UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
ECOLE DOCTORALE MATHEMATICS ET INFORMATIQUE

Année : 2017 Numéro d'ordre : 98

Thèse de Doctorat Unique
Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Mention : Mathématiques et Modélisation
Option : Analyse Statistiques et Applications
par

Mouhamadou Alpha DIALLO
Sous la direction de : **Abdoulaye SENE**
Co-directeur : **Khalil EZZINBI**

Contributions à l'existence et à la contrôlabilité pour une classe d'équations intégrodifférentielles en dimension infinie

Soutenue le 06 Mai 2017 devant le jury composé de :

Président	Diaraf SECK	Professeur	UCAD
Examinateur	Gabriel Birame NDIAYE	Maître de Conférences	UCAD
Rapporteurs	Benjamin MAMPASSI	Professeur	UCAD
	Mamadou Abdoul DIOP	Maître de Conférences	UGB Saint Louis
	Hammadi BOUSLOUS	Professeur	UCA Maroc
Directeurs	Abdoulaye SÉNE	Maître de Conférences	UCAD
de thèse	Khalil EZZINBI	Professeur	UCA Maroc.

الله الرحمن الرحيم

Au nom d'ALLAH, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux.

Remerciements

Toutes les louanges appartiennent à ALLAH, Seigneur des univers, l'Administrateur des affaires de toutes les créatures. Je Le loue pour tous Ses bienfaits et je Lui demande de m'accorder davantage de Sa grâce. Que la paix et le salut soit sur notre prophète MOUHAMMAD ainsi que sur sa famille sur ses compagnons et sur tous ceux qui suivent son chemin et son chantier jusqu'au jour de la résurrection.

Je témoigne toute ma gratitude et ma reconnaissance à l'endroit de mes deux directeurs de thèses à commencer par monsieur Abdoulaye SENE, maître de conférence à l'université Cheikh Anta Diop de Dakar. Votre observation et suggestion, votre dynamisme et gentillesse, vos compétences scientifiques et votre générosité intellectuelle, vos qualités humaines remarquables et votre soutien efficace et enfin votre disponibilité m'ont beaucoup marqué et m'ont permis de surmonter les multiples obstacles qui se sont dressés à moi tout au long de mon parcours. Les mêmes reconnaissances vont à l'endroit du professeur khalil EZZINBI, enseignant à l'université Cadi Ayyad du Maroc, qui malgré la distance et les multiples occupations qui sont les tiennes a accepté de codirigé cette thèse avec beaucoup d'attention. Ces derniers n'ont ménagé ni leur temps ni leur énergie lorsqu'il s'agissait de répondre à mes multiples sollicitations.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche.

Je voudrais d'abord exprimer ma gratitude aux professeurs Hammadi BOUSLOUS, Benjamin MAMPASSI et Mamadou Abdoul DIOP d'avoir rapporté cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit de monsieur Gabriel Birame NDIAYE d'avoir examiné ce travail.

Mention spéciale au professeur Diaraf SECK d'avoir accepter de préesider la soutenance de cette thèse.

Cette thèse a bénéficié du soutien financier du Projet Non Linear Analysis Geometry and Applications (NLAGA) qui m'a permis de bien mener mes recherches donc c'est le moment et le lieu d'exprimer toute ma reconnaissance et ma satisfaction à l'ensemble des professeurs membre du projet NLAGA. Je tient aussi à remercier tous mes professeurs qui ont enrichi ma vie professionnelle.

Passons maintenant à mes collègues de travail avec qui j'ai eu la chance de travailler et avec qui les trois dernières années sont passées très rapidement. Je remercie tous les étudiants membre du projets NLAGA. Je garderai un bon souvenir des discussions animées au cours des repas chez Khady et des pauses café et thé. Plus particulièrement je remercie Don Bosco Diatta et Seydina Issa Dione dont l'ouverture d'esprit et la sociabilité sont hors-normes pour des chercheurs (purs mathématiciens). La vie d'un labo ne serait rien sans eux donc je tenais à les remercier dans leur ensemble.

Je tiens à associer à ces remerciements toutes les personnes extra-professionnelles qui m'entourent aux quotidien.

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

Mes parents, notamment à mon père et à ma mère qui, tout au long de mon cursus, mon toujours encouragé, soutenu et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.

Mes frères et soeurs pour m'avoir fait partager leur joie de vivre et m'avoir ainsi soutenu dans mes efforts et particulièrement à mon grand frère Abdourahmane qui m'a soutenu financièrement durant tout mon cursus universitaire. Même si leur aide s'est révélée limitée dans la résolution des équations intégrodifférentielles, leur présence est essentielle pour trouver un équilibre dans ma vie. Je leur remercie aussi pour leur patience.

Mes camarades, Maguette Fall, Mafal Fall, Mor Mbaye, Ouzin Kane, Korka Sow, Ismaila Sow, Boubacar Diao, Mouhamed Traoré(SASS) qui m'ont toujours encouragé, soutenu et aidé au cours de la réalisation de ce document.

Mankeur PENE à qui je souhaite une très grande réussite personnelle.

Tous mes Professeurs.

Qu'ALLAH vous récompense de la plus belle des manières.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier une classe d'équations intégrodifférentielles semi-linéaires dans les espaces de Banach. Les équations intégrodifférentielles traduisent par exemple l'évolution des processus réels ou artificiels dont le comportement futur dépend des états antérieurs. Tout d'abord, en utilisant la théorie des opérateurs résolvants et le théorème du point fixe de Schaefer, nous avons établi un résultat de contrôlabilité exacte en temps T fini d'une classe d'équations intégrodifférentielles. Ensuite, nous avons établi un résultat d'existence d'au moins une solution faible pour le cas avec impulsion dans les espaces de Banach. Ces résultats d'existence sont obtenus par combinaison de la théorie des opérateurs résolvants et du théorème du point fixe de Sadowskii. Enfin, nous avons étudié un problème de contrôle optimal dont la dynamique est régie par une équation intégrodifférentielle. Nous avons aussi établi un résultat de stabilité, au sens des catégories de Baire, de l'ensemble des contrôles admissibles. Des exemples d'applications sont donnés pour illustrer nos résultats théoriques.

Mots clés : Équations intégrodifférentielles, opérateurs résolvants, théorie du point fixe.

Abstract

The aim of this work is to study a class of semi-linear integro-differential equations in the Banach spaces. The integro-differential equations express, for example, the evolution of real or artificial processes whose future behavior depends on the previous states. First, using the resolvents operator theory and the Schaefer fixed-point theorem, we have established an exact controllability result in finite time T of a class of integro-differential equations. Next, we established an existence result of at least one weak solution for the case with impulse conditions in Banach spaces. These results of existence are obtained by combining the theory of resolvent operators and Sadowskii's fixed point theorem. Finally, we have studied an optimal control problem whose dynamics is governed by an integro-differential equation. We have also established a stability result, in the sense of Baire category, of all eligible controls. Examples of applications are given to illustrate our theoretical results.

Key words : Integrodifferential equations, resolvents operators, fixed point theory.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Modélisation

On se pose très souvent la question suivante : Comment les sciences peuvent-elles utiliser des mathématiques ?
Les physiciens ne se posent guère cette question car leur science est très mathématisée : les lois fondamentales de la physique ont toutes des expressions mathématiques. Pour ce qui est des sciences du vivant, la situation est moins claire. Certaines branches (l'hérédité, la dynamique des populations, le code génétique, la cinétique biochimique) se prêtent bien à un traitement mathématique. C'est moins clair pour d'autres ! De nombreux systèmes que l'on étudie dans les sciences comme la physique, la chimie, la biologie, l'économie, etc., sont (en première approximation) des systèmes déterministes ; cela signifie que l'évolution du système au cours du temps est complètement déterminée par son état à un instant donné. Citons par exemple l'évolution des concentrations des réactifs dans une réaction chimique, l'évolution de populations (de bactéries, de lapins, etc.,) dans un système fermé, la radioactivité, etc., La description de ces systèmes se fait au moyen de quantités numériques dont il s'agit d'étudier l'évolution au cours du temps.

Utiliser les mathématiques, pour modéliser le monde ou certains de ses aspects particuliers, est évidemment au coeur même de l'activité du mathématicien appliqué. La modélisation est la représentation d'un système par un autre, plus facile à appréhender. Il peut s'agir d'un système mathématique ou physique. La modélisation consiste à construire un ensemble de fonctions mathématiques décrivant un phénomène. Les objets mathématiques jouent le rôle des objets réels, et de leur connaissance on espère en tirer une compréhension sur le phénomène réel lui-même. Ainsi, pour répondre à la question posée, on peut dire que les mathématiques permettent de modéliser, c'est-à-dire de représenter, un phénomène du monde réel. L'étude mathématique de cette représentation nous informe, lorsque la représentation est bonne, sur le phénomène étudié. Cependant, un modèle mathématique n'est pas une représentation de la situation rélle telle qu'elle est, mais une caricature du phénomène étudié. Un bon modèle est celui qui simplifie au mieux le phénomène réel en question afin d'effectuer des calculs nous permettant ainsi de dégager des conclusions valables et utiles. On peut ainsi modéliser le monde physique par un espace euclidien de dimension trois (ou quatre pour prendre en compte le temps). On peut aussi modéliser un satellite tournant autour de la terre par un point dont les coordonnées varient continûment en fonction du temps, etc.,

1.2 Quelques modèles d'équations différentielles de la physique mathèmatiques

Dans cette sous section nous allons présenter des modèles d'équations de la physique mathématiques à savoir l'équation de la chaleur et l'équation d'une corde vibrante

1.2.1 Équation de la Chaleur

Considèrons un corps dur, isotrope et homogène, Ω, dont la température, en chaque point $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, est définie par la fonction $\theta(t,x)$ en un temps $t \in [0,b]$. Soit $e(t,x)$ l'énergie interne du corps, $f(t,x)$ une source de chaleur à l'intérieur du corps, ρ la densité du corps et q le flux de chaleur. La loi de conservation de l'énergie est exprimée par la formule

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot q + f. \tag{1.1}$$

Cette équation est valide pour n'importe quel corps. Afin d'avoir un système bien posé, nous avons besoin de quelques résultats constitutif du corps, c'est-à-dire, quelques relations entre e et q qui dépendent de la température θ. Si les différentes parties du corps ont des températures différentes, alors la température se déplacera des parties à fortes températures vers celles à faibles températures. Donc la théorie classique de la conduction de chaleur obéit à la loi de Fourier suivante

$$q(t,x) = -k(t,x)\nabla\theta(t,x). \tag{1.2}$$

où k représente la conductivité thermique du corps et le flux de chaleur q dépend linéairement de $\nabla\theta$(le gradient de la température). Le signe négatif signifie que la direction du flux de chaleur est opposée au gradient de la température. Il est aussi supposé que l'énergie interne e du corps dépend linéairement de la température.

$$e = e_0 + C\theta \tag{1.3}$$

où C est la capacité du corps et e_0 est une constante positive. Soit $\theta_0(x)$ la température initiale à l'intérieure du corps et $\theta(t,x) \mid_{\partial\Omega}= \phi(t,x)$ la température sur les limites du corps. L'établissement de l'équation de propagation de la température dans le corps, basé sur la loi de Fourier, conduit au sytème suivant.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\theta(t,x) & = a^2\Delta\theta(t,x) + F(t,x) \text{ dans } \in [0,b] \times \Omega, \\ \theta(0,x) & = \theta_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \theta(t,x) & = \phi(t,x) \text{ sur } [0,b] \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

oú $a^2 = (k/C\rho)$ et $F = (f/C\rho)$. Ce système modélise la conduction de chaleur dans un corps qui interagit avec l'extérieur. En particulier, lorsque

1. Ω est une partie de $\mathbb{R}^2$, alors on obtient l'équation de la propagation de la chaleur sur une plastique ou une membrane homogène, isotrope, mince et conducteur de chaleur.
2. Ω est une partie de $\mathbb{R}$, alors on obtient l'équation de la propagation de la chaleur sur une tige très mince ou sur un fil homogène, isotrope et conducteur de chaleur.

Pour étudier l'évolution temporelle d'un tel système, on considère le changement de variable suivant :

$$\Theta(t) = \theta(t, \cdot) \text{ et } F(t) = f(t, \cdot)$$

Le système (1.4) devient alors le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \Theta'(t) & = A\Theta(t) + F(t) \text{ sur } t \in [0, b], \\ \Theta(0) & = \Theta_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

où A est l'opérateur de Laplace avec les conditions aux bords de type Dirichlet.

1.2.2 Équation d'une corde vibrante

Considérons une corde, c'est-à-dire un fil flexible mince et inextensible, de longueur l. Supposons que la corde se trouve en équilibre suivant l'axe $(x'ox)$ sous l'action seulement des deux tensions. Si on applique une force f quelconque à la corde elle se met à vibrer. Le point qui se trouvait en x (en équilibre) à un moment donné se retrouve en M_1 à l'instant t. On suppose que les oscillations sont transversales c'est-à-dire que le déplacement des points est perpendiculaire à l'axe $(x'ox)$. Soit $y(t, x)$ le déplacement d'un point x en un temps t, $f(t, x)$ la force appliquée au point x en un temps t. L'établissement de l'équation de la corde vibrante, basé sur le principe D'Alembert, conduit au système suivant

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t, x) + f(t, x),\ t \in [0, b], x \in [0, l] \tag{1.6}$$

Pour déterminer avec précision les mouvements de la corde on ajoute les conditions initiales

$$y(0, x) = y_0(x) \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = y_1(x),\ x \in [0, l], \tag{1.7}$$

Comme la corde est limitée, les conditions aux limites peuvent être de plusieurs formes. Par exemple :

$$y(t, 0) = y(t, l) = 0,\ t \in [0, b], \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, l) = 0,\ t \in [0, b], \tag{1.9}$$

$$y(t, 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, l) = 0,\ t \in [0, b]. \tag{1.10}$$

La condition (1.8) signifie que les extrémités de la corde sont fixées, la condition (1.9) signifie que les extrémités de la corde sont libres et la condition (1.10) signifie qu'une des extrémités de la corde est fixée et que l'autre est libre. Le système (1.6), (1.7), (1.8) c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y(t,x) &= \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y(t,x) + f(t,x),\ t \in [0,b], x \in [0,l] \\ \\ y(0,x) &= 0,\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0,\ x \in [0,l] \\ \\ y(t,0) &= 0,\ y(t,l) = 0\ t \in [0,b], \end{cases} \tag{1.11}$$

est le premier problème mixte de l'équation de vibration, il modélise la vibration d'une corde fixée des deux extrémités.

Le système (1.6), (1.7), (1.9) c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}y(t,x) &= \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}y(t,x) + f(t,x),\ t \in [0,b], x \in [0,l] \\ \\ y(0,x) &= 0,\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0,\ x \in [0,l] \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}(t,0) &= \dfrac{\partial y}{\partial x}(t,l) = 0,\ t \in [0,b], \end{cases} \tag{1.12}$$

est le deuxième problème mixte de l'équation de vibration, il modélise la vibration d'une corde dont les deux extrémités sont libres. Ces sytèmes jouent un rôle important et sont rencontrés dans différent domaine de la physique, biologie, chimie etc., Ces modèles ont longtemps joué des rôles importants dans la modélisation de plusieurs phénomènes, cependant la plupart des corps sont à mémoire et la modélisation de ces derniers fait apparaître une équation intégrodifférentielle.

1.3 Quelques modèles d'équations intégrodifférentielles de la physique mathèmatiques

Durant le siécle dernier, dans plusieurs domaines de la science et de l'ingénierie, tel que la conduction de chaleur dans les matériels avec mémoire, visco-élasticité (phénomène héréditaire) et les réacteurs dynamiques, il est apparu une équation intégrodifférentielle de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta\theta + \displaystyle\int_0^t B\theta(s)ds + f \text{ sur } t \in [0,b], \\ \\ \theta(0,x) &= \theta_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \\ \theta(t,x) &= 0 \text{ sur } [0,b] \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

où B, dans l'intégrale de Volterra (terme à mémoire), est un opérateur différentiel d'ordre $\beta \leq 2$. En général, ce terme intégral reflète la mémoire, rétroaction ou feedback (contrôle par retour de l'information) ou d'autres mécanismes des systèmes dynamiques. Les équations intégrodifférentielles décrivent des processus pour lesquels le changement d'état est déterminé par tous les états antérieurs.

