

Université Cheikh Anta Diop de Dakar



Ecole doctorale Mathématiques, Informatique et Sciences Connexes

THÈSE DE DOCTORAT UNIQUE

**SUR LES SEMIMODULES ESSENTIELS,
L'ANNULATEUR TENSORIEL
ET LES SOUS-SEMIMODULES FORTEMENT
SEMISIMPLES**

Spécialité: Algèbre et Applications

Présentée et soutenue le 17-JUILLET-2017

à l'Amphithéâtre 03 à 10h par

Elhadji Demba Wade DIOP

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar

devant le jury composé de:

<i>Président</i>	Pr. Mamadou SANGHARE	Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal
<i>Rapporteur</i>	Pr. Nouzha EL YACOUBI	Université Mohammed V de Rabat, Maroc
<i>Rapporteur</i>	Pr. A. Issa NOUROU	Université d'Abomey-Calavi, Cotonou, Bénin
<i>Rapporteur</i>	Pr. Mamadou BARRY	Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal
<i>Examineur</i>	Pr. Sidy Demba TOURE	Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal
<i>Examineur</i>	Dr. Leila MESMOUDI	Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal
<i>Directeur de thèse</i>	Pr. Djiby SOW	Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal





UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE



ECOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE





THESE DE DOCTORAT UNIQUE ÈS
SCIENCES MATHÉMATIQUES
OPTION : ALGEBRE

TITRE :

***SUR LES SEMIMODULES
ESSENTIELS,
L'ANNULATEUR TENSORIEL
ET LES SOUS-SEMIMODULES
FORTEMENT SEMISIMPLES***

Par Elhadji Demba Wade DIOP

Sous la direction du Pr. Djiby SOW

17 Juillet 2017





DEDICACES

Qu'ALLAH soit Loué

Je rends grâce à DIEU

PAIX et SALUT sur le PROPHETE MOHAMED

je dédie cette thèse à :

- A mon père FEU ABDOURAHMANE DIOP, à ma mère FEUE AIS-SATOU WADE et à mon oncle FEU NGAGNE TALL

- A ma femme, à mes enfants, à mes neveux et nièces

- A mes frères et soeurs qui m'ont beaucoup aidé dans mes études

- A mon frère et compagnon de tous temps Abdoulaye MBAYE

- A mes amis et camarades

- A mes collègues

- A mes maîtres et professeurs

- A mes élèves et étudiants

- A tout ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin



REMERCIEMENTS

Je remercie ALLAH Le Tout Puissant

Le Clément et Le Miséricordieux

Paix et Salue sur le Prophète

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur **Mamadou SANGHARE** pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider mon jury de thèse.

Je tiens à remercier sincèrement le Professeur **Djiby SOW** qui a dirigé mes travaux. Je lui exprime ma profonde gratitude pour tout ce qu'il a fait pour moi et que je ne saurais entièrement lister ici. Particulièrement, je le remercie très sincèrement pour l'excellente formation que j'ai obtenue auprès de lui sur tous les plans (didactique, recherche, humain,..). J'ai apprécié tout particulièrement sa patience, sa capacité d'écoute et sa grande disponibilité à mon égard.

Je remercie très sincèrement les Professeurs **Nouzha EL YACOUBI**, **A.Nourou ISSA**, **Mamadou BARRY** pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et examinateurs dans ce jury.

J'exprime ma profonde gratitude aux Professeurs **Sidy Demba TOURE** et **Leila MESMOUDI** pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de siéger dans le jury de cette thèse.

Je remercie :

- Les Professeurs Farba FAYE et Leila MESMOUDI avec qui j'ai débuté le travail
- tous les membres du Laboratoire d'Algèbre, de Cryptologie, de Géométrie Algébrique et Applications (LACGAA),
- mes compagnons de tous les jours à la fac, parmi lesquels Jean Raoul TSIBA ; Demba SOW ; Landing FALL ; Mame Demba CISSE ; Nafissatou DIARRA ; Lamine NGOM ...
- tous mes collègues et tout le personnel administratif et technique du Département de Mathématiques et Informatique et de la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar.

Mémoires et Publications

Mémoire de DEA

[1] E.D.W.DIOP : *Etude des coefficients de torsion en dimension 2 dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) et en dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ dans l'Algèbre max-plus* Mémoire de DEA. Bibliothèque universitaire UCAD (Novembre 2009)

Thèse de doctorat unique

[2] E.D.W.DIOP : *Sur les semimodules essentiels, l'annulateur tensoriel et les sous-semimodules fortement semisimples* Thèse de doctorat unique ès sciences mathématiques. Bibliothèque universitaire UCAD (Document actuel : Mai 2017)

ARTICLES (3)

- *articles déjà parus*

[3] DJIBY.SOW et E.D.W.DIOP : *On Weakly essential subsemimodules over semirings* (EJPAM, Vol.9, No.3, 250-265, 2016)

[4] DJIBY.SOW et E.D.W.DIOP : *On Completely Tensor-Faithful Semimodules over Semirings* (International Journal of Algebra, Vol. 11, 2017, no. 2, 83 - 92)

- ***articles à paraître***

[5] DJIBY. SOW, E.D.W. DIOP et L. FALL : *Strong simplicity on the class of subtractive and cancellative semimodules ;.*

Table des matières

1	Introduction et Résumé de mes contributions	10
1.1	Introduction	10
1.2	Résumé de mes contributions et publications	15
2	Sur les sous-semimodules essentiels et les semimodules faiblement co-hopfiens	27
2.1	Préliminaires	30
2.2	Nouvelle notion d'essentiel : Les sous-semimodules faiblement essentiels	33
2.3	Applications : Sur les semimodules co-hopfiens	43
2.3.1	Sur les semimodules co-hopfiens de type 1	44
2.3.2	Sur les semimodules co-hopfiens de type 2	47
2.3.3	Sur les semimodules co-hopfiens de type 3	49
2.3.4	Exemples de semimodules co-hopfiens	50
3	Fidélité complète du foncteur tensoriel sur les semi-modules	52
3.1	Introduction	52
3.2	Préliminaires	53

3.2.1	Notions de base	53
3.2.2	Semimodules quotients	55
3.2.3	Produit tensoriel	56
3.3	Résultats sur l'annulateur tensoriel	59
4	Sur les semimodules fortement semisimples	68
4.1	Préliminaires	69
4.2	Sous-semimodules fortement indépendants	71
4.3	Semimodules Fortement Semisimples	74
Annexe A Notions de bases sur les semi-anneaux et semi-modules		90
A.1	Semi-anneaux	90
A.1.1	Idéaux	92
A.1.2	Semi-anneaux quotient	95
A.1.3	Homomorphisme de semi-anneaux	96
A.2	Semi-modules	98
A.2.1	Semimodules-Sous-semimodules	98
A.2.2	Homomorphisme de semi-modules	102

Chapitre 1

Introduction et Résumé de mes contributions

1.1 Introduction

Les analogies de certaines propriétés vérifiées par des objets mathématiques de natures différentes, par exemple, les nombres et les polynômes [22], ont été remarquées durant l'histoire de l'étude des nombres, puis des équations. Cela a conduit les mathématiciens, en particulier au XIXe siècle, à tenter de dégager une axiomatique qui rende compte des raisons profondes de ces analogies. Il est alors apparu que ces objets, de natures différentes, possédaient les mêmes " structures " algébriques, par exemple, groupe, espace vectoriel, anneau, etc.[4]

Il devint alors évident qu'il était plus efficace d'étudier ces structures pour elles-mêmes, indépendamment de leurs réalisations concrètes, puis d'appliquer les résultats obtenus dans les divers domaines que l'on considérait antérieurement.

L'algèbre " abstraite " était née.

L'étude des nombres entiers remonte à la plus haute antiquité, mais c'est l'étude des nombres algébriques, au XIXe siècle, qui a conduit aux notions d'anneau et de corps. [4, 5]

L'étude de la divisibilité dans les nombres entiers est basée sur la propriété fondamentale suivante : tout nombre entier s'écrit, de " manière unique ", comme produit de nombres premiers. Comme pour toutes les structures algébriques importantes, la structure d'anneau apparaît dans de nombreuses situations dans lesquelles les éléments ne sont plus des nombres entiers. C'est en particulier le cas des polynômes. Il était donc utile d'étudier la notion de divisibilité dans des anneaux généraux et de voir si l'analogue de la décomposition en produit de nombres premiers existe : on l'appelle alors " décomposition en produit d'éléments irréductibles ". L'idée essentielle, pour cela, a été l'introduction de la notion d'idéal : elle permet de formuler des énoncés qui généralisent ceux des propriétés usuelles de la divisibilité des nombres entiers [16]. En particulier, la généralisation aux idéaux de la propriété de " décomposition en produit d'irréductibles ", associée à la notion d'extension de corps, a permis de faire de très grands progrès en arithmétique. La notion de semianneau (un anneau où les éléments n'ont pas toujours des symétries pour l'addition et la multiplication) est apparue pour la première fois dans les travaux de Richard DEDEKIND [9] sur l'algèbre des idéaux d'un anneau commutatif (on pouvait ajouter ou multiplier les idéaux ; mais on ne pouvait pas les soustraire).

Les semianneaux abondent dans le monde mathématique, la première structure mathématique que l'on rencontre, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ muni

de l'addition et de la multiplication est un semianneau qui n'est pas un anneau, il en est de même de l'ensemble des réels positifs $\mathbb{R}^+$ muni de l'addition et de la multiplication.

Les semianneaux furent étudiés indépendamment par les algébristes, notamment par H.S.VANDIVER [33] qui avait durement travaillé pour que les semianneaux soient reconnus comme une structure algébrique fondamentale, tout en devenant la meilleure des structures incluant les anneaux et les treillis bornés distributifs. Il a eu le mérite d'avoir publié le premier article sur les semianneaux en 1934. Son travail n'attirera pas l'attention de la communauté scientifique et la recherche sur la théorie des semianneaux tomba en berne. Elle refait surface à la fin des années cinquante grâce à sa richesse pour les applications en mathématiques notamment en informatique, en théorie de l'automatisme, en théorie de l'optimisation, etc.

Considérée comme une généralisation de la théorie des modules sur les anneaux(les semimodules sont pour les modules ceux que les modules sont pour les espaces vectoriels), la théorie des semimodules sur les semianneaux connaît un engouement de nos jours; beaucoup de chercheurs l'utilisent en mathématiques dites pures et en mathématiques appliquées; notamment en analyse fonctionnelle, en topologie, en théorie de graphes, en théorie de l'automatisme, en géométrie tropicale, en probabilité et en théorie des anneaux non commutatifs, mais aussi en informatique théorique pour ne citer que ces domaines là.

Comparée à la théorie des comodules sur les coanneaux(théorie issue également de la théorie des modules sur les anneaux),la théorie des semimodules s'est développée plus lentement car il y'a beaucoup de difficultés dans la définition

des concepts et dans les démonstrations du fait que sur un semi-anneau, les éléments n'ont pas d'opposés. Cette "légère" différence fait "tomber" la plupart des résultats connus sur les modules et les anneaux. Ainsi beaucoup de propriétés connues sur les modules ne marchent plus et donc il est très difficile de mener à bien certaines résolutions. La commodité dans les calculs qu'apportait l'existence de l'opposé dans les modules est vite transformée en difficulté dans les semimodules.

Entre autres différences entre modules et semimodules, on peut citer :

- Dans la théorie des modules, les relations d'équivalence sur un module M sont caractérisées par les sous-modules de M . Ceci n'est pas le cas dans la théorie des semimodules où il peut exister des relations d'équivalence sur un semimodule compatibles avec la structure de semimodule et qui ne sont pas définies par des sous-semimodules.
- Dans la théorie des modules, le produit tensoriel entre deux modules est bien connu [3]. Mais sa généralisation dans la théorie des semimodules n'est pas unique. Katsov [20] and Takahashi [25] ont défini deux notions différentes du produit tensoriel dans la théorie des semimodules. Abuhlail décrit bien les différences entre ces deux produits tensoriels dans [2].
- Il est établi que dans la catégorie des modules, si $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme de R -modules, alors on a les équivalences suivantes :

1. f injectif $\iff \ker f = 0 \iff f$ monomorphisme.

2. f surjectif $\iff \operatorname{Im} f = M \iff f$ épimorphisme.

3. f bijectif $\iff f$ bimorphisme (monomorphisme et épimorphisme) $\iff f$ isomorphisme (i.e $\exists f' : M' \longrightarrow M$ tel que $f \circ f' = 1_N, f' \circ f = 1_M$).

Mais on n'a pas ces équivalences dans la catégorie des semimodules et des semianneaux. En effet :

– Dans la catégorie des semimodules :

Si $f : M \rightarrow N$ un homomorphisme de R -semi-modules. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) f est injectif;
- (b) f est k -régulier et la suite $\{0\} \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ est exacte;
- (c) f est k -régulier et $\text{Ker}(f) = \{0\}$;
- (d) f est un semi-monomorphisme k -régulier;
- (e) f est un monomorphisme.

Malgré toutes ces différences et difficultés, beaucoup de chercheurs maintenant étudient les semimodules car leurs structures sont plus naturelles , ce qui favorise plus d'applications.

Des nombreux mathématiciens ont apporté leurs contributions pour l'émergence de la théorie des semimodules sur les semianneaux parmi lesquels Samuel Bourne [7], Michiro Takahashi [26, 27, 28], Jonathan S. Golan [13, 14, 15], Nguyen Xuan Tuyen [32, 23], Tran Gian Nam [32, 23], J.N.Chaudhari [8], Jawad Youness Abuhail [1, 2], pour ne citer que ceux là. Pour les travaux fondateurs de la théorie des semimodules sur les semianneaux, nous pouvons consulter les articles de Michiro Takahashi notamment [26, 27, 28] en ajoutant les livres du professeur Jonathan S.Golan : " The theory of semi-rings and their applications" dans deux éditions celle de 1992 et celle revue

et augmentée de 1999 [13]; "Power Algebras over Semirings with Applications in Mathematics and Computer Science en 1999" [14], "Semirings and Affine Equation over Them" en 2003 [15], On peut aussi ajouter celui de Hebisch, U. et Weinert, H.J., Semirings. "Algebraic Theory and applications in computer science", World Scientific (1993) [18],... Ces livres résument l'essentiel des notions sur la théorie des semimodules sur les semianneaux depuis les années cinquante. On y retrouve de nombreux exemples de semianneaux avec leurs applications en informatique et dans d'autres disciplines avec des références précises. Le survey de Jawad Youness Abuhail [1] paru en mai 2008 généralise les notions de semianneaux aux coanneaux. Il introduit et étudie aussi les notions de semicomodules pour les semicoanneaux qui généralisent les semimodules sur les semianneaux.

Le travail que nous présentons dans cette thèse rentre dans le cadre de l'approfondissement des propriétés sur les semimodules issues directement d'une généralisation des propriétés connues sur les modules. C'est un ensemble d'études portant sur les sous-semimodules essentiels, sur le foncteur tensoriel sur les semimodules et sur les semimodules simples.

1.2 Résumé de mes contributions et publications

Cette thèse est organisée en 4 chapitres dont le premier est une introduction pour présenter le travail qui est fait. Mes contributions sont donc les chapitres 2, 3 et 4.

– Contributions du chapitre 2

Dans le **Chapitre 2**, nous étudions les différentes approches de sous-semimodules essentiels et leurs applications sur les semimodules co-hopfiens.

Pour ce qui concerne les sous-semimodules essentiels, deux définitions différentes ont été données par Golan [14] et Fall et autres [11].

Golan les définit comme suit :

- Un R -monomorphisme $f : M \longrightarrow M'$ de R -semimodules à gauche, est essentiel si pour tout R -homomorphisme $g : M' \longrightarrow M''$, $g \circ f$ est un monomorphisme implique que g est un monomorphisme.

- Un sous-semimodule N d'un R -semimodule M , est essentiel (ou large) dans M (on note $N \trianglelefteq M$) si l'injection $i_N : N \longrightarrow M$ est essentiel.

Notons que $f : M \longrightarrow M'$ est essentiel si et seulement si $f(M)$ est un large sous-semimodule de M' .

Fall et autres donnent une autre manière pour définir la notion d'"essentiel" comme suit (ici on généralise directement la définition de essentiel sur les modules) :

- Un R -sous-semimodule N d'un semimodule M est dit semi-essentiel dans M , (on note $N \trianglelefteq_s M$), si pour tout R -sous-semimodule K de M : $(N \cap K = 0) \Rightarrow (K = 0)$.

- Un monomorphisme (respectivement semi-monomorphisme) $f : M \longrightarrow M'$ de R -semimodules à gauche, est dit semi-essentiel si : $f(M) \trianglelefteq_s M'$.

Notons que dans la théorie des modules ces deux définitions sont équivalentes.

Ces deux définitions ont donné deux classes de sous-semimodules essentiels différentes.

Dés lors il a été question, dans nos travaux, de généraliser la notion d'essentiel en trouvant une classe qui contient les deux précédentes.

Après avoir rappelé les deux classes distinctes des sous-semimodules essentiels et des sous-semimodules semiessentiels, nous caractérisons une nouvelle classe appelée la classe des sous-semimodules faiblement essentiels qui généralisent les deux précédentes en les englobant. Ensuite nous donnons une application de cette nouvelle classe en étudiant les semimodules faiblement co-hopfiens. Ce chapitre est composé de deux parties :

- une première partie où nous généralisons la notion de sous-semimodule essentiel ;
- une deuxième partie où nous donnons une application de cette nouvelle classe.

Dans la première partie on définit un sous-semimodule faiblement essentiel comme suit :

Un sous-semimodule N d'un semimodule à gauche M est dit faiblement essentiel dans M , et noté $N \trianglelefteq_{we} M$, si pour tout R -homomorphisme $h : M \longrightarrow M'$, la restriction de $\equiv_{Kerh}$ à N est triviale $\implies Kerh = 0$. Les principaux résultats de la première partie de ce chapitre sont les propositions et l'exemple suivants qui permettent de caractériser les sous-semimodules faiblement essentiels :

Proposition : Si N est un sous-semimodule d'un R -semimodule à gauche M alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. N est faiblement essentiel dans M ;
2. $\forall K \leq M$, la restriction de $\equiv_K$ à N est triviale $\implies K = 0$.

Proposition : Si N est un sous-semimodule d'un R -semimodule à gauche M , alors on a :

$$1. N \sqsubseteq M \implies N \sqsubseteq_{we} M.$$

$$2. N \sqsubseteq_s M \implies N \sqsubseteq_{we} M.$$

Exemple Dans cet exemple nous proposons un sous-semimodule fini faiblement essentiel qui n'est ni essentiel ni semi-essentiel.

Considérons l'ensemble $R = \{0, 1, \dots, n\}$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$) et définissons sur R les deux opérations commutatives $(\oplus, \otimes)$ comme suit :

$$1. \forall x, y \in R: \quad x \oplus y = \min(x, y)$$

$$2. \forall x, y \in R: \quad x \otimes y = \max(x, y).$$

$(R, \oplus, \otimes)$ est un semianneau $0_R = n, 1_R = 0$.

Posons $M = \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n-1}, \dots, 1 + \frac{1}{2}, 2, 2 + \frac{1}{n}, \dots, n-1, (n-1) + \frac{1}{n}, \dots, (n-1) + \frac{1}{2}, n\}$.

$(M, \oplus)$ est un monoïde commutatif avec $0_M = n$.

Soit " $\star$ " la loi externe définie par :

$$\star : R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longmapsto r \star m = \max(r, m)$$

On a $(M, \oplus, \star)$ qui est un R -semimodule.

Soit $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Posons $N_a = \{a, \dots, n - \frac{1}{2}, n\}$; alors N_a est un sous-semimodule fini de M qui est faiblement essentiel mais qui n'est ni essentiel ni semi-essentiel.

Un exemple de sous-semimodule infini faiblement essentiel qui n'est ni essentiel ni semi-essentiel a été également conçu dans l'article.

En application, dans la deuxième partie du chapitre, nous avons étudié les différents types de semimodules faiblement co-hopfiens à l'aide des trois types de sous-semimodules faiblement essentiels obtenus dans la première partie.

