UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Année : 2015 - 2016 **N° d'ordre : 95**

THESE DE DOCTORAT UNIQUE EN ALGEBRE

<u>THEME</u> : CARACTERISATION DES SEMI-FGI ANNEAUX ET DES DQA-ANNNEAUX COMMUTATIFS.

Présenté et soutenue publiquement le 18 Févier 2017 à 9 H à A4 par :

Monsieur Abdou DIOUF

Sous la direction de Monsieur Mamadou BARRY

Devant le jury composé de :

<u>Président</u> :	Mamadou	**SANGHARE**	Professeur	UCAD
<u>Rapporteurs</u> :	Gérard	**KIENTEGA**	Professeur	Univ. Pr Joseph Ki-Zerbo
	Oumar	**SALL**	Maître de Conférences	UASZ
<u>Examinateurs</u>:	Oumar	**DIANKHA**	Professeur	UCAD
	Mohamed Ben	**MAAOUIA**	Maître de Conférences	UGB
	Pape Cheikhou	**DIOP**	Maître – Assistant	Univ. Thiès
<u>Directeur de thèse</u> :	Mamadou	**BARRY**	Professeur	UCAD

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes parents (papa et maman) ;

Madame DIOUF Ami SARR ;

Toute ma famille ;

Tous les élèves et étudiants du Lôg.

Remerciements

Je loue Allah pour avoir permis que ce travail voit le jour, en me donnant la volonté le courage et la ténacité qu'il fallait pour effectuer ce travail.
Mes sincères remerciements vont à l'endroit de monsieur Mamadou SANGHARE, professeur titulaire à l'université Cheikh Anta Diop, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider mon jury de thèse. Il m'a beaucoup inspiré dans le domaine.
Je remercie vivement et respectueusement le professeur Mamadou BARRY pour avoir accepté de diriger ce travail. Ce travail est le fruit des ses orientations.
J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Gérard KIENTEGA, Professeur titulaire à l'université de Ouagadougou I, d'avoir bien voulu accepter d'être rapporteur dans le Jury.
Je remercie le Professeur de l'Université de Ziguinchor, Monsieur Omar SALL d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.
Je remercie le Professeur de l'Université de Saint-Louis, Monsieur Mohamed BEN MAAOUIA d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.
Je leurs en suis reconnaissant.
J'adresse mes vifs remerciements aux Professeurs : Oumar DIANKHA ; Pape Cheikhou DIOP, pour leur participation au jury. Je leur exprime ma reconnaissance.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar à qui je dois une partie de ma formation en Mathématiques. Particulièrement Feu Sérigne Aliou LÖ, Cheikh Mbacké DIOP, Chérif BADJI, Salamon SAMBOU, Gabriel NDIAYE, Sada S.THIAM, Omar DIANKHA, Mamadou Makhtar DIOP maître Assistant, Abdoulaye GUIRO...
Je remercie mon ami Dr Abdoul Karim TAKI pour sa disponibilité, ses conseils notamment toutes les fois que j'ai pu compter sur lui pour les mises en forme et les derniers réglages du document . Je lui exprime ma gratitude.
Mes remerciements vont également à l'égard des membres du Laboratoire d'Algébre, de Géométrie Algèbrique et Applications, particulièrement Dr Daouda FAYE, Dr Ernest BAZUBWABO, Monsieur Babacar THIAW,Abdoul SALL, Ndongo DIOUF et les autres.
Un très grand Merci à mes Doyens : Mamadou BOP, Moussa FAYE et Pape Ahmat SARR pour leur accueil chaleureux, leurs conseils et leur soutien.
Mes remerciements vont aussi à l'endroit de tous les étudiants et étudiantes du Lôg, particulièrement ceux de la commune de Soum. Je leur en suis vraiment reconnaissant.
Je remercie, mes parents, mes frères, mes soeurs et toute ma famille pour leurs soutiens et particulièrement Aliou et Babacar qui ont été présent durant une très grande partie de la période de mon travail et qui m'ont fortement soutenu.
Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

Résumé

Nom : DIOUF

Prénom : Abdou

Date et lieu de naissance : né le 01 Janvier 1980 à Soum

Etablissement : Faculté des Sciences et Techniques

Diplôme préparé : Thèse de Doctorat unique

Spécialité : Mathématiques Pures

Option : Algèbre

Titre : "Caractérisation des semi-FGI-anneaux et des DQA-anneaux commutatifs "

Date et lieu de soutenance : 29 Janvier 2017

Le Jury

Président	Mamadou	SANGHARE	Professeur UCAD
Membres	Gérard	KIENTEGA	Professeur Univ.Ouaga I (Burkina Faso)
	Oumar.	SALL	Maître de Conférences (UASZ)
	Mohamed Ben	MAAOUIA	Maître de Conférences (UGB)
	Oumar	DIANKHA	Professeur UCAD
	Papa Cheikhou	DIOP	Maître-Assistant Univ. Thiès
	Mamadou	BARRY	Professeur UCAD

Résumé : Soit A un anneau commutatif : Un A-module M est dit semi-co-Hopfien si tout endomorphisme injectif pour image un facteur direct de M. Un anneau A est un dit semi-FGI-anneau si tout A-module semi-co-Hopfien est de type fini. Un anneau A dit DQA-anneau si tout A-module Dedekind fini est quasi-Artinien.

Cette thèse est constituée de quatre parties :

Dans la première partie nous étudions quelques résultats généraux des modules Hopfiens, des modules co-Hopfiens, des modules semi-co-Hopfiens et des modules purement co-Hopfiens.

Dans la deuxième partie nous donnons une caractèrisation des semi-FGI-anneaux commutatifs. Nous montrons qu'un anneau commutatif A est un semi-FGI-anneau si et seulement si A est Artinien à idéaux principaux.

Dans la troisième partie nous étudions les propriétés des WFGI-modules.

Enfin dans la quatrième partie nous étudions et caractérisons les DQA-anneaux commutatifs. Nous montrons qu'un anneau A est un DQA-anneau si A est Artinien à idéaux principaux.

Mots clés : module Hopfien, module Co-Hopfien, module semi-co-Hopfien, module purement co-Hopfien, module faiblement co-Hopfien, module quasi-Artinien, module Dedekind fini, module type fini, module WFGI-modules, module sériel, module unisériel, semi-FGI-anneau, DQA-anneau.

Table des matières

Introduction

La théorie des modules Hopfiens et co-Hopfiens a inspiré beaucoup de chercheurs du 20 ième siècle. Elle a commencé par l'étude des groupes commutatifs Hopfiens (resp, co-Hopfien) Cf : **Beaumont :[10]** ; **Crawley :[14]** ; **Hill** and **Megibben :[21]**. Des travaux d'extensions de ces résultats ont été faits parallèlement dans le cadre des modules sur les anneaux commutatifs principaux Cf : **Kaplansky** ; **Beaumont** and **Pierce :[23, 9]**.

Un module est Hopfien si tout épimorphisme est un automorphisme.

Un module est co-Hopfien si tout monomorphisme est un automorphisme.

Un module est dit semi-co-Hopfien si pour tout endomorphisme injectif f de M, Imf est un facteur direct de M.

Un module est purement-co-Hopfien si pour tout monomorphisme f de M, Imf est pur dans M.

Un module est de Fitting si pour tout endomorphisme f de M, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $M = Imf^n \oplus Kerf^n$.

Un module est de type fini s'il existe une partie finie $S \subset M$ telle que $M =\prec S \succ$.

Un module est Dedekind fini si pour tout sous- module N de M tel que $M \oplus N \cong M$, alors N = 0.

Un module est faiblement co-Hopfien si tout monomorphisme est essentiel c'est-à-dire f(M) $\preceq_e$ M.

L'étude des anneaux sur lesquels tout module de type fini est Hopfien (resp, co-Hopfien ; de Fitting) a pris une place centrale dans cette théorie :

En **1966 J. Strooker [36]** a prouvé que sur un anneau commutatif tout module de type fini est Hopfien. Ces anneaux sont caractérisés par **Goodearl [19]** : Ce sont les anneaux tels que $\mathbb{M}_n(\mathrm{A})$ est répétitif à gauche pour tout $n \geq 1$. Ce même résultat est indépendamment démontré par **Vasconcelos [38]** en **1969**.

En **1970 Vasconcelos [39]** a prouvé que sur les anneaux commutatifs de dimension de Krull nulle, tout module de type fini est co-Hopfien.

Si l'anneau n'est pas nécessairement commutatif, **E.P. Armendariz, J. W. Fisher et R. L. Snider [17]** ont montré que les anneaux A tels que $\mathbb{M}_n(\mathrm{A})$ est fortement $\pi-$régulier pour tout $n > 1$ sont les anneaux A tels que tout A-module de type fini est co-Hopfien.

En **1979, Hirano [22]** surprend les chercheurs par le résultat suivant : Les anneaux A pour lesquels tout A-module de type fini est Hopfien et co-Hopfien sont les anneaux tels que tout A-module de type fini est de Fitting.

En **1988, P. Menal [29]**, pose la question de savoir : Quels sont les anneaux pour lesquels tout module cyclique est Hopfien ? Et c'est en **1992** que **Varadarajan [37]** a donné une réponse à cette question en se basant sur le résultat de **Goodearl [19]**.

Le second sujet qui a occupé une place centrale dans la théorie des modules

Hopfien et co-Hopfien est lié à la question suivante : Quels sont les anneaux A sur lesquels tout A-module Hopfien (resp. co-Hopfien) est Noethérien (resp. Artinien) ?

En **1985, Kaidi** et **Sangharé [34]** ont montré que si l'anneau est commutatif, la réponse est que ce sont les anneaux Artiniens à idéaux principaux. Par la suite **Sangharé** dans **[35]** a généralisé ce résultat au cas des duo-anneaux.

En **1993 R. Camps** et **W. Dicks [12]** ont donné une caractérisation des anneaux semi-locaux.

En **2001, A. Haghany** et **M. R. Vadadi [20]** ont introduit la classe des modules faiblement co-Hopfiens comprise entre celle des co-Hopfiens est celle des Dedekind fini.

En **2002, A. Ghorbani** et **A. Haghany [18]** ont introduit la classe des modules Hopfien généralisés qui est comprise strictement entre celle des Hopfiens et celle des Dedekind fini.

En **2005 M. Barry, O. Diankha** et **M. Sangharé [8]** ont caractérisé les anneaux commutatifs A sur lesquels tout A-modules co-Hopfien est de type fini, appelés les FGI-anneaux.

En **2010, A. Mbaye, M. Sangharé** et **S. D. Touré** ont trouvé une caractérisation des SCI-anneaux c'est-à-dire les anneaux commutatifs A sur lesquels tout A-module co-Hopfien est finiment cogénéré. **[28]**.

En **2010** la caractérisation des anneaux commutatifs A sur lesquels tout

A-module faiblement co-Hopfien soit de type fini a été donné par P. C. Diop et M. Barry. On les appelle les WFGI-anneaux. **[3]**.

En **2011 P. C. Diop** et **M. Barry** ont caractérisé les anneaux commutatifs A sur lesquels tout A-module faiblement co-Hopfien est de dimension uniforme finie, appelés FGD-anneaux.**[5]**.

En **2011** Les anneaux commutatifs A sur lesquels tout A-module Dedekind fini soit de type fini appelés FDF-anneaux sont aussi caractérisé par **P. C. Diop** et **M. Barry.[4]**.

Maintenant on se pose les questions de savoir :

≫ Quels sont les anneaux A pour lesquels tout A-module est semi-co-Hopfien si et seulement si il est de type fini ?

≫ Quels sont les anneaux A pour lesquels tout A-module est Dedekind fini si et seulement si il est quasi-Artinien ?

≫ Ces questions ont fait l'objet de publication respectivement : dans **JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications** ; Volume 31, Number 1, 2013,pp 31-37 **[7]** et dans **International Journal of Algebra**,Vol.7, 2013, n°18, 873-880 **[6]**.

Dans le chapitre 2 de ce document, nous avons prouvé que les anneaux commutatifs A, pour lesquels tout A-module est semi-co-Hopfien si et seulement si il est de type fini et qui sont appelés semi-FGI-anneaux, sont les anneaux artiniens à idéaux principaux.

Dans le chapitre 4, nous prouvons que les anneaux commutatifs A pour lesquels tout A-module est Dedekind fini si et seulement si il est quasi-Artinien appelés DQA-anneaux, sont les anneaux artiniens à idéaux principaux.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Le premier Chapitre traite des généralités sur la Hopficité et la co-Hopficité des modules. Nous présentons dans ce chapitre des résultats principaux sur les modules co-Hopfiens,les modules semi-co-Hopfiens et les modules purement co-Hopfiens.