1.3.1 Flux de chaleur dans les matériaux à mémoire

On peut citer deux inconvénients dans l'établissement de l'équation de la chaleur (1.4) à savoir :

i) Elle ne prend pas en compte les effets mémoire qui peuvent exister dans certain corps, par exemple le bois, les polymères, les plastiques, la glace, etc.,

ii) L'équation de la chaleur (1.4) prédit un résultat irréaliste c'est-à-dire une perturbation thermique à un point est propagée instantanément dans tout le corps.

Cette observation laisse penser que la loi de Fourier peut être une approximation limitée. Cela a conduit à Coleman[27] et Gurtin [59] de proposer une théorie à mémoire non-linéaire de la conduction de la chaleur qui est indépendante de ∇ et dont la vitesse de l'onde est fini. Lorsque cette relation constitutive est linéarisée, elle conduit au flux de chaleur suivant

$$q(t) = -\int_0^t k(s)\nabla(t-s)ds \tag{1.14}$$

pour un corps isotrope. Cette forme spéciale s'est avérée très utile pour décrire la transformation des impulsions de chaleur dans le liquide d'hélium et dans quelques diélectriques à basse températures. Par ailleurs, Coleman, Gurtin [28] et Nunziato [90] ont considéré une théorie à mémoire qui dépend aussi du gradient de la température $\nabla\theta$, c'est-à-dire le flux de chaleur est donné par

$$q(t) = -a(0)\nabla\theta(t) - \int_{-\infty}^t a'(s)\nabla\theta(t-s)ds \tag{1.15}$$

où a est la fonction de relaxation de la conduction thermique et $a(0) \geq 0$. Une relation similaire à l'équation (1.15) pour l'énergie interne donnée par

$$e(t) = e_0 + b(0)\theta(t) + \int_{-\infty}^t b'(s)\theta(t-s)ds \tag{1.16}$$

peut être supposée. Donc, ces relations conduisent à une nouvelle équation de la chaleur

$$b(0)\frac{\partial\theta}{\partial t} = -a(0)\nabla\theta - b'(0)\theta + \int_0^t [a'(s)\nabla\theta(t-s) - b''(s)u(t-s)]ds \tag{1.17}$$

R. K. Miller [86] a étudié le système suivant :

$$\begin{cases} e(t,x) &= e_0 + \alpha(0)\theta(t,x) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \alpha'(t-s)\theta(s,x)ds, \\ q(t,x) &= -k(0)\nabla\theta(t,x) - \displaystyle\int_{-\infty}^{t} k'(t-s)\nabla\theta(s,x)ds, \\ e'(t,x) &= -\nabla.q(t,x) + F(t,x), \end{cases} \tag{1.18}$$

où $0 \leq t < \infty$ et x est un vecteur dans un espace de dimension n. Ce système modélise la conduction de chaleur dans un matériau rigide. La fonction θ est la température, $\alpha(t)$ représente la relation énergie-température au temps t et $k(t)$ est la relation de la conduction de la chaleur. On assume que α et k sont continues et satisfont quelques autres conditions additionnelles [86]. Pour $k(0) = 0$, cette équation représente la théorie linéarisée pour le flux de chaleur dans un matériau rigide, isotrope, homogène comme développé par Gurtin et Pipkin [59]. Pour $k(0) > 0$, les équations représentent une théorie linéarisée alternative proposée par Coleman et Gurtin [28], voir aussi Gurtin [58]. Pour étudier ce système (1.18), Miller l'a transformé en une équation intégrodifférentielle équivalente dans un espace de Hilbert. Pour $k(0) > 0$, l'auteur a obtenu l'équation suivante :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = (C\Delta - a(0))\theta(t) + \int_0^t [Cb(t-s)\Delta\theta(s)a'(t-s)\theta(s)]ds, \text{ pour } t \geq 0 \tag{1.19}$$

où $C = k(0)/\alpha(0), a(t) = \alpha'(t)/\alpha(0), b(t) = k'(t)/k(0)$ et $f(t) = [r(t) + \nabla.h(t) - g'(t)]/\alpha(0)$ avec

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha'(t-s)\theta(s,x)ds \text{ et } h(t) = \int_{-\infty}^{t} k'(t-s)\nabla\theta(s,x)ds$$

Puis (sous les conditions (H1)-(H3), J=2, voir Miller [86]), l'auteur a transformé l'équation (1.19) en celle-ci

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = (C\Delta - y(0))\theta(t) + \int_0^t y'(t-s)\theta(s)]ds + F(t,x), \text{ pour } t \geq 0 \tag{1.20}$$

où F est d'éfinie par

$$F(t,x) = f(t,x) - \int_0^t D(t-s)f(s,x)dsD(t)\theta(0,x),$$

et D(t) et y(t) satisfont les équations scalaires

$$D(t) = b(t) - \int_0^t b(t-s)D(s)ds \text{ et } y(t) = b(t) - a(t) - \int_0^t b(t-s)y(s)ds.$$

Pour modéliser la conduction de la chaleur d'un matériau à mémoire, Lodge et al [81] ont obtenu l'équation intégrodifférentielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = (\Delta + c)\int_{-\infty}^{t} L(t-s)u(s,x)ds + L_0u(t,x) + F(t,x) \text{ for } t > 0. \tag{1.21}$$

1.3.2 En Biologie

Pour modéliser une réaction réversible simple à l'intérieur d'une petite cellule, Jennifer A.D. [39] a étudié le système suivant

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) \text{ dans } [0,+\infty[\times]0,1[, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = 0 \text{ dans }]0,+\infty[\tag{1.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,1) = m\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \frac{Em}{1+L}[L\theta(t) - (1-\theta(t))u(t,1)] \text{ sur } [0,+\infty[, \tag{1.24}$$

$$u(0,x) = 1, \text{ sur }]0,1[\tag{1.25}$$

$$\theta(0) = 0 \tag{1.26}$$

où

$$m\theta(t) + \int_0^1 u(t,x)dx = 1, \text{ sur }]0,+\infty[$$

et E, L et m des constantes données.

Dans ce problème, il s'agit d'une réaction entre deux réactifs X et Y à l'intérieur d'une petite cellule afin de produire un composé XY. L'espèce Y est immobilisé sur une paroi latérale tandis que l'espèce X est une solution dissoute. La réaction se produit sur la paroi latérale. A l'instant $t = 0$, une solution de X est introduite dans la cellule, alors comme la réaction se produit au niveau de la paroi, un gradient de concentration X se développe, et X se diffuse dans la paroi jusqu'à un résultat d'équilibre. L'objectif est de prédire la concentration de la solution X et la concentration de la composé XY en fonction du temps. Dans le modèle ci-dessus les variables $u(t,x)$ et $\theta(t)$ représentent les concentrations de X et de XY respectivement. E est la taille de la cellule, L la concentration initiale de la solution Y et m la concentration initiale de la solution X au niveau de la paroi et le coefficient de diffusion de X. En prenant la transformé de Laplace de l'équation (1.17), utilisant la condition initial (1.20), et en utilisant le théorème de convolution, Jennifer A. D. montre que $u(t,1)$ est donné par

$$u(t,1) = 1 - m\int_0^t k(t-s)\frac{\partial}{\partial s}\theta(s)ds \tag{1.27}$$

où le noyau $k(t)$ est donné par :

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\big(\frac{n^2}{t}\big)\Big) \tag{1.28}$$

D'après (1.19) $\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$ satisfait l'équation intégrodifférentielle de Volterra suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = -\frac{Em}{1+L}[L\theta(t) - (1-\theta(t))(1-m\int_0^t k(t-s)\frac{\partial}{\partial s}\theta(s)ds)] \text{ sur } [0,+\infty[, \tag{1.29}$$

avec $\theta(0) = 0$.

Afin d'expliquer le rôle important que joue l'intégral de Volterra, nous considérons le cas particulier suivant :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \int_0^t K(t-s)\Delta\theta(s)ds + f. \tag{1.30}$$

a) Si $K(t) = 1$, alors la dérivation de l'équation (1.30) par rapport à t donne l'équation des ondes c'est-à-dire de la forme (1.11).

b) Si $K(t)$ est la fonction Delta, alors l'équation (1.30) devient l'équation de la chaleur.

Donc l'équation intégrodifférentielle est en fait un état intermédiaire de l'équation des ondes et de l'équation de la chaleur. L'importance des équations intégrodifférentielles vient du fait que

1. Plusieurs phénomènes mentionnés ci-dessus peuvent être exactement décrits par une équation à mémoire.
2. L'apparition de nouvelles propriétés physiques et mathématiques quand le noyau $K(t)$ est singulier.
3. Pour les équations intégrodifférentielles non linéaires, à la fois paraboliques et hyperboliques, quand le noyau a une certaine singularité, il est possible d'obtenir une solution globale même pour de large données.

Naturellement, la présence de l'intégrale de Volterra cause de nouvelles difficultés à la fois dans la théorie et dans la simulation numérique.

Malgré le fait que les matériaux à mémoire étaient théoriquement considérés par Boltzmann depuis 1872, mais c'est vers les années cinquante, grâce au développement des sciences et techniques, que plusieurs problèmes pratiques liés étaient considérablement manifesté telle que la conduction de la chaleur dans les matériaux à mémoire, la viscoélasticité, la dynamique des réacteurs nucléaires, en biomécanique, etc., Tous ces types d'équations intégrodifférentielles sont largement étudiées. Pour plus de détail sur la modélisation de quelques phénomènes physiques en des équations intégrodifférentielles le lecteur pourra consulter les documents suivants : [25], [21], [6], [72], [31], [16], [45], [62] etc.,

Supposons maintenant que Ω est le corps humain et on souhaite étudier la régularisation de la température de ce dernier. Soit $\theta(t)$ la fonction d'évolution de la température en fonction du temps t. Si l'organisme ne fait pas correctement son travail et à un instant τ la température commence à dépassée les 40 degrés. Il devient tout à fait naturel d'agir sur le corps afin de lui ramener à une température idéale. Cette action qu'on fait sur le corps pour le ramener à un état désiré est appelée contrôle. Maintenant, considérons certains problèmes de contrôle liés à l'équation (1.4). Supposons que nous sommes en mesure de changer la source F dans le domaine Ω. Puis, un autre F va nous donner une autre solution θ. Ainsi, pour une distribution de température souhaitée $\overline{\theta}_s$, nous pouvons essayer de choisir un F approprié, de sorte que la solution $\theta(t,x)$ soit égale ou proche de $\overline{\theta}_s$ dans un certain sens. Telle est la situation qui se produit lorsque nous mettons une source de chaleur (un climatiseur) dans la maison pour abaisser la température en été. Nous nous référons habituellement à θ comme état et à F, que l'on peut changer, comme le contrôle. L'équation (1.4) est appelée l'équation d'état. Dans la situation décrite cidessus, le contrôle apparaît dans la partie droite de l'équation d'état, où le contrôle agit à l'intérieur du domaine Ω. Nous appelons un tel contrôle un contrôle interne. Parfois, nous pouvons changer la température sur la frontière $\partial\Omega$, à savoir le ϕ dans (1.4) peut être manipulé. Dans ce cas, ϕ est appelé contrôle frontière. On peut aussi définir les mêmes notions pour les autres conditions aux limites.

1.4 Théorie du contrôle

La théorie du contrôle mathématique est l'un des domaines très important des mathématiques axé sur l'application qui traite des principes de base qui renforce l'analyse et la conception des systèmes de contrôle. La théorie du contrôle a un bilan impressionnant d'applications réussies à travers les avions, les navires, les satellites et le guidage des missiles, les industries de transformations (chimie, pétrole, acier, ciment, etc.), les produits pharmaceutiques, domestiques et produits informatiques (caméras automatiques, etc.), services publics (par exemple, tous les aspects de la production et de l'alimentation électrique), assemblage automatique, de la robotique, les prothèses et de plus en plus, il prête ses idées de base à d'autres disciplines.

Les objets de la théorie du contrôle sont des systèmes. Un système est un ensemble d'éléments interagissant entre eux par des liens d'information.
Les questions typiques qui sont posées en théorie du contrôle sont :

1. Le système peut-il être dirigé (guidé) à partir d'un état initial x_0 à tout état désiré x_d (contrôlabilité) ?
2. Est-ce qu'il existe des stratégies de contrôle optimal pour le pilotage du système ? Si oui, sont-elles uniques et comment peuvent-elles être synthétisés ?
3. La stabilité du système

La contrôlabilité vise à établir que l'ensemble des contrôles, $\mathcal{U}$, qui peuvent accomplir une tâche déterminée est non vide tandis que la théorie du contrôle optimal porte sur la détermination de l'élément de $\mathcal{U}$ qui est le mieux dans un certain sens.
La théorie du contrôle s'intéresse d'abord aux systèmes dynamiques : ce sont des systèmes dont le comportement sur une période de temps peut être étudié. Il est le plus souvent régi par un ensemble d'équations différentielles décrivant le mouvement des composants. En fin, elle s'intéresse aux systèmes feedback ou rétroaction :
La rétroaction est l'action en retour d'un effet sur sa propre cause : la séquence de causes et d'effets forme donc une boucle dite boucle de rétroaction. Un système comportant une boucle de rétroaction agit ainsi sur lui-même. Exemple de boucles de rètroaction
1- S'informer sur soi-même en se regardant à travers le miroir.
2- s'acquérir de l'avis des autres et des regards qu'ils portent sur soi.
La théorie du contrôle s'applique aux situations quotidiennes, comme dans les exemples

ci-dessus, elle s'applique aussi à des tâches plus exotiques par exemple manoeuvre des véhicules spatiaux. L'universalité de la théorie du contrôle signifie qu'elle est mieux considérée puisqu'elle est appliquée à une situation abstraite qui ne contient que la propriété topologique possédée par toutes les situations qui doivent être contrôlées. L'idée est que si on sait contrôler une situation très générale appelée un système, alors, nous serons en mesure de contrôler chaque situation particulière. C'est le point de vu de la théorie du contrôle et c'est ce point de vue qui lui donne son pouvoir extraordinaire. Lorsque la théorie du contrôle souhaite étudier la régulation de la température du corps humain, il se préoccupe d'un système impliquant la circulation sanguine, les mécanismes de production de chaleur, la perte de chaleur et la prise de décision par le cerveau. Donc pour que la théorie du contrôle puisse être appliquée avec succès, il faut :
1- Un but qui est lié à l'état futur du système.
2- Un ensemble d'actions possible qui offre un élément de choix (si aucune variation de l'action n'est possible, le contrôle ne peut être exercé et le système suivra un cours qui ne peut être modifié).
Ainsi nous pouvons voir que l'un des problèmes principaux est de synthétiser des actions qui, lorsqu'elles sont appliquées à un système dynamique, produira la réponse que nous cherchons.

Nous avons vu que les objectifs de la contrôlabilité sont de guider le système d'un état initial donné afin d'obtenir un état final désiré. Cependant, divers problèmes de la science et de la technologie exigent souvent le choix du mieux, ou optimale, parmi un ensemble de toutes les solutions possibles.