Un R -semimodule à gauche ${}_R M$ est dit :

- faiblement co-hopfien de type 1 (noté wch-1) si tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$ est faiblement essentiel i.e $f(M) \trianglelefteq_{we} M$;
- faiblement co-hopfien de type 2 (noté wch-2) si tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$ est semi-essentiel i.e $f(M) \trianglelefteq_s M$;
- faiblement co-hopfien de type 3 (noté wch-3) si tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$ est essentiel i.e $f(M) \trianglelefteq M$

Les principaux résultats dans cette partie du chapitre sont les propositions suivantes qui permettent de caractériser les sous-semimodules faiblement co-hopfiens :

Pour les semimodules faiblement co-hopfiens de type 1

Proposition

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -semimodule à gauche M .

1. M est wch-1.
2. $\forall \{0\} \neq N \leq M$, si $g \in \text{End}(M)$ est injective, alors la restriction de $\equiv_N$ à $g(M)$ est non triviale.

Proposition

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -semimodule à gauche M .*
 - (a) M est wch-1.

(b) Il existe un sous-semimodule K de M tel que $g(K) \trianglelefteq_{we} M$ pour tout $g \in \text{End}(M)$ injectif.

2. Un facteur direct d'un semimodule wch -1 est wch -1.

De façon similaire on caractérise les semimodules faiblement co-hopfiens de type 2 et 3.

– Contributions du Chapitre 3

Dans le chapitre **chapitre 3**, nous avons étudié l'anneau tensoriel sur les semimodules. Pour cela nous avons eu besoin d'un produit tensoriel défini dans les semimodules.

Katsov [20] and Takahashi [27] ont défini deux notions différentes du produit tensoriel dans la théorie des semimodules.

Takahashi [27] définit le sien comme suit :

Soit M_R un R -semimodule à droite et ${}_R N$ un R -semimodule à gauche.

Soit $T = \mathbb{N}^{(M \times N)}$ le monoïde commutatif (donc un $\mathbb{N}$ -semimodule) libre de base $M \times N$ et soit $F = \mathbb{N}^{(M \times N)} \times \mathbb{N}^{(M \times N)}$.

La base canonique de T est donnée par les éléments de l'ensemble $\{\delta_{(m,n)} | (m,n) \in M \times N\}$ où $\delta_{(m,n)}$ est la fonction de Kronecker .

Soit $F_0 \subset F$ le $\mathbb{N}$ -sous-semimodule symétrique engendré par les éléments

de la forme : $(\delta_{(m+m',n)}, \delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)}), (\delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)}, \delta_{(m+m',n)}), (\delta_{(m,n+n')}, \delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')}), (\delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')}, \delta_{(m,n+n')}), (\delta_{(mr,n)}, \delta_{(m,rn)}), (\delta_{(m,rn)}, \delta_{(mr,n)})$ où $m, m' \in M, n', n \in N$ et $r \in R$.

Considérons maintenant la relation de R -congruence ρ sur T définie par ;

$$f \rho g \iff f + h = g + h' \quad \text{pour } (h, h') \in F_0$$

Le produit tensoriel de Takahashi est défini comme $M \boxtimes N = T/\rho$ et

on note que :

i) L'application $\tau : M \times N \longrightarrow M \boxtimes N$, $(m, n) \longmapsto m \boxtimes n$ est R -équilibrée

ii) $M \boxtimes N$ est un monoïde commutatif simplifiable.

iii) Pour tout monoïde simplifiable G et tout application R -équilibrée $\beta : M \times N \longrightarrow G$, il existe un unique morphisme de monoïdes $\gamma : M \boxtimes N \longrightarrow G$ tel que $\gamma \circ \tau = \beta$

Le produit tensoriel de Takahashi présente des désavantages parmi lesquels on peut citer le fait qu'avec ce produit tensoriel, la catégorie des semimodules sur un semianneau commutatif n'est pas monoïdal et donc le foncteur tensoriel n'admet pas comme adjoint à gauche le foncteur Hom comme on l'espérait. En fait le produit tensoriel de Takahashi règle ce problème universel uniquement dans la sous-catégorie des semimodules simplifiables mais non dans la catégorie totale des semimodules.

D'un autre côté Katsov [20] a considéré un produit tensoriel différent, plus naturel, qui règle plusieurs des problèmes posés par celui de Takahashi notamment le problème universel dans la catégorie des semimodules.

Le produit tensoriel de Katsov, noté ici $\otimes$, a été défini par Katsov de la manière suivante [20] :

Soit M_R un R -semimodule à droite et ${}_R N$ un R -semimodule à gauche. Une application R -équilibrée $g : M \times N \longrightarrow G$, où G est un monoïde commutatif est une application bilinéaire telle que $g(mr, n) = g(m, rn)$ pour tout $m \in M, r \in R$ et $n \in N$.

Soit $T = \mathbb{N}^{(M \times N)}$ le monoïde commutatif libre de base $M \times N$ et soit $F = \mathbb{N}^{(M \times N)} \times \mathbb{N}^{(M \times N)}$.

Tout élément de T peut s'écrire de manière unique comme une combinaison d'éléments de l'ensemble suivant : $\{\delta_{(m,n)} | (m,n) \in M \times N\}$ où $\delta_{(m,n)}$ est le symbole de Kronecker .

Soit $\equiv$ la relation de R -congruence engendrée par les equivalences

$$\delta_{(m+m',n)} \equiv (\delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)}) , \delta_{(m,n+n')} \equiv (\delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')}) , \delta_{(mr,n)} \equiv \delta_{(m,rn)}$$

où $m, m' \in M, n', n \in N$ et $r \in R$.

Soit $\iota : M \times N \longrightarrow T$ l'injection canonique de $M \times N$ dans T , et soit $\phi : M \times N \longrightarrow T/\equiv$ la composition de ι et de l'application-quotient $\pi_{\equiv} : T \longrightarrow T/\equiv$: alors $\phi(m, n) = \delta_{(m,n)}/\equiv$.

Le produit tensoriel de Katsov de M et N sur R est le $\mathbb{N}$ -semimodule $M \otimes_R N = (T/\equiv, \phi)$. On note $\phi(m, n) = m \otimes_R n$.

Dans ce chapitre, nous avons utilisé le produit tensoriel de Katsov pour définir l'annulateur tensoriel dans les semimodules.

Soient U_R et ${}_R M$ deux semimodules. L'annulateur tensoriel dans M de U est : $TAnn_M(U) = \{m \in M / u \otimes m = 0 \quad \forall u \in U\}$

On dit que U_R est ${}_R M$ -fidèle si $TAnn_M(U) = \{0\}$.

Cet annulateur nous a permis d'étudier les propriétés des semimodules complètement fidèles vus comme une généralisation des modules complètement fidèles.

Un semimodule W_R est dit complètement fidèle si $TAnn_M(W) = 0$ pour tout R -semimodule ${}_R M$.

Le principal résultat de ce chapitre est le théorème et les propriétés suivants :

Théorème

1. Si U_R engendre V_R , alors : $TAnn_M(U) \leq TAnn_M(V)$.
2. U_R est ${}_R M$ -fidèle si et seulement si pour tout homomorphisme $f : N \rightarrow M$, $U \otimes f = 0$ implique que $f = 0$.
3. $TAnn_R(U) = r_R(U)$ où $r_R(U) = \{r \in R / u.r = 0 \quad \forall u \in U\}$.

De ce théorème on a tiré les caractérisations suivantes :

Propriétés

1. R_R est complètement fidèle ;
2. Tout générateur dans $SMOD\text{-}R$ est complètement fidèle.
3. Les propriétés suivantes à propos d'un semimodule W_R sont équivalentes :
 - (a) W_R est complètement fidèle ;
 - (b) Pour tout homomorphisme f dans $R\text{-}SMOD$, si $W \otimes f = 0$ alors $f = 0$.

– Contributions du chapitre 4

Le **Chapitre 4** est consacré à l'étude des semimodules fortement semi-simples.

Pour ce qui concerne les semimodules simples, il faut d'abord remarquer que dans la théorie des semimodules et des semianneaux, la notion de "semimodule simple" est un outil important et il a été généralisé de plusieurs manières différentes par beaucoup d'auteurs comme Golan [13] et Katsov, Nam et Tuyen [29].

Dans la théorie des modules, si M est un A -module à gauche, où A est un anneau, alors nous avons les propriétés équivalentes suivantes :

1. M possède uniquement deux sous-modules : 0 and M ;

2. $M \cong \frac{A}{I}$ où I est un idéal à gauche maximal de A ;
3. Il existe seulement deux relations d'équivalence compatibles avec la structure de module de M : l'équivalence triviale et l'équivalence universelle.

Mais ces trois propriétés ne sont pas équivalentes dans la théorie des semi-anneaux et des semimodules et, elles fournissent trois types de "semimodules simples" et trois types de " semimodules semisimples". Les propriétés (1) et (2) ci-dessus sont les plus utilisées pour étudier les "semimodules simples" et les "semimodules semisimples" dans la classe des semimodules soustractifs.

D'après nos investigations, jusqu'à présent, il n'y a aucune caractérisation des "semimodules simples" ou des "semimodules semisimples" dans le sens de la propriété (3), alors il nous a paru intéressant de le faire dans nos travaux.

Les définitions utilisées sont les suivantes :

1. Un R -semimodule à gauche $T \neq 0$ est dit austere-simple si T ne possède que deux sous-semimodules 0 et T .
2. Un R -semimodule à gauche $T \neq 0$ est dit soustractif-simple si T ne possède que deux sous-semimodules soustractifs 0 et T .
3. Un R -semimodule à gauche $T \neq 0$ est dit fortement-simple si il ne contient que deux relations de congruence :
 $\equiv_t$ la R -congruence triviale, et $\equiv_u$ la R -congruence universelle.
4. Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-semimodules fortement-simples d'un R -semimodule à gauche M . Si $M = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$, alors $\bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$

est appelé une décomposition fortement-semisimple de M . Un R -semimodule à gauche M est dit fortement-semisimple lorsqu'il a une décomposition fortement-semisimple.

Les principaux résultats de ce chapitre sont les propositions et le théorème suivants qui caractérisent les semimodules fortement-semisimples dans la catégorie des semimodules soustractifs et simplifiables :

Proposition

Soit M un R -semimodule à gauche soustractif et simplifiable, engendré par la famille $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-semimodules fortement simples. Alors il existe un sous-ensemble $B \subseteq A$ tel que : $M = \oplus_{\beta \in B} T_\beta$. En outre M est fortement semisimple.

Proposition

Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-semimodules fortement simples d'un R -semimodule à gauche soustractif et simplifiable M . Si T est un sous-semimodule fortement simple de M , tel que la restriction de $\equiv_{\sum A T_\alpha}$ à T est non triviale alors il existe $\alpha \in A$ tel que : $T \simeq_s T_\alpha$.

Théorème (Caractérisation des semimodules fortement semi-simples)

Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-semimodules fortement simples d'un R -semimodule à gauche M soustractif et simplifiable. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. M est fortement semisimple.
2. M est engendré par des semimodules fortement simples.
3. M est la somme de semimodules fortement simples.
4. Tout sous-semimodule de M est un facteur direct de M .

5. *Toute suite exacte : $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ de R -semimodules à gauche, est scindée.*

– **Publications**

J'ai deux articles publiés et un article soumis.

Articles publiés

1. Elhadji Demba Wade DIOP, Djiby SOW " On essential Subsemimodules and Weakly Co-Hopfian Semimodules " EJPAM, Vol.9, No.3, 250-265, (2016)
2. Elhadji Demba Wade DIOP, Djiby SOW " On completely tensor-faithfull semimodules over semirings " Journal of Algebra, Vol. 11, 2017, no. 2, 83 - 92 HIKARI Ltd

Articles soumis

- Elhadji Demba Wade DIOP, Djiby SOW, Landing FALL " On Strongly Semisimple semimodules " (soumis)

La partie **Annexe** est consacrée aux rappels de quelques notions de base sur les semianneaux et les semimodules.

Chapitre 2

Sur les sous-semimodules essentiels et les semimodules faiblement co-hopfiens

La théorie des semimodules sur les semianneaux unitaires (Golan [13], Abuhlail [1], Takahashi [26, 27, 28]) peut être considérée comme une généralisation de la théorie des modules sur les anneaux unitaires (Anderson-Fuller[3], Lam [21], Wisbauer [35]). Les résultats trouvés dans les semimodules restent souvent valables dans les modules, mais ceux trouvés dans les modules ne sont pas toujours vrais dans les semimodules.[11, 23, 30, 31].

Le concept de "sous-module essentiel" d'un R -module M [3], introduit par Johnson, Eckman et Schopf [10, 19], joue un rôle important dans le domaine de l'Algèbre commutative et non commutative.

Dans la théorie des modules, pour un anneau R , un sous-module N d'un module ${}_R M$ est dit essentiel (on note $N \trianglelefteq M$) si $K \cap N = 0 \implies K = 0$ pour

tout sous-module K de M . Un monomorphisme $f : M \longrightarrow M'$ est dit essentiel si $f(M) \trianglelefteq M'$. Il est connu qu'un R -monomorphisme $f : M \longrightarrow M'$ R -modules à gauche est essentiel si et seulement si pour tout R -homomorphisme $g : M' \longrightarrow M''$, $g \circ f$ est un monomorphisme implique que g est un monomorphisme. Un sous-module N d'un module M est essentiel ssi l'injection canonique $i : N \longrightarrow M : x \mapsto x$ est essentielle.

Les caractérisations ci-dessus de "essentiel" ne sont pas équivalentes dans la théorie des semimodules. En effet cette notion d' "essentiel" a été généralisée dans les semimodules, de deux façons différentes .

Golan, dans son livre [13], propose les définitions suivantes :

- Un R -monomorphisme $f : M \longrightarrow M'$ de R -semimodules à gauche est essentiel si pour tout R -homomorphisme $g : M' \longrightarrow M''$, $g \circ f$ est un monomorphisme implique que g est un monomorphisme.
- Un sous-semimodule N d'un R -semimodule à gauche M est essentiel (ou large) dans M si l'inclusion $i_N : N \longrightarrow M$ est un R -monomorphisme essentiel.

Notons que $f : M \longrightarrow M'$ est un R -homomorphisme essentiel si et seulement si $f(M)$ est un large sous-semimodule de M' .

Une deuxième définition de la notion d' "essentiel" a été proposée dans [11] comme suit :

- Un R -sous-semimodule N de M est dit semiessentiel dans M , on note alors $N \trianglelefteq_s M$, si pour tout R -sous-semimodule K de M : $N \cap K = 0 \Rightarrow K = 0$.
- Un monomorphisme (respectivement semimonomorphisme) $f : M \longrightarrow M'$ de R -semimodules à gauche est dit semiessencial si : $f(M) \trianglelefteq_s M'$.

Ces deux différentes notions de "sous-semimodules essentiels " [11] sont les mêmes dans la théorie des modules.

Il est également prouvé dans [11], que la classe des sous-semimodules essentiels n'est pas contenue et ne contient pas la classe des sous-semimodules semiessentiels. De plus, l'intersection de ces deux classes n'est pas vide.

Dans ce chapitre, nous étudions une nouvelle classe de sous-semimodules "essentiels" (appelés sous-semimodules faiblement essentiels).

Dans la théorie des modules, les relations de congruences sont définies par les sous-modules, mais on n'a pas cela dans la théorie des semimodules c'est à dire que dans cette théorie, il y'a des relations de congruences qui ne sont pas définies par des sous-semimodules. Alors dans la nouvelle classe que nous étudions, nous avons considéré les relations de congruences définies par les sous-semimodules.

Nous avons montré que cette nouvelle classe contient les deux classes de sous-semimodules essentiels qui existait déjà. De plus, nous avons étudié quelques propriétés intéressantes dans cette nouvelle classe. En guise d'applications, nous avons défini trois notions de sous-semimodules faiblement co-hopfiens.

Tous les semianneaux considérés ici sont associatifs, unitaires, d'élément unité 1 avec $1 \neq 0$, et tous les semimodules ont un élément unité et toutes les extensions d'anneaux contiennent l'élément identité.

Pour les notions et notations sur les semimodules, nous avons utilisé ceux qui sont dans [1] et [13]. Dans un premier temps, nous rappelons quelques définitions et notations dont on a besoin dans ce chapitre.

Le chapitre est organisé comme suit :

- Dans la section 2-1 : Préliminaires : Nous donnons quelques résultats dont on a besoin pour la suite
- Dans la section 2-2 : Nouvelle notion d'essentiel : Quelques propriétés sur les sous-semimodules faiblement essentiels.
- Dans la section 2-3 : Applications : Trois types de semimodules faiblement co-hopfiens .

2.1 Préliminaires

Nous rappelons brièvement quelques notions de base sur les semimodules. Nous notons $N \leq M$, si N est un sous-semimodule du semimodule M et nous appelons homomorphisme tout homomorphisme de R -semimodules à gauche.

Tout au long de ce chapitre, nous considérons des R -semimodules à gauche, mais les résultats sont aussi vrais pour les R -semimodules à droite et les preuves sont similaires.

Définition 2.1.1. Soit M un R -semimodule à gauche.

- Une R -congruence sur M est une relation d'équivalence ρ sur M telle que $m\rho m'$ et $n\rho n' \implies (m+n)\rho(m'+n')$ et $(rm)\rho(rm')$, $\forall m, m', n, n' \in M$ et $r \in R$.
- La relation de congruence ρ définie sur M par $m\rho m' \iff m = m'$ est appelée **relation de congruence triviale** sur M .
- La relation de congruence ρ définie sur M par $m\rho m' \quad \forall m, m' \in M$ est appelée **relation de congruence universelle** sur M .
- M est un semimodule R -simple si toute relation de congruence définie sur M est triviale ou universelle.

Exemple 2.1.2. Si $f : M \longrightarrow M'$ est un R -homomorphisme de R -semimodules à gauche, alors f définit une R -congruence $\equiv_f$ sur M par $m \equiv_f m'$ si et seulement si $f(m) = f(m')$. Une autre R -congruence définie sur M par f est la relation $\equiv_{\ker f}$ donnée par $m \equiv_{\ker f} m'$ si et seulement si il existe $k, k' \in \ker f$ tel que $m + k = m' + k'$. Il est clair que $m \equiv_f m'$ si $m \equiv_{\ker f} m'$ mais la réciproque n'est pas toujours vraie. (Rappelons que $\ker f = \{m \in M / f(m) = 0\}$)

Définition 2.1.3. Un R -homomorphisme $f : M \longrightarrow M'$ est régulier ssi $\equiv_f$ et $\equiv_{\ker f}$ sont équivalentes.

Remarque 2.1.4. L'ensemble de toutes les R -congruences sur M , noté $R\text{-cong}(M)$, est partiellement ordonné par la relation $\leq$ définie par $\rho \leq \rho'$ ssi $m\rho m' \implies m\rho' m' \forall m, m' \in M$. Pour $m, m' \in M$, $\rho_{(m, m')}$ est l'unique plus petit élément ρ de $R\text{-cong}(M)$ satisfaisant $m\rho m'$.

Définition 2.1.5. – Un sous-semimodule N d'un semimodule M est sous-tractif si pour tous $m, m' \in M$, $m + m' \in N$ et $m \in N$ impliquent que $m' \in N$.

- La clôture soustractive d'un sous-semimodule N de M est le plus petit sous-semimodule soustractif de M contenant N .
- Un semimodule M est dit additivement simplifiable si pour tous $m, m', m'' \in M$, on a :

$$m + m' = m + m'' \implies m' = m''$$

Définition 2.1.6. Soit N un sous-semimodule d'un R -semimodule à gauche M . N induit sur M une R -congruence $\equiv_N$, connue sous le nom de relation de Bourne et définie par :

$$\forall m, m' \in M; \quad m \equiv_N m' \iff \exists n, n' \in N \text{ tels que } m + n = m' + n'$$

- M/N est le R -semimodule quotient $M/\equiv_N$, et pour tout élément $m \in M$ on note m/N sa classe dans M/N .
- $0/N = \overline{N} = \{m \in M/\exists n \in N/m + n \in N\}$ est la clôture soustractive de N .

