{1}{\epsilon^4} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \right] \\ \quad - \frac{f}{\epsilon} q_2^\epsilon + \frac{k}{\epsilon} \frac{q_1^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} + \frac{d^1}{\epsilon^4} (m + b^1) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_2^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \right] + \frac{1}{\epsilon^4} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{a^1 q_2^{\epsilon 2}}{m^\epsilon + b^1} + \frac{c^1}{2} (m^\epsilon + b^1)^2 \right] + \\ \quad \frac{f}{\epsilon} q_1^\epsilon + \frac{k}{\epsilon} \frac{q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} + \frac{d^1}{\epsilon^4} (m + b^1) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{a(1 - b\epsilon m^\epsilon) |q^\epsilon|^3}{|m^\epsilon + b^1|^3} \right] \frac{\partial^2 z^\epsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{a(1 - b\epsilon m^\epsilon) |q^\epsilon|^3}{|m^\epsilon + b^1|^3} \right] \frac{\partial^2 z^\epsilon}{\partial y^2} \\ \quad - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c(1 - b\epsilon m^\epsilon) |q^\epsilon|^2 q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^3} \right] - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{c(1 - b\epsilon m^\epsilon) |q^\epsilon|^2 q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^3} \right] \\ \quad - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a(1 - b\epsilon m^\epsilon) |q^\epsilon|^3}{|m^\epsilon + b^1|^3} \right] \frac{\partial z^\epsilon}{\partial x} - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{a(1 - b\epsilon m^\epsilon) |q^\epsilon|^3}{|m^\epsilon + b^1|^3} \right] \frac{\partial z^\epsilon}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Il peut aussi être réécrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(v^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} h(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} P(v^\epsilon, z^\epsilon) \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon] = \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot C^\epsilon \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où $v^\epsilon = \begin{pmatrix} m^\epsilon \\ q_1^\epsilon \\ q_2^\epsilon \end{pmatrix}$, $h(v^\epsilon) = -\frac{f}{\epsilon} v^{\epsilon \perp} + \frac{1}{\epsilon} H(v^\epsilon)$ avec $v^{\epsilon \perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_2^\epsilon \\ q_1^\epsilon \end{pmatrix}$ et

$$F(v^\epsilon) = (F_1, F_2) = \begin{pmatrix} \frac{a^1 q_1^{\epsilon 2}}{m^\epsilon + b^1} + \frac{c^1}{2} (m^\epsilon + b^1)^2 & \frac{a^1 q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \\ \frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} & \frac{a^1 q_2^{\epsilon 2}}{m^\epsilon + b^1} + \frac{c^1}{2} (m^\epsilon + b^1)^2 \end{pmatrix}$$

avec

$$F_1(v^\epsilon) = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 \\ F_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^1 q_1^{\epsilon 2}}{m^\epsilon + b^1} + \frac{c^1}{2} (m^\epsilon + b^1)^2 \\ \frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \end{pmatrix},$$

$$F_2(v^\epsilon) = \begin{pmatrix} F_2^1 \\ F_2^2 \\ F_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 q_2}{m^\epsilon + b^1} \\ \frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \\ \frac{a^1 q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} + \frac{c^1}{2} (m^\epsilon + b^1)^2 \end{pmatrix},$$

$$H(v^\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k q_1^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \\ -\frac{k q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \end{pmatrix}, \quad P(v^\epsilon, z^\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ d^1 (m^\epsilon + b^1) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial x} \\ d^1 (m^\epsilon + b^1) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}^\epsilon = \frac{a(1 - b\epsilon m^\epsilon) |q^\epsilon|^3}{|m^\epsilon + b^1|^3} \quad \text{and} \quad C^\epsilon = \frac{c(1 - b\epsilon m^\epsilon) |q^\epsilon|^2 q^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^3}.$$

Remarquons que l'équation

$$\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(v^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} h(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} P(v^\epsilon, z^\epsilon) \quad (2.11)$$

est un système d'équations hyperbolique du premier ordre avec un terme source. Il est souvent appelé équation de loi d'équilibre. Tandis que l'équation :

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon] = \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot C^\epsilon \quad (2.12)$$

est parabolique, qui peut être singulière ou dégénérée lorsque ϵ prend certaines valeurs : par exemple quand $\epsilon = 0$ on a un cas de singularité, et quand $\mathcal{A}^\epsilon = 0$ pour des valeurs de ϵ l'équation (2.12) est dégénérée.

Si on suppose que v^ϵ est assez régulier au moins dans le sens des distributions alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_j(v^\epsilon) = D_v F_j(v^\epsilon) \cdot \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_j}, \quad \forall j = 1, 2.$$

Dans ce cas le système devient :

$$\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 D_v F_j(v^\epsilon) \cdot \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} h(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} P(v^\epsilon, z^\epsilon) \quad (2.13)$$

$$\text{où } D_v F_j(v^\epsilon) = \begin{pmatrix} \partial_{m^\epsilon} F_j^1 & \partial_{q_1^\epsilon} F_j^1 & \partial_{q_2^\epsilon} F_j^1 \\ \partial_{m^\epsilon} F_j^2 & \partial_{q_1^\epsilon} F_j^2 & \partial_{q_2^\epsilon} F_j^2 \\ \partial_{m^\epsilon} F_j^3 & \partial_{q_1^\epsilon} F_j^3 & \partial_{q_2^\epsilon} F_j^3 \end{pmatrix}$$

Un simple calcul nous permet de voir que :

$$D_v F_1(v^\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & a^1 & 0 \\ -\frac{a^1 q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1 (m^\epsilon + b^1) & \frac{2a^1 q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} & 0 \\ -\frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} & \frac{a^1 q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} & \frac{a^1 q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} \end{pmatrix}$$

et

$$D_v F_2(v^\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^1 \\ -\frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} & \frac{a^1 q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} & \frac{a^1 q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} \\ -\frac{a^1 q_2^{\epsilon^2}}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) & 0 & \frac{2a^1 q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} \end{pmatrix}$$

A présent on pose $A^j(v^\epsilon) = D_v F_j(v^\epsilon)$, $\forall j = 1, 2$, pour avoir :

$$\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 A^j \cdot \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} h(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} P(v^\epsilon, z^\epsilon) \quad (2.14)$$

Avant d'étudier l'existence de solution du système couplé, nous allons d'abord, dans la section suivante, faire une analyse du système.

2.3 Esquisse d'analyse du système couplé adimensionné

Dans cette section, il ne s'agira pas d'établir des résultats d'existence et d'unicité de solution pour notre système couplé. Mais il va s'agir de faire une discussion sur l'existence de solution en rappelant des notions importantes pour des équations hyperboliques.

Dans des travaux supplémentaires il serait intéressant de faire une étude plus complète et approfondie de notre système sur l'existence, l'unicité des solutions de chocs et les questions d'analyse numérique liées.

2.3.1 Equations de Shallow Water(SWE) adimensionné

Nous allons donner la définition d'un système d'équation hyperbolique du premier ordre mais en gardant les notations utilisées pour notre système.

Définition 2.3.1. *Le système d'équation (2.14) est dit hyperbolique si $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\xi_1 A^1(v^\epsilon) + \xi_2 A^2(v^\epsilon) + \dots + \xi_n A^n(v^\epsilon)$ ($m \times m$) admet m valeurs propres réelles telles que :*

$$\lambda_1(v^\epsilon, \xi) \leq \lambda_2(v^\epsilon, \xi) \leq \dots \leq \lambda_m(v^\epsilon, \xi)$$

et des vecteurs propres associés $v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2}, \dots, v_{\lambda_m}$ qui forment une base de \mathbb{R}^m , où n est la dimension de l'espace et m la dimension de l'inconnu v^ϵ .

Remarque 2.3.1. — *Dans notre situation $n = 2$ et $m = 3$.*

- Le système d'équation (2.14) est de plus dit symétrique si $A^j(v^\epsilon)$ est symétrique pour tout $j = 1, \dots, n$.
- Le système d'équation (2.14) est dit strictement hyperbolique si les inégalités dans la définition 2.3.1 sont strictes, c'est à dire les m valeurs propres sont distinctes.

Ainsi l'équation (2.14) est un système strictement hyperbolique du premier ordre. En effet les valeurs propres du système sont données par celles de la matrice $\xi_1 A^1(v^\epsilon) + \xi_2 A^2(v^\epsilon)$ où $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, dans l'ordre croissant :

$$\begin{aligned}\lambda_1(v^\epsilon, \xi) &= \frac{a^1(q_1^\epsilon \xi_1 + q_2^\epsilon \xi_2)}{m^\epsilon + b^1} - \sqrt{a^1 c^1 (m^\epsilon + b^1) (\xi_1^2 + \xi_2^2)}, \\ \lambda_2(v^\epsilon, \xi) &= \frac{a^1(q_1^\epsilon \xi_1 + q_2^\epsilon \xi_2)}{m^\epsilon + b^1}, \\ \lambda_3(v^\epsilon, \xi) &= \frac{a^1(q_1^\epsilon \xi_1 + q_2^\epsilon \xi_2)}{m^\epsilon + b^1} + \sqrt{a^1 c^1 (m^\epsilon + b^1) (\xi_1^2 + \xi_2^2)},\end{aligned}$$

et les vecteurs propres sont :

$$\begin{aligned}v_{\lambda_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{q_1^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} - \frac{\xi_1 \sqrt{a^1 c^1 (m^\epsilon + b^1)}}{a^1 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \\ \frac{q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} - \frac{\xi_2 \sqrt{a^1 c^1 (m^\epsilon + b^1)}}{a^1 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \end{pmatrix} \\ v_{\lambda_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\xi_1}{\xi_2} \end{pmatrix}, \text{ si } \xi_2 \neq 0 \text{ ou } v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\xi_2}{\xi_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ si } \xi_1 \neq 0 \\ v_{\lambda_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{q_1^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} + \frac{\xi_1 \sqrt{a^1 c^1 (m^\epsilon + b^1)}}{a^1 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \\ \frac{q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} + \frac{\xi_2 \sqrt{a^1 c^1 (m^\epsilon + b^1)}}{a^1 \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cependant le système (2.14) n'est pas symétrique. Ainsi nous allons introduire une propriété importante dans l'étude des systèmes d'équations hyperboliques, la symétrisabilité initiée dans les travaux de K.O. Friedrichs [11]. Dans la littérature beaucoup d'auteurs ont eu à affiner cette notion. Nous allons à travers la proposition suivante, définir la symétrisation au sens de Friedrichs :

Proposition 2.3.1. *Le système (2.14) est symétrisable au sens de Friedrichs s'il existe une matrice symétrique définie positive $B^0(v^\epsilon)$ telle que les matrices :*

$$B^0(v^\epsilon)A^j(v^\epsilon), j = 1, \dots, n,$$

soient symétriques.

Remarque 2.3.2. *Dans des travaux sur les systèmes d'équations hyperboliques de certains auteurs, cette notion de symétrisabilité au sens de Friedrichs est plutôt utilisée comme critère d'hyperbolicité des systèmes de loi de conservation (voir [23], [24], [25]).*

Le système (2.14) est symétrisable au sens de Friedrichs. En effet, en considérant la matrice B^0 symétrique définie positive suivante :

$$B^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^1} \left[\frac{a^1 q^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) \right] & -\frac{q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} & -\frac{q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} \\ -\frac{q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} & 1 & 0 \\ -\frac{q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et en le multipliant dans (2.14), nous trouvons :

$$B^0 \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 B^j \cdot \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} B^0 \cdot h(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} B^0 \cdot P(v^\epsilon, z^\epsilon) \quad (2.15)$$

avec $B^j = B^0 \cdot A^j$, $\forall i, j = 1, 2$.

B^1 et B^2 sont des matrices données respectivement par les expressions suivantes :

$$\begin{pmatrix} \frac{q_1^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \left[\frac{a^1 q^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} - c^1(m^\epsilon + b^1) \right] & -\frac{a^1 q_1^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) & -\frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} \\ -\frac{a^1 q_1^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) & -\frac{a^1 q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} & 0 \\ -\frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} & 0 & -\frac{a^1 q_1^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \left[\frac{a^1 q^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} - c^1(m^\epsilon + b^1) \right] & -\frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} & -\frac{a^1 q_2^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) \\ -\frac{a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} & -\frac{a^1 q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} & 0 \\ -\frac{a^1 q_2^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) & 0 & -\frac{a^1 q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)} \end{pmatrix}.$$

Comme

$$h(v^\epsilon) = H(v^\epsilon) - f v^\epsilon \perp = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k q_1^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} + f q_2^\epsilon \\ -\frac{k q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} - f q_1^\epsilon \end{pmatrix},$$

on définit \tilde{h} et \tilde{p} par :

$$\tilde{h}(v^\epsilon) = B^0 \cdot h(v^\epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{k q^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} \\ -\frac{k q_1^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} + f q_2^\epsilon \\ -\frac{k q_2^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} - f q_1^\epsilon \end{pmatrix}, \quad \tilde{p}(v^\epsilon, z^\epsilon) = B^0 \cdot P(v^\epsilon, z^\epsilon),$$

On obtient finalement :

$$B^0 \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 B^j \cdot \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} \tilde{h}(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} \tilde{p}(v^\epsilon, z^\epsilon). \quad (2.16)$$

Définition 2.3.2. La paire $(\lambda_k, v_{\lambda_k})$ formée de la valeur propre et de son vecteur propre associé est dite vraiment non linéaire si

$$v_{\lambda_k} \cdot \nabla \lambda_k \neq 0$$

Et la paire $(\lambda_k, v_{\lambda_k})$ est dite linéairement dégénérée si

$$v_{\lambda_k} \cdot \nabla \lambda_k = 0$$

Ainsi pour notre système, $(\lambda_k, v_{\lambda_k})$, $k = 1, 3$ sont vraiment non linéaires et $(\lambda_2, v_{\lambda_2})$ est linéairement dégénérée.

Pour avoir l'existence de solution dans le sens classique du système (2.14) on peut utiliser : les travaux de T. Kato[17] lorsque z^ϵ et ϵ sont fixés ou ceux de S. Klainerman et A. Majda[18] pour z^ϵ fixé et ϵ converge vers 0. Mais l'existence de ces solutions ne sont valables que pour de petites durées. En effet il apparaît rapidement des discontinuités. Et dans ce cas les solutions peuvent devenir régulières par

morceaux. C'est à dire le domaine espace-temps $[0, T] \times \mathbb{T}^2$ est séparé par une hypersurface Σ de sorte que de part et d'autre (par exemple Ω_- pour la partie gauche et Ω_+ pour la partie droite), les solutions sont régulières et de plus la condition dite de Rankine-Hugoniot est satisfaite sur l'hypersurface de discontinuité Σ . La condition de Rankine-Hugoniot est la suivante :

$$[v^\epsilon]n_t + \frac{1}{\epsilon^4}[F_1(v^\epsilon)]n_x + \frac{1}{\epsilon^4}[F_2(v^\epsilon)]n_y = 0$$

où $n = (n_t, n_{x_1}, n_{x_2})^t$ est le vecteur normal unitaire de Σ allant de Ω_- à Ω_+ , $[v^\epsilon] = v_+^\epsilon - v_-^\epsilon$ est appelé le saut de v^ϵ à travers l'hypersurface de discontinuité Σ , et $[F_i(v^\epsilon)] = F_i(v_+^\epsilon) - F_i(v_-^\epsilon)$, $\forall i = 1, 2$ est le saut de $F_i(v^\epsilon)$ à travers l'hypersurface de discontinuité Σ . Avec v_-^ϵ et v_+^ϵ définies, en un point $(t_0, x_0, y_0) \in \Sigma$, par :

$$v_-^\epsilon = \lim_{\substack{(t,x,y) \rightarrow (t_0,x_0,y_0) \\ (t,x,y) \in \Omega_-}} v^\epsilon(t, x, y) \text{ et } v_+^\epsilon = \lim_{\substack{(t,x,y) \rightarrow (t_0,x_0,y_0) \\ (t,x,y) \in \Omega_+}} v^\epsilon(t, x, y)$$

Les solutions régulières par morceaux sont des solutions faibles pour les équations hyperboliques. En général pour ces types d'équations, la condition initiale est insuffisante pour obtenir l'unicité de solution, de ce fait, on introduit la notion d'entropie. En effet il s'agit de chercher la solution qui satisfait à la condition d'entropie : c'est la solution physique.

On donne, ci-dessous, la définition de l'entropie.

Définition 2.3.3 (entropie). *Une fonction $\eta \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ strictement convexe est appelée entropie pour (2.11), si il existe $q_1, q_2 \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ appelés flux d'entropie tels que pour $s \in \mathbb{R}^3$:*

$$D_s q_i(s) = D_s \eta(s) \cdot D_s F_i(s), \quad \forall i = 1, 2$$

Et $(\eta, (q_1, q_2))$ est appelé paire de flux d'entropie.

En appliquant la définition 2.3.3 sur l'équation (2.11), on obtient la condition d'entropie suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(v^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} q_j(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon} D_s \eta(s) h(v^\epsilon) = 0,$$

si v^ϵ est régulier. Mais pour v^ϵ régulier par morceaux la condition d'entropie devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(v^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} q_j(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon} D_s \eta(s) h(v^\epsilon) \leq 0$$

On peut donner une définition plus générale de la notion d'entropie pour les solutions faibles non forcément régulières par morceaux. Cette forme générale de l'entropie est souvent appelée entropie paramétrisée ou en dimension un, entropie de Krushkov.

Définition 2.3.4. Une paire d'entropies paramétrisée est une paire de fonctions $\eta(u, k)$, $q(u, k)$, avec $q = (q_1, q_2)$, $q_1, q_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pour $u, k \in \mathbb{R}^3$, telles que $(\eta(u, k), q(u, k))$ est une paire d'entropies pour tout k et

$$\eta(u, k) = \eta(k, u), \quad q(u, k) = q(k, u)$$

Remarque 2.3.3. Pour les lois de conservation scalaires, la paire d'entropies de Krushkov est :

$$\eta(u, k) = |u - k|, \quad q(u, k) = \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k)), \quad k \in \mathbb{R}.$$

D'autres cas de solutions faibles sont les solutions chocs introduites par A. Majda [23]. Elles ont été étudiées par beaucoup de chercheurs dont A. Majda[22], [23], [24] et plus tard G. Métivier[25],[26]. A. Majda, dans ces travaux, a prouvé l'existence de solutions chocs frontaux multidimensionnelles pour les lois de conservation hyperboliques. Ces types de solutions sont des cas de solutions régulières par morceaux, dont l'hypersurface de discontinuité Σ est régulière(C^2).

Les solutions chocs sont caractérisées par les valeurs propres du système hyperbolique. Ainsi à chaque valeur propre λ_k de notre système hyperbolique, calculée précédemment, est associé un type de choc : 1-choc, 2-choc et 3-choc, où les indices 1, 2, 3 sont les indices des valeurs propres correspondantes. Ainsi pour ces types de solutions, on peut donner une autre définition d'entropie : entropie de Lax [20].

Définition 2.3.5 (chocs de Lax ou entropie de Lax). On considère la vitesse de propagation de la discontinuité σ . Un saut de discontinuité est appelé k -choc, $k = 1, 2, 3$, si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \lambda_{k-1}(v_-^\epsilon) < \sigma < \lambda_k(v_-^\epsilon) \\ \lambda_k(v_+^\epsilon) < \sigma < \lambda_{k+1}(v_+^\epsilon) \end{cases} \quad (2.17)$$

Remarque 2.3.4. — Si pour un k -choc, on a $\lambda_k(v_+^\epsilon) = \sigma = \lambda_k(v_-^\epsilon)$, alors on parle de discontinuité de contact.

- Conformément à la définition 2.3.2, si $(\lambda_k, v_{\lambda_k})$ est vraiment non linéaire, alors le k -choc est un choc frontal à gauche ou à droite par rapport à Σ . Tandis que si $(\lambda_k, v_{\lambda_k})$ est linéairement dégénérée, alors le k -choc est une discontinuité de contact.

Ainsi les discontinuités 1-choc et 3-choc sont des chocs frontaux respectivement à gauche et à droite de Σ , tandis que la discontinuité 2-choc est une discontinuité de contact.

2.3.2 Equation morphodynamique dans le long terme (LTDD)

L'équation (2.12) est une équation parabolique qui est dégénérée si $\mathcal{A}^\varepsilon = 0$. L'équation a été pour la première fois proposée par I. Faye, D. Seck et E. Frénod[10] ainsi que dans la thèse de I. Faye, pour modéliser le mouvement des dunes de sables sur une longue période. L'existence de solution de ce type d'équation(parabolique) est donnée par O. A. Ladyzenskaja et al[19] et I. Faye et al[9]. Nous terminons ce sous paragraphe en disant que le système couplé va faire l'objet d'une étude plus détaillée dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

Résultats d'existence et homogénéisation

3.1 Etude de régularité et estimation

Dans cette section on étudie des questions de régularité et on donne quelques estimations qui seront utilisés dans la suite. On prouve la régularité et plus précisément la C^s -différentiabilité des coefficients du système couplé mis en place au chapitre précédent.

Pour un entier $k \geq 0$, on note par $C_b^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 k -fois différentiable et dont les dérivées sont continues et bornées. De même on définit $C_b^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}(\mathbb{R}^3))$ comme étant l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R}^3 à valeurs dans $\mathbb{B}(\mathbb{R}^3)$ k -fois différentiable et dont les dérivées sont continues et bornées, avec $\mathbb{B}(\mathbb{R}^3)$ représentant l'espace des opérateurs bornés de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

Soit s un entier positif et $H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$ l'espace de Sobolev classique des fonctions définies dans le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans \mathbb{R}^3 dont les dérivées partielles au sens des distributions sont dans les espaces de Lebesgue $L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$. On définit la norme dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$ par : pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|\cdot\|_s = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha \cdot\|_0 \right)^{1/2}, \quad \text{où } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\|u\|_0^2 = \sum_{1 \leq i \leq 3} \|u_i\|_{L^2}^2.$$

On définit la norme dans $L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3))$ par :

$$\|v\|_{s,T} = \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_s$$

de même que la norme dans $C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}(\mathbb{R}^3))$:

$$\|B\|_{C_b^s} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{p \in \mathbb{R}^3} \|D_p^\alpha B(p)\|$$

où $\|\cdot\|$ est une norme de matrices définie comme suit :

$$\|B(u)\| = N_\infty(B^j(u)) = \max_{1 \leq k, l \leq 3} |B_{kl}^j(u)|, \text{ avec } |\cdot| \text{ est la valeur absolue.}$$

ou bien la suivante qui est équivalente :

$$\|B(u)\| = |B^j(u)|_\infty = \max_{1 \leq k \leq 3} \left(\sum_{1 \leq l \leq 3} |B_{kl}^j(u)| \right) = \sup_{p \neq 0} \frac{\|B^j(u) \cdot p\|_\infty}{\|p\|_\infty}$$

avec $\|p\|_\infty = \max_i |p_i|$, $p = (p_1, p_2, p_3)^t$

et une norme dans $C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$:

$$\|h\|_{C_b^s} = \sum_{|\alpha| \leq s} \left(\sup_{p \in \mathbb{R}^3} \|D_p^\alpha h(p)\|_{\mathbb{R}^3} \right)$$

Dans la suite nous allons considérer la notation suivante :

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} = \|\cdot\|$ définit la norme euclidienne \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

Proposition 3.1.1. *Soit $\omega_0 \in H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$ et $r > 0$. On suppose que $s > 2$ (ou $s \geq 3$) et soit $v^\epsilon \in \Pi = \{v \in L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) / \|v - \omega_0\|_{s, T} < r\}$. Alors :*

1. $B^j \in C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}(\mathbb{R}^3))$, $0 \leq j \leq 2$
2. $\tilde{h} \in C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$
3. $\mathcal{A}^\epsilon()$ et $\mathcal{C}^\epsilon()$ sont respectivement $C_b^s(\mathbb{R}^3)$ et $C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Preuve de la proposition 3.1.1. Comme $v^\epsilon \in \Pi$, on a v^ϵ est borné. Ainsi pour conclure sur la nature bornée des coefficients, on les majore à constante multiplicative et additive près par $\|v^\epsilon\|_{s, T}$.

1. En premier on prouve que pour $0 \leq j \leq 2$, B^j est un opérateur borné. Pour ce faire, on prouve que chaque coefficient des matrices B^j , $j = 0, 1, 2$ est bornée dans les normes matricielles définis ci-dessus.

Commençons avec un premier coefficient pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{q_i^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \left[\frac{a^1 q^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} - c^1(m^\epsilon + b^1) \right] \right| &= \left| \frac{a^1 q_i^\epsilon q^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^3} - c^1 q_i^\epsilon \right| \\ \left| \frac{a^1 q_i^\epsilon q^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^3} - c^1 q_i^\epsilon \right| &\leq \frac{a^1}{(\nu)^3} |q_i^\epsilon q^\epsilon{}^2| + c^1 |q_i^\epsilon| \leq \max\left(\frac{a^1}{(\nu)^3}, c^1\right) |q_i^\epsilon| (|q^\epsilon|^2 + 1) \end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\left| \frac{q_i^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \left[\frac{a^1 q^{\epsilon^2}}{(m^\epsilon + b^1)^2} - c^1(m^\epsilon + b^1) \right] \right| \leq C \|v^\epsilon\|_s (\|v^\epsilon\|_s^2 + 1)$$

A présent, regardons un autre coefficient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{-a^1 q_i^{\epsilon^2}}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) \right| &\leq \max\left(\frac{a^1}{(\nu)^2}, c^1, c^1 b^1\right) (\|q_i^{\epsilon^2}\|_s + \|m^\epsilon\|_s + 1) \\ \left| \frac{-a^1 q_i^{\epsilon^2}}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) \right| &\leq C (\|v^\epsilon\|_s^2 + \|v^\epsilon\|_s + 1) \end{aligned}$$

Pour les coefficients $\left| \frac{-a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} \right|$ on obtient :

$$\left| \frac{-a^1 q_1^\epsilon q_2^\epsilon}{(m^\epsilon + b^1)^2} \right| \leq \frac{a^1}{(\nu)^2} |q_1^\epsilon| |q_2^\epsilon| \leq \frac{a^1}{(\nu)^2} \|q_1^\epsilon\|_s \|q_2^\epsilon\|_s \leq \frac{a^1}{(\nu)^2} \|v^\epsilon\|_s^2$$

Un autre coefficient avec $i = 1, 2$:

$$\left| \frac{a^1 q_i^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \right| \leq \frac{a^1}{\nu} |q_i^\epsilon| \leq \frac{a^1}{b^1} \|q_i^\epsilon\|_s \leq \frac{a^1}{\nu} \|v^\epsilon\|_s$$

Pour le coefficient suivant, on a :

$$\left| \frac{1}{a^1} \left[\frac{a^1 q^{\epsilon^2}}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) \right] \right| \leq \frac{1}{(\nu)^2} |q^\epsilon|^2 + \frac{c^1}{a^1} |m^\epsilon| + \frac{c^1 b^1}{a^1}$$

Enfin pour le dernier coefficient, $i = 1, 2$, on obtient :

$$\left| \frac{-q_i^\epsilon}{m^\epsilon + b^1} \right| \leq \frac{1}{\nu} |q_i^\epsilon| \leq \frac{1}{\nu} \|q_i^\epsilon\|_s \leq \frac{1}{\nu} \|v^\epsilon\|_s$$

Ainsi on conclut que $\forall k, l = 1, 2, 3$ il existe $C > 0$ tel que

$$|B_{kl}^j(v^\epsilon)| \leq C (\|v^\epsilon\|_{s,T}^2 + \|v^\epsilon\|_{s,T} + 1) < \infty$$

Alors pour $j = 0, 1, 2$

$$|B^j(v^\epsilon)| \leq C (\|v^\epsilon\|_{s,T}^2 + \|v^\epsilon\|_{s,T} + 1) < \infty$$

Comme chaque coefficient de la matrice $B^j(\xi)$, $j = 1, 2, 3$ est s-continument dérivable par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \left\| \left| D_\xi^\alpha B^j(\xi) \right| \right\| < \infty \text{ with } D_\xi^\alpha B^j(\xi) \in C^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}(\mathbb{R}^3))$$

D'où $B^j \in C^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}(\mathbb{R}^3))$ et est borné $\Rightarrow B^j \in C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}(\mathbb{R}^3))$.

En effet

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \left\| D_\xi^\alpha B^j(\xi) \right\| < \infty \Rightarrow \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} \left\| D_\xi^\alpha B^j(\xi) \right\| < \infty \Leftrightarrow \|B^j\|_{C_b^s} < \infty$$

Ainsi $B^j \in C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{B}(\mathbb{R}^3))$, $\forall j = 0, 1, 2$.

2. Montrons que $\tilde{h} \in C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

$$\tilde{h}(v^\epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{kq^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} \\ -\frac{kq_1}{m^\epsilon + b^1} + fq_2^\epsilon \\ -\frac{kq_2}{m^\epsilon + b^1} - fq_1^\epsilon \end{pmatrix}$$

On peut voir que $\forall i = 1, 2, 3$, $\tilde{h}_i \in C^s(\mathbb{R}^3)$ alors $\tilde{h} \in C^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Il reste maintenant à montrer que chaque coefficient de \tilde{h} est borné :

$$\begin{aligned} - \left| \frac{kq^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} \right| &\leq \frac{k}{\nu^2} \|v^\epsilon\|_s^2 \\ - \left| -\frac{kq_1}{m^\epsilon + b^1} + fq_2^\epsilon \right| &\leq \frac{k}{\nu} |q_1^\epsilon| + f|q_2^\epsilon| \leq C \|v^\epsilon\|_s \\ - \left| -\frac{kq_2}{m^\epsilon + b^1} - fq_1^\epsilon \right| &\leq C \|v^\epsilon\|_s \end{aligned}$$

D'où $\exists C > 0$, $\forall i = 1, 2, 3$, $|\tilde{h}_i| \leq C \|v^\epsilon\|_{s,T} (\|v^\epsilon\|_{s,T} + 1)$.

Par le même raisonnement utilisé pour B^j , $j = 0, 1, 2$, on obtient $\|D_p^\alpha \tilde{h}(p)\|_{\mathbb{R}^3} < \infty$, ce qui implique que $\|\tilde{h}\|_{C_b^s} = \sum_{|\alpha| \leq s} (\sup_{p \in \mathbb{R}^3} \|D_p^\alpha \tilde{h}(p)\|_{\mathbb{R}^3}) < \infty$, donc $\tilde{h} \in C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

3. Enfin pour $\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon)$ et $\mathcal{C}^\epsilon(v^\epsilon)$ on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon)| &= \frac{|a(1 - b\epsilon m^\epsilon)| |q^\epsilon|^3}{|m^\epsilon + b^1|^3} \leq \frac{a}{\nu^3} \|q^\epsilon\|^3 \leq \frac{a}{\nu^3} \|v^\epsilon\|^3, \\ \|\mathcal{C}^\epsilon(v^\epsilon)\| &= \frac{|c(1 - b\epsilon m^\epsilon)| \|q^\epsilon\|^2 \|q^\epsilon\|}{|m^\epsilon + b^1|^3} \leq \frac{c}{\nu^3} \|q^\epsilon\|^3 \leq \frac{c}{\nu^3} \|v^\epsilon\|^3. \end{aligned}$$

Et comme ci-dessus on prouve que $\mathcal{A}^\epsilon()$ et $\mathcal{C}^\epsilon()$ sont respectivement $C_b^s(\mathbb{R}^3)$ et $C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

□

3.2 Existence, unicéité et estimation

Nous allons proposer dans cette section un théorème d'existence et des résultats d'estimation pour le système couplé SWE-LTDD. Avant d'exposer notre contribution, notons que dans [4] C. Berthon et al ont donné une solution analytique exacte pour l'équation en eau peu profonde couplée avec l'équation de Exner pour une décharge d'eau uniforme. Ces résultats restent valables pour notre système couplé. Mais nous utilisons la méthode proposée dans [18] pour montrer l'existence et l'unicéité et donner des estimations de notre système couplé sans supposer que la décharge d'eau est uniforme.

Dans notre contexte, puisque le paramètre petit ϵ peut être très proche de 0 cela mène à des singularités sur les coefficients du système qui deviennent grand et l'intervalle de l'existence de solutions classiques de (2.16) peut très rapidement devenir nul. Par conséquent, nous sommes dans les situations décrites dans [18] et notre objectif est d'utiliser la méthode introduite par S. Klainerman et A. Majda pour étudier notre système hyperbolique. Pour cela, on a besoin d'introduire d'abord quelques définitions et notations avant de continuer. Toutes ces définitions peuvent être trouvées sous leur forme générale dans [18].

Soit w un vecteur découpé, défini comme suit : $w := {}^t(w_1, w_2)$, $w_1 \in \mathbb{R}$, $w_2 \in \mathbb{R}^2$. Soit $d(\epsilon)$ une fonction de ϵ telle que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} d(\epsilon) = +\infty$. On définit la norme au carré associée au découpage de vecteur introduit dans la section précédente par :

$$\|w\|_\epsilon^2 = d(\epsilon)^2 |w_1|^2 + \|w_2\|^2$$

En considérant une matrice bloqué D associée au découpage de w , définie par :

$$D = \begin{pmatrix} D_{11}, D_{12} \\ D_{21}, D_{22} \end{pmatrix},$$

Alors on définit les normes associées suivantes :

$$\|D\|_\epsilon = |D_{11}| + d(\epsilon) |D_{12}| + d(\epsilon)^{-1} |D_{21}| + |D_{22}|$$

$$[D]_\epsilon = d(\epsilon)^{-2} |D_{11}| + d(\epsilon)^{-1} (|D_{12}| + |D_{21}|) + |D_{22}|$$

Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|Dw\|_\epsilon \leq C \|D\|_\epsilon \cdot \|w\|_\epsilon$$

$$|(Dw, w)| \leq C [D]_\epsilon \|w\|_\epsilon \cdot \|w\|_\epsilon$$

pour tout vecteur w avec une norme définie comme ci-dessus.

On définit également une norme de Sobolev associée par :

$$\|w\|_{s,\epsilon}^2 = d(\epsilon)^2 \|w_1\|_s^2 + \|w_2\|_s^2,$$

pour tout entier s tel que $s \geq s_0 + 1$ où $s_0 = 1$. Pour l'espace $C([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3))$, on définit les normes :

$$|||w|||_{\epsilon, T} = \sup_{t \in [0, T]} |||w(t)|||_{\epsilon}$$

et

$$|||w(t)|||_{\epsilon} = \|w(t)\|_{s, \epsilon} + \left\| \frac{dw}{dt}(t) \right\|_{s-1, \epsilon}$$

Introduisons à présent une notion importante pour notre travail : la notion de ϵ -équilibre que nous devons satisfaire pour que la méthode introduite dans [18] soit valide.

Définition 3.2.1. *Le système (2.14), satisfaisant à la théorie de Friedrichs est dit ϵ -équilibré autour d'un point fixé v^0 , si les conditions structurelles suivantes sont vérifiées :*

Il existe $\delta > 0$ indépendant de ϵ tel que les quantités suivantes soient finies :

$$\theta_{1,s}(A^j, v^0, \delta), \theta_{1,s}(h, v^0, \delta), \theta_{1,s}(P, v^0, \delta) < \infty \text{ pour } j = 1, 2 \text{ et } s \geq s_0 + 1, \quad (3.1)$$

$$\gamma_{1,1}(B^j, v^0, \delta) < \infty \text{ pour } j = 0, 1, 2 \quad (3.2)$$

Avec

$$\begin{aligned} \theta_{1,s}(\cdot, v^0, \delta) &= \theta_{1,s}(\cdot) \\ &= \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} d(\epsilon)^{-|s_1|} \max_{\|p-v^0\|_{\epsilon} \leq \delta} \left\| D_{p_1}^{s_1} D_{p_2}^{s_2} \cdot (p_1, p_2) \right\|_{\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_{1,s}(\cdot, v^0, \delta) &= \gamma_{1,s}(\cdot) \\ &= \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} d(\epsilon)^{-|s_1|} \max_{\|p-v^0\|_{\epsilon} \leq \delta} [D_{p_1}^{s_1} D_{p_2}^{s_2} \cdot (p_1, p_2)]_{\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

La matrice $B^0(v^0, \epsilon)$ étant symétrique définie positive, $(B^0(v^0, \epsilon)w, w)^{1/2}$ définit une norme dans \mathbb{R}^3 et par l'équivalence des normes en dimension fini on obtient la relation :

$$m \|w\|_{\epsilon}^2 \leq (B^0(v^0, \epsilon)w, w) \leq M \|w\|_{\epsilon}^2, \quad (3.5)$$

pour v^0 donné.

Remarque 3.2.1. *Comme $B^0(v^0, \epsilon)$ est symétrique définie positive, m et M sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre et $m > 0$, $M > 0$.*

De plus la norme $\|\cdot\|_\epsilon$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\|Bw\|_\epsilon \leq C \|B\|_\epsilon \|w\|_\epsilon, \quad (3.6)$$

$$|(Bw, w)| \leq C [B]_\epsilon \|w\|_\epsilon \|w\|_\epsilon \quad (3.7)$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 .

Comme dans [18] nous donnons quelques hypothèses sur la condition initiale du système hyperbolique avant de poursuivre notre étude.