1.5 Théorie du contrôle optimal

La théorie du contrôle est une étude mathématique qui se pose la question : Comment influencer le comportement d'un système dynamique pour atteindre un objectif souhaité ? Dans un contrôle optimal, l'objectif est de maximiser ou minimiser la valeur numérique d'une quantité déterminée qui est fonction du comportement du système. Par exemple trouver le contrôle $\overline{u} \in \mathcal{U}$ solution du problème suivant

$$\min \mathcal{J}(u) = \int_0^b l(t, x(t))dt \tag{1.31}$$

où x est solution de l'equation différentielle suivante

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t), u(t)),\ t \in [0, b] \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{1.32}$$

Mathématiquement, les problèmes de contrôle optimal sont des variantes des problèmes dans le calcul des variations, qui ont une histoire de plus de 300 ans. Cependant, la théorie du contrôle optimal est développée dans la seconde moitié du 20e siècle, en répondant à divers problèmes appliqués. Le principe du maximum, mis au point à la fin des années 1950 par Pontryagin et ses collaborateurs [93], est parmi les plus grands succès de la théorie du contrôle optimal.

La formulation d'un problème de contrôle optimal nécessite au moins cinq étapes :

i) La classe des contrôles admissibles.
Soit X un espace de Banach (espace de phase), supposons que $\mathcal{S}$ est un système dynamique contrôlable. Soit $\mathcal{U}[0,b]$ l'ensemble des contrôles admissible c'est-à-dire tous les contrôles qui sont capables d'amener le système $\mathcal{S}$ d'un état initial donné à un état final désiré. Dans les applications le cas où $\mathcal{U}[0,b]$ est fermé et borné est très important. La signification physique du choix du caractère fermé et borné de $\mathcal{U}[0,b]$ est claire. La quantité de carburant qui est fournie à un moteur, la température, le courant, la tension, etc., qui ne peuvent pas prendre des valeurs arbitrairement grandes, peuvent servir de variables de contrôle. Tout au long de cette thèse, nous allons considérer la classe des contrôles intégrables ou plus généralement continus par morceaux. Cette classe de contrôle semble être la plus intéressante pour les applications pratiques de la théorie.

ii) La description mathématique (ou modèle) du système à contrôler.
Une partie non négligeable de tout problème de contrôle est la modélisation du système. L'objectif est d'obtenir la description mathématique la plus simple du problème qui prédit correctement la réponse du système physique à tous les contrôles admissibles. Nous pouvons considéré des systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles de la forme :
$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x(t),u(t)),\ t\in[0,b] \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{1.33}$$
Une solution $x(t,x_0,u(t))$ de (1.33) est appelée réponse du système, correspondant au contrôle u, pour la condition initiale x_0.

iii) La spécification d'un critère de performance.
Un critère de performance (aussi appelé fonctionnel, fonction coût, ou tout simplement le coût) doit être spécifié pour évaluer la performance d'un système quantitativement. Par exemple nous pouvons considérer la fonction coût de lagrange $\mathcal{J}:\mathcal{U}[0,b]\to X$ qui est définie par
$$\mathcal{J}(u)=\int_0^b l(t,x(t),u(t))dt \tag{1.34}$$
où $x(t)$ est la solution du système dynamique suivant
$$\begin{cases} x'(t) &= u(t), \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{1.35}$$
De plus, dans certains problèmes d'optimisation, le temps initiale $t_0=0$ et le temps finale $t_f=b$ peuvent être considéré comme des variables. Mayer a considéré la fonction coût suivante
$$\mathcal{J}(u)=\psi(t_0,x(t_0),t_f,x(t_f)) \tag{1.36}$$

où ψ est une fonction à valeur réelles définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
Plus généralement on peut considérer une fonction coût plus général, qui correspond à la somme des fonctions coût définies dans (1.34) et (1.36) comme

$$\mathcal{J}(u) = \psi(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} l(t, x(t), u(t))dt \tag{1.37}$$

où on prend les temps initiale et finale dans (1.34) comme des variables $t_0 = 0$ et $t_f = b$. Ce dernièr coût est appelé coût de Bolza.

iv) L'état des contraintes physiques qui doivent être satisfaits.
Une grande variété de contraintes peuvent être imposées par un problème de contrôle optimal. Ces contraintes restreignent l'ensemble des valeurs qui peuvent être prises à la fois par le contrôle u et l'état x. On distingue plusieurs types de contraintes. Les contraintes peuvent être des égalités ou des inégalités.

v) Critères optimaux.
Après avoir défini les critères de performances, l'ensemble des contraintes physiques étant satisfait, et l'ensemble des contrôles admissibles étant défini. On peut alors énoncer le problème de contrôle optimal comme suit : trouver un contrôle admissible $\overline{u} \in \mathcal{U}[0, b]$ qui satisfait les contraintes physique de telle sorte que $\mathcal{J}(\overline{u})$ minimise la fonction coût $\mathcal{J}$,

Pour des détails supplémentaires sur la théorie du contrôle et la théorie du contrôle optimale, le lecteur pourra consulter les manuscrits suivants : [76] [98] [4] [75] [73], [95] [23] [17] [84] [41]

1.6 Structure de la thèse

Cette thèse est composée de cinq chapitres, dont ce chapitre d'introduction.
Dans le chapitre 2 nous avons présenté quelques résultats préliminaires. La section 2.1 rappelle la théorie sur les semi-groupes fortement continus dans les espaces de Banach et leur importantes propriétés. La section 2.2 passe en revue les équations intégrodifférentielles et la théorie des opérateurs résolvants.
Dans le chapitre 3 nous étudions la contrôlabilité exacte de l'équation intégrodifférentielle semi-linéaire suivante

$$\begin{cases} x'(t) &= Ax(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)x(s)ds + f(t, x(t)) + Bu(t) \text{ pour } t \in J = [0, b], \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{1.38}$$

où A engendre un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X, $(C(t))_{t\geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés de domaine fixe $D(A)$ et B est un opérateur linéaire borné de $L^1(J, U)$ dans l'espace des phases X, où U est un espace de Banach. Les résultats sont obtenus en utilisant la théorie des opérateurs résolvants introduite par Grimmer [55] combiné avec la théorie de points fixe. Le principe consiste à transformé le problème de contrôle en un problème de point

fixe pour un opérateur linéaire approprié dans un espace fonctionnel. Une partie essentielle de cette approche est de garantir l'existence d'un sous-ensemble invariant pour cet opérateur. Donc, nous donnons des conditions suffisantes sur la famille d'opérateurs $(C(t))_{t\geq 0}$ afin d'obtenir un opérateur résolvant. Nous montrons sous des conditions appropriées sur le terme non linéaire f et le semi-groupe engendré par l'opérateur linéaire A que l'équation (1.38) est exactement contrôlable sur J. Les résultats obtenus font l'objet d'un article publié dans [35].
Dans le chapitre 4 nous étudions l'existence d'au moins d'une solution faible de l'équation intégrodifférentielle impulsive suivante

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)u(s)ds + f(t,u(t)) \text{ pour } t \in J = [0,b] \text{ and } t \neq t_i \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)) \text{ pour } i = 1, \cdots, p \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < b \\ u(0) &= g(u), \end{cases} \tag{1.39}$$

où A engendre un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X, $(C(t))_{t\geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés de domaine fixe $D(A)$. $\Delta u(t_i) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$ constitue la condition impulsive. Où

$$u(t_i^+) = \lim_{h\to 0^+} u(t_i + h) \text{ et } u(t_i^-) = \lim_{h\to 0^-} u(t_i + h) \tag{1.40}$$

A l'instar du chapitre 3, les résultats sont obtenus en utilisant la théorie des opérateurs résolvants introduite par Grimmer [55] combinée avec la théorie de points fixes. On transforme le problème d'existence en un problème de point fixes pour un opérateur linéaire approprié dans un espace fonctionnel. Nous montrons sous des conditions appropriées sur les termes non linéaires f et g et le semi-groupe fortement continu engendré par l'opérateur linéaire A que l'équation (1.39) admet au moins une solution faible. Les résultats obtenus font l'objet d'un article publié dans [36].
Dans le chapitre 5, nous étudierons l'existence d'un contrôle optimal pour le problème suivant :
Problème $(\mathcal{P})$: Étant donné $b > 0$, $\overline{y}(\cdot) \in L^2(0,b;X)$, $y_0 \in X$ et $y_b \in X$, Trouver un contrôle optimal $\overline{u} \in \mathcal{U}[0,b]$ tel que

$$J(\overline{u}) \quad \leq J(u) \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}[0,b], \tag{1.41}$$

où

$$J(u) = \|y(b) - y_b\|_X^2 + \int_0^b \|y(t) - \overline{y}(t)\|_X^2 dt \tag{1.42}$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)y(s)ds + f(t,y(t)) + Bu(t) \text{ pour } t \in [0,b], \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{1.43}$$

où A engendre un c_0-semi-groupe et $(C(t))_{t\geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de domaine $D(A)$ tandis que f est une fonction qui sera caractérisée dans la suite. $u(\cdot)$ est une fonction contrôle donnée dans l'ensemble des fonctions contrôles admissibles $\mathcal{U}[0,b] \subset L^1(0,b;E)$ défini par

$$\mathcal{U}[0,b] \quad = \{u : u(\cdot) \text{ est mesurable }, u(t) \in \mathcal{U} \subset E\} \tag{1.44}$$

où E est un espace de Banach séparable réflexif. D'abord, nous montrons sous des conditions appropriées sur le terme non linéaire f que l'équation (1.43) admet un contrôle admissible ensuite que le **Problème** $(\mathcal{P})$ admet un contrôle optimal et enfin nous montrons que l'ensemble $S(B)$ des contrôles optimaux associé à B est stable dans le sens de Baire Catégorie.
A la fin de chaque chapitre, une application est donnée pour illustrer les résultats obtenus.

Chapitre 2

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons des résultats fondamentaux sur la théorie des c_0 semi-groupes, la théorie des équations intégrodifférentielles et sur la notion de mesure de non compacité.

2.1 Théorie des c_0-semi-groupes

Cette section concerne l'un des outils les plus important pour résoudre les problèmes bien posés en théorie des équations d'évolutions, à savoir les semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés.

Définition 1 *[91] Soit X un espace de Banach. Une famille $(T(t))_{t\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si on a :*

(i) $T(0) = I, I$ est l'application identité dans $\mathcal{L}(X)$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tous $s, t \geq 0$. (translation)

Définition 2 *[91] Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit fortement continu si pour tout $x \in X$, l'application $T(\cdot)x : [0, +\infty[\to X$ est fortement continu en 0.*

Un semi-groupe fortement continu sera appelé un c_0 semi-groupe.

Définition 3 *[91] L'opérateur A défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A)$$

est appelé générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ de domaine $D(A)$.

Définition 4 *[91] Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit uniformément continu si l'application $T : [0, +\infty[\to \mathcal{L}(X)$ est continue en 0 pour la norme d'opérateur.*

Théorème 2.1.1 *[91] Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Exemple 2.1.1 *[1] Soit $X = \mathcal{C}_u[0, +\infty]$, l'espace des fonctions uniformément continues sur $[0, +\infty)$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Muni de la norme de la convergence uniforme, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \geq 0\}$, X devient un espace de Banach.*
Pour $t \geq 0$, on définit $T(t)$ sur X par

$$(T(t)f)(x) = f(t + x), \text{ for all } x \geq 0,\ t \geq 0.$$

$(T(t))_{t\geq 0}$ ainsi défini est un c_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A défini par :

$$D(A) = \mathcal{C}^1_u[0, +\infty] \text{ et } Af = f' \text{ pour tout } f \in D(A).$$

Exemple 2.1.2 *[1] Soit $X = L^2(\mathbb{R})$. On définit $T(t)$ sur X par :*

(i) $T(0) = I$,

(ii) $(T(t)f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(x-y)^2/4t] f(y)dy$, *pour tout* $t > 0$ *et* $f \in X$.

$(T(t))_{t\geq 0}$ ainsi défini est un c_0-semi-groupe.

Théorème 2.1.2 *[91] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un c_0-semi-groupe. Alors, il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que $\|T(t)\| \leq M \exp(\omega t)$ pour tout $t \geq 0$. Lorsque $\omega = 0$ et $M = 1$, alors $(T(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe de contraction.*

Théorème 2.1.3 *[91] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un c_0-semi-groupe sur X et A son générateur infinitésimal, alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) Si $x \in X$, alors

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x$$

(ii) Si $x \in X$, alors

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A) \text{ et } A\Big(\int_0^t T(s)xds\Big) = T(t)x - x$$

(iii) Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}[T(t)x] = AT(t)x = T(t)Ax$

(iv) Si $x \in D(A)$, alors

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau$$

Théorème 2.1.4 *[91](Hille-Yosida)*
Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ vérifiant $\|T(t)\| \leq M \exp(\omega t), \omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, si et seulement si :

(i) A est fermé et $D(A)$ est dense dans X,

(ii) $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et

$$|R(\lambda, A)^n| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \text{ pour } \lambda > \omega \text{ et } n \in \mathbb{N}^*.$$

Si A est le générateur infinitésimal d'un c_0 semi-groupe $T(t)$ vérifiant $\|T(t)\| \leq M\exp(\omega t), \omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$, alors, on montre que

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)dt, \ \forall \lambda > \omega. \tag{2.1}$$

Nous terminons cette section par une autre caractérisation du générateur infinitésimal d'un c_0 semi-groupe. Afin d'établir cette nouvelle caractérisation, nous avons besoin de quelques préliminaires.
Soit X un espace de Banach et soit X^* sont dual. Pour chaque $x \in X$ on définit l'ensemble $F(x) \in X^*$ par

$$F(x) = \{x^* \in X^* : (x^*, x) = \|x^*\|^2 = \|x\|^2\} \tag{2.2}$$

Le théoréme de Hahn Banach assure que $F(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$.

Définition 5 *[53] Un opérateur linéaire A est dit dissipatif dans X si pour tout $x \in D(A)$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que $Re(Ax, x^*) \leq 0$.*

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs dissipatifs.

Théorème 2.1.5 *[96] Un opérateur est A est dissipatif dans X si et seulement si :*

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \ \ \lambda \|x\| \leq \|\lambda x - Ax\|.$$

Définition 6 *[96]*

1. *On dit que A est maximal dans X si :*

$$\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A) \ \textit{tel que} \ \lambda x - Ax = f$$

2. *On dit que A est m-dissipatif dans X s'il est à la fois maximal et dissipatif dans X.*

Remarque 2.1.1 *Si A est un opérateur dissipatif, alors pour tout $\lambda > 0$ l'opérateur $\lambda I - A$ est injectif.*

Théorème 2.1.6 *[46] Si A est m-dissipatif dans X, alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1}$, borné défini de X à valeur dans D(A) et vérifiant :*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Théorème 2.1.7 *[96] Soit A un opérateur linéaire dissipatif dans X. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est m-dissipatif.*
2. *$\exists \lambda_0 > 0$ tel que $\forall f \in X, \exists x \in D(A)$ vérifiant $\lambda_0 x - Ax = f$.*

Théorème 2.1.8 *[91] Soit A un opérateur linéaire dans X. S'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que l'opérateur $(\lambda_0 I - A) : D(A) \to X$ soit une bijection et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X, alors A est fermé. En particulier si A est m-dissipatif, alors A est fermé.*

Si X est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, alors

Corollary 2.1.1 *[96]*

i) A est dissipatif si $\forall x \in D(A), < Ax, x > \leq 0$.

ii) Si A est m-dissipatif, alors $D(A)$ est dense dans X.

Exemple 2.1.3 ***Le Laplacien dans un ouvert de*** $\mathbb{R}^n$.
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $X = L^2(\Omega)$. On définit l'opérateur linéaire A dans X par :

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \quad Au = \Delta u, \ \forall u \in D(A) \end{cases}$$

A est m-dissipatif.

Théorème 2.1.9 *[91](Lumer et Phillips)*
Soit X un espace de Banach et A un opérateur linéaire de domaine dense dans X.

a) Si A est dissipatif et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, alors, A est le générateur infinitésimal d'un c_0 semi-groupe de contraction sur X.

b) Si A est le générateur infinitésimal d'un c_0 semi-groupe de contraction sur X, alors $Im(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A dissipatif.