Définition 2.1.7. Soient M_1 et M_2 des sous-semimodules d'un R -semimodule à gauche M .

Si M_1 et M_2 engendrent M (i.e $M = M_1 + M_2$), et si la restriction de $\equiv_{M_2}$ à M_1 et la restriction de $\equiv_{M_1}$ à M_2 sont triviales, alors M est la somme directe de ses sous-semimodules M_1 et M_2 et on écrit $M = M_1 \oplus M_2$. Dans ce cas, pour tout $m \in M$, il existe un unique couple $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ tel que : $m = m_1 + m_2$.

In [13], nous trouvons les caractérisations suivantes des sous-semimodules essentiels.

Lemme 2.1.8. Si N est un sous-semimodule d'un R -semimodule à gauche M alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. N est essentiel (ou large) dans M ;
2. si ρ est une non triviale R -congruence sur M alors la restriction de ρ à N est aussi non triviale ;
3. Si m et m' sont des éléments distincts de M alors il existe des éléments distincts n et n' de N vérifiant $n\rho_{(m,m')}n'$.

Notation : La classe des sous-semimodules essentiels d'un R -semimodule à gauche M est notée par $\mathfrak{E}_R M$.

Exemple 2.2.8. [11] Dans cet exemple, nous proposons un sous-semimodule essentiel qui est faiblement essentiel mais qui n'est pas semiessentiel.

Soit $R = \{0, 1, a\}$ et définissons sur R les deux opérations commutatives $(+, \times)$ comme suit :

1. $0_R = 0 ; 1_R = 1$
2. $1 + 1 = 1 + a = 1 ; a + 0 = a + a = a$
3. $0 \times 0 = 0 \times 1 = 0 \times a = 0 ; 1 \times 1 = 1 ; 1 \times a = a \times a = a.$

Alors $(R, +, \times, 0, 1)$ est un semianneau commutatif.

Soit $M = \{0, 1, a, b\}$ muni des mêmes opérations définies sur R et $1_M = 1_R = 1, 0_M = 0_R = 0, b + 0 = b + b = b, b + 1 = b + a = a, 0 \times b = b \times a = 0, b \times 1 = b \times b = b$. Il est facile de vérifier que $(M, +, \times, 0, 1)$ est un R -semimodule commutatif.

Maintenant posons $N = R = \{0; 1; a\}$, alors N est un sous-semimodule faiblement essentiel de M , mais N n'est pas semiessentiel.

Dans la classe des sous-semimodules faiblement essentiels, on a les résultats suivants :

Proposition 2.2.9. Soit M un R -semimodule à gauche, K et N des sous-semimodules de M tels que : $K \leq N \leq M$. Alors on a :

1. $K \trianglelefteq_s M \iff (K \trianglelefteq_s N \text{ et } N \trianglelefteq_s M).$
2. $K \trianglelefteq M \iff (K \trianglelefteq N \text{ et } N \trianglelefteq M).$
3. $K \trianglelefteq_{we} M \implies (K \trianglelefteq_{we} N \text{ et } N \trianglelefteq_{we} M).$

Preuve :

On a $k_1 + k_2 \equiv_{L_1} k'_1 + k'_2 \implies k_1 + k_2 + l_1 = k'_1 + k'_2 + l'_1 \implies k_1 + l_1 \equiv_{M_2} k'_1 + l'_1$ et $k_2 \equiv_{M_1} k'_2$. Maintenant par définition de $M = M_1 \oplus M_2$ et par hypothèse on a : $k_1 + l_1 \equiv_{M_2} k'_1 + l'_1 \implies k_1 = k'_1$ et $k_2 \equiv_{M_1} k'_2 \implies k_2 = k'_2$. Alors $k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2$ et donc $\equiv_{L_1}$ est triviale sur $K_1 \oplus K_2$.

(2) Supposons que $\equiv_{L_1 \oplus L_2}$ triviale sur $K_1 \oplus K_2$.

Soit k_1, k'_1 deux éléments de K_1 tels que $k_1 \equiv_{L_1} k'_1$.

Alors il existe $l_1, l'_1 \in L_1$ tels que $k_1 + l_1 = k'_1 + l'_1$. Or $k_1 = k_1 + 0 \in K_1 \oplus K_2, l_1 = l_1 + 0 \in L_1 \oplus L_2$, idem on a $k'_1 \in K_1 \oplus K_2, l'_1 \in L_1 \oplus L_2$. Puisque $\equiv_{L_1 \oplus L_2}$ triviale sur $K_1 \oplus K_2$, on en déduit que $k_1 = k'_1$. Ainsi $\equiv_{L_1}$ est triviale sur K_1 et de façon similaire $\equiv_{L_2}$ est triviale sur K_2 . $\square$

Proposition 2.2.12. *Soit M un R -semimodule à gauche. Supposons que $K_1 \leq M_1 \leq M ; K_2 \leq M_2 \leq M$ et $M = M_1 \oplus M_2$.*

Alors $(K_1 \oplus K_2) \trianglelefteq_{we} (M_1 \oplus M_2) \implies (K_1 \trianglelefteq_{we} M_1 \text{ et } K_2 \trianglelefteq_{we} M_2)$

Preuve : Montrons que $K_1 \trianglelefteq_{we} M_1$. Soit $L_1 \leq M_1$ tel que $\equiv_{L_1}$ est triviale sur K_1 . Par le Lemme 2.2.11 (1) on a $\equiv_{L_1}$ triviale sur $K_1 \oplus K_2$. Maintenant $\equiv_{L_1}$ est triviale sur $K_1 \oplus K_2$ and $K_1 \oplus K_2 \trianglelefteq_{we} M_1 \oplus M_2$ donc $L_1 = 0$. $\square$

Proposition 2.2.13. *Soit M un R -semimodule à gauche. Supposons que $K_1 \leq M_1 \leq M ; K_2 \leq M_2 \leq M$ et $M = M_1 \oplus M_2$.*

Alors $(K_1 \oplus K_2) \trianglelefteq_s (M_1 \oplus M_2) \iff (K_1 \trianglelefteq_s M_1 \text{ et } K_2 \trianglelefteq_s M_2)$.

Preuve : $\implies$) Supposons par exemple que $K_1 \not\trianglelefteq_s M_1$. Alors il existe un sous-semimodule $L_1 \neq 0$ de M_1 tel que : $L_1 \cap K_1 = 0$. Montrons que $L_1 \cap (K_1 + K_2) = 0$.

Soit $l_1 \in L_1 \cap (K_1 + K_2)$. Il existe $(k_1; k_2) \in K_1 \times K_2$ tel que : $l_1 = k_1 + k_2$.
On a : $l_1 \in L_1 \leq M_1$; $k_1 \in K_1 \leq M_1$ et $k_2 \in K_2 \leq M_2$, alors par la somme directe $M_1 \oplus M_2$ on déduit que $k_2 = 0$ et $l_1 = k_1$; donc $l_1 \in L_1 \cap K_1 = 0$, d'où $l_1 = 0$. Par conséquent $L_1 \cap (K_1 \oplus K_2) = 0$ ce qui contredit le fait que $(K_1 \oplus K_2) \leq_s (M_1 \oplus M_2)$. Alors $K_1 \leq_s M_1$. De la même façon on montre que $K_2 \leq_s M_2$.

$\Leftarrow$) Supposons que $K_i \leq_s M_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.

Soit $0 \neq x \in M_1 \oplus M_2$. Alors il existe $(0, 0) \neq (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ tel que :

$0 \neq x = x_1 + x_2$. Sans altérer la généralité, on peut supposer que : $0 \neq x_1 \in M_1$. Puisque $K_1 \leq_s M_1$ alors du lemme 2.1.8, il existe $r_1 \in R$ tel que : $r_1 x_1 \in K_1$ et $r_1 x_1 \neq 0$.

- Si $r_1 x_2 \in K_2$ alors $r_1 x_1 + r_1 x_2 \in K_1 + K_2$ donc $r_1(x_1 + x_2) \in K_1 \oplus K_2$ avec $r_1(x_1 + x_2) \neq 0$ car si $r_1 x_1 + r_1 x_2 = 0$, alors par somme directe on a $r_1 x_1 = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent $(K_1 \oplus K_2) \leq_s (M_1 \oplus M_2)$.
- Si $r_1 x_2$ n'est pas dans K_2 alors il existe $r_2 \in R$ tel que : $0 \neq r_2 r_1 x_2 \in K_2$.
On a $r_2 r_1 x_1 \in K_1$ donc $r_2 r_1(x_1 + x_2) \in K_1 \oplus K_2$. Si nous posons $r = r_2 r_1$ alors il existe $r \in R$ tel que : $r(x_1 + x_2) \in K_1 \oplus K_2$ with $r(x_1 + x_2) \neq 0$ car si $rx_1 + rx_2 = 0$, alors par somme directe on a $rx_1 = 0$, ce qui est absurde. Donc $(K_1 \oplus K_2) \leq_s (M_1 \oplus M_2)$. Ainsi $K_i \leq_s M_i$ pour tout $i \in \{1; 2\} \implies (K_1 \oplus K_2) \leq_s (M_1 \oplus M_2)$.

□

Définition 2.2.14. Soit N un sous-semimodule d'un R -semimodule à gauche M . Un sous-semimodule N' de M est appelé M -complément faible de N si la restriction de $\equiv_{N'}$ à N est triviale et N' est maximal avec cette propriété.

- Proposition 2.2.15.** 1. *Tout sous-semimodule N d'un R -semimodule M possède un M -complément faible.*
2. *Si N' est un M -complément faible d'un sous-semimodule N de M et si $N \oplus N'$ existe alors : $N \oplus N' \trianglelefteq_{we} M$.*

Preuve :

1. Soit $\mathcal{L} = \{A \leq M / \text{la restriction de } \equiv_A \text{ à } N, \text{ est triviale}\}$. $0 \in \mathcal{L}$, alors $\mathcal{L} \neq \emptyset$. $(\mathcal{L}; \subseteq)$ est un ensemble ordonné. Il est facile de montrer que $\mathcal{L}$ est un ensemble non vide inductif, par conséquent $\mathcal{L}$ possède au moins un élément maximal N' . N' est un M -complément faible de N .
2. – Si $N = 0$ alors $N' = M$, et donc $N \oplus N' \trianglelefteq_{we} M$.
 – Si $N \neq 0$, alors soit $0 \neq L \leq M$ tel que la restriction de $\equiv_L$ à $N \oplus N'$ est triviale.

Montrons que $\equiv_L$ est triviale sur M .

D'abord montrons que la restriction de $\equiv_{N'+L}$ à N est triviale.

Soient $n_1, n_2 \in N$ tels que $n_1 \equiv_{N'+L} n_2$.

$n_1 \equiv_{N'+L} n_2 \implies \exists n'_1, n'_2 \in N, l_1, l_2 \in L$ tels que $n_1 + n'_1 + l_1 = n_2 + n'_2 + l_2$. Alors par hypothèse et à l'aide de la somme directe $N \oplus N'$ on déduit que $n_1 = n_2$, donc la restriction de $\equiv_{N'+L}$ à N est triviale. On en déduit que $N' + L \in \mathcal{L}$. Puisque N' est maximal, alors $N' + L = N'$ ou bien $N' + L = M$. On a $N' + L \neq M$, sinon, puisque la restriction de $\equiv_{N'+L}$ à N est triviale, on obtient $(N' + L) \cap N = M \cap N = N = 0$ ce qui est une contradiction. Alors $N' + L = N'$ et par conséquent $L \subseteq N'$. En plus on a $(N \oplus N') \cap L = 0$ car la restriction de $\equiv_L$ à $N \oplus N'$ est triviale ; donc $N' \cap L = 0$. Ainsi on a $L \subseteq N'$ et $N' \cap L = 0$, donc $L = 0$.

On conclut que $N \oplus N' \trianglelefteq_{we} M$

□

Définition 2.2.16. Soit N un sous-semimodule d'un R -semimodule à gauche M . Un sous-semimodule N' de M est appelé un M -complément fort de N si la restriction de $\equiv_N$ à N' est triviale et N' est maximal avec cette propriété.

Proposition 2.2.17. 1. Tout sous-semimodule N d'un R -semimodule M possède un M -complément fort.

2. Si M est un R -semimodule à gauche simplifiable et si N est un sous-semimodule de M , alors :

(a) Tout M -complément faible de N est un M -complément fort de N

(b) Si N' est un M -complément fort de N alors : $N \oplus N' \trianglelefteq_{we} M$.

Preuve : (1) Similaire à la preuve précédente.

Pour (2)(a) il suffit de voir que si M est simplifiable et si la restriction de $\equiv_{N'}$ à N est triviale, alors la restriction de $\equiv_N$ à N' est triviale.

(2)(b) Similaire à la preuve en utilisant le fait que M est simplifiable. □

2.3 Applications : Sur les semimodules co-hopfiens

Rappelons qu'un R -semimodule non nul ${}_R M$ est dit :

- co-hopfien tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$ est un isomorphisme.
- faiblement co-hopfien si monomorphisme $f : M \rightarrow M$ est essentiel i.e $f(M)$ est sous-semimodule essentiel de M .

Nous avons trois différentes notions de sous-semimodules essentiels, alors on peut définir trois différents types de semimodules faiblement co-hopfiens.

2.3.1 Sur les semimodules co-hopfiens de type 1

Définition 2.3.1. *Un R -semimodule non nul ${}_R M$ est dit faiblement co-hopfien-1 (noté $wch-1$) si tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$ est faiblement essentiel i.e $f(M) \trianglelefteq_{we} M$.*

Proposition 2.3.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -semimodule à gauche M :*

1. M est $wch-1$.
2. $\forall \{0\} \neq N \leq M$, si $g \in \text{End}(M)$ est injectif, alors la restriction de $\equiv_N$ à $g(M)$ est non triviale.

Preuve :

- 1) $\Rightarrow$ 2) Soit $\{0\} \neq N \leq M$ et soit g un endomorphisme injectif de M . Par hypothèse $g(M)$ est faiblement essentiel sur M , donc, comme $N \leq M$ et $N \neq \{0\}$, on déduit que la restriction de $\equiv_N$ à $g(M)$ est non triviale.
- 2) $\Rightarrow$ 1) Soit $g : M \rightarrow M$ un endomorphisme injectif de M et soit N un sous-semimodule de M tel que la restriction de $\equiv_N$ à $g(M)$ est triviale. Supposons que $N \neq \{0\}$. Alors par hypothèse la restriction de $\equiv_N$ à $g(M)$ est non triviale ce qui contredit l'hypothèse. Alors $N = \{0\}$ d'où $g(M)$ est faiblement essentiel et donc M est $wch-1$.

□

Proposition 2.3.3. *Pour un R -semimodule à gauche M , on considère les assertions suivantes :*

1. M est wch-1.

2. Pour tout R -semimodule N , s'il existe un R -monomorphisme $M \dot{\oplus} N \rightarrow M$ alors $N = \{0\}$.

Alors $(1) \implies (2)$ et si M est simplifiable on a $(1) \iff (2)$.

NB :- Un module M qui vérifie (2) est dit Dedekind fini.

- Un semimodule qui est fini vérifie (2).

- Dans la suite, un semimodule M qui vérifie (2) est appelé un F -semimodule.

Preuve :

1. $\implies$ 2) Supposons que $f : M \dot{\oplus} N \rightarrow M$ est un monomorphisme où N est un R -semimodule à gauche. Soit $M \xrightarrow{i} M \dot{\oplus} N \xrightarrow{f} M$ une suite où i l'injection canonique. Alors $f \circ i$ est un monomorphisme, donc $(f \circ i)(M)$ est faiblement essentiel dans M par hypothèse.

De façon similaire on montre que $f(N) = f(0 \dot{\oplus} N) = 0$.

Puisque f est monic, $f(N) = 0 \implies N = 0$.

2) $\implies$ 1) Par hypothèse on déduit cette propriété (P) : Pour tout R -semimodule à gauche N , si $M \dot{\oplus} N \rightarrow M$ est un monomorphisme faiblement essentiel alors $N = \{0\}$.

Maintenant soit $g : M \rightarrow M$ un monomorphisme dont l'image n'est pas faiblement essentiel. Alors d'après la Proposition 2.2.17 il existe un sous-semimodule non nul K avec $g(M) \oplus K \trianglelefteq_{we} M$.

Définissons $f : M \dot{\oplus} K \rightarrow M : (m, k) \mapsto g(m) + k$. D'après la somme directe $g(M) \oplus K$ et le fait que M est simplifiable, f est monic. On a $g(M) \oplus K \subseteq f(M \dot{\oplus} K) \subseteq M$, donc d'après la Proposition 2.2.9 $f(M \dot{\oplus} K) \trianglelefteq_{we} M$ (car $g(M) \oplus K \trianglelefteq_{we} M$). Alors f est un monomor-

phisme faiblement essentiel ce qui contredit la propriété (P) . Donc $g(M) \not\leq_{we} M$.

□

Proposition 2.3.4. *les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -semimodule à gauche M .*

1. M est $wch-1$.
2. M est un F -semimodule et l'image de tout endomorphisme de M est soit faiblement essentiel, soit un facteur direct propre.

Preuve :

- 1) $\Rightarrow$ 2) Par hypothèse et d'après la Proposition précédente, on a : pour tout R -semimodule à gauche N , s'il existe un R -monomorphisme $M \dot{\oplus} N \rightarrow M$ alors $N = \{0\}$.

Maintenant supposons que $M \dot{\oplus} K \cong M$, alors il existe un monomorphisme $f : M \dot{\oplus} K \rightarrow M$ et donc $K = \{0\}$, d'où M est un F -semimodule. Par hypothèse l'image de tout endomorphisme de M est en fait un sous-semimodule faiblement essentiel.

- 2) $\Rightarrow$ 1) Soit $g : M \rightarrow M$ un endomorphisme injectif et supposons que $g(M)$ n'est pas faiblement essentiel dans M . Alors par hypothèse $g(M)$ est un facteur direct propre de M . Alors il existe sous-semimodule non nul K de M tel que $g(M) \oplus K = M$.

Définition $f : M \dot{\oplus} K \rightarrow M : (m, k) \mapsto g(m) + k$. Alors f est un monomorphisme.

On a $M = g(M) \oplus K \subseteq f(M \dot{\oplus} K) \subseteq M$, donc $f(M \dot{\oplus} K) = M$, d'où

f est surjectif. Donc il existe un isomorphisme $M \oplus K \cong M$ ce qui contredit le fait que M est un F -semimodule. Ainsi $g(M) \trianglelefteq_{we} M$.

□

Proposition 2.3.5. 1. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -semimodule à gauche M .

(a) M est wch-1.

(b) Il existe un sous-semimodule K de M tel que $g(K) \trianglelefteq_{we} M$ pour tout endomorphisme injectif $g \in \text{End}(M)$.

2. Un facteur direct d'un semimodule wch-1 est wch-1.

Preuve : (1)

(b) $\Rightarrow$ (a) Triviale d'après la Proposition 2.2.9..

(a) $\Rightarrow$ (b) Triviale.

(2) Supposons que M est un semimodule wch-1.

Soit $M = N \oplus K$ et soit $f : N \rightarrow N$ un endomorphisme injectif de N . Alors l'application $f \oplus \text{Id}_K : M = N \oplus K \rightarrow M = N \oplus K$ définie par $n + k \mapsto (f \oplus \text{Id}_K)(n + k) = f(n) + k$ est un endomorphisme injectif de M et $(f \oplus \text{Id}_K)(M) \trianglelefteq_{we} M$. Alors $(f \oplus \text{Id}_K)(M) \trianglelefteq_{we} M \Rightarrow f(N) \oplus K \trianglelefteq_{we} N \oplus K$ et d'après la Proposition 2.2.12 $f(N) \trianglelefteq_{we} N$, donc N est wch-1.

□

2.3.2 Sur les semimodules co-hopfiens de type 2

Définition 2.3.6. Un R -semimodule non nul ${}_R M$ est dit faiblement co-hopfien-2 (noté wch-2) si tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$ est semiessentiel i.e $f(M) \trianglelefteq_s M$.