On considère la condition initiale définie par : $v^\epsilon(t = 0, x) = v_0(x) + \tilde{v}_0^\epsilon(x)$, avec $v_0 = (v_0^I, v_0^{II})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} I. \quad v_0^I \text{ constant, } \|v_0^{II}\|_s + \left\| \sum_{j=1}^2 A^j(v_0, \epsilon) \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \right\|_{s-1, \epsilon} \leq K, \\ II. \quad \left\| \sum_{j=1}^2 A^j(v_0, \epsilon) \frac{\partial \tilde{v}_0^\epsilon}{\partial x_j} \right\|_{s-1, \epsilon} \leq K, \\ III. \quad \|\tilde{v}_0^\epsilon\|_{s, \epsilon} \leq \delta', \end{array} \right. \quad (CI2)$$

où $\delta' > 0$ est à choisir suffisamment petit.

La condition initiale (CI2) implique que v_0 vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} I. \quad v_0 \in H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3), \quad s \geq s_0 + 1 \\ II. \quad v_0^I \text{ constant,} \\ III. \quad \left\| \sum_{j=1}^2 A^j(v_0, \epsilon) \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \right\|_{s-1, \epsilon} \leq K. \end{array} \right. \quad (CI1)$$

Remarque 3.2.2. \tilde{v}_0^ϵ est une petite perturbation de la solution initiale v_0 . Comme mentionné dans [18], la méthode proposée par S. Klainerman et A. Majda est applicable pour ces types de condition initiale.

La premier résultat fondamental est le suivant :

Théorème 3.2.1. *Supposons que $v^\epsilon(0, x)$ satisfait (CI2), $z^\epsilon(0, x) = z^0(x)$ tel que $z^0 \in H^1(\mathbb{T}^2)$. Alors il existe $T > 0$ ne dépendant pas de ϵ tel que pour tout ϵ tendant vers 0, Le problème de Cauchy suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 A^j(v^\epsilon) \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} h(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} P(v^\epsilon, z^\epsilon) \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon) \nabla z^\epsilon] = \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v^\epsilon) \\ v^\epsilon(0, x) = v_0(x) + \tilde{v}_0^\epsilon(x) \\ z^\epsilon(0, x) = z^0(x) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

admet une unique solution

$$(\bar{v}^\epsilon, \bar{z}^\epsilon) \in C([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \times L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2)).$$

Et $\sqrt{\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon)} \nabla z^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))$.

De plus les estimations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \|\bar{z}^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} &\leq \tilde{\gamma}, \\ \left\| \sqrt{\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon)} \|\nabla z^\epsilon\| \right\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))}^2 &\leq \tilde{\gamma}' \\ \|\bar{v}^\epsilon(t) - v^0\|_{s, \epsilon} + \left\| \frac{d\bar{v}^\epsilon(t)}{dt} \right\|_{s-1, \epsilon} &\leq \Delta \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$, avec Δ une constante indépendante de ϵ et $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ des constantes dépendant de ϵ .

La preuve est basée sur la méthode introduite par S. Klainerman et A. Majda dans [18]. En fait on prouve que pour une suite $v^{\epsilon, n-1}$ bien choisi dans un certain espace à définir, le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v^{\epsilon, n}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 A^j(v^{\epsilon, n-1}) \frac{\partial v^{\epsilon, n}}{\partial x_j} &= \frac{1}{\epsilon} h(v^{\epsilon, n-1}) - \frac{1}{\epsilon^4} P(v^{\epsilon, n-1}, z^{\epsilon, n}) \\ \frac{\partial z^{\epsilon, n}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon, n-1}) \nabla z^{\epsilon, n}] &= \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v^{\epsilon, n-1}) \end{cases} \quad (3.9)$$

admet une solution $(v^{\epsilon, n}, z^{\epsilon, n})$. Nous verrons alors que $v^{\epsilon, n}$ et $v^{\epsilon, n-1}$ sont dans le même ensemble. Et finalement par la contraction d'une application dont on montre son existence, on conclut que cette solution converge vers $(v^{\epsilon, \infty}, z^{\epsilon, \infty})$ qui est solution de notre problème. C'est à dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial v^{\epsilon, \infty}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 A^j(v^{\epsilon, \infty}) \frac{\partial v^{\epsilon, \infty}}{\partial x_j} &= \frac{1}{\epsilon} h(v^{\epsilon, \infty}) - \frac{1}{\epsilon^4} P(v^{\epsilon, \infty}, z^{\epsilon, \infty}) \\ \frac{\partial z^{\epsilon, \infty}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon, \infty}) \nabla z^{\epsilon, \infty}] &= \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v^{\epsilon, \infty}) \end{cases} \quad (3.10)$$

La preuve du théorème 3.2.1 étant longue, nous allons donc la présenter dans la section suivante.

3.3 Preuve du théorème d'existence

On utilise la méthode introduite par de S. Klainerman et A. Majda [18] pour les systèmes d'équations hyperboliques. Il est à remarquer que dans notre cas, il

y'a un second membre dans le système qui n'était pas considéré dans [18]. On commence d'abord par donner quelques résultats préliminaires indispensables à travers des propositions. On considère l'équation (2.14) et sa forme symétrisée (2.16), avec condition initiale $v^\epsilon(0, x) = v_0(x) + \tilde{v}_0^\epsilon(x)$.

Nous allons à présent définir l'espace fonctionnel dans lequel nous cherchons la solution. Et dans cet espace fonctionnel nous allons appliquer le théorème de point fixe de Banach.

On considère l'ensemble des fonctions :

$B_T^\epsilon(v_0) = B_T^\epsilon(v_0, \delta, \Delta)$ un sous ensemble de $C([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3))$ avec $s = s_0 + 1 = 2$, tel que

$$\begin{cases} \|v - v_0\|_\epsilon \leq \delta \\ \|v - \hat{v}_0\|_{\epsilon, T} \leq \Delta, \Delta \geq \delta > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

avec $\hat{v}_0^I = v_0^I$ et $\hat{v}_0^{II} = 0$.

Pour $v \in B_T^\epsilon(v_0, \delta, \Delta)$, on définit $\Phi(v) = w$ et on considère le problème de Cauchy linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial w}{\partial x_j} = h(v, \epsilon) - P(v, z, \epsilon) & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial t} - \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon(v, \epsilon) \nabla z] = \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v, \epsilon) & (2) \\ w(0, x) = v_0(x) + \tilde{v}_0^\epsilon(x) \\ z^\epsilon(0, x) = z_0(x) \end{cases} \quad (3.12)$$

où $A^j(v, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^4} A^j(v)$, $h(v, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} h(v)$, $P(v, z, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^4} P(v, z)$, $\mathcal{A}^\epsilon(v, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{A}^\epsilon(v)$, $\mathcal{C}^\epsilon(v, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{C}^\epsilon(v)$ et $z_0 \in H^1(\mathbb{T}^2)$.

On utilise d'abord la seconde équation de (3.12) et on donne les résultats d'existence.

A) Existence de z^ϵ

On sait par Ladyzenskaja, SOLLONNIKOV et URAL' CEVA [19], LIONS [21] qu'il y'a existence et unicité de solution pour la seconde équation de (3.12) sur un intervalle de temps dépendant de ϵ . Mais dans FAYE et al [9] les auteurs prouvent l'existence de solution sur un intervalle de temps, ne dépendant pas de ϵ pour un choix particulier de v^ϵ .

En multipliant la seconde équation de (3.12) par z^ϵ et en intégrant par parties sur le tore \mathbb{T}^2 , on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{A}^\epsilon(v) (\nabla z^\epsilon)^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{T}^2} z^\epsilon \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v). \quad (3.13)$$

Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit on a $\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon) \geq 0$. Alors $\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{A}^\epsilon(v)(\nabla z^\epsilon)^2 \geq 0$. De plus, en utilisant Cauchy-Schwarz au second membre de (3.13) et le fait que $\nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v)$ est borné (voir proposition 3.1.1), on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq C(\epsilon) \|z^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \quad (3.14)$$

où $C(\epsilon)$ est une constante dépendant de ϵ .

Soit $r \in [0, T]$, en intégrant sur $[0, r]$ on obtient

$$\begin{aligned} \|z^\epsilon(r)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|z_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 &\leq 2C(\epsilon) \int_0^r \|z^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} dt, \\ \max_{r \in [0, T]} \|z^\epsilon(r)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 &\leq 2C(\epsilon)T \max_{t \in [0, T]} \|z^\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} + \|z_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \\ \|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))}^2 &\leq 2C(\epsilon)T \|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} + \|z_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ainsi, on trouve $\|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))}^2 \leq C(\epsilon)T + (C(\epsilon)^2T^2 + \|z_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2)^{1/2}$ et on définit $\tilde{\gamma} = C(\epsilon)T + (C(\epsilon)^2T^2 + \|z_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2)^{1/2}$ et $\tilde{\gamma}$ dépend de ϵ .

En utilisant (3.13) et (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{A}^\epsilon(v)(\nabla z^\epsilon)^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} z^\epsilon \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v) - \frac{\epsilon^2}{2} \frac{d}{dt} \|z^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \\ \left\| \sqrt{\mathcal{A}^\epsilon(v)} \|\nabla z^\epsilon\| \right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 &\leq C \|z^\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} + C \|z^\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \\ \left\| \sqrt{\mathcal{A}^\epsilon(v)} \|\nabla z^\epsilon\| \right\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))}^2 &\leq CT \|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} \leq CT\tilde{\gamma} \end{aligned}$$

On vient de prouver que pour tout $v \in B_T^\epsilon(v_0)$, la seconde équation du système (3.12) admet une unique solution z^ϵ . Il reste à prouver que le système complet (3.12) admet une solution. Pour ce faire il s'agira de définir un ensemble fonctionnel adéquat où nous appliquerons le théorème de point fixe classique. Remarquons que dans l'article de S. Klainerman and A. Majda [18] notre terme source $h(v^\epsilon, \epsilon) - P(v^\epsilon, z^\epsilon, \epsilon)$ n'y apparaît pas. Nous aurons donc à montrer l'existence de constantes appropriées T, Δ and δ ne dépendant pas de ϵ telles que Φ envoie $B_T^\epsilon(v_0)$ dans lui-même et Φ est une contraction pour la norme $\|\cdot\|_{0, \epsilon}$.

Alors le reste de la preuve du théorème est décomposée en trois grandes étapes :

- **ϵ -équilibre**
- **construction de l'ensemble $B_T^\epsilon(v_0, \delta, \Delta)$**
- **Φ est une contraction**

B) ϵ -équilibre

On donne d'abord cette proposition :

Proposition 3.3.1. *Supposons que la condition initiale v^0 satisfait les conditions d'initialisations (CI1). Alors le système (2.14), qui est symétrisable, est ϵ -équilibré autour de v^0 .*

Preuve de la proposition 3.3.1. Tout d'abord rappelons les notations suivantes : $A^j(v, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^4} A^j(v)$, $\forall j = 1, 2$, $B^j(v, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^4} B^j(v)$, $\forall j = 1, 2$, $B^0(v, \epsilon) = B^0(v)$, $h(v, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} h(v)$ et $P(v, z, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^4} P(v, z)$.

On définit $d(\epsilon) = \frac{\sqrt{c^1}}{\epsilon^4 d^*(\epsilon)}$ avec $d^*(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$, choisi convenablement tel que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} d^*(\epsilon) \|D_v^\alpha P(v^\epsilon, z^\epsilon)\| = 0, |\alpha| \geq 0.$$

Commençons par les coefficients de la matrice A^1 :

$$A^1 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & a^1 & 0 \\ \hline -\frac{a^1 q_1^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) & \frac{2a^1 q_1}{(m^\epsilon + b^1)} & 0 \\ -\frac{a^1 q_1 q_2}{(m^\epsilon + b^1)^2} & \frac{a^1 q_2}{(m^\epsilon + b^1)} & \frac{a^1 q_1}{(m^\epsilon + b^1)} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{pmatrix}$$

Pour $\alpha = (s_1, s_2)$, $s_1 \in \mathbb{N}$ et $s_2 \in \mathbb{N}^2$, avec $1 \leq |\alpha| \leq s$, on obtient :

$$\|D^\alpha A^1(v, \epsilon)\|_\epsilon = |D^\alpha A_{11}^1| + d(\epsilon) |D^\alpha A_{12}^1| + d(\epsilon)^{-1} |D^\alpha A_{21}^1| + |D^\alpha A_{22}^1|$$

Comme les coefficients des sous matrices A_{11}^1 , A_{12}^1 sont constants ou nuls on a :

$$|D^\alpha A_{11}^1| = 0 \text{ and } |D^\alpha A_{12}^1| = 0.$$

Et donc

$$\|D^\alpha A^1(v, \epsilon)\|_\epsilon = d(\epsilon)^{-1} |D^\alpha A_{21}^1| + |D^\alpha A_{22}^1| \leq (d(\epsilon)^{-1} + 1) \|D^\alpha A^1(v, \epsilon)\|$$

$$\|D^\alpha A^1(v, \epsilon)\|_\epsilon \leq (d(\epsilon)^{-1} + 1) \frac{1}{\epsilon^4} \|D^\alpha A^1(v)\|$$

En remplaçant α par (s_1, s_2) , multipliant par $d(\epsilon)^{-|s_1|}$ et en prenant le maximum sur ϵ , on a :

$$\theta_{1,s}(A^1, v^0, \delta) \leq \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} d(\epsilon)^{-|s_1|} (d(\epsilon)^{-1} + 1) \frac{1}{\epsilon^4} \max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} A^1(v)\| \right]$$

$$\theta_{1,s}(A^1, v^0, \delta) \leq \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} \left(\frac{d(\epsilon)^{-(|s_1|+1)}}{\epsilon^4} + \frac{d(\epsilon)^{-|s_1|}}{\epsilon^4} \right) \max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} A^1(v)\| \right]$$

Par la proposition(3.1.1), on obtient que $\max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} A^1(v)\| < \infty$. Comme $|s_1| \geq 1$ on a : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} \left(\frac{d(\epsilon)^{-(|s_1|+1)}}{\epsilon^4} + \frac{d(\epsilon)^{-|s_1|}}{\epsilon^4} \right) < \infty$. Et donc $\theta_{1,s}(A^1, v^0, \delta) < \infty$.

Un raisonnement analogue appliqué sur la matrice $A^2(v, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^4} A^2(v)$

$$A^2(v) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & a^1 \\ \hline -\frac{a^1 q_1 q_2}{(m^\epsilon + b^1)^2} & \frac{a^1 q_2}{(m^\epsilon + b^1)} & \frac{a^1 q_1}{(m^\epsilon + b^1)} \\ -\frac{a^1 q_2^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) & 0 & \frac{2a^1 q_2}{(m^\epsilon + b^1)} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Nous permet de dire que $\theta_{1,s}(A^1, v^0, \delta) < \infty$.

Prouvons à présent que la preuve de $\theta_{1,s}(h, v^0, \delta) < \infty$. On rappelle que :

$$h(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{kq_1}{m^\epsilon + b^1} + fq_2^\epsilon \\ -\frac{kq_2}{m^\epsilon + b^1} - fq_1^\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^I \\ h^{II} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\alpha = (s_1, s_2)$, $s_1 \in \mathbb{N}^*$ et $s_2 \in \mathbb{N}^2$, avec $1 \leq |\alpha| \leq s$, on a :

$$\|D^\alpha h(v, \epsilon)\|_\epsilon^2 = d(\epsilon)^2 \|D^\alpha h^I\|^2 + \|D^\alpha h^{II}\|^2$$

comme $h^I = 0$, on obtient :

$$\|D^\alpha h(v, \epsilon)\|_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \|D^\alpha h^{II}(v)\|$$

alors

$$\theta_{1,s}(h, v^0, \delta) = \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} \frac{d(\epsilon)^{-|s_1|}}{\epsilon} \max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} h^{II}(v)\| \right)$$

De la même manière que précédemment comme $|s_1| \geq 1$ et $\max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} h^{II}(v)\| < \infty$, par la proposition(3.1.1), on obtient $\theta_{1,s}(h, v^0, \delta) < \infty$.

Venons maintenant à la preuve : $\theta_{1,s}(P, v^0, \delta) < \infty$.

$\forall \alpha = (s_1, s_2)$, $s_1 \in \mathbb{N}$ et $s_2 \in \mathbb{N}^2$, avec $1 \leq |\alpha| \leq s$, on obtient :

$$\|D^\alpha P(v, z, \epsilon)\|_\epsilon^2 = d(\epsilon)^2 |D^\alpha P^I|^2 + \|D^\alpha P^{II}\|^2$$

comme $P^I = 0$ on a :

$$\|D^\alpha P(v, z, \epsilon)\|_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^4} \|D^\alpha P^{II}(v)\|$$

et donc

$$\theta_{1,s}(P, v^0, \delta) = \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} \frac{d(\epsilon)^{-|s_1|}}{\epsilon^4} \max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} P^{II}(v)\| \right)$$

Comme précédemment, $|s_1| \geq 1$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} d^*(\epsilon) \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} P(v^\epsilon, z^\epsilon)\| = 0$ on obtient $\theta_{1,s}(P, v^0, \delta) < \infty$.

Maintenant nous allons prouver que $\gamma_{1,s}(B^j, v^0, \delta) < \infty$, $j = 0, 1, 2$, qui est plus général que $\gamma_{1,1}(B^j, v^0, \delta) < \infty$, $j = 0, 1, 2$.

$$B^0 = \left(\begin{array}{c|cc} \frac{1}{a^1} \left[\frac{a^1 q^\epsilon{}^2}{(m^\epsilon + b^1)^2} + c^1(m^\epsilon + b^1) \right] & -\frac{q_1}{(m^\epsilon + b^1)} & -\frac{q_2}{(m^\epsilon + b^1)} \\ \hline -\frac{q_1}{(m^\epsilon + b^1)} & 1 & 0 \\ -\frac{q_2}{(m^\epsilon + b^1)} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\gamma_{1,s}(B^0, v^0, \delta) = \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} d(\epsilon)^{-|s_1|} \max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} [D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} B^0(v)]_\epsilon \right]$$

avec

$$[D^\alpha B^0(v, \epsilon)]_\epsilon = d(\epsilon)^{-2} |D^\alpha B_{11}^0| + d(\epsilon)^{-1} (|D^\alpha B_{12}^0| + |D^\alpha B_{21}^0|) + |D^\alpha B_{22}^0|$$

Ainsi sachant que $B^0(v, \epsilon) = B^0(v)$ on a :

$$\begin{aligned} \gamma_{1,s}(B^0, v^0, \delta) &\leq \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} d(\epsilon)^{-|s_1|} (d(\epsilon)^{-2} \right. \\ &\quad \left. + d(\epsilon)^{-1} + 1) \max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} B^0(v)\| \right], \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \gamma_{1,s}(B^0, v^0, \delta) &\leq \max_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} d(\epsilon)^{-(|s_1|+2)} \right. \\ &\quad \left. + d(\epsilon)^{-(|s_1|+1)} + d(\epsilon)^{-|s_1|} \right] \max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} B^0(v)\| \end{aligned}$$

Par la proposition(3.1.1), on a : $\max_{\|v-v^0\|_\epsilon \leq \delta} \|D_{v^I}^{s_1} D_{v^{II}}^{s_2} B^0(v)\| < \infty$, et pour $|s_1| \geq 1$, on obtient que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{1 \leq |s_1| + |s_2| \leq s} d(\epsilon)^{-(|s_1|+2)} + d(\epsilon)^{-(|s_1|+1)} + d(\epsilon)^{-|s_1|} \right) < \infty$.

Donc $\gamma_{1,s}(B^0, v^0, \delta) < \infty$.

Pour B^1 et B^2 un travail similaire à B^0 est fait pour obtenir : $\gamma_{1,s}(B^1, v^0, \delta) < \infty$ et $\gamma_{1,s}(B^2, v^0, \delta) < \infty$. \square

A partir des propositions énoncées ci-dessus, on en déduit la remarque ci-dessous. Puis on montre d'autres résultats préliminaires qui nous permettront de construire l'ensemble $B_T^\epsilon(v^0, \delta, \Delta)$.

Remarque 3.3.1. *Comme le système (2.14) est ϵ -équilibré autour de v^0 , on peut comme dans [18], dire qu'il existe une constante \tilde{K} telle que pour $\delta > 0$ et $s \geq s_0 + 1$,*

$$\begin{cases} \theta_{1,s}(A^j, v^0, \delta) \leq \tilde{K}, & \theta_{1,s}(h, v^0, \delta) \leq \tilde{K}, & \theta_{1,s}(P, v^0, \delta) \leq \tilde{K}, \\ \gamma_{1,l}(B^j, v^0, \delta) \leq \tilde{K} \end{cases} \quad (3.16)$$

C) Construction de l'ensemble $B_T^\epsilon(v^0, \delta, \Delta)$

On définit une fonction ϕ par : $\phi(t, x) = w(t, x) - \hat{v}_0(x) \Rightarrow w(t, x) = \phi(t, x) + \hat{v}_0(x)$. Et en remplaçant dans le système (1) de (3.12), nous obtenons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial x_j} = h(v, \epsilon) - P(v, z, \epsilon)$$

Ce qui donne :

$$\text{or } \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = h(v, \epsilon) - P(v, z, \epsilon) - \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial x_j}$$

Finalement la fonction ϕ satisfait le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = h(v, \epsilon) - P(v, z, \epsilon) + F(v, \epsilon) \\ \phi(0, x) = v_0(x) - \hat{v}_0(x) + \tilde{v}_0^\epsilon(x) \end{cases} \quad (3.17)$$

Avec $F(v, \epsilon) = - \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial x_j}$

où $\hat{v}_0^I = v_0^I$ est une constante et $\hat{v}_0^{II} = 0$. Alors $\frac{\partial \hat{v}_0}{\partial x_j} = 0$, Ce qui implique

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = h(v, \epsilon) - P(v, z, \epsilon)$$

Définissons une norme d'énergie noté $\|\cdot\|_E$ par :

$$\|\phi(t)\|_E^2 = \int_{\mathbb{T}^2} (B^0(v, \epsilon)\phi, \phi) dx$$

Alors, en multipliant l'équation (3.17) par B^0 puis par 2ϕ et en intégrant par rapport à $x \in \mathbb{T}^2$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \|\phi\|_E^2 = \int_{\mathbb{T}^2} (\Gamma\phi, \phi) dx + 2 \int_{\mathbb{T}^2} (B^0 \cdot (h - P + F), \phi) dx \quad (3.18)$$

$$\text{où } \Gamma = \frac{dB^0}{dt} + \sum_{j=1}^2 \frac{dB^j}{dx_j}.$$

On dérive (3.17) par rapport à (t, x) pour obtenir :

$$D^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j D^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = H_{(\alpha)} \quad (3.19)$$

avec $H_{(\alpha)} = D^\alpha h - D^\alpha P - G_{(\alpha)}$,

$$\text{et } G_{(\alpha)} = \sum_{j=1}^2 D^\alpha A^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^2 D^\alpha (A^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) - A^j D^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = [D^\alpha, A^j] \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ est un multi-indice tel que $|\alpha| \leq N$, $\alpha_0 \leq 1$. Dans la suite on considère uniquement N tel que $s_0 \leq N \leq s_0 + 1$.

Remarque 3.3.2. Des relations (3.5), (3.16) on déduit que : $\exists \delta > 0$ suffisamment petit tel que pour tout $w \in \mathbb{R}^3$:

$$- \frac{1}{2} m \|w\|_\epsilon^2 \leq (B^0(v, \epsilon)w, w) \leq 2M \|w\|_\epsilon^2$$

$$- [B^0(v, \epsilon)]_\epsilon \leq CM$$

où v satisfait à $\|v - v^0\|_\epsilon \leq \delta$ (voir [18] pour plus de détails).

De la remarque on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1. $\forall \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| \leq s$, $\alpha_0 \leq 1$ et $\forall t \in [0, T]$, on a :

$$\frac{1}{C} |||\phi(t)|||_\epsilon \leq \|D^\alpha \phi(t)\|_E \leq CM |||\phi(t)|||_\epsilon \quad (3.20)$$

En multipliant (3.17) par $2D^\alpha \phi$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \|D^\alpha \phi\|_E^2 \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^2} [\Gamma(v, \epsilon)]_\epsilon \cdot |||\phi(t)|||_\epsilon^2 + C |||\phi(t)|||_\epsilon \cdot \|H_\alpha(t)\|_{0, \epsilon} \quad (3.21)$$

Et de plus l'estimation suivante est satisfaite :

Proposition 3.3.2.

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} [\Gamma(v, \epsilon)]_\epsilon \leq C \tilde{K} \Delta, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.22)$$

Preuve de la proposition 3.3.2. $\Gamma = \frac{dB^0}{dt} + \sum_{j=1}^2 \frac{dB^j}{dx_j}$.

En remplaçant $\frac{d}{dt}$, $\frac{d}{dx_1}$, $\frac{d}{dx_2}$ respectivement par D_0 , D_1 , D_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} [\Gamma(v, \epsilon)]_\epsilon &= \left[\sum_{j=0}^2 D_j B^j \right]_\epsilon \\ &\leq \left[\sum_{j=0}^2 D_{v^I} B^j D_j v^I + D_{v^{II}} B^j D_j v^{II} \right]_\epsilon \\ &\leq C \sum_{j=0}^2 [D_{v^I} B^j]_\epsilon \|D_j v^I\|_\epsilon + [D_{v^{II}} B^j]_\epsilon \|D_j v^{II}\|_\epsilon \\ &\leq C \sum_{j=0}^2 d(\epsilon)^{-1} [D_{v^I} B^j]_\epsilon d(\epsilon) \|D_j v^I\|_\epsilon + [D_{v^{II}} B^j]_\epsilon \|D_j v^{II}\|_\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Gamma(v, \epsilon)]_\epsilon &\leq C \sum_{j=0}^2 (d(\epsilon)^{-1} [D_{v^I} B^j]_\epsilon + [D_{v^{II}} B^j]_\epsilon) \sum_{j=0}^2 (d(\epsilon) \|D_j v^I\|_\epsilon + \|D_j v^{II}\|_\epsilon) \\ &\leq C \sum_{j=0}^2 (d(\epsilon)^{-1} [D_{v^I} B^j]_\epsilon + [D_{v^{II}} B^j]_\epsilon) \sum_{j=0}^2 \|D_j v\|_\epsilon \\ &\leq C \sum_{j=0}^2 (d(\epsilon)^{-1} [D_{v^I} B^j]_\epsilon + [D_{v^{II}} B^j]_\epsilon) \|\nabla v\|_\epsilon \end{aligned}$$

Ainsi par la définition de $\gamma_{1,1}$ et puisque $\|v - v^0\|_\epsilon \leq \delta$, on obtient :

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} [\Gamma(v, \epsilon)]_\epsilon \leq C \sum_{j=0}^2 \gamma_{1,1}(B^j, v^0, \delta) \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \|\nabla v(t, x)\|_\epsilon,$$

et avec la relation (3.16), on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} [\Gamma(v, \epsilon)]_\epsilon \leq C \tilde{K} \|\nabla v(t)\|_{s-1, \epsilon}, \quad \forall t \in [0, T]$$

En utilisant (3.11) et le fait que v_j^0 est constant on obtient :

$$\|\nabla v(t)\|_{s-1,\epsilon} = \|\nabla(v(t) - \hat{v}^0)\|_{s-1,\epsilon} \leq \|v(t) - \hat{v}^0\|_{s,\epsilon} \leq \|v - \hat{v}^0\|_{\epsilon,T} \leq \Delta$$

Finalement on trouve :

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} [\Gamma(v, \epsilon)]_\epsilon \leq C\tilde{K}\Delta, \quad \forall t \in [0, T]$$

□

On a les lemmes et corollaires suivants qui vont nous être utiles pour la suite :

Lemme 3.3.1. Soient $v := {}^t(v_1, v_2) \in H^s(\mathbb{T}^2)$ et $B \in H^s(\mathbb{T}^2)$ une matrice bloquée associée à v . Alors :

1. $\|Bv\|_{s,\epsilon} \leq C_s(\|B\|_{s_0,\epsilon} \|v\|_{s,\epsilon} + \|B\|_{s,\epsilon} \|v\|_{s_0,\epsilon})$
2. $\|D_x^\alpha(Bv) - BD_x^\alpha(v)\|_{0,\epsilon} \leq C_s(\|D_x B\|_{s_0,\epsilon} \|v\|_{s-1,\epsilon} + \|D_x B\|_{s-1,\epsilon} \|v\|_{s_0,\epsilon})$

$\forall \alpha, |\alpha| \leq s$

Démonstration. Voir [18].

□

Et on a le corollaire :

Corollaire 3.3.2. $\forall \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2), |\alpha| \leq s, \alpha_0 \leq 1$ et $s = s_0 + 1$, on obtient :

$$\|D_x^\alpha(BD_i v(t)) - B(t)D^\alpha(D_i v(t))\|_{0,\epsilon} \leq C \|\nabla B(t)\|_{s-1,\epsilon} \|v(t)\|_\epsilon,$$

où $D_i, i = 1, 2$ est la dérivation par rapport à l'espace.

Lemme 3.3.2. Soient $v = (v^I, v^{II}) = v(t, x) \in C([0, T], H^s) \cap C^1([0, T], H^{s-1})$ tel que :

1. $\|v - v^0\|_\epsilon \leq \delta$
2. $\|\nabla v(t)\|_{s-1,\epsilon} \leq K$ pour $t \in [0, T]$,

et $B(v) = B(v^I, v^{II}) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{11} & B_{12} \end{bmatrix}$ une matrice bloquée s -continument différentiable par rapport à v .

Alors, $\|\nabla B(v(t))\|_{s-1,\epsilon} \leq CK^s \theta_{1,s}(B, v^0, \delta)$, avec C indépendant de ϵ, δ, K .

Démonstration. Voir [18].

□

On a la proposition suivante :

Proposition 3.3.3. Soit $G_{(\alpha)} = \sum_{j=1}^2 D^\alpha A^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$ avec $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ un multi-indice tel que $|\alpha| \leq s$, $\alpha_0 \leq 1$, alors :

$$\|G_{(\alpha)}(t)\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta^s \|\phi(t)\|_\epsilon, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.23)$$

Démonstration. Rappelons

$$G_{(\alpha)} = \sum_{j=1}^2 D^\alpha A^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^2 D^\alpha (A^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) - A^j D^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

En prenant $\|\cdot\|_{0,\epsilon}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \|G_{(\alpha)}\|_{0,\epsilon} &= \left\| \sum_{j=1}^2 D^\alpha (A^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) - A^j D^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\|_{0,\epsilon} \\ &\leq C \sum_{j=1}^2 \left\| D^\alpha (A^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) - A^j D^\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\|_{0,\epsilon} \end{aligned}$$

En appliquant le corollaire (3.3.2), on obtient :

$$\|G_{(\alpha)}\|_{0,\epsilon} \leq C \sum_{j=1}^2 \|\nabla A^j(v(t))\|_{s-1,\epsilon} \|\phi(t)\|_\epsilon$$

Or $\|\nabla v(t)\|_{s-1,\epsilon} \leq \Delta$ et avec le lemme 3.3.2 on obtient l'inégalité suivante :

$$\|G_{(\alpha)}\|_{0,\epsilon} \leq C \sum_{j=1}^2 C\Delta^s \theta_{1,s}(A^j, v^0, \delta) \|\phi(t)\|_\epsilon$$

Et finalement on a :

$$\|G_{(\alpha)}\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta^s \|\phi(t)\|_\epsilon$$

□

Lemme 3.3.3. Soit $v \in H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$, $s \geq s_0 + 1$, et pour tout $v^0 \in C(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$ donnée initiale telle que :

$$\sup_{x \in \mathbb{T}^2} \|v - v^0\|_\epsilon \leq \delta.$$

Alors, si $g(v) = g(v^I, v^{II})$ est une fonction C^s -différentiable définie sur $\{v \in H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3) : \|v - v^0\|_\epsilon \leq \delta\}$, nous avons pour tout k , $1 \leq k \leq s$,

$$\left\| D_x^k g(v) \right\|_0 \leq C \theta_{1,k}(g, v^0, \delta) \|D_x v\|_{s_0, \epsilon}^{k-1} \|D_x v\|_{s-1, \epsilon}$$

où C est une constante indépendante de ϵ , δ .

Preuve (voir [18])

□

Corollaire 3.3.3. Soient $v = (v^I, v^{II}) = v(t, x) \in C([0, T], H^s) \cap C^1([0, T], H^{s-1})$ tel que :

1. $\|v - v^0\|_\epsilon \leq \delta$

2. $\|\nabla v(t)\|_{s-1, \epsilon} \leq K$ pour $t \in [0, T]$,

et $g(v^I, v^{II})$ une fonction C^s -différentiable sur $\{v \in H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3) : \|v - v^0\|_\epsilon \leq \delta\}$. Alors, $\|\nabla g(v(t))\|_{s-1, \epsilon} \leq CK^s \theta_{1,s}(g, v^0, \delta)$, avec C indépendant de ϵ , δ , K ou T .

Démonstration. Voir [18].

□

Proposition 3.3.4. Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ un multi-indice tel que $|\alpha| \leq s$, $\alpha_0 \leq 1$, alors :

$$\|D^\alpha h(v)\|_{0, \epsilon} \leq C \tilde{K} \Delta^s \quad (3.24)$$

$$\|D^\alpha P(v, z, \epsilon)\|_{0, \epsilon} \leq C \tilde{K} \Delta^s \quad (3.25)$$

Preuve de la proposition 3.3.4. Pour $|\alpha| \leq s$, on obtient :

$$\|D_x^\alpha h(v)\|_{0, \epsilon}^2 = d(\epsilon)^2 \left\| D_x^\alpha h^I(v) \right\|_0^2 + \left\| D_x^\alpha h^{II}(v) \right\|_0^2.$$

Cela implique

$$\|D_x^\alpha h(v)\|_{0, \epsilon} \leq \|D_x^\alpha h(v)\|_{s-1, \epsilon}$$

En appliquant le lemme 3.3.3 et le corollaire 3.3.3 à $h(v, \epsilon)$ on trouve :

$$\|D_x^\alpha h(v)\|_{0, \epsilon} \leq C \theta_{1,s}(h, v^0, \delta) \Delta^s$$

et comme $\theta_{1,s}(h, v^0, \delta) \leq \tilde{K}$, on obtient :

$$\|D^\alpha h(v)\|_{0, \epsilon} \leq C \tilde{K} \Delta^s$$

Le même raisonnement est utilisé pour faire la preuve de la seconde estimation

$\|D^\alpha P(v, z, \epsilon)\|_{0, \epsilon}$, puisque $\theta_{1,s}(P, v^0, \delta) \leq \tilde{K}$. □

Proposition 3.3.5. Soit $H_{(\alpha)} = D^\alpha h - D^\alpha P - G_{(\alpha)}$ avec $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ un multi-indice tel que $|\alpha| \leq s$, $\alpha_0 \leq 1$, alors :

$$\|H_\alpha(t)\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta^s(1 + |||\phi(t)|||_\epsilon), \quad \forall t \in [0, T]$$

Preuve de la proposition 3.3.5. La preuve est simple en utilisant les propositions 3.3.3 et 3.3.4. En effet, comme on a :

$$\|H_\alpha(t)\|_{0,\epsilon} = \|D^\alpha h - D^\alpha P - G_{(\alpha)}\|_{0,\epsilon} \leq \|D^\alpha h\|_{0,\epsilon} + \|D^\alpha P\|_{0,\epsilon} + \|G_{(\alpha)}\|_{0,\epsilon},$$

on conclut en utilisant l'estimation pour chaque terme. \square

En utilisant les propositions (3.3.2) et (3.3.5) dans la relation (3.21), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \|D^\alpha \phi\|_E^2 \leq C\tilde{K}\Delta^s(1 + |||\phi(t)|||_\epsilon) |||\phi(t)|||_\epsilon$$

En appliquant (3.20) qui traduit l'équivalence des normes entre avec la norme $\|\cdot\|_E$ et $|||\cdot|||_\epsilon$, et en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$|||\phi|||_\epsilon \leq (\tilde{C}T + |||\phi(0)|||_\epsilon) \exp \tilde{C}T, \quad (3.26)$$

où $\tilde{C} = C\tilde{K}\Delta^s$, ce qui est équivalent à

$$|||\phi|||_\epsilon \leq (\tilde{C}T + \|\phi(0)\|_{s,\epsilon} + \|\partial_t \phi(0)\|_{s-1,\epsilon}) \exp \tilde{C}T \quad (3.27)$$

Rappelons que $\phi(0, x) = v^0(x) - \hat{v}^0(x) + \tilde{v}_\epsilon^0(x)$ et $\partial_t \phi(0, x) = -\sum_{j=1}^2 A^j(v^0) \frac{\partial}{\partial x_j} (v^0 + \tilde{v}_\epsilon^0)$. Et en utilisant (CI) on obtient :

$$\|\phi(0)\|_{s,\epsilon} + \|\partial_t \phi(0)\|_{s-1,\epsilon} \leq \|v^0\|_{s,\epsilon} + \|\tilde{v}_\epsilon^0\|_{s,\epsilon} + \left\| \sum_{j=1}^2 A^j(v^0) \frac{\partial}{\partial x_j} (v^0 + \tilde{v}_\epsilon^0) \right\|_{s-1,\epsilon}.$$

Et donc

$$\|\phi(0)\|_{s,\epsilon} + \|\partial_t \phi(0)\|_{s-1,\epsilon} \leq CK.$$

D'où, en remplaçant ϕ par $w - \hat{v}^0$, on obtient :

$$|||w - \hat{v}^0|||_\epsilon \leq (\tilde{C}T + CK) \exp \tilde{C}T$$

et si

$$(\tilde{C}T + CK) \exp \tilde{C}T \leq \Delta, \quad (3.28)$$

alors

$$|||w - \hat{v}^0|||_\epsilon \leq \Delta$$

Ainsi pour avoir $\|w - \hat{v}^0\| \leq \Delta$ il suffit de choisir $\Delta > \tilde{C}T + CK$ et $\tilde{C}T$ suffisamment petit.