Pour des discussions plus générales sur la théorie des c_0-semi-groupes et leurs importantes propriétés, le lecteur pourra se référer aux manuscrit de E.Hille et R.S.Phillips [44], N.Dunford et I.E.Segal [47], Jerome A. Goldestein [53], A.Pazy[91], K.Yosida[74], R.S.Phillips [44], W.Feller [99] etc.,

2.2 Équations intégrodifférentielles

On appelle équation intégrodifférentielle une équation qui fait intervenir à la fois les dérivées et les intégrales d'une fonction.

Dans cette section nous étudions les équations intégrodifférentielles de la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = & Ax(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)x(s)ds + f(t, x(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) = & x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2.1 Opérateurs résolvant et équations intégrodifférentielles linéaires homogène

La théorie des opérateurs résolvants fut introduite par R.C.Grimmer dans les années quatre vingt. C'est un outil essentiel à la résolution des équations intégro-différentielles de la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = & Ax(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds, \quad t \geq 0, \\ x(0) = & x_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

où A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ et pour tout t, $C(t)$ est un opérateur linéaire de domaine fixé dans $D(A)$.
En fait, cette théorie est une sorte de généralisation de la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés. Cependant, un opérateur résolvant n'est pas un semi-groupe car il ne satisfait pas toujours la propriété de translation donnée dans la définition 1. Pour caractériser les solutions de l'équation (2.4), nous collectons quelques résultats fondamentaux sur la théorie des opérateurs résolvants.
Soient X un espace de Banach, A et $C(t)$ des opérateurs linéaires fermés sur X. Soit $\mathcal{L}(Y;X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de Y dans X avec Y l'espace de Banach $D(A)$ muni de la norme du graphe

$$\|y\|_Y = \|Ay\|_X + \|y\|_X, \text{ pour tout } y \in Y \tag{2.5}$$

Définition 7 *[34] Une famille d'opérateurs linéaires bornés $(R(t))_{t\geq 0}$ dans X est dite opérateur résolvant pour l'équation (2.4) si :*

1. *$R(0) = Id_X$ et $\|R(t)\|_{\mathcal{L}} \leq Me^{\alpha t}$ pour tout $M \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,*
2. *Pour tout $x \in X$, $t \to R(t)x \in X$ est fortement continu pour $t \geq 0$,*
3. *$R(t) \in \mathcal{L}(Y)$ pour $t \geq 0$. Pour $x \in Y$, $R(\cdot)x \in \mathcal{C}([0,+\infty),Y) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty),X)$ et pour tout $t \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned} R'(t)x &= AR(t)x + \int_0^t C(t-s)R(s)xds \\ &= R(t)Ax + \int_0^t R(t-s)C(s)xds. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *De cette définition, on déduit du point (3) que si l'équation homogène (2.4) admet un opérateur résolvant, alors pour $x \in Y$, le terme $R(t)x$ est une solution l'équation homogène (2.4)*

Dans ce qui suit nous donnons des conditions suffisantes d'existence et d'unicité d'un opérateur résolvant de l'équation homogène (2.4).
Considérons les conditions suivantes

($\mathbf{H}_1$) A est le générateur infinitésimal d'un c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X.

($\mathbf{H}_2$) Pour chaque $t \geq 0$, $C(t)$ est un opérateur linéaire fermé de Y dans X, $C(t) \in \mathcal{L}(Y,X)$. De plus pour tout $y \in Y$, l'application $t \mapsto C(t)y$ est dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^+, X)$ et il existe $c \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\|C'(t)y\|_X \leq c(t)\|y\|_Y \text{ pour tout } y \in Y \text{ et } t \geq 0.$$

Théorème 2.2.1 *[57] Supposons que les hypothèses ($\boldsymbol{H}_1$) et ($\boldsymbol{H}_2$) sont vérifiées. Alors il existe un unique opérateur résolvant de l'équation (2.4)*

Exemple 2.2.1 *Soit X un espace de Banach. R.C.Grimmer et A.J.Pritchard [56] ont montré, sous des conditions appropriées, que la famille $(R(t))_{t\geq 0}$ définie par :*

$$\begin{cases} R(t) = & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda I - A - B^*(\lambda))^{-1}x d\lambda, \quad t > 0, \\ R(0) = & I, \end{cases} \tag{2.6}$$

est un opérateur résolvant analytique pour l'équation (2.4). Où Γ est un contour du type utilisé pour obtenir un semi-groupe analytique, B^* est le transformé de Laplace de B et i est tel que $i^2 = -1$.

Théorème 2.2.2 *[34] Supposons que les hypothèses ($\boldsymbol{H}_1$) et ($\boldsymbol{H}_2$) sont satisfaites. Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ le c_0-semi-groupe engendré par A et $(R(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur résolvant de l'équation (2.4). Alors on a*

$$R(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)Q(s)xds, \tag{2.7}$$

où

$$Q(s)x = \int_0^s C^{'}(s-u)\int_0^u R(v)xdvdu + C(0)\int_0^s R(u)xdu.$$

De plus, l'opérateur Q est uniformément borné sur chaque intervalle borné, et pour chaque $x \in X$, l'application $Q(\cdot)x : J \to X$ est continue.

Définition 8 *[91] Un c_0 semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est dit compact si pour tout $t > 0$ fixé $T(t)$ est un opérateur compact.*

Théorème 2.2.3 *[91] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un c_0 semi-groupe. $(T(t))_{t\geq 0}$ est compact si et seulement si $(T(t))_{t\geq 0}$ est continu pour la norme d'opérateur pour $t > 0$.*

Théorème 2.2.4 *[34] Supposons que les hypothèses ($\boldsymbol{H}_1$) et ($\boldsymbol{H}_2$) sont satisfaites. Alors $T(t)$ est compact si est seulement si $R(t)$ est compact.*

Nous avons vu que l'opérateur résolvant apparaît comme une généralisation du semi-groupe et nous avons remarqué aussi qu'il ne satisfait pas la propriété de translation de celui-ci donnée dans la définition 1. Cependant, nous avons une estimation importante donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.2.5 *[34] On suppose que les hypothèses ($\boldsymbol{H}_1$) et ($\boldsymbol{H}_2$) sont vérifiées. Pour tout $a > 0$, il existe une constante $M = M(a)$ telle que*

$$\|R(t+h) - R(t)R(h)\| \quad \leq Mh \text{ Pour } 0 \leq h \leq t \leq a. \tag{2.8}$$

2.2.2 Équation intégrodifférentielles linéaires non homogène

Considérons l'équation intégrodifférentielle non homogène suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = & Ax(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) = & x_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

où A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ et pour tout t, $C(t)$ est un opérateur linéaire de domaine fixé dans $D(A)$ et $f : \mathbb{R}^+ \to X$ est une fonction continue. Nous définissons à présent la notion de solution stricte de l'équation (2.9).

Définition 9 *[55] Une fonction $x : [0, +\infty) \to X$ continue est dite solution stricte de l'équation (2.9) si*

i) $x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0, +\infty); X) \cap \mathcal{C}([0, +\infty); Y)$

ii) $x(\cdot)$ satisfait l'équation (2.9)

A l'instar des équations d'évolutions non homogènes, pour résoudre ces types d'équations intégrodifférentielles, on transforme généralement le système initial en une équation intégrale de Lotka-Volterra. Cette Transformation est obtenue grâce à la formule de la variation de la constante donnée par l'opérateur résolvant. Si la fonction f satisfait quelques conditions appropriées et que la donnée initiale $x_0 \in Y$, alors cette formule de la variation de la constante nous donne la forme générale des solutions de (2.9). En d'autres termes, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.2.6 *[57] On suppose que les hypothèses $(\boldsymbol{H}_1)$ et $(\boldsymbol{H}_2)$ sont vérifiées. Si $x : [0, +\infty) \to X$ est une solution stricte de l'équation (2.9), alors*

$$x(t) \quad = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)ds \text{ pour } t \geq 0. \tag{2.10}$$

Remarque 2.2.2 *La réciproque de ce théorème n'est pas vraie. En effet, si x satisfait l'équation (2.10), alors x n'est pas en générale différentiable.*

Cela nous amène à la définition de la notion de solution faible.

Définition 10 *[57] Une fonction $x : [0, +\infty) \to X$ continue est dite solution faible de l'équation (2.9) si x vérifie l'équation (2.10)*

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes sur la régularité des solutions faible de l'équation (2.9)

Théorème 2.2.7 *[57] On suppose que les hypothèses $(\boldsymbol{H}_1)$ et $(\boldsymbol{H}_2)$ sont vérifiées. Si $x_0 \in Y$ et si $f \in \mathcal{C}([0, +\infty), X) \cap L^1([0, +\infty), Y)$ ou $f \in W^{1,1}([0, +\infty), X)$, alors la solution faible de l'équation (2.9) devient une solution classique.*

D'autres hypothèses peuvent être imposées sur la fonction f. Par exemple la dépendance par rapport à l'état x et la non linéarité aussi. Nous obtenons dans ce cas une équation intégrodifférentielle semi-linéaire.

2.2.3 Équations intégrodifférentielles semi-linéaires

Considérons à présent l'équation intégrodifférentielle semi-linéaire suivante

$$\begin{cases} x'(t) = & Ax(t) + \int_0^t C(t-s)x(s)ds + f(t,x(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) = & x_0, \end{cases} \tag{2.11}$$

où A est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ et pour tout t, $C(t)$ est un opérateur linéaire de domaine fixé dans $D(A)$ et $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ est une fonction continue.

Définition 11 *[55] Nous disons qu'une fonction $x : [0,+\infty) \to X$ continue est une solution stricte de l'équation (2.11) si*

i) $x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0,+\infty); X) \cap \mathcal{C}([0,+\infty); D(A))$

ii) $x(\cdot)$ satisfait l'équation (2.11)

Théorème 2.2.8 *[55] On suppose que les hypothèses $(\boldsymbol{H}_1)$ et $(\boldsymbol{H}_2)$ sont vérifiées. Si $x : [0,+\infty) \to X$ est une solution stricte de l'équation (2.11), alors*

$$x(t) \quad = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)f(s,x(s))ds \text{ pour } t \geq 0. \tag{2.12}$$

Définition 12 *[55] Une fonction $x : [0,+\infty) \to X$ continue est dite solution faible de l'équation (2.11) si x vérifie l'équation (2.12)*

On rappelle que la théorie des opérateurs résolvants joue un rôle important dans l'obtention de nos résultats. Pour plus de détail sur cette théorie, le lecteur pourra consulter les papiers de [55], [24], [34], [56], [57], [78], [12] [38] [61] [43].

2.2.4 Mesures de non compacité dans les espaces de Banach

Les mesures de non compacités sont des outils très utiles dans la théorie des équations d'évolutions dans les espaces de Banach. En particulier, les théorèmes de point fixe qui dérivent d'elles ont plusieurs applications. Comme nous le savons, la compacité joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème du point fixe de Schauder. Cependant, il existe plusieurs problèmes dont les opérateurs ne sont pas compacts. La première étape d'étendre le théorème de point fixe de Schauder aux opérateurs non compacts est donnée par G.Darbo en 1955. En 1967, Sadovskii, à son tour, généralise le théorème du point fixe de G.Darbo. La notion de mesure de non compacité joue un rôle essentiel dans leurs preuves.

Définition 13 *[68] Soit X un espace de Banach et $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties bornées de X, une application*

$$\phi : \mathcal{B} \to [0; +\infty) \tag{2.13}$$

est dite mesure de non compacité (MNC) définie sur X si

$$\phi(\overline{co}(\Omega)) = \phi(\Omega) \text{ pour tout } \Omega \in \mathcal{B}. \tag{2.14}$$

Propriété 2.2.1 *Une mesure de non compacité est dite :*

1. *Régulière si :* $\phi(\Omega) = 0 \Longleftrightarrow \overline{\Omega}$ *est compact,*
2. *Invariante par fermeture si :* $\phi(B) = \phi(\overline{B}), \forall B \in \mathcal{B}$
3. *Semi-additive si :* $\phi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\phi(\Omega_1), \phi(\Omega_2)\}$, $\forall \Omega_1 \in \mathcal{B}, \forall \Omega_2 \in \mathcal{B}$
4. *Monotone si :* $\Omega_1 \subset \Omega_2$, *alors* $\phi(\Omega_1) \leq \phi(\Omega_2)$, $\forall \Omega_1 \in \mathcal{B}, \forall \Omega_2 \in \mathcal{B}$,
5. $\phi(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leq \min\{\phi(\Omega_1), \phi(\Omega_2)\}$, $\forall \Omega_1 \in \mathcal{B}, \forall \Omega_2 \in \mathcal{B}$
6. *Non-singulière : Si* Ω *est un ensemble fini, alors* $\phi(\Omega) = 0$.
7. *Théoréme d'intersection de Cantor généralisé : Si* Ω_n *est une suite décroissante de parties fermées bornées non vides de* X *tel que* $\lim_{n\to\infty} \phi(\Omega_n) = 0$, *alors l'intersection* Ω_∞ *pour tout* Ω_n *est non vide et compacte.*
8. *semi-homogène si :* $\phi(\lambda\Omega) = |\lambda|\phi(\Omega)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \Omega \in \mathcal{B}$,
9. *algébriquement semi-additive si :* $\phi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \phi(\Omega_1) + \phi(\Omega_2), \forall \Omega_1 \in \mathcal{B}, \Omega_2 \in \mathcal{B}$,
10. *invariante par translation si :* $\phi(\Omega + x) = \phi(\Omega)$, $\forall \Omega \in \mathcal{B}, \forall x \in X$,
11. *Lipschitz si :* $|\phi(\Omega_l) - \phi(\Omega_2)| \leq L_\phi \rho(\Omega_l, \Omega_2)$, *où* L_ϕ *est une constante qui dépend de* ϕ *et* ρ *est la mesure de Hausdorff définie par*
$$\rho(\Omega_l, \Omega_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega_2 \subset \Omega_l + \varepsilon\overline{B}(O,1), \Omega_l \subset \Omega_2 + \varepsilon\overline{B}(O,1)\}.$$
12. *Continue si : Pour tout* $\Omega_0 \in \mathcal{B}$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $|\phi(\Omega) - \phi(\Omega_0)| < \varepsilon$ *pour tout* Ω *satisfaisant* $\rho(\Omega, \Omega_0) < \delta$.
13. *Invariante par passage à l'enveloppe convexe si :* $\phi(co(\Omega)) = \phi(\Omega)$ *pour tout* $\Omega \in \mathcal{B}$.

La première mesure de non compacité est définie par Kuratowski en 1930. Si Ω est une partie bornée d'un espace métrique, alors la mesure de non compacité de Kuratowski α est définie par :

$$\alpha(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \subset \cup_{i=1}^{k} E_i, diam(E_i) \leq \varepsilon\}. \tag{2.15}$$

Darbo a utilisé cette mesure de non compacité pour généraliser le théorème de Schauder à une large classe d'opérateurs, les opérateurs ϕ-contractante, qui satisfait la condition

$$\phi(T(\Omega)) < \phi(\Omega). \tag{2.16}$$

D'autres mesures de non compacités ont été définie plus tard. La plus importante est la mesure de non compacité de Hausdorff.

Définition 14 *[2] Soit* X *un espace de Banach et* $\mathcal{B}$ *l'ensemble de toutes les parties bornées de* X. *Pour chaque* $\Omega \in \mathcal{B}$, *On définit la mesure de non compacité de Hausdorff* ψ *de la manière suivante :*

$$\psi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \varepsilon \text{ pour } i = 1, \cdots, n\}. \tag{2.17}$$

Les mesures de non compacités de Hausdorff et de Kuratowski satisfont à toutes les propriétés ci-dessus. Dans la propriété (11) on a $L_\alpha = 2$ et $L_\psi = 1$.