Proposition 2.3.7. *Si M est wch-2, alors M est wch-1. Preuve : D'après la Proposition 2.2.3. $\square$*

Proposition 2.3.8. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -semimodule à gauche M .*

1. M est wch-2.
2. Pour tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$, si x est un élément non nul de M , alors il existe $r \in R$ tel que $0 \neq rx \in f(M)$.
3. Les endomorphismes injectifs de M envoient les sous-semimodules semiessentiels vers les sous-semimodules semiessentiels.

Preuve : (1) $\iff$ (2) D'après la Définition 2.3.6 et le lemme 2.1.9.

(3) $\implies$ (1) Trivial.

(1) $\implies$ (3) Soit $g : M \rightarrow M$ un endomorphisme injectif de M , et soit K un sous-semimodule semiessentiel de M . Prouvons que $g(K) \trianglelefteq_s M$.

On a $g(K) \leq g(M) \leq M$ et par hypothèse $g(M) \trianglelefteq_s M$, alors, d'après la Proposition 2.2.9, pour obtenir $g(K) \trianglelefteq_s M$, il suffit de montrer que $g(K) \trianglelefteq_s g(M)$.

Soit $x \in g(M)$. Alors il existe $m \in M$ tel que $x = g(m)$. Puisque $K \trianglelefteq_s M$, on en déduit qu'il existe un $r \in R$ tel que $rm \in K$. Alors $g(rm) = rg(m) = rx \in g(K)$; Ainsi $g(K) \trianglelefteq_s g(M)$. $\square$

Proposition 2.3.9. 1. Un facteur direct d'un semimodule wch-2 est wch-2.

2. Soit $M = M_1 \oplus M_2$ tel que chaque M_i est globalement invariant. Alors M est wch-2 ssi chaque M_i l'est.

Preuve :(1) Supposons que M est wch-2.

Soit $M = N \oplus K$ et soit $f : N \longrightarrow N$ un endomorphisme injectif de N . alors l'application $f \oplus Id_K : M = N \oplus K \rightarrow M = N \oplus K$ définie par $n + k \mapsto (f \oplus Id_K)(n + k) = f(n) + k$ est un endomorphisme injectif de M et alors $(f \oplus Id_K)(M) \leq_s M$. Puisque $(f \oplus Id_K)(M) \leq f(N) \oplus K$, on déduit d'après la Proposition 2.2.9 que $f(N) \oplus K \leq_s N \oplus K$ et d'après la Proposition 2.2.13 que $f(N) \leq_s N$, donc N est wch-2.

(2) $\implies$ D'après (1).

$\Longleftarrow$) Soit $f : M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M = M_1 \oplus M_2$ un endomorphisme injectif de $M = M_1 \oplus M_2$.

On a $f(M_1) \oplus f(M_2) \subseteq f(M_1 \oplus M_2) \subseteq M_1 \oplus M_2$. D'après l'hypothèse on a $f(M_1) \leq_s M_1$ et $f(M_2) \leq_s M_2$, et d'après la Proposition 2.2.13, on obtient $f(M_1) \oplus f(M_2) \leq_s M_1 \oplus M_2$ et par conséquent $f(M_1 \oplus M_2) \leq_s M_1 \oplus M_2$. $\square$

2.3.3 Sur les semimodules co-hopfiens de type 3

Définition 2.3.10. Un R -semimodule non nul ${}_R M$ est dit faiblement co-hopfien-3 (noté wch-3) si tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$ est sessentiel i.e $f(M) \leq M$.

Proposition 2.3.11. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -semimodule à gauche M .

1. M est wch-3.
2. Si m et m' sont des éléments distincts de M alors pour tout monomorphisme $f : M \rightarrow M$, il existe des éléments distincts $f(m_1)$ et $f(m_2)$ de $f(M)$ vérifiant $f(m_1)\rho_{(m,m')}f(m_2)$.

Preuve : D'après la Définition 2.3.10 et le Lemme 2.1.8. □

Proposition 2.3.12. *Si M est wch-3, alors M est wch-1. Preuve :* D'après la Proposition 2.2.3. □

Comme ci-dessus, on montre les résultats qui suivent.

Proposition 2.3.13. 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R -semimodule à gauche M .*

- (a) *M est wch-3.*
- (b) *Il existe un sous-semimodule K de M tel que $g(K) \leq M$ pour tout endomorphisme injectif $g \in \text{End}(M)$.*

2. *Un facteur direct d'un semimodule wch-3 est wch-3.*

3. *soit $M = M_1 \oplus M_2$ tel que chaque M_i est globalement invariant. Alors M wch-3 ssi chaque M_i l'est.*

Proposition 2.3.14. *Tout semimodule R -simple est wch-3*

Preuve : Facile □

2.3.4 Exemples de semimodules co-hopfiens

Exemple 2.3.15. Reprenons le semimodule $(M, \oplus, \star)$ de l'Exemple 2.2.4. Montrons que M est wch-1, wch-2 et wch-3.

Soit $g : M \rightarrow M$ un endomorphisme injectif de M . Alors g vérifie la propriété suivante :

$$\forall m, m' \in M : m \leq m' \implies g(m) \leq g(m').$$

Cette propriété associée à l'injectivité de g font qu'il existe un unique endomorphisme injectif de M , notamment l'identité sur M . On déduit que

l'image de tout endomorphisme injectif de M est à la fois faiblement essentiel, semiessentiel et essentiel et donc que M est wch-1, wch-2 et wch-3.

Exemple 2.3.16.

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et soit $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$ le semianneau où $\forall a, b \in \mathbb{N}, a \oplus b = \text{pgcd}(a, b)$ et $a \odot b = \text{ppcm}(a, b)$.

Alors $\mathbb{N}$ est un $\mathbb{N}$ -semimodule à gauche. Tout sous-semimodule de $\mathbb{N}$ est de la forme $\langle p \rangle = p\mathbb{N} = \{pn/n \in \mathbb{N}\}$ où $p \in \mathbb{N}$ et pn est le produit usuel de p et n ([8]). Tout sous-semimodule $p\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ est semiessentiel dans $\mathbb{N}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $rn \in p\mathbb{N}$.

Alors l'image de tout endomorphisme injectif de $\mathbb{N}$ est de la forme $p\mathbb{N}$, et donc on en déduit que $\mathbb{N}$ est wch-2.

Exemple 2.3.17.

Soit l'ensemble $R = \{0; 1\}$.

$(R; +; \times)$ et $(R; +; \otimes)$ (où pour tout $i, j \in R, i + j = \max(i, j), i \times j = 0, i \otimes j = 0$ except $1 \otimes 1 = 1$) sont des semianneaux. ([36]) Il est facile de voir que $({}_R R; +; \times)$ et $({}_R R; +; \otimes)$ sont deux semimodules R -simples, donc ils sont wch-3 d'après la Proposition 2.3.14

Chapitre 3

Fidélité complète du foncteur tensoriel sur les semi-modules

3.1 Introduction

La généralisation des modules aux semi-modules est aussi important que la généralisation des espaces vectoriels aux modules. De plus, la théorie des semi-modules généralise les idées et méthode de la théorie des treillis, l'algèbre universelle et les monoïdes abélien. Les semi-anneaux et semi-modules ont plus d'applications que les anneaux et modules. De nos jours, les semi-anneaux et semi-modules sont utilisés dans beaucoup de domaines comme l'algèbre tropical, la géométrie tropical, l'informatique, l'analyse idempotent et la physique théorique. En théorie des modules, le produit tensoriel de deux modules est bien connu [3]. Cependant sa généralisation à la théorie des semi-modules n'est pas unique. Katsov [20] et Takahashi [25] définissent deux différentes notions du produit tensoriel sur la théorie des semi-modules.

Abuhlail décrit cette différences entre les deux notions du produit tensoriel dans [2]. Il affirme que le produit tensoriel de Katsov est plus naturel.

Dans cet article, nous utilisons le produit tensoriel de Katsov pour introduire la notion d'annulateur sur la théorie des semi-modules. Cette notion permet d'investir les propriétés de la fidélité du foncteur tensoriel sur les semi-modules comme une généralisation de la fidélité foncteur tensoriel sur modules.

Cet article est organisé de la manière suivante :

-Dans la section 1, nous rappelons quelques notions sur les semi-anneaux, semi-modules, générateurs, foncteurs semi-modules et nous donnons la construction de Katsov et Takahashi. - In section 2, nous introduisons la notion d'annulateur tensoriel et une caractérisation de la complète fidélité tensorielle des semi-modules.

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous donnons quelques notions et notations que nous utiliserons dans la suite

3.2.1 Notions de base

Définition 3.2.1. *Un semi-anneau est une structure algébrique $(R, +, \cdot, 0_R, 1_R)$ constitué d'un sous-ensemble non vide R muni des opérations "+" (addition) et "." (multiplication) telles que :*

1. $(R, +, 0_R)$ est un monoïde abélien d'élément neutre 0_R ;
2. $(R, \cdot, 1_R)$ est un monoïde d'élément neutre 1_R ;

3. $a(b + c) = ab + ac$ et $(b + c)a = ba + ca$ pour tout $a, b, c \in R$;

4. $a.0_R = 0_R = 0_R.a$ pour tout $a \in R$.

Pour simplifier nous notons $1 = 1_R$ and $0 = 0_R$.

Définition 3.2.2. *Un R -semi-module à gauche ${}_R M$ est un monoïde commutatif $(M, +)$ ayant élément 0_M , et muni de l'opération $R \times M \rightarrow M$ définie par $(a, x) \mapsto ax$ telle que, pour tous $a, b \in R$, pour tous $x, x' \in M$:*

- (1) $a(x + x') = ax + ax'$; (2) $(a + b)x = ax + bx$;
- (3) $(ab)x = a(bx)$; (4) $1.x = x$; (5) $0.x = 0_M = a.0_M$.

Pour simplifier nous notons $0 = 0_R = 0_M$

Remarque 3.2.3. *Symétriquement un R -semi-module à droite est définie de la même manière.*

Définition 3.2.4. *Soit M et N deux R -semi-modules à gauche. Une fonction $f : M \rightarrow N$ est un homomorphisme de R -semi-modules (R -linéaire) si pour tout $m_1, m_2 \in M$ et $r \in R$, on a : $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ and $f(rm) = rf(m)$.*

Définition 3.2.5. *Soit $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{(\lambda \in \Lambda)}$ une classe non vide de R -semi-modules à gauche. Un R -semi-module à gauche ${}_R M$ est généré par $\mathcal{U}$ (ou $\mathcal{U}$ -génééré), si pour tout R -semi-module ${}_R N$ et tout R -semi-linéaire homomorphisme $f, g : {}_R M \rightarrow {}_R N$, si $f \circ h = g \circ h$ pour tout R -semi-linéaire homomorphisme $h : {}_R U_\lambda \rightarrow {}_R M$, alors $f = g$. De manière équivalente si $f \neq g$ il existe $h : {}_R U_\lambda \rightarrow {}_R M$ telle que $f \circ h \neq g \circ h$.*

Un R -semi-module ${}_R M$ est un générateur si tout R -semi-module est ${}_R M$ -génééré.

Proposition 3.2.6. [1]

Un ${}_R M$ est un R -semi-module. Pour un R -semi-module ${}_R X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. ${}_R X$ est ${}_R M$ -généré ;
2. Il existe un homomorphisme surjectif ${}_R M^{(\Lambda)} \longrightarrow {}_R X \longrightarrow 0$ où Λ est un ensemble dénombrable.

Proposition 3.2.7. [13]

Pour tout R -semi-module ${}_R M$, il existe un ensemble Λ et un homomorphisme surjectif de R -semi-modules

$$R^{(\Lambda)} \longrightarrow {}_R M \longrightarrow 0.$$

En particulier, ${}_R R$ est un générateur.

3.2.2 Semimodules quotients

[13]

Soit M un R -semi-module. Une relation d'équivalence $\equiv$ sur M est dit de congruence, si pour tout $m, m', m'' \in M$ et $r \in R$ on a :

$$m \equiv m' \implies [m + m'' \equiv m' + m'' \quad \text{and} \quad mr \equiv m'r].$$

L'ensemble $R - Cong(M)$ des classes de congruences sur M est non vide comme, il contient la *classe de congruence triviale* $\equiv_t$ et la *classe de congruence universelle* $\equiv_u$ given by :

$$m \equiv_t m' \iff m = m' \quad \text{and} \quad m \equiv_u m' \quad \text{for all} \quad m, m' \in M.$$

L'ensemble des classes correspondant à toute $\equiv \in R - Cong(M)$ est notée $M/\equiv$ et est une R -semi-module, et il existe un homomorphisme surjectif de R -semi-modules $\pi_{\equiv} : M \longrightarrow M/\equiv$.

Tout R -sous-semi-module $L \subseteq M$ induit deux relations de congruences sur M :

- the *La relation de Bourne* : $m \equiv_L m' \iff m+l = m'+l'$ pour $l, l' \in L$
- the *La relation de Lizuka* : $m[\equiv]_L m' \iff m + l + m'' = m' + l' + m''$ pour $l, l' \in L$ and $m'' \in M$.

Le R -semi-module $M/L = M/\equiv_L$ est dit *R-semi-module quotient de M par L* , nous avons un homomorphisme surjectif de R -semi-modules

$$\begin{aligned} \pi_L : M &\longrightarrow M/L \\ m &\mapsto \overline{m} \end{aligned}$$

3.2.3 Produit tensoriel

Produit tensoriel de Katsov

Construction Nous rappelons la construction du produit tensoriel de semi-modules défini par KATSOV [20].

Soit M_R un R -semi-module à gauche et ${}_R N$ un R -semi-module à droite. Une application R -équilibrée $g : M \times N \longrightarrow G$, où G est monoïde abélien est une application bilinéaire telle que $g(mr, n) = g(m, rn)$ pour tout $m \in M, r \in R$, et $n \in N$. Soit $T = \mathbb{N}^{(M \times N)}$ un monoïde libre de base $M \times N$, et $F = \mathbb{N}^{(M \times N)} \times \mathbb{N}^{(M \times N)}$

Tout élément T peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de l'ensemble : $\{\delta_{(m,n)} | (m,n) \in M \times N\}$ où $\delta_{(m,n)}$ est la fonction Kronecker delta.

Soit $\equiv$ la relation de congruence générée par les équivalences

$$\delta_{(m+m',n)} \equiv (\delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)}) \quad , \quad \delta_{(m,n+n')} \equiv (\delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')}) \quad , \quad \delta_{(mr,n)} \equiv \delta_{(m,rn)}$$

where $m, m' \in M, n, n' \in N$ et $r \in R$.

Soit $\iota : M \times N \longrightarrow T$ l'injection canonique de $M \times N$ into T , et $\phi : M \times N \longrightarrow T/\equiv$ la composition de ι et de la projection $\pi_{\equiv} : T \longrightarrow T/\equiv$: so $\phi(m, n) = \delta_{(m,n)}/\equiv$.

Définition 3.2.8. *Le produit tensoriel de Katsov de M et N sur R est le N -semi-module $M \otimes_R N = (T/\equiv, \phi)$. Nous notons $\phi(m, n) = m \otimes_R n$.*

Propriétés

Proposition 3.2.9. 1. *Soit M_R et ${}_R N$ deux R -semi-modules. Pour tout*

$m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$, and $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$(a) (m + m') \otimes_R n = m \otimes_R n + m' \otimes_R n ;$$

$$(b) m \otimes_R (n + n') = m \otimes_R n + m \otimes_R n' ;$$

$$(c) mr \otimes_R n = m \otimes_R rn ;$$

$$(d) k(m \otimes_R n) = (km) \otimes_R n = m \otimes_R (kn) ;$$

$$(e) 0_M \otimes_R n = 0_{M \otimes_R N} = m \otimes_R 0_N .$$

2. *Tout $u \in M \otimes_R N$ est de la forme $u = \sum_{k=1}^n m_k \otimes_R n_k$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $m_k \in M, n_k \in N$ for any $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Proposition 3.2.10. (Propriété universelle du produit tensoriel).

Pour tout monoïde abelian G et application R -équilibrée $\beta : M \times N \longrightarrow G$, il existe un unique homomorphisme de monoïdes $\gamma : M \otimes_R N \longrightarrow G$ rendant le diagram suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M \times N & & \\ \downarrow \tau & \searrow \beta & \\ M \otimes_R N & \xrightarrow{\gamma} & G \end{array}$$

Proof [34]

□

Proposition 3.2.11. *Soit R un semi-anneau, $k \in \mathbb{N}$ et $M, M_1, N_2, \dots, M_p, N_p$ les R -semi-modules. Nous avons les assertions suivantes :*

1. *Il existe un unique isomorphisme :*

$$M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \longrightarrow (M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 : m_1 \otimes (m_2 \otimes m_3) \longmapsto (m_1 \otimes m_2) \otimes m_3$$

2. *Il existe un unique isomorphisme : $M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M_2 \otimes M_1 : m_1 \otimes m_2 \longmapsto m_2 \otimes m_1$*

3. *Il existe un unique isomorphisme : $R \otimes M_1 \xrightarrow{\phi} M_1 : r \otimes m_1 \longmapsto \phi(r \otimes m_1) = rm_1$*

4. *Soit M_i, N_i un R -semi-modules, $1 \leq i \leq p$, et let $f_i : M_i \longrightarrow N_i$ une collection d'application R -linéaire. Il existe une unique application linéaire :*

$$\begin{aligned} M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_p &\longrightarrow N_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes N_p \\ m_1 \otimes m_2 \otimes \dots \otimes m_p &\longmapsto f_1(m_1) \otimes f_2(m_2) \otimes \dots \otimes f_p(m_p) \end{aligned}$$

5. $M \otimes (\bigoplus_{i \in I} N_i) \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes N_i)$ pour tout ensemble I .

6. *Soit M, N deux R -semi-modules libres de bases $m_i (i \in I)$ and $n_j (j \in J)$ respectively.*

Alors $M \otimes N$ est un R -semi-module libre de base $m_i \otimes n_j (i \in I, j \in J)$.

Proof [34].

□

Produit tensoriel de Takahashi

Le produit tensoriel de semi-modules sur un semi-anneau défini par Takahashi [11].

Soit M_R un R -semi-module à gauche et ${}_R N$ un R -semi-module à gauche. Soit $T = R^{(M \times N)}$ un free Abelian monoid (hence a $\mathbb{N}$ -semi-module) with basis $M \times N$, et $F = R^{(M \times N)} \times R^{(M \times N)}$

La base canonique de T est donné par les éléments de l'ensemble : $\{\delta_{(m,n)} | (m,n) \in M \times N\}$ où $\delta_{(m,n)}$ est la fonction de Kronecker delta.

Soit $F_0 \subset F$ est le $\mathbb{N}$ -subsemi-module symétrique généré par tous les éléments de la forme : $(\delta_{(m+m',n)}, \delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)}), (\delta_{(m,n)} + \delta_{(m',n)}, \delta_{(m+m',n)}), (\delta_{(m,n+n')}, \delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')}), (\delta_{(m,n)} + \delta_{(m,n')}, \delta_{(m,n+n')}),$
 $(\delta_{(mr,n)}, \delta_{(m,rn)}), (\delta_{(m,rn)}, \delta_{(mr,n)})$ où $m, m' \in M, n, n' \in N$ and $r \in R$.

Considerons la relation de congruence ρ sur T définie par ;

$$f \rho g \iff f + h = f + h' \text{ for some } (h, h') \in F_0$$

Le produit tensoriel de Takahashi est défini par $M \boxtimes N = T/\rho$ and we notice that :

- i) the map $\tau : M \times N \longrightarrow M \boxtimes N, (m, n) \longmapsto m \boxtimes n$ est R -équilibré
- ii) $M \boxtimes N$ est un monoïde abélien simplifiable
- iii) Pour tout monoïde simplifiable G et toute application R -équilibrée $\beta : M \times N \longrightarrow G$, il existe un unique homomorphisme de monoïdes $\gamma : M \boxtimes N \longrightarrow G$ tel que $\gamma \circ \tau = \beta$

3.3 Résultats sur l'anneau tensoriel

Lemme 3.3.1. Soit L un sous-semi-module d'un R -semi-module à gauche M et soit $g : M \longrightarrow M/L$ la surjection canonique. Soit N un R -semi-module à gauche.