Le second est réservé à la caractérisation des semi-FGI-anneaux commutatifs.

Dans le troisième on introduit la notion de WFGI-module et on donne quelques unes de ses propriétés.

Et enfin le quatrième chapitre étudie les anneaux commutatifs A sur lesquels tout A-module est Dedekind fini si et seulement si il est quasi-Artinien.

Chapitre 1

Hopficité et co-Hopficité

Sommaire

1.1 Introduction

Ce chapitre est réservé à l'étude des modules Hopfiens et des modules co-Hopfiens qui sont deux concepts duaux. Le premier paragraphe traite de quelques résultats des modules Hopfiens. C'est-à-dire les modules M, tels que tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme. Respectivement, les modules co-Hopfiens sont prise en compte par le second paragraphe : Ce sont les modules tels que tout endomorphisme injectif est un automorphisme. Cette dernière notion sera généralisée au troisième et au quatrième paragraphe respectivement par le concept de module semi-co-Hopfien et de module purement co-Hopfien.

Un module M est dit semi-co-Hopfien si pour tout endomorphisme injectif f de M, Imf est un facteur direct de M.

Un module M est purement-co-Hopfien si pour tout monomorphisme f de M, Imf est pur dans M.

1.2 Modules Hopfiens

Définition 1.2.1 *Soit A un anneau et M un A-module :*

1) *M est dit Hopfien si tout endomorphisme surjectif,* $f : M \longrightarrow M$ *est un automorphisme.*

2) *Un anneau A est dit Hopfien si le A-module à gauche* A_g *est Hopfien.*

Exemples 1.2.2 *:*

- ◁ *Tout anneau commutatif est Hopfien ;*
- ◁ *Tout corps est Hopfien comme anneau ;*
- ◁ *Tout anneau simple est Hopfien comme anneau ;*
- ◁ *Soit K un anneau commutatif et J un ensemble infini d'indices, alors* $A = K[(x_\alpha)_{\alpha \in J}]$ *est Hopfien dans A-Mod, mais non Hopfien comme anneau ;*
- ◁ *Soit K un corps et V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable ; alors*

$A = End_K(V)$ est Hopfien comme anneau mais non Hopfien comme A-module ;

- ◁ *Tout module simple est Hopfien ;*
- ◁ *Tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps est Hopfien ;*
- ◁ *Tout module fini est Hopfien ; En particulier 0 ;*
- ◁ *Tout groupe fini est Hopfien ;*
- ◁ *Tout groupe abélien finiment généré est Hopfien ;*
- ◁ *Tout module Noethérien est Hopfien ;*
- ◁ *Soit A un anneau commutatif, alors tout A-module de type fini est Hopfien ;*

Définition 1.2.3 *: Un module M est quasi-projectif lorsque pour tout module N et tout f et $g \in Hom(M, N)$ avec g surjectif, il existe un unique endomorphisme $h : M \to M$ tel que $f = goh$.*

Remarque 1.2.4 *:*

- ◁ *Tout facteur direct d'un module Hopfien est Hopfien ;*
- ◁ *Soit $M = \oplus_{i\epsilon I} M_i$ où $(M_i)_{i\epsilon I}$ est une familles de A-modules :*
  - **(i)** *Si M est Hopfien alors chaque M_i est Hopfien.*
  - **(ii)** *Si chaque M_i est totalement invariants alors M est Hopfien si et seulement si chaque M_i est Hopfien.*
- ◁ *Si M^I est Hopfien pour un certain ensemble I, alors I est fini.*

Proposition 1.2.5 *: Soit M un module quasi-projectif tel que dim* $(M) < \infty$ *ou codim* $(M) < \infty$ *; alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *;*M^n *est un module Hopfien.*

Preuve :

Puisque dim(M^n) = n dim M et codim (M^n) = n codim (M) et que M^n est quasi-projectif si M est quasi-projectif donc M^n vérifie les mêmes hypothèses que M ie M^n est quasi-projectif et dim $M < \infty$ ou codim $(M) < \infty$ donc il suffit de prouver que M est Hopfien.

Soit $f : M \to M$ un endomorphisme surjectif; comme M est quasi-projectif, il existe un endomorphisme h de M tel que foh = $Id_M \Rightarrow Kerf \oplus Imh = M$. Comme h est injectif on a Kerh = 0 de plus on a $Imh \cong M/Kerh = M/0 = M$ d' où $Kerf \oplus M \cong M$. d' où dim (M) + dim (Kerf) = dim (M) et codim (M) + codim (Kerf) = codim (M).

Si dim $(M) < \infty$, on a dim $(Kerf) = 0 \Rightarrow Kerf = 0$. Si codim $(M) < \infty$ on alors codim (Kerf) = $0 \Rightarrow Kerf = 0$. Par conséquent f est injectif et M est Hopfien. Et pour les mêmes raisons M^n est Hopfien pour tout entier naturel non nul n.

Proposition 1.2.6 *: Soit M un A-module tel que M/N est Hopfien pour tout sous module non nul N de M, alors M est Hopfien.*

Proposition 1.2.7 *: Soit M un A-module et N un sous module totalement invariant de M. Si N et M/N sont Hopfient, alors M est Hopfien.*

Proposition 1.2.8 *: Soit M un A-module quasi-projectif de type fini. Alors M est Hopfien si et seulement si M/Rad(M) est Hopfien.*

Preuve :

Le radical de Jacobson de M, Rad(M) est un sous module totalement invariant de M.

Quand M est de type fini, Rad(M) est superflu d'après le Lemme de Nakayama.

1.3 Modules co-Hopfiens

Définition 1.3.1 *: Soit A un anneau et M un A-module :*

1) *M est dit co-Hopfien si tout endomorphisme injectif, $f : M \longrightarrow M$ est un automorphisme.*

2) *Un anneau A est dit co-Hopfien si le A-module à gauche A_g est co-Hopfien.*

Exemples 1.3.2 *:*

◁ *Tout module Artinien est co-Hopfien.*

◁ *Tout module de type fini sur un anneau Artinien est Artinien donc co-Hopfien.*

◁ *Tout A-module simple est à la fois Hopfien et co-Hopfien ; car $End_A(M)$ est de division.*

◁ *Tout anneau fini est à la fois Hopfien et co-Hopfien aussi bien comme A-module à gauche et à droite. $\mathbb{Z}$ est co-Hopfien comme anneau car l'identité est son seul endomorphisme ; par contre n'est pas co-Hopfien comme $\mathbb{Z}$-module.*

- $\triangleleft$ *Tout A-module à gauche projectif de type fini est co-Hopfien.*

- $\triangleleft$ *Tout module semi-simple Artinien est co-Hopfien.*

- $\triangleleft$ *Tout module quasi-injectif de cogénération finie est co-Hopfien.*

- $\triangleleft$ $\mathbb{Q}$ *est à la fois Hopfien et co-Hopfien comme $\mathbb{Z}$-module, mais aussi comme $\mathbb{Q}$-module.*

- $\triangleleft$ $\mathbb{Z}$ *est co-Hopfien comme anneau ; cependant il n'est pas co-Hopfien comme $\mathbb{Z}$-module.*

- $\triangleleft$ *Soit K un corps et $A = K((x_\alpha)_{\alpha \in J})$ le corps des fractions à une infinité d'indéterminées est un anneau commutatif qui est co-Hopfien comme A-module et non comme anneau.*

Remarque 1.3.3 *: La notion de co-Hopficité des A-modules n'est pas héréditaire, Varadarajan a construit un A-module co-Hopfien qui admet un sous-module et un module quotient qui ne sont pas co-Hopfiens. Mais cela n'empêche que sous certaines conditions on peut avoir des résultats partiels.*

- $\triangleleft$ *Tout facteur direct d'un module co-Hopfien est co-Hopfien ;*

- $\triangleleft$ *Soit $M = \oplus_{i \in I} M_i$ où $(M_i)_{i \in I}$ est une famille de A-modules :*

  (i) *Si M est co-Hopfien alors chaque M_i est co-Hopfien.*

  (ii) *Si chaque M_i est totalement invariant alors M est co-Hopfien si et seulement si chaque M_i est co-Hopfien.*

- $\triangleleft$ *Si M^I est co-Hopfien pour un certain ensemble I, alors I est fini. On en déduit que $M^{\mathbb{N}}$ n'est pas co-Hopfien.*

Proposition 1.3.4 *: Soit M un module dont tout sous module propre N est co-Hopfien, alors M est co-Hopfien.*

Proposition 1.3.5 *:*

Soit M un A-module et N un sous module complètement invariant de M.

Si N et M/N sont co-Hopfiens, alors M est co-Hopfien.

Preuve :

Soit f un endomorphisme de M.

Comme N est complètement invariant, on a le diagramme commutatif suivant :

$N \longrightarrow M \longrightarrow M/N$ avec i l'injection canonique de N dans M et p la surjection canonique de M dans M/N.

Supposons que N et M//N soient co-Hopfiens et f injectif.

La relation iof' = foi entraine que f' est injectif et il en résulte que f' est bijectif car N est co-Hopfien. On a alors les relations :

f(N)= (foi)(N)= (iof')(N)= i(f(N))= i(N)=N.

Soit $\overline{x} \in Ker\overline{f}$. On a $\overline{f}(\overline{x}) = 0 = \overline{f(x)}$, alors $f(x) \in N = f(N)$.

Donc si $x \in f^{-1}(f(N))$, alors $x \in f^{-1}(N)$ d'où $x \in N$ entraine $\overline{x} = \overline{0}$.

D'où $Ker\overline{f} = \overline{0}$ donc $\overline{f}$ est injectif. Et comme M/N est co-Hopfien alors $\overline{f}$ est bijective.

Soit $y \in M$ on a $p(y) \in M/N$. Puisque $\overline{f}$ est injectif il existe un unique $\overline{z} \in M/N$ tel que p(y) = $\overline{f}(\overline{z})$. Ainsi p(y)= $\overline{f}(p(z))$= pof(z)= p(f(z)). D'où il existe $t \in N$ tel que y = f(z) + t ; et comme f' est bijective il existe un unique $n \in N$ tel que f'(n) = t et donc f(n)= t.

Par conséquent y = f(z) + f(n) = f(z+n)= f(x) avec x = z+n c'est-à-dire f(x) = y donc f est un automorphisme de M car f est surjectif. Ainsi M est co-Hopfien.

Proposition 1.3.6 *: Soit M un A-module quasi-injectif. Si* $udim(M) \leq \infty$ *où* $codim(M) \leq \infty$*. Alors* M^n *est co-Hopfien pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

Preuve :

Remarquons que M^n est quasi-injectif si M l'est et $udim(M^n) = n.udim(M)$ et $codim(M^n) = ncodim(M)$. Il suffit donc de montrer que M est co-Hopfien. Soit f un endomorphisme injectif de M, la quasi-injectivité de M implique que $M = Imf \oplus L$ pour un sous-module L de M. Puisque f est un isomorphisme de $M \Rightarrow f(M)$; on a : udim(M) = udim(M)+ udim(L) et codim(M)= codim(M)+ codim(L). Et comme udim(M) et codim(M) sont finis alors L = 0. Ce qui prouve que M = f(M) d' où M est Hopfien.

Corollaire 1.3.7 *: Soit M un A-module quasi-injectif tel que udim(M) est finie et N un sous-module totalement invariant, alors* N^n *est co-Hopfien pour tout entier* $n \geq 1$*.*

Proposition 1.3.8 *Soient M un module quasi-injectif et N un sous-module totalement invariant et essentiel dans M.*

Alors N est co-Hopfien si et seulement si M est co-Hopfien.

Preuve :

Supposons que M est co-Hopfien et soit f un endomorphisme injectif de N. Comme M est quasi-injectif ; il existe un endomorphisme g de M tel que la restriction à N est égale à f. Donc g est injectif car N est essentiel dans M et puisque M est co-Hopfien, g est inversible (i.e est un automorphisme). Soit $x \in N$, il existe $y \in M$ tel que x = g(y). Or $g^{-1} \in End(M)$ et N est complètement invariant, donc $y = g^{-1}(x) \in N$, d' où f est surjectif. Inversement, supposons que N est co-Hopfien et soit $f : M \longrightarrow M$ un endomorphisme injectif de M. Alors $f_{/N}$ est un endomorphisme injectif de N. Par conséquent, f est bijectif c'est-à-dire f(N) = N. Comme M est quasi-injectif, alors $M = f(M) \oplus L$ pour un certain sous-module L de M. On a donc $0 = f(N) \cap L = N \cap L$, ce qui implique que L = 0 ; car $N \preceq_e M$. Par suite M = f(M) et M est co-Hopfien.