A présent il reste à prouver que $\|w - v^0\|_\epsilon \leq \delta$ pour pouvoir conclure que $w \in B_T^\epsilon(v^0)$. Par les inégalités de Sobolev (voir section 1.1 du chapitre), il suffit de montrer que $\|w(t) - v^0\|_{s_0, \epsilon} \leq \delta$ pour $t \in [0, T]$.

Pour ce faire, on définit $\tilde{\phi} = w - v^0$, et on reproduit les mêmes étapes que précédemment pour $\tilde{\phi}$ et dans ce cas on a :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} = h(v, \epsilon) - P(v, z, \epsilon) + F(v, \epsilon) \quad (3.29)$$

avec $F(v, \epsilon) = - \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial v^0}{\partial x_j}$ et $\tilde{\phi}(0, x) = \tilde{v}_\epsilon^0(x)$.

En dérivant (3.29) s_0 -fois par rapport à x on a :

$$\frac{\partial D^\beta \tilde{\phi}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial D^\beta \tilde{\phi}}{\partial x_j} = D^\beta h(v, \epsilon) - D^\beta P(v, z, \epsilon) - G_{(\beta)} + D^\beta F(v, \epsilon), \quad (3.30)$$

où $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $|\beta| \leq s_0$.

$$G_{(\beta)} = \sum_{j=1}^2 D^\beta A^j \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^2 D^\beta (A^j \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j}) - A^j D^\beta \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} = [D^\beta, A^j] \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j}.$$

De la proposition (3.3.2) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \|D^\beta \tilde{\phi}\|_E^2 \leq C\tilde{K}\Delta \cdot \|\tilde{\phi}(t)\|_{s_0, \epsilon}^2 + C \|\tilde{\phi}(t)\|_{s_0, \epsilon} (\|H_\beta(t)\|_{0, \epsilon} + \|D^\beta F(t)\|_{0, \epsilon}) \quad (3.31)$$

Et la proposition(3.3.5) nous donne :

$$\|H_\beta(t)\|_{0, \epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta^s \cdot (1 + \|\tilde{\phi}(t)\|_\epsilon).$$

Et sachant que $\tilde{\phi} = w - v^0$, $\|\tilde{\phi}(t)\|_\epsilon \leq \|w - \hat{v}^0\|_{\epsilon, T} + \|v_{II}^0\| \leq \Delta + K$ et $\Delta \geq K$ on trouve :

$$\|H_\beta(t)\|_{0, \epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta^s(1 + \Delta + K) \leq C\tilde{K}\Delta^{s+1} \quad (3.32)$$

Présentons le lemme suivant utile pour la suite :

Lemme 3.3.4. Soient $v, \bar{v} \in C([0, T], H^s) \cap C^1([0, T], H^{s-1})$ tels que $\|v - v^0\|_\epsilon \leq \delta$ et $\|\bar{v} - v^0\|_\epsilon \leq \delta$ pour tout $x \in \mathbb{T}^2$, $t \in [0, T]$. Alors,

$$\|B(v(t), \epsilon) - B(\bar{v}(t), \epsilon)\|_{0, \epsilon} \leq C\theta_{1,1}(B, v^0, \delta) \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0, \epsilon}, \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

Démonstration. $B(v(t), \epsilon) - B(\bar{v}(t), \epsilon) = \int_{\bar{v}}^v D_u B(u(t), \epsilon) du.$

On fait le changement de variable $u = \lambda v + (1 - \lambda)\bar{v}$, $\lambda \in [0, 1]$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
B(v(t), \epsilon) - B(\bar{v}(t), \epsilon) &= \left(\int_0^1 D_u B(u, \epsilon) d\lambda \right) (v - \bar{v}) \\
&= \left(\int_0^1 D_{u^I} B(u, \epsilon) d\lambda \right) (v^I - \bar{v}^I) \\
&\quad + \left(\int_0^1 D_{u^{II}} B(u, \epsilon) d\lambda \right) (v^{II} - \bar{v}^{II}) \\
\|B(v(t), \epsilon) - B(\bar{v}(t), \epsilon)\|_\epsilon &\leq d(\epsilon)^{-1} \left| \int_0^1 D_{u^I} B(u, \epsilon) d\lambda \right| d(\epsilon) \|v^I - \bar{v}^I\| \\
&\quad + \left| \int_0^1 D_{u^{II}} B(u, \epsilon) d\lambda \right| \|v^{II} - \bar{v}^{II}\| \\
&\leq \sup_{\|u-u_0\|_\epsilon \leq \delta} (d(\epsilon)^{-1} \left| \int_0^1 D_{u^I} B(u, \epsilon) d\lambda \right| \\
&\quad + \left| \int_0^1 D_{u^{II}} B(u, \epsilon) d\lambda \right|) \|v - \bar{v}\|_\epsilon \\
&\leq C \sup_{\|u-u_0\|_\epsilon \leq \delta} (d(\epsilon)^{-1} |D_{u^I} B(u, \epsilon)| \\
&\quad + |D_{u^{II}} B(u, \epsilon)|) \|v - \bar{v}\|_\epsilon \\
&\leq C\theta_{11}(B, u^0, \delta) \|v - \bar{v}\|_\epsilon
\end{aligned}$$

Puis en prenant la norme L^2 , on obtient le résultat. \square

Proposition 3.3.6. *Soit F définie par $F(v, \epsilon) = -\sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial v^0}{\partial x_j}$, alors :*

$$\|D^\beta F(t)\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta^{s+2} \quad (3.33)$$

Preuve de la proposition 3.3.6. Comme $F(v, \epsilon) = -\sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial v^0}{\partial x_j}$, on peut le réécrire ainsi :

$$F(v, \epsilon) = -\sum_{j=1}^2 (A^j(v) - A^j(v^0)) \cdot \frac{\partial v^0}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^2 A^j(v^0) \cdot \frac{\partial v^0}{\partial x_j}.$$

Par le lemme (3.3.1) et avec les conditions initiales (CI2), on obtient :

$$\begin{aligned} \|D^\beta F(t)\|_{0,\epsilon} &\leq CK \left(\sum_{j=1}^2 \|(A^j(v) - A^j(v^0))\|_{s_0,\epsilon} + 1 \right) \\ &\leq CK \left(\sum_{j=1}^2 \|(A^j(v) - A^j(v^0))\|_{0,\epsilon} + \|\nabla A^j(v)\|_{s_0-1,\epsilon} + \|\nabla A^j(v^0)\|_{s_0-1,\epsilon} + 1 \right) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme (3.3.2), on obtient :

$$\|D^\beta F(t)\|_{0,\epsilon} \leq CK \left(\sum_{j=1}^2 \|(A^j(v) - A^j(v^0))\|_{0,\epsilon} + \tilde{K}\Delta \right)$$

Et l'utilisation du lemme (3.3.4) nous donne :

$$\|D^\beta F(t)\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta^{s+1} (\|v(t) - v^0\|_{0,\epsilon} + 1)$$

or $\|v(t) - v^0\|_{0,\epsilon} \leq \|v(t) - \tilde{v}^0\|_{0,\epsilon} + \|v^0\|_{0,\epsilon} \leq 2\Delta$, on en déduit

$$\|D^\beta F(t)\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta^{s+2}$$

□

Alors (3.32) et (3.33) dans (3.31) nous donne :

$$\frac{d}{dt} \|D^\beta \phi\|_E^2 \leq C\tilde{K}\Delta^{s+2} \cdot \|\tilde{\phi}(t)\|_{s-1,\epsilon} \cdot (1 + \|\tilde{\phi}(t)\|_{s-1,\epsilon})$$

En utilisant (3.20) et l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$\|\tilde{\phi}(t)\|_{s-1,\epsilon} \leq (\tilde{C}T + \|\tilde{\phi}(0)\|_{s-1,\epsilon}) \exp \tilde{C}T, \quad (3.34)$$

où $\tilde{C} = C\tilde{K}\Delta^{s+2}$.

Comme $\|\tilde{\phi}(0)\|_{s-1,\epsilon} = \|\tilde{v}_\epsilon^0\|_{s-1,\epsilon} \leq \|\tilde{v}_\epsilon^0\|_{s,\epsilon} \leq \delta'$, d'où $\|\tilde{\phi}(0)\|_{s-1,\epsilon} \leq \delta'$. Pour $\tilde{\phi}(t, x) = w(t, x) - v^0$, on obtient :

$$\|w(t) - v^0\|_{s-1,\epsilon} \leq (\tilde{C}T + \delta') \exp \tilde{C}T, \quad (3.35)$$

L'inégalité de Sobolev nous donne : Il existe $L > 0$ tel que

$$\|w(t, x) - v^0\|_\epsilon \leq L \|w(t) - v^0\|_{s-1,\epsilon}$$

et en utilisant (3.35) on a :

$$\|w(t, x) - v^0\|_\epsilon \leq L(\tilde{C}T + \delta') \exp \tilde{C}T$$

Si nous choisissons T suffisamment petit et $\delta' \leq \delta/L$ on peut avoir

$$(\tilde{C}T + \delta') \exp \tilde{C}T \leq \delta/L, \quad (3.36)$$

alors $L(\tilde{C}T + \delta') \exp \tilde{C}T \leq \delta$. Et finalement

$$\|w(t, x) - v^0\|_\epsilon \leq \delta.$$

Ainsi on peut conclure que pour T choisi suffisamment petit, dépendant uniquement de K , \tilde{K} , m , M , tel que (3.28) et (3.36) soient satisfaits avec $\Delta > K$, la fonction Φ envoie l'ensemble $B_T^\epsilon(v^0, \delta, \Delta)$ dans lui même.

D) Φ est une contraction :

Montrons à présent que Φ est une contraction dans $B_T^\epsilon(v^0, \delta, \Delta)$ par rapport au norme $\|\cdot\|_{0,\epsilon}$.

On commence par le lemme suivant :

Lemme 3.3.5. *Soient $v, \bar{v} \in B_T^\epsilon(v^0)$ pour tout $x \in \mathbb{T}^2$ et $t \in [0, T]$. Alors*

$$\|B(v(t), \epsilon) - B(\bar{v}(t), \epsilon)\|_{0,\epsilon} \leq C\theta_{1,1}(B, v^0, \delta) \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0,\epsilon}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Preuve (voir [18])

□

Proposition 3.3.7. *Soit T suffisamment petit, dépendant uniquement de K , \tilde{K} , m , M , alors Φ envoie l'ensemble $B_T^\epsilon(v^0, \delta, \Delta)$ dans lui même et*

$$\exists \mu \in]0, 1[: \|\Phi(v(t)) - \Phi(\bar{v}(t))\|_{0,\epsilon} \leq \mu \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0,\epsilon},$$

pour tout $t \in [0, T]$, $v, \bar{v} \in B_T^\epsilon(v^0)$.

Démonstration. On définit $\psi = w - \bar{w}$ avec $w = \Phi(v)$ et $\bar{w} = \Phi(\bar{v})$. La définition de Φ est telle que on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A^j(v, \epsilon) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = H - \mathcal{P} + F \quad (3.37)$$

où $H = h(v, \epsilon) - h(\bar{v}, \epsilon)$, $\mathcal{P} = -P(v, z, \epsilon) + P(\bar{v}, z, \epsilon)$

et $F = \sum_{j=1}^2 (A^j(v, \epsilon) - A^j(\bar{v}, \epsilon)) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_j}$.

De plus $\psi(0, x) = 0$.

En multipliant (3.37) par $2\psi B^0$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \|\psi\|_E^2 \leq C\tilde{K}\Delta \cdot \|\psi(t)\|_{0,\epsilon}^2 + C \|\psi(t)\|_{0,\epsilon} \cdot (\|H(t)\|_{0,\epsilon} + \|\mathcal{P}\|_{0,\epsilon} + \|F(t)\|_{0,\epsilon}). \quad (3.38)$$

Par le lemme 3.3.5 on a :

$$\|H(t)\|_{0,\epsilon} \leq C\theta_{1,1}(h, v^0, \delta) \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K} \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0,\epsilon} \quad (3.39)$$

Et pour l'estimation de $\|F(t)\|_{0,\epsilon}$, en utilisant encore le lemme 3.3.5 et inégalité de Sobolev on obtient :

$$\begin{aligned} \|F(t)\|_{0,\epsilon} &\leq C \sum_{j=1}^2 \|A^j(v, \epsilon) - A^j(\bar{v}, \epsilon)\|_{0,\epsilon} \left\| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} \right\|_{s_0,\epsilon} \\ &\leq C\tilde{K} \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0,\epsilon} (\|v(t) - \hat{v}^0\|_{\epsilon} + \|\bar{v}(t) - \hat{v}^0\|_{\epsilon}), \end{aligned}$$

et donc

$$\|F(t)\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K}\Delta \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0,\epsilon}. \quad (3.40)$$

Puisque $\|\mathcal{P}\|_{0,\epsilon} = \|P(v, z, \epsilon) - P(\bar{v}, \bar{z}, \epsilon)\|_{0,\epsilon}$ on a :

$$\|\mathcal{P}\|_{0,\epsilon} \leq \|P(v, z, \epsilon) - P(\bar{v}, z, \epsilon)\|_{0,\epsilon} + \|P(\bar{v}, z, \epsilon) - P(\bar{v}, \bar{z}, \epsilon)\|_{0,\epsilon}.$$

Par le lemme 3.3.5 nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}\|_{0,\epsilon} &\leq C\theta_{1,1}(P, v^0, \delta) \|v - \bar{v}\|_{0,\epsilon} + C \\ &\leq C\tilde{K} \|v - \bar{v}\|_{0,\epsilon} + C \end{aligned}$$

Comme $\|v - \bar{v}\|_{0,\epsilon}$ est borné, il existe $\tilde{C} > 0$ tel que :

$$\tilde{C} \|v - \bar{v}\|_{0,\epsilon} \leq C\tilde{K} \|v - \bar{v}\|_{0,\epsilon} + C$$

Et quand $\|v - \bar{v}\|_{0,\epsilon} = 0$, par l'unicité de la solution de la seconde équation de (3.12), nous obtenons $z = \bar{z}$. Cela implique que $\|\mathcal{P}\|_{0,\epsilon} = 0$.

Finalement on obtient :

$$\|\mathcal{P}\|_{0,\epsilon} \leq \tilde{C} \|v - \bar{v}\|_{0,\epsilon} \quad (3.41)$$

En utilisant (3.39), (3.40) et (3.41) dans (3.38) et en appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\|\psi(t)\|_{0,\epsilon} \leq (\|\psi(0)\|_{0,\epsilon} + \tilde{C} \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0,\epsilon}) \cdot T \exp \tilde{C}T \quad (3.42)$$

où $\tilde{C} = C\tilde{K}^2\Delta^2$. Alors

$$\|\Phi(v(t)) - \Phi(\bar{v}(t))\|_{0,\epsilon} \leq \tilde{C}T \cdot \|v(t) - \bar{v}(t)\|_{0,\epsilon} \exp \tilde{C}T,$$

□

D) Fin de la preuve :

En résumé la méthode suivie construit une suite de solutions $(v^{\epsilon,n}, z^{\epsilon,n})_{n \in \mathbb{N}}$, du système (3.12), définie comme suit :

$$\begin{cases} v^{\epsilon,0} \in B_T^\epsilon(v^0) \\ v^{\epsilon,n} = \Phi(v^{\epsilon,n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ z^{\epsilon,n} \end{cases} \quad (3.43)$$

et satisfait (3.9). où Φ envoie $B_T^\epsilon(v^0)$ dans lui-même et est une contraction pour la norme $\|\cdot\|_{0,\epsilon}$ c'est à dire il existe μ , $0 < \mu < 1$ tel que

$$\begin{aligned} \|v^{\epsilon,n} - v^{\epsilon,n-1}\|_{0,\epsilon} &\leq \mu \|v^{\epsilon,n-1} - v^{\epsilon,n-2}\|_{0,\epsilon} \\ &\leq \mu^n \|v^{\epsilon,1} - v^{\epsilon,0}\|_{0,\epsilon} \\ \Rightarrow \|v^{\epsilon,n} - v^{\epsilon,n-1}\|_{0,\epsilon} &\rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

alors $\|v^{\epsilon,n} - v^\infty\|_{0,\epsilon} \rightarrow 0$ uniformément en t et v^∞ est un point fixe de Φ c'est à dire $\Phi(v^\infty) = v^\infty$.

De plus comme $\mathcal{A}^\epsilon(v)$, $\mathcal{C}^\epsilon(v)$ sont respectivement $C_b^s(\mathbb{R}^3)$ and $C_b^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et par la continuité du produit et de dérivation, on conclut que $(v^{\epsilon,n}, z^{\epsilon,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(v^{\epsilon,\infty}, z^{\epsilon,\infty})$ solution du système (3.12).

Aussi

$$\begin{aligned} v^{\epsilon,\infty} &\in C([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \text{ et} \\ z^{\epsilon,\infty} &\in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2)) \end{aligned}$$

Remarque 3.3.3. *Par les lemmes de Sobolev donnés à la section 1.1 du chapitre , on obtient*

$$C([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \subseteq C^1([0, T] \times \mathbb{T}^2)$$

alors $v^{\epsilon,\infty}$ est régulier et il s'en suit que

$$v^{\epsilon,\infty} \in L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \cap Lip([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \text{ (cf [18]).}$$

Ce qui termine la preuve du théorème 3.2.1 \square

Remarque 3.3.4. *S'il existe $C_0 > 0$ pour tout $\epsilon > 0$ $\|P(v^\epsilon, z^\epsilon)\| \leq C_0$, alors il existe $C > 0$ tel que $\|\nabla z^\epsilon\| \leq C$ car $m^\epsilon + b^1$ est borné. Et on en déduit que $z^\epsilon(t) \in C_b(\mathbb{T}^2)$.*

Alors on obtient $z^\epsilon \in L^\infty([0, T], C_b(\mathbb{T}^2))$ et $\nabla z^\epsilon \in L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{T}^2))$.

Remarque 3.3.5. : Un cas particulier

Dans cette remarque on s'intéresse à un cas particulier où $m^\epsilon(t, x) = 0$ et \mathcal{Q}_0 ne

dépend pas de t et x . Ce cas apparaît dans le papier de Faye et al [9].

C'est à dire $v^\epsilon = (0, q^\epsilon(\theta))$ et $\nabla F(v^\epsilon) = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est une autre échelle de temps ne dépendant pas de t, x . Alors (2.10) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q^\epsilon(\theta)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} h(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} P(v^\epsilon, z^\epsilon) \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon] = \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \end{array} \right.$$

Il s'en suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{k}{b^1} q_1^\epsilon(\theta) + f q_2^\epsilon(\theta) \right) - \frac{1}{\epsilon^4} d^1 b^1 \frac{\partial z^\epsilon}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{k}{b^1} q_2^\epsilon(\theta) - f q_1^\epsilon(\theta) \right) - \frac{1}{\epsilon^4} d^1 b^1 \frac{\partial z^\epsilon}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot \left[\frac{a}{(b^1)^3} \|q^\epsilon(\theta)\|^3 \nabla z^\epsilon \right] = 0. \end{array} \right.$$

En dérivant la première et la seconde équation par rapport à t et la troisième par rapport à x , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\epsilon^4} d^1 b^1 \frac{\partial^2 z^\epsilon}{\partial t \partial x_1} = 0 \\ -\frac{1}{\epsilon^4} d^1 b^1 \frac{\partial^2 z^\epsilon}{\partial t \partial x_2} = 0 \\ \nabla \left(\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} \right) - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla [\nabla \cdot \left[\frac{a}{(b^1)^3} \|q^\epsilon(\theta)\|^3 \nabla z^\epsilon \right]] = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit $\nabla \left(\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} \right) = \frac{\partial \nabla z^\epsilon}{\partial t} = 0$ et finalement :

$$\nabla [\nabla \cdot \left[\frac{a}{(b^1)^3} \|q^\epsilon(\theta)\|^3 \nabla z^\epsilon \right]] = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left[\frac{a}{(b^1)^3} \|q^\epsilon(\theta)\|^3 \nabla z^\epsilon \right] = C$$

avec $C > 0$. Cela implique l'EDP suivante dont l'inconnu est z^ϵ :

$$\frac{a}{(b^1)^3} \|q^\epsilon(\theta)\|^3 \Delta z^\epsilon = C$$

Ainsi si $\|q^\epsilon(\theta)\| \neq 0$, une solution peut être obtenue comme suit :

$$z^\epsilon(\theta, x) = \frac{C}{2} \left(\frac{a}{(b^1)^3} \|q^\epsilon(\theta)\|^3 \right)^{-1} \|x\|^2 + (C_1, x) + C_2$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}_+^2$, $C_2 > 0$ and (\cdot, \cdot) est un produit scalaire de \mathbb{R}^2 .

3.4 Homogénéisation

Dans cette section nous allons prouver que la solution du système SWE-LTDD adimensionné converge à 2-échelle vers un profil qui est solution de l'équation homogénéisé de SWE-LTDD. Pour cela nous allons utiliser les définitions et théorèmes sur la convergence à 2 échelles introduites dans la section 1.2 du chapitre 1. De la preuve du théorème(3.2.1) on voit que :
 $(\bar{v}^\epsilon, \bar{z}^\epsilon) \in L^\infty([0, T], H^s(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \cap Lip([0, T], H^{s-1}(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)) \times L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))$,
 et la solution satisfait l'estimation :

$$\|\bar{v}^\epsilon(t) - v^0\|_{s,\epsilon} + \left\| \frac{\partial \bar{v}^\epsilon}{\partial t} \right\|_{s-1,\epsilon} \leq \Delta,$$

pour tout $t \in [0, T]$ et Δ ne dépendant pas de ϵ .

De ces estimations on déduit des estimations dans les espaces de Sobolev H^s et H^{s-1} , muni des normes de Sobolev, introduites antérieurement. Alors on obtient :

$$\|\bar{v}^\epsilon(t) - v^0\|_{s,\epsilon} + \left\| \frac{\partial \bar{v}^\epsilon}{\partial t} \right\|_{s-1,\epsilon} \leq \Delta,$$

Cela implique que

$$\|\bar{v}^\epsilon(t) - v^0\|_s + \left\| \frac{\partial \bar{v}^\epsilon}{\partial t} \right\|_{s-1} \leq C,$$

avec C ne dépendant pas de ϵ .

Pour des raisons mathématiques, on peut prendre \bar{v}^ϵ dans l'espace $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3))$ satisfaisant à l'estimation suivante

$$\|\bar{v}^\epsilon(t) - v^0\|_0 + \left\| \frac{\partial \bar{v}^\epsilon}{\partial t} \right\|_0 \leq C.$$

On peut remarquer que les deux équations du système (3.12) n'ont pas le même ordre par rapport aux puissances de ϵ . Il est donc nécessaire de faire une analyse supplémentaire.

Commençons par donner l'hypothèse suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \epsilon > 0 \text{ le terme source de l'équation sans dimension LTDD} \\ \text{ne peut être infinie. C'est à dire : } \exists C > 0 \forall \epsilon \in (0, 1] \text{ petit} \\ \text{tel que } |\nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v^\epsilon)| \leq \epsilon^2 C. \end{array} \right. \quad (\text{H})$$

Remarque 3.4.1. — *Pour obtenir une estimation de z^ϵ indépendant de ϵ , nous avons besoin de (H). Cette situation est bien possible, voir par exemple [9], où il a été montré que $|\nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon| \leq C\epsilon$, où C est une constante.*

— Sous les hypothèses (H), $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ introduite dans le théorème 3.2.1, section 3.3-A) ne dépend pas de ϵ .

On a le théorème d'homogénéisation énoncé comme suit :

Théorème 3.4.1. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, on obtient*

$$\begin{cases} \bar{v}^\epsilon \xrightarrow{2-s} \bar{v} \in L^\infty([0, T], L^\infty_{per}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3))) \\ \bar{z}^\epsilon \xrightarrow{2-s} \bar{z} \in L^\infty([0, T], L^\infty_{per}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))) \end{cases}$$

Et les fonctions limites satisfont :

$$\begin{cases} \bar{B}^1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \bar{B}^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_2} = -\bar{p}(\bar{v}, \bar{z}) & \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \\ -\nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla \bar{z}) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} & \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2, \end{cases} \quad (3.44)$$

avec

$$\begin{aligned} B^1(\bar{v}^\epsilon) &= B^1(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \bar{B}^1(t, \theta, x) = \bar{B}^1(\bar{v}) \\ B^2(\bar{v}^\epsilon) &= B^2(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \bar{B}^2(t, \theta, x) = \bar{B}^2(\bar{v}) \\ \tilde{p}(\bar{v}^\epsilon, \bar{z}^\epsilon) &\xrightarrow{2-s} \bar{p}(\bar{v}, \bar{z}) \\ \mathcal{A}^\epsilon(\bar{v}^\epsilon) &= \mathcal{A}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) \\ \mathcal{C}^\epsilon(\bar{v}^\epsilon) &= \mathcal{C}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) \end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons l'équation (2.16)

$$B^0 \frac{\partial}{\partial t} [v^\epsilon] + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 B^j \cdot \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} \tilde{h}(v^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon^4} \tilde{p}(v^\epsilon, z^\epsilon),$$

et considérons $\psi^\epsilon(t, x) = \psi(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ une fonction test régulière et à valeur dans \mathbb{R}^3 avec $\text{supp}(\psi^\epsilon) \subset [0, T] \times \mathbb{T}^2$ et $\theta \mapsto \psi(t, \theta, x)$ est 1-périodique dans θ .

En multipliant (2.16) par ψ^ϵ et en intégrant on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} B^0 \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} \psi^\epsilon dt dx + \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} B^1 \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_1} \psi^\epsilon dt dx + \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} B^2 \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_2} \psi^\epsilon dt dx \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{h} \psi^\epsilon dt dx - \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{p} \psi^\epsilon dt dx \\ & - \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T v^\epsilon \frac{\partial (B^0 \psi^\epsilon)}{\partial t} dt dx - \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} v^\epsilon \frac{\partial (B^1 \psi^\epsilon)}{\partial x_1} dt dx \\ & - \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} v^\epsilon \frac{\partial (B^2 \psi^\epsilon)}{\partial x_2} dt dx + \int_{\mathbb{T}^2} [B^0 v^\epsilon \psi^\epsilon]_0^T = \\ & \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{h} \psi^\epsilon dt dx - \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{p} \psi^\epsilon dt dx \end{aligned}$$

Notons que $\frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) = \frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial \theta}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$,

alors on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T v^\epsilon \frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial t} dt dx - \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T v^\epsilon \frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial \theta} dt dx \\ & - \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} v^\epsilon \frac{\partial(B^1\psi^\epsilon)}{\partial x_1} dt dx - \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} v^\epsilon \frac{\partial(B^2\psi^\epsilon)}{\partial x_2} dt dx = \\ & \quad \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{h}\psi^\epsilon dt dx - \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{p}\psi^\epsilon dt dx + \int_{\mathbb{T}^2} B_0^0 v_0^\epsilon \psi^\epsilon(0, 0, x) dx \\ & - \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T v^\epsilon \left(\frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial \theta} + \frac{1}{\epsilon^4} \frac{\partial(B^1\psi^\epsilon)}{\partial x_1} + \frac{1}{\epsilon^4} \frac{\partial(B^2\psi^\epsilon)}{\partial x_2} \right) dt dx = \\ & \quad \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{h}\psi^\epsilon dt dx - \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{p}\psi^\epsilon dt dx + \int_{\mathbb{T}^2} B_0^0 v_0^\epsilon \psi^\epsilon(0, 0, x) dx \end{aligned}$$

en multipliant par ϵ^4 , on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T v^\epsilon \left(\epsilon^4 \frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial t} + \epsilon^3 \frac{\partial(B^0\psi^\epsilon)}{\partial \theta} + \frac{\partial(B^1\psi^\epsilon)}{\partial x_1} + \frac{\partial(B^2\psi^\epsilon)}{\partial x_2} \right) dt dx = \\ & \quad \epsilon^3 \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{h}\psi^\epsilon dt dx - \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{p}\psi^\epsilon dt dx + \epsilon^4 \int_{\mathbb{T}^2} B_0^0 v_0^\epsilon \psi^\epsilon(0, 0, x) dx \end{aligned}$$

en passant à la limite lorsque ϵ tend vers 0, nous obtenons :

$$- \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \int_0^1 \bar{v} \left(\frac{\partial(\bar{B}^1\psi)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\bar{B}^2\psi)}{\partial x_2} \right) d\theta dt dx = - \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \int_0^1 \bar{p}\psi dt dx$$

qui est la formulation variationnelle de

$$\bar{B}^1 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \bar{B}^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_2} = -\bar{p}(\bar{v}, \bar{z})$$

avec

$$B^1(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \bar{B}^1(t, \theta, x), \quad B^2(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \bar{B}^2(t, \theta, x) \text{ et } \tilde{p}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \bar{p}(t, \theta, x).$$

En notant $\bar{v} = (\bar{m}, \bar{q})$, on a :

$$\bar{B}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\bar{q}_1}{\bar{m} + b^1} \left[\frac{a^1 \bar{q}^2}{(\bar{m} + b^1)^2} - c^1(\bar{m} + b^1) \right] & - \frac{a^1 \bar{q}_1^2}{(\bar{m} + b^1)^2} + c^1(\bar{m} + b^1) & - \frac{a^1 \bar{q}_1 \bar{q}_2}{(\bar{m} + b^1)^2} \\ - \frac{a^1 \bar{q}_1^2}{(\bar{m} + b^1)^2} + c^1(\bar{m} + b^1) & - \frac{a^1 \bar{q}_1}{(\bar{m} + b^1)} & 0 \\ - \frac{a^1 \bar{q}_1 \bar{q}_2}{(\bar{m} + b^1)^2} & 0 & - \frac{a^1 \bar{q}_1}{(\bar{m} + b^1)} \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{\bar{q}_2}{\bar{m} + b^1} \left[\frac{a^1 \bar{q}^2}{(\bar{m} + b^1)^2} - c^1(\bar{m} + b^1) \right] & -\frac{a^1 \bar{q}_1 \bar{q}_2}{(\bar{m} + b^1)^2} & -\frac{a^1 \bar{q}_2^2}{(\bar{m} + b^1)^2} + c^1(\bar{m} + b^1) \\ -\frac{a^1 \bar{q}_1 \bar{q}_2}{(\bar{m} + b^1)^2} & -\frac{a^1 \bar{q}_2}{(\bar{m} + b^1)} & 0 \\ -\frac{a^1 \bar{q}_2^2}{(\bar{m} + b^1)^2} + c^1(\bar{m} + b^1) & 0 & -\frac{a^1 \bar{q}_2}{(\bar{m} + b^1)} \end{pmatrix}.$$

A présent on rappelle l'équation du long terme dynamique des dunes de sable (2.12) :

$$\begin{cases} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon(\bar{v}^\epsilon) \nabla z^\epsilon] = \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(\bar{v}^\epsilon) \\ z^\epsilon(t=0, x, y) = z_0 \in H^1(\mathbb{T}^2) \end{cases}$$

Par le théorème (3.2.1) nous avons l'existence de solution \bar{z}^ϵ de l'équation (2.12) dans $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))$ et bornée indépendamment de ϵ . Alors en multipliant (2.12) par les fonctions tests $\psi^\epsilon(t, x) = \psi(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ régulières à support compact dans $[0, T] \times \mathbb{T}^2$ et $\theta \mapsto \psi(t, \theta, x)$ 1-périodique dans θ , en intégrant sur $[0, T] \times \mathbb{T}^2$, en multipliant encore par ϵ^2 et finalement en passant à la limite on trouve :

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^1 \bar{z} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla \psi) d\theta dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^1 (\nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}) \psi d\theta dx dt.$$

Alors on obtient :

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla \bar{z}) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) &\xrightarrow{2-s} \tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) \in L^\infty([0, T], L_{per}^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))) \\ \mathcal{C}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) &\xrightarrow{2-s} \tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) \in L^\infty([0, T], L_{per}^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))) \end{aligned}$$

□

Remarque 3.4.2. Comme dans [9] si on considère les hypothèses suivantes sur les solutions v^ϵ :

$$\begin{aligned} m^\epsilon &= \mathcal{M}_1(\theta, x) + \epsilon^2 \mathcal{M}_2(t, \theta, x) \\ q^\epsilon(t, x) &= \mathcal{Q}_0(\theta) + \mathcal{Q}_1(\theta, x) + \epsilon \mathcal{Q}_2(\theta, x) + \epsilon^2 \mathcal{Q}_3(t, \theta, x) \\ &\quad + \epsilon^3 \mathcal{Q}_4(t, \theta, x) + \epsilon^4 \mathcal{Q}_5(t, \theta, x), \end{aligned}$$

alors on peut voir que

$$q^\epsilon(t, x) = q(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \mathcal{Q}_0(\theta) \quad \text{and} \quad m^\epsilon(t, x) = m(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \xrightarrow{2-s} \mathcal{M}_1(\theta, x)$$

Ainsi

$$B^1(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \stackrel{2-s}{\rightrightarrows} \bar{B}^1(t, \theta, x), \quad B^2(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \stackrel{2-s}{\rightrightarrows} \bar{B}^2(t, \theta, x)$$

où \bar{B}^1, \bar{B}^2 sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{Q}_{01}}{\mathcal{M}_1 + b^1} [a^1 \mathcal{Q}_0, c^1 \mathcal{M}_1] & -[a^1 \mathcal{Q}_{01}, c^1 \mathcal{M}_1] & -\frac{a^1 \mathcal{Q}_{01} \mathcal{Q}_{02}}{(\mathcal{M}_1 + b^1)^2} \\ -[a^1 \mathcal{Q}_{01}, c^1 \mathcal{M}_1] & -\frac{a^1 \mathcal{Q}_{01}}{(\mathcal{M}_1 + b^1)} & 0 \\ -\frac{a^1 \mathcal{Q}_{01} \mathcal{Q}_{02}}{(\mathcal{M}_1 + b^1)^2} & 0 & -\frac{a^1 \mathcal{Q}_{01}}{(\mathcal{M}_1 + b^1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{Q}_{02}}{\mathcal{M}_1 + b^1} [a^1 \mathcal{Q}_0, c^1 \mathcal{M}_1] & -\frac{a^1 \mathcal{Q}_{01} \mathcal{Q}_{02}}{(\mathcal{M}_1 + b^1)^2} & -[a^1 \mathcal{Q}_{02}, c^1 \mathcal{M}_1] \\ -\frac{a^1 \mathcal{Q}_{01} \mathcal{Q}_{02}}{(\mathcal{M}_1 + b^1)^2} & -\frac{a^1 \mathcal{Q}_{02}}{(\mathcal{M}_1 + b^1)} & 0 \\ -[a^1 \mathcal{Q}_{02}, c^1 \mathcal{M}_1] & 0 & -\frac{a^1 \mathcal{Q}_{02}}{(\mathcal{M}_1 + b^1)} \end{pmatrix}$$

avec $[a^1 \mathcal{Q}_0, c^1 \mathcal{M}_1] = \frac{a^1 \mathcal{Q}_0^2}{(\mathcal{M}_1 + b^1)^2} - c^1(\mathcal{M}_1 + b^1)$, et

$$[a^1 \mathcal{Q}_{0i}, c^1 \mathcal{M}_1] = \frac{a^1 \mathcal{Q}_{0i}^2}{(\mathcal{M}_1 + b^1)^2} - c^1(\mathcal{M}_1 + b^1), \quad i = 1, 2.$$

De plus on déduit que :

— $\tilde{A}(t, \theta, x)$ et $\tilde{C}(t, \theta, x)$ sont :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, \theta, x) &= ag_a\left(\frac{|\mathcal{Q}_0(\theta)|}{b^1}\right) \\ \tilde{C}(t, \theta, x) &= ag_c\left(\frac{|\mathcal{Q}_0(\theta)|}{b^1}\right) \frac{\mathcal{Q}_0(\theta)}{|\mathcal{Q}_0(\theta)|} \end{aligned}$$

— \tilde{C} ne dépend pas de x c'est à dire $\nabla \cdot \tilde{C} = 0$.

Chapitre 4

Analyse et simulations numériques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons une analyse numérique avec des simulations du système couplé 2.10 présenté dans la section 2.2.4. Généralement les méthodes habituelles qui permettent de résoudre correctement les systèmes de lois de conservation, peuvent ne pas marcher dans la résolution de systèmes de lois d'équilibre spécialement à proximité des solutions d'équilibres. De plus, elles peuvent être instables quand elles sont appliquées aux systèmes couplés de lois de conservation ou d'équilibre. Une des difficultés dans la résolution de ce système couplé réside dans la présence terme du gradient de la hauteur de la dune dans l'équation SWE. Plusieurs schémas numériques ont été élaborés pour résoudre ce type de système couplé. Certaines de ces méthodes ont été réalisées pour le système couplé dans sa forme matricielle, on parle de schémas couplés, tandis que d'autres méthodes considèrent séparément les deux équations du système couplé, ce sont des schémas découpés. Dans notre travail on propose un schéma découpé qui consiste à utiliser un schéma de Roe pour le SWE adimensionné avec une approximation du gradient de z^ϵ , puis on donne un schéma pour l'équation LTDD. Les deux schémas évoluent pour un même pas de temps.