If $f : M \longrightarrow N$ est un homomorphisme semi-linéaire , k -régulière qui vérifie $\text{Ker } f \subseteq \text{Ker } g$, il existe est unique un homomorphisme semi-linéaire $h : N \longrightarrow M/L$ tel que $h \circ f = g$.
Moreover $\text{Ker } h = f(\text{Ker } g)$.

Proof : Puisque $f : M \longrightarrow N$ est surjective, alors pour chaque $n \in N$, il existe un $m \in M$ tel que $f(m) = n$; soit h l'application :

$$\begin{aligned} h : N &\longrightarrow M/L \\ n &\mapsto h(n) = g(m) \end{aligned}$$

Il exist un autre élément $m' \in M$ tel que $f(m') = n$, alors $f(m) = f(m')$. Comme f est k -régulier, we have $f(m) = f(m') \iff m + k = m' + k'$ pour tout $k, k' \in \text{Ker } f$; Donc $g(m) = g(m')$ car $\text{Ker } f \subseteq \text{Ker } g$. Ainsi, l'application h is est bien définie et nous avons $h \circ f = g$. Supposons qu'il existe une aplication $h' : N \longrightarrow M/L$ satisfaisant $h' \circ f = g$. Il est facile de vérifier que $h' = h$.

De même, il est clair que $f(\text{Ker } g) \subseteq \text{Ker } h$.

Soit $n \in \text{Ker } h$. Alors, il existe $m \in M$ tel que $f(m) = n$ because f is surjective. By Definition of g , $g(m) = h(n) = 0$ montrant que $m \in \text{Ker } g$; so $n \in f(\text{Ker } g)$ et Donc $\text{Ker } h \subseteq f(\text{Ker } g)$. Ainsi $\text{Ker } h = f(\text{Ker } g)$. $\square$

Définition 3.3.2. Soit U_R et ${}_R M$ deux semi-modules. On définit l'annulateur dans M de U par : $T\text{Ann}_M(U) = \{m \in M / u \otimes m = 0 \quad \forall u \in U\}$
Nous disons que U_R est ${}_R M$ -fidèle tensoriel dans ce cas $T\text{Ann}_M(U) = \{0\}$

Lemme 3.3.3. $T\text{Ann}_M(U)$ est sous-semi-module soustractif de M .

Proof

– Il est clair que $TAnn_M(U)$ est un sous-semi-module de M .

– Montrons que $TAnn_M(U)$ est soustractif.

Supposons que $m \in M$, $m_1 \in TAnn_M(U)$ et $m_1 + m \in TAnn_M(U)$.

Donc $u \otimes (m_1 + m) = u \otimes m_1 + u \otimes m = 0$ for any $u \in U$.

Puisque $u \otimes m_1 = 0$ for any $u \in U$, alors $u \otimes m = 0$ pour tout $u \in U$,

donc $m \in TAnn_M(U)$.

Ainsi $TAnn_M(U)$ is subtractive.

□

Theorem 3.3.4. Soit ${}_R M, {}_R N$, et ${}_R U$ deux semi-modules sur un semi-anneau R .

1. $TAnn_M(U)$ est le plus petit sous-semi-module K de M tel que U soit (M/K) -tensor-faithful.
2. Soit $f : {}_R M \rightarrow {}_R N$ est un homomorphisme alors $f(TAnn_M(U)) \subseteq TAnn_N(U)$. En particulier, $TAnn_M(U)$ est stable par les endomorphismes f de M .
3. If $f : {}_R M \rightarrow {}_R N$ est un homomorphisme semi-linéaire et k -régulier, et $Ker f \subseteq TAnn_M(U)$, alors $f(TAnn_M(U)) = TAnn_N(U)$.

Proof

1. – Let us show that U is $(M/TAnn_M(U))$ -tensor-faithful.

Let $\bar{m} \in TAnn_{M/TAnn_M(U)}(U)$, then $u \otimes \bar{m} = 0$ for any $u \in U$. Hence $u \otimes m = 0$ for any $u \in U$, so $m \in TAnn_M(U)$. Therefore $\bar{m} = \bar{0}$ as desired.

- Soit K un sous-semi-module soustractif de M de U est (M/K) -tensor-faithful.

Soit $m \in TAnn_M(U)$ et considerons $\bar{m} = \{m' \in M / m + k = m' + k' \text{ for some } k, k' \in K\} \in M/K$.

Soit $m' \in \bar{m}$, alors il existe $k, k' \in K$ tel que $m + k = m' + k'$. Let $u \in U$, on a : $u \otimes (m' + k') = u \otimes (m + k) \iff u \otimes m' + u \otimes k' = u \otimes m + u \otimes k$. Comme $m \in TAnn_M(U)$ et U is (M/K) -fidèle tensoriel, alors $u \otimes m = 0$ et $u \otimes k' = u \otimes k = 0$, ainsi $u \otimes m' = u \otimes m = 0$. Donc $u \otimes \bar{m} = 0$ pour tout $u \in U$, donc $\bar{m} \in TAnn_{M/K}(U) = 0$, D'où $\bar{m} = \bar{0} \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in K$ tel que $m + k_1 = k_2$.

Comme K est soustractif, on a $m \in K$.

on en déduit $TAnn_M(U) \subseteq K$.

2. Soit $f : {}_R M \rightarrow {}_R N$ un homomorphisme de R -semi-modules.

Le foncteur $(U \otimes -)$ associé à f est défini par l'homomorphisme de $\mathbb{N}$ -semi-modules :

$$1_U \otimes f : U \otimes M \longrightarrow U \otimes N$$

$$u \otimes m \longmapsto u \otimes f(m).$$

Supposons que $n \in f(TAnn_M(U))$, qu'il existe $m \in TAnn_M(U)$ tel que $n = f(m)$. Nous avons $u \otimes m = 0$ pour tout $u \in U$, donc $(1_U \otimes f)(u \otimes m) = u \otimes f(m) = u \otimes n = 0$ pour tout $u \in U$, donc $n \in TAnn_N(U)$. Ainsi $f(TAnn_M(U)) \subseteq TAnn_N(U)$.

En particulier, si $f : M \rightarrow M$ est un endomorphisme, alors on a $f(TAnn_M(U)) \subseteq TAnn_M(U)$ ce qui montre que $TAnn_M(U)$ est stable par les endomorphismes de M .

3. Soit $f : {}_R M \rightarrow {}_R N$ un homomorphisme de R -semi-modules qui est surjectif, k -régulier avec $Ker f \subseteq TAnn_M(U)$.

Soit $g : M \rightarrow M/TAnn_M(U)$ la surjection canonique. Ainsi, on a $Ker f \subseteq Kerg$ et d'après le Lemme 3.3.1, il existe un unique homomorphisme $h : N \rightarrow M/TAnn_M(U)$ tel que $h \circ f = g$, et $Ker(h) = f(TAnn_M(U))$. Donc, il suffit de montrer que $Ker h = TAnn_N(U)$.

- Soit n un élément de $Ker h$. Comme f est surjectif, il existe $m \in M$ tel que $f(m) = n$. Donc $g(m) = hf(m) = h(n) = 0$, et par conséquent $m \in Kerg$. Mais $Kerg = TAnn_M(U)$ car $TAnn_M(U)$ est soustractif d'après le Lemme 3.3.3; alors $u \otimes m = 0$ pour tout $u \in U$.

Comme $u \otimes n = u \otimes f(m) = (1_U \otimes f)(u \otimes m) = (1_U \otimes f)(0) = 0$ pour tout $u \in U$, so $n \in TAnn_N(U)$, thus $Kerg \subseteq TAnn_N(U)$.

- Inversement soit n un élément of $TAnn_N(U)$.

Alors $u \otimes n = 0$ pour tout $u \in U$. Ainsi $u \otimes h(n) = (1_U \otimes h)(u \otimes n) = (1_U \otimes h)(0) = 0$ pour tout $u \in U$, ce qui implique que $h(n) \in TAnn_{M/TAnn_M(U)}(U) = 0 \Rightarrow n \in Ker h$, donc $TAnn_N(U) \subseteq Ker h$.

Nous concluons que $f(TAnn_M(U)) = Ker h = TAnn_M(U)$.

□

Proposition 3.3.5. 1. Si $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont un R -semi-modules à gauche et U un R -semi-module à droite, alors :

$$TAnn_{\oplus_A M_\alpha}(U) = \bigoplus_A TAnn_{M_\alpha}(U).$$

2. Si $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont des R -semi-modules à droite et M un R -semi-module à gauche, alors : $TAnn_M(\oplus_A U_\alpha) = \bigcap_A TAnn_M(U_\alpha)$.

Proof

1. - Soit $m = (m_\alpha)_{\alpha \in A} \in TAnn_{\oplus_A M_\alpha}(U) = \{m \in \oplus_A M_\alpha / u \otimes m = 0 \forall u \in U\}$.

Alors il existe un ensemble fini $I \subset A$ tel que $m = \sum_{\alpha \in I} i_\alpha(m_\alpha)$ où $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow \oplus_A M_\alpha$ est l'injection canonique.

So for any $u \in U$, $u \otimes m = u \otimes \sum_{\alpha \in I} i_\alpha(m_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} u \otimes i_\alpha(m_\alpha) = 0$, donc pour tout $u \in U$, $u \otimes m_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in I$, car $m_\alpha \in TAnn_{M_\alpha}(U) \ \forall \alpha \in I$, alors $m = (m_\alpha)_{\alpha \in A} \in \oplus_A TAnn_{M_\alpha}(U)$.

Ainsi $TAnn_{\oplus_A M_\alpha}(U) \subseteq \oplus_A TAnn_{M_\alpha}(U)$.

- Inversement supposons $m = (m_\alpha)_{\alpha \in A} \in \oplus_A TAnn_{M_\alpha}(U)$.

Alors $m_\alpha \in TAnn_{M_\alpha}(U) \ \forall \alpha \in A$.

Il existe un sous-ensemble fini $I \in A$ such that $m = \sum_{\alpha \in I} \pi_\alpha(m_\alpha)$.

Soit u un élément de U . So $u \otimes m = u \otimes \sum_{\alpha \in I} \pi_\alpha(m_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} u \otimes \pi_\alpha(m_\alpha) = 0$ car $u \otimes \pi_\alpha(m_\alpha) = 0$, ainsi $u \otimes m = 0 \ \forall u \in U$, car $m \in TAnn_{\oplus_A M_\alpha}(U)$.

Donc $\oplus_A TAnn_{M_\alpha}(U) \subseteq TAnn_{\oplus_A M_\alpha}(U)$.

Nous concluons que : $\oplus_A TAnn_{M_\alpha}(U) = TAnn_{\oplus_A M_\alpha}(U)$.

2. Utilisons (5) of Proposition 3.2.11 et une technique similaire à la précédente.

□

Theorem 3.3.6. 1. Si U_R génère V_R , alors : $TAnn_M(U) \leq TAnn_M(V)$.

2. U_R est ${}_R M$ -fidèle tensoriel si tout homomorphisme $f : N \rightarrow M$, tel que $U \otimes f = 0$ implique que $f = 0$.

3. $TAnn_R(U) = r_R(U)$ où $r_R(U) = \{r \in R / u.r = 0 \ \forall u \in U\}$.

Proof

1. Supposons que U génère V , alors il existe $f : U^{(\wedge)} \longrightarrow V$ surjectif où $\wedge$ est un ensemble.

Cependant, nous avons $U^{(\wedge)} = \oplus_\wedge U_\alpha$ où $U_\alpha = U \ \forall \alpha \in \wedge$; ainsi

d'après Proposition 3.3.5, on a $TAnn_M(\oplus_\alpha U_\alpha) = \bigcap_\alpha TAnn_M(U_\alpha) = TAnn_M(U)$.

Soit m_0 un élément de $TAnn_M(U) = TAnn_M(\oplus_\alpha U_\alpha)$.

Considérons l'homomorphisme de $\mathbb{N}$ -semi-modules

$$f \otimes 1_M : \oplus_\alpha U_\alpha \otimes M \longrightarrow V \otimes M : u \otimes m \longmapsto f(u) \otimes m.$$

Let $v \in V$ alors il existe $u \in \oplus_\alpha U_\alpha$ such that $v = f(u)$. Ainsi $v \otimes m_0 = f(u) \otimes m_0 = (f \otimes 1_M)(u \otimes m_0) = 0$, car $u \otimes m_0 = 0$; therefore $m_0 \in TAnn_M(V)$.

Hence, $TAnn_M(U) \subseteq TAnn_M(V)$.

2. - Supposons que U is M -fidèle tensoriel et considérons $f : N \longrightarrow M$.

On a $U \otimes f = 0 \iff u \otimes f(n) = 0 \forall u \in U$ and $\forall n \in N \implies f(n) \in TAnn_M(U) \forall n \in N$.

Since U est M - fidèle tensoriel $TAnn_M(U) = 0$ ainsi $f(n) = 0 \forall n \in N \iff f = 0$.

- Inversement supposons que $\forall f : N \longrightarrow M, U \otimes f = 0 \implies f = 0$.

Considérons l'injection canonique $i : TAnn_M(U) \longrightarrow M$.

Il est clair que $U \otimes i = 0$, alors $i = 0$ par hypothèse. Comme i est une injection, on conclut que $TAnn_M(U) = 0$.

3. S déduit de l'isomorphisme dans la Proposition 3.2.11,

$$\phi : U \otimes R \longrightarrow U$$

$$u \otimes r \longmapsto u.r$$

□

Définition 3.3.7. *Un semi-module W_R est dit complètement fidèle tensoriel si $TAnn_M(W) = 0$ pour tout R -semi-module à gauche ${}_R M$.*

Proposition 3.3.8. 1. R_R est complètement fidèle tensoriel;

2. Tout générateur $SMOD\text{-}R$ est complètement fidèle.

Proof

1. Soit ${}_R M$ un R -semi-module à gauche. D'après Proposition 3.2.11, considérons l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} R \otimes M &\stackrel{\phi}{\cong} M \\ r \otimes m &\mapsto rm \end{aligned}$$

Soit $m \in TAnn_M(R)$, alors $1 \otimes m = 0 \Rightarrow m = 1.m = \phi(1 \otimes m) = 0$, ainsi $TAnn_M(R) = 0$. Donc $TAnn_M(R) = 0$ for any ${}_R M$ dans $R\text{-SMOD}$,
Donc R_R est complètement fidèle tensoriel.

2. Soit W_R un générateur dans $SMOD\text{-}R$.

Donc W_R génère R_R , et d'après le théorème 3.3.6, on a $TAnn_M(W) \subseteq TAnn_M(R)$ pour tout M dans $R\text{-SMOD}$. Comme $TAnn_M(R) = 0$ for any M dans $R\text{-SMOD}$, alors $TAnn_M(W_R) = 0$ pour tout ${}_R M$ in $R\text{-SMOD}$; donc W est complètement fidèle tensoriel.

□

Remarque 3.3.9. Avec le produit tensoriel de Takahashi l'isomorphisme $R \otimes M \cong M$ n'a pas lieu, et R_R n'est pas complètement fidèle tensoriel.

Corollaire 3.3.10. Les assertions suivantes sont équivalentes pour tout semi-module W_R :

1. W_R est complètement fidèle tensoriel;
2. Pour tout homomorphisme f dans $R\text{-SMOD}$, si $W \otimes f = 0$ alors $f = 0$.

Proof S déduit de la deuxième partie du théorème 3.3.6.

□

Chapitre 4

Sur les semimodules fortement semisimples

Introduction

La notion de "module simple" en théorie des anneaux et modules est un outil fondamental et a été généralisée de différentes façons dans la théorie des semianneaux et des semi-modules par de nombreux auteurs[13], [29].

Soit A un anneau et M un A -module à gauche, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. M est simple ;
2. M possède seulement deux sous-modules : 0 et M ;
3. $M \cong \frac{A}{I}$ où I est un idéal maximal de A ;
4. il existe seulement deux relations d'équivalence compatible avec la structure de module de M : la relation d'équivalence triviale et la relation d'équivalence universelle ;

Mais ces trois propriétés ne sont pas équivalentes en théorie des semi-anneaux et semimodules et conduisent à trois définitions de "semimodule simple" et "semimodule semisimple".

Les propriétés les plus étudiées concernant les "semimodules simples" and les "semimodules semisimples" sont les propriétés (2) et (3) and leurs variantes sur les semimodules soustractifs.

D'après nos investigation, jusqu'à maintenant, il n'existe pas une caractérisation complète des "semimodules simples" et des "semimodules semisimples" dans le sens de (4).

Dans cet article, nous caractérisons la classe des semimodules fortement semisimples dans la catégorie des semimodules soustractifs et simplifiables. Ce papier s'organise comme suit :

- section 1 : nous étudions une famille de sous-semimodules appelée sous-semimodules fortement indépendants.
- section 2 : Nous introduisons la notion de semimodule fortement simple et semimodule fortement semisimple.

4.1 Préliminaires

Une relation de congruence sur un semimodule M est une relation d'équivalence compatible avec la structure de semimodule de M .

Un semimodule M est dit fortement simple si toute relation de congruence définie sur M est triviale ou universelle.

Pour les notions de base et la notation en "théorie des modules" et "théorie des semimodules", voir [1], [?], [35] et [13].

Néanmoins, nous rappelons quelques définitions et notations utiles pour la suite.

Tous les semianneaux sont associatifs et munis de l'élément identité 1 (Si R est un semianneau, nous supposons que $1 \neq 0$), tous les semimodules sont unitaires et toutes les extensions de semianneaux contiennent l'identité usuelle.

- Soit M un R -semimodule à gauche. Une relation d'équivalence ρ dans M est une relation de congruence sur R (R -congruence) si : $m\rho m'$ et $n\rho n' \implies (m+n)\rho(m'+n')$ et $(rm)\rho(rm')$, $\forall m, m', n, n' \in M$ et $r \in R$. L'ensemble de toutes les relations de R -congruence sur M , $R\text{-cong}(M)$, est partiellement ordonné par la relation $\leq$ définie par $\rho \leq \rho'$ si et seulement si $m\rho m' \implies m\rho' m' \forall m, m' \in M$. Pour $m, m' \in M$, $\rho_{(m, m')}$ est le plus petit élément ρ de $R\text{-cong}(M)$ satisfaisant $m\rho m'$.

- Soit N un sous-semimodule d'un R -semimodule à gauche M . Le sous-module N induit dans M une relation de R -congruence $\equiv_N$, appelée relation de Bourne : $\forall m, m' \in M ; m \equiv_N m' \iff \exists n, n' \in N$ tels que : $m+n = m'+n'$.

- M/N est le R -semimodule quotient $M/\equiv_N$ et $\bar{m} = [m] = m + N$ est un élément de M/N .

- Soient M_1 et M_2 des sous-semimodules d'un R -semimodule à gauche M .

*** Si M_1 et M_2 sont indépendants et engendrent M (i.e $M_1 \cap M_2 = 0$ et $M = M_1 + M_2$), alors M est la somme directe faible de ses sous-semimodules M_1 et M_2 . Et nous écrivons $M = M_1 \bar{\oplus} M_2$. Pour tout $m \in M$, il existe $m_1 \in M_1$ et $m_2 \in M_2$ tels que : $m = m_1 + m_2$ mais cette décomposition de m n'est pas unique ce qui fait que nous ne pouvons pas définir une projection avec le facteur direct faible.

*** Si M_1 et M_2 engendrent M (i.e $M = M_1 + M_2$), et la restriction de $\equiv_{M_2}$ à M_1 ainsi que la restriction de $\equiv_{M_1}$ à M_2 sont triviales, alors M est la somme directe de ses sous-semimodules M_1 et M_2 . Et nous écrivons $M = M_1 \oplus M_2$. pour tout $m \in M$, il existe une paire unique $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ telle que : $m = m_1 + m_2$. Avec cette somme directe, on peut définir une projection.

- Un sous-semimodule N d'un R -semimodule à gauche M est dit sous-tractif dans M si : $\forall (m, m') \in M^2$ ($m + m' \in N$ et $m \in N$) $\implies m' \in N$.

- N est fortement soustractif si pour tout $(m, m') \in M^2$: $m + m' \in N \implies m \in N$ et $m' \in N$.