Théorème 2.2.9 *[5] Soit B la boule unité dans X.*

1. *Si X est de dimension finie, alors $\alpha(B) = \psi(B) = 0$.*
2. *Si X est de dimension infinie, alors $\alpha(B) = 2$ et $\psi(B) = 1$.*

Les mesures de non compacités de Hausdorff et de Kuratowski sont liées par la relation suivante :

$$\psi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\psi(\Omega). \tag{2.18}$$

On introduit à présent quelques mesures de non compacités de Hausdorff standards.

Exemple 2.2.2 *[5] La mesure de non compacité de Hausdorff dans $\mathcal{C}([a,b],X)$ Soit X un espace de Banach et ψ la mesure de non compacité de Hausdorff sur X. On définit la fonction suivante :*

$$\psi_{\mathcal{C}}(\Omega) = \psi(\Omega[a,b]) \tag{2.19}$$

où $\Omega[a,b] = \{x(t) : x \in \Omega, t \in [a,b]\}$
$\psi_{\mathcal{C}}$ est une mesure de non compacité dans le sens de la définition 13.

Remarque 2.2.3 *[5] Si $\Omega \subset \mathcal{C}([a,b],X)$ est équicontinue, alors par le théorème de Arzela-Ascolie*

$$\psi_{\mathcal{C}}(\Omega) = 0 \text{ si et seulement si } \Omega \text{ est relativement compact.} \tag{2.20}$$

En d'autres termes $\psi_{\mathcal{C}}$ est régulière.

Exemple 2.2.3 *[68] Nous considérons une autre mesure de non compacité très utile dans l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([a,b],X)$. Pour tout $\Omega \subset \mathcal{C}([a,b],X)$, on définit*

$$\phi(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]} \psi(\Omega(t)) \tag{2.21}$$

où $\Omega(t) = \{x(t) : x \in \Omega\}$.

Remarque 2.2.4 *[68] La mesure de non compacité ϕ donnée par la formule (2.21) satisfait à toutes les propriétés de la mesure de non compacité sauf la propriété de régularité. Cependant, si la famille Ω est équicontinue on a l'égalité suivante*

$$\psi_{\mathcal{C}}(\Omega) = \phi(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]} \psi(\Omega(t)). \tag{2.22}$$

Une généralisation de la relation (2.22) est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.2.10 *[2] Soit X un espace de Banach, $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte. Notons par $\mathcal{C}(K, X)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans X et soit $\Omega \subset \mathcal{C}(K, X)$ une partie bornée et equi-continue. Alors*

$$\psi_{\mathcal{C}}(\Omega) = \sup_{t \in K} \psi(\Omega(t)). \tag{2.23}$$

Exemple 2.2.4 *[40] Nous utiliserons également la mesure de non-compacité séquentielle α_0 engendrée par α qui est définie par*

$$\alpha_0(\Omega) = \sup\{\alpha(\{x_n, n \geq 1\}) : (x_n)_{n \geq 1} \subset \Omega\} \tag{2.24}$$

il s'en suit que

$$\alpha_0(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\alpha_0(\Omega) \tag{2.25}$$

Pour toute partir $\Omega \subset X$ bornée. De plus quand X est séparable, nous avons $\alpha_0(\Omega) = \alpha(\Omega)$

Définition 15 *[68] Soit X un espace de Banach, ϕ une mesure de non compacité définie sur X et $T : D \subset X \to X$ un opérateur continu. On dit que T est contractante par rapport à ϕ ou est ϕ-contractante si pour tout Ω qui n'est pas relativement compact, alors on a*

$$\phi(T(\Omega)) < \phi(\Omega). \tag{2.26}$$

Le principale résultat de cette section est le théorème suivant de Darbo et Sadovskii.

Théorème 2.2.11 *[2] **Théorème de Darbo-Sadovskii***
Soit X un espace de Banach et ϕ une mesure de non compacité sur X qui est invariante par passage à l'enveloppe convexe. Soit D une partie convexe fermée bornée et non vide de X et $T : D \to D$ un opérateur ϕ-contractante. Alors T a un point fixe.

La mesure de non compacité de Hausdorff est utilisée pour donner une caractérisation importante des opérateurs linéaires bornés dans les espaces de Banach.

Définition 16 *[68] Soit X un espace de Banach, $T : X \to X$ un opérateur linéaire borné, alors pour toute partie bornée B de X,*

$$\psi(T(B)) \leq \|T\|_{\mathcal{L}} \psi(B).$$

Pour des discussions plus générales sur la théorie des mesures de non compacités et leurs importantes propriétés et les opérateurs ϕ -contractantes, le lecteur pourra se référer aux manuscrits de Eberhard Malkowsky et Vladimir Rakocevic [82], Jozef Banas and Mohammad Mursaleen [14], Jozef Banas [13], G.L. Acedo and T.D. Benavides and J.M.A. Toledano [2], M. Kamenskii and V. Obukhovskii and P. Zecca [68] etc.,

Nous avons présenté dans ce chapitre préliminaire quelques outils indispensables à la réalisation de notre objectif. Nous commençons à étudier, dans le prochain chapitre la controllabilité de quelques types d'équations d'évolutions integro-différentielles dans les espaces de Banach.

bb

CHAPITRE 3

Contrôlabilité pour une classe d'équations integrodifférentielles dans un espace de Banach

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions la contrôlabilité exacte de l'équation intégrodifférentielle semi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} x'(t) & = Ax(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)x(s)ds + f(t,x(t)) + Bu(t) \text{ pour } t \in J = [0,b], \\ x(0) & = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

- A engendre un c_0-semi-groupe dans un espace de Banach X, $x_0 \in X$.
- $\{C(t), t \geq 0\}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés sur X tel que
$$D(C(t)) \subset D(A), \text{ pour tout } t \in J.$$
- $f : J \times X \to X$ est une fonction non-linéaire qui sera définie plus tard.
- u est la fonction contrôle donnée dans $L^1(J,U)$ qui est l'espace de Banach des fonctions contrôles admissibles, U un espace de Banach.
- B est un opérateur linéaire borné défini dans U à valeur dans X.

On a vu dans l'introduction générale que beaucoup de problèmes physiques d'ingénieries peuvent être modélisés par des équations différentielles partielles. On a vu aussi que les équations intégrodifférentielles non linéaires servent une formulation abstraite pour beaucoup d'équations intégrodifférentielles partielles qui se posent dans les problèmes liés au flux de la chaleur dans les matériaux à mémoire, viscoélasticité, et d'autres phénomènes physiques. Ainsi, l'étude des résultats de contrôlabilité pour de tels systèmes est importante. Pour la motivation des systèmes abstraits et la contrôlabilité des systèmes linéaires, on peut se référer aux livres de Curtain et de Pritchard [29] et par Curtain et Zwart [30]. La contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires dans les espaces de dimension finie a été largement étudiée en utilisant les principes des points fixes [8] et [69]. Plusieurs auteurs ont étendu le concept dans les systèmes de dimension infinie et ont établi des conditions suffisantes pour la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires dans les espaces de Banach. Parmi les différentes approches de l'étude de la contrôlabilité des

systèmes non linéaires, les techniques de points fixes ont été utilisées efficacement pour ces systèmes. Dans la méthode de point fixe, le problème de contrôlabilité est transformé en un problème de point fixe pour un opérateur non linéaire approprié dans un espace fonctionnel. Une partie essentielle de cette approche est de garantir l'existence d'un sous-ensemble invariant pour cet opérateur.
En effet, H.O. Fattorini dans [50] a étudié la contrôlabilité approchée du système linaire

$$\begin{cases} x'(t) & = Ax(t) + (Bu)(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

où A est le générateur infinitésimale d'un c_0 semi-groupe, B est un opérateur linéaire borné et u est la fonction contrôle. K. Balachandran et J.P. Dauer dans [9] ont eux aussi étudié la contrôlabilité exacte du système linéaire 3.2.
Naito [87] [88] et [89] a étudié la contrôlabilité approchée du système semi-linéaire

$$\begin{cases} x'(t) & = Ax(t) + F(x(t)) + (Bu)(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

où $x(\cdot)$ prend des valeurs dans un espace de Banach X et $u \in L^2([0,b];U)$. Dans ces résultats, A génère un c_0 semi-groupe sur X, B est un opérateur linéaire borné de l'espace de Banach U dans X et F est un opérateur non linéaire sur X.
Yamamoto et Park[100] ont étudié l'équation parabolique.

$$\begin{cases} x'(t) & = Ax(t) + F(t, x(t)) + (Bu)(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

où A engendre un semi-groupe analytique et le terme non linéaire F est uniformément bornée. La contrôlabilité approchée des systèmes semi-linéaires a été étudiée par Joshi et Sukavanam [67] et par George [52].
Balachandran et al. [10] considèrent le système intégro différentiel non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x'(t) & = Ax(t) + F(t, x(t)) + (Bu)(t) + \int_0^t g(t, s, x(s), \int_0^s K(s, u, x(u))duds, \ t \in [0, b] \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

où l'état $x(\cdot)$ prend ses valeurs dans l'espace de Banach X et la fonction de commande $u(\cdot)$ est donnée en $L^2(J, U)$, un espace de Banach des fonctions de contrôle admissibles avec U comme un espace de Banach. Ici, l'opérateur linéaire A génère un semi-groupe compact $T(t)$ sur X, et B est un opérateur linéaire borné de U dans X. Les opérateurs non linéaires

$$f \in \mathcal{C}(J \times X, X), \ K \in \mathcal{C}(J \times J \times X, X) \text{ et } g \in \mathcal{C}(J \times J \times X \times X, X)$$

sont tous des opérateurs continus uniformément bornés. Balachandran [7] et McKibbon [85] ont étudié la contrôlabilité exacte des systèmes semi-linéaires et systèmes intégro-différentiels non linéaires avec des conditions initiales non locales. Des résultats de contrôlabilité des systèmes non linéaires dans les espaces de Banach peuvent être retrouvés dans les références [26] [70] [71] et [92]. En utilisant le théorème du point fixe de Kakutani, Fabre et al. [49] ont étudié la contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire. Barbu [15] a étudié la contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur, Zhou [101] a étudié la contrôlabilité exacte de l'équation de Maxwell. L.Górniewicz, S.K.Ntouyas et D.O'regan dans [54] ont établi la contrôlabilité exacte du système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= Ax(t) + F(t, x(t), \int_0^t g(t, s, x(s))ds) + (Bu)(t),\ t \in [0, b] \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Où $g : \Delta \times X \to X, \Delta = \{(t, s) : 0 < s < t < b\}$, est une fonction donnée, $x_0 \in X$, A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$, et X est un espace de Banach. La fonction de commande $u(\cdot)$ est donnée dans $L^2(J, U)$ qui est l'espace de Banach des contrôles recevable avec U un espace de Banach. Enfin, B est un opérateur linéaire borné de U dans X. Ils ont établi leur résultat en utilisant le théorème du point fixe de Scheafer combiné avec la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés. Notons que, dans tous ces résultats, la propriété de translation des semi-groupes, $T(t + s) = T(t)T(s)$, joue un rôle important. Cependant, pour un opérateur résolvant quelconque $R(t)$, $R(t + s) = R(t)R(s)$ n'est pas toujours vrai. Krishnan Balachandran et Rajagounder Ravi Kumar dans [11] ont étudié l'existence des solutions des équations d'évolutions intgérodifférentielles non linéaires à retard dans le cas non local dans les espaces de Banach en utilisant le théorème du point fixe de Scheafer combiné avec la théorie des opérateurs résolvants. Ezzinbi, Toure et Zabsonre in [48] ont établi l'existence et la régularité des solutions faibles et strictes de quelques types d'équations intégrodifférentielles non linéaires à retard fini dans les espaces de Banach en supposant la condition de Lipschitz sur le terme non linéaire. J.liang, J.H.Liu et Ti-jun Xiao in [78] ont étudié l'existence des solutions faibles des équations intégrodifférentielles dans le cas non local dans les espaces de Banach sans la condition de Lipschitz sur le terme non linéaire. Ils ont utilisé le théorème du point fixe de Scheafer combiné avec la théorie des opérateurs résolvants pour obtenir leur résultat. Bouzahir et Fu in [18] ont établi la contrôlabilité des équations différentielles neutres à retard infini où l'opérateur linéaire n'est pas nécessairement dense dans l'espace de Banach mais satisfait la condition de Hille-Yosida. Le but de ce chapitre est d'établir un résultat de contrôlabilité du systèmes intégrodifférentiels non linéaires 3.1 dans les espaces de Banach en utilisant le théorème du point fixe de Schaefer combiné avec la théorie de opérateurs résolvants sans la condition de Lipschitz sur le terme forcing f. Dans la première section nous donnons quelques résultats préliminaires. Dans la deuxième section, en utilisant le théorème du point fixe de Scheafer combiné avec la théorie des opérateurs résolvants, nous étudions l'existence d'une solution faible de l'équation intégrodifférentielle (3.1) sans le terme $Bu(t)$. Dans la troisième section nous établissons un résultat de contrôlabilité exacte de l'équation intégrodifférentielle (3.1). Finalement, nous étudions un exemple pour illustrer les résultats obtenus.

3.2 Résultats Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats importants que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre.

Définition 17 *L'équation (3.1) est dite exactement contrôlable sur l'intervalle J si pour toute condition initiale x_0 dans l'espace de Banach X et pour toute condition finale x_b dans X, il existe une fonction contrôle $u \in L^1(J,U)$ tel que*

$$x(b, x_0, u) = x_b \tag{3.7}$$

L'existence d'un opérateur résolvant est étudié par Grimmer dans [55]. Les hypothèses $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$ ci-dessous nous garantissent l'existence d'un opérateur résolvant de l'équation homogène associée à l'équation (3.1).

3.3 Existence d'un contrôle admissible

Définition 18 *Une fonction continue $x : [0; b] \to X$ est dite solution faible de l'équation (3.1) si x satisfait l'équation intégrale de Volterra suivante.*

$$\begin{cases} x(t) & = R(t)x_0 + \displaystyle\int_0^t R(t-s)\Big[f(s,x(s)) + Bu(s)\Big]ds \text{ pour } t \in J, \\ x(0) & = x_0 \in X. \end{cases} \tag{3.8}$$

Pour garantir l'existence d'au moins d'une solution faible de l'équation (3.1) nous utilisons les hypothèses suivantes :

$(\mathbf{H}_1)$ A est le générateur infinitésimal d'un c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X.

$(\mathbf{H}_2)$ (a) Pour chaque $t \geq 0$, $C(t)$ est un opérateur linéaire fermé de Y dans X, $C(t) \in \mathcal{B}(Y, X)$.

(b) pour tout $y \in Y$, l'application $t \mapsto C(t)y$ est dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^+, X)$ et il existe $c \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\|C'(t)y\|_X \leq c(t)\|y\|_Y \text{ pour tout } y \in Y \text{ et } t \geq 0.$$

$(\mathbf{H}_3)$: Pour tout $t \in J$ fixé, l'application $f(t,\cdot) : X \to X$ est continue.
Pour chaque $x \in X$ fixe, l'application $f(\cdot, x) : J \to X$ est fortement mesurable.

$(\mathbf{H}_4)$: L'opérateur linéaire $W : L^1(J,U) \to X$ défini par

$$W(u) = \int_0^b R(b-s)Bu(s)ds$$

est inversible et il existe une constante positive M_1 telle que

$$\|BW^{-1}\| \leq M_1.$$

$(\mathbf{H}_5)$: Il existe une fonction positive $g \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|f(t,x)\| \leq \|x\|g(t) \text{ pour tout } x \in X \text{ et } t \in J$$

et

$$b\Big(M\|g\|_{L^1} + M^2 M_1 \|g\|_{L^1}\Big) < 1,$$

où $M = \sup\{\|R(t)\|,\ t \in J\}$.

Théorème 3.3.1 *Supposons que les hypothèses* $(\boldsymbol{H}_1)-(\boldsymbol{H}_5)$ *sont satisfaites et que le semi-groupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est compact pour* $t > 0$. *Alors l'équation (3.1) est contrôlable sur* J.