Proposition 1.3.9 *Soit $M = \oplus_{i \in I} M_i$ où $(M_i); i \in I$ une famille de A-sous-modules de M. on a :*

1) *Si M est co-Hopfien alors M_i est co-Hopfien $\forall i \in I$.*

2) *Si M_i est complètement invariant $\forall i \in I$ alors M est co-Hopfien si et seulement si M_i est co-Hopfien $\forall i \in I$.*

Preuve : Elle découle de :**[26]**.

1.4 Modules Semi-co-Hopfiens

Dans cette partie on étudie la semi-co-Hopficité et quelques propriétés des modules semi-co-Hopfiens.

Définition 1.4.1 *: Soit A un anneau commutatif.*

- ◁ *Un A-module M est dit semi-co-Hopfien si pour tout endomorphisme injectif de M,* $f : M \longrightarrow M$ *imf est un facteur direct de* M *; c'est-à-dire* $Imf \oplus N = M$.

- ◁ *Un anneau A est semi-co-Hopfien si le A-module A l'est.*

- ◁ *Un A-module M vérifie* C_2 *si tout sous-module isomorphe à un facteur direct est un facteur direct.*

- ◁ *Un A-module M vérifie* D_2 *si tout sous-module N tel que M/N est isomorphe à un facteur direct de M est un facteur direct de M.*

- ◁ *Un A-module M est Dedekind fini si* $M \cong M \oplus N$ *pour un module* $N \Rightarrow N = 0$.

- ◁ *Par exemple les modules co-Hopfiens et les modules Hopfiens sont Dedekind finis.*

- ◁ *Un anneau A est Dedekind fini si et seulement si* $\forall a, b \in A$ *tels que* $ab = 1 \Rightarrow ba = 1$.

- ◁ *Un module M est dit Epi-rétractable si tout sous-module de M est M-cyclique.*

Exemples 1.4.2 *: Soit A un anneau commutatif.*

- ◁ *Tout A-module M co-Hopfien est semi-co-Hopfien.*

- ◁ *Tout A-module M qui vérifie* C_2 *est semi-co-Hopfien.*

- ◁ *Tout A-module injectif M est semi-co-Hopfien.*

◁ *Tout A-module quasi-injectif est semi-co-Hopfien : Muller and Mohamed : [30].*

◁ *Tout A-module qui vérifie la DCC sur ses sous-facteurs, est semi-co-Hopfien.*

◁ *Tout module quasi-principalement injectif est semi-co-Hopfien.*

Lemme 1.4.3 *: Soit M un A-module, on a les équivalences suivantes :*

1) *M est semi-co-Hopfien ;*

2) *Tout sous module N qui est isomorphe à M est un facteur direct de M.*

Preuve *:*

$(2 \Rightarrow 1)$ *Pour tout endomorphisme injectif de M,* $f : M \longrightarrow M$ *alors l'application* $f : M \longrightarrow Imf$ *est une bijection ; d' où* $Imf \oplus N = M$ *d' où M est semi-co-Hopfien.*

$(1 \Rightarrow 2)$ *Soit N un sous module de M tel que* $N \cong M$*, et soit* $f : M \longrightarrow N$ *cet isomorphisme on a.*

Comme Imf = N, et M est semi-co-Hopfien alors Imf = N est un facteur direct de M.

Définition 1.4.4 *:*

◁ *Soit M, un A-module ; on dit que M est un SSP-module si la somme directe de deux facteurs directs de M est un facteur direct de M. On dit aussi que M vérifie la SSP si et seulement si pour tout décomposition* $M = D \oplus B$ *et tout A-homomorphisme f de D dans B alors Imf est un facteur direct de M.*

◁ *Un module est dit faiblement co-Hopfien si l'image de tout endomorphisme injectif de M est essentiel dans M.*

◁ *Un sous-module N de M est dit sous-facteur de M s'il n'est pas facteur direct de M.*

Remarque 1.4.5 *:*

◁ *Tout module semi-co-Hopfien et quasi-continu vérifie C_2.*

◁ *Si $M \oplus M$ vérifie la SSP alors M est semi-co-Hopfien.*

◁ *Il existe un A-module à gauche semi-co-Hopfien qui n'est pas un A-module à droite semi-co-Hopfien. Cf Pinar and Ozcan :* ***[32]*** *: Exemple 2.20.*

Proposition 1.4.6 *: Soit M un A-module, on a les équivalences suivantes :*

1) *M est co-Hopfien.*

2) *M est Dedekind fini et semi-co-Hopfien.*

3) *M est faiblement co-Hopfien et semi-co-Hopfien.*

Preuve :

(3) $\Leftrightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) découle des remarques précédentes.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Soit f un endomorphisme injectif de M, comme M est semi-co-Hopfien, alors M $= f(M) \oplus K$ pour un sous-module K de M. On en déduit un isomorphisme défini par : $\varphi : M \oplus K \to M$, φ (m,k) $=$ f(m)$+$ k. Et comme M est Dedekind fini, on a : K $=$ 0, d' où f(M) $=$ M et f est un isomorphisme, d' où M est co-Hopfien.

Proposition 1.4.7 *: Si M est un module Epi-rétractable tel que tout sous-module de M est M-principalement injectif, alors M est semi-co-Hopfien :* ***[24]****.*

Lemme 1.4.8 *: Si tout sous-facteur de M est semi-co-Hopfien, alors M est semi-co-Hopfien.*

Preuve :

Supposons que M ne soit pas semi-co-Hopfien, alors d'aprés Pinar and Ozcan :**[32]** : lemme 2.1 il existe un sous-facteur N de M tel que $N \cong M$,

Exemples 1.4.9 *: Il existe un module simple U et un module injectif V tel que $U \oplus V$ ne soit pas semi-co-Hopfien.*

Proposition 1.4.10 *: Soit $M = \oplus_{i \in I} M_i$, où M_i est invariant par injection de M $\forall i \in I$. Alors M est semi-co-Hopfien si et seulement si M_i est semi-co-Hopfien $\forall i \in I$.*

Preuve :

$\Rightarrow$) Découle de Pinar and Ozcan : **[32]** : (Lemme 2.6).

$\Leftarrow$)Soit f un endomorphisme injectif de M, alors la restriction à $M_i; \forall i \in I$ est un endomorphisme injectif de M_i. Par hypothèse chaque f(M_i) est un facteur direct dans M_i, d' où M $= (\oplus_{i \in I} f(M_i)) \oplus X = f(M) \oplus X$ avec $X \leq M$. Donc M est semi-co-Hopfien.

Proposition 1.4.11 *: Soit M, un module. Si $End_A(M)$ est semi-co-Hopfien, alors M est semi-co-Hopfien. La réciproque est vraie si Kerf est engendré par M avec $f \in End(M)$ et $Ann_{End(M)}(f) = 0$.*

Preuve :

Elle découle de Pinar and Ozcan : **[32]** : proposition 2.17

Corollaire 1.4.12 *: Si M est libre, alors M est semi-co-Hopfien si et seulement si $End_A(M)$ est semi-co-Hopfien. En particulier A^n est semi-co-Hopfien comme A-module si et seulement si l'anneau des matrices carrées d'ordre n, $M_n(A)$ est semi-co-Hopfien comme $M_n(A)$-module.*

Théorème 1.4.13 *: Soit M un A-module ; Si M[X] est semi-co-Hopfien comme A[X]-module, alors M est semi-co-Hopfien comme A-module.*

Preuve :

Soit $f \in End_A(M)$ un endomorphisme injectif, alors $f[X] \in End_A(M[X])$ et définie par f[X]($\Sigma m_i X^i) = \Sigma f(m_i)X^i$ est un endomorphisme injectif de M[X]. E comme M[X] est semi-co-Hopfien, Im(f[X])= (Imf)[X] est un facteur direct de M[X] ; d' où Imf est facteur direct de M.

1.5 Modules purement co-Hopfiens

Soit A un anneau associatif unitaire et M un A-module unitaire non nul. Le A-module M est dit purement co-Hopfien si pour tout endomorphisme injectif f de M, Imf est pur dans M. Un sous-module N d'un module M est dit pur dans M si $IM \cap N = IN$ pour tout idéal I de A. Tout facteur direct de M est un sous-module pur, mais la réciproque est fausse en général : **[33]**

Définition 1.5.1 *:*

- ◁ *Un A-module de M est purement co-Hopfien si pour tout endomorphisme injectif de M ; $f : M \longrightarrow M$, Imf est pur dans M.*
- ◁ *Un module M est F-régulier si tout sous-module de M est pur.*

Exemples 1.5.2 *:*

- ◁ *Tout module semi-co-Hopfien est purement co-Hopfien.*
- ◁ *Tout module F-régulier est purement co-Hopfien.*
- ◁ *Tout module semi-simple est purement co-Hopfien.*
- ◁ *Si M est pur et simple c'est-à-dire admet seulement deux sous-modules pur (0 et M), alors M est purement co-Hopfien.*
- ◁ *Un A-module libre de torsion n'est pas purement co-Hopfien par exemple $\mathbb{Z}$.*
- ◁ *L'anneau des endomorphisme d'un module purement co-Hopfien n'est pas purement co-Hopfien. Par exemple $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ est co-Hopfien ; mais $End(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ est intègre et n'est pas co-Hopfien.*

Lemme 1.5.3 *Soit M un A-module donné, on a les équivalences suivantes :*

1) *M est purement co-Hopfien.*

2) *Tout sous-module N de M qui est isomorphme à M est pur dans M.*

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2) Soit $N \leq M$ et $N \simeq M$, et soit f cette isomophisme de M vers N ; on a : $f : M \longrightarrow N$ et $i : N \longrightarrow M$; alors iof est un monomorphisme car étant

composée de deux monomorphismes ; d' où (iof)(M) est pur dans M car M est purement co-Hopfien c'est-à-dire i(f(M))= i(N)= N est pur dans M.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit f un monomorphisme alors $f(M) \simeq M$ et $f(M) \leq M$ d' où f(M) est pur dans M d'aprés 2) ; donc M est purement co-Hopfien.

Proposition 1.5.4 *Pour tout anneau A, on a les équivalences suivantes :*

1) *A est purement co-Hopfien.*

2) *A est semi-co-Hopfien.*

Preuve : Elle découle de : **[33]**.

De cette proposition et de la proposition 2.3 de l'article semi-co-Hopfien de Aydogdu : **[32]**, on a les résultats suivantes :

Corollaire 1.5.5 *Pour tout anneau A on a les équivalences suivantes :*

1) *A est purement co-Hopfien.*

2) *A est semi-co-Hopfien.*

3) *Si Ann(a)= 0 pour $a \in A$, alors le sous-module engendré par a, $\prec a \succ$ est un facteur direct.*

4) *Si Ann(a)= 0 pour $a \in A$, alors le sous-module engendré par a, $\prec a \succ$ est égal à A, c'est-à-dire : $\prec a \succ = A$.*

Tout A-isomorphisme de $\prec a \succ \longrightarrow A$; $a \in A$ se prolonge dans A.

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2) et 2) $\Leftrightarrow$ 3) sont trivials.

3) $\Rightarrow$ 1) Soit $f : A \longrightarrow A$ un monomorphisme alors f(A) $= \prec a \succ$ pour

$0 \neq a \in A$ d' où $\prec a \succ$ = I est un facteur direct de A car A est semi-co-Hopfien d' où $\prec a \succ$ est généré par un idempotent. Et comme $a \neq 0$ alors a = 1 d'où

$\prec a \succ = A$ d' où A est co-Hopfien.

Définition 1.5.6 *:*

Un A-module M vérifie la propriété C2 si tout sous-module isomorphe à un facteur direct est un facteur direct.

Un A-module M est totalement invariant si pour tout sous-module N de M et pour tout endomorphisme $f : N \longrightarrow M$ on a $f(N) \leq N$.

Un module est dit module de multiplication si pour tout sous module N de M il existe un idéal I de A tel que N = IM.

Proposition 1.5.7 *Tout facteur direct d'un module purement co-Hopfien est purement co-Hopfien.*

Preuve :

Soit N un facteur direct de M alors $M = N \oplus N'$ avec N' un sous-module de M. Soit $f : N \longrightarrow N$ un monomorphisme ; et soit $g : M \longrightarrow M$ par g(n+a) = f(n)+a ou $a \in N'$ et $n \in N$. Donc g est un monomorphisme et g(M)= $f(N) \oplus N'$. Comme M est purement co-Hopfien g(M) est pur dans M.