- Un R -semimodule à gauche M est dit simplifiable si pour tous éléments m, m' et x de M : $m + x = m' + x \implies m = m'$.

4.2 Sous-semimodules fortement indépendants

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle famille de sous-semimodules indépendants en utilisant la restriction de la relation de congruence de Bourne définie sur un semimodule.

Définition 4.2.1. - Deux sous-semimodules T_1 et T_2 d'un R -semimodule à gauche M sont fortement indépendants si la restriction de $\equiv_{T_1}$ à T_2 et la restriction de $\equiv_{T_2}$ à T_1 sont triviales. On note $\text{Res eq}(T_1; T_2)$ est trivial.

- Un ensemble indexé de R -semimodules à gauche $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ est fortement indépendant si pour tout $\alpha \in A$, la restriction de $\equiv_{T_\alpha}$ à $\tilde{T}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} T_\beta$ et la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_\alpha}$ à T_α sont triviales. On note $\text{Res eq}(T_\alpha; \tilde{T}_\alpha)$ est trivial.

- Soit $M = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$ un R -semimodule à gauche, $M = \oplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ si et seulement si $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ est fortement indépendant.

Dans l'exemple qui suit, nous construisons deux sous-semimodules d'un R -semimodule à gauche qui sont fortement indépendants.

Exemple 4.2.2. [29].

Soit $R = \{0; 1\}$ le semianneau de Boole et l'ensemble $M = \{0; 1; a; b\}$.

On définit sur M les opérations suivantes :

$$0_R = 0_M = 0; 1_R = 1_M = 1$$

$$1 + 1 = 1 + a = 1 + b = a + b = 1; a + 0 = a + a = a; 0 + b = b + b = b$$

$$0 \times a = 0 \times b = a \times b = 0; 1 \times 1 = 1; 1 \times a = a \times a = a; 1 \times b = b \times b = b.$$

Alors $(M, +, \times, 0, 1)$ est un R -semimodule à gauche commutatif.

$\nexists \langle x, y \rangle \in \{0; a\} / 0 + x = b + y$ par conséquent :

$$m \equiv_{\{0; a\}} m' \iff m = m' \quad \forall m, m' \in \{0; b\}.$$

Donc la restriction de $\equiv_{\{0; a\}}$ à $\{0; b\}$ est triviale.

De même la restriction de $\equiv_{\{0; b\}}$ à $\{0; a\}$ est triviale, alors $\text{Res eq}(\{0; a\}; \{0; b\})$ est triviale. Par conséquent $\{0; a\}$ et $\{0; b\}$ sont fortement indépendants.

De plus $M = \{0; a\} + \{0; b\}$ donc $M = \{0; a\} \oplus \{0; b\}$.

Remarque 4.2.3. Soient T_1 et T_2 deux sous-semimodules d'un R -semimodule à gauche M . Si $\text{Res eq}(T_1; T_2)$ est triviale alors $T_1 \cap T_2 = 0$.

Proposition 4.2.4. Soit M un R -semimodule à gauche engendré par l'ensemble indexé de sous-semimodules $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$. Et soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous chaîne ordonnée de sous ensembles de A telle que $\forall n \in \mathbb{N} (T_\beta)_{\beta \in B_n}$ et $\{K; \sum_{\beta \in B_n} T_\beta\}$ soient fortement indépendants ($K \leq M$). Si $B = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, alors pour tout

$\beta \in B$, $Res\ eq(T_\beta; \tilde{T}_\beta)$ est triviale. De plus $Res\ eq(\{K; \sum_{\beta \in B} T_\beta\})$ est triviale.

Proof :

(1) Montrons que $Res\ eq(T_\beta; \tilde{T}_\beta)$ est triviale pour $\beta \in B$.

(a) Soit $\beta \in B$ et $t_1, t_2 \in T_\beta$ tels que : $t_1 \equiv_{\tilde{T}_\beta} t_2$

$$t_1 \equiv_{\tilde{T}_\beta} t_2 \iff \exists u_1, u_2 \in \tilde{T}_\beta = \sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma \text{ tels que } t_1 + u_1 = t_2 + u_2.$$

Puisque $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotonic, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\beta \in B_{n_0}$ et $u_1, u_2 \in \sum_{\gamma \in B_{n_0}} T_\gamma$. Mais $Res\ eq(T_\beta; \sum_{\gamma \in B_n} T_\gamma)$ est trivial pour tout $n \in \mathbb{N}$ ceci entraine que $Res\ eq(T_\beta; \sum_{\gamma \in B_{n_0}} T_\gamma)$ est triviale. D'où $t_1 \equiv_{\tilde{T}_\beta} t_2 \implies t_1 = t_2$. Ainsi la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_\beta}$ à T_β est triviale.

(b) Soit $t_1, t_2 \in \tilde{T}_\beta = \sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma$ tels que $t_1 \equiv_{T_\beta} t_2$.

Puisque $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotonic, alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\beta \in B_{n_1}$ et $t_1, t_2 \in \sum_{\gamma \in B_{n_1}} T_\gamma$. Mais $Res\ eq(T_\beta; \sum_{\gamma \in B_n} T_\gamma)$ est trivial pour tout $n \in \mathbb{N}$ ceci entraine que $Res\ eq(T_\beta; \sum_{\gamma \in B_{n_1}} T_\gamma)$ est triviale.

D'où $t_1 \equiv_{T_\beta} t_2 \implies t_1 = t_2$. Ainsi la restriction de $\equiv_{T_\beta}$ à $\tilde{T}_\beta$ est triviale.

(2) Prouvons que $Res\ eq(K; \sum_{\beta \in B} T_\beta)$ est triviale.

(a) Soient $t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B} T_\beta$ telle que : $t_1 \equiv_K t_2$.

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $t_1, t_2 \in \sum_{\gamma \in B_{n_2}} T_\gamma$. Mais $Res\ eq(K; \sum_{\gamma \in B_n} T_\gamma)$ est triviale pour tout $n \in \mathbb{N}$ cela entraine que $Res\ eq(K; \sum_{\gamma \in B_{n_2}} T_\gamma)$ est triviale. D'où $t_1 \equiv_K t_2 \implies t_1 = t_2$. Ainsi la restriction de $\equiv_K$ à $\sum_{\beta \in B} T_\beta$ est triviale.

(b) Soient $k_1, k_2 \in K$ tels que $k_1 \equiv_{\sum_{\beta \in B} T_\beta} k_2$

$$k_1 \equiv_{\sum_{\beta \in B} T_\beta} k_2 \implies \exists t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B} T_\beta \text{ tels que } k_1 + t_1 = k_2 + t_2.$$

$$t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B} T_\beta \implies \exists n_3 \in \mathbb{N} \text{ tel que } t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B_{n_3}} T_\beta.$$

Mais $\text{Res eq}(T_\beta; \sum_{\gamma \in B_n} T_\gamma)$ est triviale pour tout $n \in \mathbb{N}$ ceci entraine que :

$$\text{Res eq}(K; \sum_{\gamma \in B_{n_3}} T_\gamma) \text{ est triviale. D'où } k_1 \equiv_{\sum_{\beta \in B} T_\beta} k_2 \implies k_1 = k_2.$$

Donc la restriction de $\equiv_{\sum_{\beta \in B} T_\beta}$ à K est triviale.

□

4.3 Semimodules Fortement Semisimples

Dans cette section, nous étudions la notion de semimodule fortement simple et nous introduisons par la suite la classe des semimodules fortement semisimples. Puisque c'est fastidieux de manier les "relations d'équivalence" dans les démonstrations, nous allons souvent considérer que les semimodules sont soustractifs et simplifiables.

Définition 4.3.1. 1. *Un R -semimodule à gauche $T \neq 0$ est appelé austère-simple si l'ensemble de tous les sous-semimodules de T a exactement deux éléments 0 et T*

2. *Un R -semimodule à gauche $T \neq 0$ est appelé soustractif-simple si T ne possède aucun sous-semimodule soustractif à part 0 et T .*

3. *Un R -semimodule à gauche $T \neq 0$ est dit fortement simple si l'ensemble de toutes les relations de R -congruence sur T , $R - \text{cong}(T)$ contient uniquement ces éléments :*

$$\equiv_t \text{ la } R\text{-congruence triviale, et } \equiv_u \text{ la } R\text{-congruence universelle}$$

Remarque 4.3.2. *Si $T \neq 0$ est un R -semimodule à gauche alors :*

sont des semianneaux. ([36])

Il est facile de voir que $({}_R R; +; \times)$ et $({}_R R; +; \otimes)$ sont deux R -semimodules à gauche.

Si ρ est une relation de congruence sur ${}_R R$ qui n'est pas triviale, alors on a 0 ρ 1. Ceci montre que ρ est universelle. Donc $({}_R R; +; \times)$ et $({}_R R; +; \otimes)$ sont des R -semimodules à gauche fortement-simples.

Définition 4.3.5. Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ensemble indexé de sous-semimodules fortement-simples d'un R -semimodule à gauche M . Si $M = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$, alors $\bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ est appelé décomposition fortement semisimple de M . Un R -semimodule à gauche M est dit fortement semisimple s'il possède une décomposition fortement semisimple.

Proposition 4.3.6. Soit M un R -semimodule à gauche simplifiable engendré par l'ensemble indexé $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-semimodules fortement simples tel que pour tout $B \subset A$ et $K \leq M$, $(T_\beta)_{\beta \in B}$ et $\{K; \sum_{\beta \in B} T_\beta\}$ sont fortement indépendants.

Soit $N_B = K \oplus (\bigoplus_{\beta \in B} T_\beta)$ un sous-semimodule de M . Supposons que $\forall \alpha \in A$ la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale. Soit $\alpha_1 \in A \setminus B$ alors pour tout $\beta \in B_1 = B \cup \{\alpha_1\}$ nous avons : $\text{Res eq}(T_\beta; \tilde{T}_\beta)$ est triviale et de plus $\text{Res eq}(\{K; \sum_{\beta \in B_1} T_\beta\})$ est triviale.

Proof :

Soit $\alpha_1 \in A \setminus B$ et posons $B_1 = B \cup \{\alpha_1\}$.

(1) Montrons que $\text{Res eq}(T_\beta; \tilde{T}_\beta)$ est triviale pour tout $\beta \in B_1$.

(a) Supposons que $\beta = \alpha_1$. Montrons que la restriction de $\equiv_{T_{\alpha_1}}$ à $\tilde{T}_{\alpha_1}$ et la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_{\alpha_1}}$ à T_{α_1} sont triviales avec $\tilde{T}_{\alpha_1} = \sum_{\beta \in B_1 \setminus \{\alpha_1\}} T_\beta$.

(i) Nous savons que la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$ et $\tilde{T}_{\alpha_1} \leq N_B$, ceci entraine que la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_{\alpha_1}}$ à T_{α_1} est triviale.

(ii) Soit $t_1, t_2 \in \tilde{T}_{\alpha_1}$ tels que $t_1 \equiv_{T_{\alpha_1}} t_2$. $\exists u_1, u_2 \in T_{\alpha_1}$ tels que $t_1 + u_1 = t_2 + u_2$.

$t_1 + u_1 = t_2 + u_2 \implies u_1 \equiv_{\tilde{T}_{\alpha_1}} u_2$. Cela implique $u_1 = u_2$ parce que $\tilde{T}_{\alpha_1} \leq N_B$ et la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$. Puisque M est simplifiable nous avons $t_1 = t_2$, ainsi la restriction de $\equiv_{T_{\alpha_1}}$ à $\tilde{T}_{\alpha_1}$ est triviale.

(b) supposons que $\beta \neq \alpha_1$. Montrons que la restriction de $\equiv_{T_\beta}$ à $\tilde{T}_\beta$ et la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_\beta}$ à T_β sont triviales avec $\tilde{T}_\beta = \sum_{\gamma \in B_1 \setminus \{\beta\}} T_\gamma$.

(i) Soit $t_1, t_2 \in \tilde{T}_\beta$ tels que $t_1 \equiv_{T_\beta} t_2$. $\exists u_1, u_2 \in T_\beta$ tels que $t_1 + u_1 = t_2 + u_2$. Soit $t_1 = x_1 + y_1$, $t_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in \sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma$ et $y_1, y_2 \in T_{\alpha_1}$.

$t_1 + u_1 = t_2 + u_2 \implies x_1 + y_1 + u_1 = x_2 + y_2 + u_2 \implies y_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B} T_\gamma} y_2$.

Ceci implique que $y_1 = y_2$ car $\sum_{\gamma \in B} T_\gamma \leq N_B$ et la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$. Puisque M est simplifiable nous avons $x_1 + u_1 = x_2 + u_2$.

Et $x_1 + u_1 = x_2 + u_2 \implies u_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma} u_2$. Ceci entraine que $u_1 = u_2$ pour la même raison, d'où $x_1 = x_2$ et de même $t_1 = t_2$ et la restriction de $\equiv_{T_\beta}$ à $\tilde{T}_\beta$ est triviale.

(ii) Soit $t_1, t_2 \in T_\beta$ tels que $t_1 \equiv_{\tilde{T}_\beta} t_2$. $\exists u_1, u_2 \in \tilde{T}_\beta$ tels que $t_1 + u_1 = t_2 + u_2$. Soit $u_1 = x_1 + y_1$, $u_2 = x_2 + y_2$

avec $x_1, x_2 \in \sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma$ et $y_1, y_2 \in T_{\alpha_1}$.

$t_1 + u_1 = t_2 + u_2 \implies x_1 + y_1 + t_1 = x_2 + y_2 + t_2 \implies y_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B} T_\gamma} y_2$

y_2 . Ceci entraîne que $y_1 = y_2$ parce que $\sum_{\gamma \in B} T_\gamma \leq N_B$ et la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$. Puisque M est simplifiable nous avons $x_1 + t_1 = x_2 + t_2$.

Et $x_1 + t_1 = x_2 + t_2 \implies t_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma} t_2$. Cela entraîne que $t_1 = t_2$ car $\sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma \leq N_B$ et la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$. Donc la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_\beta}$ à T_β est triviale.

(2) Montrons que $Res\ eq(K; \sum_{\beta \in B_1} T_\beta)$ est triviale.

(a) Soit $t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B_1} T_\beta$ tels que : $t_1 \equiv_K t_2$. Soit $t_1 = x_1 + y_1$ et

$$t_2 = x_2 + y_2 \text{ avec } x_1, x_2 \in \sum_{\gamma \in B} T_\gamma; y_1, y_2 \in T_{\alpha_1}$$

$$t_1 \equiv_K t_2 \implies \exists k_1, k_2 \in K \text{ tels que } x_1 + y_1 + k_1 = x_2 + y_2 + k_2.$$

$$x_1 + y_1 + k_1 = x_2 + y_2 + k_2 \implies y_1 \equiv_{K + \sum_{\gamma \in B} T_\gamma} y_2 \implies y_1 \equiv_{N_B} y_2.$$

Cela entraîne que $y_1 = y_2$ car la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_{α_1} est triviale.

Puisque M est simplifiable nous avons $x_1 + k_1 = x_2 + k_2$.

Et $x_1 + k_1 = x_2 + k_2 \implies x_1 \equiv_K x_2 \implies x_1 = x_2$ car $\{K; \sum_{\gamma \in B} T_\gamma\}$ est fortement indépendant. Ceci implique que $t_1 = t_2$. Alors la restriction de $\equiv_K$ à $\sum_{\beta \in B_1} T_\beta$ est triviale.

(b) Soit $k_1, k_2 \in K$ tels que : $k_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B_1} T_\gamma} k_2$.

il existe $t_1, t_2 \in \sum_{\gamma \in B_1} T_\gamma$ tels que $k_1 + t_1 = k_2 + t_2$.

Soit $t_1 = x_1 + y_1$ et $t_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in \sum_{\gamma \in B} T_\gamma; y_1, y_2 \in T_{\alpha_1}$

$$k_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B_1} T_\gamma} k_2 \implies x_1 + y_1 + k_1 = x_2 + y_2 + k_2.$$

$$x_1 + y_1 + k_1 = x_2 + y_2 + k_2 \implies y_1 \equiv_{K + \sum_{\gamma \in B} T_\gamma} y_2 \implies y_1 \equiv_{N_B} y_2.$$

Ceci entraîne que $y_1 = y_2$ car la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_{α_1} est triviale.

Puisque M est simplifiable nous avons $x_1 + k_1 = x_2 + k_2$.

Et $x_1 + k_1 = x_2 + k_2 \implies x_1 \equiv_K x_2 \implies x_1 = x_2$ car $\{K; \sum_{\gamma \in B} T_\gamma\}$ est fortement indépendant. Puisque M est simplifiable nous avons

$k_1 = k_2$. Ceci entraîne que la restriction de $\equiv_{\sum_{\beta \in B_1} T_\beta}$ à K est triviale.

□

Proposition 4.3.7. *Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ensemble indexé de sous-semimodules fortement simples d'un R -semimodule à gauche M simplifiable tel que : $M = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$. Si M est de plus soustractif, alors pour tout sous-semimodule K de M , il existe un sous-ensemble B de A tel que : $(T_\beta)_{\beta \in B}$ est fortement indépendant et $M = K \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$.*

Proof :

Soit K un sous-semimodule d'un semimodule à gauche M simplifiable.

Et soit $\mathcal{L} = \{B \subseteq A / (T_\beta)_{\beta \in B} \text{ et } \{K; \sum_{\beta \in B} T_\beta\} \text{ sont indépendants}\}$.

Si $B = \emptyset$ alors $T_\beta = 0$ donc $(T_\beta)_{\beta \in B}$ et $\{K; \sum_{\beta \in B} T_\beta\}$ sont fortement indépendants, par conséquent $\emptyset \in \mathcal{L}$. D'où $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-chaine ordonnée $\mathcal{L}$.

Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Nous savons que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \subseteq A$ donc $B \subseteq A$.

D'après la Proposition 4.2.4, $B \in \mathcal{L}$. Soit $L \in \mathcal{L}$ tel que $B_n \subset L \forall n \in \mathbb{N}$. Alors nous avons $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset L$, donc B est la borne supérieure de $\{B_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Ainsi $\mathcal{L}$ est un ensemble partiellement ordonné non vide et inductive. Par conséquent $\mathcal{L}$ a au moins un élément maximal B .

Soit $N = K + \sum_{\beta \in B} T_\beta$. Comme $(T_\beta)_{\beta \in B}$ et $\{K; \sum_{\beta \in B} T_\beta\}$ sont fortement indépendants, alors $N = K \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$. N est un sous-semimodule de M , montrons que $N = M$.

Soit $\alpha \in A$. T_α fortement simple entraîne que la restriction de $\equiv_N$ à T_α est triviale où universelle.

Supposons que la restriction de $\equiv_N$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$.

Soit $\alpha_1 \in A \setminus B$ et $B_1 = B \cup \{\alpha_1\}$. Nous avons $B \subseteq A$ et $\alpha_1 \in A$ ce qui entraîne que $B_1 \subseteq A$. D'après la Proposition 4.3.6 $(T_\beta)_{\beta \in B_1}$ et $\{K; \sum_{\beta \in B_1} T_\beta\}$ sont fortement indépendants, alors $B_1 \in \mathcal{L}$, ceci est en contradiction avec la maximalité de B . Donc la restriction de $\equiv_N$ à T_α est universelle pour tout $\alpha \in A$. Ceci entraîne que $\equiv_N$ est universelle dans M puisque $\bigcap T_\beta \neq \emptyset$. Et de même pour tout $m \in M$ nous avons $m \equiv_N 0$.

$m \equiv_N 0 \implies \exists n \in N$ tel que $m + n \in N$. Et puisque M est soustractif, $m \in N$, d'où $M = N$

□

Proposition 4.3.8. *Soit M un R -semimodule à gauche simplifiable et soustractif engendré par un ensemble indexé $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-semimodules fortement simples. Il existe un sous-ensemble $B \subseteq A$ telle que :*

$M = \oplus_{\beta \in B} T_\beta$. Et M est fortement Semisimple.

Proof :

Si $K = 0$ alors d'après la Proposition 4.3.7, il existe $B \subseteq A$ tel que :

$M = 0 \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$ ainsi $M = \oplus_{\beta \in B} T_\beta$.