Dans l'étude théorique, nous considérons un ϵ fixé mais quelconque. Et dans la phase de la simulation numérique, nous calculons pour des valeurs différentes de ϵ .

4.2 Schéma de volume fini pour le système SWE-LTDD

On considère un maillage admissible de dimension 2 sur le tore \mathbb{T}^2 ou un carré tel que chaque volume de contrôle noté V_i admet un centre de gravité noté x_i^c tel que pour tous volumes de contrôle V_i, V_j , (x_i^c, x_j^c) est orthogonal au bord noté $V_i|V_j = \bar{V}_i \cap \bar{V}_j = \Gamma_{ij} = \sigma$. C'est une condition nécessaire pour assurer la consistance du schéma d'approximation de l'équation parabolique LTDD.

On pose $d_{ij} = \|x_i^c - x_j^c\|$, $j \in J_i$.

$\bigcup_j \Gamma_{ij}$ est le bord de V_i et n_{ij} le vecteur sortant de V_i normal à Γ_{ij} .

$\partial V_i = \bigcup_{j \in J_i} \Gamma_{ij} = \bigcup_{\sigma \in \xi_i} \Gamma_{ij}$, où J_i est l'ensemble des frontières de V_i et $\xi_i = \xi_i^{int} \cup \xi_i^{ext}$, avec ξ_i^{int} l'ensemble des frontières intérieures de V_i et ξ_i^{ext} l'ensemble des frontières extérieures à V_i .

On considère $h = (\sup_{V_i \in \mathcal{V}} |V_i|)^{1/2}$ ou $h = (\sup_{V_i \in \mathcal{V}} diam(V_i))^{1/2}$ où $|V_i|$ est l'aire de V_i et $diam(V_i)$ son diamètre. Le pas de temps Δt de la discrétisation est constant et $t_n = n\Delta t$.

On considère le volume de contrôle V_i et ses volumes de contrôle adjacents $V_{j_1}, V_{j_2}, V_{j_3}$ comme dans la figure 4.1 ci-après. Chaque volume de contrôle est un triangle rectangle. On peut ainsi définir les vecteurs normaux sortant de V_i : n_{ij_1}, n_{ij_2} et n_{ij_3} et orthogonaux respectivement à $\Gamma_{ij_1}, \Gamma_{ij_2}$ et Γ_{ij_3} , Γ_{ij_1} correspondant à l'hypoténuse de V_i . On obtient :

$$n_{ij_1} = \frac{x_{j_1}^c - x_i^c}{2 \|x_{j_1}^c - x_i^c\|}, \quad n_{ij_2} = \frac{x_{j_2}^c - x_i^c}{2 \|x_{j_2}^c - x_i^c\|}, \quad n_{ij_3} = \frac{x_{j_3}^c - x_i^c}{2 \|x_{j_3}^c - x_i^c\|}$$

4.2.1 Schéma de volume fini pour SWE

Nous allons donner un schéma de volume fini explicite pour l'équation de SWE adimensionné. On définit :

$$v_i^{\epsilon, n} = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} v^\epsilon(t^n, x) dx, \quad (4.1)$$

$$v_{ij}^{\epsilon, n} = \frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{\Gamma_{ij}} v^\epsilon(t^n, \sigma) d\sigma, \quad (4.2)$$

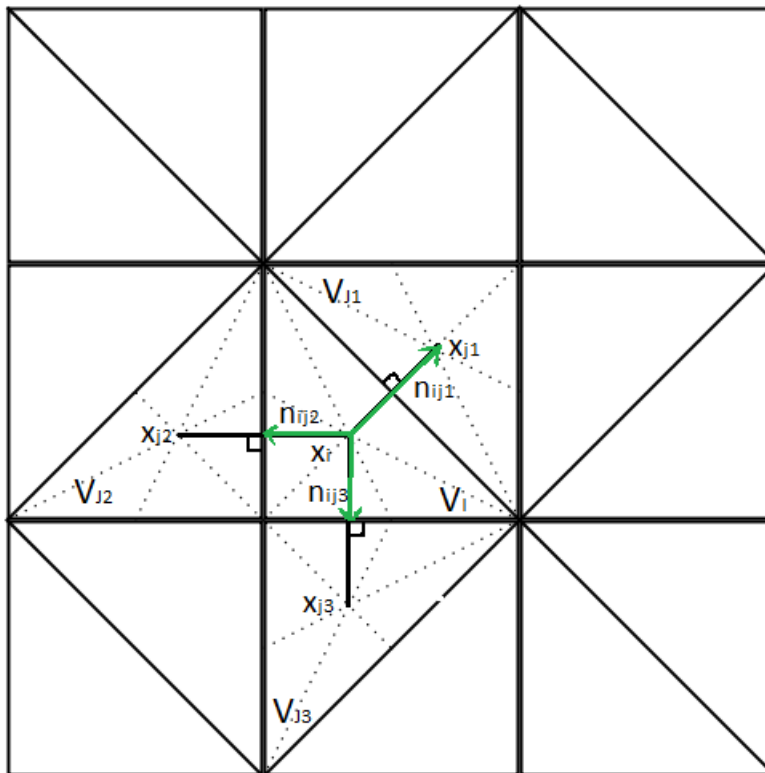


FIGURE 4.1 – Maillage : volume de contrôle V_i et ses volumes de contrôle adjacents V_{j1} , V_{j2} , V_{j3}

où $|\Gamma_{ij}|$ est la longueur de Γ_{ij} et $|V_i|$ est l'aire de V_i .

En intégrant (2.11) sur V_i on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}(t, x) dx + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 \int_{V_i} \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(v^\epsilon(t, x)) dx = \\ \frac{1}{\epsilon} \int_{V_i} h(v^\epsilon(t, x)) dx - \frac{1}{\epsilon^4} \int_{V_i} P(v^\epsilon(t, x), z^\epsilon(t, x)) dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

En remplaçant t par t_n dans (4.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}(t_n, x) dx + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j=1}^2 \int_{V_i} \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(v^\epsilon(t_n, x)) dx = \\ \frac{1}{\epsilon} \int_{V_i} h(v^\epsilon(t_n, x)) dx - \frac{1}{\epsilon^4} \int_{V_i} P(v^\epsilon(t_n, x), z^\epsilon(t_n, x)) dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

En utilisant les différences finis on approche $\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}(t_n, x) \simeq \frac{v^\epsilon(t_{n+1}, x) - v^\epsilon(t_n, x)}{\Delta t}$.

Alors

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}(t_n, x) dx &\simeq \int_{V_i} \frac{v^\epsilon(t_{n+1}, x) - v^\epsilon(t_n, x)}{\Delta t} dx \\ &\simeq \int_{V_i} \frac{v^\epsilon(t_{n+1}, x)}{\Delta t} dx - \int_{V_i} \frac{v^\epsilon(t_n, x)}{\Delta t} dx \\ &\simeq \frac{|V_i|}{\Delta t} (v_i^{\epsilon, n+1} - v_i^{\epsilon, n}) \end{aligned}$$

Pour l'approximation du terme de transport non linéaire nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{k=1}^2 \int_{V_i} \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(v^{\epsilon, n}) dx &= \frac{1}{\epsilon^4} \int_{\partial V_i} \sum_{k=1}^2 F_k(v^{\epsilon, n}) n_{ij}^k d\sigma \\ &= \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j \in J_i} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{k=1}^2 F_k(v^{\epsilon, n}) n_{ij}^k d\sigma \end{aligned}$$

On pose $\Phi_{ij}^n = \Phi(v_i^{\epsilon, n}, v_j^{\epsilon, n}, n_{ij}) \simeq \frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{k=1}^2 F_k(v^{\epsilon, n}) n_{ij}^k d\sigma$ appelé flux numérique.

Alors (4.3) devient :

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (v_i^{\epsilon, n+1} - v_i^{\epsilon, n}) + \frac{1}{\epsilon^4} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \Phi_{ij}^n = \frac{1}{\epsilon} |V_i| h_i^n - \frac{1}{\epsilon^4} |V_i| (P(v^{\epsilon, n}, z^{\epsilon, n}))_i \quad (4.5)$$

où $h_i^n \simeq \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} h(v^\epsilon(t_n, x))$, et $(P(v^{\epsilon, n}, z^{\epsilon, n}))_i \simeq \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} P(v^\epsilon(t_n, x), z^\epsilon(t_n, x))$

En multipliant (4.5) par $\frac{\Delta t}{|V_i|}$ on obtient :

$$v_i^{\epsilon, n+1} - v_i^{\epsilon, n} = -\frac{1}{\epsilon^4} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \Phi_{ij}^n + \frac{1}{\epsilon} \Delta t \cdot h_i^n - \frac{1}{\epsilon^4} \Delta t \cdot (P(v^{\epsilon, n}, z^{\epsilon, n}))_i \quad (4.6)$$

Il existe plusieurs méthodes pour approximer Φ_{ij}^n comme : la méthode de Roe, de Godunov, de Rusanov (voir [?]). Nous utilisons la méthode de Rusanov :

$$\Phi(v_i^{\epsilon, n}, v_j^{\epsilon, n}, n_{ij}) = \sum_{k=1}^2 \frac{F_k(v_i^{\epsilon, n}) + F_k(v_j^{\epsilon, n})}{2} n_{ij}^k - \frac{1}{2} S_{ij} (v_j^{\epsilon, n} - v_i^{\epsilon, n}), \text{ où } n_{ij} = (n_{ij}^1, n_{ij}^2),$$

et $S_{ij} = S\left(\frac{v_j^{\epsilon, n} + v_i^{\epsilon, n}}{2}, n_{ij}\right)I$ est appelé viscosité numérique, avec I la matrice unité et S est le maximum en valeur absolue des valeurs propres des matrices

$$\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}\left(\frac{v_j^{\epsilon, n} + v_i^{\epsilon, n}}{2}, n_{ij}\right) = \sum_{k=1}^2 A^k \left(\frac{v_j^{\epsilon, n} + v_i^{\epsilon, n}}{2}\right) n_{ij}^k$$

S_{ij} encore appelé matrice de viscosité ou flux et A^k est la matrices Jacobienne de $F^k, k = 1; 2$. Ainsi avec notre choix de maillage on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi(v_i^{\epsilon, n}, v_j^{\epsilon, n}, n_{ij}) &= \frac{1}{2} \mathcal{A}\left(\frac{v_i^{\epsilon, n} + v_j^{\epsilon, n}}{2}, n_{ij}\right) (v_j^{\epsilon, n} - v_i^{\epsilon, n}) \\ &\quad - \frac{1}{2} S_{ij} \left(\frac{v_i^{\epsilon, n} + v_j^{\epsilon, n}}{2}, n_{ij}\right) (v_j^{\epsilon, n} - v_i^{\epsilon, n}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{A}(v_{ij/2}^{\epsilon, n}, n_{ij}) - S_{ij}(v_{ij/2}^{\epsilon, n}, n_{ij}) \right) (v_j^{\epsilon, n} - v_i^{\epsilon, n}) \end{aligned}$$

avec $v_{ij/2}^{\epsilon, n} = \frac{v_i^{\epsilon, n} + v_j^{\epsilon, n}}{2}$ est l'état intermédiaire de Roe.

Afin d'approximer $\frac{1}{\epsilon^4} \int_{V_i} P(v^\epsilon(t_n, x), z^\epsilon(t_n, x))$, on introduit la notation suivante :

$$\mathcal{L}(v^{\epsilon, n}) := d^1(m^{\epsilon, n} + b^1), \text{ alors } P(v^{\epsilon, n}, z^{\epsilon, n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{L}(v^{\epsilon, n}) \nabla z^{\epsilon, n} \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{L}(v^{\epsilon, n})_i = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \mathcal{L}(v^{\epsilon, n}) dx = \mathcal{L}(v_i^{\epsilon, n}).$$

$$(\nabla z^{\epsilon, n})_i = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla z^{\epsilon, n} dx = \frac{1}{|V_i|} \sum_{j=1}^3 \frac{z_i^{\epsilon, n} + z_j^{\epsilon, n}}{2} |\Gamma_{ij}|$$

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \mathcal{L}(v^{\epsilon, n}) \nabla z^{\epsilon, n} dx &= |V_i| (\mathcal{L}(v^{\epsilon, n}) \nabla z^{\epsilon, n})_i \\ &\simeq |V_i| (\mathcal{L}(v^{\epsilon, n}))_i (\nabla z^{\epsilon, n})_i \\ &\simeq \mathcal{L}(v_i^{\epsilon, n}) \sum_{j=1}^3 \frac{z_i^{\epsilon, n} + z_j^{\epsilon, n}}{2} |\Gamma_{ij}| n_{ij}. \end{aligned}$$

Et finalement on obtient :

$$v_i^{\epsilon,n+1} - v_i^{\epsilon,n} = -\frac{1}{\epsilon^4} \frac{\Delta t}{2|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| (\mathcal{A}_{ij} n_{ij} - S_{ij} n_{ij}) (v_j^{\epsilon,n} - v_i^{\epsilon,n}) + \frac{1}{\epsilon} \Delta t \cdot h_i^{\epsilon,n} - \frac{1}{\epsilon^4} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \mathcal{L}(v_i^{\epsilon,n}) \sum_{j=1}^3 \frac{z_i^{\epsilon,n} + z_j^{\epsilon,n}}{2} |\Gamma_{ij}| n_{ij} \end{array} \right) \quad (4.7)$$

4.2.2 Schéma de volume fini pour LTDD

Comme pour la sous section précédente on considère l'équation (2.12) à $t = t_n$ et on obtient :

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t}(t_n, x) - \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon(t_n, x)) \nabla z^\epsilon(t_n, x)] = \frac{1}{\epsilon^2} \nabla \cdot C^\epsilon(v^\epsilon(t_n, x)).$$

Intégrant sur V_i on obtient :

$$\int_{V_i} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t}(t_n, x) - \frac{1}{\epsilon^2} \int_{V_i} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon(t_n, x)) \nabla z^\epsilon(t_n, x)] = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{V_i} \nabla \cdot C^\epsilon(v^\epsilon(t_n, x))$$

En utilisant les différences finis et en intégrant sur le volume de contrôle V_i on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \frac{\partial z^\epsilon}{\partial t}(t_n, x) &\simeq \int_{V_i} \frac{z^\epsilon(t_{n+1}, x) - z^\epsilon(t_n, x)}{\Delta t} \\ &\simeq \frac{|V_i|}{\Delta t} (z_i^{\epsilon,n+1} - z_i^{\epsilon,n}) \end{aligned}$$

avec $z_i^{\epsilon,n} = \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} z^\epsilon(t_n, x)$.

En intégrant par partie le terme de diffusion on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{V_i} \nabla \cdot [\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon(t_n, x)) \nabla z^\epsilon(t_n, x)] &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\partial V_i} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}(x)) \nabla z^{\epsilon,n}(x) d\sigma \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j \in J_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}(x)) \nabla z^{\epsilon,n}(x) n_{ij} d\sigma, \end{aligned}$$

On pose $G_{ij}(z^{\epsilon,n}, v^{\epsilon,n}) = \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}(x)) \nabla z^{\epsilon,n}(x) n_{ij} d\sigma$.

Pour approcher le flux de diffusion on utilise un développement de Taylor avec reste intégral comme dans [31] :

$$z_\sigma^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n} = \nabla z^{\epsilon,n}(x) (x_\sigma - x_i^c) + \int_{x_i^c}^{x_\sigma} (x_\sigma - x) \nabla^2 z^{\epsilon,n}(x) (x_\sigma - x) dx \quad (4.8)$$

En écrivant la même formule dans le volume de contrôle V_j , on a :

$$z_\sigma^{\epsilon,n} - z_j^{\epsilon,n} = \nabla z^{\epsilon,n}(x)(x_\sigma - x_j^c) + \int_{x_j^c}^{x_\sigma} (x_\sigma - x) \nabla^2 z^{\epsilon,n}(x)(x_\sigma - x) dx \quad (4.9)$$

On fait la différence entre (4.8) et (4.9) pour obtenir :

$$z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n} = \nabla z^{\epsilon,n}(x)(x_j^c - x_i^c) + \int_{x_i^c}^{x_j^c} (x_\sigma - x) \nabla^2 z^{\epsilon,n}(x)(x_\sigma - x) dx \quad (4.10)$$

Posons $H_\sigma(x) = (x_\sigma - x) \nabla^2 z^{\epsilon,n}(x)(x_\sigma - x)$, on a alors :

$$\frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} = \nabla z^{\epsilon,n}(x) n_{ij} + \frac{1}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} \int_{x_i^c}^{x_j^c} H_\sigma(x) dx, \text{ ce qui implique}$$

$$\mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} = \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \nabla z^{\epsilon,n}(x) n_{ij} + \frac{\mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n})}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} \int_{x_i^c}^{x_j^c} H_\sigma(x) dx$$

Et en intégrant sur Γ_{ij} on a :

$$\int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} d\sigma = \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \nabla z^{\epsilon,n}(x) n_{ij} d\sigma$$

$$+ \int_{\Gamma_{ij}} \frac{\mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n})}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} \int_{x_i^c}^{x_j^c} H_\sigma(x) dx d\sigma$$

On peut prouver que $\left| \int_{\Gamma_{ij}} \frac{\mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n})}{\|x_j^c - x_i^c\|} \int_{x_i^c}^{x_j^c} H_\sigma(x) dx d\sigma \right|$ est un $O(h^2)$ (voir [?]). Ainsi on peut approcher le flux de diffusion par :

$$\int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \nabla z^{\epsilon,n}(x) n_{ij} d\sigma \approx \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} d\sigma$$

Donnons à présent une approximation de $\int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} d\sigma$.

On considère (4.2) pour tout $x \in \Gamma_{ij}$:

$$\mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \approx \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n})$$

$$\int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) d\sigma \approx \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) d\sigma = \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) |\Gamma_{ij}|$$

$$\frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) d\sigma \approx \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) d\sigma = \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n})$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{\|x_j^c - x_i^c\|} d\sigma &= \int_{\Gamma_{ij}} (\mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) d\sigma) \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{\|x_j^c - x_i^c\|} \\ &= \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) |\Gamma_{ij}| \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{\|x_j^c - x_i^c\|} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{A}^\epsilon(v^{\epsilon,n}) \nabla z^{\epsilon,n}(x) n_{ij} d\sigma \approx \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) |\Gamma_{ij}| \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{2 \|x_j^c - x_i^c\|}$$

Une approximation de $\frac{1}{\epsilon^2} \int_{V_i} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v^\epsilon(t_n, x)) dx$:

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{V_i} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon(v^{\epsilon,n}(x)) = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j \in J_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{C}^\epsilon(v^{\epsilon,n}(x)) n_{ij}(x) d\sigma$$

En utilisant la même méthode pour \mathcal{A}^ϵ on obtient :

$$\frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{\Gamma_{ij}} \mathcal{C}^\epsilon(v^{\epsilon,n}(x)) n_{ij}(x) d\sigma = \mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}).$$

Et finalement on obtient un schéma explicite en temps de (2.12) :

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (z_i^{\epsilon,n+1} - z_i^{\epsilon,n}) = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j \in J_i} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) |\Gamma_{ij}| \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} + \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) n_{ij} \quad (4.11)$$

Cela implique que :

$$z_i^{\epsilon,n+1} - z_i^{\epsilon,n} = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) |\Gamma_{ij}| \frac{z_j^{\epsilon,n} - z_i^{\epsilon,n}}{2 \|x_j^c - x_i^c\|} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n}) n_{ij} \quad (4.12)$$

4.2.3 Etude de stabilité

Nous donnons une condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) pour avoir la stabilité du schéma de volume fini de SWE-LTDD. Commençons par définir la norme suivante :

$\|v^{\epsilon,n}\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |v_i^{\epsilon,n}|$, avec $v^{\epsilon,n} = (v_i^{\epsilon,n})_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$, où N est le nombre de volume de contrôle.

4.2.3.1 Stabilité du schéma LTDD

On a le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. *Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit et si la condition de CFL suivante :*

$$\Delta t \cdot \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \leq \frac{\epsilon^2}{\|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty}$$

est satisfaite, alors on a la stabilité L^∞ du schéma de LTDD. Et l'estimation suivante :

$$\|z^{\epsilon, n+1}\|_\infty \leq \|z^{\epsilon, n}\|_\infty + C \frac{\|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty}{\|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty}, \quad (4.13)$$

est satisfaite avec C constant.

Démonstration. On considère l'équation (4.12) on obtient :

$$\begin{aligned} z_i^{\epsilon, n+1} &= z_i^{\epsilon, n} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) |\Gamma_{ij}| \frac{z_j^{\epsilon, n} - z_i^{\epsilon, n}}{\|x_j^c - x_i^c\|} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \\ &= z_i^{\epsilon, n} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}} (z_j^{\epsilon, n} - z_i^{\epsilon, n}) + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}} z_j^{\epsilon, n} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}}\right) z_i^{\epsilon, n} \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |z_i^{\epsilon, n+1}| &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \left| \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}} \right| |z_j^{\epsilon, n}| + \left| 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}} \right| |z_i^{\epsilon, n}| \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| |\mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n})|. \end{aligned}$$

Et finalement on a :

$$\begin{aligned} |z_i^{\epsilon, n+1}| &\leq \left(\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \left| \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}} \right| + \left| 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} \mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n}) \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}} \right| \right) \|z^{\epsilon, n}\|_\infty \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| |\mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon, n})|. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si $\Delta t \cdot \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \leq \frac{\epsilon^2}{\|\mathcal{A}^\epsilon\|}$ alors $\frac{1}{\epsilon^2} \Delta t \cdot \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty \leq 1$. Ainsi on en déduit

que $\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n})| \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}} \leq 1$ comme

$\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n})| \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij}} \leq \frac{1}{\epsilon^2} \Delta t \cdot \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty$, avec une constante multiplicative due à la sommation.

Concernant la positivité de $\mathcal{A}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n})$, nous avons $\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon) = \frac{a(1 - \epsilon b m) |q^\epsilon|^3}{|m^\epsilon + b^1|^3} < 0$

seulement si $m^\epsilon > \frac{1}{\epsilon b}$, ou pour ϵ suffisamment petit $\frac{1}{\epsilon b}$ converge vers l'infini, alors la variation d'eau m^ϵ ne peut pas être infini. Ainsi on considère que pour ϵ suffisamment petit $m^\epsilon < \frac{1}{\epsilon b}$ ce qui implique $\mathcal{A}^\epsilon(v^\epsilon) > 0$.

De (4.14) on a :

$$|z_i^{\epsilon,n+1}| \leq \|z^{\epsilon,n}\|_\infty + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| |\mathcal{C}^\epsilon(v_{ij}^{\epsilon,n})| \quad (4.15)$$

Donc

$$\|z^{\epsilon,n+1}\|_\infty \leq \|z^{\epsilon,n}\|_\infty + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty \quad (4.16)$$

En considérant le second terme du second membre de (4.16), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \Delta t \cdot \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{|V_i|} \|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \Delta t \cdot \max_{ij} \frac{\max_{ij}(d_{ij}) |\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \Delta t \cdot \max_{ij}(d_{ij}) \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty \end{aligned}$$

Si $\Delta t \cdot \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \leq \frac{\epsilon^2}{\|\mathcal{A}^\epsilon\|}$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\Delta t}{|V_i|} \sum_{j \in J_i} |\Gamma_{ij}| \|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \max_{ij}(d_{ij}) \frac{\epsilon^2}{\|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty} \|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty \\ &\leq \max_{ij}(d_{ij}) \frac{\|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty}{\|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty} \\ &\leq C \frac{\|\mathcal{C}^\epsilon\|_\infty}{\|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty}. \end{aligned}$$

Et finalement avec (4.16) on trouve (4.13). \square

Remarque 4.2.1. — *En pratique il est bien connu que pour avoir la stabilité de (4.7) il suffit de satisfaire la condition de CFL, adapté à notre cas (voir [5], [16]) :*

$$CFL := \frac{\Delta t}{2\epsilon^4} \max_k \left\{ \max_{ij} \lambda_{ij}^k \frac{|\Gamma_{ij}|}{|V_i|} \right\} \leq 1. \quad (4.17)$$

— *En utilisant un schéma de volumes finis pour la résolution de système hyperbolique ou de loi d'équilibre, la condition (4.17) peut être considérée comme la définition d'un pas de temps suffisamment petit pour que le schéma numérique reste stable.*

Théorème 4.2.2. *Si la condition de CFL (4.17) est satisfaite le schéma numérique du système couplé (4.7)-(4.12) est stable.*

Démonstration. Si le CFL (4.17) est vérifié alors le schéma (4.7) est stable. De plus si ϵ est suffisamment petit, on a :

$$\frac{1}{\epsilon^2} \Delta t \cdot \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty \leq \frac{\Delta t}{2\epsilon^4} \max_k \left\{ \max_{ij} \lambda_{ij}^k \frac{|\Gamma_{ij}|}{|V_i|} \right\} \leq 1,$$

d'où $\frac{1}{\epsilon^2} \Delta t \cdot \max_{ij} \frac{|\Gamma_{ij}|}{d_{ij} |V_i|} \|\mathcal{A}^\epsilon\|_\infty \leq 1.$

Donc le schéma (4.12) est stable par le théorème 4.2.1.

Ainsi le schéma couplé (4.7)-(4.12) est stable dès que la condition de CFL (4.17) est satisfaite. \square

4.3 Tests numériques

Dans cette section nous allons simuler quelques scénarios avec le schéma numérique du système couplé proposé ci-dessus. On prend les valeurs des différents paramètres comme suit : $\epsilon = 0.0052$, $a^1 = 0.333$, $b^1 = 10$, $c^1 = 16$, $b = 4$, $a = 1$, $c = 20$, $d^1 = 3.33$, $fc = 3.8$, $kf = 19$, $CFL = 0.8$. Le programme est codé sous Freefem++ 3.42 <http://www.freefem.org/>. Les figures 4.2, 4.4, et 4.6 sont obtenues avec Freefem++ et les figures 4.3, 4.5 et 4.7 sont tracées avec gnuplot version 5.0 patchlevel 3 <http://www.gnuplot.info>.

Dans la suite dans toute les courbes tracées gnuplot, les termes “graphhh.dat” et “graphz.dat” représentent les fichiers contenant des données respectivement sur la variation d'hauteur et la dune.

4.3.1 Scénario 1

On considère un domaine carré de 1000×1000 . Initialement on suppose que la variation de la hauteur d'eau est une constante, le flux d'eau est choisi nul et la dune présente une zone de hauteur maximale dans le sous domaine carré $[300, 500] \times [400, 600]$. On fixe les conditions initiales comme suit :

$$\begin{aligned} m^0(x_1, x_2) &= 10 \\ q^0(x_1, x_2) &= 0 \\ z^0(x_1, x_2) &= \begin{cases} 0.1 + \sin^2\left(\frac{\pi(x_1-300)}{200}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(x_2-400)}{200}\right) & x \in [300, 500] \times [400, 600] \\ 0.1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Le résultat est donné à la figure 4.3. On constate que la décharge d'eau crée un tourbillon autour de la dune. Et ainsi la dune est creusé au niveau du sommet et des rebords.

4.3.2 Scénario 2

On considère le même domaine carré de 1000×1000 . Initialement on suppose que la variation de la hauteur d'eau est une constante, le flux d'eau est choisi sinusoïdale dépendant de la position x_1 et la dune présente zone de hauteur maximale dans le sous domaine carré $[300, 500] \times [400, 600]$. On fixe les conditions initiales comme suit :

$$\begin{aligned} m^0(x_1, x_2) &= 10 \\ q_1^0(x_1, x_2) &= 50 \sin(2\pi\epsilon x_1) \\ q_2^0(x_1, x_2) &= 0 \\ z^0(x_1, x_2) &= \begin{cases} 0.1 + \sin^2\left(\frac{\pi(x_1-300)}{200}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(x_2-400)}{200}\right) & x \in [300, 500] \times [400, 600] \\ 0.1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Le résultat est donné à la figure 4.5. La solution devient rapidement stationnaire.

4.3.3 Scénario 3

On considère le domaine carré de $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Initialement on suppose que la variation de la hauteur d'eau présente une zone basse, le flux d'eau est choisi

nul et la dune présente une zone basse. On fixe les conditions initiales comme suit :

$$\begin{aligned}m^0(x_1, x_2) &= 2 - 0.1 \exp(-x_1^2 - x_2^2) \\q_1^0(x_1, x_2) &= 0 \\q_2^0(x_1, x_2) &= 0 \\z^0(x_1, x_2) &= 0.1 - 0.01 \exp(-x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

Le résultat est donné à la figure 4.7. La variation d'hauteur évolue vite dans les 100 premiers itérations puis l'évolution devient très faible tandis que la dune n'évolue presque pas pendant 6000 itérations.

FIGURE 4.2 – Scénario 1 : condition initiale vue en 3D, variation de la hauteur d'eau et hauteur de la dune.

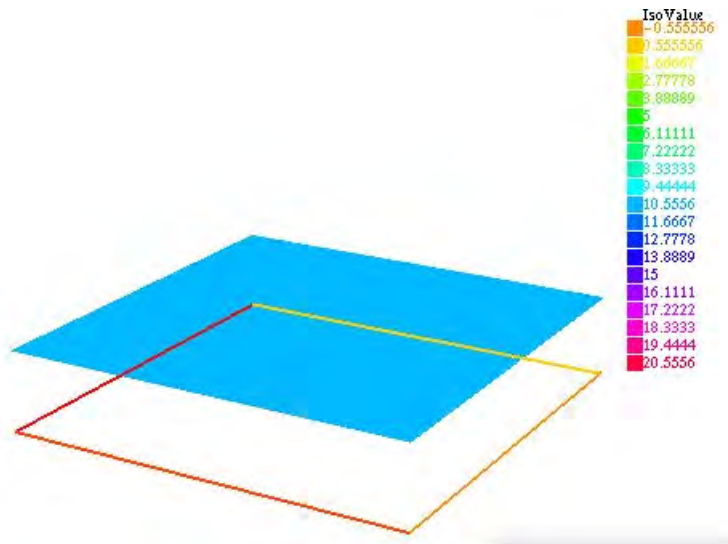
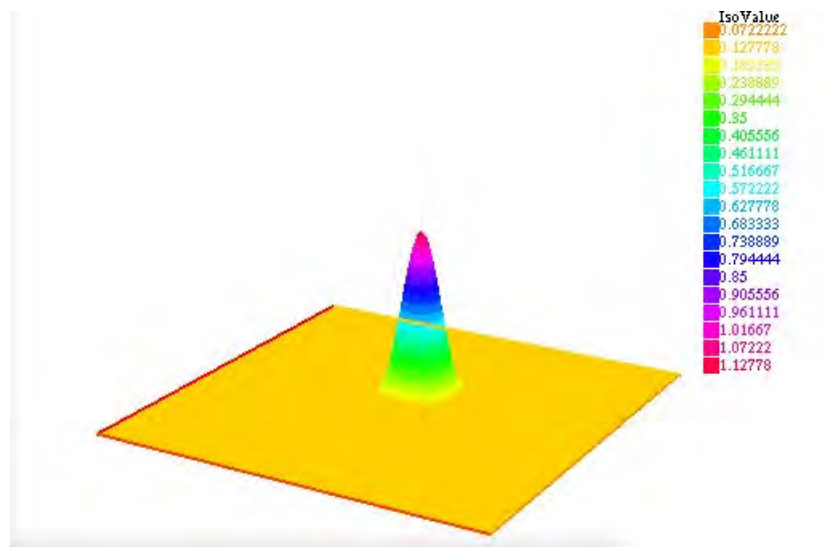
(a) Variation de la hauteur d'eau m (b) Hauteur de la dune z 

FIGURE 4.3 – Scénario 1 : Résultats 2D, variation de la hauteur d'eau et hauteur de la dune. "graphm" représente le graphique de la variation de la hauteur d'eau et "graphz" représente le graphique de la hauteur de la dune. "it" représente le nombre d'itération.

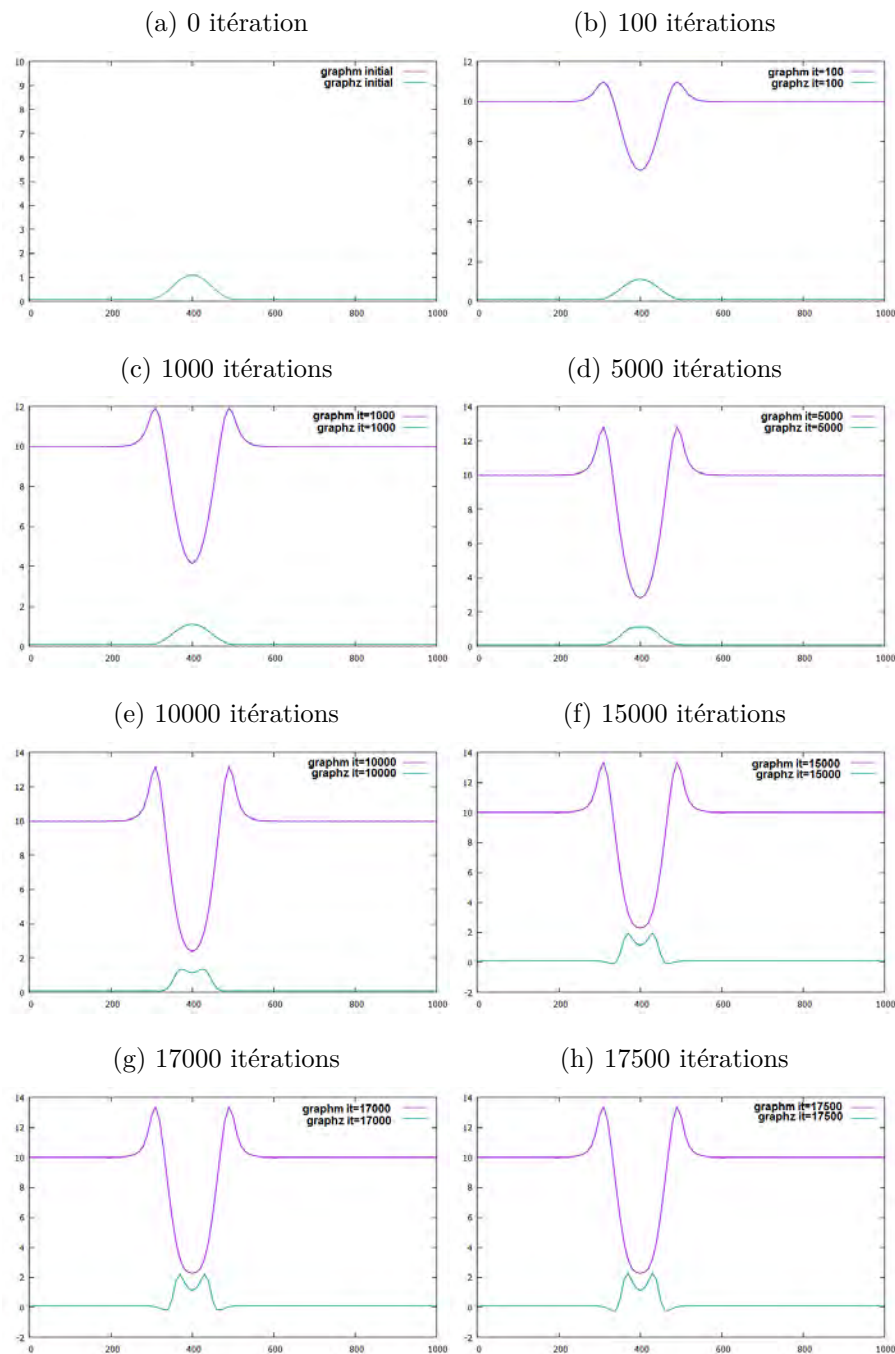
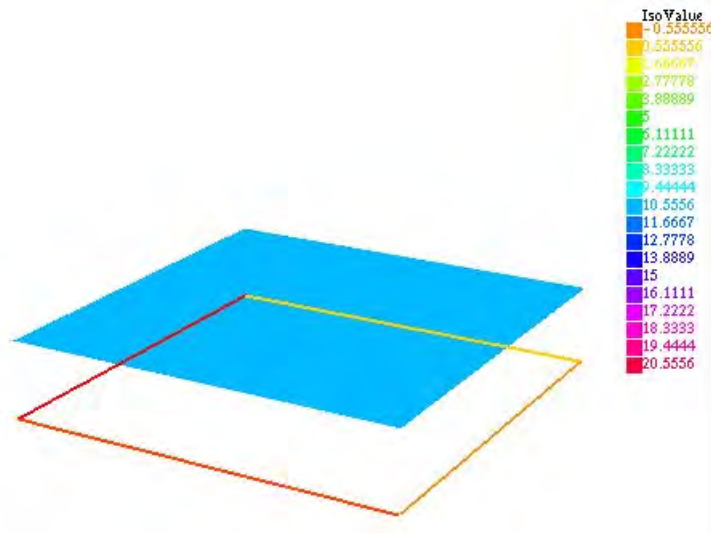
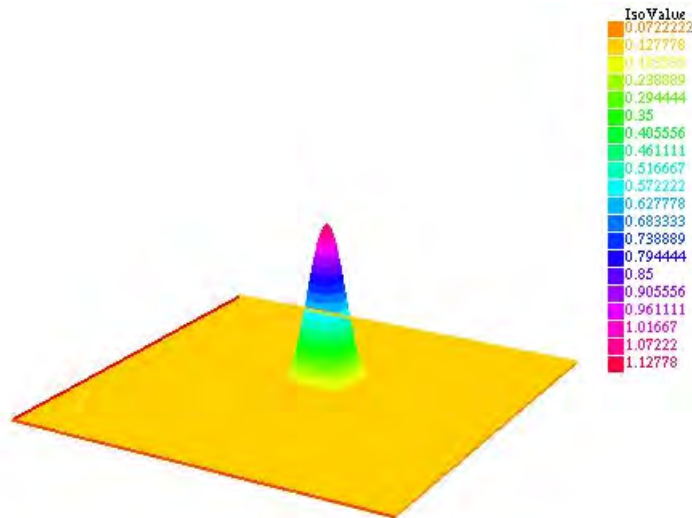


FIGURE 4.4 – Scénario 2 : condition initiale vue en 3D, variation de la hauteur de l'eau, hauteur de la dune et décharge d'eau

(a) Variation de la hauteur d'eau m



(b) Hauteur de la dune z



(c) Décharge d'eau q



FIGURE 4.5 – Scénario 2 : résultats 2D, variation de la hauteur d'eau et hauteur de la dune. "graphm" représente le graphique de la variation de la hauteur d'eau et "graphz" représente le graphique de la hauteur de la dune. "it" représente le nombre d'itération.