Montrons que f(M) est pur dans N. Soit I un idéal de A ; $IM \cap g(M) = Ig(M)$; d' où $I(N \oplus N') \cap (f(N) \oplus N') = I(f(N) \oplus N')$ d'où $(IN \oplus IN') \cap (f(N) \oplus N') = ((IN) \cap f(N)) \oplus (IN' \cap N')) = If(N) \oplus IN'$; d' où $(IN \cap f(N)) \oplus IN' = If(N) \oplus IN' \Rightarrow IN \cap f(N) = If(N)$, donc f(N) est pur dans N.

Proposition 1.5.8 *Soit M un A-module ; si tout sous-facteur N de M est purement co-Hopfien, alors M est purement co-Hopfien.*

Preuve :

Supposons que M n'est pas purement co-Hopfien ; alors il existe un sous-module N de M qui est isomorphe à M et qui n'est pas pur dans M (Lemme 2). Mais N non pur entraine que N est un sous-facteur. d' où la contradiction avec l'hypothèse. Par suite N est purement co-Hopfien donc M est purement co-Hopfien.

Proposition 1.5.9 *Soit $M = M_1 \oplus M_2$; M est pleinement stable. M est purement co-Hopfien si et seulement si M_1 et M_2 sont purement co-Hopfiens.*

Preuve :

$\Rightarrow$) Découle de la proposition post-précédente.

$\Leftarrow$) Soit $f : M \longrightarrow M$ un endomorphisme injectif ; posons $f_i = f_{IM_i}$ i $=$ 1 ; 2. Comme M est totalement invariant $f_i(M_i) \leq M_i$. Comme f est injectif, il en est de même pour les f_i ; d' où $f_i(M_i)$ est pur dans M_i ; i $=$ 1 ; 2. d' où $f_1(M_1 \oplus f_2(M_i)$ est pur dans M ; Et comme f(M)$=$ $f_1(M_1 \oplus f_2(M_i)$; on a f(M) est pur dans M.

Corollaire 1.5.10 *Soit $M = \oplus_{i \in I} M_i$ et M totalement invariant ; on a : M est purement co-Hopfien si et seulement si M_i l'est pour tout $i \in I$.*

Théorème 1.5.11 *Soit M un A-module de multiplication, fidèle et de type fini, on a les équivalences suivantes :*

1) *M est purement co-Hopfien.*

2) *A est semi-co-Hopfien.*

3) *A est purement co-Hopfien.*

4) *M est co-Hopfien.*

5) *M est semi co-Hopfien.*

Preuve :

4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1) et 2) $\Leftrightarrow$ 3) sont trivial.

1) $\Rightarrow$ 2) Soit $a \in A$; $Ann_A(a) = 0$. Soit $f : M \longrightarrow M$ par f(m)= am pour tout $m \in M$. Montrons que f est injectif.

Soit $m \in Kerf$ alors am = 0 d' où $m \in Ann_A(a)$; Mais $Ann_M(a) = Ann_A(a)M$ $\Rightarrow m \in (Ann_A(a))M = 0.M = 0$ d' où m = 0.

Maintenant, f(M)= a.M est pur dans M ; d' où $\prec a \succ$ est pur dans A ; car M est de type fini, fidèle et de multiplication. Ainsi $\prec a \succ = \prec a^2 \succ$ d' où a = $ra^2 \Rightarrow a(1 - ra) = 0$. Comme $Ann_A(a) = 0 \Rightarrow 1 - ra = 0 \Rightarrow 1 = ra$ d'où a est un élément inévitable donc $\prec a \succ$ = A.

3) $\Rightarrow$ 4) Soit $f : M \longrightarrow M$ un endomorphisme injectif, comme M est de multiplication et de type fini, alors M est un module scalaire. d' où il existe $a \in A\backslash\{0\}$ tel que f(m)= am pour tout $m \in M$. Comme Kerf = 0 ; $Ann_M(a) = ((Ann_A(a))M$. d' où $Ann_A(a)M = 0$. Ainsi $Ann_A(a) \subseteq Ann_A(M) = 0$ $\Rightarrow Ann_A(a) = 0$. Mais A est purement co-Hopfien d' où $\prec a \succ$ = A, d'après le premier corollaire.

Corollaire 1.5.12 *Soit M un module fidèle de type fini et de multiplication,* *alors on a les équivalences suivantes :*

1) *M est purement co-Hopfien ;*

2) *$End_A(M)$ est purement co-Hopfien comme anneau*

CHAPITRE 2

Les Semi-FGI-anneaux commutatifs

Sommaire

2.1 Introduction

Soit A un anneau commutatif. Un A-module M est dit semi-co-Hopfien si pour tout endomorphisme injectif $f : M \longrightarrow M$, Imf est un facteur direct de M, c'est-à-dire $Imf \oplus N = M$ pour un sous-module N de M. Soit F_R la classe des A-modules de type fini et S_R la classe des A-modules semi-co-Hopfien. Dans **[39]** Vasconcelos, W. a prouvé que la classe des A-modules de type fini est incluse dans la classe des A-modules co-Hopfiens si A est commutatif à

idéaux principaux. D'où, par transitivité de l'inclusion, on a : $F_R \subset S_R$.
Dans ce chapitre, il est question de donner une caractérisation des anneaux sur lesquels tout A-module semi-co-Hopfien est de type fini ; c'est-à-dire $S_R = F_R$.

2.2 Semi-FGI-anneaux commutatifs

Pour un anneau commutatif A, il existe un A-module de type fini qui n'est pas semi-co-Hopfien (exemple $\mathbb{Z}$)et un A-module semi-co-Hopfien qui n'est pas de type fini (exemple $\mathbb{Q}$)(Barry et Diankha : **[8]**). Le but de ce chapitre est de caractériser les anneaux A pour lesquels tout A-module de type fini est semi-co-Hopfien ; c'est-à-dire tels que $S_R = F_R$. Ces anneaux sont appelés les semi-FGI-anneaux.

Nous allons prouver qu'un anneau commutatif est un semi-FGI-anneau si et seulement si, il est Artinien à idéaux principaux. On note par J(A) le radical de Jacobson de A. Tout au long de ce chapitre, les anneaux considérés sont associatifs commutatifs, unitaires, d'élément unité non nul et les A-modules sont unitaires.

Dans la première partie nous prouvons que si A est un semi-FGI-anneau alors A est de dimension de Krull nulle, c'est-à-dire que tout idéal premier est maximal. D'où J(A) est un nilidéal.

On montre dans la deuxième partie que si A est un anneau commutatif Artinien et si A admet un idéal non principal, alors il existe un A-module semi-co-Hopfien qui n'est pas de type fini.

Dans la troisième partie, nous donnons une caractérisation de ces anneaux et nous montrons qu'un anneau commutatif A est un semi-FGI-anneau si et seulement si A est Artinien à idéaux principaux.

2.3 Propriétés des semi-FGI-anneaux commutatifs

Définition 2.3.1

Soit A un anneau commutatif.

Un A-module M est dit semi-co-Hopfien si pour tout endomorphisme injectif f de M, imf est un facteur direct de M ; c'est-à-dire $Imf \oplus N = M$ *où N est un sous-module de M.*

Définition 2.3.2 *Soit A un anneau.*

On dit que A est un semi-FGI-anneau, si tout A-module semi-co-Hopfien est de type fini.

Exemples 2.3.3

1) *Tout A-module représentable est semi-co-Hopfien ;*

2) *Tout A-module Artinien est semi-co-Hopfien ;*

3) *Si* $Ann_A(M)$ *est un idéal maximal de A, alors M est semi-co-Hopfien ;*

4) *Soit P la famille des nombres entiers premiers. Alors* $M = \oplus_{p\in P}\mathbb{Z}_p$ *est semi-co-Hopfien ;*

5) *Une somme directe externe de copies de A-modules co-Hopfiens est un A-module semi-co-Hopfien.*

6) *Soit A un anneau Noethérien et P un idéal premier non maximal alors E(A/P) est semi-co-Hopfien car co-Hopfien.*

Proposition 2.3.4

Soit A un semi-FGI-anneau intègre ; alors A est un corps.

Preuve

Soit $S = A - \{0\}$ et K, le corps de fraction de A. Comme K est un A-module, montrons que K est semi-co-Hopfien.

Soit $f \in End_A(K)$ tel que f soit injectif. Comme f est injectif, donc $f \neq O$. Ce qui implique que f est une surjection d'apérs le lemme de Schur. D'où K est semi-co-Hopfien. Par conséquent K est un A-module de type fini.

Maintenant montrons que A = K.

Comme $i : A \longrightarrow K = S^{-1}A$ est une injection, donc $A \subset K$. Or K est un A-module de type fini, il résulte de **[27]** proposition 6.9 p. 134, que K est un idéal fractionnaire de A. D'où $K \subset d^{-1}A$, avec $d \in A$. Ce qui implique $dK \subset A$; or $dK = K$, donc $K \subset A$. Par conséquent K = A. Donc A est un corps.

Proposition 2.3.5

Soit A un semi-FGI-anneau, alors l'image homomorphe de A est un semi-FGI-anneau.

Preuve

Soit A un semi-FGI-anneau, B un anneau et soit $\phi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Soit M un B-module, alors ϕ induit une structure de A-module par la structure du groupe additif (M, +) : $A \times M \longrightarrow M$; $(a, m) \longmapsto \phi(a).m$. Ainsi (M, +) muni de ce produit est un A-module.

Donc si M est un B-module alors M est un A-module. Et tout B-endomorphisme de M est un A-endomorphisme de M. Donc si A est un semi-FGI-anneau alors B l'est aussi.

Proposition 2.3.6

Soit A un semi-FGI-anneau commutatif. Alors tout idéal premier de A est un idéal maximal et les idéaux premiers sont en nombre fini.

Preuve

Montrons d'abord que tout idéal premier de A est maximal.

Soit P un idéal premier de A. Alors d'après la proposition 2.3.5. A/P est un semi-FGI-anneau. Soit B le corps des fractions de l'anneau intègre A/P. Ainsi B considéré comme A/P-module est semi-co-Hopfien, d'après la proposition 2.3.4 on a : B = A/P. Donc A/P est un corps, d'où P est un idéal maximal de A.

Enfin montrons que le nombre d'idéaux premiers de A est fini.

II résulte de la première partie que A/P est un corps, donc A/P est un anneau simple. D'où d'après le Lemme de Schur, tout endomorphisme de A/P est un A/P-isomorphisme. De plus pour tout $h \in Hom_A(A/P, A/P')$ où P et P' sont deux idéaux premiers de A distincts, on a alors h = O. Si non h serait un isomorphisme et Ker h = O. Soit par exemple $x' \in P' - P$ alors on a :

$h(x' + P) = x'h(1 + P) = 0 \Longrightarrow x' + P = 0 \Longrightarrow x' \in P$ d'ou la contradiction. D'où $h = 0$. $\forall h \in Hom_A(A/P, A/P')$. Posons $L = \{$les idéaux premiers de A$\}$. Soit $M = \oplus_{P \in L} A/P$; Comme $Hom_A(A/P, A/P') = 0$ pour tout P, $P' \in L$ donc $f(A/P) \subseteq A/P$, pour tout $f \in End_A(M)$. Donc A/P est complètement invariant dans M, pour tout $P \in L$. Et comme A/P est semi-co-Hopfien donc M est semi-co-Hopfien. D'où M est de type fini. Par conséquent L est fini.

Corollaire 2.3.7

Soit A un semi-FGI-anneau commutatif. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) *Le radical de Jacobson (J(A)) de A est un nilidéal.*

(ii) *A est un anneau semi-local i.e admet un nombre fini d'idéaux maximaux.*

Preuve

(i) Soit A un semi-FGI-anneau commutatif et soit J(A), le radical de Jacobson de A. On sait que A admet un nombre fini d'idéaux premiers et qui sont tous des idéaux maximaux. Donc on voit aisément que le radical de Jacobson J(A) est confondu au nilradical.

(ii) Elle résulte de la proposition 2.3.6.

Corollaire 2.3.8

Soit A un semi-FGI-anneau commutatif. Alors Mod-A possède un nombre fini de modules simples.

Preuve

Comme A admet un nombre fini d'idéaux maximaux, Mod-A admet un nombre fini de modules simples d'après proposition 2.3.6.

Proposition 2.3.9

Un anneau Artinien à idéaux principaux est un semi-FGI-anneau.

Preuve

Elle résulte du fait que si A est un anneau Artinien dont tout idéal est principal, alors, d'après le théorème de Cohen-Kaplansky **[13]** ; tout A-module est somme directe de modules cycliques.