□

Définition 4.3.9. [29]

Soient $A; B;$ and C des R -semimodules à gauche, la suite exacte

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ est scindée si $B = \text{Im} f \oplus K$ avec K sous-semimodule de B .

Proposition 4.3.10. *Soit M un R -semimodule simplifiable, soustractif et fortement Semisimple avec une décomposition fortement semisimple $M = \oplus_{\alpha \in A} T_\alpha$. Si la suite*

$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ de R -semimodules à gauche est exacte, alors la suite est scindée. Si de plus elle est régulière alors il existe un sous-ensemble B de A tel que N soit isomorphe à $\oplus_{\beta \in B} T_\beta$ (N est fortement Semisimple, $N \simeq \oplus_{\beta \in B} T_\beta$) et K est semi-isomorphe à $\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha$ ($K \simeq_s \oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha$).

Proof : Nous savons que $Im f$ est un sous-semimodule de M , alors d'après la Proposition 4.3.7, il existe $B \subseteq A$ tel que : $M = Im f \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$ où $\oplus_{\beta \in B} T_\beta$ est un sous-semimodule de M , par conséquent la suite exacte est scindée.

Supposons que la suite est de plus régulière alors g est régulier.

Et soit $g_1 : M/Im f \longrightarrow Im g = N$

$$[m] \mapsto g_1([m]) = g(m)$$

Montrons que g_1 est bien défini.

Soit $[m_1]; [m_2]$ dans $M/Im f$ tels que $[m_1] = [m_2]$.

$$[m_1] = [m_2] \implies \exists n_1, n_2 \in Im f \text{ tels que } m_1 + n_1 = m_2 + n_2.$$

$$g_1(m_1 + n_1) = g_1(m_2 + n_2) \implies g_1(m_1) + g_1(n_1) = g_1(m_2) + g_1(n_2)$$

$$n_1 \in Im f \implies \exists k_1; k_2 \in K \text{ tels que } n_1 + f(k_1) = f(k_2).$$

$$n_1 + f(k_1) = f(k_2) \implies g(n_1) + g \circ f(k_1) = g \circ f(k_2).$$

Puisque la suite est exacte alors $Im f = \ker g$ ce qui entraîne que $g \circ f = 0$.

Ainsi $g(n_1) = 0$. De même nous avons $g(n_2) = 0$ alors $g(m_1) = g(m_2)$ et donc $g_1([m_1]) = g_1([m_2])$. g_1 est un R -homomorphisme bien défini.

g régulier $\implies Im g = N = g(M)$ donc g_1 est surjectif.

Montrons que g_1 est injectif.

$$g_1[m] = g_1[m'] \iff g(m) = g(m').$$

Puisque g est k -régulier, il existe $n, n' \in \ker g = Im f$ tels que : $m + n = m' + n'$. Ceci entraîne que $[m] = [m']$, et donc g_1 est injectif.

Par conséquent g_1 est un isomorphisme, ainsi $M/Imf \simeq N$.

Soit p_1 la première projection : $M \longrightarrow \bigoplus_{\beta \in B} T_\beta$

$$m \mapsto p_1(m) = y$$

avec $m = x + y$; $x \in Imf, y \in \bigoplus_{\beta \in B} T_\beta$ et cette décomposition est unique.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p_1} & \bigoplus_{\beta \in B} T_\beta \\ p_2 \downarrow & \nearrow \tilde{p} & \\ M/Imf & & \end{array}$$

$$\tilde{p} : [m] \longmapsto p_1(m)$$

$p_1 = \tilde{p} \circ p_2$. Puisque p_1 est surjectif, alors $\tilde{p}$ est surjectif.

Soient $[m]$ et $[m']$ deux éléments de M/Imf tels que : $\tilde{p}[m] = \tilde{p}[m']$.

$\tilde{p}[m] = \tilde{p}[m'] \implies p_1(m) = p_1(m')$. Soient $m = m_1 + m_2$ et $m' = m'_1 + m'_2$ avec $m_1, m'_1 \in Imf, m_2, m'_2 \in \bigoplus_{\beta \in B} T_\beta$.

Puisque $p_1(m) = m_2 = p_1(m') = m'_2$ alors $m + m'_1 = m_1 + m_2 + m'_1 = m_1 + m'$. Ceci implique que $[m] = [m']$ et $\tilde{p}$ est injectif. Par conséquent $\tilde{p}$ est un isomorphisme. Donc $M/Imf \simeq \bigoplus_{\beta \in B} T_\beta$. D'où $N \simeq \bigoplus_{\beta \in B} T_\beta$.

$$M = (\bigoplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \oplus (\bigoplus_{\beta \in B} T_\beta)$$

$$M = Imf \oplus (\bigoplus_{\beta \in B} T_\beta) = (\bigoplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \oplus (\bigoplus_{\beta \in B} T_\beta).$$

Soit $f_1 : K \longrightarrow Imf$

$$k \mapsto f(k)$$

Comme la suite est régulière donc f est régulier ceci signifie que

$Imf = f(K)$, donc f_1 est surjectif.

Soient k et k' deux éléments de K tels que : $f_1(k) = f_1(k')$.

$f_1(k) = f_1(k') \implies f(k) = f(k')$ et comme f est k -régulier alors

$k + m = k' + m'$ avec $m, m' \in \ker f$ donc $k = k'$ car $\ker f = 0$.

Par conséquent f_1 est injectif. D'où f_1 est un isomorphisme ainsi $K \simeq Imf$.

Nous avons $M = \text{Im}f \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$.

Soit p_3 la première projection : $M \longrightarrow \text{Im}f$ et $\bar{p}_3$ la restriction de p_3 à $(\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha)$

$$\ker \bar{p}_3 = (\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \cap \ker p_3 = (\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \cap (\oplus_{\beta \in B} T_\beta) = 0.$$

Soit $m' \in \text{Im}f$, puisque p_3 est surjectif, alors il existe $m \in M$ tel que $p_3(m) = m'$. Mais $M = (\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$, alors il existe $m_1 \in \oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha$ et $m_2 \in \oplus_{\beta \in B} T_\beta$ tel que $m = m_1 + m_2$. Et $m' = p_3(m) = p_3(m_1) = \bar{p}_3(m_1)$, donc $\bar{p}_3$ est surjectif.

Par conséquent $(\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \simeq_s \text{Im}f$. D'où $K \simeq_s \oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha$. $\square$

Proposition 4.3.11. *Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ensemble indexé de sous-semimodules fortement simples d'un R -semimodule à gauche M simplifiable et soustractif. Si T est un sous-semimodule de M fortement simple, tel que la restriction de $\equiv_{\sum_A T_\alpha}$ à T n'est pas triviale alors il existe $\alpha \in A$ tel que : $T \simeq_s T_\alpha$.*

Proof : Si T est fortement simple et la restriction de $\equiv_{\sum_A T_\alpha}$ à T n'est pas triviale, alors la restriction de $\equiv_{\sum_A T_\alpha}$ est universelle.

Alors pour un $t \in T$ nous avons $t \equiv_{\sum_A T_\alpha} 0$ ceci entraîne qu'il existe $t_1, t_2 \in \sum_A T_\alpha$ tels que $t + t_1 = t_2$. Puisque $\sum_A T_\alpha$ est soustractif, nous avons $t \in \sum_A T_\alpha$ et donc $T \leq \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$.

Dés lors on suppose que $M = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$. Donc d'après la Proposition 4.3.6, il existe un sous-ensemble $B \subset A$ tel que : $M = \oplus_{\beta \in B} T_\beta$.

La suite : $0 \longrightarrow T \xrightarrow{i_T} M \xrightarrow{\pi_T} M/T \longrightarrow 0$ est exacte et régulière. En effet : $\ker i_T = 0$; $\text{Im} i_T = \{m + t_1 = t_2; t_1, t_2 \in T\}$

$m + t_1 \in T$; $t_1 \in T$ et T est soustractif donc $m \in T = i_T(T)$, par conséquent $\text{Im} i_T = i_T(T)$.

i_T est i -régulier et i_T est injectif alors, il est k -régulier.

$$\ker \pi_T = \{m \in M \setminus [m] = [0]\} = \{m \in M \setminus m + t_1 = t_2\} = \text{Im } i_T.$$

π_T est surjectif donc π_T est i -régulier.

Montrons que π_T est k -régulier.

$$\pi_T(m_1) = \pi_T(m_2) \iff [m_1] = [m_2] \iff m_1 + m'_1 = m_2 + m'_2$$

avec $m'_1, m'_2 \in T = i_T(T) = \text{Im } i_T = \ker \pi_T$, ce qu'on a voulu obtenir.

Par conséquent, d'après la Proposition 4.3.8, il existe $\alpha \in A$ tel que :
 $T \simeq_s T_\alpha$. □

Theorem 4.3.12. (*Caractérisation de semimodules fortement semisimples*)

Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ensemble indexé de sous-semimodules fortement simples R -semimodule à gauche M simplifiable et soustractif. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. M est fortement Semisimple.
2. M est engendré par des semimodules fortement simples.
3. M est la somme de semimodules fortement simples.
4. Tout sous-semimodule de M est un facteur direct de M .
5. Toute suite exacte : $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ de R -semimodules à gauche est scindée.

Proof :

(1) $\implies$ (5) D'après la Proposition 4.3.10.

(5) $\implies$ (4) Soit K un sous-semimodule de M .

Considérons la suite : $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i_K} M \xrightarrow{\pi_K} M/K \longrightarrow 0$.

Cette suite est exacte (voir la preuve de la Proposition 4.3.1)).

Par conséquent $M = \text{Im } i_K \oplus L$ avec L sous-semimodule de M . Nous savons que si K est soustractif alors $\text{Im } i_K = K$ et $M = K \oplus L$ et donc K

est un facteur direct de M .

$(4) \implies (3)$ et $(3) \implies (2)$ sont triviales.

$(2) \implies (1)$ est obtenue d'après la Proposition 4.3.8.

□

Conclusion et perspectives de recherches

Conclusion

Cette thèse est l'aboutissement d'un ensemble de travaux de recherche initiés dans les semimodules et les semianneaux. Ces travaux portent essentiellement sur les sous-semimodules essentiels, le foncteur tensoriel et les semimodules fortement semisimples.

Sur les semimodules, deux concepts "d'essentiel" ont été définis, et ils ont généré deux classes de sous-semimodules essentiels : celle des sous-semimodules essentiels et celle des sous-semimodules semiessentiels. Mais aucune d'elles ne contient l'autre. Alors il était utile de les généraliser et nous avons conçu le concept de "faiblement essentiel" dont la classe des sous-semimodules faiblement essentiels générée couvre les deux autres. Les sous-semimodules faiblement essentiels sont défini à partir des relations de congruence définies par les sous-semimodules. En guise d'application, nous avons utilisé ces trois notions d'essentiel pour introduire et caractériser trois types de semimodules faiblement cohopfiens.

Takahashi et Katsov ont défini deux produits tensoriels différents dans les

semimodules. Mais celui de Katsov est beaucoup plus naturel car beaucoup de propriétés marchent mieux avec ce produit. Nous avons étudié l'anneau tensoriel qu'on a construit à partir du produit tensoriel de Katsov. Cela a permis de caractériser les semimodules complètement fidèles.

Dans la théorie des modules, deux propriétés équivalentes ont été utilisées pour définir les modules simples. Ces propriétés, non équivalentes dans les semimodules ont donné deux types de semimodules simples et semisimples. Mais il y'a une troisième propriété, équivalente aux deux autres dans les modules, que nous avons utilisée, dans le cas des semimodules soustractifs et simplifiables, pour caractériser les semimodules fortement semisimples.

Perspectives

Les résultats obtenus dans cette thèse ouvrent des perspectives intéressantes de recherche. Les quelques questions ouvertes auxquelles ces résultats peuvent servir peuvent être regroupées en deux catégories qui couvrent :

1. les semianneaux et les semimodules
2. l'algèbre max-plus

Liste de quelques problèmes ouverts :

1. Dans la théorie des modules, un module injectif et une enveloppe injective sont caractérisés comme suit :
 - Soit ${}_R E$ et ${}_R M$ deux R -modules. Alors E est injectif relativement à M (ou est M -injectif) si pour tout monomorphisme $f : K \longrightarrow M$ et pour tout homomorphisme $\gamma : K \longrightarrow E$, il existe un homomorphisme

$\bar{\gamma} : E \longrightarrow M$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K & & \\ \gamma \downarrow & \searrow f & \\ E & \xleftarrow{\bar{\gamma}} & M \end{array} .$$

- Soit E' un module injectif et $M \subseteq E \subseteq E'$.

Alors E est une enveloppe injective de M si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- (a) E est une extension essentielle maximale de M .
- (b) E est un sous-module injectif minimal de E' contenant M .
- (c) E est une extension essentielle de M et est injectif.
- (d) E est injectif et tout monomorphisme $f : M \longrightarrow Q$ avec Q injectif, s'étend en un monomorphisme de E vers Q .

Etudier les semimodules injectifs et les enveloppes injectives de semimodules à l'aide de la généralisation du concept de sous-semimodules essentiels, que nous venons de faire, est une question à laquelle nous pouvons réfléchir maintenant.

2. Etudier les extensions sur les semianneaux quasifroebénusiennes et séparables à l'aide des résultats obtenus avec le foncteur tensoriel sur les semimodules
3. On sait que si M est un module de longueur finie et si $SocM$ désigne son socle, alors l'inclusion $i : SocM \longrightarrow M$ est un monomorphisme essentiel. Alors on peut étudier les notions de socle et de radical (son dual) dans les semimodules à l'aide de la généralisation du concept de sous-semimodules essentiels.

4. En algèbre max-plus on utilise des semimodules idempotents donc on peut investir tous les résultats obtenus dans ce domaine.

Annexe A

Notions de bases sur les semi-anneaux et semi-modules

A.1 Semi-anneaux

Définition A.1.1. 1. Un semi-groupe $(R, \star)$ est un ensemble non vide R muni d'une opération $\star$ associative, c'est-à-dire pour tout $a, b, c \in R$, $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

2. Un monoïde est un semi-groupe ayant un élément neutre.
Il est dit commutatif si l'opération du semi-groupe est commutatif.

Définitions A.1.2. – Un semi-anneau $(R, +, \cdot)$ un ensemble non vide R sur lequel on définit les opérations d'addition et de multiplication vérifiant aux conditions suivantes :

1. $(R, +)$ est un monoïde commutatif ayant un élément neutre 0 ;
2. $(R, \cdot)$ un monoïde ayant un élément $1 \neq 0$;

3. $a(b + c) = ab + ac$ and $(a + b)c = ac + bc$ pour tout $a, b, c \in R$;

4. $0a = 0 = a0$ pour tout $a \in R$.

Le semi-anneau R est commutatif si le monoïde $(R, \cdot)$ est commutatif.

- Un semi-anneau $(R, +, \cdot)$ est **additivement idempotent** (resp. **multiplicativement idempotent**) si $\forall r \in R, r + r = r$ (resp. $\forall r \in R, r^2 = r$) .
- Un semi-anneau $(R, +, \cdot)$ est **multiplicativement régulier** si $\forall r \in R, \exists r' \in R : rr'r = r$.
- Un semi-anneau $(R, +, \cdot)$ est **additivement régulier** si $\forall r \in R, \exists r' \in R : r + r' + r = r$.
- Un semi-anneau $(R, +, \cdot)$ est **zerosumfree** si $\forall r', r \in R, : r + r' = 0$ implique que $r = r' = 0$.
- Un $(R, +, \cdot)$ est **simplifiable** si $\forall r', r, r'' \in R, : r + r'' = r' + r''$ implique que $r = r'$.

Définition A.1.3. Un sous-ensemble d'un semi-anneau R contenant $\{0, 1\}$ et fermé par l'addition et la multiplication est un sous-semi-anneaux de R .

Exemples A.1.4. - **Exemple 1** L'ensemble $(\mathbb{N}, +, \times)$ des entiers positives muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication des entiers est un semi-anneau.

De même l'ensemble $(\mathbb{Q}^+, +, \times)$ des rationnels positifs et l'ensemble $(\mathbb{R}^+, +, \times)$ des réels positifs sont des semi-anneaux. Ces semi-anneaux sont les premières structures mathématiques que nous rencontrons. Clairement $\mathbb{N}$ est un sous-semi-anneau de $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{Q}^+$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^+$.

- **Exemple 2** Soit R un anneau. Dedekind est le premier mathématicien à observer que l'ensemble $\text{ideal}(R)$ composé de R et de tous ces idéaux, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication des idéaux, est un semi-anneau qui n'est pas commutatif.

Similairement $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$, la famille des sous-ensembles de X est un semi-anneau, avec l'addition pris comme la réunion et multiplication pris comme l'intersection .

- **Exemple 3** Si R est un ensemble totalement ordonné où l'unique élément minimal 0 et l'unique élément maximal 1 alors $(R, \max, \min)$ est un semi-anneau.

Similairement $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \max, \min)$ est un semi-anneau commutatif.

$(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ est le semi-anneau tropical.

$(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ est un semi-anneau dans (l'algèbre max-plus) notée $\mathbb{R}_{\max}$.

A.1.1 Idéaux

Définition A.1.5. Un idéal à gauche I d'un semi-anneau R est un sous-ensemble non vide de $(R, +, \times)$ vérifiant les conditions suivantes :

1. If $a, b \in I$ alors $a + b \in I$;
2. If $a \in I$ et $r \in R$ alors $ra \in I$;
3. $I \neq R$.

Notons que si R est un semi-anneau alors la condition (3) est équivalente à la condition que $1 \in R \setminus I$. Un idéal à gauche est défini de manière analogue et un idéal de R est un sous-ensemble qui est à la fois un idéal à gauche et

un idéal à droite. Notons que les idéaux propres sont les idéaux différents de $\{0\}$ et R .

Nous notons l'ensemble composé de R et tous les idéaux à gauche de R par $lideal(R)$, l'ensemble constitué de R et tous les idéaux à droite de R par $rideal(R)$, et l'ensemble constitué de R et de tous les idéaux de R par $ideal(R)$.

Définitions A.1.6. – *Un sous-ensemble non vide A d'un semi-anneau*

*R est **soustractif** si $a \in A$ et $a + b \in A$ implique $b \in A$; il est **fort** si et seulement si $a + b \in A$ implique que $a \in A$ and $b \in A$.*

- *Un idéal à droite I d'un semi-anneau R est soustractif (resp. fort, resp. austère) si I est un soustractif (resp. fort, resp. austère) sous-ensemble de R .*

*Un idéal à gauche soustractif est appelé **k**-idéal à gauche.*

- *Un semi-anneau R n'ayant pas d' idéaux à gauche soustractifs est **austère** à gauche. Les semi-anneaux austère à droite sont définies similairement.*
- *Si $\{I_k/k \in \Omega\}$ est un sous-ensemble soustractif (resp. fort) de R alors $\bigcap_{k \in \Omega} I_k$ est aussi soustratif (resp.fort). Si A is est un sous-ensemble d'un semi-anneau R , alors l'intersection de R et de tout idéal soustractif (resp. fort) contenant A , est appelé la **cloture soustractif** (resp. **cloture forte**) de A .*

Les idéaux soustractifs (resp. forts , resp. austère à gauche) sont définit de la même manière.

Exemples A.1.7. – *Exemple 1* Si X est infini la famille $f\mathcal{P}(X)$

de tous les sous-ensembles finis de X est un idéal fort du semi-anneau $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

- **Exemple 2** L'ensemble $2\mathbb{N}$ est un idéal soustractif du semi-anneau $(\mathbb{N}, +, \times)$ des entiers positifs. Il n'est pas fort car $3 + 5 \in 2\mathbb{N}$ alors ni 3 ni 5 appartient à $2\mathbb{N}$.

Les idéaux soustractifs de $(\mathbb{N}, +, \times)$ sont précisément les ensembles de la $k\mathbb{N}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- **Exemple 3** L'idéal $I = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ de $\mathbb{N}$ n'est pas soustractif. En effet $2 \in I$ et $3 = 2 + 1 \in I$ mais 1 is not in I .