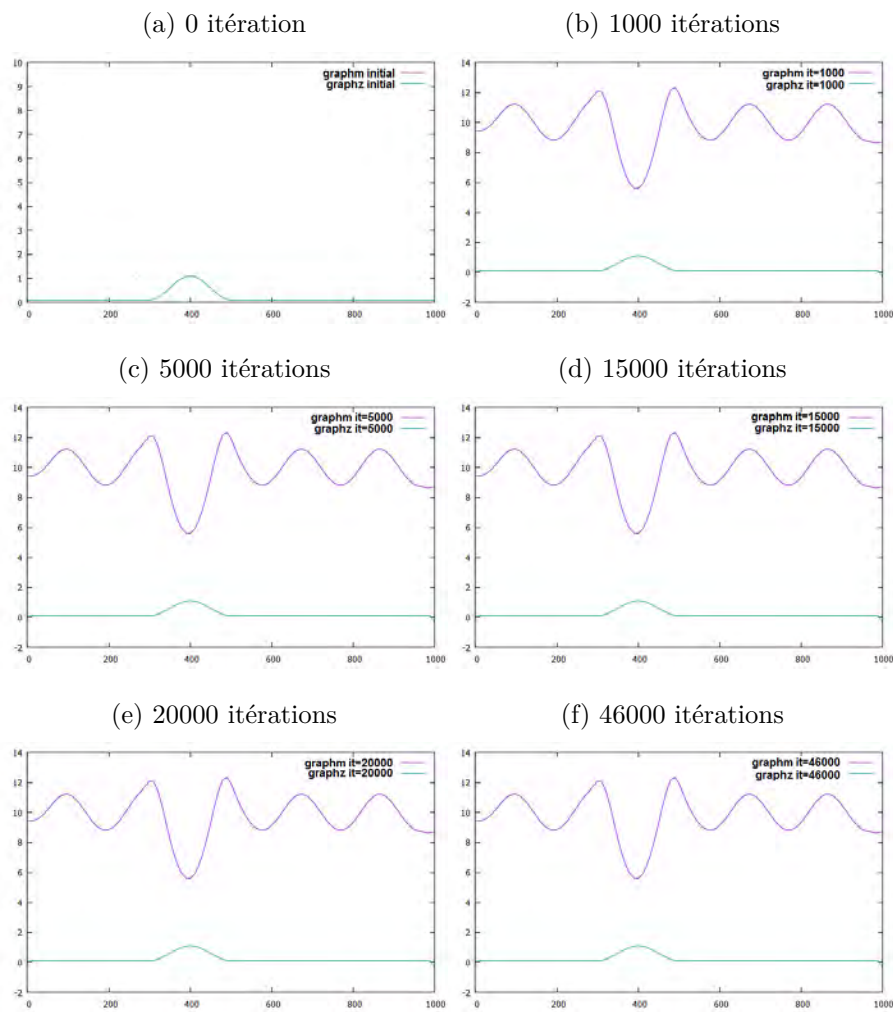
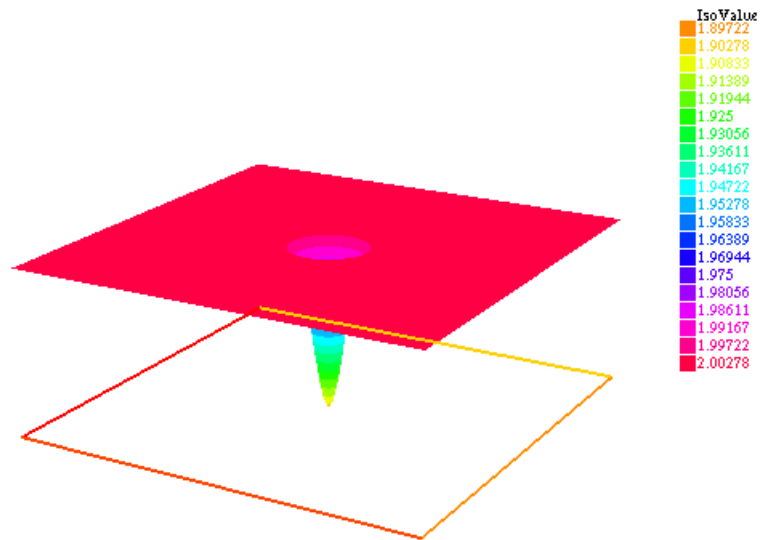


FIGURE 4.6 – Scénario 3 : condition initiale vue en 3D, variation de la hauteur de l'eau et hauteur de la dune

(a) Variation de la hauteur d'eau m



(b) Hauteur de la dune z

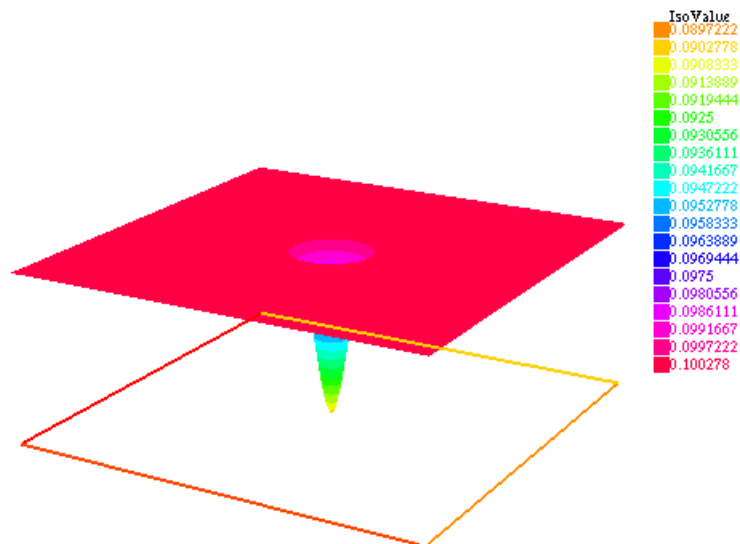
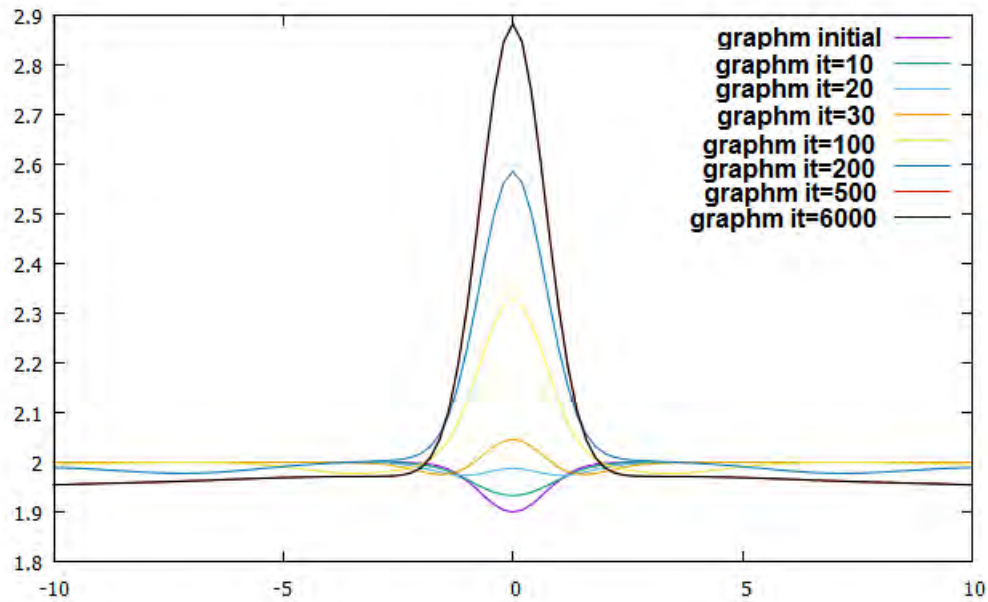
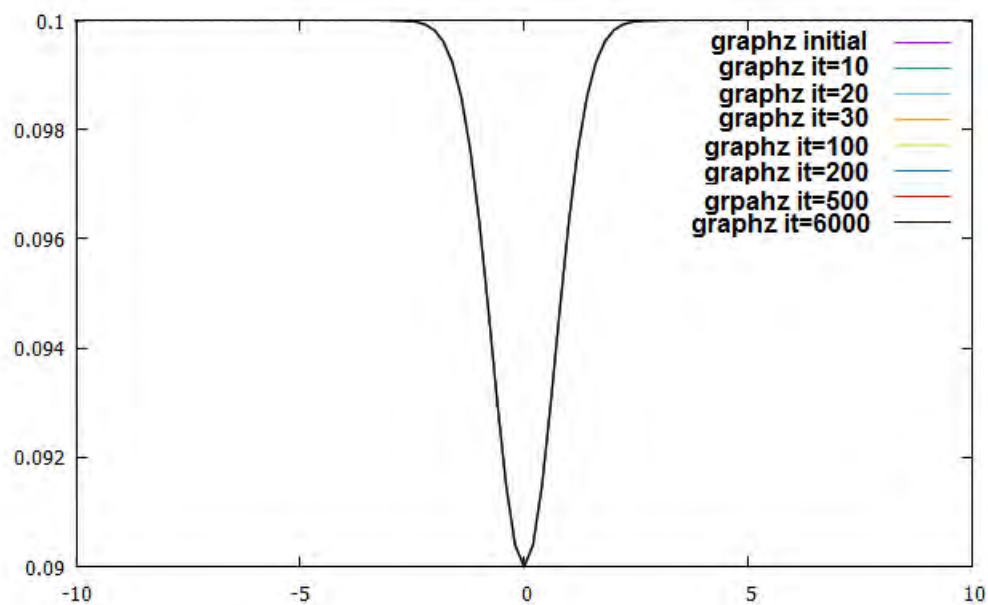


FIGURE 4.7 – Scénario 3 : résultats 2D, variation de la hauteur de la dune et hauteur de la dune. "graphm" représente le graphique de la variation de la hauteur d'eau et "graphz" représente le graphique de la hauteur de la dune. "it" représente le nombre d'itération.

(a) Evolution de la variation de la hauteur d'eau



(b) Evolution de la dune



Conclusion et Perspectives

Dans cette partie nous avons couplé l'équation de la mer peu profonde (SWE) avec l'équation de la dynamique des dunes de sables au long terme (LTDD). Nous avons prouvé l'existence et l'unicité de solution du système couplé adimensionné. Nous avons prouvé également la convergence à deux échelles de cette solution vers une fonction solution d'une équation qui est la limite à deux échelles du système d'équation adimensionné.

Dans le cadre de l'analyse numérique du système couplé, nous avons utilisé des schémas de volumes finis dont nous avons établi des conditions de stabilité. Et par la suite des tests numériques ont été effectués.

Dans la suite de ces travaux nous comptons, dans le cadre de simulations numériques, comparer les deux systèmes couplés adimensionné et homogénéisé. De plus il serait intéressant d'étudier le système couplé adimensionné dans le cas où l'équation SWE admet des solutions chocs.

Bibliographie

- [1] G. Allaire. Homogenization and Two-Scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 1482–1518.
- [2] P. Alliot, E. Frénod and V. Monbet. Modelling the coastal ocean over a time period of several weeks. *Journal of Differential Equations*, **248**(4)(2010), Pages 639–659.
- [3] E. Audusse, F. Benkhadloun, J. Sainte-Marie et M. Seaid. Multilayer Saint-Venant equations over movable beds. *Discrete et Continuous Dynamical Systems - Series B. Vol 15, pp :917-934 (2011)*
- [4] C. Berthon, S. Cordier, O. Delestre and M.H. Le. *An analytical solution of shallow water system coupled to Exner equation*. *Comptes Rendus Mathématique*, Elsevier, 2012, 350 (3-4), pp.183-186. “10.1016/j.crma.2012.01.007”. “hal-00648343”.
- [5] Castro M., Macías J., et Parés C., A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system. *ESAIM : Mathematical Modelling et Numerical Analysis* 35.1 (2010) : 107-127. “<http://eudml.org/doc/197574>”.
- [6] Castro Díaz M.J., Fernández-Nieto E.D., Ferreiro A.M., Parés C., Two-dimensional sediment transport models in shallow water equations. A second order finite volume approach on unstructured meshes, *Computer Methods in Applied Mechanics et Engineering*, Volume 198, Issues 33–36, 1 July 2009, Pages 2520–2538.
- [7] S. Cordier, C. Lucas et JDD. Zabsonré. A two time-scale model for tidal bed-load transport. *Communications in Mathematical Sciences* 10, 3 (2012) 875-888.
- [8] S. Coudier, M. Le, T. M. de Luna. Bedload transport in shallow water models : why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help. 13 pages. 2010. <hal-00536267v2>
- [9] I. Faye, E. Frénod and D. Seck. Long term behavior of singularity perturbed parabolic degenerated equation. *Journal of Nonlinear Analysis and Application. Vol. 2016 n°2 (2016), 82-105.*

- [10] I. Faye, E. Frénod and D. Seck. Singularly perturbed degenerated parabolic equations and application to seabed morphodynamics in tided environment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A (DCDS-A)*, Vol. 29, No 3 (2011), pp 1001–1030 (DOI :10.3934/dcds.2011.29.1001).
- [11] K. O. Friedrichs. Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 :345–392, 1954.
- [12] A. Heibig et D. Serre Etude variationnelle du probleme de Riemann *ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée de l'Imbrie, 69 364 Lyon Cedex 07, France Received January 11, 1990*
- [13] D. Hoff and J. Smoller. Global existence for systems of parabolic conservation laws in several space variables *J. Diff. Eqns*, 68 (1987), 210–20.
- [14] D. Idier, D. Astruc, et S.J.M.H. Hulcher. Influence of bed roughness on dune et megaripple generation. *Geophysical Research Letters* 31 (2004), 1-5.
- [15] Parés C., Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems : a theoretical framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2006, Vol. 44, No. 1 : pp. 300-321.
- [16] Parés C. et Castro M., (2004). On the well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. applications to shallow-water systems. *ESAIM : Mathematical Modelling et Numerical Analysis*, 38, pp 821-852. doi :10.1051/m2an :2004041.
- [17] T. Kato. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric system. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **58** (1975), 181–205.
- [18] S. Klainerman and A. Majda. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Commun. Appl. Math* **34** (1981), 481-524.
- [19] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva. Linear and quasi-linear equations of parabolic type, *AMS Translation of Mathematical Monographs* **23** (1968).
- [20] P. D. Lax. Hyperbolic system of conservation laws, II. *Comm. Pure Appl. Math* **10** (1957), 537-566.
- [21] J. L. Lions. Remarques sur les équations différentielles ordinaires, *Osaka Math. J.* **15** (1963), 131–142.
- [22] A. Majda. Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. *Proceeding of International Congress of Mathematicians August 16-24, 1983, Warszawa.*
- [23] A. Majda. The stability of multidimensional shocks. *Memoirs of the Amer.Math.Soc.* 275 (1983).

- [24] A. Majda. The Existence of multidimensional shocks. *Memoirs of the Amer.Math.Soc.* 281 (1983).
- [25] G. Métivier Stability of Multidimensional Shocks *IRMAR Université de Rennes I 35042 Rennes Cedex, France April 2, 2003.*
- [26] G. Métivier Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d'espace *Transactions of the american society Volume 296. Number 2. August 1986.*
- [27] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 608–623.
- [28] S. Schochet. The compressible Euler equations in bounded domain : Existence of solutions and the incompressible limit. *Commun. Math. Phys.* **104** (1986), 49-75.
- [29] S. Schochet. The compressible Euler equations in a bounded domain : Existence of solutions and the incompressible limit. *Comm. Math. Phys.* *104 (1986) 46–75.*
- [30] L. C. Van Rijn. Handbook on sediment transport by current and waves. *Tech. Report H461 :12.1-12.27, Delft Hydraulics, 1989.*
- [31] Z. Sheng et G. Yuan. A finite volume scheme for diffusion equations on distorted quadrilateral meshes. *Transport Theory et Statistical Physics*, *37 :171–207, 2008.*
- [32] J. de D. Zabsonré, C. Lucas, et E. Fernetz-Nieto. An energetically consistent viscous sedimentation model, *Math. Model. Meth. Appl. Sci.*, *19(3), 477–499, 2009.*

Deuxième partie

Réseau routier et aménagement urbain

Chapitre 5

Equation de transport appliquée au réseau routier

5.1 Introduction

Le trafic routier est généralement modélisé par des équations dites de transport. Pour le modéliser on peut considérer plusieurs aspects ou échelles : microscopique, mésoscopique et macroscopique. On considère le trafic routier comme un flux de particules qui interagissent entre elles. Dans un modèle microscopique[5] on s'intéresse à l'interaction entre ces particules ou véhicules avec beaucoup de détails tandis que dans un modèle macroscopique([27],[23]) on s'intéresse plus à l'évolution du flux dans sa globalité. Ainsi les modèles microscopiques sont souvent utilisés pour l'évaluation de nombreux systèmes de transport intelligents (STI), mais ils sont limités à de petites zones, en raison des grandes quantités de données d'entrée, et les vastes exigences d'étalonnage. Et les modèles macroscopiques sont principalement utilisés pour des applications de planification et de contrôle des opérations de conception, sur des réseaux de grandes tailles et sur de longues périodes.(voir [13]). Quant aux modèles mésoscopiques, ils sont en quelques sortes à l'intersection des deux modèles c'est à dire qu'ils vont caractériser l'évolution du flux avec plus de détails qu'un modèle macroscopique mais par contre avec moins de détails par rapport à un modèle microscopique.Cependant l'interprétation de "modèle mésoscopique" est différente suivant les scientifiques. En général dans les modèles de flux de trafic mésoscopiques, l'écoulement du trafic est décrite avec un niveau élevé de détails, mais par contre les flux d'interaction sont décrits avec peu de détails.

Afin de répondre aux besoin d'avoir suffisamment de détails aussi bien sur les petits et grands réseaux, des modèles hybrides méso-micro ou macro-micro sont apparus durant cette dernière décennie ([8],[9],[11],[12],[68],[69]). Dans ce travail

nous aurons surtout à parler des modèles macroscopiques et mésoscopiques.

5.2 modèles macroscopiques

Ils sont généralement décrits par une équation aux dérivées partielles et on parle d'EDP de transport. Un des plus importants modèle est celui développé par Lighthill-Whitham [43] et Richards [57], également appelé LWR, qui est une EDP hyperbolique du premier ordre. Le modèle LWR a été proposé dans les années 50 et il peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 & \text{sur } [0, T] \times [0, L] \\ q(x, t) = \rho(x, t)V(x, t) \\ q(x, t) = Q(\rho(x, t)), \end{cases} \quad (5.1)$$

où ρ et V sont respectivement la densité et la vitesse du flux et Q est une fonction souvent appelée diagramme fondamental.

La première équation traduit la conservation des véhicules sur la section $[0, L]$. La seconde équation est une relation entre la densité et la vitesse du flux. Tandis que la troisième équation est appelé Diagramme Fondamental.

Le diagramme fondamental est une fonction concave positive définie sur $[0, \rho_{max}]$ et est à valeur dans $[0, q_{max}]$, où ρ_{max} et q_{max} sont respectivement la densité et le flux maximal. Il admet un unique maximum atteint pour une densité critique ρ_{crit} et $Q(0) = Q(\rho_{max}) = 0$. Ainsi, lorsque la densité est assez petite, la vitesse est maximale et lorsque la densité est maximale, la vitesse décroît. (Voir figure 5.1 emprunté du papier [20]).

Ce qui caractérise un équilibre entre densité et vitesse. On a également d'autres

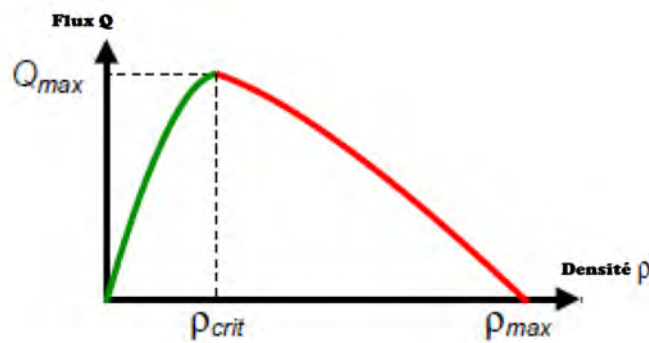


FIGURE 5.1 – Exemple de Diagramme Fondamental

types d'équilibres à savoir l'équilibre local des fonctions de l'offre $\mathcal{O}(\rho, x)$ et de la

demande $\mathcal{D}(\rho, x)$. Ces fonctions caractérisent le flux maximal entrant ou sortant en chaque point x . Ainsi en chaque point x le flux Q s'obtient par :

$$Q(\rho, x) = \min\{\mathcal{O}(\rho(x^+, t), x), \mathcal{D}(\rho(x^-, t), x)\}.$$

L'équation d'Hamilton Jacobi est liée au concept de comptage de véhicules $N(x, t)$ (en anglais "vehicle number function" ou "cumulated vehicles curves") à l'origine proposée par un ingénieur K. Moskowitz, qui a utilisé ce concept pour étudier les propriétés du trafic. Dans le cadre de Moskowitz, on suppose que tous les véhicules sont étiquetés par des entiers croissants dès qu'ils entrent dans une section de route, et qu'une voiture ne peut dépasser une autre. Si la dernière voiture qui passerait un observateur permanent à la position x et au temps t , est étiquetée n , alors $E(N(x, t)) = n$, où $E()$ est la fonction partie entière. Cette fonction de comptage est interpolée de façon continue entre les étiquettes discrètes. La fonction Moskowitz contient des informations sur le trafic que l'on peut déduire à partir des mesures expérimentales de trafic aussi longtemps qu'il n'y aura pas de dépassement d'un véhicule par une autre. Ainsi les courbes de niveau de $N(x, t)$ correspondent à des trajectoires de véhicules. En outre, la densité locale $k(x, t)$ et le flux $q(x, t)$ peuvent être calculés à partir du nombre de véhicules à l'aide des égalités :

$$\begin{cases} \rho_N(x, t) = -\frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \\ q_N(x, t) = \frac{\partial N(x, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (5.2)$$

On constate facilement qu'en introduisant dans LWR (5.1) les relations (5.2), ρ_N et q_N sont solutions de LWR. Ainsi ρ_N et q_N sont reliés par le diagramme fondamental $q_N = Q(\rho_N)$. Finalement on obtient l'équation d'Hamilton Jacobi suivante [24] :

$$\frac{\partial N(x, t)}{\partial t} - Q\left(-\frac{\partial N(x, t)}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times [0, L] \quad (5.3)$$

5.3 Modélisation de jonction

Pour la modélisation d'une jonction, on considère M routes qui s'intersectent à un croisement. On pourra donc considérer une jonction comme étant un ensemble de section de route qui s'intersectent en un même point. On note chaque portion de route composant la jonction $J_n = [0, L_n]$ où L_n est la longueur de la section. Sur chaque section J_n , l'équation d'Hamilton-Jacobi est valable :

$$\frac{\partial N_n(x, t)}{\partial t} - Q_n\left(-\frac{\partial N_n(x, t)}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times [0, L_n], \quad (5.4)$$

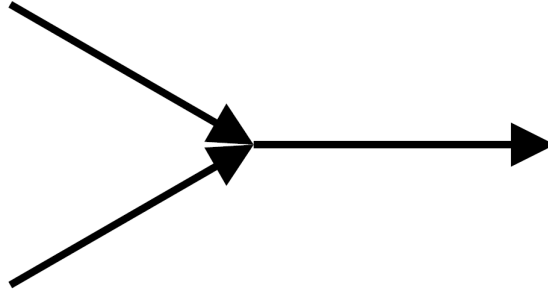


FIGURE 5.2 – Exemple de Jonction

pour tout $n = 1, \dots, M$.

Comme dans le papier [20], on considère une nouvelle variable :

$$U_n(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \int_0^x \rho_N^n(y, t) dy + g_n(t),$$

où $\gamma_n \in [0, 1]$ décrit une fraction de route J_n (entrante ou sortante) et est tel que :

$$\begin{cases} \sum_{n \in Ent} \gamma_n = 1 \\ \sum_{n \in Sort} \gamma_n = 1 \end{cases} \quad (5.5)$$

où Ent : ensemble des indices de flux entrant dans la jonction, $Sort$: ensemble des indices de flux sortant de la jonction. Pour chaque branche J_n , $g_n(t) = \frac{-N_n(0, t)}{\gamma_n} = U_n(0, t)$.

En calculant l'intégral, on obtient :

$$U_n(x, t) = \frac{-N_n(x, t)}{\gamma_n}.$$

D'où en partant de l'équation d'Hamilton-Jacobi sur chaque section on montre que U_n satisfait à l'équation

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} - \frac{1}{\gamma_n} Q_n \left(\gamma_n \frac{\partial U_n}{\partial x} \right) = 0$$

Pour prendre en compte l'orientation des flux (entrant ou sortant), on définit une

variable :

$$u_n(x, t) = \begin{cases} -U_n(-x, t) & x > 0 \quad n \in Ent \\ -U_n(x, t) & x > 0 \quad n \in Sort \end{cases} \\ = \begin{cases} \frac{N_n(-x, t)}{\gamma_n} & x > 0 \quad n \in Ent \\ \frac{N_n(x, t)}{\gamma_n} & x > 0 \quad n \in Sort \end{cases}$$

Ainsi u_n satisfait au problème de Cauchy de l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + H_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right) = 0 & \text{sur } (0, T) \times J_n \setminus \{0\} \\ u_n(0, t) = g_n(t) & \text{sur } (0, T) \\ u_n(x, 0) = u_n^0(x), & n = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Avec

$$H_n(p) = \begin{cases} -\frac{Q_n(\gamma_n \cdot p)}{\gamma_n} & n \in Ent \\ -\frac{Q_n(-\gamma_n \cdot p)}{\gamma_n} & n \in Sort \end{cases}, \forall p.$$

Ainsi l'équation s'écrit en fonction de la variable de comptage de véhicule $N_n(x, t)$ par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial N_n(-x, t)}{\partial t} - Q_n\left(\frac{\partial N_n(-x, t)}{\partial x}\right) = 0 & \text{sur } (0, T) \times J_n \setminus \{0\} \quad n \in Ent \\ \frac{\partial N_n(x, t)}{\partial t} - Q_n\left(\frac{\partial N_n(x, t)}{\partial x}\right) = 0 & \text{sur } (0, T) \times J_n \setminus \{0\} \quad n \in Sort \\ \frac{N_n(0, t)}{\gamma_n} = -g_n(t) & \text{sur } (0, T) \\ \frac{N_n(-x, 0)}{\gamma_n} = u_n^0(-x), & \text{sur } J_n \setminus \{0\} \quad n \in Ent \\ \frac{N_n(x, 0)}{\gamma_n} = u_n^0(x), & \text{sur } J_n \setminus \{0\} \quad n \in Sort \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Pour tout $n = 1, \dots, M$. Des travaux ont déjà prouvé l'existence théorique et numérique de solution de ce problème de Cauchy en utilisant des méthodes variées. Parmi ces méthodes on cite la théorie variationnelle ([1], [24], [2]) ainsi que la programmation dynamique [24]. Les EDP LWR peuvent être résolues de manière efficace par des schémas numériques de premier ordre comme le schéma de Godunov [33], [21]. Cependant des méthodes plus récentes et moins coûteuses en ressources CPU sont utilisés pour la résolution de ces EDP : la méthode de Lax-Hopf, voir [50] pour plus de détails.

5.4 modèles mésoscopiques

La congestion étant l'un des principaux enjeux de la modélisation du trafic, le modèle macroscopique n'est pas suffisant dans certains cas. Le modèle microscopique, quant à lui, est difficilement utilisable à grande échelle : il impliquerait un travail de calibration trop important et des temps de calcul trop longs.

Les modèles mésoscopiques sont à l'intermédiaire de ces derniers dans le sens qu'ils pourront modéliser les interactions individuelles entre les véhicules et être appliqués à de grands réseaux. Les modèles mésoscopiques simulent des événements de changement de section : changement de voie, modification de la vitesse etc. C'est-à-dire que les caractéristiques dynamiques du véhicule sont calculées uniquement à chaque fois qu'il sort d'une section pour entrer dans une autre : en tournant. Ce mode de calcul réduit fortement le temps de calcul, mais requiert une adaptation des modèles de comportements.

Les événements sont séparés par des nœuds ou des lieux de singularités géométriques : convergence de routes, divergence de routes, réduction du nombre de voies, changement de la vitesse réglementaire, etc. Ces nœuds sont les extrémités des sections homogènes du réseau et permettent de les relier entre elles. Un modèle mésoscopique doit caractériser chaque événement.

Beaucoup de simulateurs de trafic routier utilisant des modèles mésoscopiques ont été implémentés comme Mezzo, Vissim etc.

5.5 Simulation

Pour la simulation du modèle macroscopique dans le cas d'une jonction, nous allons utiliser la méthode de Lax-Hopf [18], [19], [50]. La méthode de Lax-Hopf est capable de donner une solution exacte à l'EDP LWR pour tout diagramme fondamental concave avec condition initiale et conditions au bords constants par morceau. La méthode utilise la fonction de Moskowitz N comme intermédiaire pour trouver la densité, de plus elle ne nécessite pas de discrétisation du temps ni de l'espace. En effet elle calcule de façon exacte la solution en tout point du domaine (t, x) spatio-temporelle.

On va s'intéresser à la simulation de deux scénarios par la méthode de Lax-Hopf (voir [50]) en utilisant la boîte à outils Matlab implémentée par ces auteurs téléchargeable gratuitement dans <http://traffic.berkeley.edu/project/downloads/lwrsolver>.

Au niveau d'une intersection subissant une congestion certains véhicules quittent une section de route pour couper directement au niveau de l'intersection ; on va appeler cela un saut. Quel en est l'impact sur le temps globale de décongestion de la zone ? C'est à dire ce saut est il réellement efficace dans la décongestion ou

aggrave t-elle la situation ?

Choix des paramètres

Dans les deux scénarios nous simulons le problème de Cauchy de l'équation d'Hamilton Jacobi du trafic routier. Cela signifie qu'on se donne des densités initiales N_0 , des vitesses de déplacement des véhicules aux points d'entrée N^{ini} et de sortie N^{fin} des sections de route. On utilise également dans les deux cas un diagramme fondamental triangulaire.

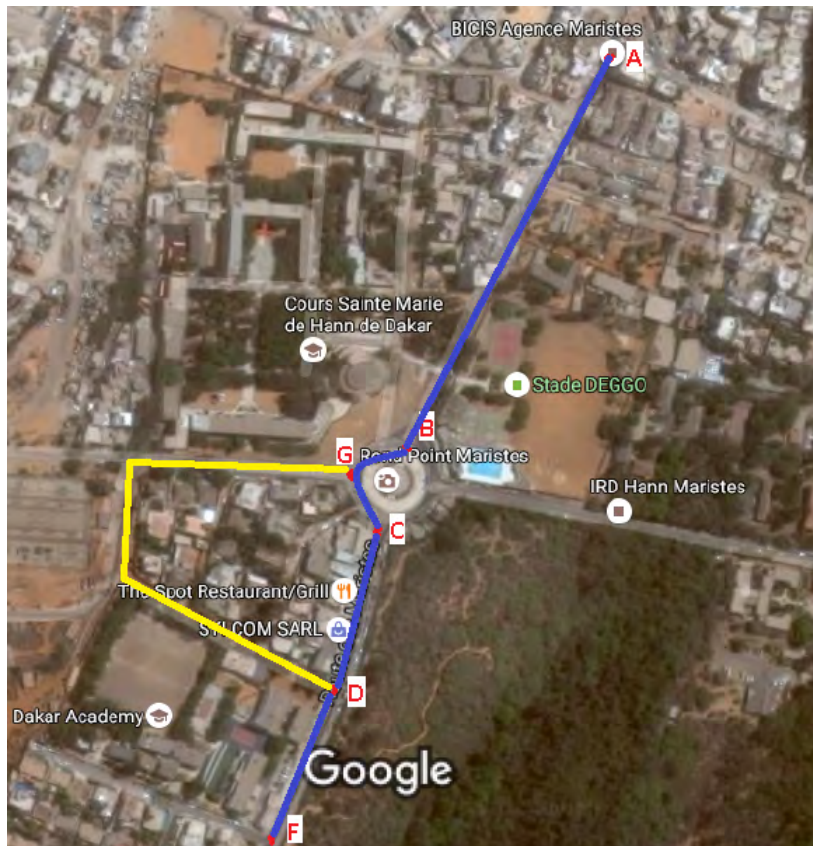


FIGURE 5.3 – Carte utilisée dans les deux scénarios : Section de route en bleu est la section de route 1 et la section de route en jaune est la section de route 2.

— Construction du scénario 1 :

Dans ce scénario, on considère qu'un flux de véhicules quitte la section de route 1(bleu) (*pour cause de congestion*) pour passer par la section de route 2(jaune) et finalement rejoint à nouveau la section route 1 par une autre entrée.

Pour la section de route 1 :

La longueur est $L_1 = 709m$, la vitesse du flux libre est $6m/s$, vitesse du flux

en congestion $-2m/s$. La densité maximale de la section est $0.625veh/m$.

Densité initiale :

$0.086veh/m$ de $709m(A)$ à $359m(B)$, $1.154veh/m$ de $359m(B)$ à $309.5m(G)$ et $0.575veh/m$ (la densité sur la section BC est divisée en deux, l'autre moitié a choisi la section de route 2) de $309.5(G)m$ à $260m(C)$, $0.15veh/m$ de $260m(C)$ à $130m(D)$ et $0.725veh/m$ (la densité sur la section DE est augmentée de l'autre moitié qui avait choisi la section de route 2) de $130m(D)$ à $0m(E)$.

Vitesse d'entrée :

A la position A la vitesse est $0.1veh/s$ de 0 à $900s$ et $0.01veh/s$ à partir de $900s$.

Vitesse de sortie :

A la position du point de sortie E , la vitesse est $0.01veh/s$ de 0 à $700s$.

Pour la section de route 2 :

La longueur est $L_2 = 450m$, la vitesse du flux libre est $6m/s$, vitesse du flux en congestion $-2m/s$. La densité maximale de la section est $0.625veh/m$.

Densité initiale :

$0.575veh/m$ de $450m$ à $0m$.

Vitesse d'entrée :

A la position G la vitesse est $0.225veh/s$ de 0 à $900s$ et $0.1veh/s$ de $900s$ à $5000s$.

Vitesse de sortie :

A la position du point de sortie D , la vitesse est $0.225veh/s$ de 0 à $700s$.

— Construction du scénario 2 :

Dans cette situation on considère que tout le flux de véhicules passe uniquement par la section de route 1 (même s'il y'a congestion).

La longueur est $L_1 = 709m$, la vitesse du flux libre est $6m/s$, vitesse du flux en congestion $-2m/s$. La densité maximale de la section est $0.625veh/m$.

Densité initiale :

de $709m$ à $359m \rightarrow 0.086veh/m$, de $359m$ à $260m \rightarrow 1.154veh/m$ et de $260m$ à $0m \rightarrow 0.15veh/m$.