Maintenant supposons que M soit semi-co-Hopfien et qui n'est pas de type fini, alors comme il existe seulement un nombre fini de A-modules indécomposables cycliques non isomorphes, M possède un facteur direct N qui est somme directe d'un nombre infini dénombrable de modules cycliques $L_i (i = 1, 2....)$. Soit $N = \oplus_{i \in I} L_i$, comme N n'est pas co-Hopfien et chaque facteur direct est co-Hopfien alors les Li ne sont pas complètement invariant, D'où N n'est pas semi-co-Hopfien car chaque facteur direct est semi-co-Hopfien **[32]** : Proposition 2.9 ; ce qui contredit l'hypothèse ; Donc M est de type fini.

2.4 Caractérisation des semi-FGI-anneaux

Définition 2.4.1

Un A-module M est dit finiment annulé s'il existe $m_1; ...; m_n \in M$ *tels que* $Ann(M) = Ann(m_1; ...; m_n)$ *avec* $Ann(M) = \{ a \in A / ax = 0 / \forall x \in M \}$.

Remarque 2.4.2

Soit A un anneau commutatif.

Si M est un A-module de type fini alors M est finiment annulé ***[8]***

Proposition 2.4.3

Soit A un semi-FGI-anneau local commutatif; et E, l'envelope injective du A-module simple A/J(A) ; alors E est un A-module finiment annulé.

Preuve

Comme E est un A-module injectif indécomposable, alors il est semi-co-Hopfien car co-Hopfien ; par conséquent il est de type fini.

Proposition 2.4.4

Soit A un semi-FGI-anneau local commutatif; si N est un sous-module complètement invariant de E, alors N est finiment annulé.

Preuve

Soit $f : N \to N$ un endomorphisme injectif de N et $i : N \to E$, l'injection canonique de N. Alors il existe un morphisme $h : N \to E$ tel que h = iof ; et comme E injectif, il existe un endomorphisme $g : E \to E$ tel que goi = h.

Montrons que g est injectif :

Soit $0 \neq x \in E$; on a $Ax \neq 0$ est un sous-module non nul de E et $(A/J(A)) \cap Ax \neq 0$ car A/J(A) est essentiel dans E. Et comme A/J(A) est simple donc $(A/J(A)) \subset Ax$; et il existe $u \in A$ tel que $ux \neq 0$ et $ux \in A/J(A) \subset N$ par consequent $0 \neq h(ux) = g(ux) = ug(x)$, d'où g est un monomorphisme donc est un automorphisme de E. Soit $y \in N$, il existe $z \in E$ tel que g(z) = y, d'où $z = g^{-1}(y) \in N$ car N est complétement invariant, par suit y = g(x) = h(x) = f(x) et on en déduit que f est un automorphisme de N ; d'où le résultat.

Théorème 2.4.5

Soit A un anneau de radical premier N et tel que tout sous-module de E(A/N) est finiment annulé ; alors on a les équivalances suivantes :

1 *A est Artinien à gauche ;*

2 *Pour tout idéal premier P de A, A/P est Artinien à gauche ;*

3 *Tout A-module à gauche de type fini est finiment annulé et tout idéal premier de A est maximal.*

Preuve

Elle découle de **[8]** : théorème 3.1

Proposition 2.4.6

Soit A un semi-FGI-anneau local ; alors A est Artinien.

Preuve

Elle découle du théorème 2.4.5.

Proposition 2.4.7

Soit A un anneau commutatif Artinien qui a un idéal non principal, alors il existe un A-module semi-co-Hopfien qui n'est pas de type fini.

Preuve

Elle découle de **[8]** : proposition 2.1 : si A admet un idéal non principal, alors il existe un A-module co-Hopfien qui n'est pas de type fini.

Théorème 2.4.8

Un anneau A est un semi-FGI-anneau si et seulement si A est Artinien à idéaux principaux.

Preuve

$\Rightarrow$) Si A est un semi-FGI-anneau, alors A est Artinien à idéaux principaux d'après la proposition 2.4.7.

$\Leftarrow$) Si A est Artinien à idéaux principaux alors A est un semi-FGI-anneau d'après la proposition 2.3.9.

Chapitre 3

Les WFGI-modules

Sommaire

3.1 Introduction

Les I-modules et ont été introduits par **O. Diankha** et **M. Sangharé [15]** pour généraliser la notion de I-anneau introduit par **A. Kaidi** et **M. Sangharé [34]**. Les S-modules ont été introduits par **M. Sokhna** et **M. Sangharé [31]**. L'objet de ce chapitre est d'introduire une nouvelle notion ; à l'image des S-modules et des I-modules ; qui est la notion de WFGI-module.

- ▷ Un I-module est un module tel que tout élément de $\sigma[M]$ co-Hopfien est Artinien .
- ▷ Un S-module est un module tel que tout élément de $\sigma[M]$ Hopfien est Noethérien.

- ▷ Un WFGI-module est un module tel que tout élément de $\sigma[M]$ qui est faiblement co-Hopfien soit de type fini.

Nous étudierons ces modules et nous donnerions quelques propriétés de ces derniers.

Le premier paragraphe est réservé à quelques résultats sur les modules faiblement co-Hopfien ; le second traite certaines propriétés de la sous-catégorie pleine $\sigma[M]$ c'est-à-dire la catégorie sous-engendrée par M et enfin le troisième parle des WFGI-modules.

Les anneaux considérés sont commutatifs unitaires et associatifs et les modules unitaires.

3.2 Modules faiblement co-Hopfiens

Définition 3.2.1

- ▷ *Un homomorphisme injectif* $f : M \longrightarrow N$ *est essentiel si* $f(M) \leq_e N$.
- ▷ *Soit A un anneau ; un A-module M est dit faiblement co-Hopfien si tout monomorphisme de M est essentiel dans M ; c'est-à-dire* $f(M) \leq_e M$, $\forall\, f \in End_A(M)$.
- ▷ *Un anneau A est faiblement co-Hopfien à droit, si tout élément de A régulier à droit, engendre un idéal essentiel à droit de A.*
- ▷ *Un anneau A est faiblement co-Hopfien à gauche, si tout élément de A régulier à gauche, engendre un idéal essentiel à gauche de A*

- ▷ *Un A-module M est de dimension uniforme finie s'il ne contient pas une somme directe infinie de sous-modules non nuls.*
- ▷ *Un A-module M est quasi-Artinien s'il contient un sous-module Artinien essentiel.*

Exemple 3.2.2

- ▷ *Tout module co-Hopfien est faiblement co-Hopfien.*
- ▷ *Tout module de dimension uniforme finie est faiblement co-Hopfien.*
- ▷ *Tout sous-module d'un module de dimension uniforme finie est faiblement co-Hopfien.*
- ▷ *Tout module quasi-Artinien est co-Hopfien,donc faiblement co-Hopfien.*
- ▷ *Tout module simple est faiblement co-Hopfien.*
- ▷ *Tout module unisériel est faiblement co-Hopfien.*
- ▷ *Tout module quasi-injectif indécomposable est faiblement co-Hopfien.*

Théorème 3.2.3

Soit M un A-module à droite ; on a les équivalences suivantes :

1) M_A *est faiblement co-Hopfien ;*

2) $\forall\ N_A$ *; s'il existe un homomorphisme* $f : M \oplus N \longrightarrow M$ *injectif, alors* $N = 0$ *;*

2') $\forall\ N_A$ *; si* $f : M \oplus N \longrightarrow M$ *est un monomorphisme essentiel, alors* $N = 0$ *;*

3) *M est Dedekind fini et pour tout endomorphisme injectif;* $f(M) \leq_e M$ *où* $f(M) \oplus L = M$ *;*

4) *Il existe un sous-module complétement invariant qui est faiblement co-Hopfien ;*

5) $\forall\, f \in End(M_A)$ *injectif; alors* $N \leq_e M \Rightarrow f(N) \leq_e M$ *;*

6) *L'image réciproque d'un sous-module non nul par un endomorphisme injectif est un sous-module non nul.*

Preuve Elle découle de :**[20]**

Corollaire 3.2.4

Les résultats suivants sont vérifiés pour tout module M :

1) *Tout facteur direct d'un module faiblement co-Hopfien est faiblement co-Hopfien ;*

2) *M est faiblement co-Hopfien si son enveloppe injectif, E(M) est Dedekind fini.*

Proposition 3.2.5

Soit M, un A-module on a les implications suivantes :

1) *M est co-Hopfien* $\Rightarrow$

2) *M est faiblement co-Hopfien* $\Rightarrow$

3) *M est Dedekind fini.*

Si M est quasi-injectif alors ils sont tous équivalentes i.e : 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3)

Corollaire 3.2.6

Soit M un module quasi-injectif :

1) *Si M est faiblement co-Hopfien, alors tout sous-module et toute somme directe finie de copies de M est faiblement co-Hopfien.*

2) *Si N est un sous-module de M essentiel et complètement invariant ; Alors N est faiblement co-Hopfien si et seulement si M est faiblement co-Hopfien.*

De plus M est faiblement co-Hopfien si et seulement si E(M) est faiblement co-Hopfien.

Remarque 3.2.7 *Haghany and Vedadi :* ***[20]***

1) *Soit M_A un module ; si tout sous-module propre de M est faiblement co-Hopfien alors M est faiblement co-Hopfien.*

2) *Si M est quasi-injectif alors M est faiblement co-Hopfien si et seulement si tout sous-module propre est faiblement co-Hopfien.*

3) *Si M est simple alors toute somme directe de copies de M est faiblement co-Hopfien si et seulement si la somme est fini.*

4) *Soit $M' = \oplus_{i \geq 1} M_i$ où $M_i = M$ non nul ; alors le"shift" map de M' est un endomorphisme injectif tel que l'image n'est pas essentiel ; d'ou M' n'est pas faiblement co-Hopfien.*

5) *Soit $M = \Sigma_{i \in I} \oplus M_i$ tel que chaque M_i est invariant par endomorphisme injectif de M. Alors M est faiblement co-Hopfien si et seulement si chaque M_i est faiblement co-Hopfien.*

6) *Tout sous-module d'un module quasi-injectif et faiblement co-Hopfien est faiblment co-Hopfien. Asgary :* ***[2]***

7) *Tout sous-module d'un module de dimension uniforme finie est faiblement co-Hopfien. Asgary :* ***[2]***

8) *M est complétement faiblement co-Hopfien si et seulement si $udim(M) \prec \infty$. Asgary :* ***[2]***

Corollaire 3.2.8

Soit A un anneau Artinien à droite et M un A-module à droite quasi-injectif. Alors M est faiblement co-Hopfien si et seulement si $udim(M) \prec \infty$.

Preuve

Pour la preuve, on peut se référer à **[2]**.

Proposition 3.2.9

Soit A un anneau Artinien à droite, alors on a les équivalences suivantes pour un A-module à droite M :

1) *Tout sous-module de M est faiblement co-Hopfien ;*

2) *Soc(M) est faiblement co-Hopfien ;*

3) $udim(M) \prec \infty$ *;*

De plus si M est quasi-injectif alors ces résultats [1) ; 2) ;3)] sont équivalents à : 4) M est faiblement co-Hopfien.

Preuve

Elle découle de : **[2]**

3.3 La sous-catégorie $\sigma[M]$

Définition 3.3.1

Soit A un anneau et M un A-module.

- ▷ *On dit qu'un A-module M est co-Hopfien si tout endomorphisme injectif de M est un automorphisme.*
- ▷ *On dit qu'un A-module M est Hopfian si tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme.*
- ▷ *On dit que l'anneau A est un I-anneau si tout A-module co-Hopfien est Artinien.*
- ▷ *On dit que l'anneau A est un S-anneau si tout A-module Hopfien Noethérien.*

Définition 3.3.2

Soit A un anneau et M un A-module.