Preuve : En utilisant l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$ pour une fonction arbitraires x, on définit un contrôle u par

$$u_x(t) = W^{-1}\big[x_1 - R(b)x_0 - \int_0^b R(b-s)f(s,x(s))ds\big](t) \textit{ pour } t \in J.$$

Considérons la fonction

$$N : \mathcal{C}(J,X) \to \mathcal{C}(J,X)$$

définie par

$$Nx(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big]ds,$$

où $\mathcal{C}(J,X)$ est l'espace des fonctions continues de J dans X muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in J}\|x(t)\|. \tag{3.9}$$

Définissons la fonction suivante

$$G(t) = Bu_x(t) = BW^{-1}\big[x_1 - R(b)x_0 - \int_0^b R(b-s)f(s,x(s))\big](t) \tag{3.10}$$

et la suite d'ensemble

$$B_k = \{x \in \mathcal{C}(J,E) : \|x\| \leq k\}, \text{ pour tout } k \geq 1. \tag{3.11}$$

Alors pour tout $x \in B_k$, nous avons

$$\|G(t)\| \leq M_1\Bigg[\|x_1\| + M\|x_0\| + Mk\|g\|_{L^1}\Bigg] := G_0 \tag{3.12}$$

et

$$\|Nx(t)\| \leq M\|x_0\| + bMG_0 + Mk\|g\|_{L^1}.$$

Nous allons montrer que N admet au moins un point fixe. La preuve de ce théorème repose principalement sur le théorème du point fixe de Schaefer. La preuve est composée de trois étapes.

Étape 1 : Nous prouvons que l'application N est continue.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}(J,X)$ tel que $x_n \to x$ dans $\mathcal{C}(J,X)$ c'est-à-dire que $x \in \mathcal{C}(J,X)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \geq \eta$, $\|x_n - x\|_\infty < \varepsilon$. Donc, il existe un entier k strictement positif tel que $\|x_n\| \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in J$, il s'en suit que $x_n \in B_k$ et $x \in B_k$. En utilisant l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ (la continuité de f par rapport à la seconde variable), on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\| = 0. \tag{3.13}$$

En utilisant l'hypothèse $(\mathbf{H}_5)$, on obtient

$$\|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\| \leq 2kg(t). \tag{3.14}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
Nx_n - Nx &= R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)\big[Bu_{x_n}(s) + f(s,x_n(s))\big] \\
&- R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big] \\
&= \int_0^t R(t-s)B\big[u_{x_n}(s) - u_x(s)\big] \\
&+ \int_0^t R(t-s)\big[f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\big]ds \\
&= \int_0^t R(t-s)BW^{-1}\big[\int_0^b R(b-\tau)\big[f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,x_n(\tau))\big]d\tau\big](s)ds \\
&+ \int_0^t R(t-s)\big[f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\big]ds.
\end{aligned}$$

En prenant la norme dans les deux membres de l'expression précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\|Nx_n - Nx\| &\leq \int_0^b MM_1\big[\int_0^b M\|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\|ds\big]d\tau \\
&+ M\int_0^b M\|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\|ds
\end{aligned}$$

Des relations (3.13) et (3.14), en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous en déduisons que

$$\|Nx_n - Nx\| \quad \to \quad 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

donc N est continue.

Étape 2 : En utilisant le théorème de Arzela-Ascoli , nous montrons que N est compact.
Soit B_k défini ci-dessus, Alors B_k est une partie bornée de $\mathcal{C}(J,X)$. Montrons que

l'ensemble $N(B_k) = \{Nx : x \in B_k\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J, X)$. Pour cela il suffit de montrer, pour chaque $t \in J$ fixé, que l'ensemble $Y(t) = \{Nx(t) : x \in B_k\}$ est relativement compact dans X et que l'ensemble $N(B_k) = \{Nx : x \in B_k\}$ est équi-continu. Soit $0 < t \leq b$ fixé, ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < t$ et $x \in B_k$. Alors

$$\begin{aligned} Nx(t) &= R(t)x_0 + \int_0^{t-\varepsilon} R(t-s)\big[Bu_x(s) + f(s, x(s))\big]ds \\ &+ \int_{t-\varepsilon}^{t} R(t-s)\big[Bu_x(s) + f(s, x(s))\big]ds, \end{aligned}$$

Pour tout $t > 0$ fixé, N est vu comme un opérateur de X dans X. Comme le c_0 semi-groupe est compact, alors d'après le théorème 2.2.4, la famille $(R(t))_{t\geq 0}$ est compact. Il s'en suit que l'opérateur constant $R(t)x_0$ est compact dans X. L'opérateur

$$N_\varepsilon^0 x(t) = \int_0^{t-\varepsilon} R(t-s)\big[Bu_x(s) + f(s, x(s))\big]ds \tag{3.15}$$

est compact. En effet,

$$\begin{aligned} N_\varepsilon^0 x(t) &= \int_0^{t-\varepsilon} R(t-s)\big[Bu_x(s) + f(s, x(s))\big]ds \\ &= R(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} R(t-s-\varepsilon)\big[Bu_x(s) + f(s, x(s))\big]ds \\ &+ \int_0^{t-\varepsilon} [R(t-s) - R(\varepsilon)R(t-s-\varepsilon)]\big[Bu_x(s) \\ &+ f(s, x(s))\big]ds. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$N_\varepsilon^0 x(t) - N_\varepsilon^1 x(t) = \int_0^{t-\varepsilon} [R(t-s) - R(\varepsilon)R(t-s-\varepsilon)]\big[Bu_x(s) + f(s, x(s))\big]ds. \tag{3.16}$$

avec

$$N_\varepsilon^1 x(t) = R(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} R(t-s-\varepsilon)\big[Bu_x(s) + f(s, x(s))\big]ds \tag{3.17}$$

Or $N_\varepsilon^1 x(t)$ est un opérateur compact car la famille $(R(t))_{t\geq 0}$ est compact. En prenant la norme dans l'équation (3.16) et en utilisant le Théorème 2.2.5, on obtient

$$\begin{aligned} \|N_\varepsilon^0 x(t) - N_\varepsilon^1 x(t)\| &\leq M\varepsilon \int_0^{t-\varepsilon} \|Bu_x(s) + f(s, x(s))\|ds \\ &\leq M\varepsilon\Big(\int_0^b \|G(t)\|dt + k\int_0^b g(t)dt\Big) \\ &\leq M\varepsilon\Big(bG_0 + k\int_0^b g(t)dt\Big) \end{aligned}$$

pour tout $0 < \varepsilon < t \leq b$ et $x \in B_k$. Et donc, $N_\varepsilon^0 x(t)$ est compact car étant limite uniforme d'opérateurs compacts. Posons

$$N_\varepsilon x(t) = R(t)x_0 + N_\varepsilon^0 x(t) \tag{3.18}$$

$N_\varepsilon x(t)$ est un opérateur compact car étant la somme de deux opérateurs compacts. Nous avons

$$Nx(t) - N_\varepsilon x(t) \;=\; \int_{t-\varepsilon}^{t} R(t-s)\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big]ds,$$

En prenant la norme dans cette dernière équation, on obtient

$$\|Nx(t) - N_\varepsilon x(t)\| \;\leq\; R_b \int_{t-\varepsilon}^{t} [G_0 + kg(s)]ds.$$

Et donc, $Nx(t)$ est compact car étant limite uniforme d'opérateurs compacts. Par conséquent, $Y(t)$ est relativement compact dans X.

L'ensemble $\{Nx \,:\; x \in B_k\}$ est equi-continu. En effet soit h un nombre réel positif assez petit et $t_0 \in [0, b[$ tel que $0 < t_0 + h < b$. Alors

$$\begin{aligned}
Nx(t_0+h) - Nx(t_0) &= R(t_0+h)x_0 + \int_0^{t_0+h} R(t_0+h-s)\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big]ds \\
&- R(t_0)x_0 - \int_0^{t_0} R(t_0-s)\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big]ds \\
&= \Big[R(t_0+h)x_0 - R(t_0)x_0\Big] + \int_0^{t_0} R(t_0+h-s)\big[Bu_x(s) \\
&+ f(s,x(s))\big]ds \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+h} R(t_0+h-s)\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big]ds \\
&- \int_0^{t_0} R(t_0-s)\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big]ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Nx(t_0+h) - Nx(t_0) &= \Big[R(t_0+h)x_0 - R(t_0)x_0\Big] \\
&+ \int_0^{t_0} \Big[R(t_0+h-s) - R(t_0-s)\Big]\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big]ds \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+h} R(t_0+h-s)\big[Bu_x(s) + f(s,x(s))\big]ds
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|Nx(t_0+h) - Nx(t_0)\| &\leq \big\|R(t_0+h)x_0 - R(t_0)x_0\big\| \\
&+ \int_0^{t_0} \big\|R(t_0+h-s) - R(t_0-s)\big\|\big[G_0 + kg(s)\big]ds \\
&+ M\int_{t_0}^{t_0+h} \big[G_0 + kg(s)\big]ds.
\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0} M\int_{t_0}^{t_0+h}\big[G_0+kg(s)\big]ds=0 \tag{3.19}$$

Et comme l'opérateur résolvant $R(t)$ est fortement continu, alors on a

$$\big\|R(t_0+h)x_0-R(t_0)x_0\big\|\to 0 \text{ quand } h\to 0 \tag{3.20}$$

et comme l'opérateur résolvant $R(t)$ est continu en norme, alors on a

$$\big\|R(t_0+h-s)-R(t_0-s)\big\|\to 0 \text{ quand } h\to 0 \text{ p.p. } s\neq t_0 \tag{3.21}$$

D'après le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on obtient :

$$\int_0^{t_0}\big\|R(t_0+h-s)-R(t_0-s)\big\|\big[G_0+kg(s)\big]ds\to 0 \text{ quand } h\to 0 \text{ pour tout } s\neq t_0. \tag{3.22}$$

Alors

$$\sup_{x\in B_k}\|Nx(t_0+h)-Nx(t_0)\|\to 0 \text{ as } h\to 0$$

Nous obtenons la même estimation quand $t_0\in J,\ h<0$ tel que $t_0+h\in J$. Ce qui nous permet de conclure que l'ensemble $N(B_k)$ est equi-continu. Donc l'opérateur N est compact.

Étape 3 : Nous montrons que l'ensemble

$$\sigma_N=\{x\in\mathcal{C}(J,E): x=\lambda N(x),\ \lambda\in]0,1[\} \tag{3.23}$$

est une partie bornée.
Soit $\lambda\in]0,1[$ tel que $x=\lambda Nx$. Alors pour tout $t\in J$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lambda R(t)x_0+\lambda\int_0^t R(t-s)\big[Bu_x(s)+f(s,x(s))\big]ds\\
&= \lambda R(t)x_0+\lambda\int_0^t R(t-s)BW^{-1}\Big\{x_1-R(b)x_0-\int_0^b R(b-\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau\Big\}(s)ds\\
&+ \lambda\int_0^t R(t-s)f(s,x(s))ds
\end{aligned}$$

et nous avons

$$\|x\| \le M\|x_0\|+bMM_1\big[\|x_1\|+M\|x_0\|+bM\|x\|\|g\|_{L^1}\big]+bM\|x\|\|g\|_{L^1}$$

$$\|x\|(1-bM\|g\|_{L^1}-bM^2M_1\|g\|_{L^1}) \le M\|x_0\|+bMM_1(\|x_1\|+M\|x_0\|).$$

Alors

$$\|x\|\le\frac{M\|x_0\|+bMM_1(\|x_1\|+M\|x_0\|)}{1-bM\|g\|_{L^1}-bM^2M_1\|g\|_{L^1}}$$

comme

$$bM\|g\|_{L^1} + bM^2M_1\|g\|_{L^1} < 1.$$

Alors σ_N est borné.

Conclusion : $\mathcal{C}(J,E)$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach, $N : \mathcal{C}(J,E) \to \mathcal{C}(J,E)$ est continue et compact et l'ensemble σ_N est borné. Donc, par le théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que N admet au moins un point fixe sur $\mathcal{C}(J,E)$ qui est la solution faible de l'équation (3.1) et on montre facilement que :

$$(Nx)(b) = x_1.$$

3.4 Application

Pour illustrer notre résultat abstrait, nous considérons l'équation intégro-différentiel suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,z) & = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}u(t,z) + \displaystyle\int_0^t \gamma(t-s)\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}u(s,z)ds \\ & +\alpha(t)\phi\big(u(t,z)\big) + bv(t) \text{ pour } t \in [0,b] \text{ et } z \in [0,\pi], \\ u(t,0) & = u(t,\pi) = 0, \\ u(0,z) & = u_0(z), \end{cases} \tag{3.24}$$

où $b \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathcal{C}^1([0,b],\mathbb{R}), \alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, v une fonction contrôle dans $L^1(0,b)$, et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue tel que $|\phi(x)| \leq a_1|x| + a_2$; $a_1, a_2 > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour réécrire l'équation (3.24) sous la forme abstraite, on introduit l'espace suivant $X = L^2(0,\pi)$.
Soit $A : D(A) \to X$ défini par

$$\begin{cases} D(A) & = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \\ Ay & = y'' \end{cases} \tag{3.25}$$

Soit $C(t) : D(A) \to X$ défini par $C(t)y = \gamma(t)Ay$.
Soit $f : [0,b] \times X \to X$ défini par $f(t,v)(z) = \alpha(t)\phi\big(v(z)\big)$ pour $t \in [0,b]$ et $z \in [0,\pi]$.
Supposons que $x(t) = u(t,z)$, alors l'équation (3.24) prend la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) & = Ax(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)x(s)ds + f(t,x(t)) + Bv(t) \text{ pour } t \in [0,b], \\ x(0) & = x_0. \end{cases} \tag{3.26}$$

D'après l'exemple 2.1.3 A engendre un c_0-semi-groupe sur $L^2(0,\pi)$. Il est bien connu que ce c_0-semi-groupe est compact pour $t > 0$, donc $(\mathbf{H}_1)$ est satisfait. De plus l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$ est satisfaite. Il s'en suit que l'équation (3.26) admet un opérateur résolvant $(R(t))_{t\geq 0}$. Alors, il existe une constante $M > 0$ tel que $\|R(t)\| \leq M$.
l'application $f : [0,b] \times X \to X$ définie par $f(t,v)(z) = \alpha(t)\phi\big(v(z)\big)$ pour $t \in [0,b]$

et $z \in [0,\pi]$ est continue. En effet, soit $(v_n)_{n\geq 0} \subset L^2(0,\pi)$ tel que $v_n \to v$ dans $L^2(0,\pi)$,

$$\begin{aligned}\|f(t,v_n)-f(t,v)\|_{L^2(0,\pi)} &= \Big(\int_0^\pi |f(t,v_n)(z)-f(t,v)(z)|^2dz\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big(\int_0^\pi |\alpha(t)\phi(v_n(z))-\alpha(t)\phi(v(z))|^2dz\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= |\alpha(t)|\Big(\int_0^\pi |\phi(v_n(z))-\phi(v(z))|^2dz\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Lemma 3.4.1 *[20] Soit $(f_n) \subset L^2(0,\pi)$ et $f \in L^2(0,\pi)$ tel que $f_n \to f$ dans $L^2(0,\pi)$. Alors, il existe une sous suite (f_{n_k}) de (f_n) et une fonction $\rho \in L^2(0,\pi)$ tel que*

i) $f_{n_k}(z) \to f(z)$ quand $k \to +\infty$ presque partout sur $[0,\pi]$

ii) $|f_{n_k}(z)| \leq \rho(z)$ pour tout k et pour presque tout $z \in [0,\pi]$.