Définitions A.1.8. Si A est un sous-ensemble non vide du semi-anneau R alors l'ensemble RA constitué de toutes les sommes finies $\sum r_i a_i$ avec $r_i \in R$ et $a_i \in A$ est soit égal à R ou est un idéal à gauche de R contenant A . Dans le dernier cas, il est appelé à gauche de R généré par A . Similairement, nous définissons AR comme le plus petit idéal de R contenant A .

L'ensemble $\langle A \rangle$ constitué de toutes les sommes finies de la forme $\sum r_i a_i s_i$ avec $r_i, s_i \in R$ et $a_i \in A$ est soit égal à R est le plus petit idéal de R contenant A .

Si $A = \{a\}$ nous écrivons Ra [resp. $aR, \langle a \rangle$] au lieu de RA [resp. $AR, \langle A \rangle$].

Un idéal à gauche [resp. idéal à droite, idéal] I de R est de type fini s'il existe un sous-ensemble fini A de R $I = RA$ [resp. $I = AR, I = \langle A \rangle$]. Il est principal s'il existe un élément a de R tel que $I = Ra$ [resp. $I = aR, I = \langle a \rangle$].

Exemples A.1.9. - **Exemple 1** Les idéaux soustractifs de $(\mathbb{N}, +, \times)$ sont précisément les idéaux principaux de la forme $k\mathbb{N}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Si

$1 < n \in \mathbb{N}$ alors $\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} \cup \{0\}$ est un idéal de $\mathbb{N}$ ce qui montre que les éléments de $\text{ideal}(\mathbb{N})$ ne sont pas nécessairement principal.

- **Exemple 2** L'ensemble $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$ des entiers positifs muni des opérations d'addition et de multiplication des entiers est un semi-anneaux commutatif.

$\forall a, b \in \mathbb{N} :$

- $a \oplus b = \gcd\{a, b\}$
- $a \odot b = \text{lcm}\{a, b\}$ $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$ est un semi-anneau principal, tout idéal I est de la forme $I = k \odot \mathbb{N} = k\mathbb{N}$

A.1.2 Semi-anneaux quotient

Dans la catégorie des anneaux, les objets quotients sont déterminés par les idéaux. Dans la catégorie des semi-anneaux, comme dans la catégorie des treillis, ce n'est pas le cas.

Définition A.1.10. Une relation d'équivalence ρ définit sur un semi-anneau R qui satisfait à la condition $r\rho r'$ et $s\rho s'$ dans R alors $r + s\rho r' + s'$ et $rs\rho r's'$ est une relation de congruence.

La relation de congruence ρ définies par $r\rho r'$ si et seulement si $r = r'$ est la relation de congruence triviale sur R . Toutes les autres relations de congruences sur R sont non triviales.

La relation de congruence ρ définie par $r\rho r'$ pour tout $r, r' \in R$ est la relation de congruence universelle sur R .

Exemples A.1.11. - **Exemple 1** La relation de Bourne congruence

Un idéal [à gauche, à droite] I d'un semi-anneau R définit une rela-

tion de congruence $\equiv_I$ sur R , appelé relation de Bourne donnée par $r \equiv_I r'$ si et seulement s'il existe deux éléments a et a' of I satisfaisant $r + a = r' + a'$.

Nous notons l'ensemble de toutes les classes d'équivalence sur R par la relation modulo I par R/I et notons la classe d'équivalence d'un élément r de R par r/I .

$0/I$ est la cloture soustractive de I dans R .

– **Exemple 2 La relation de congruence de Lizuka**

Similairement un idéal [à gauche, à droite] I d'un semi-anneau R définit une relation de congruence $[\equiv_I]$ sur R , appelé relation de Lizuka donnée par $r[\equiv_I]r'$ si et seulement s'il existe deux éléments a et a' de I et un élément s de R satisfaisant $r + a + s = r' + a' + s$.

Nous notons l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de R la relation relation par $R[/I]$ et will la classe de congruence de l'élément r de R par $r[/I]$.

A.1.3 Homomorphisme de semi-anneaux

Définitions A.1.12. Si R et S sont des semi-anneaux la fonction $\gamma : R \longrightarrow S$ est un homomorphisme de semi-anneaux si et seulement si :

1. $\gamma(O_R) = O_S$;
2. $\gamma(1_R) = 1_S$; et
3. $\gamma(r + r') = \gamma(r) + \gamma(r')$ and $\gamma(rr') = \gamma(r) \cdot \gamma(r')$ pour tout $r, r' \in R$.

Un homomorphisme de semi-anneaux qui est à la fois surjectif et injectif est dit isomorphisme.

Si $\gamma : R \longrightarrow S$ est un homomorphisme de semi-anneaux alors nous définissons :

- (1) $\text{Ker}(\gamma) = \{r \in R / \gamma(r) = 0\} = \gamma^{-1}(0)$,
- (2) $\gamma(R) = \{\gamma(r) / r \in R\}$,
- (3) $\text{Im}(\gamma) = \{s \in S, s + \gamma(r) = \gamma(r') \text{ pour } r, r' \in R\}$.

$\text{Ker}(\gamma)$ est un idéal soustractif de R appelé le noyau de γ .

$\text{Im}(\gamma), \gamma(R)$ sont des sous-semi-anneaux de S et sont respectivement l'image et l'image propre de γ .

Nous avons $\gamma(R) \subseteq \text{Im}(\gamma) \subseteq S$.

Exemples A.1.13. – **Exemple 1** Le semi-anneau $(\mathbb{R}^+, \max, \cdot)$ est isomorphe à l'algèbre de schedule $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ via l'application $a \longmapsto \ln(a)$. Similairement, le semi-anneau $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \min, +)$ est isomorphe à l'algèbre de schedule via l'application $a \longmapsto -a$.

- **Exemple 2** Contrairement au cas des anneaux , cet exemple montre que l'homomorphisme de semi-anneaux $\gamma : R \longrightarrow S$ est non nécessairement injectif si $\text{Ker}(\gamma) = \{0\}$. Considérons l'ensemble totalement ordonné $R = \{0, a, 1\}$ sur lequel nous définissons l'addition comme $\max$ et la multiplication comme $\min$. $(R, \max, \min)$ est un semi-anneau.

Soit $\gamma : R \longrightarrow \mathbb{B} = \{0, 1\}$ l'homomorphisme défini par $\gamma(0) = 0, \gamma(a) = \gamma(1) = 1$.

Nous avons $\text{Ker}(\gamma) = \{0\}$ but γ est non injectif.

- **Exemple 3** Si I est un idéal du semi-anneau R et si $\gamma : R \longrightarrow R/I$ est l'homomorphisme surjectif défini par $r \longmapsto r/I$ par $\text{ker}(\gamma) = \{r \in R / r + a \in I \text{ pour } a \in I\} = 0/I$.

A.2 Semi-modules

Les modules sur un anneau sont un important facteur de caractérisation des propriétés des anneaux et si naturel que nous nous intéressons à la construction correspondante sur les semi-anneaux. En effet, beaucoup de ces constructions peuvent être transféré, du moins partiellement, dans la plupart du temps. De plus, beaucoup de constructions importantes dans les mathématiques pures et appliqués peuvent être compris comme des semi-modules sur des semi-anneaux appropriés. Dans cet annexe nous posons les fondations sur l'étude des semi-modules.

A.2.1 Semimodules-Sous-semimodules

Définitions A.2.1. – Soit R un anneau. Un R -semi-module à gauche est un monoïde commutatif $(M, +)$ avec identité additive 0_M sur lequel on a la fonction $R \times M \longrightarrow M$, notée $(r, m) \longmapsto rm$ et appelé multiplication scalaire, qui satisfait les conditions suivantes pour tout éléments r et r' de R et tout éléments m et m' of M :

1. $(rr')m = r(r'm)$;
2. $r(m + m') = rm + r'm$;
3. $(r + r')m = rm + r'm$;
4. $1_R m = m$;
5. $0_R m = r 0_M = 0_M$.

Les semi-modules à droite sur R sont défini de la même manière. Dans ce qui suit, nous utilisons généralement les semi-modules à gauche,

avec results correspondants sur les semi-modules à droites affirmés sans mention explicite.

- Si R et S sont des semi-anneaux alors un (R, S) -bisemi-module $(M, +)$ est à la fois un R -semi-module à gauche et un S -semi-module à droite satisfaisant les conditions due $(rm)s = r(ms)$ for all $m \in M, r \in R$, et $s \in S$.

En particulier, Si R is commutatif alors tout R -semi-module à gauche est un (R, R) -bisemi-module.

- Si m est un élément du R -module M alors l'élément m' de M satisfaisant $m + m' = 0_M$ est l'opposé additive de m . Clearement les inverses additifs, s'ils existent, sont uniques, et nous les notons par additive inverse par $-m$. L'ensemble $V(M)$ de tous les éléments de M ayant des inverses additifs est non vide, comme $0 \in V(M)$. Un R -semi-module M est **zerosumfree** si $V(M) = \{0\}$. Un R -semi-module M satisfaisant $V(M) = M$ est un R -module.
- Un élément m d'un R -semi-module à gauche M un élément idempotent si $m + m = m$. L'ensemble $I(M)$ de tous les éléments idempotent de M est non vide comme contenant 0_M . Si $I(M) = M$ alors M is **additivement idempotent**.
- Un R -semi-module à gauche M est **entier** si $rm \neq 0_M$ lorsque $0 \neq r \in R$ si $0_M \neq m \in M$. Un R -semi-module à gauche qui à la fois entire et zerosumfree est un semi-module **information** R .

Remarque A.2.2. Si $\gamma : R \longrightarrow S$ est un homomorphisme de semi-anneau et si M est un S -semi-module à gauche alors il est aussi un R -semi-module à droite, muni de la multiplication scalaire définie par $r \Delta m = \gamma(r)$ pour tout

$r \in R$ et $m \in M$. En particulier, si M est un S -semi-module à gauche alors M est un R -semi-module à droite pour tout sous-semiring R de S .

Définitions A.2.3. – Un sous-ensemble non vide N d'un R -semi-module M est un sous-semi-module de M si et seulement si N est fermé par l'addition et la multiplication scalaire. Notons que ceci implique que $O_M \in N$.

Les sous-semi-modules d'un semi-modules à droite et sous-bisemi-modules sont définis de manière analogue.

- De plus, un sous-semi-module N d'un semi-module M est appelé sous-semi-module soustractif de M si, pour $m, m' \in M$, on a $m + m' \in N$ et $m \in N$ implique $m' \in N$.
- Un semi-module M est dit simplifiable si tout $m, m_1, m_2 \in M$:

$$m + m_1 = m + m_2 \implies m_1 = m_2.$$

Exemples A.2.4. 1. Les $\mathbb{N}$ -semi-modules sont précisément les monoides commutatifs additifs. De même tout semi-anneau R est un $\mathbb{N}$ -semi-module

2. Si M est un R -semi-module à gauche et A est un sous ensemble non vide alors M^A et $M^{(A)} = \{f \in M^A / f \text{ has finite support}\}$ sont left R -semi-modules avec l'addition et la multiplication scalaire définie par : si $f, g \in M^A$ et $r \in R$ alors $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ et $(rf)(a) = r[f(a)]$ for all $a \in A$. Similairement, si M is an (R, R) -bisemi-module alors M^A et $M^{(A)}$ le sont aussi.
3. Si $\gamma : R \longrightarrow S$ est un l'homomorphisme de semi-anneau alors S est un (R, R) -bisemi-module sur lequel on définit $r.s = \gamma(r)s$ and $s.r = s\gamma(r)$ pour tout $r \in R$ et $s \in S$.

4. Soit R un semi-anneau et let M un R -semi-module à gauche.

Then $(0 : M) = \{r \in R / rm = 0_M \quad \forall m \in M\}$ est un idéal de R . De plus , si I est un idéal de R contenu dans $(0 : M)$ alors M est un (R/I) -semi-module à gauche, la multiplication scalaire défini par $(r/I)m = rm$ for all $r \in R$ et $m \in M$.

5. APPLICATION . Soit $R = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \min, +)$ et considérons $M = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ comme un R -semi-module à gauche. Les éléments de M sont égaux. L'addition sur M correspond à la composition des signaux, et la multiplication scalaire correspond à l'amplification des signaux. Voir [Baccelli et al., 1992] pour l'analyse de cette situation et ses applications des theories du systèmes et processus des signaux .

Définitions A.2.5. – Un élément m d'un R -semi-module à gauche M est une combinaison linéaire d'élément du sous-ensemble non vide $B = \{m_i / i \in I\}$ of M si et seulement s'il existe un sous-ensemble (non nécessairement unique) Λ of I et un ensemble $\{a_i / i \in \Lambda\}$ d'éléments de R tels que $m = \sum_{i \in \Lambda} a_i m_i$.

– Un sous-ensemble non vide B d'un R -semi-module à gauche M est un ensemble de générateurs pour M si et seulement chaque $0 \neq m \in M$ est une combinaison linéaire d'éléments de B . Un R -semi-module à gauche ayant un ensemble fini générateurs est de tpe fini.

Contrairement à la situation d'espace vectoriel, il n'est pas nécessairement vrai que tout sous-semi-module d'un R -semi-module à gauche de tpe fini est de tpe fini

– Un sous ensemble non vide fini $B = \{m_i / i \in I\}$ of M est linéairement

indépendent si :

$$\sum_{i \in \Lambda} a_i m_i = \sum_{i \in \Lambda} b_i m_i \text{ implique } a_i = b_i \text{ pour chaque } i \in I$$

- Un ensemble de générateurs linéairement indépendants $\{m_i/i \in I\}$ pour un R -semi-module à gauche M est une base de M . Un R -semi-module à gauche ayant une base est libre.

Exemples A.2.6. 1. Soit R un semi-anneau et soit n un entier positif. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit $e_i \in R^n$ un n -tuple d'élément de R ayant un 1 dans la i^{th} position et 0 sinon. Alors $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une de R^n , appelé base canonique de R^n . En particulier, R est libre quand il est considéré comme un semi-module à gauche sur lui-même.

A.2.2 Homomorphisme de semi-modules

Définitions A.2.7. Si R est un semi-anneau et M et N des R -semi-modules à gauche alors une fonction f de M à N est un R -homomorphisme si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $(m + m')f = (m)f + (m')f \forall m, m' \in M$;
2. $(rm)f = r((m)f) \forall m \in M \text{ and } r \in R$

Le noyau de f est $\ker(f) = (\{0_N\})f^{-1}$. C'est un sous-semi-module soustractif de M .

L'ensemble $(M)f = \{(m)f/m \in M\}$ est un sous-semi-module de N .

Les homomorphismes de semi-modules à droite et les bisemi-modules sont définis similairement mais sont écrit comme action à gauche.

Bibliographie

- [1] J.Abuhlail, *Semicorings and Semicomodules* (May 2008) available at :
[http ://faculty.kfupm.edu.sa/math/abuhlail/Projects/FT060010- FinalReport.pdf](http://faculty.kfupm.edu.sa/math/abuhlail/Projects/FT060010-FinalReport.pdf)
- [2] J.Abuhlail, *Uniformly flat semi-modules* (Jan 2012) available at :
[http ://arXiv :1201.0291v1\[math.RA\]](http://arXiv:1201.0291v1[math.RA])3 Jan 2012
- [3] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer (1974).
- [4] Bourbaki, N. (1963). *Théorie des ensembles*, Chapitre 3. Ensembles ordonnés, Cadinaux, Nombres entiers, Hermann, seconde édition.
- [5] Bourbaki, N. (1964). *Algèbre*, Chapitre 1. Structures algébriques, Hermann, seconde édition.
- [6] Bourbaki, N. (1958). *Algèbre*, Chapitre 3. Algèbre multilinéaire, Hermann.
- [7] SAMUEL BOURNE and HANS ZASSENHAUSS : *On a Wedderburn-Artin structure theory of a potent semiring* Lehigh University ,Bethlehem ,Pennsylvania and Mc Gill University Canada (December 29 1956) pp 613-615

- [8] Chaudhari and K. J. Ingale : *A Note on Strongly Euclidean Semirings*. International Journal of Algebra, Vol. 6, 2012, no. 6, 271 - 275
- [9] Dedekind, R (1894). : *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*. Supplement XI to P. G. Dirichlet, L. : *Vorlesung über Zahlentheorie*. 4 Aufl., Druck und Verlag, Braunschweig
- [10] Eckman, B. Schopf, A. *Über injektive Moduln* Arch der math 4 : 75-78 (1953)
- [11] Landing FALL, Jean Raoul TSIBA and Djiby SOW *On semi-essential subsemi-modules* JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications Volume 22, Number 2, 2011, Pages 187-203 ; Zbl pre05965341
- [12] C. Faith : *Algebra : Rings, Modules and Categories I* Springer-Verlag New York (1973).
- [13] Jonathan S. Golan : *Semirings and their applications*. University of Haifa, Israel (1999)
- [14] J.S Golan : *Power Algebras over Semirings with Applications in Mathematics and Computer Science in 1999* Kluwer Academic Publishers (1999)
- [15] Golan J.S : *Semirings and Affine Equations over Them* Kluwer Academic Publishers Dordrecht (2003).
- [16] Guin, D. (2009). *Anneaux - Modules - Algèbre multilinéaire*, EDP Sciences
- [17] Haghany. A : *Modules whose injective endomorphisms are essential*. Journal of Algebra. Volume 243 (2001) pp 765-779

- [18] Hebisch, U. et Weinert, H.J. *Semirings. Algebraic Theory and applications in computer science*, World Scientific World Scientific (1993)
- [19] Johnson, R. E. *The extended centralizer of a module* Proc. Amer. Math. Soc. 2 : 891-895. (1951)
- [20] Y. Katsov, *Tensor products and injective envelopes of semi-modules over additively regular semirings*, Algebra Colloq. 4 (2) 121131 (1997).
- [21] T.Y. LAM : *Lectures on Modules and Rings* , Springer-Verlag New York (1998)
- [22] Dino Lorenzini, *An Invitation to Arithmetic Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 9, American Mathematical Society, 199697
- [23] Nguyen Xuan Tuyen and Tran Giang Nam : *On projective Covers of Semimodules in the category - CSSMod and their Applications*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2007)
- [24] M. Takahashi, *On the bordism categories. III*. Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (2) (1982), pp. 551-562.
- [25] Michihiro TAKAHASHI : *On the Bordism Categories II (Elementary properties of Semimodules)*. Mathematics Seminar notes vol.9 (1981)
- [26] M. TAKAHASHI : *On the Bordism Categories II (Elementary properties of Semimodules)*. Mathematics Seminar notes vol.9 (1981)
- [27] M. TAKAHASHI : *On the Bordism Categories III (Fonctors Hom and $\otimes$ for Semimodules)*. Mathematics Seminar notes vol.10 (1982)
- [28] M. Takahashi and H.X. Wang, *On epimorphisms of semi-modules*. Kobe J. Math. 6(2) (1989), 297-298.

- [29] Y.Katsov, T.G.Nam and N.X.Tuyen : *On Subtractive Semisimple Semirings*. Algebras Colloquium (2009)
- [30] Jean Raoul TSIBA and SOW Djiby : *On generator and projective semi-modules* International Journal of Algebra, Vol. 4, 2010, no. 24, 1153 - 1167 ; Zbl 1219.16047, MR2746245
- [31] J. R. Tsiba, L. Fall and D. SOW *Introduction to S-Hopfian and S-Cohopfian Semimodules* JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications Volume 22, Issue 1, Pages 81 - 109, 2011, Zbl pre05965337
- [32] N.X.Tuyen and Tran Giang NAM *On projective covers of semi-modules in the category Λ -CSSMod and their applications*. Department of Mathematics , Hue University , 34 Le loi street Hue , Vietnam pp 131-140.
- [33] Vandiver H.S. : Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold. Bull.Ame.Soc. Vol.(40) (1934), pp 914-920.
- [34] J, Worthington, Automata, Representations, and Proofs, Cornell University, August 2009.
- [35] R. Wisbauer *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach (Philadelphia 1991)
- [36] Zumbraegel, J : *Classification of finite congruence-simple semiring with zero*. Journal of Algebra and its Applications, 7(3) : 363-377 (2008)