- ▷ *On dit que le A-module N est engendré par M s'il existe un ensemble $\bigwedge$ et un épimorphisme $f : M^{(\bigwedge)} \to N \longrightarrow 0$.*
- ▷ *Un A-module K est dit sous-engendré par M s'il est un sous-module d'un module engendré par M; Ou bien s'il est isomorphe à un sous-module d'un module généré par M.*
- ▷ *Une sous- catégorie C est sous-engendré par un module M si tout élément de C est sous-engendré par M.*

- *Une sous-catégorie C' d'une catégorie C, est dite pleine si, pour tout couple (X, Y) d'objets de C' on a :* $Hom_{C'}(X,Y) = Hom_C(X,Y)$.
- *La sous-catégorie de A-Mod dont les éléments sont les A-modules sous-engendrés par M est une sous-catégorie pleine dans A-Mod et est noté* $\sigma[M]$.
- *Par conséquent on a :* $\sigma[{}_AA]$ = *A-Mod.*
- $\sigma[\mathbb{Z}_{p^\infty}] = \sigma[\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}]$ *est la sous-catégorie des modules p-torsion dans* $\mathbb{Z}$*-Mod ;*
- $\sigma[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] = \sigma[\oplus_{\mathbb{N}}\mathbb{Z}_n]$ *est la sous-catégorie des modules de torsion dans* $\mathbb{Z}$*-Mod.*
- *Un A-module M de longueur finie est dit de type de représentation finie si* $\sigma[M]$ *a seulement un nombre fini de modules indécomposables non isomorphes.*
- *On dit que M est un S-module si tout élément de* $\sigma[M]$ *Hopfien est Noethérien.*
- *On dit que M est un I-module si tout élément de* $\sigma[M]$ *co-Hopfien est Artinian.*
- *Un anneau A est un S-anneau si* A_A *est un S-module.*
- *Un A-module M est dit* S_I*-module si tout élément de* $\sigma[M]$ *qui est Hopfien est de longueur finie.*
- *Un A-module M est un* I_I*-module si tout élément de* $\sigma[M]$ *co-Hopfien est de longueur finie.*

- ▷ *Un module P est appelé progénérateur dans $\sigma[M]$ s'il est un générateur projectif et de type fini.*
- ▷ *Un module est unisériel si l'ensemble de ses sous-modules est totalement ordonné par l'inclusion.*
- ▷ *Une somme directe de modules unisériels est dite module sériel.*
- ▷ *Un module M est de longueur finie, s'il est à la fois Artinien et Noethérien.*
- ▷ *Un module M est localement de longueur finie, si tout sous-module de M, de type fini est de longueur finie.*
- ▷ *Un module M est localement Noethérien, si tout sous-module de M, de type fini est Noethérien.*
- ▷ *Un module M est localement Artinien si tout sous-module de M, de type fini est Artinien.*

Remarque 3.3.3

N est sous-généré par M ssi $N = Kerf$ où f est un morphisme entre deux modules engendré par M.

Proposition 3.3.4

1) *S'il existe un progénérateur P dans $\sigma[M]$, alors $\sigma[M] = End_A({}_AP)$-Mod.*

2) *Si M est de longueur finie, alors tout module de type fini dans $\sigma[M]$ est de longueur finie et il existe un nombre fini de modules simples non isomorphes dans $\sigma[M]$.*

3) *Si $\sigma[M]$ admet un progénérateur Artinien alors $\forall\ N \in \sigma[M]$, il existe un progénérateur Artinien dans $\sigma[N]$.*

4) *Un modules est de type de représentation sérielle si tout élément de $\sigma[M]$ est sériel.*

Preuve

Elle découle de : **[40]**

Proposition 3.3.5 *Soit M un module, on a les équivalences suivantes.*

1) *M est localement de longueur finie ;*

2) *Tout module de type fini dans $\sigma[M]$ est de longueur finie ;*

3) *Tout module injectif dans $\sigma[M]$ est une somme directe d'enveloppes injectives de modules simples ;*

Tout module injectif dans $\sigma[M]$ est une somme directe de modules finiment cogénérés.

Preuve

Elle découle de : **[41]** : (27.5 et 32.5).

Remarque 3.3.6

- ▷ *Un anneau est Artinien si et seulement si $l(A)$ est fini. Dans ce cas tout A-module de type fini sur A est de longueur finie.*
- ▷ *Soit A un anneau Noethérien, alors tout A-module est de type fini si et seulement si il est Noethérien.*

Définition 3.3.7

- ▷ *Un sous module K de M est superflue ou minimal dans M si pour tout sous-module L de M tel que $K + L = M \Rightarrow L = M$; on le note par $K \prec\prec M$.*
- ▷ *Une surjection $\pi : P \longrightarrow N$ où P est projectif dans $\sigma[M]$ et $Ker\pi \prec\prec P$ est dit couverture projective de N dans $\sigma[M]$.*
- ▷ *Un module est dit local s'il a un sous-module propre maximal.*
- ▷ *Un module $P \in \sigma[M]$ est semi-parfait dans $\sigma[M]$ si tout module quotient de N a une couverture projective dans $\sigma[M]$.*
- ▷ *P est parfait dans $\sigma[M]$ si tout somme directe $P^{(\Lambda)}$ est semi-parfait dans $\sigma[M]$.*
- ▷ *$\sigma[M]$ est dit parfait si tout module dans $\sigma[M]$ admet une couverture projective dans $\sigma[M]$.*
- ▷ *$\sigma[M]$ est dit semi-parfait si tout module simple dans $\sigma[M]$ a une couverture projective dans $\sigma[M]$.*

Proposition 3.3.8

1) $\forall$ A-module M, on a les équivalences suivantes :

a) $\sigma[M]$ est semi-parfait ;

b) $\sigma[M]$ a une famille génératrice de module projectif local ;

c) Dans $\sigma[M]$ tout module de type fini a une couverture projective.

2) $\forall$ A-module M, on a les équivalences suivantes :

a) $\sigma[M]$ est parfait ;

b) $\sigma[M]$ a un générateur projectif qui est parfait dans $\sigma[M]$.

Preuve

$b) \Rightarrow a)$ est triviale.

$a) \Rightarrow b)$ Soit P, la somme directe des couvertures projectives des modules simples dans $\sigma[M]$. Alors P est un générateur projectif et tout module quotient de $P^{(\Lambda)}$ a une couverture projective ; d'où P est parfait.

3.4 WFGI-modules

Définition 3.4.1

Soit A un anneau et M un A-module.

- *On dit que M est un WFGI-module si tout élément de $\sigma[M]$ qui est faiblement co-Hopfien est de type fini.*
- *Un module M est localement de longueur finie si tout sous-module N de M de type fini est de longueur finie.*
- *Un module M est dit unisériel si l'ensemble de ses sous-modules est totalement ordonné par l'inclusion.*
- *Un module M est dit sériel s'il est somme directe de modules unisériels.*
- *Un module M dite localement de longueur finie si tout sous-module de M de type fini est de longueur finie.*

Proposition 3.4.2

A est un WFGI-anneau si et seulement si ${}_AA$ est un WFGI-module.

Preuve

Il découle du fait que $\sigma[{}_AA] =$ A-Mod.

Proposition 3.4.3

Soit M un WFGI-module, alors tout sous-module N de M est un WFGI-module.

Preuve

Pour tout sous-module N de M on a : $\sigma[N] \subseteq \sigma[M]$; d'où le résultat.

Proposition 3.4.4

Si M est un WFGI-module, alors tout élément de $\sigma[M]$ est un WFGI-module.

Preuve

$\forall N \in \sigma[M]$ on a : $\sigma[N]$ est une sous-catégorie pleine de $\sigma[M]$, d'où le résultat.

Proposition 3.4.5

L'image par un homomorphisme d'un WFGI-module est un WFGI-module.

Preuve

Soit $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de modules ; on a : M' $= f(M) \in \sigma[M]$ donc d'après la proposition 4.3.5 ; M' est un WFGI-module.

Proposition 3.4.6 *: Soit $M = \oplus_{i \in I} M_i$ tel que $\sigma[M_i] \cap \sigma[M_j] = 0; \forall i \neq j$, alors M est un WFGI-module si et seulement si M_i est un WFGI-module, $\forall i \in I$.*

Preuve

$\Rightarrow$) Découle de la proposition 4.3.4.

$\Leftarrow$) Soit $N \in \sigma[M]$ d'après la thèse 3^{em} Cycle de **SOKHNA. M :[31]**, il existe $N_i \in \sigma[M_i]$ tel que N $= \oplus_{i\in I} N_i$ et comme N est un module faiblement co-Hopfien alors N_i est un module faiblement co-Hopfien.

Proposition 3.4.7

Soit A un anneau et M un A-module. Si M est un WFGI-module alors il existe dans $\sigma[M]$ un nombre finis de modules simples non isomorphes.

Preuve

Soit $\{N_i\}_{i\in I}$ un système complet de représentation des classe d'isomorphismes des modules simples dans $\sigma[M]$. Posons N $= \oplus_{i\in I} N_i$. Comme N est un module faiblement co-Hopfien alors N est de type fini d'où I est fini.

Corollaire 3.4.8

Soit A un WFGI-anneau alors pour tout A-module M, il existe dans $\sigma[M]$ un nombre fini de modules simples non isomorphes

Proposition 3.4.9

Soit M un A-module quasi-injectif. Si M est un WFGI-module, alors M est localement de longueur finie.

Preuve

Soit N un module de $\sigma[M]$ de type fini et soit M'$= \oplus_{i\in \mathbb{N}} N_i$ où (N_i) est une suite décroissante (resp croissante) de sous-modules de N. On a M' est un sous-module de N d'où M' est faiblement co-Hopfien ; par conséquent M' est de type fini d'où la suite est stationnaire ; donc N est Artinien (resp Noethérien) par suite M est localement de longueur finie.

Proposition 3.4.10

Soit M un A-module. Si M est un WFGI-module, alors M est localement de longueur finie.

Preuve

Soit N un sous-module de M de type finie avec m_1 ; m_2 ;... ;m_n une famille génératrice de N.

D'après le Corollaire 10.16 **[1]** N est de longueur finie. Donc M est localement de longueur finie.

Chapitre 4

Les DQA-anneaux commutatifs

Sommaire

4.1 Introduction

Ce chapitre prend en compte l'étude des anneaux A pour lesquels tout A-module Dedekind fini est quasi-Artinien.

* Un module M est dit quasi-Artinien s'il contient un sous-module essentiel Artinien.
* Un module M est dit Dedekind fini si pour tout sous- module N de M tel que $M \oplus N \cong M$, alors N = 0.

La première partie traite de quelques résultats utilisables à la deuxième partie réservée à la caractérisation des DQA-anneaux commutatifs (Théorème 4.2.20). Ce sont les anneaux Artiniens à idéaux principaux. Tout au long de ce chapitre, sauf mention explicite du contraire ; les anneaux sont associatifs commutatifs unitaires et tout module est unitaire. Soit A un anneau et M un A-module, un sous-module L de M est dit essentiel si $L \cap N \neq 0$ pour tout sous-module non nul N de M. Le socle de M, noté par Soc(M), est la somme des sous-modules simples ou la somme des sous modules minimaux non nuls de M. Un A-module est dit quasi-Artinien s'il contient un sous-module essentiel Artinien. Un A-module est dit finiment injecté si son enveloppe injective est une somme directe finie d'enveloppes injectives de modules simples. Un A-module M est de dimension uniforme finie s'il ne contient pas une somme directe infinie de sous-modules non nuls. Il est clair que pour un A-module M de dimension uniforme finie ; il existe un entier naturel n tel que toute somme directe de sous-modules non nuls de M n'admet pas plus de n sous-modules. Cette dimension uniforme de M est noté udim(M). Alors M est dit Dedekind fini si pour tout sous-module N de M tel que $M \cong M \oplus N$, alors N = 0. Un anneau commutatif A est dit DQA-anneau si tout A-module Dedekind fini est quasi-Artinien.

Dans ce chapitre, nous prouvons que pour un anneau commutatif A, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) A est DQA-anneau ;

2) A est Artinien à idéaux principaux.

4.2 Généralités

Soit A un anneau commutatif et M un A-module unitaire. Alors :

♣ M est dit quasi-Artinien s'il contient un sous-module essentiel Artinien.

♣ M est dit Dedekind fini si pour tout sous- module N de M tel que $M \oplus N \cong M$, alors N = 0.

♣ Un A-module M est dit faiblement co-Hopfien si tout monomorphisme de M est essentiel dans M ;

♣ Un anneau A est dit DQA-anneau si tout A-module Dedekind fini est quasi-Artinien.

♣ Dans ce chapitre, on affirme qu'un anneau commutatif A est un DQA-anneau si et seulement si il est Artinien à idéaux principaux.

Proposition 4.2.1

Soit M un module on a d'après ***Breaz ; Calugareanu*** *and* ***Schultz : [11]*** *: Proposition 3.2.*

1) *Si M est un DF-module, alors tout facteur direct est un DF-module.*

2) *une somme directe infinie de copies d'un module non nul n'est pas un DF-module.*

Remarque 4.2.2

Pour les anneaux ; la notion d'anneau Dedekind fini est stable par produit direct $(\Pi_{i\in I} A_i)$ *; somme directe finie* $(\oplus_{1\leq i\leq n} A_i)$*et sous-anneaux* $(B \leq A)$.

Les anneaux locaux et semi-locaux sont Dedekind fini.