En utilisant le lemme 3.4.1, il existe une sous suite v_{n_k} de v_n tel que $v_{n_k}(z) \to v(z)$ presque partout dans $[0,\pi]$ et $\rho \in L^2((0,\pi),\mathbb{R}^+)$ tel que $|v_{n_k}(z)| \leq \rho(z)$ pour tout k et presque partout dans $[0,\pi]$. En utilisant la continuité de ϕ, on obtient $|\phi(v_{n_k}(z))-\phi(v(z))| \to 0$ presque partout dans $[0,\pi]$ et $|\phi(v_{n_k}(z))| \leq a_1|v_{n_k}(z)|+a_2 \leq a_1\rho(z)+a_2 \in L^2(0,\pi)$. En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient $\phi(v_{n_k}(\cdot)) \to \phi(v(\cdot))$ dans $L^2(0,\pi)$ pour n'importe quelle sous suite $v_{n_k}(\cdot)$ de $v_n(\cdot)$. Alors $\phi(v_n(\cdot)) \to \phi(v(\cdot))$ dans $L^2(0,\pi)$. Ainsi on a $\|f(t,v_n)-f(t,v)\|_{L^2(0,\pi)} \to 0$ quand $n \to \infty$. Par conséquent, l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ est satisfaite. Nous supposons que l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$ est satisfaite, c'est-à-dire que l'opérateur linéaire $W : L^1(J,U) \to E$ défini par

$$W(u) = \int_0^b R(b-s)Bu(s)ds$$

est inversible et il existe une constante positive M_1 telle que

$$\|BW^{-1}\| \leq M_1.$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}\|f(t,v)\|_{L^2(0,\pi)} &= \Big(\int_0^\pi |f(t,v(z))|^2dz\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_0^\pi |\alpha(t)\phi(v(z))|^2dz\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq |C\alpha(t)|\Big(\int_0^\pi |v(z)|^2dz\Big)^{\frac{1}{2}} = |C\alpha(t)|\|v\|_{L^2(0,\pi)}\end{aligned}$$

et on choisit b assez petit tel que

$$\frac{b^3}{2}\Big(M+M^2M_1\Big) < 1,$$

alors l'hypothèse $(\mathbf{H}_5)$ est satisfaite. D'après le théorème 3.3.1, l'équation (3.24) est contrôlable sur $[0,b]$.

Chapitre 4

Solutions faibles pour des Équations intégrodifférentielles Impulsives non locale en temps dans un espace de Banach

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des solutions faibles, avec des conditions de type Carathéodory, du système d'équations intégrodifférentielles impulsives avec condition non locale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)u(s)ds + f(t,u(t)) \text{ pour } t \in J = [0,b] \text{ et } t \neq t_i \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)) \text{ pour } i = 1, \cdots, p \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < b \\ u(0) &= g(u), \end{cases} \tag{4.1}$$

où A et $C(t)$ sont des opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach X de domaine fixé $D(A)$, tandis que f et g sont des fonctions qui seront caractérisées plus tard et $\Delta u(t_i) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$ constitue la condition impulsive. Les équations différentielles impulsives décrivent l'évolution des systèmes dont l'état change instantanément en un moment donné, qui ne peuvent pas être modélisées par les problèmes à valeurs initiales classiques. Dans la modélisation mathématique de ces processus, le changement d'état apparaît instantanément et est représenté par des sauts (discontinuités) dans l'état du système modélisé. De tel processus sont observés dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées (en mécanique, population dynamique, en biologie etc...) Une équation différentielle impulsive est composée d'une partie continue et d'une partie discrète représentant les sauts. Dans le cas où l'opérateur $C \equiv 0$, l'équation (4.1) est largement étudiée par plusieurs auteurs. En effet, Liu [80] a étudié le problème initial classique suivant :

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + f(t,u(t)) \text{ pour } t \in J = [0,b] \text{ et } t \neq t_i \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)) \text{ pour } i = 1, \cdots, p \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < b \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un c_0 semi-groupe sur un espace de Banach X. $\Delta u(t_i) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$ constitue la condition impulsive. Pour étudier l'équation

(4.2), Liu a supposé que la fonction non linaire f est Lipschitzienne par rapport a sa seconde variable et que les fonctions impulsives I_i sont Lipschitziennes. L.Zhu, Q.Dong et G.Li [40] ont étudié l'équation différentielle impulsive de type non local suivante :

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + f(t, u(t)) \text{ pour } t \in J = [0, b] \text{ et } t \neq t_i \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)) \text{ pour } i = 1, \cdots, p \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < b \\ u(0) &= g(u), \end{cases} \tag{4.3}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un c_0 semi-groupe sur un espace de Banach X. Ils ont établi leur résultats d'existence en supposant que les fonctions g et $I_i, i = 1, \cdots, p$ sont Lipschitz et que f est une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$\beta(f(t, D)) \leq l(t)\beta(D), \text{ pour toute partie D bornée} \tag{4.4}$$

où β est la mesure de non compacité de Hausdorff et $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$.
S. Ji et S. Wen dans [66] ont examiné l'équation différentielle impulsive avec une condition non locale suivante :

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + f(t, u(t)) \text{ pour } t \in J = [0, b] \text{ et } t \neq t_i \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)) \text{ pour } i = 1, \cdots, p \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < b \\ u(0) &= g(u) + u_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un c_0 semi-groupe sur un espace de Banach X. Afin d'obtenir leur premier résultat, ils ont supposé que la fonction g est compacte, f est une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$\beta(f(t, D)) \leq l(t)\beta(D), \text{ pour toute partie D bornée} \tag{4.6}$$

où β est la mesure de non compacité de Hausdorff et $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ et que les fonctions I_i sont continues compactes satisfaisant

$$\|I_i(x)\| \leq l_i(\|x\|), i = 1, \cdots, p \tag{4.7}$$

où $l_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est croissante pour tout i. Pour obtenir leur deuxième résultat, ils ont supposé que g et $I_i, i = 1, \cdots, p$ sont Lipschitz. J. Lianga, J.H. Liuc et T.J. Xiao dans [79] ont examiné l'équations (4.5) d'abord en supposant que les fonctions f, g et $I_i, i = 1, \cdots, p$ sont Lipschitziennes en suite en supposant que $g, I_i, i = 1, \cdots, p$ sont compactes et f continue. Enfin, ils ont supposé cette fois ci que la fonction g n'est ni compacte ni Lipschitz mais f Lipschitz et $I_i, i = 1, \cdots, p$ compacte. Notons que tous ces travaux ont été réalisé en utilisant le théorème du point fixe de Darbo-Sadovskii combiné avec la théorie des c_0 semigroupes.

Dans ce chapitre, nous utiliserons la notion de mesure de non compacité, le théorème du point fixe de Sadovskii et la théorie des opérateurs résolvants introduite par Grimmer [55] pour établir un résultat d'existence d'au moins d'une solution faible de l'équation (4.1). Tout d'abord, nous rappelons quelques résultats préliminaires. Ensuite, nous étudions l'existence d'au moins d'une solution faible de l'équation (4.1). Enfin, nous donnons un exemple pour illustrer les résultats obtenus.

4.2 Mesure de non compacité et équations integrodifférentielles dans les espaces de Banach.

Rappelons tout d'abord que la compacité joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème du point fixe de Schauder et dans plusieurs théorèmes de point fixe. Rappelons aussi pour étendre le théorème de Schauder aux opérateurs non compacts, Sadovskii a utilisé la notion de mesure de non compacité.

Considérons les conditions suivantes

($\mathbf{H}_1$) A est le générateur infinitésimal d'un c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X.

($\mathbf{H}_2$) Pour chaque $t \geq 0$, $C(t)$ est un opérateur linéaire fermée de Y dans X, $C(t) \in \mathcal{B}(Y, X)$. De plus pour tout $y \in Y$, l'application $t \mapsto C(t)y$ est dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^+, X)$ et il existe $c \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\|C'(t)y\|_X \leq c(t)\|y\|_Y \text{ pour tout } y \in Y \text{ et } t \geq 0.$$

Théorème 4.2.1 *Supposons que les hypothèses* ($\boldsymbol{H}_1$) *et* ($\boldsymbol{H}_2$) *sont satisfaites. Si le c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu pour $t > 0$, alors l'opérateur résolvant $(R(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu pour $t > 0$.*

Preuve Soit $t_0 > 0$ et $h > 0$. D'après le Théorème 2.2.2, pour chaque x tel que $\|x\| \leq 1$

$$\begin{aligned}
R(t_0+h)x - R(t_0)x &= T(t_0+h)x + \int_0^{t_0+h} T(t_0+h-s)Q(s)xds \\
&- T(t_0)x - \int_0^{t_0} T(t_0-s)Q(s)xds \\
&= \Big[T(t_0+h)x - T(t_0)x\Big] + \int_{t_0}^{t_0+h} T(t_0+h-s)Q(s)xds \\
&+ \int_0^{t_0} \Big[T(t_0+h-s) - T(t_0-s)\Big]Q(s)xds.
\end{aligned}$$

d'òu

$$\begin{aligned}
\|R(t_0+h)x - R(t_0)x\| &\leq \|T(t_0+h) - T(t_0)\|\|x\| + \int_{t_0}^{t_0+h} \|T(t_0+h-s)Q(s)x\|ds \\
&+ \int_0^{t_0} \|T(t_0+h-s) - T(t_0-s)\|\|Q(s)x\|ds.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.2.2, $\|Q(s)x\|$ est uniformément borné, alors il existe une constante $c > 0$ tel que $\|Q(s)x\| \leq c$ pour tout s borné et $\|x\| \leq 1$. d'où, on a

$$\begin{aligned}
\|R(t_0+h) - R(t_0)\| &\leq \|T(t_0+h) - T(t_0)\| + cMh \\
&+ c\int_0^{t_0} \|T(t_0+h-s) - T(t_0-s)\|ds,
\end{aligned}$$

où $M = \sup\{\|T(t)\|, t \in J\}$. Comme $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu pour tout $t_0 > 0$, alors on a $\|T(t_0+h) - T(t_0)\| \to 0$ quand $h \to 0$ et par le théorème de convergence dominé de Lebesgue, il s'en suit que

$$\int_0^{t_0} \|T(t_0+h-s) - T(t_0-s)\|ds \to 0 \text{ quand } h \to 0 \text{ pour tout } t_0 \neq s.$$

Ainsi, nous avons

$$\|R(t_0+h) - R(t_0)\| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

On obtient le même résultat en prenant $t_0 > 0$, $h < 0$ tel que $t_0 + h > 0$. Ce qui nous permet de conclure que $(R(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continue pour $t > 0$.

Théorème 4.2.2 *Supposons que les hypothèses* $(\boldsymbol{H}_1)$ *et* $(\boldsymbol{H}_2)$ *sont satisfaites. Si le c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu pour tout $t > 0$ et si $w \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$. Alors l'ensemble suivant*

$$H = \left\{ \int_0^{\bullet} R(\bullet - s)u(s)ds : u \in W_w \right\}$$

est équi-continu sur J, où $W_w = \{u : \|u(s)\| \leq w(s) \text{ p.p. sur } J\}$.

Preuve : Soit $Hu(t) = \displaystyle\int_0^t R(t-s)u(s)ds$ pour tout $t \in J$ et $u \in W_w$.

Soit $t_0 \in J$ et $h > 0$ tel que $t_0 + h \in J$.

$$\begin{aligned}
\|Hu(t_0+h) - Hu(t_0)\| &\leq \int_0^{t_0} \|R(t_0+h-s)u(s) - R(t_0-s)u(s)\|ds \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+h} \|R(t_0+h-s)\|w(s)ds \\
&\leq \int_0^{t_0} \|R(t_0+h-s)u(s) - R(t_0-s)u(s)\|ds \\
&+ R_b \int_{t_0}^{t_0+h} w(s)ds.
\end{aligned}$$

On a

$$\lim_{h\to 0} R_b \int_{t_0}^{t_0+h} w(s)ds = 0. \tag{4.8}$$

Comme le c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continue pour tout $t > 0$, alors d'après le Théorème 4.2.1, l'opérateur résolvant $(R(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continue pour tout $t > 0$. Il s'en suit que

$$\lim_{h\to 0} \|R(t_0+h-s)u(s) - R(t_0-s)u(s)\| = 0 \text{ pour } t_0 \neq s \tag{4.9}$$

uniformément par rapport à $u \in W_w$. De plus

$$\|R(t_0+h-s)u(s)\| \leq R_b w(s) \text{ presque partout sur J.} \tag{4.10}$$

Alors d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{t_0}\|R(t_0+h-s)u(s)-R(t_0-s)u(s)\|ds=0 \text{ pour } t_0\neq s. \tag{4.11}$$

uniformément par rapport à $u\in W_w$.
On obtient la même estimation pour $h<0$. Cela entraine que

$$\lim_{h\to 0}\sup_{u\in W_w}\|Hu(t_0+h)-Hu(t_0)\|=0.$$

Lemma 4.2.1 *[40] Si $W\subset \mathcal{C}(J,X)$ est borné, alors pour tout $t\in J$*

$$\alpha(W(t))\leq \alpha(W),$$

où $W(t)=\{u(t):u\in W\}\subset X$. De plus, si W est equi-continu sur J, alors

$$\alpha(W)=\alpha(W(J))=\sup\{\alpha(W(t)):t\in J\},$$

où $W(J)=\{u(t):u\in W,t\in J\}$.

Soit

$$S:L^1([0,b];X)\to \mathcal{C}([0,b];X) \tag{4.12}$$

un opérateur satisfaisant les conditions suivantes.

($\mathbf{S}_1$) : Il existe une constante $D>0$ tel que

$$\|Sf(t)-Sg(t)\|\leq D\int_0^t\|f(s)-g(s)\|ds$$

pour tout $f,g\in L^1([0,b];X)$ et $t\in[0,b]$.

($\mathbf{S}_2$) : Soit K une partie compacte de X et $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $L^1([0,b];X)$ tel que $\{g_n(t);n\geq 1\}\subset K$ pour presque tout $t\in[0,b]$. Alors la convergence faible $g_n\rightharpoonup g_0$ implique la convergence forte $Sg_n\to Sg_0$.

Nous considérons maintenant le résultat d'inversion entre mesure de non compacité et intégral.

Théorème 4.2.3 *[68] Supposons que S satisfait les conditions ($\boldsymbol{S}_1$) et ($\boldsymbol{S}_2$). Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $L^1([0,b];X)$. Supposons qu'il existe $v\in L^1([0,b];\mathbb{R}^+)$ tel que $\|f_n(t)\|\leq v(t)$ pour presque tout $t\in[0,b]$ et pour tout $n\geq 1$. Alors*

$$\alpha(\{Sf_n(t):n\geq 1\})\leq 2D\int_0^t\alpha(\{f_n(s):n\geq 1\})ds \text{ pour } t\in[0,b]. \tag{4.13}$$

Soit $(R(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur résolvent de l'équation (2.4). Considérons maintenant l'opérateur linéaire

$$G:L^1(J;X)\to C(J;X) \tag{4.14}$$

défini par

$$Gf(t)=\int_0^t R(t-s)f(s)ds \text{ pour } t\in J. \tag{4.15}$$

Théorème 4.2.4 *Supposons que les conditions* ($\boldsymbol{H}_1$) *et* ($\boldsymbol{H}_2$) *sont satisfaites . Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions dans* $L^1([0,b];X)$*. Supposons qu'il existe* $v \in L^1([0,b];\mathbb{R}^+)$ *tel que* $\|f_n(t)\| \leq v(t)$ *pour presque tout* $t \in [0,b]$ *et pour tout* $n \geq 1$*. Alors*

$$\alpha(\{Gf_n(t) : n \geq 1\}) \leq 2R_b \int_0^t \alpha(\{f_n(s) : n \geq 1\})ds \text{ pour } t \in [0,b], \tag{4.16}$$

où $R_b = \sup_{t\in[0,b]} \|R(t)\|$.