Vitesse d'entrée :

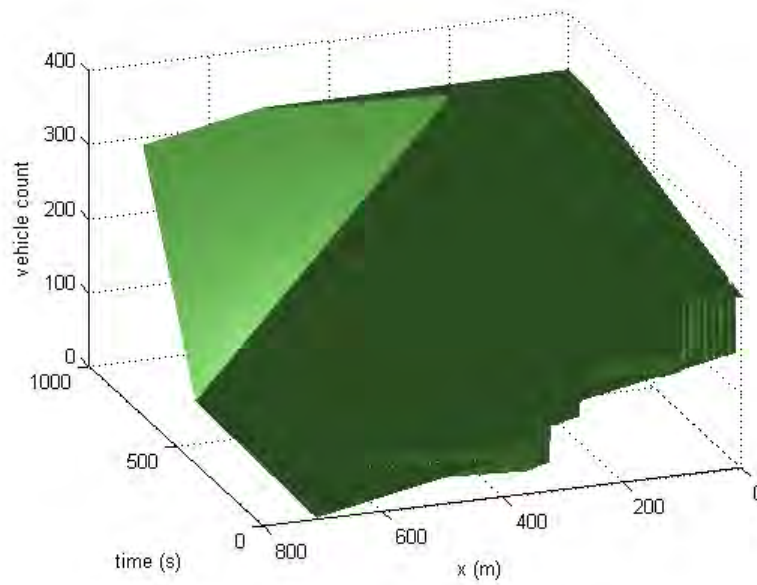
A la position A la vitesse est $0.1veh/s$ de 0 à $900s$ et $0.01veh/s$ de $900s$ à plus.

Vitesse de sortie :

A la position du point de sortie E , la vitesse est $0.01veh/s$ de 0 à $700s$.

FIGURE 5.4 – Scénario 1 : Section de route 1

(a) Nombre de véhicules en fonction du temps et de l'espace



(b) Trajectoire des véhicules en fonction du temps et densité

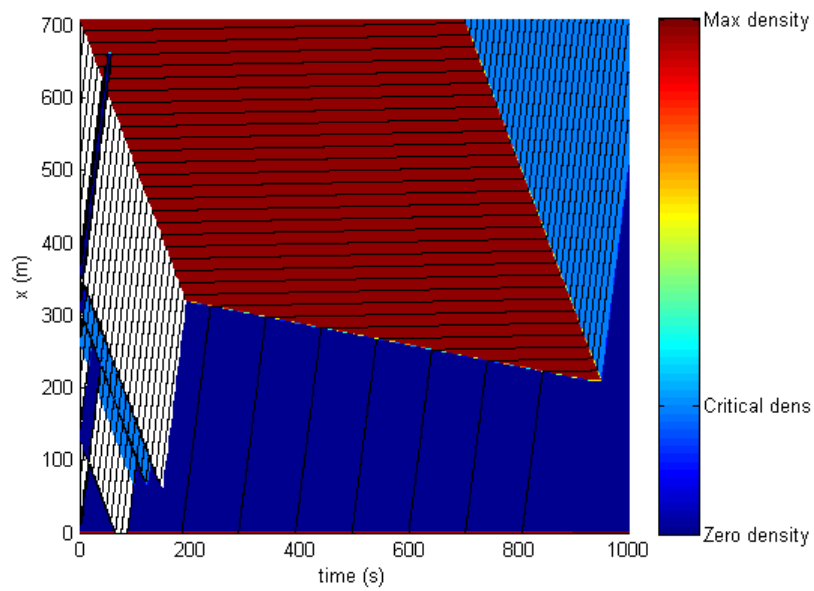
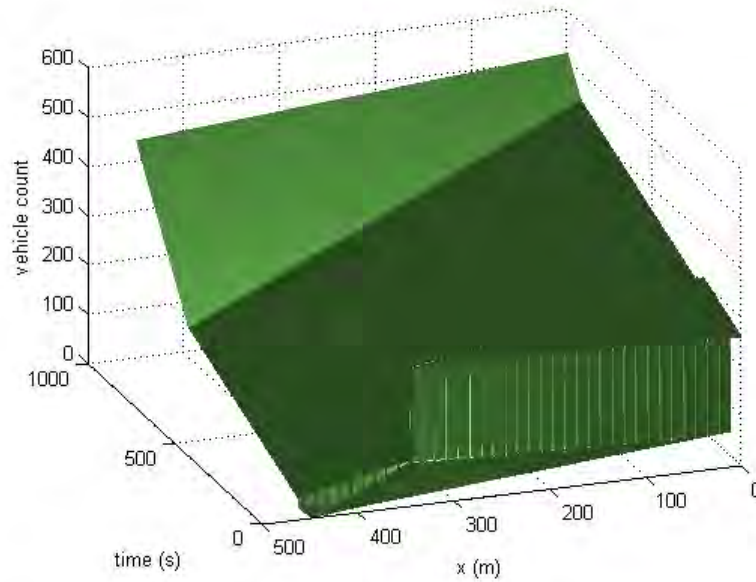


FIGURE 5.5 – Scénario 1 : Section de route 2

(a) Nombre de véhicules en fonction du temps et de l'espace



(b) Trajectoire des véhicules en fonction du temps et densité

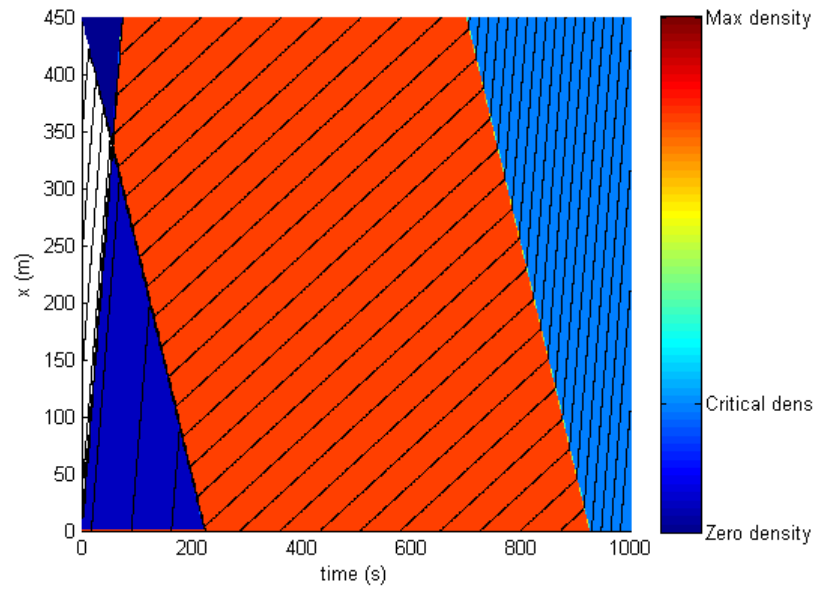
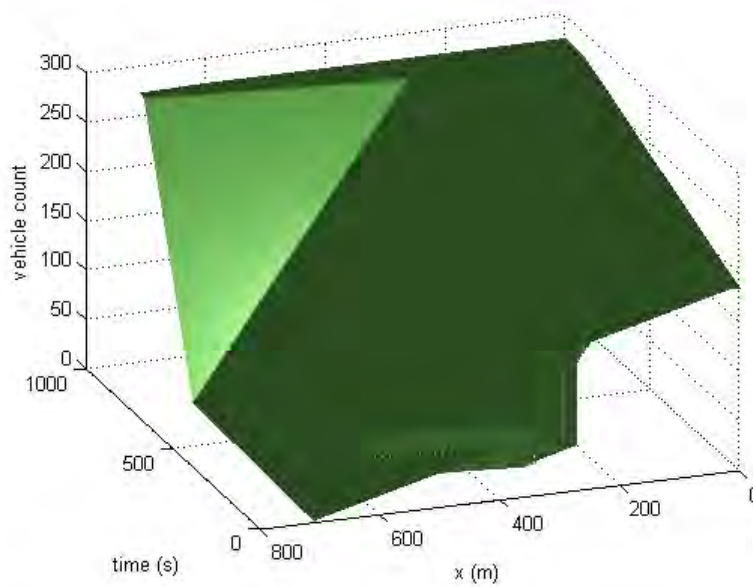
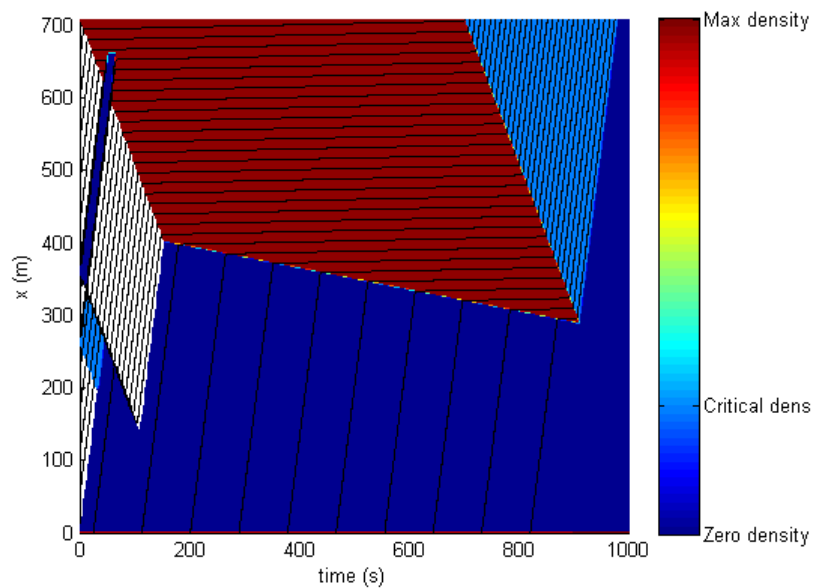


FIGURE 5.6 – Scénario 2 : Section de route 1

(a) Nombre de véhicules en fonction du temps et de l'espace



(b) Trajectoire des véhicules en fonction du temps et densité



Chapitre 6

Réseaux de transport et localisation d'activités ¹

6.1 Introduction

Le problème que nous étudions dans cette partie consiste à déterminer le réseau de transport et la localisation des activités sur ce réseau permettant d'optimiser une fonction représentant le coût de transport sur ce réseau. On se réfère à ce problème en parlant de la conception simultanée d'un réseau de transport et de la localisation de ses activités (en anglais Transportation Network and Land Use problem). Celui-ci trouve des applications pratiques en aménagement urbain, les activités étant dans ce cas les générateurs de flux de déplacement (résidences, écoles, zones de loisir, zones industrielles, zones d'affaires, etc.) et les arcs du réseau les routes. Le problème couple par définition deux types de décisions où réside sa difficulté : celui de la conception du réseau (Optimal Network design (ON)) et celui de l'affectation quadratique d'activités (Quadratic Assignment Problem (QAP)). Dans la suite, nous désignerons par l'acronyme ONQAP notre problème en référence à l'appellation anglaise des deux problèmes qui le composent. Du fait de la complexité à les résoudre simultanément, ces sous-problèmes ont été étudiés séparément, générant une abondante littérature sur ces sujets. On peut citer entre autres les travaux Scott (1969), Boyce, Farhi et Weischedel (1973), Hoang Hai Ho c(1973) et Billheimer (1970) sur les problèmes de conception de réseau, et ceux de Schlager (1965) et Gordon-McReynolds (...) pour les problèmes de localisation d'activités . Très peu de contributions en revanche s'intéressent au problème combiné qui pourtant s'approche le mieux de la réalité des aménageurs urbains.

1. Une publication a été tirée de ce chapitre : A New Heuristic Method for Transportation Network and Land Use Problem, Mouhamadou Aliou M.T. Baldé and Babacar M. Ndiaye, in Journal of Mathematics Research, Vol. 8, No. 3, pp 94-111, June 2016.

En effet, le réseau de transport influence la localisation des activités. On peut constater à ce titre que la récente Voie de Dégagement Nord (VDN) dans la ville de Dakar a motivé la création de nouveaux quartiers le long de celle-ci qui sont autant de points de départ et d'arrivée de population, donc autant d'activités. Inversement, ces activités ont eu un impact sur le réseau puisqu'elles ont généré des congestions dues aux nouveaux flots de véhicules. Il y a donc une sorte de spirale (ou cercle), activités-flots dans les réseaux, qui peut être vertueuse ou désastreuse selon l'évolution des choses. Résoudre simultanément les deux problèmes revient pour un aménageur à prendre en compte dans la planification la relation existant entre les deux aspects, alors que les séparer ne consiste qu'à solutionner un aspect du problème. Très peu d'auteurs se sont intéressés à l'approche simultanée parmi eux Marc Los [47] et plus récemment Lin et Feng [44].

En reprenant la même hypothèse que Los sur l'écoulement des flots de véhicule, nous proposons dans cette partie un programme mathématique généralisant celui de Los [47] ainsi que de nouvelles méthodes de résolution exacte et heuristique. L'heuristique proposée est basée sur une décomposition du problème fournissant une solution proche sinon égale sous certaines conditions à l'optimum de notre modèle. Les résolutions exactes sont quant à elle basées sur des schémas de linéarisation permettant de dériver des bornes inférieures. Des tests numériques sur des données académiques et des données réelles de la ville de Dakar démontrent la qualité des approches. Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. A la section 6.2, le programme mathématique modélisant le problème est présenté. Nous proposons ensuite à la section 6.3 différentes reformulations linéaires du premier modèle qui chacune permettent de calculer des bornes inférieures à la valeur optimale du problème. Ces reformulations sont analysées dans cette même section. La section 6.4 est quant à lui dévolue à la méthode heuristique. Les méthodes proposées aux sections 6.3 et 6.4 font ensuite l'objet de tests numériques à la section 6.5.

6.2 Formulation du modèle

Nous supposons avoir n zones et n activités à localiser sur ces zones.

On considère le graphe $G = (V, E)$ tel que V est l'ensemble des noeuds formés par les différentes zones (n) et E est l'ensemble des arcs joignant les n zones deux à deux. On pose :

$A = (a_{ik})$: matrice de coût de localisation de l'activité i sur la zone k .

$F = (f_{ij})$: matrice de flot de déplacement par unité de temps entre deux activités i et j .

$C = (c_{ij})$: matrice de coût de construction de l'arc ou de la route (i, j) .

$W = (w_{ij})$: matrice de distance directe entre les zones i et j ou distance de l'arc (i, j) .

Pour déterminer les localisations des activités, on considère des variables de décision, dites d'affectation, $x_{ik} = 1$ si l'activité i est affectée sur le noeud k et 0 sinon. Pour déterminer la configuration du réseau, nous avons besoin d'introduire des variables binaires $y_{ij} = 1$ si l'arc (i, j) est choisi et 0 sinon. En fonction du réseau construit, le plus court chemin, au sens de coûts fixes de construction w_{ij} associés à chaque arc (i, j) , peut varier. Il est alors nécessaire d'introduire des variables $d_{kl}(y)$ désignant leurs valeurs, ainsi que des variables z_a^{kl} permettant de savoir si le plus court chemin entre k et l passe par un arc (route) a du réseau ou non. On estime par ailleurs que si l'activité i est placée sur le noeud k , et l'activité j sur l , alors le coût de transport d'un véhicule de k à l est égal à la distance $d_{kl}(y)$. D'autre part, les localisations des activités induisent des coûts fixes a_{ik} auxquels s'ajoutent, pour le réseau en construction, des coûts de construction c_{ij} de routes. La somme des coûts de localisation, de transport et de construction s'exprime alors mathématiquement par la fonction suivante :

$$q(x, y, d) = \sum_{i,k} a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k,j,l} f_{ij}d_{kl}x_{ik}x_{jl} + \sum_{i,j} c_{ij}y_{ij}$$

Il s'agit là d'un modèle cubique en nombres entiers. Le réseau et la localisation "optimale" d'activités sont obtenus en minimisant la fonction ci-dessus sous un ensemble de contraintes décrites ci-dessous.

$$\text{Min} \sum_{i,k} a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k,j,l} f_{ij}d_{kl}x_{ik}x_{jl} + \sum_{i,j} c_{ij}y_{ij}$$

$s - t :$

$$(1) \sum_i x_{ik} = 1$$

$$(2) \sum_k x_{ik} = 1$$

$$(3) \sum_{a \in \delta^+(k)} z_a^{kl} = \sum_{a \in \delta^-(l)} z_a^{kl} = 1$$

$$(4) \sum_{a \in \delta^+(m)} z_a^{kl} = \sum_{a \in \delta^-(m)} z_a^{kl}$$

$$(5) d_{kl} - \sum_{a \in E} w_a z_a^{kl} \geq 0$$

$$(6) z_{(i,j)}^{kl} + z_{(j,i)}^{kl} \leq y_a$$

Où m est un noeud intermédiaire différent des deux zones k et l pris respectivement comme origine et destination du chemin considéré, $\delta^+(i) = \{j \in V / (i, j) \in E\}$,

$$\delta^-(i) = \{j \in V / (j, i) \in E\}$$

(1) et (2) représentent des contraintes d'affectation garantissant qu'une activité n'est localisée que dans une seule zone et inversement. Pour obtenir les plus courts chemins, on utilise des variables de flots, z_a^{kl} , consistant à faire passer un flot de 1. A ces variables sont associées des contraintes de conservation de flots. La contrainte (5) permet de donner à d_{kl} la valeur du plus court chemin de k à l , et la (6) permet d'assurer que seuls sont pris en compte, dans le calcul des plus courts chemins, les arcs correspondants aux routes effectivement construites.

Ainsi dans notre modèle les variables à déterminer dans l'optimisation sont principalement x_{ik} , y_{ij} et d_{kl} , qui interviennent dans la fonction objectif, puis z_{ij}^{kl} qui intervient uniquement dans les contraintes. Les variables x_{ik} , y_{ij} et z_{ij}^{kl} sont binaires et la variable d_{kl} est réelle.

Ce modèle est une extension du problème de Koopmans-Beckmann. On peut montrer que ce problème est NP-Complet puisque généralisant le problème dit d'affectation quadratique (QAP) connu pour l'être. En effet, si nous fixons par exemple toutes les variables y_{kl} , autrement dit si nous décidons de construire toutes les routes, alors le problème se résume à trouver les affectations d'activités minimisant la somme des coûts de déplacement; ce qui est équivalent à résoudre un problème d'affectation quadratique.

Ce qui confère à ce problème une difficulté supérieure ou égale à celle de QAP.

On peut reformuler le modèle de façon plus précise par rapport aux arcs et aux zones à considérer et en remplaçant l'arc a par (i, j) .

$$\text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_{ik} + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij} y_{ij}$$

$s - t :$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad k = 1, \dots, n \\ (2) \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\ (3) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, \quad k \neq l, k, l = 1, \dots, n \\ (4) \sum_{\substack{j=1 \\ m \neq j}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, \quad k \neq l, k \neq m, l \neq m, \\ \quad \quad \quad m = 1, \dots, n, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (5) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij} z_{ij}^{kl} \leq d_{kl}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (6) \quad z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \quad \quad \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (7) \quad x_{ik}, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \\ (8) \quad z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, \quad k \neq l, \quad i \neq j, \quad k, l, i, j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

6.3 Linéarisation et borne inférieure

6.3.1 Linéarisation

Une des techniques standards utilisées pour résoudre des problèmes non-linéaires non convexes du type de celui de ONQAP consiste à les reformuler sous une forme mieux étudiée, et à profiter ainsi des méthodes de résolution éprouvées. Généralement on essaie de se ramener à un problème à fonction objectif et contraintes convexes, et en particulier à un problème linéaire. On appelle ces méthodes « techniques de linéarisation ». Nous montrons dans cette sous-section, comment une série d'approches connues de la littérature ont été appliquée au problème ONQAP. Une méthodologie originale basée sur ces linéarisations et sur une décomposition est présenté dans la sous-section 6.3.2.

Rappelons la fonction objectif :

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_{ik} + \sum_{i,k,j,l} f_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl} + \sum_{i,j} c_{ij} y_{ij}$$

Dans cette fonction le terme non linéaire à linéariser est :

$$\sum_{i,k,j,l} f_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl}$$

6.3.1.1 Linéarisation classique

La linéarisation classique ou standard (voir [7], [25]) appliquée au problème ONQAP consiste à remplacer le produit $d_{kl}x_{ik}x_{jl}$ par une nouvelle variable Z_{ikjl} . À ces variables sont associées de nouvelles contraintes assurant que la reformulation reste équivalente au problème d'origine. Ces contraintes pour la variable Z_{ikjl} sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{ikjl} \leq L \cdot x_{ik} \\ Z_{ikjl} \leq L \cdot x_{jl} \\ Z_{ikjl} \leq d_{kl} \\ Z_{ikjl} \geq d_{kl} - L \cdot (2 - x_{ik} - x_{jl}) \\ Z_{ikjl} \geq 0, \end{array} \right.$$

où $L \geq \max_{k,l} d_{kl}$.

Ainsi il est bien connu (voir [7], [25]) que quand les variables correspondantes sont entières, ces contraintes assurent l'égalité $Z_{ikjl} = d_{kl}x_{ik}x_{jl}$. La reformulation (ONQAP-LIN1) du problème ONQAP avec ces variables est donc

la suivante :

$$\text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij}Z_{ikjl} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij}y_{ij}$$

$s - t :$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, & k = 1, \dots, n \\ (2) \quad & \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, & i = 1, \dots, n \\ (3) \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, & k \neq l, & k, l = 1, \dots, n \\ (4) \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ m \neq j}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, & k \neq l, k \neq m, l \neq m, & m, k, l = 1, \dots, n \\ (5) \quad & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl} \leq d_{kl}, & k \neq l, & k, l = 1, \dots, n \\ (6) \quad & z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, & i \neq j, k \neq l, & i, j, k, l = 1, \dots, n \\ (7) \quad & Z_{ikjl} \leq L \cdot x_{ik}, & i \neq j, k \neq l, & j, l, i, k = 1, \dots, n \\ (8) \quad & Z_{ikjl} \leq L \cdot x_{jl}, & i \neq j, k \neq l, & i, k, j, l = 1, \dots, n \\ (9) \quad & Z_{ikjl} \leq d_{kl}, & i \neq j, k \neq l, & i, j, k, l = 1, \dots, n \\ (10) \quad & L \cdot x_{ik} + L \cdot x_{jl} + d_{kl} - Z_{ikjl} \leq 2L, & i \neq j, k \neq l, & i, k, j, l = 1, \dots, n \\ (11) \quad & Z_{ikjl} \geq 0, & i \neq j, k \neq l, & i, k, j, l = 1, \dots, n \\ (12) \quad & x_{ik}, y_{ij} \in \{0, 1\}, & k \neq l, & i, k, j = 1, \dots, n \\ (13) \quad & z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, & i \neq j, k \neq l, & i, j, k, l = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Comme nous avons à faire à un problème de minimisation est que les coefficients f_{ij} sont tous positifs ou nuls les contraintes (7), (8) et (9) ne sont pas nécessaires et peuvent être enlevées.

Cette reformulation peut être simplifiée en observant que pour tout couple de localisation (k, l) il existe un unique couple d'entités (i_0, j_0) tel que $Z_{i_0 k j_0 l} = d_{kl}$. Par conséquent :

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} Z_{ikjl} = d_{kl}.$$

Ainsi dans la contrainte (5) on peut remplacer les variables d_{kl} par $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n Z_{ikjl}$ et le

problème ne sera pas modifié.

Par ce changement la contrainte (9) $Z_{ikjl} \leq d_{kl}$ peut être éliminée car elle est équivalente à $Z_{ikjl} \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n Z_{ikjl}$,

ce qui est toujours vrai car les variables $Z_{ikjl} \geq 0$.

De même la contrainte (10) peut être éliminée. En effet si $Z_{ikjl} = 0$ alors (10) devient $d_{kl} \leq 2L$ puisque $x_{ik} = x_{jl} = 0$. Comme $d_{kl} \in [0, L]$, $d_{kl} \leq 2L$ est toujours vrai. Si $Z_{ikjl} = d_{kl}$ alors (10) devient $L \cdot x_{ik} + L \cdot x_{jl} \leq 2L$ ce qui reste toujours vrai. La nouvelle contrainte (5) associée aux contraintes (1) et (2), permet d'assurer qu'une seule des variables Z_{ikjl} pourra avoir la valeur du plus court chemin.

Donc le problème est ainsi reformulé :

$$\text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij}Z_{ikjl} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij}y_{ij}$$

$s - t :$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, & k = 1, \dots, n \\ (2) \quad & \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, & i = 1, \dots, n \\ (3) \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, & k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (4) \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ m \neq j}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, & k \neq l, k \neq m, l \neq m, \quad m, k, l = 1, \dots, n \\ (5) \quad & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl} \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n Z_{ikjl}, & k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (6) \quad & z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, & i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n \\ (7) \quad & Z_{ikjl} \leq L \cdot x_{ik}, & i \neq j, k \neq l, \quad j, l, i, k = 1, \dots, n \\ (8) \quad & Z_{ikjl} \leq L \cdot x_{jl}, & i \neq j, k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n \\ (9) \quad & Z_{ikjl} \geq 0, & i \neq j, k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n \\ (10) \quad & x_{ik}, y_{ij} \in \{0, 1\}, & k \neq l, \quad i, k, j = 1, \dots, n \\ (11) \quad & z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, & i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Cette nouvelle formulation linéaire compte $2n^4 - 4n^3 + 4n^2 - n$ variables et $4n^4 -$

$7n^3 + 2n^2 + 5n$ contraintes.

Le domaine réalisable de cette formulation peut être réduit en remplaçant la valeur L par des encadrements plus serrés des variables d_{kl} . On note γ_{kl} et Γ_{kl} respectivement la plus petite et la plus grande distance dans le graphe. Il vient alors immédiatement les contraintes ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{ijkl} \geq \gamma_{kl}x_{ik} + \gamma_{kl}x_{jl} - \gamma_{kl} \\ Z_{ikjl} \leq \Gamma_{kl}x_{ik} \\ Z_{ikjl} \leq \Gamma_{kl}x_{jl}, \end{array} \right.$$

Celles-ci peuvent être rajoutées à la formulation ONQAP-LIN1 en renforçant ses bornes et réduisant son domaine réalisable. On peut proposer une formulation de problèmes pour la détermination des plus courts et longs chemins sur le graphe à partir des contraintes de ONQAP. Ces problèmes sont formulés comme suit :

$$(\mathbf{P}_1) \quad \gamma_{kl} = \text{Min} \sum_{\substack{i,j=1,i \neq j \\ i \neq l, j \neq k}}^n w_{ij} z_{ij}^{kl}$$

$$s - t :$$

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1 \\ (2) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m, j \neq k}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m, i \neq l}}^n z_{im}^{kl} \leq 1, \quad m = 1, \dots, n, \quad k \neq m, l \neq m \\ (3) \quad z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq l, \quad j \neq k \\ (4) \quad z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq l, \quad j \neq k \end{array} \right.$$

$\forall k, l = 1, \dots, n, \quad k \neq l.$

$$(\mathbf{P}_2) \quad \Gamma_{kl} = \max_{z \in Z} \sum_{\substack{i,j=1,i \neq j \\ i \neq l, j \neq k}}^n w_{ij} z_{ij}^{kl}, \quad \forall k, l = 1, \dots, n, \quad k \neq l.$$

Ainsi une formulation de ONQAP-LIN1 devient :

$$\text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij}Z_{ikjl} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij}y_{ij}$$

$s - t :$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad k = 1, \dots, n$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$(3) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n$$

$$(4) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ m \neq j}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, \quad k \neq l, k \neq m, l \neq m, \quad m, k, l = 1, \dots, n$$

$$(5) \quad \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl} \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n Z_{ikjl}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n$$

$$(6) \quad z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n$$

$$(7) \quad Z_{ikjl} \leq \Gamma_{kl} \cdot x_{ik}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad j, l, i, k = 1, \dots, n$$

$$(8) \quad Z_{ikjl} \leq \Gamma_{kl} \cdot x_{jl}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n$$

$$(9) \quad Z_{ikjl} \geq \gamma_{kl} \cdot x_{ik} + \gamma_{kl} \cdot x_{jl} - \gamma_{kl}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n$$

$$(10) \quad x_{ik}, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad k \neq l, \quad i, k, j = 1, \dots, n$$

$$(11) \quad z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n$$

où γ_{kl} et Γ_{kl} peuvent être déterminés en résolvant les problèmes (\mathbf{P}_1) et (\mathbf{P}_2) ou en utilisant les techniques classiques de détermination de plus courts et longs chemin bien connus.

6.3.1.2 Linéarisation de Kaufmann et Broeckx

La linéarisation de Kaufmann et Broeckx consiste à remplacer l'expression : $x_{ik} \sum_{j,l} f_{ij} d_{kl} x_{jl}$. On procède pour cela en deux étapes.

Soit $U_{kl} = d_{kl} \cdot x_{jl}$ avec $d_{kl} \in [0, L]$. La nouvelle variable V_{ik} est alors définie par

$$V_{ik} = x_{ik} \cdot \sum_{j,l} f_{ij} \cdot U_{kjl}.$$

La fonction objectif devient alors : $\sum_{i,k} a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k} V_{ik} + \sum_{i,j} c_{ij}y_{ij}$.

Comme pour la linéarisation classique il est ensuite nécessaire d'introduire des contraintes assurant l'égalité entre les variables introduites et les expressions qu'elles remplacent. S'agissant des variables U_{kjl} , nous savons que :

$$U_{kjl} \leq L \cdot x_{jl}$$

$$U_{kjl} \leq d_{kl}$$

$$U_{kjl} \geq d_{kl} - L(1 - x_{jl})$$

$$U_{kjl} \geq 0.$$

De façon analogue pour ce qui est de V_{ik} nous avons :

$$V_{ik} \leq q_i L \cdot x_{ik}$$

$$V_{ik} \leq \sum_{j,l} f_{ij} U_{kjl}$$

$$V_{ik} \geq \sum_{j,l} f_{ij} U_{kjl} - q_i L(1 - x_{ik})$$

$$V_{ik} \geq 0.$$

La formulation résultante ONQAP-LIN2 est alors la suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k=1}^n V_{ik} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}y_{ij} \\
 s - t : \quad & \\
 (1) \quad & \sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad k = 1, \dots, n \\
 (2) \quad & \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\
 (3) \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\
 (4) \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ m \neq j}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, \quad k \neq l, k \neq m, l \neq m, \quad m, k, l = 1, \dots, n \\
 (5) \quad & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl} \leq d_{kl}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\
 (6) \quad & z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n \\
 (7) \quad & U_{kjl} \leq L \cdot x_{jl}, \quad k \neq l, \quad j, l, k = 1, \dots, n \\
 (8) \quad & U_{kjl} \leq d_{kl}, \quad k \neq l, \quad j, k, l = 1, \dots, n \\
 (9) \quad & L \cdot x_{jl} + d_{kl} - U_{kjl} \leq L, \quad k \neq l, \quad k, j, l = 1, \dots, n \\
 (10) \quad & V_{ik} \leq q_i L \cdot x_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n \\
 (11) \quad & V_{ik} \leq \sum_{j,l} f_{ij} U_{kjl}, \quad i, k = 1, \dots, n \\
 (12) \quad & V_{ik} \geq \sum_{j,l} f_{ij} U_{kjl} - q_i L (1 - x_{ik}), \quad i, k = 1, \dots, n \\
 (13) \quad & U_{kjl} \geq 0, V_{ik} \geq 0, \quad k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n \\
 (14) \quad & x_{ik}, y_{ij}, z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Comme il s'agit d'un problème de minimisation les contraintes (10), (11) peuvent être retirées sans conséquences sur la valeur de la solution optimale du problème. Le modèle peut en outre se simplifier davantage en remarquant que :

$$d_{kl} = \sum_j U_{kjl}.$$

Cette équivalence permet de remplacer les variables d_{kl} mais également de retirer les contraintes (8) et (9) du problème.

Le problème en résultant est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k=1}^n V_{ik} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}y_{ij} \\ s - t : \quad & \\ (1) \quad & \sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, \quad k = 1, \dots, n \\ (2) \quad & \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\ (3) \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (4) \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ m \neq j}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, \quad k \neq l, k \neq m, l \neq m, \quad m, k, l = 1, \dots, n \\ (5) \quad & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl} \leq \sum_j U_{kjl}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (6) \quad & z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n \\ (7) \quad & U_{kjl} \leq L \cdot x_{jl}, \quad k \neq l, \quad j, l, k = 1, \dots, n \\ (8) \quad & V_{ik} \geq \sum_{j,l} f_{ij}U_{kjl} - q_i L(1 - x_{ik}), \quad i, k = 1, \dots, n \\ (9) \quad & U_{kjl} \geq 0, V_{ik} \geq 0, \quad k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n \\ (10) \quad & x_{ik}, y_{ij}, z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Il comporte $n^4 - n^3 + 2n^2$ variables et $n^4 + n^3 + n^2 + 5n$ contraintes.

Soit γ_{kl} et Γ_{kl} les distances minimale et maximale dans le graphe. On note lb_{ik} et ub_{ik} les valeurs obtenues comme suit :

$$(\mathbf{P}_1) \quad \gamma_{kl} = \min_{z \in Z} \sum_{\substack{i,j=1, i \neq j \\ i \neq l, j \neq k}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl}, \quad \forall k, l = 1, \dots, n, \quad k \neq l.$$

$$(\mathbf{P}_2) \quad \Gamma_{kl} = \max_{z \in Z} \sum_{\substack{i,j=1, i \neq j \\ i \neq l, j \neq k}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl}, \quad \forall k, l = 1, \dots, n, \quad k \neq l.$$

$$\begin{array}{l}
 (\mathbf{P}_3) \left\{ \begin{array}{l}
 lb_{ik} = \min \sum_{\substack{j,l \\ j \neq i, l \neq k}} f_{ij} \gamma_{kl} x_{jl} \\
 s - t \\
 (1) \sum_{j \neq i} x_{jl} = 1, \quad l \neq k, \quad l = 1, \dots, n \\
 (2) \sum_{l \neq k} x_{jl} = 1, \quad j \neq i, \quad j = 1, \dots, n \\
 (3) x_{jl} \in \{0, 1\}, \quad j \neq i, l \neq k \quad j, l = 1, \dots, n
 \end{array} \right. \\
 \\
 (\mathbf{P}_4) \left\{ \begin{array}{l}
 ub_{ik} = \max \sum_{\substack{j,l \\ j \neq i, l \neq k}} f_{ij} \Gamma_{kl} x_{jl} \\
 s - t \\
 (1) \sum_{j \neq i} x_{jl} = 1, \quad l \neq k, \quad l = 1, \dots, n \\
 (2) \sum_{l \neq k} x_{jl} = 1, \quad j \neq i, \quad j = 1, \dots, n \\
 (3) x_{jl} \in \{0, 1\}, \quad j \neq i, l \neq k \quad j, l = 1, \dots, n.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Comme $\gamma_{kl} x_{jl} \leq U_{kjl} = d_{kl} x_{jl} \leq \Gamma_{kl} x_{jl}$, on remplace :

la contrainte (7) par $U_{kjl} \leq \Gamma_{kl} x_{jl}$

la contrainte (9) $U_{kjl} \geq 0$ par $U_{kjl} \geq \gamma_{kl} x_{jl}$

Puis $\forall i, k = 1, \dots, n$ on a :

$$V_{ik} = x_{ik} \sum_{\substack{j,l \\ j \neq i, l \neq k}} f_{ij} d_{kl} x_{jl} \geq x_{ik} \sum_{\substack{j,l \\ j \neq i, l \neq k}} f_{ij} \gamma_{kl} x_{jl} \geq lb_{ik} x_{ik}$$

De même les valeurs calculées précédemment permettent de dériver les inégalités suivantes :

$$\text{la contrainte (8) par } V_{ik} \geq \sum_{\substack{j,l \\ j \neq i, l \neq k}} f_{ij} U_{kjl} - ub_{ik} (1 - x_{ik}).$$

$$\text{la contrainte } V_{ik} \geq 0 \text{ par } V_{ik} \geq lb_{ik} x_{ik}$$

La formulation résultante est la suivante :

$$\text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k=1}^n V_{ik} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}y_{ij}$$

$s - t :$

- (1) $\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1 \quad k = 1, \dots, n$
- (2) $\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad i = 1, \dots, n$
- (3) $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n$
- (4) $\sum_{\substack{j=1 \\ m \neq j}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, \quad k \neq l, k \neq m, l \neq m \quad m, k, l = 1, \dots, n$
- (5) $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl} \leq \sum_j U_{kjl}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n$
- (6) $z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n$
- (7) $U_{kjl} \leq \Gamma_{kl} \cdot x_{jl}, \quad k \neq l, \quad j, l, k = 1, \dots, n$
- (8) $V_{ik} \geq \sum_{j,l} f_{ij}U_{kjl} - ub_{ik}(1 - x_{ik}) \quad i, k = 1, \dots, n$
- (9) $V_{ik} \geq lb_{ik}x_{ik}, \quad k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n$
- (10) $U_{kjl} \geq \gamma_{kl}x_{jl}, \quad k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n$
- (11) $x_{ik}, y_{ij}, z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n$

On détermine γ_{kl} , Γ_{kl} , lb_{ik} et ub_{ik} par la résolution des problèmes (respectivement) (\mathbf{P}_1) , (\mathbf{P}_2) , (\mathbf{P}_3) et (\mathbf{P}_4) .

6.3.2 Une méthode de décomposition

Dans cette sous-section nous proposons de résoudre le problème de ONQAP en trois phases. Il s'agit pour chaque phase de résoudre un sous problèmes de notre problème ONQAP :

- Un problème de plus court chemin ;
- Un problème de localisation d'activité ;
- Un problème de conception de réseau.

On commence donc par un problème de plus court chemin(PCC) qui renvoie en solution les plus courts chemins entre les différentes zones, on les note γ_{kl} . Puis ces γ_{kl} sont introduits dans le problème de localisation d'activité(LA), qui renvoie comme solutions les localisations des différentes activités sur les différentes zones, on les note x_{ik}^* . Et enfin les x_{ik}^* sont utilisés dans le problème de conception de réseau(CR), qui renvoie comme solutions les plus courts chemins et les routes construites, notés respectivement d_{kl}^* et y_{ij}^* .