Si l'anneau A n'admet pas de diviseur de zéro à droite ou à gauche alors A est Dedekind fini.

Proposition 4.2.3

1) *Soit $M = M_1 \oplus M_2$, avec Hom($M_1; M_2$)= 0 ; alors M est un DF-module si et seulement si M_1 et M_2 sont des DF-modules.*

2) *Si M n'est pas un DF-module, alors M contient une somme directe infinie $\oplus_{i\in\mathbb{N}} N_i$ ou chaque $N_i \cong N$.*

3) *Un sous-module ou un module quotient d'un DF-module n'est pas forcément un DF-module : Exemples : Le $\mathbb{Z}$-module $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}(p^n)$ est un DF-module mais $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}(p)$ est son sous-module qui n'est pas un DF-module.*

4) *La classe des DF-module n'est pas stable par extension ; par somme directe finie et par image d'endomorphisme ; exemple : $A \oplus A$ n'est pas un DF-module.*

   Goodear prouve qu'un sous-module injectif d'un DF-module est un DF-module.

Preuve Elle découle de : **[11]**.

Proposition 4.2.4

Soit M un module injectif, on a les équivalences suivantes :

1) *M est DF-module ;*

2) *M n'admet pas de sous-module propre qui vérifie $M \cong M^2$;*

3) *M n'admet pas de facteur direct propre qui vérifie* $M \cong M^2$.

Remarque 4.2.5

1) *Si A est un anneau à droite non singulier, alors la somme directe de DF-modules injectifs non singuliers est un DF-module. Ce qui est faux si les modules ne sont pas injectifs.*

2) *Soc(M) = 0 si M admet un sous-module non minimal.*

3) *Rad(M)= M si M admet un sous-module non maximal.*

4) *Soit M un module on a :*

i) *Si Soc(M) est un DF-module essentiel, alors M est un DF-module.*

ii) *Si Rad(M) est superflu et M/Rad(M) est un DF-module, alors M est un DF-module.*

Exemples :

$\star$: $*$ *Si* $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}(p^n)$ *où p est un entier premier, alors Soc(M) = M est essentiel mais M n'est pas un DF-module ;*

$*$ *Si* $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ *alors Soc(M)= 0 est un DF-module mais M n'est pas un DF-module.*

$\star$: $*$ *Si* $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}$ *alors M/Rad(M)= 0 est un DF-module mais M n'est pas un DF-module.*

$*$ *Si* $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$, *alors Rad(M)= 0 est superflu mais M n'est pas un DF-module.*

- ⋆ *$\mathbb{Z}$ est un DF $\mathbb{Z}$-module dont Soc($\mathbb{Z}$)= 0, n'est pas essentiel et $\mathbb{Z}(p)$(le groupe des entiers p-adique) est un DF $\mathbb{Z}$-module dont le radical $p\mathbb{Z}$ n'est pas superflu.*
- ⋆ *Le groupe $G = \oplus_{n\in\mathbb{N}*}\mathbb{Z}(p^n)$ est un DF-module mais son socle est essentiel, et n'est pas un DF-module de même son radical pG est superflu, mais G/pG n'est pas un DF-module ; De plus son enveloppe E(G)= $\oplus_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{Z}(p^\infty)$ n'est pas un DF $\mathbb{Z}$-module.*

Théorème 4.2.6

Soit M un A-module et N un sous-module totalement invariant de M :

1) *Si N est un DF-module essentiel, alors M est un DF-module ;*

2) *Si N est superflu et M/N est un DF-module, alors M est DF-module.*

Preuve Elle découle de : **[11]**.

Corollaire 4.2.7

Si M est Dedekind fini, alors A/ann(M) est un anneau intègre.

Preuve

M est Dedekind fini ; d'après le théorème précédent M est un A-module premier ; d'où A/ann(M) est un anneau premier. Alors la propriété commutative de A résulte dans A/ann(M) est un domain intégral.
Remarque : Tout sous-module d'un module de type fini est de type fini.

Définition 4.2.8

∗ *Un A-module M est Noethérien si tous ses sous-modules sont de type fini.*

∗ *Un A-module est dit héréditaire si tous ses sous-modules sont projectifs.*

4.3 Caractérisation des DQA-anneaux commutatifs

4.3.1 Préliminaires

Dans ce paragraphe nous donnons quelques résultats que nous allons utiliser dans ce chapitre.

Lemme 4.3.1

Soit A un anneau est M un A-module à gauche ; les résultats suivantes sont vérifiés :

1) *Si M est co-Hopfien, alors M est faiblement co-Hopfien.*

2) *Si M est faiblement co-Hopfien, alors M est Dedekind fini.*

3) *Si M est de dimension uniforme finie, alors M est faiblement co-Hopfien.*

4) *Si M est quasi-Artinien, alors M est de dimension uniforme finie.*

5) *Si M est quasi-Artinien, alors M est faiblement co-Hopfien.*

Preuve :

1) est trivial.

2) Résulte de :**[20]**, proposition 1.4.

3) Résulte de :**[16]**, proposition 4.12.

3) Résulte de Lam : **[25]**, page 537.

5) Résulte de 3) et 4).

Lemme 4.3.2 *(**Lam : [25]**, page 537).*

Soit A un anneau et M un A-module à gauche. Si M est quasi-Artinien, alors tout sous-module de M est aussi quasi-Artinien.

Proposition 4.3.3 *Vasconscelos : **[39]***

Soit A un anneau commutatif. Alors tout A-module de type fini est co-Hopfien si et seulement si tout idéal premier de A est maximal.

Proposition 4.3.4 *Anderson and Fuller : **[1]***

Soit A un anneau unitaire ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) *A est Artinien à gauche.*

2) *Tout A-module à gauche de type fini est Artinien.*

3) *Tout A-module à gauche de type fini est finiment cogénéré.*

Proposition 4.3.5

Soit A un anneau commutatif Artinien. Si A a un idéal non principal, alors il existe un A-module faiblement co-Hopfien qui n'est pas finiment cogénéré.

Preuve

Elle découle de : **[3]**, proposition 2.5

4.3.2 Caractérisation des DQA-anneaux commutatifs

Proposition 4.3.6 *Soit A un DQA-anneau commutatif. Alors tout A-module zéro dimensionnel de type fini est Dedekind fini.*

Preuve

Soit M un A-module zéro dimensionnel de type fini. Soit $A_1 = A/Ann_A(M)$. Alors tout idéal premier de A_1 est maximal. Le A-module possède une structure de A_1-module d'où M est de type fini. Ainsi d'après **Vasconscelos**, M est co-Hopfien comme A_1-module. De plus M est Dedekind fini comme A-module.

Proposition 4.3.7

Soit A un DQA-anneau commutatif, Alors $E(A/J(A))$ est de type fini.

Preuve

Comme A/J(A) est l'image d'un homomorphisme de A, A/J(A) est un DQA-anneau. Soit I_1,...,I_n ; la famille des idéaux maximaux de A. D'après le théorème Chinois ; $A/J(A) \cong A/I_1 \oplus ... \oplus A/I_n$; il en découle que $E(A/J(A)) \cong E(A/I_1) \oplus ... \oplus E(A/I_n)$. Comme chaque A/I_i est simple, $E(A/I_i)$ est un module injectif indécomposable, ainsi $E(A/I_i)$ est Dedekind fini. Il en découle que $E(A/J(A)) \cong E(A/I_1) \oplus ... \oplus E(A/I_n)$ est de type fini, d'où E(A/J(A))est de type fini.

Proposition 4.3.8

Soit A un DQA-anneau commutatif. Si A est un anneau intègre, alors A est un corps.

Preuve

Soit K le corps quotient de l'anneau intègre A ; alors le A-module ${}_AK$ est Dedekind fini. Il en découle que ${}_AK$ est quasi-Artinien. Ainsi, $(Soc({}_AK))\cap_A A \neq 0$. Soit S = Aa, avec $a \in A\backslash\{0\}$, un sous-module simple de $(Soc({}_AK)) \cap_A A$. L'application $\varphi :_A A \longrightarrow S = Aa\,; x \mapsto xa$ est un isomorphisme de A-modules. De plus ${}_AA$ est simple. D'où pour tout $b \in A^*$ nous avons $A = Ab = Ab^2$; alors $b = cb^2$ avec $c \in A$, d'où 1 = cb.

Remarque 4.3.9

1. *Tout image homomorphe d'un DQA-anneau est un DQA-anneau.*
2. *Un produit direct fini d'anneaux est un DQA-anneau si et seulement si chacun d'eux est un DQA-anneau.(* $\prod_1^n A_i; 1 \leq i \leq n$ *est un DQA-anneau ssi chaque* $A_i; 1 \leq i \leq n$ *l'est).*

Lemme 4.3.10

Soit un A-module $M = M_1 \oplus M_2$ *une somme directe de sous-modules de M. Alors* M_1 *est sous-module complètement invariant de M si et seulement si Hom(*$M_1; M_2$*)= 0*

Preuve

Résulte de : **[3]**, Lemme 1.7

Lemme 4.3.11 *Soit* P_1 *et* P_2 *deux idéaux premiers de A. Si* $P_1 \not\subseteq P_2$ *; alors Hom(*A/P_1 *;* A/P_2*)= 0.*

Preuve

Soit $f \in Hom(A/(P_1); A/(P_2))$; nous avons f(1+P_1)= t+ P_2 or f(cl.1)= cl.t pour tout $t \in A$. Pour tout $x \in A$, nous avons f(cl.x)= xf(cl.1) = xcl.t = cl.(xt), or f(x+P_1)= xt+ P_2. Comme f est un A-homomorphisme nous avons f(cl.0)= cl.0, i.e $f(P_1) \subseteq P_2$, soit $x \in P_1$ et $x \notin P_2$; nous avons f(cl.x)= cl.0, ainsi xt + P_2 = P_2. D'où $xt \in P_2$ et $x \notin P_2$ ce qui implique que $t \in P_2$. Donc $\forall x \in A$, on a f(x+P_1)= 0, d'où $f \equiv 0$.

Proposition 4.3.12

Soit M un A-module ; alors on a :

1) *Si M est Dedekind fini, alors il en est de même que tout facteur direct de M.*

2) *Si M = $\oplus_{i \in I} M_i$ tel que chaque M_i est un sous-module totalement invariant de M, alors M est Dedekind fini si et seulement si chaque M_i l'est.*

Preuve

Il découle de **[11]** ; proposition 3.2

Proposition 4.3.13 *Soit A un DQA-anneau commutatif. Alors tout idéal premier de A est maximal. De plus la famille des idéaux premiers de A est finie.*

Preuve

Soit P un idéal premier de A, alors A/P est un anneau intègre commutatif ; et comme A/P est l'image d'un DQA-anneau par un homomorphisme, alors A/P est un DQA-anneau. Il en découle que A/P est un corps et finalement P est maximal.

Soit L la famille des idéaux premiers de A et $M = \oplus_{P \in L} A/P$; Pour tout $P \in L$, A/P est un A-module simple, de plus si P et P' sont dans L tels que $P \nsubseteq P'$, alors d'après le lemme précédent, Hom(A/P ; A/P') = 0, d'où A/P est un sous-module totalement invariant de M.

Alors d'après la proposition précédente, le A-module $M = \oplus_{P \in L} A/P$ est Dedekind fini, d'où Soc(M) = M est A-module finiment cogénéré. Il découle que M est de type fini et alors L est finie.

Corollaire 4.3.14

Soit A un DQA-anneau commutatif :

1. *Le radical de Jacobson J(A) de A est un nil idéal.*
2. *Les idempotents de A/J(A) peuvent se relever en des idempotents de A, et A est semi-local.*
3. *A est un produit direct fini de DQA-anneaux commutatifs locaux.*
4. *Si M est un A-module simple alors $M \cong I$ ou I est un idéal minimal de A.*
5. *A/J(A) est un anneau Von Neuman régulier.*
6. *Pour un $a \in A$, il existe $n \in N^*$ tel que $a^n \in a^n A a^n$.*

Preuve

Résulte de la proposition précédente.

Proposition 4.3.15 *Soit A un DQA-anneau commutatif et M un A-module. Pour tout $r \in A$ il existe un entier naturel n tel que $Ann_M(r^n) \oplus Mr^n = M$.*

Preuve

Pour tout $r \in A$, il existe $s \in A$ tel que $r^n = r^{2n}s = sr^{2n}$ pour un entier naturel n. De plus $M(1 - r^n s) \subseteq Ann_M(r^n)$ et $M = M(1 - r^n s) + Mr^n s$.
Alors M $= Ann_M(r^n) + Mr^n s) = Ann_M(r^n) + Mr^n$. Si $x = mr^n \in Ann_M(r^n) \cap Mr^n$, alors $0 = xr^n s = mr^{2n}s = mr^n = x$ d'où $Ann_M(r^n) \cap Mr^n = 0$.
Donc $Ann_M(r^n) \oplus Mr^n = M$.