Ainsi (x_{ik}^*) , (d_{kl}^*) et (y_{ij}^*) sont solutions de ONQAP-D, une forme décomposée de ONQAP.

Dans la suite la méthode est noté ONQAP-DLIN puisque les sous problèmes sont résolus par des techniques de linéarisation. ONQAP-DLIN n'est pas une reformulation de ONQAP mais, il renvoie plutôt une borne supérieure de notre problème initial.

6.3.2.1 Problème de Plus Court Chemin (PCC)

Il s'agit ici de résoudre les problèmes de plus court chemin (**P1**) définit dans la sous-section 6.3.1.1. Ainsi on résout $n^2 - n$ problèmes PCC et les solutions γ_{kl} de ces problèmes satisfont $\gamma_{kl} = \min_{z \in Z} \sum_{\substack{i,j=1, i \neq j \\ i \neq l, j \neq k}}^n w_{ij} z_{ij}^{kl} \forall k, l = 1, \dots, n, k \neq l$.

6.3.2.2 Problème de Localisation d'Activités (LA)

Pour le problème LA on utilise les solutions des problèmes précédents(γ_{kl}), et on formule le problème comme suite :

$$\text{Min } g(x, \gamma) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_{ik} + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij} \gamma_{kl} x_{ik} x_{jl}$$

$s - t :$

$$X = \begin{cases} (1) \sum_{i=1}^n x_{ik} = 1, & k = 1, \dots, n \\ (2) \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1, & i = 1, \dots, n \\ (3) x_{ik} \in \{0, 1\}, & i, k = 1, \dots, n \end{cases}$$

En résolvant ce problème d'affectation quadratique (QAP), on trouve les solutions x_{ik}^* . On constate alors que la résolution de ONQAP-DLIN est d'autant plus efficace que la méthode de résolution de QAP l'est. Ainsi nous proposons trois linéarisations, la première issue des méthodes de linéarisations dans [7], puis la méthode de Kauffman et Broeckx ([14], [70]) et enfin la méthode de Xia et Yuan dans [67].

6.3.2.3 Première linéarisation

Il s'agit de remplacer $x_{ik}x_{jl}$ par X_{ikjl} et on obtient la linéarisation suivante :

$$\text{Min} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij}\gamma_{kl}X_{ikjl}$$

$s - t :$

- (1) $x \in X$
- (2) $X_{ikjl} \leq x_{ik}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad j, l, i, k = 1, \dots, n$
- (3) $X_{ikjl} \leq x_{jl}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n$
- (4) $1 - x_{ik} - x_{jl} + X_{ikjl} \geq 0, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n$
- (5) $X_{ikjl} \geq 0, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, k, j, l = 1, \dots, n$

6.3.2.4 Linéarisation de Kauffman et Broeckx

On part de $\sum_{i,k,j,l} f_{ij}\gamma_{kl}x_{ik}x_{jl} = \sum_{i,k} x_{ik} \sum_{j,l} f_{ij}\gamma_{kl}x_{jl}$, puis on pose $X_{ik} = x_{ik} \sum_{j,l} f_{ij}\gamma_{kl}x_{jl}$ et $c_{ik} = \sum_{j,l} f_{ij}\gamma_{kl}$. (voir [14], [70]).

Ainsi la formulation est :

$$\text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k=1}^n X_{ik}$$

$s - t :$

$$(1) \quad x \in X$$

$$(2) \quad X_{ik} \geq \sum_{j,l} f_{ij}\gamma_{kl}x_{jl} - c_{ik}(1 - x_{ik}), \quad i, k = 1, \dots, n$$

$$(3) \quad X_{ik} \geq 0, \quad i, k = 1, \dots, n$$

6.3.2.5 Linéarisation de Xia et Yuan

Il s'agit d'une formulation linéaire plus «serrée» de Kauffman et Broeckx dans le sens que les variables sont mieux bornées. (voir [67]).

Formulation :

$$\text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k=1}^n X_{ik}$$

$s - t :$

$$(1) \quad x \in X$$

$$(2) \quad X_{ik} \geq \sum_{j,l} f_{ij}\gamma_{kl}x_{jl} - ub_{ik}(1 - x_{ik}), \quad i, k = 1, \dots, n$$

$$(3) \quad X_{ik} \geq lb_{ik}x_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n$$

Où lb_{ik} et ub_{ik} sont les solutions respectives des problèmes (P3) et (P4) définis dans la sous-section 6.3.1.2.

6.3.2.6 Problème de Conception de Réseau de transport (CR)

On résout le problème linéaire suivant :

$$\text{Min} \quad g(x^*, d) + h(y) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik}^* + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij}d_{kl}x_{ik}^*x_{jl}^* + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij}y_{ij}$$

$s - t :$

$$R = \left\{ \begin{array}{ll} (1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, & k, l = 1, \dots, n \\ (2) \sum_{\substack{j=1 \\ m \neq j}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, & k \neq l, k \neq m, l \neq m, m, k, l = 1, \dots, n \\ (3) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij} z_{ij}^{kl} \leq d_{kl}, & k \neq l, k, l = 1, \dots, n \\ (4) z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, & i \neq j, k \neq l, i, j, k, l = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

La résolution de CR nous donne les solutions d_{kl}^* , y_{ij}^* et z_{ij}^{kl*} . On peut simplifier la fonction objectif par $\sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij} d_{kl} x_{ik}^* x_{jl}^* + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij} y_{ij}$ sans changer le problème étant donné que la somme $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_{ik}^*$ est constante. Cependant par souci d'efficacité et de clarté notamment dans les preuves on conserve $g(x^*, d) + h(y)$.

6.3.2.7 Etude de la méthode

A la fin de l'algorithme la valeur optimale de ONQAP-DLIN est donnée par

$$g(x^*, d^*) + h(y^*) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_{ik}^* + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij} d_{kl}^* x_{ik}^* x_{jl}^* + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij} y_{ij}^*.$$

Définition 6.3.1. *Trouver une solution (x^*, d^*, y^*, z^*) de ONQAP-DLIN c'est résoudre le système d'équations suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in X} g(x, \gamma) = g(x^*, \gamma) \\ \min_{l,y,z \in R} g(x^*, d) + h(y) = g(x^*, d^*) + h(y^*) \end{array} \right.$$

avec $\gamma = (\gamma_{kl})$ tel que $\forall k, l = 1, \dots, n, k \neq l, \gamma_{kl} = \min_{\substack{z \in Z \\ i,j=1, i \neq j \\ i \neq l, j \neq k}} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n w_{ij} z_{ij}^{kl}$

Théorème 6.3.1. *Soit (x^*, d^*, y^*, z^*) solution de ONQAP-DLIN et $(\bar{x}, \bar{d}, \bar{y}, \bar{z})$ solution de ONQAP.*

On a :

$$g(x^*, d^*) + h(y^*) \geq g(\bar{x}, \bar{d}) + h(\bar{y})$$

Démonstration. (x^*, d^*, y^*, z^*) solution de ONQAP-DLIN $\Rightarrow x^* \in X$ et $(d^*, y^*, z^*) \in R$

$$\Rightarrow (x^*, d^*, y^*, z^*) \in D$$

Donc (x^*, d^*, y^*, z^*) est admissible pour ONQAP. D'où le résultat. \square

Théorème 6.3.2. *Soit (x^*, d^*, y^*, z^*) solution du problème ONQAP. Si x^* est solution de LA, alors (d^*, y^*, z^*) est solution du problème CR.*

Démonstration.

$$\min_{(x,l,y,z) \in D} q(x, y, d) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_{ik}^* + \sum_{\substack{i,k,j,l=1 \\ i \neq j, k \neq l}}^n f_{ij} d_{kl}^* x_{ik}^* x_{jl}^* + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij} y_{ij}^*$$

$$x^* \text{ solution de LA} \Rightarrow g(x^*, \gamma) = \min_{x \in X} g(x, \gamma)$$

$$\min_{(x,l,y,z) \in D} q(x, y, d) \leq \min_{(l,y,z) \in R} q(x^*, y, d)$$

$$\text{or } (d^*, y^*, z^*) \in R$$

$$\text{donc } \min_{(l,y,z) \in R} q(x^*, y, d) \leq q(x^*, y^*, d^*)$$

$$\Rightarrow q(x^*, y^*, d^*) = \min_{(l,y,z) \in R} q(x^*, y, d) = \min_{(l,y,z) \in R} g(x^*, d) + h(y)$$

$$\Rightarrow g(x^*, d^*) + h(y^*) = \min_{(l,y,z) \in R} g(x^*, d) + h(y).$$

\square

Corollaire 6.3.1. *Soit (x^*, d^*, y^*, z^*) solution du problème ONQAP. Si x^* est solution de LA, alors (x^*, l^*, y^*, z^*) est solution de ONQAP-DLIN.*

Démonstration. Dédution immédiate d'après le théorème 6.3.2. \square

6.3.3 Borne inférieure de ONQAP

Dans cette section nous donnons deux bornes inférieures pour ONQAP. La première est une adaptation de celle de Gilmore Lawler pour QAP et la seconde est basée sur les distances.

Comme ONQAP est une généralisation du problème d'affectation quadratic (QAP) la plus part des bornes inférieure construite pour QAP[46], peuvent être adaptée pour ONQAP. Soit le problème suivant :

$$LB = \quad \text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,k=1}^n lb_{ik}x_{ik} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij}y_{ij}$$

$$s - t :$$

$$D_\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} (1) x_{ik} \in X & \\ (2) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, & k, l = 1, \dots, n \\ (3) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, & k \neq l, k \neq m, l \neq m, m, k, l = 1, \dots, n \\ (4) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl} = \gamma_{kl}, & k \neq l, k, l = 1, \dots, n \\ (5) z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, & i \neq j, k \neq l, i, j, k, l = 1, \dots, n \\ (6) z_{ij}^{kl}, y_{ij}, & i \neq j, k \neq l, i, j, k, l = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Où γ_{kl} et lb_{ik} sont les solutions respectives des problèmes **(P1)** et **(P3)** définis dans la sous-section 6.3.1.1. Avec X défini dans la sous-section 6.3.2.2.

LB est une borne inférieure de ONQAP. Gueye et al.[36] ont récemment proposés une formulation linéaire de QAP basée sur des “variables de distances”, ce modèle introduit $O(n^2)$ variables Ces “variables de distances” ont d’abord été utilisés par d’autres auteurs : Caprara and Salazar-González [16], Caprara, Letchford, & Salazar-González [17], Liu & Vanelli [45] Des tests numériques effectués sur des instances de la librairie du problème d’affectation quadratique (QAPLIB) ont montré les capacités de cette borne inférieure à donner des bornes serrée en peu de temps. Pour tout i et j , on définit D_{ij} comme

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n d_{kl}x_{ik}x_{jl}, \quad \forall i \neq j \in F.$$

On constate que pour tout k_0 et l_0 fixé, si $x_{ik_0} = 1$ et $x_{jl_0} = 1$ alors $D_{ij} = d_{k_0l_0}$. Ainsi, D_{ij} représente les distances entre les activités i et j , qui dépend de leurs positions de localisation respectives.

$$D_{ij} = d_{k_0l_0}(x_{ik_0} + x_{jl_0} - 1)$$

Ainsi ONQAP peut être reformulé comme suit :

$$LB = \quad \text{Min} \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_{ik} + \sum_{i,j=1}^n f_{ij}D_{ij} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{ij}y_{ij}$$

$s - t :$

$$D'_\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} (1) & x_{ik} \in X \\ (2) & D_{ij} \geq \gamma_{kl}(x_{ik} + x_{jl} - 1), \quad k \neq l, i \neq j, \quad k, l, i, j = 1, \dots, n \\ (3) & D_{ij} \leq D_{im} + D_{mj}, \quad i \neq j, i \neq m \neq j, \quad k, l, m = 1, \dots, n \\ (4) & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n z_{kj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n z_{il}^{kl} = 1, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (5) & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n z_{mj}^{kl} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n z_{im}^{kl}, \quad k \neq l, k \neq m, l \neq m, \quad m, k, l = 1, \dots, n \\ (6) & \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}z_{ij}^{kl} \geq \gamma_{kl}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \\ (7) & z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad k, l, i, j = 1, \dots, n \\ (8) & \sum_{j=1}^n D_{ij} \geq \sum_{k,l=1}^n \gamma_{kl}x_{ik}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n \\ (9) & \sum_{i=1}^n D_{ij} \geq \sum_{k,l=1}^n \gamma_{kl}x_{jl}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n \\ (10) & D_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n \\ (11) & z_{ij}^{kl}, y_{ij}, \quad i \neq j, k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Où γ_{kl} est solution du problème (P1) défini dans la section 6.3.1.1. Avec X défini dans la sous-section 6.3.2.2.

6.4 Résolution par des heuristiques

6.4.1 Introduction

On considère les notations introduites dans la section 6.2. Dans cette section nous présentons des méthodes heuristiques de résolution de notre problème ONQAP. Les sous problèmes de réseau et d'affectation quadratique de l'heuristique ONQAP-D présenté dans la sous-section 6.3.2, sont résolus par des heuristiques. De plus on lui associe d'autres heuristiques bien connues telles que l'algorithme glouton et l'algorithme génétique.

Par souci de simplicité dans les notations, on peut reformuler (ONQAP) de la manière suivante :

$$(ONQAP) : \quad \text{Min } q(x, y, d)$$

$$s - t : \quad (1) \sum_{i \in F} x_{ik} = 1 \quad k \in V$$

$$(2) \sum_{k \in V} x_{ik} = 1 \quad i \in F$$

$$(3) \sum_{\substack{j \in V \\ (m,j) \in A}} z_{mj}^{kl} - \sum_{\substack{i \in V \\ (i,m) \in A}} z_{im}^{kl}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{if } m = k, \\ -1 & \text{if } m = l, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad m \in V; k \neq l \in V$$

$$(4) d_{kl} \geq \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} z_{ij}^{kl} \quad \forall k, l \in V; k \neq l$$

$$(5) z_{ij}^{kl} + z_{ji}^{kl} \leq y_{ij} \quad \forall (i, j) \in E; k, l \in V$$

$$(6) x_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in F, k \in V$$

$$(7) y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E$$

$$(8) z_{ij}^{kl} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, k \neq l \in V$$

et

$$(ONQAP) : \min_{x \in S} \min_{(y,d) \in S'} q(x, y, d), \quad (6.1)$$

où

$$S = \{x = \{x_{ik}\}_{i,k=1,2,\dots,n} \mid s - t : (1), (2), (6)\}$$

$$S' = \{y = \{y_{kl}\}_{(k,l) \in E}, d = \{d_{kl}\}_{(k,l) \in A} \mid s - t : (3), (4), (5), (7), (8)\}$$

6.4.2 Heuristique Gloutonne

On peut observer à partir de la formulation (6.1) de ONQAP que

$$\min_{x \in S} \min_{(y,d) \in S'} q(x, y, d) = \min_{(y,d) \in S'} \min_{x \in S} q(x, y, d) \quad (6.2)$$

On peut en déduire

Théorème 6.4.1. *Si x^* , y^* et d^* sont des solutions optimales alors nécessairement*

$$(y^*, d^*) \in \underset{(y,d) \in S'}{\operatorname{argmin}} q(x^*, y, d)$$

et

$$x^* \in \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} q(x, y^*, d^*)$$

où $\operatorname{argmin}(q)$ est le domaine réalisable et q la fonction objectif.

L'heuristique gloutonne consiste à trouver une solution locale optimale $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$ satisfaisant les conditions nécessaires présentées plus haut. Son algorithme peut être donné ainsi :

```

1  $x^0$  : affectation initiale;
2  $N$  : Nombre d'itérations maximal;
3  $(y^0, d^0) = \underset{(y,d) \in S'}{\operatorname{argmin}} q(x^0, y, d)$  ;
4  $\text{ancien} = q(x^0, y^0, d^0)$  ;
5  $p = 0$  ;
6  $\text{Arrêt} = \text{faux}$  ;
7 tant que (!  $\text{Arrêt}$ ) faire
8   |  $x^{p+1} = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} q(x, y^p, d^p)$  ;
9   |  $\text{nouveau} = q(x^{p+1}, y^p, d^p)$  ;
10  | si ( $\text{nouveau} - \text{ancien}$ ) <  $\epsilon$  or  $p > N$  alors
11  |   |  $\text{Arrêt} = \text{vrai}$  ;
12  |   fin
13  | sinon
14  |   |  $\text{ancien} = \text{nouveau}$  ;
15  |   |  $(y^{p+1}, d^{p+1}) = \underset{(y,d) \in S'}{\operatorname{argmin}} q(x^{p+1}, y, d)$  ;
16  |   |  $p = p + 1$ ;
17  |   fin
18 fin

```

Algorithme 2 : Heuristique gloutonne avec affectation initiale

```

1  $(y^0, d^0)$  : réseau initiale et plus court chemin ;
2  $N$  : Nombre d'itérations maximal;
3  $x^0 = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} q(x, y^0, d^0)$  ;
4  $\text{old} = q(x^0, y^0, d^0)$  ;
5  $p = 0$  ;
6  $\text{Arrêt} = \text{faux}$  ;
7 tant que (!  $\text{Arrêt}$ ) faire
8   |  $(y^{p+1}, d^{p+1}) = \underset{(y,d) \in S'}{\operatorname{argmin}} q(x^p, y, d)$  ;
9   |  $\text{nouveau} = q(x^p, y^{p+1}, d^{p+1})$  ;
10  | si ( $\text{nouveau} - \text{ancien}$ ) <  $\epsilon$  or  $p > N$  alors
11  |   |  $\text{Arrêt} = \text{vrai}$  ;
12  |   fin
13  | sinon
14  |   |  $\text{ancien} = \text{nouveau}$  ;
15  |   |  $x^{p+1} = \underset{x \in S}{\operatorname{argmin}} q(x, y^{p+1}, d^{p+1})$  ;
16  |   |  $p = p + 1$ ;
17  |   fin
18 fin

```

Algorithme 3 : Heuristique Gloutonne avec réseau initial

A chaque itération, l'heuristique consiste à la résolution d'un problème de réseau (line 15) pour une affectation fixé, puis pour ce réseau optimal trouvé on résout un problème d'affectation associé (line 8) et ainsi de suite.

On peut remarquer que plutôt que de commencer par une affectation initiale x^0 (line 1), on peut débiter avec un réseau initial y^0 . On peut ainsi proposer une autre variante de l'algorithme (2).

Dans ces deux algorithmes on résout successivement des problème de réseau (lines 15, 8) et des problèmes d'affectation quadratiques (lines 8 and 15). Il est bien connu que ces deux problèmes sont NP-difficile [46] de ce fait en pratique nous les résolvons par des heuristiques que nous présentons dans les sous sections suivantes.

6.4.2.1 Méthode de suppression

Le problème de réseau optimal est résolu à chaque itération par une heuristique de suppression [31] associé à un algorithme de plus court chemin.

Supposons $G = (V, E)$ le graphe dont on veut trouver le réseau optimal. Sans perte de généralité (en permutant les indices si nécessaire) on peut suppose que :

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \text{ avec } b_{e_1} \geq b_{e_2} \geq \dots \geq b_{e_m}$$

On se donne une affectation initiale x et notons $ShortesPathAlgorithm(G)$ l'algorithme de plus court chemin entre tous les nœuds de G . On admet aussi la convention que s'il n'y'a pas de liens ou chemin entre deux nœuds k et l alors la distance $d_{kl} = +\infty$. On peut ainsi donner l'algorithme suivant :

```

1   $y_e = 1, \forall e \in E;$ 
2   $d = \text{AlgorithmePlusCourtChemin}(G) ;$ 
3   $i = 1 ;$ 
4   $ancien = q(x, y, d) ;$ 
5  tant que  $i \leq m$  faire
6  |    $E = E \setminus \{e_i\}, y_{e_i} = 0 ;$ 
7  |    $d = \text{AlgorithmePlusCourtChemin}(G) ;$ 
8  |    $nouveau = q(x, y, d) ;$ 
9  |   si ( $nouveau < ancien$  alors
10 |   |    $ancien = nouveau ;$ 
11 |   fin
12 |   si  $E = E \cup \{e_i\}, y_{e_i} = 1 ;$ 
13 |   alors
14 |   |    $i$ 
15 |   fin
16 |    $= i + 1 ;$ 
17 fin

```

Algorithme 4 : Algorithme de suppression

L'algorithme de suppression consiste à supprimer un par un des arcs du graphe, à chaque itération si la suppression conduit à une réduction de la fonction coût. L'algorithme de Flyod-Warshall [30] est utilisé pour la détermination des plus courts chemin.

6.4.2.2 Heuristique de recherche locale 2-opt

La solution heuristique du problème d'affectation quadratique est obtenu par une hybridation d'heuristique de recherche locale et de recherche Tabou (see [61]). On se donne n affectations initiales suivant un choix aléatoire. On évalue la valeur de la fonction objectif, puis on choisit deux affectations suivant un critère précis. Ensuite on évalue la valeur de la fonction objectif dans le cas de la permutation de ces deux affectations. On réitère le processus jusqu'à un nombre d'itération donné. Ainsi pour un couple de localisation choisit c'est à dire si i_0 est placé à k_0 , et j_0 à l_0 :

$$i.e \ x_{i_0k_0} = x_{j_0l_0} = 1,$$

on évalue la contribution de cette affectation grâce à trois valeurs :

- valeur 1 :

$$v(i_0, k_0, j_0, l_0) = c_{i_0k_0} + c_{j_0l_0} + \sum_{(i,k) \in F \times V \setminus (j_0, l_0)} f_{ij_0} w_{kl_0} x_{ik} x_{j_0l_0} + \sum_{(j,l) \in F \times V \setminus (i_0, k_0)} f_{i_0j} w_{k_0l} x_{i_0k_0} x_{jl}$$
- valeur 2 : $v(i_0, k_0, j_0, l_0) = c_{i_0k_0} + c_{j_0l_0} + f_{i_0j_0} w_{k_0l_0} + f_{j_0i_0} w_{l_0k_0}$
- valeur 3 : $v(i_0, k_0, j_0, l_0) = c_{i_0k_0} + c_{j_0l_0}$

S'il y a réduction du coût alors on permute l'affectation précédente sinon on conserve cette dernière. Comme pour la recherche Tabou une liste (L) stock les permutations déjà effectuées. On prend un compteur d'amélioration, qui donne le nombre d'itération depuis la dernière meilleur solution, et s'il est supérieur à une valeur limite donnée (k) alors on considère que l'algorithme est bloqué sur une solution locale et on perturbe l'affectation x aléatoirement.

La valeur limite (k) est choisi dans l'intervalle $[n^2/2, 2n^2]$, de façon aléatoire.

On donne ci-après l'algorithme implémentant tous ces points. On précise que :

- $permutation(x, i, k, j, l)$ est la procédure de permutation des affectations i, k et j, l en i, l et j, k ,
- $evaluation(x)$ est la fonction d'évaluation correspondant à x ,
- $perturbation(x)$ est la procédure de perturbation aléatoire de x .


```

Entrées :  $n$  nombre de zones et activités,  $m$  nombre d'itérations ;
 $x =$  affectation initiale aléatoire des activités sur les zones;
1  $L = \emptyset$ ;
2  $lim =$  valeur aléatoire dans  $[n^2/2, 2n^2]$ ;
3  $k = 0$ ;
4  $i = 0$ ;
5 tant que  $i < m$  faire
6    $i = i + 1$ ;
7    $MeilleurSolution = x$ ;
8    $(i_0, k_0, j_0, l_0) = \underset{\substack{(i,k,j,l) \in F \times V \times F \times V \\ (i,k,j,l) \notin L}}{\text{argmax}}}{v(i, k, j, l)}$ ;
9    $y =$  permutation( $x, i_0, k_0, j_0, l_0$ );
10   $L = L \cup \{(i_0, k_0, j_0, l_0)\}$  ;
11  si  $evaluation(x) \leq evaluation(y)$  alors
12     $k = k + 1$ ;
13  sinon
14     $x = y$  ;
15     $k = 0$ ;
16  fin
17  si  $lim < k$  alors
18     $x =$  perturbation( $x$ );
19  fin
20 fin

```

Algorithme 5 : Heuristique pour QAP

6.4.3 Algorithme Génétique

Dans cette section, nous proposons un algorithme génétique (AG) afin d'améliorer la solution de l'algorithme glouton. Algorithmes génétiques (AGs) sont l'un des algorithmes heuristiques les plus populaires pour la résolution des problèmes d'optimisation. Les AGs sont des techniques de recherche adaptative initialement introduites par la Hollande [40], et tirent leur nom du fait que leurs activités sont similaires à la mécanique des modèles génétiques des systèmes naturels. Le AGs a été appliqué à une variété de problèmes d'optimisation combinatoire (Goldberg [34] et Davis [26]). De nombreux algorithmes génétiques pour le QAP ont été proposées. Bean [4] ont décrit un algorithme générique pour résoudre les problèmes dont les solutions sont spécifiées par permutations. Tate and Smith [64] ont proposé un autre AG qui utilise la structure spécifique du problème et testé sur 11

cas de référence en raison de Nugent et al. [53] de taille 5-30 installations. Ceci est une mise en œuvre assez directe de l'AG classique sans utiliser d'algorithme glouton. Fluerent et Ferland [29] ont décrit un autre AG qui utilise des méthodes de recherche locales afin d'améliorer l'aptitude des individus. Ils ont constaté que l'utilisation de méthodes de recherche locale améliore sensiblement la justesse de l'algorithme génétique pour le QAP. Dans notre travail, nous étudions des AGs incorporant des heuristiques gloutonnes supplémentaires. Nous présentons des résultats de calcul de l'algorithme sur des instances académiques ainsi que sur des données réelles de la région de Dakar (Sénégal).

Les AGs intègrent un processus d'évolution sur un problème d'optimisation et peuvent être grossièrement subdivisé dans les étapes suivantes. Chaque solution réalisable d'un problème est composé de chromosomes et de gènes qui doivent d'abord être codés. Nous allons voir dans le paragraphe 6.4.3.1, les choix de codage faites pour notre algorithme. Au début du processus, une population initiale est créée. Certains d'entre eux sont alors sélectionnés et contribuent à l'évolution de la population en utilisant essentiellement deux opérateurs différents. L'opérateur de croisement permet de croiser deux individus de manière à donner naissance à de meilleurs individus. Et la mutation change de manière aléatoire certains gènes au profit de la diversité de la population. Nous avons détaillé dans la suite des choix effectués dans notre algorithme pour toutes ces étapes. Nous nous référons aux excellents livres de Goldberg [34] et Davis [26] pour une présentation plus exhaustive des opérateurs possibles.

6.4.3.1 Schéma d'encodage

Considérons une population composée de m individus $x^j = (x_{ik}^j)$, $i, k = 1, \dots, n$ où chaque x^j représente le matrice d'affectation. Nous définissons comme " chromosome " le vecteur (ligne) correspondant à chaque rangée de x et comme " gène " chaque composante x_{ik} . Nous avons donc n chromosomes et n^2 gènes.

$$\begin{array}{c}
 n \text{ chromosomes } \downarrow \\
 \text{individu} \longrightarrow x^j = \overbrace{x_{11}^j \ x_{12}^j \ \cdots \ x_{ik}^j \ \cdots \ x_{nn}^j} \\
 \text{gene } \uparrow \\
 \\
 \text{individu} \longrightarrow x^j = \left\{ \begin{array}{l}
 x_{11}^j \ x_{12}^j \ \cdots \ x_{1n}^j \ \leftarrow \text{chromosome 1} \\
 x_{21}^j \ x_{22}^j \ \cdots \ x_{2n}^j \ \leftarrow \text{chromosome 2} \\
 \vdots \\
 x_{n1}^j \ x_{n2}^j \ \cdots \ x_{nn}^j \ \leftarrow \text{chromosome } n \\
 \text{gene } \uparrow
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

6.4.3.2 Initialisation de la population

Dans l'approche générale de l'algorithme génétique, la population initiale peut être générée de façon aléatoire. Nous proposons deux algorithmes génétiques un du type général et l'autre dont la spécificité est la population initiale est formée à partir de la solution de l'algorithme glouton de la section 6.4.2. Autrement dit, nous exécutons d'abord l'algorithme glouton et la meilleure solution trouvée, qui est le premier individu, est perturbée de façon aléatoire par permutation de ces gènes pour donner à d'autres individus.

6.4.3.3 Sélection

On commence par résoudre pour chaque individu x^j , $j = 1, \dots, m$, le problème de réseau associé. On obtient ainsi la valeur de la fonction objectif $q(x^j, y^j, d^j)$, $j = 1, \dots, m$ pour l'individu x^j .

A partir de cette évaluation on fait un classement des individus. On attribut à chaque individu un poids associé à l'évaluation. Pour un individu x^j le poids est donné par $W_j = (m - r_j)^a$, avec $a = 1.5$, où r_j est le rang de l'individu j dans la classification. On associe le poids à une probabilité de survie déterminé par $P_j = W_j / \sum_{j=0}^{m-1} W_j$. Dans la littérature ce type de sélection est appelé "sélection par rang" [26]. Deux parents sont choisis au hasard pour le croisement si la somme de leur probabilités est supérieure à une probabilité fixé P_c . Le meilleur individu ou parent est toujours choisi pour croiser avec un autre parent choisi aléatoirement. Pour une population de $m = 100$ individus, nous choisissons $P_c = 3,85$. Tous ces choix de paramètres dans la sélection sont expérimentales.

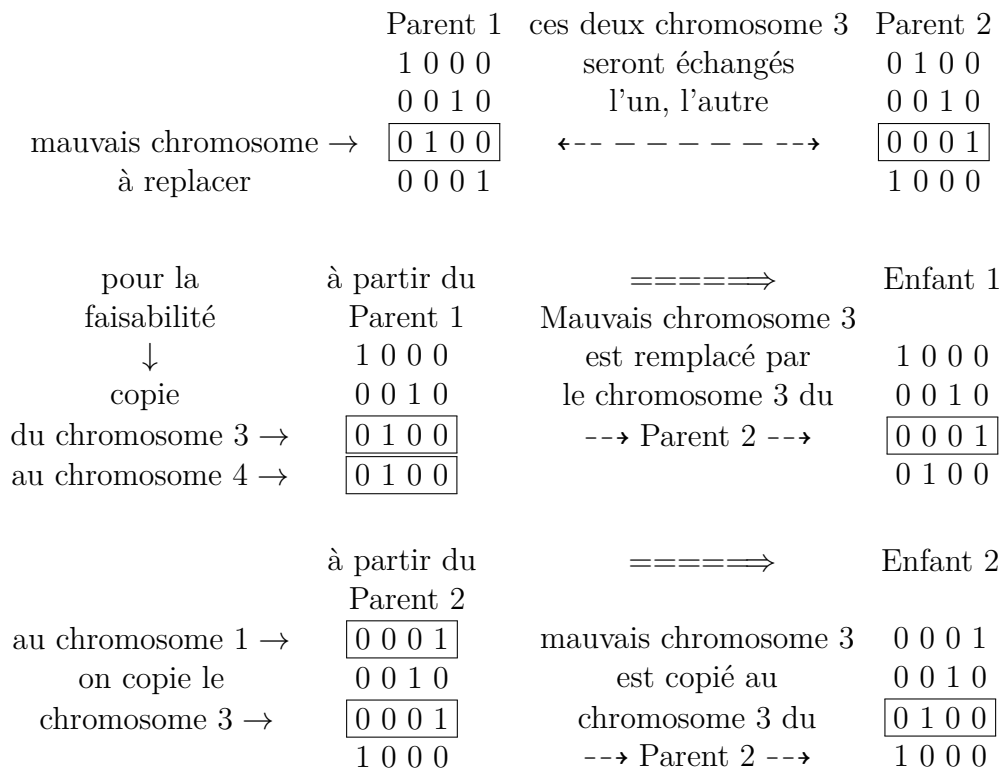
6.4.3.4 Croisement

Deux parents sélectionnés formeront deux enfants comme suit. Nous avons d'abord identifié un mauvais chromosome du Parent 1 en évaluant pour tous les chromosomes k le coût suivant :

$$\sum_{i=1}^n c_{ik} x_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl}.$$

Supposons que le chromosome k du parent 1 est mauvais, alors il sera remplacé par le chromosome k du parent 2. Mais avant de faire ce remplacement, pour la faisabilité de la solution nous copions en premier le chromosome k du parents 1 au chromosome l du parent 1 identique au chromosome k du parent 2. Et nous obtenons le premier enfant. Le deuxième enfant est obtenu par la même procédure, mais en échangeant les deux parents. Par conséquent, l'enfant 1 est le parent 1 avec le mauvais chromosome remplacé et l'enfant 2 est le parent 2 avec le mauvais

chromosome copié du parent 1. Par exemple, avec $n = 4$ voir ci-après



La prochaine génération est obtenue en remplaçant seulement les individus de l'ancienne population, avec une probabilité moindre que 2.1, par la population des enfants. Cela signifie les meilleurs individus avec une probabilité supérieure à 2.1 sont toujours conservés dans la prochaine génération.

6.4.3.5 Mutation

Un individu aléatoire mute si une probabilité aléatoirement choisie entre 0,00001 et 0,1, est inférieure à une probabilité de mutation fixé. Nous fixons la probabilité de mutation à 0,015. L'opérateur de mutation est une permutation de deux chromosomes aléatoires.

6.4.3.6 Algorithme hybride Génétique-Glouton

En utilisant tous ces opérateurs décrits, cela conduit aux algorithmes génétiques suivants

```

Entrées :  $n$  nombre de zones et d'activités,  $m$  nombre d'individus,  $N$ 
           nombre de générations
1 Initialisation aléatoire de  $m$  individus  $x^r$ ,  $r = 1, \dots, m$  population;
2 évaluation de l'aptitude de chaque individu  $q(x^r, y^r, d^r)$  selection;
3  $i \leftarrow 0$ ;
4 tant que  $i < N$  faire
5   |  $i \leftarrow i+1$ ;
6   | Croisement() construction des enfants;
7   | Population() construction de la nouvelle génération;
8   | Mutation() sauf le meilleur individu;
9   | Selection() evaluation de l'aptitude;
10 fin

```

Algorithme 6 : Algorithme Génétique

```

Entrées :  $n$  nombre de zones et d'activités,  $m$  nombre d'individus,  $N$ 
           nombre de générations
1 Initialisation d'un premier individu par la meilleur solution obtenue avec
  l'algorithme glouton et permutation aléatoire de ce premier individu pour
  obtenir  $m - 1$  individus  $x^r$ ,  $r = 1, \dots, m$  population;
2 évaluation de l'aptitude de chaque individu  $q(x^r, y^r, d^r)$  selection;
3  $i \leftarrow 0$ ;
4 tant que  $i < N$  faire
5   |  $i \leftarrow i+1$ ;
6   | Croisement() construction des enfants;
7   | Population() construction de la nouvelle génération;
8   | Mutation() sauf le meilleur individu;
9   | Selection() evaluation de l'aptitude;
10 fin
11 Exécution de l'algorithme Glouton la meilleur solution obtenue avec
    l'algorithme génétique est utilisée comme affectation initiale
    (ou réseau initial)

```

Algorithme 7 : Algorithme hybride Génétique Glouton

L'algorithme (6) démarre avec une initialisation aléatoire de chaque individu de la population alors que le point de départ de l'algorithme (7) est la solution obtenue à partir de l'algorithme glouton détaillé dans la section 6.4.2. Et que l'algorithme glouton lui même commence avec une matrice aléatoire d'affectation x^0 ou un réseau aléatoire y^0 . Après l'exécution complète, on peut voir que la solution trouvée de la partie génétique de l'algorithme (7) est utilisé comme affectations (ou réseau) initiale de l'algorithme glouton conduisant à un algorithme où les parties gloutons et génétiques sont itérées. On note dans la suite ce dernier algorithme (7) par l'al-

gorithme Glouton-Généétique-Glouton (GGG).

Il est habituel d'évaluer la qualité d'une heuristique en comparant la solution obtenue avec des valeurs optimales (si connu) ou au moins une borne inférieure des valeurs optimales. En raison du manque de référence sur notre problème (avec des valeurs optimales), et la difficulté de le résoudre de manière optimale (pour certains cas), nous choisissons dans cet article pour comparer la solution de l'heuristique avec des bornes inférieures rapidement calculables dans un laps de temps raisonnable.

6.5 Simulations numériques

Dans ce chapitre on donne les résultats numériques obtenus avec tous les algorithmes (méthodes linéaires et heuristiques). Les tests ont été effectués sur des cas provenant de sources académiques, ainsi que sur des données réelles de la région de Dakar (Sénégal). Deux types de données académiques ont été utilisés. Le premier provient du papier de Los [47] (noté Los) et le second provient d'une base de données d'instances références pour QAP QAPLIB[15]. Les problèmes du QAPLIB sont les données de Nugent, Vollman, et Ruml [53] (noté Nug), Elshafei [28] (Els), Hadley, Rendl, Wolkowicz [38] (Had), Krarup et Pruznan [41] (Kra). De chacune de ces "familles" de données on extrait des matrices de flots et de distances. Les coûts de localisation sont supposés nuls dans ces expériences. Les coûts de construction pour chaque lien (k, l) du réseau sont obtenus en multipliant d_{kl} par 10 pour les données de "Nug", "Had", par 100 pour les données de "Els", et par 1000 pour "Kra".

Dans le tableau où les résultats sont rapportés, l'acronyme de l'instance sera toujours suivi par la taille du problème. Par exemple Los10 désignera une instance en provenance du papier Los[47] de taille 10.

Les programmes linéaires ainsi que les bornes inférieures ont été résolus avec IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.5 interfacé avec C++.

Les données à considérer sont les suivantes :

n : le nombre de zones et d'activités.

$A = (a_{ik})$: matrice de coût de localiation de l'activité i sur la zone k .

$F = (f_{ij})$: matrice de flot de déplacement par unité de temps entre deux activités i et j .

$C = (c_{ij})$: matrice de coût de construction de l'arc ou de la route (i, j) .

$W = (w_{ij})$: matrice de distance directe entre les zones i et j ou distance de l'arc (i, j) .

6.5.1 Simulations avec les méthodes linéaires

Les tests dans cette section ont été effectués sur un PC HP ProBook 4520s processeur Intel(R) core(TM) i3 M370 @2.40Hz 2.40Hz. On ne considère que deux types de données celles de “Los” et de “Nug” pour les cas académiques.

6.5.1.1 Données académiques

On donne les résultats obtenue avec les méthodes linéaires sur les données académique. Un temps d'exécution maximale est fixé à 5heures soit 18000 secondes. Cplex donne un *Gap* pour permettre d'évaluer la proximité de la valeur obtenue par rapport à la solution optimale. Ce gap est calculé comme suit :

$$Gap = \frac{|Meilleure\ valeur\ obtenue - Meilleure\ valeur\ des\ noeuds\ restants|}{10^{-1} + |Meilleure\ valeur\ obtenue|}$$

Taille des instances	Borne supérieure	Temps d'exécution(s)	Nombre de nœud	Gap Cplex	Nombre d'itération
Los6	4.0035e+006	7	979	0%	111383
Los7	6.27353e+006	96	1171	0%	575184
Los8	6.83477e+006	453	4041	0%	217478
Los10	1.26561e+007	18000	26073	12.68%	39462006
Los12	2.63007e+007	18000	6757	21.49%	11158287
Nug12	914	18000	18869	9.82%	66525669

TABLE 6.1 – Résultats de ONQAP-LIN1

Taille des instances	Borne supérieure	Temps d'exécution(s)	Nombre de nœd	Gap Cplex	Nombre d'itération
Los6	4.0035e+006	71	10212	0%	2112458
Los7	6.27353e+006	64	3172	0%	575184
Los8	6.83477e+006	1018	20479	0%	13849458
Los10	1.23901e+007	18000	129459	12.68%	181087672
Los12	2.47223e+007	18000	15190	16.48%	38901638
Nug12	914	18000	18869	9.82%	66525669

TABLE 6.2 – Résultats de ONQAP-LIN2

Taille des instances	ONQAP-LIN1 Relaxation	ONQAP-LIN2 Relaxation	BI basée sur les distances	BI basée sur GLB
Los8	132480	3.48437e+006	2.94784e+006	4.41673e+006
Los10	130448	6.99079e+006	5.80820e+006	8.26274e+006
Los12	131137	1.52401e+007	1.78726e+007	1.69021e+007
Los14	132707	2.71044e+007	2.89793e+007	2.91814e+007
Los16	139952	3.95448e+007	4.19966e+007	4.17013e+007
Nug12	120	466.106	669.596	686
Nug14	140	808.214	1139.62	1068
Nug15	160	912.102	1273.12	1192
Nug16	180	1236.03	1735.68	1516

TABLE 6.3 – Comparaison des bornes inférieures et des relaxations : BI désigne Borne Inférieure.

On constate que pour Los6, Los7, Los8 on obtient des solutions optimales assez rapidement, mais que pour le reste des instances à partir de $n = 10$ le temps limite fixé est dépassé avec des *Gap* supérieure à 9%.

Concernant les bornes inférieures on constate bien que les valeurs obtenues avec la relaxation de ONQAP-LIN1 sont de mauvaises qualités contrairement à celles obtenues avec la relaxation de ONQAP-LIN2 et les deux bornes inférieures. Cependant quand la taille des instances devient grand les deux bornes inférieures sont meilleurs et surtout celle basée sur les distances.

6.5.1.2 Test sur Dakar

On donne les résultats des simulations avec les méthodes linéaires sur les données réelles de Dakar. Un temps d'exécution maximale est fixé à 4 heures soit 14400 secondes pour $n \leq 17$ et 6 heures soit 21600 secondes pour $n > 17$.

Taille des instances	Borne Supérieure	Temps d'exécution(s)	Nombre de nœud	Gap Cplex	Nombre d'itération
DK6	1.75613e+011	1	40	0.008%	6199
DK10	1.70162e+006	390	1322	0.01%	2166254
DK12	2.09915e+011	5789	3352	0.006%	12991013
DK17	2.27202e+011	14400	21	0.6%	1013404
DK20	2.46272e+011	21600	0	1.10%	573561

TABLE 6.4 – Résultats de ONQAP-LIN1

Taille des instances	Borne Supérieure	Temps d'exécution(s)	Nombre de nœud	Gap Cplex	Nombre d'itération
DK6	1.75613e+011	1	0	0.008%	1925
DK10	1.70162e+006	785	1761	0.01%	2234624
DK12	2.09915e+011	7796	3024	0.01%	10079012
DK17	2.27739e+011	14400	214	0.85%	4973145
DK20	2.46766e+011	21600	0	1.15%	857208

TABLE 6.5 – Résultats de ONQAP-LIN2

En se fiant au *Gap* de Cplex on peut considérer qu'on obtient d'assez bonnes solutions certes avec un temps CPU assez important qui pour la taille de 20 excède le seuil fixé.

6.5.2 Simulations avec les méthodes heuristiques

Tous les algorithmes 2, 3, 5 et 6 ont une nature stochastique en raison des points de départ initiaux ou des choix aléatoires au sein de l'algorithme lui-même. Ainsi, pour augmenter la capacité d'explorer un espace de solution plus large, nous exécutons ces algorithmes dix fois et présentons la meilleure solution trouvée. Tous les algorithmes implique également certains paramètres fixés comme suit. Le nombre maximal d'itérations (m) de l'algorithme 5 a été fixé pour tous les cas à 10000. Le nombre d'itérations des algorithmes gloutons 2 et 3 a été fixé

différemment en fonction du problème à tester. Les valeurs correspondantes sont indiqués dans le tableau 6.6 et 6.7. La taille de la population initiale de l'algorithme génétique 6 est 100 fixe pour toutes les générations. Et le nombre de générations N est de 1500 pour chaque instance. Ces tests ont été effectués sur un HP ProBook 450 Intel (R) Core (TM) i5 3230M CPU @2.40GHz 2.40GHz.

La qualité de la solution heuristique est évaluée en utilisant le *Gap* standard entre la meilleure solution trouvée et la borne inférieure, dont la formule en valeur relative est :

$$Gap = \frac{\text{Meilleure valeur obtenue} - \text{Borne inférieure}}{\text{Meilleure valeur obtenue}} \times 100$$

6.5.2.1 Données académiques

Données	Meilleur valeur obtenue	Temps d'exécution(s)	Nombre d'itérations	Borne inférieure	Gap
Els19	1.67657e+007	1446	100	3.36306e+006	79.94%
Had12	1932	1209	500	1794.88	7.10%
Had16	4120	780	100	3874.03	5.97%
Had20	7422	843	50	7115.02	4.14%
Kra32	2.93826e+006	3504	50	1.68e+006	42.82%
Los8	6.83477e+006	285	500	2.94784e+006	56.87%
Los10	1.24041e+007	563	500	5.80820e+006	53.18%
Los12	2.40381e+007	1452	500	1.78726e+007	25.65%
Los14	4.03875e+007	460	100	2.89793e+007	28.25%
Los15	4.92603e+007	616	100	3.35569e+007	31.88%
Los16	5.85525e+007	781	100	4.19966e+007	28.28%
Nug12	892	1262	500	669.596	24.93%
Nug14	1398	474	100	1139.62	18.48%
Nug15	1570	633	100	1273.12	18.91%
Nug16a	2070	775	100	1735.68	16.15%
Nug17	2228	992	100	1872.78	15.94%
Nug18	2470	1160	100	2106.71	14.71%
Nug20	3190	984	50	2685.85	15.80%
Nug22	4200	1268	50	3744.58	10.84%
Nug25	4540	2031	50	3914.09	13.79%
Nug30	7132	2428	50	6377.1	10.58%

TABLE 6.6 – Résultats de ONQAP par l'algorithme glouton 2

Données	Meilleur valeur obtenue	Temps d'exécution(s)	Nombre d'itérations	Borne inférieure	Gap
Els19	1.74978e+007	1181	100	3.36306+006	80.78%
Had12	1932	972	500	1794.88	7.10%
Had16	4120	646	100	3874.03	5.97%
Had20	7422	718	50	7115.02	4.14%
Kra32	2.93786e+006	2824	50	1.68e+006	42.82%
Los8	6.83477e+006	275	500	2.94784e+006	56.87%
Los10	1.24041e+007	563	500	5.80820e+006	53.18%
Los12	2.40381e+007	1026	500	1.78726e+007	25.65%
Los14	4.03875e+007	363	100	2.89793e+007	28.25%
Los15	4.92603e+007	491	100	3.35569e+007	31.88%
Los16	5.86338e+007	745	100	4.19966e+007	28.37%
Nug12	892	2753	500	669.596	24.93%
Nug14	1398	935	100	1139.62	18.48%
Nug15	1570	668	100	1273.12	18.91%
Nug16a	2070	641	100	1738.68	16.15%
Nug17	2220	523	100	1872.78	15.64%
Nug18	2470	988	100	2106.71	14.71%
Nug20	3190	976	50	2685.85	15.80%
Nug22	4200	1119	50	3744.58	10.84%
Nug25	4540	1852	50	3914.09	13.79%
Nug30	7124	2125	50	6377.1	10.48%

TABLE 6.7 – Résultats of ONQAP par l'algorithme glouton 3

Données	Meilleur valeur obtenue	Temps d'exécution (s)	Nbgen Taille-Pop	Borne inférieure	Gap
Els19	1.72381e+007	1089	1500 100	3.36306+006	80.49%
Had12	1932	155	1500 100	1794.88	7.10%
Had16	4120	249	1500 100	3874.03	5.97%
Had20	7472	465	1500 100	7115.02	4.78%
Kra32	2.86321e+006	2986	1500 100	1.68e+006	41.32%
Los8	6.83477e+006	319	1500 100	2.94784e+006	56.87%
Los10	1.24041e+007	170	1500 100	5.80820e+006	53.18%
Los12	2.40381e+007	207	1500 100	1.78726e+007	25.65%
Los14	4.03875e+007	264	1500 100	2.89793e+007	28.25%
Los15	4.93966e+007	299	1500 100	3.34764e+007	32.07%
Los16	5.92312e+007	664	1500 100	4.19966e+007	29.10%
Nug12	892	189	1500 100	669.596	24.93%
Nug14	1398	229	1500 100	1139.62	18.48%
Nug15	1594	233	1500 100	1273.12	20.13%
Nug16a	2082	347	1500 100	1735.68	16.63%
Nug17	2228	351	1500 100	1872.78	15.94%
Nug18	2484	405	1500 100	2106.71	15.19%
Nug20	3262	565	1500 100	2685.85	17.66%
Nug22	4200	817	1500 100	3744.58	10.84%
Nug25	4774	862	1500 100	3914.09	18.01%
Nug30	7474	5651	1500 100	6377.1	14.68%

TABLE 6.8 – Résultats of ONQAP par l'algorithme génétique 6 : Nbgen est le nombre de génération et TaillePop est la taille de la population

Données	Meilleure valeur obtenue	Temps d'exécution (s)	Nombre d'itérations	Borne inférieure	Gap
Els19	1.67621e+007	1743	100	3.36306e+006	79.94%
Had12	1932	1230	500	1749.5	9.45%
Had16	4120	923	100	3786.33	8.10%
Had20	7422	1353	50	6986.19	5.87%
Kra32	2.84113e+006	5723	50	1.68e+006	40.87%
Los8	6.83477e+006	319	500	2.92452e+006	57.21%
Los10	1.24041e+007	642	500	5.76962e+006	53.49%
Los12	2.40381e+007	1409	500	1.78274e+007	25.84%
Los14	4.03875e+007	694	100	2.89155e+007	29.13%
Los15	4.92603e+007	839	100	3.34764e+007	32.04%
Los16	5.85162e+007	960	100	4.919209e+007	28.36%
Nug12	892	1317	500	669.596	24.93%
Nug14	1398	682	100	1139.62	18.48%
Nug15	1570	804	100	1273.12	18.91%
Nug16a	2070	1048	100	1735.68	16.15%
Nug17	2218	1266	100	1872.78	15.56%
Nug18	2464	1436	100	2106.71	14.50%
Nug20	3190	1485	50	2685.85	15.80%
Nug22	4198	1913	50	3744.58	10.80%
Nug25	4540	2911	50	3914.09	13.79%
Nug30	7128	4665	50	6377.1	10.53%

TABLE 6.9 – Résultats of ONQAP par la méthode Glouton-Génétique-Glouton7

On peut voir que le plus petit écart est obtenu pour les instances “Had” et le plus grand est obtenu pour “Els”. L'écart moyen pour les instances “Had” est d'environ 5.79%, 16.30% pour “Nug”, 37.42% pour “Los”, 80.29% pour “Els” et 41.96% pour “Kra”. Le grand écart obtenu pour certains cas, peut être interprété par le fait que la borne inférieure réalisée dépend des instances à résoudre, cela signifie qu'il n'est pas une bonne inférieure pour certains cas. En effet, certains tests de simulation précédemment fait dans d'autres travaux sur les instances “Los” de taille 8 avec la méthode exacte (technique de linéarisation) donne le même résultat que la borne supérieure, tandis que l'écart montré dans les tableaux est de 56.87%.

6.5.2.2 Test sur Dakar

L'algorithme heuristique a été testé pour un cas réel sur Dakar (Sénégal). Différentes sources de données ont été exploitées pour générer les entrées de l'algorithme. Le DGTC (Direction des Travaux Géographiques et Cartographiques) nous a fourni une division zonale de Dakar, basée sur la carte de la ville. Grâce à ces données une série d'expériences a été réalisée pour $n = 6, 10, 12, 17, 20$. Les 20 zones considérées dans notre expérience sont les suivants 6.10.

n	Activités	Zones
1	Ministères	plateau sud / PL.SUD
2	Supermarchés	Médina / MED
3	Universités	Grand dakar-usine / GD.US
4	Pôles médico-techniques	Castor / CAST
5	Pôles médicaux	Fann Point E - Amitié / F.P.E.A
6	Ambassades	Ngor-Yoff / NG-YO
7	Police	Parcelles assainies / P.A
8	Sapeurs pompiers	Patte d'oie-mariste / PO-MAR
9	Mairie	Thiaroye-yembeul / TH.YEUM
10	Jardins publics	Guediewaye-ouest / GUED-OUEST
11	Stades	Guediewaye-centre / GUED-CENT
12	Résidence	Guediewaye-est / GUED-EST
13	Télécom	Thiaroye sur Mer / TH-MER
14	Agence immobilière	Malika-Keur Massar / MAL.KM
15	Poste	Mbao / MB
16	Gendarmerie	Rufisque Quartiers traditionnels / RUF-TRADI
17	Enseignement secondaire	Diamniadio / DIAM
18	Piscines olympiques	Hann mariste / H.M
19	Ecole primaire	Sangalkam / SANG
20	Bar restaurant	Zone industrielle / Z.I

TABLE 6.10 – Activités et zones

Pour calculer les distances entre ces domaines, nous avons utilisé le projet OSRM (Open Source Routing Machine) qui est une implémentation C++ d'un moteur de routage hautes performances pour les plus courts chemins dans les réseaux routiers. Il combine des algorithmes de routage sophistiqués avec les données du réseau routier et est libre depuis OpenStreetMap (OSM). OSRM est capable de

calculer et délivrer un plus court chemin entre toute origine et destination en millisecondes. ([Http ://project-osrm.org](http://project-osrm.org)).

Nous avons donc été en mesure de calculer les distances approximatives sur la base du réseau routier à Dakar entre les différentes zones.

Après quelques informations de la DGTC, nous supposons que entre les zones une route possible à construire est de type monocouche de largeur $7m$. On estime que $1 km$ de ce type de route coûte $C_M = 33246500 F CFA$. Et le coût de la construction d'un bord (k, l) entre les zones k et l est $b_{kl} = C_M * w_{kl}$. A partir des données de la DGTC, nous avons également extrait des informations sur le flux de circulation (f_{ij}) entre les zones, du recensement de 2000, avec des projections en 2015.

Il est important de noter que chaque zone $k = 1, 2, \dots, 20$ contient principalement les ménages. Il en résulte que, pour ces cas d'instance réelle, nous sommes intéressés par une bonne localisation des activités $i = 1, 2, \dots, 20$ qui sont les ménages.

L'estimation du coût de localisation (c_{ik}) d'une activité i sur une zone k a été faite en tenant compte du coût moyen des terres à Dakar dans chaque zone, et la surface s_i (en m^2) occupés par l'activité i . Si a_k est le coût moyen de $1m^2$ de terres dans la zone k alors la localisation de l'activité est estimée à la valeur de $a_k s_i$. Les résultats de la simulation sont donnés dans les tables 6.11, 6.12, 6.13 et 6.14. Comme dans les expériences précédents, on reporte dans les tables 6.11 (resp. 6.12, 6.13, 6.14) les résultats obtenus pour les algorithmes 2 (resp. 3 6 7).

Données	Meilleur valeur obtenue	Temps d'exécution(s)	Nombre d'itérations	Borne inférieure	Gap
DK6	1.75613e+011	112	500	1.75323e+011	0.17%
DK10	1.69992e+011	638	500	1.69202e+011	0.46%
DK12	2.09745e+011	1231	500	2.08938e+011	0.38%
DK17	2.26454e+011	1037	100	2.24619e+011	0.81%
DK20	2.43257e+011	891	50	2.42727e+011	0.22%

TABLE 6.11 – Résultats of ONQAP par l'algorithme glouton2

Données	Meilleur valeur obtenue	Temps d'exécution(s)	Nombre d'itérations	Borne inférieure	Gap
DK6	1.75613e+011	106	500	1.75323e+011	0.17%
DK10	1.69992e+011	554	500	1.69202e+011	0.46%
DK12	2.09745e+011	948	500	2.08938e+011	0.38%
DK17	2.26454e+011	753	100	2.24619e+011	0.81%
DK20	2.43257e+011	872	50	2.42727e+011	0.22%

TABLE 6.12 – Résultats de ONQAP par l'algorithme glouton 3

Données	Meilleur valeur obtenue	Temps d'exécution (s)	Nbgen Taille-Pop	Borne inférieure	Gap
DK6	1.75613e+011	101	1500 100	1.75323e+011	0.17%
DK10	1.69992e+011	244	1500 100	1.69202e+011	0.46%
DK12	2.09745e+011	299	1500 100	2.08938e+011	0.38%
DK17	2.26454e+011	979	1500 100	2.24619e+011	0.81%
DK20	2.43257e+011	1480	1500 100	2.42727e+011	0.22%

TABLE 6.13 – Résultats de ONQAP par l'algorithme Génétique6

Données	Meilleur valeur obtenue	Temps d'exécution(s)	Nombre d'itérations	Borne inférieure	Gap
DK6	1.75613e+011	195	500	1.75323e+011	0.17%
DK10	1.69992e+011	826	500	1.69202e+011	0.46%
DK12	2.09745e+011	1657	500	2.08938e+011	0.38%
DK17	2.26454e+011	1603	100	2.24619e+011	0.81%
DK20	2.43257e+011	2312	50	2.42727e+011	0.22%

TABLE 6.14 – Résultat de ONQAP par la méthode de Glouton-Génétique-Glouton7

On peut voir que les mêmes solutions sont trouvées par toutes ces méthodes. Et l'écart est assez petit pour conclure que les limites supérieures obtenues sont proches de la solution optimale. La figure 6.1 montre les connexions logiques entre

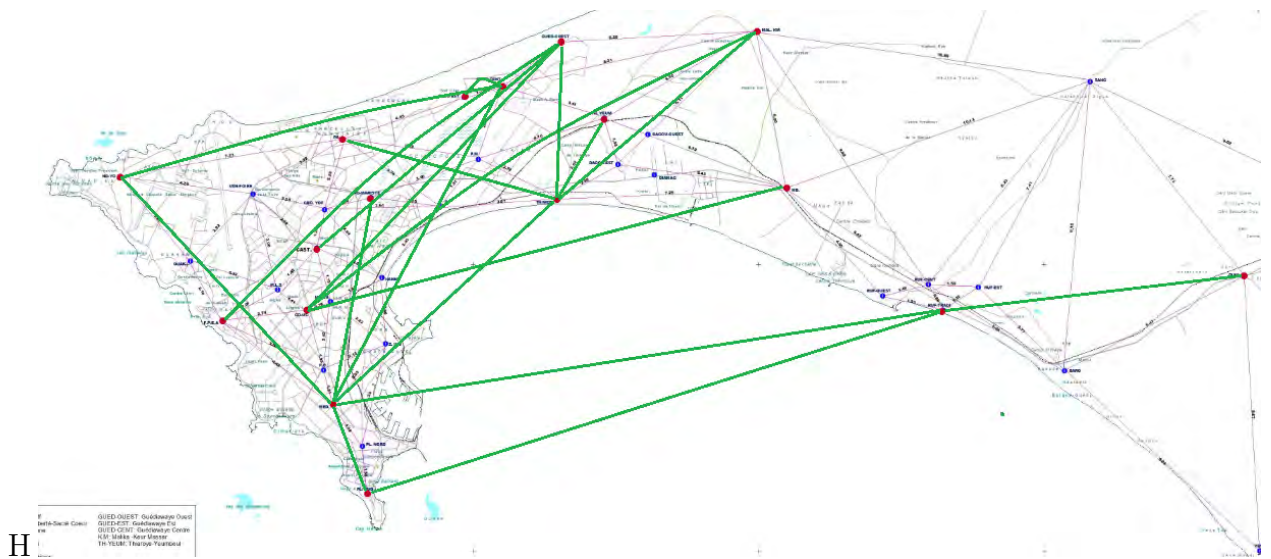


FIGURE 6.1 – Liens logiques entre les nœud

les différentes zones, donnée par la solution optimale pour $n = 17$. Par exemple, nous pouvons voir que la zone de “ Diarniadio ” doit être connecté à “ Rufisque-Traditionnel ” et lui-même joint à “ Medina ” et “ Plateau- Sud ”, grâce à des liens directs ou des routes. C’est à dire, il serait intéressant de rejoindre la banlieue au centre-ville de Dakar, par le biais des connexions directes pour rendre le réseau routier plus fluide.

De plus, les liens logiques “ Rufisque-Traditionnel <-> Medina ” ainsi que “ Rufisque-Traditionnel <-> Plateau- Sud ” peuvent être envisagé dans un point de vue maritime au lieu d’une route. En effet, pour les mettre en œuvre, on peut développer un réseau de navette maritime reliant ces zones de la banlieue et le centre-ville. Et cela est en parfaite harmonie avec la forme géométrique de l’ensemble de la partie sud-est de la région de Dakar.

Conclusion et Perspectives

Dans cette partie nous avons présenté des applications sur des questions de trafic routier et d'optimisation de réseaux de transport avec localisation d'activités. Concernant le second cas, nous avons proposé des méthodes de résolution basées sur des techniques de linéarisation et des heuristiques. Nous avons effectué des tests numériques sur des exemples académiques et sur des cas réels de la ville de Dakar.

Dans de prochains travaux, il serait intéressant de prendre en compte, dans la formulation du problème ONQAP, des contraintes sur des capacités limites de flux circulant sur les arcs. On pourrait aussi reformuler ces questions comme problèmes de transport de masse.

Bibliographie

- [1] E. Angel, R. Bellman. Dynamic programming and partial differential equations. Academic Press, New York, NY, 1972.
- [2] J.-P. Aubin, A. M. Bayen, P. Saint-Pierre. Dirichlet problems for some Hamilton-Jacobi equations with inequality constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization* 47 (5), 2348-2380, 2008.
- [3] Balàc M., Ciari F., Genre-Grandpierre C., Voituret F., Gueye S., and Michelon P., 2014, Decoupling accessibility and automobile mobility in urban areas. *In Transport Research Arena*, Paris.
- [4] Bean J.C., Genetic algorithms and random keys for sequencing and optimization. *ORSA J. Comput.* 1994, Vol. 6, pp. 154-60.
- [5] M. Ben-Akiva, H. N. Koutsopoulos, R. Mishalani, and Q. Yang. Simulation Laboratory for Evaluating Dynamic Traffic Management Systems. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, vol. 123, 1997.
- [6] Billheimer J.W., 1970, Optimal route configurations with fixed link construction costs, *Stanford Research Institut. SRI-Project* 454531-309.
- [7] Billionnet A., 2007. *Optimisation discrète : De la modélisation à la résolution par des logiciels de programmation mathématique*. Dunod, Paris.
- [8] E. Bourrel. Modélisation dynamique de l'écoulement du trafic routier : du macroscopique au microscopique. PhD thesis, Lyon : L' Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2003.
- [9] E. Bourrel and J.-B. Lesort, "Mixing Micro and Macro Representations of Traffic Flow : a Hybrid Model Based on the LWR Theory.," *Transportation Research Board*, Washington DC, 2003.
- [10] Boyce D.E., Farhi A. and Weischedel R., 1973. Optimal network problem : A branch-and-bound algorithm. *Environment and Planning* 5, 519.-533.
- [11] W. Burghout. Hybrid Microscopic-Mesoscopic Traffic Simulation. PhD thesis. Stockholm : Royal Institute of Technology, 2004, pp. 210.
- [12] W. Burghout, H. Koutsopoulos, and I. Andreasson. Hybrid mesoscopic-microscopic traffic simulation. *Transportation Research Record* : 1934, pp. 218-225, 2005.

- [13] W. Burghout, H. N. Koutsopoulos and I. Andreasson. A Discrete-Event Mesoscopic Traffic Simulation Model for Hybrid Traffic simulation. Intelligent Transportation Systems Conference, 2006. ITSC '06. IEEE.
- [14] Burkard R-E., Cela E., Pardalos P-M., and Pitsoulis L.,1998, The quadratic assignment problem, pages 241-238. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [15] Burkard R. E., Karisch S. E., and Rendl F.,September 1996, QAPLIB- A Quadratic Assignment Problem Library. European Journal of Operational Research.
- [16] Caprara A., Salazar-González J., Laying Out Sparse Graphs with Provably Minimum Bandwidth, *INFORMS J. on Comput*, 2005, 356-373.
- [17] Caprara A., Letchford A.N., Salazar-González J., Decorous Lower Bounds for Minimum Linear Arrangement, *INFORMS J. on Comput*, 2010, 26-40.
- [18] C.G. Claudel, A. M. Bayen, 2010a. Lax-Hopf based incorporation of internal boundary conditions into Hamilton-Jacobi equation. Part I : theory. IEEE Transactions on Automatic Control 55 (5), 1142-1157.
- [19] C.G. Claudel, A. M. Bayen, 2010b. Lax-Hopf based incorporation of internal boundary conditions into Hamilton-Jacobi equation. Part II : Computational methods. IEEE Transactions on Automatic Control 55 (5), 1158-1174.
- [20] G. Costeseque, J.P. Lebacque, Intersection modeling using a convergent scheme based on Hamilton-Jacobi equation. Procedia - Social and Behavioral Sciences Vol 54, 2012, Pages 736–748.
- [21] C. F. Daganzo. August 1994. The cell transmission model : A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. Transportation Research Part B 28 (4), 269-287.
- [22] C. F. Daganzo. The cell transmission model, Part II : Network traffic. Transportation Research, Vol. 29B, No. 2, (1995), pp. 79-93
- [23] C. F. Daganzo. The lagged cell-transmission model. International Symposium on Transportation and Traffic Theory, A. Ceder, Ed., New York, Pergamon, 1999.
- [24] C.F. Daganzo, A variational formulation of kinematic waves : Basic theory and complex boundary conditions, Transportation Research 39B (2005) pp. 187-196
- [25] Dantzig G. B., On the significance of solving linear programming problems with some integer variables, 1958. The Rand Corporation, document p. 1486.
- [26] Davis L., Handbook of Genetic Algorithms, Van Nostrand. New York, 1991.
- [27] N. Elloumi, H. Haj-Salem & M. Papageorgiou, METACOR : A macroscopic Modelling Tool for Urban Corridor. TRISTAN, Capri, 1994.

- [28] Elshafei A. N., Hospital Layout as a Quadratic Assignment Problem, *Operational Research Quarterly*, vol. 28, No. 1, Part 2 (1977), pp. 167-179
- [29] Fleurent C., Ferland J.A., Genetic hybrids for the quadratic assignment problem. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 16, Providence. RI : American Mathematical Society, 1994, pp. 173-87.
- [30] Floyd R. W., Algorithm 97 : Shortest Path. *Communications of the ACM* 5 (6) : 345, June 1962.
- [31] Gamvros I., Golden B., Raghavan S., and Stanojević D., Heuristic search for network design. *The Robert H. Smith School of Business*. University of Maryland. College Park, MD 20742-1815.
- [32] Garey M-R., Johnson D-S., 1979, *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co. New York, NY, USA.
- [33] S. K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik* 47 (3), 1959, 271-306.
- [34] Goldberg D.E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1989.
- [35] Gordon P. and McReynolds W.K., 1972. Optimal urban forms : Towards a complete modelling of urban interdependencies. in : *Research Papers in Economics* no.4 (University of Southern California, Los Angeles, CA).
- [36] Gueye S., Michelon P., A linear formulation with $O(n^2)$ variables for quadratic assignment problems with Manhattan distance matrices, *EURO Journal on Computational Optimization* May 2015, Volume 3, Issue 2, pp 79-110.
- [37] Gueye S., 8 janvier 2012, Modèle affectation quadratique / Dimensionnement réseaux projet ortrans.
- [38] Hadley S. W., Rendl F. and Wolkowicz H., A New Lower Bound via Projection for the Quadratic Assignment Problem, *Mathematics of Operations Research*, vol. 17, No. 3 (Aug., 1992), pp. 727-739
- [39] Hoang Hai Hoc, 1973. A computational approach to the selection of an optimal network, *Management Science* 19. no.5. Jan.
- [40] Holland, J. H.,. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI., 1975.
- [41] Krarup J., Pruzan P. M., Computer-aided layout design, *Mathematical Programming Study*, vol 9, 75-94, 1978.
- [42] Lawler E.L., (1963). The quadratic assignment problem. *Management Science*, 9, 586-599.

- [43] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, On kinetic waves. II. Theory of Traffic Flows on Long Crowded Roads, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 229 (1955), pp. 317-345
- [44] Lin J-J., Feng C-M.,2003, A bi-level programming model for the land use-network design problem, *The Annals of Regional Science*, 37 :93-105.
- [45] Liu W., Vannelli A., Generating lower bounds for the linear arrangement problem. *Discrete Applied Mathematics*, 1995, 59, 137-151.
- [46] Loiola E.M., de Abreu N.M.M., Boaventura-Netto P.O., Hahn P. and Querido T.,2007, an analytical survey for the quadratic assignment problem.
- [47] Los M.,1978, Simultaneous optimization of land use and transportation. A Synthesis of the Quadratic Assignment Problem and the Optimal Network Problem, *Regional Science and Urban Economics* 8, 21-42.
- [48] V. Maniezzo, (1997). Exact and approximate nondeterministic tree-search procedures for the quadratic assignment problem. Research Report CSR 97-1, Scienze dell'Informazione, Cesena site, University of Bologna.
- [49] V. Maniezzo, M. Dorigo, A. Colorni. Algodesk : An experimental comparison of eight evolutionary heuristics applied to the Quadratic Assignment Problem.

- [50] P-E. Mazaré, A.H. Dehwah, C.G. Claudel, A.M. Bayen. Analytical and grid-free solutions to the Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model, (2011), 1727-1748.
- [51] M. Mercier. Traffic flow modelling with junctions. *J. Math. Anal. Appl.* 350 (2009) 369–383.
- [52] B.M. Ndiaye, M. Baldé, S. Gueye. Rapport Technique Projet ORTRANS - Activité 1, 2012.
- [53] Nugent C.E., Vollman T.E., Ruml J. An experimental comparison of techniques for the assignment of facilities to locations. *Oper. Res.* 1968, Vol. 16, pp.150-73.
- [54] P. M. Pardalos, F. Rendl, H. Wolkowicz. The Quadratic Assignment Problem : A Survey and Recent Developments, in *Quadratic Assignment and Related Problems*, P. Pardalos and H. Wolkowicz, eds., DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 16, 1994, 1–42, AMS, Providence, RI.
- [55] Patriksson M. The traffic assignment problem : Models and methods. Linköping Institute of Technology, Linköping, Sweden, VSP, 1994.
- [56] Ravindra K.A., James B.O., Ashish T., A greedy genetic algorithm for the quadratic assignment, *Computers & Operations Research*, Vol. 27, pp. 917-934, 2000.

- [57] P. I. Richards, Shock Waves on the Highway. *Oper. Res.*, 4 (1956), pp. 42-51.
- [58] S. Sahni and T. Gonzalez, P-complete approximation problems, *Journal of the Association of Computing Machinery* 23, 1976, 555–565.
- [59] M. Savrasov. urban transport corridor mesoscopic simulation. *Proceedings 25th European Conference on Modelling and Simulation*.
- [60] K.J. Schlager, 1965, A land use plan design model, *Journal of the American Institute of Planners*.
- [61] Sean L., 2013, *Essentials of Metaheuristics*, Lulu, second edition, available at [http://cs.gmu.edu/~sim\\$sean/book/metaheuristics/](http://cs.gmu.edu/~sim$sean/book/metaheuristics/)
- [62] Scott A.J., 1969, The optimal network problem : Some computational procedures, *Transportation Research* 3,201-210.
- [63] Sheffi Y., *Urban Transportation Networks : Equilibrium Analysis With Mathematical Programming Techniques*. Prentice Hall, October 1984.
- [64] Tate D.E., Smith A.E., A genetic approach to the quadratic assignment problem. *Comput. Oper. Res.* 1985, Vol. 22, pp. 73-83.
- [65] Tolujew J., Alcalá F. 2004. A Mesoscopic Approach to Modelling and Simulation of Pedestrian Traffic Flows. 18th European Simulation Multiconference, Horton G. (Ed.), SCS International, Ghent, pp. 123-128.
- [66] Tolujew J., Savrasovs M. 2008. Mesoscopic approach to modelling a traffic system. *International Conference, Modelling of Business, Industrial and Transport Systems*, Transport and Telecommunication Institute, Riga, pp. 147-151.
- [67] Y. Xia and Y. X. Yuan. A new linearization method for quadratic assignment problem. *Optimization Methods and Software*, 21(5) :803–816, 2006.
- [68] Q. Yang and D. Morgan. A Hybrid Traffic Simulation Model. presented at 85th Meeting of the Transportation Research Board CD-ROM, Washington DC, 2006.
- [69] Q. Yang and H. Slavin. *High Fidelity, Wide Area Traffic Simulation Model*. Caliper Corporation, Boston, USA., 2002.
- [70] H. Zhang, C. Beltran-Royo, L. Ma. Solving the quadratic assignment problem by means of general purpose mixed integer linear programming solvers, 19/04/2010.

Conclusion générale et Perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié une variété de questions de transports. Nous avons effectué des études théoriques et des applications.

En ce qui concerne les transports de dunes de sable sous marine, nous avons analysé le couplage d'une équation hydrodynamique modélisant le mouvement de l'eau près des côtes et d'une équation de dynamique de dunes de sable (une équation morphodynamique). Nous avons pu montrer l'existence de solution du système couplé adimensionné. De plus des estimations sur la solution ont été données. Nous avons aussi montré des résultats d'homogénéisation du système couplé adimensionné. Dans le cadre des simulations numériques nous avons présenté quelques scénarios. Dans la suite des travaux de cette partie nous comptons, dans le cadre de simulations numériques, comparer les deux systèmes couplés adimensionné et homogénéisé. De plus il serait intéressant d'étudier le système couplé adimensionné dans le cas où l'équation SWE adimensionné admet des solutions chocs. Il serait aussi intéressant de considérer le cas où l'équation morphodynamique a une source. Plus précisément, il pourrait s'agir d'inclure des phénomènes singuliers supplémentaires comme la tempête qui peut entraîner un transport de sable plus accentué.

Des applications ont été présentées concernant les questions de trafic routier et d'optimisation de réseaux de transports avec localisation d'activités. Nous avons proposé deux méthodes de résolution : la linéarisation et la notion d'heuristique. A cette occasion, nous avons proposé une heuristique originale basée sur la décomposition du problème. Et en l'associant à certaines heuristiques classiques, on a pu obtenir d'autres méthodes plus efficaces. En effet dans les tests effectués les méthodes ont donné de bons résultats sur des exemples académiques et sur les cas réels appliqués à la ville de Dakar au Sénégal.

Dans de prochains travaux nous comptons affiner le modèle de sorte à prendre en compte les capacités limites des arcs du réseaux et proposer d'autres méthodes de résolutions utilisant les techniques de coupe. Une autre perspective est de reformuler ces questions comme problèmes de transport de masse.