Corollaire 4.3.16

Soit A un DQA-anneau commutatif. Pour tout $r \in A$, il existe un entier naturel n tel que $Ann_A(r^n) \oplus_A Ar^n = A$.

Proposition 4.3.17

Soit A un DQA-anneau commutatif. Alors A est Artinien.

Preuve

D'après la proposition 4.3.4, il suffit de prouver que tout A-module de type fini est finiment cogénéré. Comme A est un anneau commutatif et tout idéal premier de A est maximal, alors d'après **Vasconscelos : [39]**, tout A-module de type fini est co-Hopfien, ainsi Dedekind fini d'après Lemme 4.3.1. Et comme A est un DQA-anneau, il en découle que M est finiment cogénéré.

Proposition 4.3.18

Soit A un DQA-anneau commutatif; Alors A est un produit direct fini de DQA-anneaux locaux Artiniens.

Preuve

Résulte de la proposition 4.3.17 et du corollaire 4.3.14.

Lemme 4.3.19

Si M est une somme directe infinie de copies d'un module non nul, alors M n'est pas Dedekind fini.

Preuve

Supposons $M = \oplus_{i\in IN} N_i$ tel que pour tout $i \in IN, N_i \cong N$ pour tout module N.

Alors pour tout $i \in IN$, il existe un isomorphisme $\sigma_i : N_i \longrightarrow N_{i+1}$, alors σ_i induit une application à droit $f : M \longrightarrow M$;

$par x \longmapsto \sigma_i$(x) pour tout $x \in N_i$.

De manière similaire,σ_i induit une application à droit $g : M \longrightarrow M; par x \longmapsto$ σ_i^{-1}(x) pour tout $x \in N_{i+1}$ et g(N_0)=0 .

Il est clair que f et g des endomorphisme de M tels que gof $= Id_M$ mais $fog \neq Id_M$; il en découle que M n'est pas Dedekind fini.

Théorème 4.3.20 *Soit A un anneau commutatif; on a les équivalences suivantes :*

1) *A est un DQA-anneau.*

2) *A est Artinien à idéaux principaux.*

Preuve

(1) $\Rightarrow$ (2) Si est un DQA-anneau alors d'après proposition 4.3.17 ; la proposition 4.3.4 et la proposition 4.3.5 ; A est Artinien à idéaux principaux.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit A un anneau Artinien à idéaux principaux et M un A-module Dedekind fini. Supposons M n'est pas de type fini ; alors d'après : **[16]**, théorème 4.1, tout A-module est une somme directe de A-modules cycliques c'est-à-dire $M = K^{(IN^*)} \oplus L$ ou K est un sous-module cyclique de M. D'après Lemme 4.3.19 ; $K^{(IN^*)}$ n'est pas Dedekind fini ; d'où M n'est pas Dedekind fini. Ainsi M est de type fini. Comme A est Artinien, alors d'après : **[1]**, proposition 10.18 où la proposition 4.3.4 ; M est finiment cogénéré. De plus A est un DQA-anneau.

Corollaire 4.3.21 *Soit A un DQA-anneau commutatif et M un A-module. On a les équivalences suivantes.*

1) *M est de dimension uniforme finie.*

2) *M est Dedekind fini.*

3) *Soc(M) est Dedekind fini.*

4) *E(M) est Dedekind fini.*

Preuve

1) $\Rightarrow$ 2) Est trivial.

2) $\Rightarrow$ 1). Soit M un A-module Dedekind fini. Comme A est un DQA-anneau ; alors M est quasi-Artinien. Il en découle que M est de dimension uniforme finie.

1) $\Rightarrow$ 3) Est trivial.

3) $\Rightarrow$ 1) Soit Soc(M) Dedekind fini. Comme il existe seulement un nombre fini de A-module simple à isomorphisme près, alors d'après : **[20]** (corallaire 1.12) Soc(M) est de dimension fini. Par ailleurs Soc(M) est un sous-module essentiel de M, d'où M est de dimension uniforme finie.

1) $\Rightarrow$ 4) Comme M est un sous-module essentiel de E(M), il en découle que E(M) est de dimension uniforme finie. Ainsi E(M) est Dedekind fini.

4) $\Rightarrow$ 1) Soit E(M) Dedekind fini ; comme A est un DQA-anneau, alors E(M) est quasi-Artinien. M comme sous-module de E(M) est aussi quasi-Artinien. Il en découle que M est de dimension uniforme finie.

Corollaire 4.3.22

Soit A un DQA-anneau commutatif et M un A-module, on a les équivalences suivantes :

1) *M est co-Hopfien.*

2) *M est Dedekind fini.*

3) *M est complètement faiblement co-Hopfien.*

4) *E(M) est co-Hopfien.*

Corollaire 4.3.23

Soit A un DQA-anneau commutatif, $Spec(A) = \{P_1; P_2; ...; P_n\}$ *et M un module injectif. Alors il existe des modules injectifs indécomposables* M_i *;*

$1 \leq i \leq n$ *tels que* $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_k$ *avec* $k \leq n$ *et* $M_i \cong E(A/P_i)$.

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié les modules semi-co-Hopfiens et les modules faiblement co-Hopfiens qui sont, en quelque sorte, une généralisation des modules co-Hopfiens.

L'objectif principal de cette thèse est la caractérisation des semi-FGI-anneaux et la caractérisation des DQA-anneaux. Nous avons démontré que les semi-FGI-anneaux commutatifs et les DQA-anneaux commutatifs sont les anneaux artiniens à idéaux principaux. Et aussi nous avons introduit et donné quelques propriétés des WFGI-modules qui sont les modules M pour lesquels tout élément de $\sigma[M]$ qui est faiblement co-Hopfien soit de type fini. Telle est notre contribution.

D'autres axes de recherche, qui pourront être explorés dans l'avenir se profilent à l'horizon.

Il y a lieu de s'intéresser à la caractérisation de ces anneaux dans le cas des duo-anneaux, voire dans le cas des anneaux non commutatifs, en général.

Une autre question mérite l'attention : un sous-anneau d'un semi-FGI-anneau (resp d'un DQA-anneau) est-il un semi-FGI-anneau (resp un DQA-anneau) ? A défaut sous quelles conditions, la réponse est affirmative ?

Nous comptons poursuivre la recherche en suivant ces axes. Mais aussi en essayant de caractériser les WFGI-modules.

Bibliographie

[1] ANDERSON, F. W., AND FULLER, K. R. *Rings and categories of modules*, vol. 13. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] ASGARI, S. On weakly co-hopfian modules. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society 33* (2011), 65–72.

[3] BARRY, M., AND DIOP, P. Some properties related to commutative weakly fgi-rings. *JP Journal of Algebra, Number Theory and application 19*, 2 (2010), 141–153.

[4] BARRY, M., AND DIOP, P. On commutative fdf-rings. *International Mthematical Forum 6*, 53 (2011), 2637–2644.

[5] BARRY, M., AND DIOP, P. On commutative weakly fgd-rings. *JP Journal of Algebra, Number Theory and application 23*, 2 (2011), 233–240.

[6] BARRY, M., DIOP, P. C., AND DIOUF, A. On commutative dqa-rings. *International Journal of Algebra 7*, 18 (2013), 873–880.

[7] BARRY, M., DIOUF, A., AND BAZUBWABO, E. On commutative semi-fgi-rings. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications 31*, 1 (2013), 31.

[8] BARRY, M ; DIANKHA, O., AND SANGHARE, M. On commutative fgi-rings. *MATH. SCI. RES.J. 9*, 4 (2005), 87–91.

[9] Beaumont, R., and Pierce, R. Partly transitive modules and modules with proper isomorphic submodules. *Transactions of the American Mathematical Society 91*, 2 (1959), 209–219.

[10] Beaumont, R. A. Groups with isomorphic proper subgroups. *Bulletin of the American Mathematical Society 51*, 6 (1945), 381–387.

[11] Breaz, S., Calugareanu, G., and Schultz, P. Modules with dedekind finite endomorphism rings. *Babes Bolyai University* (1991), 1–13.

[12] Camps, R., and Dicks, W. On semilocal rings. *Israel Journal of Mathematics 81*, 1-2 (1993), 203–211.

[13] Cohen, I. S., and Kaplansky, I. Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules. *Mathematische Zeitschrift 54*, 2 (1951), 97–101.

[14] Crawley, P. An infinite primary abelian group without proper isomorphic subgroups. *Bulletin of the American Mathematical Society 68*, 5 (1962), 463–467.

[15] Diankha, O., Sanghare, M., and Sokhna, M. Sur les i\-modules. *Annales de l'université de Ouagadougou series B 2* (1999), 25–30.

[16] Dung, N. V., Van Huynh, D., Smith, P. F., and Wisbauer, R. *Extending modules*, vol. 313. CRC Press, 1994.

[17] E.P. Armendariz, J. F., and Snider, R. On injective and surjective endomorphismes of finitely generated modules. *Comm. Algebra 6*, 7 (1978), 659–672.

[18] Ghorbani, A., and Haghany, A. Generalized hopfian modules. *Journal of Algebra 2*, 255 (2002), 324–341.

[19] Goodearl, K. Surjective endomorphisms of finitely generated modules. *Communications in Algebra 15*, 3 (1987), 589–609.

[20] Haghany, A., and Vedadi, M. Modules whose injective endomorphisms are essential. *Journal of Algebra 243*, 2 (2001), 765–779.

[21] Hill, P., and Megibben, C. On primary groups with countable basic subgroups. *Transactions of the American Mathematical Society 124*, 1 (1966), 49–59.

[22] Hirano, Y., et al. On fitting's lemma. *Hiroshima Mathematical Journal 9*, 3 (1979), 623–626.

[23] Kaplansky, I. Topological representation of algebras. ii. *Transactions of the American Mathematical Society 68*, 1 (1950), 62–75.

[24] Kumar, V., Gupta, A., Pandeya, B., and Patel, M. M-sp-projective modules. *International Journal of Algebra 5*, 12 (2011), 563–568.

[25] Lam, T.-Y. *Lectures on modules and rings*, vol. 189. Springer Science & Business Media, 2012.

[26] Latifa, F. Hopficité et co-hopficité des anneaux et modules. Desa, Université deTetouan, 2003.

[27] Malliavin, M. P. *Algebre commutative : applications en geometrie et theorie des nombre.* 1985.

[28] MBAYE, A. SANGHARÉ M., T. S. D. On commutative sci-rings and commutative scs-rings. *International Journal of ALgebra 4*, 12 (2010), 585–590.

[29] MENAL, P. Cancellation modules over regular rings. In *Ring theory*. Springer, 1988, pp. 187–208.

[30] MOHAMED, S. H., AND MÜLLER, B. J. *Continuous and discrete modules*, vol. 147. Cambridge University Press, 1990.

[31] MOUSTAPHA, S. *Etude sur les S-modules*. Thèse de troisième cycle, Université Cheikh ANATA DIOP, 1997.

[32] PINAR, A., AND OZCAN, A. C. Semi co–hopfian and semi hopfian modules.

[33] SALMAN, Z. T. Purely co-hopfian modules. *Ibn Al-Haitham Journal for Pure and Applied Science 25*, 2 (2012).

[34] SANGHARÉ, M. On s-duo rings. *Communications in Algebra 20*, 8 (1992), 2183–2189.

[35] SANGHARE, M. *Sur les I-anneaux,les S-anneaux et les F-anneaux*. Thèse d'etat, UCAD, Décembre 1993.

[36] STROOKER, J. R., ET AL. Lifting projectives. *Nagoya Mathematical Journal 27*, Part (1966), 747–751.

[37] VARADARAJAN, K. Hopficity of cyclic modules. *NATIONAL ACADEMY SCIENCE LETTERS-INDIA 15*, 7 (1992), 217–221.

[38] Vasconcelos, W. V. On finitely generated flat modules. *Transactions of the American Mathematical Society 138* (1969), 505–512.

[39] Vasconcelos, W. V. Injective endormorphisms of finitely generated modules. *Proceedings of the American Mathematical Society 25*, 4 (1970), 900–901.

[40] Wisbauer, R. Decomposition properties in modules categories. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica 26*, 2 (1985), 57–68.

[41] Wisbauer, R. *Foundations of module and ring theory*, vol. 3. CRC Press, 1991.