Preuve : Pour prouver ce Théorème, il suffit de montrer que l'opérateur G satisfait les conditions ($\mathbf{S}_1$) et ($\mathbf{S}_2$). Soit $f, g \in L^1(J,X)$, alors on a

$$Gf(t) - Gg(t) = \int_0^t R(t-s)[f(s) - g(s)]ds. \tag{4.17}$$

Comme $\|R(t)\| \leq R_b$ pour tout $t \in [0,b]$, alors en prenant la norme dans les deux membres de l'équation (4.17), on obtient

$$\|Gf(t) - Gg(t)\| \leq R_b \int_0^t \|f(s) - g(s)\|ds. \tag{4.18}$$

D'où ($\mathbf{S}_1$) est vérifié.
Pour montrer que la condition ($\mathbf{S}_2$) est satisfaite il faut montrer que pour toute suite $(f_n)_{n\geq 1}$ dans $L^1([0,b];X)$ et $f_0 \in L^1([0,b];X)$ tel que $f_n \rightharpoonup f_0$ faiblement, alors $Gf_n \rightharpoonup Gf_0$ faiblement et que $\{Gf_n, n \geq 1\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J,X)$. En effet, comme G est un opérateur linéaire borné, alors $f_n \rightharpoonup f_0$ implique $Gf_n \rightharpoonup Gf_0$. En effet, posons $E = L^1(J,X)$ et $F = \mathcal{C}(J,X)$. G est un opérateur linéaire borné de E dans F.

$$f_n \rightharpoonup f_0 \Longleftrightarrow < f^*, f_n > \to < f^*, f_0 >, \ \forall f^* \in E' \tag{4.19}$$

Alors, pour tout $H^* \in F'$ on a

$$< H^*, Gf_n > \ = \ < G^*H^*, f_n > \to < G^*H^*, f_0 > = < H^*, Gf_0 > .$$

D'où $Gf_n \rightharpoonup Gf_0$ faiblement.

En utilisant le Théorème de Arzela-Ascoli, on montre que l'ensemble $\{Gf_n, n \geq 1\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J,X)$. Pour cela, il suffit de montrer que, pour chaque $t \in J$ fixé, l'ensemble $Y(t) = \{Gf_n(t), n \geq 1\}$ est relativement compact dans X et que l'ensemble $\{Gf_n, n \geq 1\}$ est equi-continu sur J.

Lemma 4.2.2 *Si* K *est une partie compacte de* X *et* $t \in J$ *fixé, alors l'ensemble* $Q_t \subset X$ *défini par*

$$Q_t = \{R(s)x, s \in [0,t], x \in K\} \tag{4.20}$$

est compact dans X*.*

Preuve : Soit s_n une suite dans $[0,t]$ et x_n une suite dans K, alors il existe une sous suite $s_{\phi(n)}$ de s_n qui converge vers $s_0 \in [0,t]$ et une sous suite $x_{\psi(n)}$ de x_n qui converge vers $x_0 \in K$. Or $s_{\phi o \psi(n)}$ est une sous suite de $s_{\phi(n)}$ donc converge vers s_0 et $x_{\phi o \psi(n)}$ est une sous suite de $x_{\psi(n)}$ donc converge vers x_0.

$$\begin{aligned}
\|R(s_{\phi o\psi(n)})x_{\phi o\psi(n)} - R(s_0)x_0\| &\leq \|R(s_{\phi o\psi(n)})x_{\phi o\psi(n)} - R(s_{\phi o\psi(n)})x_0\| \\
&+ \|R(s_{\phi o\psi(n)})x_0 - R(s_0)x_0\| \\
&\leq \sup_{s\in[0,t]} \|R(s)\|\|x_{\phi o\psi(n)} - x_0\| \\
&+ \|R(s_{\phi o\psi(n)})x_0 - R(s_0)x_0\|
\end{aligned}$$

Et puisque $R(t)$ est fortement continu, alors $\|R(s_{\phi o\psi(n)})x_0 - R(s_0)x_0\| \to 0$. Cela nous permet de conclure que $\|R(s_{\phi o\psi(n)})x_{\phi o\psi(n)} - R(s_0)x_0\| \to 0$. Donc, Q_t est une partie compact dans X.

Lemma 4.2.3 *[83] Soit $f \in L^1(J,X)$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt \in (b-a)\overline{co}(\{f(t) : t \in [a,b]\}) \tag{4.21}$$

pour tout $a, b \in J$ avec $a < b$.

Maintenant, on utilise le Lemme 4.2.3 pour montrer que :

$$\{Gf_n(t), n \geq 1\} \subset t\overline{co}(Q_t) \tag{4.22}$$

Soit $n_0 \geq 1$, alors $f_{n_0}(s) \in K$ pour tout $s \in J$. D'où pour tout $s \in [0,t]$,

$$R(t-s)f_{n_0}(s) \in R(t-s)K \subset \cup_{\tau\in[0,t]} R(t-\tau)K = Q_t. \tag{4.23}$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 4.2.3, on obtient

$$Gf_{n_0}(t) = \int_0^t R(t-s)f_{n_0}(s)ds \in t\overline{co}\Big(\{R(t-s)f_{n_0}(s) : s \in [0,t]\}\Big) \subset t\overline{co}(Q_t). \tag{4.24}$$

Comme $f_n(t) \in K$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout t fixé, on obtient alors

$$\{Gf_n(t), n \geq 1\} \subset t\overline{co}(Q_t). \tag{4.25}$$

En prenant la mesure de non compacité dans l'expression 4.25 et en utilisant la monotonicité de la mesure de non compacité de Hausdorff, on obtient

$$\alpha(\{Gf_n(t), n \geq 1\}) \leq \alpha(t\overline{co}(Q_t)) = t\alpha(\overline{co}(Q_t)) = t\alpha(co(Q_t)) = t\alpha(Q_t) = 0. \tag{4.26}$$

D'après la propriété de régularité de la mesure de non compacité de Hausdorff, on obtient que l'ensemble $\{Gf_n(t), n \geq 1\}$ est relativement compact dans X.

Etablissons l'équicontinuité de l'ensemble $\{Gf_n, n \geq 1\}$. Soit $t_0 \in J$ et $h > 0$ tel que $t_0 + h \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned}\|Gf_n(t_0+h) - Gf_n(t_0)\| &\leq \int_0^{t_0} \|R(t_0+h-s)f_n(s) - R(t_0-s)f_n(s)\|ds \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+h} \|R(t_0+h-s)\|\|f_n(s)\|ds \\ &\leq \int_0^{t_0} \|R(t_0+h-s)f_n(s) - R(t_0-s)f_n(s)\|ds \\ &+ R_b \int_{t_0}^{t_0+h} v(s)ds.\end{aligned}$$

On a

$$\lim_{h\to 0} R_b \int_{t_0}^{t_0+h} v(s)ds = 0. \tag{4.27}$$

Et comme pour tout $t > 0, R(t)$ est un opérateur linéaire borné et que l'ensemble K est compact, alors on obtient

$$\lim_{h\to 0} \sup_n \|R(t_0+h-s)f_n(s) - R(t_0-s)f_n(s)\| = 0.$$

De plus

$$\|R(t_0+h-s)f_n(s)\| \leq R_b v(s) \text{ presque partout sur J.} \tag{4.28}$$

Ainsi, en utilisnat le Théorème de convergence dominé de Lebesgue, il s'en suit que

$$\lim_{h\to 0} \int_0^{t_0} \|R(t_0+h-s)f_n(s) - R(t_0-s)f_n(s)\|ds = 0 \text{ pour } t_0 \neq s. \tag{4.29}$$

uniformément pour $n \geq 1$. Le même raisonnement fonctionne pour le cas $h < 0$. D'où

$$\lim_{h\to 0} \|Gf_n(t_0+h) - Gf_n(t_0)\| = 0 \text{ uniformément pour } n \geq 1.$$

Par conséquent, on a $\{Gf_n, n \geq 0\}$ est équi-continu. Finalement, en appliquent le Théorème de Arzela-Ascoli, on conclut que $\{Gf_n, n \geq 1\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J;X)$. En conclusion, nous avons $Gf_n \rightharpoonup Gf_0$ et que l'ensemble $\{Gf_n, n \geq 1\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J;X)$. D'où Gf_n converge vers Gf_0 pour la norme de la convergence uniforme. D'où $(\mathbf{S}_2)$ est satisfaite.

Soit S_f l'unique solution faible, associée à f, de l'équation intégrodifférentielle non homogène suivante

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t) \text{ pour } t \in J, \\ u(0) &= u_0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Corollary 4.2.1 *Supposons que les hypothèses* ($\boldsymbol{H}_1$) *et* ($\boldsymbol{H}_2$) *sont satisfaites. Soit* $(f_k)_{k\geq 1}$ *une suite de fonctions. Supposons qu'il existe une fonction* $\varphi \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ *tel que*

$$\|f_k(t)\| \leq \varphi(t) \text{ p.p. sur } J \text{ et } k \geq 1.$$

Alors, pour tout $t \in J$

$$\alpha(\{S_{f_k}(t) : k \geq 1\}) \leq 2R_b \int_0^t \alpha(\{f_k(s) : k \geq 1\})ds. \tag{4.31}$$

4.3 Existence d'une solution faible

Définition 19 *Une solution faible de l'équation* (4.1) *est une fonction* $u \in PC(J, X)$ *tel que*

$$u(t) = R(t)g(u) + \int_0^t R(t-s)f(s, u(s))ds + \sum_{0<t_i<t} R(t-t_i)I_i(u(t_i)) \text{ pour } t \in J. \tag{4.32}$$

Soit $r > 0$. *Posons* $W_r = \{u \in PC(J, X) : \|u\|_{pc} \leq r\}$.

Pour garantir l'existence d'une solution faible de l'équation (4.1), nous posons, en plus des conditions ($\mathbf{H}_1$) et ($\mathbf{H}_2$), les conditions suivantes :

($\mathbf{H}_3$) : Le c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ engendré par A est uniformément continu pour tout $t > 0$.

($\mathbf{H}_4$) : $f : J \times X \to X$ satisfait aux conditions de Carthéodory suivantes :

i) $f(\cdot, x) : J \to X$ est fortement mesurable pour chaque $x \in X$

ii) $f(t, \cdot) : X \to X$ est continue pour chaque $t \in J$

iii) Il existe une fonction $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\alpha(f(t, B)) \leq l(t)\alpha(B)$$

pour tout $t \in J$ et pour toute partie $B \subset X$ bornée.

($\mathbf{H}_5$) : $I_i : X \to X$ est k_i Lipschitzienne pour tout $i \in I$, $i = 1, \cdots, p$.

($\mathbf{H}_6$) : Il existe une constante $k \in (0, m)$ tel que :

$$\|g(u) - g(v)\| \leq k\|u - v\|_{pc} \text{ pour tout } u, v \in PC(J, X),$$

où $m = \frac{1}{R_b} - \sum_{i=1}^p k_i$

($\mathbf{H}_7$) : Il existe une constante $r > 0$ tel que

$$R_b\Big(\|g(0)\| + \sum_{i=1}^p \|I_i(0)\| + b \cdot \sup_{t\in J, u\in W_r} \|f(t, u)\|\Big) \leq \Big(1 - R_b(k + \sum_{i=1}^p k_i)\Big)r.$$

Théorème 4.3.1 *Supposons que les conditions* $(\boldsymbol{H}_1) - (\boldsymbol{H}_7)$ *sont satisfaites. Alors l'équation (4.1) a au moins une solution faible sur J pourvu que*

$$R_b(4l_1 + k + \sum_{i=1}^{p} k_i) < 1. \tag{4.33}$$

où $l_1 = \int_0^b l(s)ds$.

Preuve : Considérons les opérateurs suivants :

$$H : PC(J, X) \to \mathcal{C}(J, X)$$

défini par

$$(Hu)(t) = \int_0^t R(t-s)f(s, u(s))ds \;\text{ pour } t \in J. \tag{4.34}$$

et

$$Q : PC(J, X) \to PC(J, X)$$

défini par

$$(Qu)(t) = u(t) - R(t)g(u) - \sum_{0<t_i<t} R(t-t_i)I_i(u(t_i)) \;\text{ pour } t \in J. \tag{4.35}$$

Soit $B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ et $W_r = \{u \in PC(J, X) : \|u\|_{pc} \leq r\}$.

La preuve du théorème est divisée en cinq étapes.

Étape 1 L'opérateur H est continu.

Étape 2 L'opérateur Q est Lipschitzien.

Étape 3 L'opérateur Q est bijectif.

Étape 4 L'opérateur Q^{-1} est Lipschitzien.

Étape 5 L'opérateur $Q^{-1}H$ est une α-contraction de W_r dans W_r.

Un point fixe de $Q^{-1}H$ est une solution faible de l'équation (4.1). En effet, pour tout $u \in PC(J, X)$

$$\begin{aligned} Q(u(t)) = v(t) &\iff u(t) = Q^{-1}(v(t)) \\ &\iff u(t) = v(t) + R(t)g(Q^{-1}v) + \sum_{0<t_i<t} R(t-t_i)I_i(Q^{-1}v(t_i)) \end{aligned}$$

soit $\overline{u}$ un point fixe de $Q^{-1}H$. Alors on a

$$\begin{aligned} \overline{u}(t) &= Q^{-1}H(\overline{u}(t)) = Q^{-1}(H\overline{u}(t)) \\ &= H\overline{u}(t) + R(t)g(Q^{-1}H\overline{u}) + \sum_{0<t_i<t} R(t-t_i)I_i(Q^{-1}H\overline{u}(t_i)) \\ &= \int_0^t R(t-s)f(s, \overline{u}(s))ds + R(t)g(\overline{u}) + \sum_{0<t_i<t} R(t-t_i)I_i(\overline{u}(t_i)) \end{aligned}$$

$\overline{u}(t)$ satisfait l'équation (4.32), Ainsi il s'en suit que $\overline{u}(t)$ est une solution de l'équation (4.1).

Etape 1. L'opérateur H est continu sur $PC(J,X)$. En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $PC(J,X)$ tel que $u_n \to u$ in $PC(J,X)$, alors il existe un entier r tel que $\|u_n\| \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, il s'en suit que $u_n \in W_r$ et $u \in W_r$. Comme $f(t,.)$ est continu sur X, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\| = 0.$$

En utilisant l'hypothèse ($\mathbf{H}_7$) et le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\|Hu_n - Hu\| \leq \lim_{n\to+\infty} R_b \int_0^b \|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds = 0.$$

Par la suite H est continue sur $PC(J,X)$. De plus, en utilisant l'hypothèse ($\mathbf{H}_7$) et le Théorème 4.2.2, on obtient $H(W_r)$ est borné, equi-continu sur J.

Lemma 4.3.1 *[40] Si l'hypothèse ($\boldsymbol{H}_7$) est satisfaite, alors pour toute partie bornée $W \subset W_r$, on a*

$$\alpha(HW(t)) \leq 4R_b \int_0^t \alpha(f(s,W(s))ds \text{ pour } t \in J. \tag{4.36}$$

Etape 2. L'opérateur Q est Lipschitzien. En effet, soit $u_1, u_2 \in PC(J,X)$, on a

$$\begin{aligned}
\|(Qu_1)(t) - (Qu_2)(t) &\leq \|u_1(t) - u_2(t)\| + \|R(t)g(u_1) - R(t)g(u_2)\| \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \|R(t-t_i)I_i(u_1(t_i)) - R(t-t_i)I_i(u_2(t_i))\| \\
&\leq \|u_1 - u_2\|_{PC} + R_b k\|u_1 - u_2\|_{PC} + R_b \sum_{i=1}^{p} k_i \|u_1 - u_2\|_{PC} \\
&\leq \Big(1 + R_b(k + \sum_{i=1}^{p} k_i)\Big)\|u_1 - u_2\|_{PC}.
\end{aligned}$$

Etape 3. L'opérateur Q est bijectif. En effet, soit $v \in PC(J,X)$ fixé, prouvons qu'il existe un unique $u \in PC(J,X)$ tel que

$$(Qu)(t) = v(t) \text{ pour } t \in J.$$

Définition l'opérateur $L : PC(J,X) \to PC(J,X)$ par

$$(Lu)(t) = R(t)g(u) + \sum_{0<t_i<t} R(t-t_i)I_i(u(t_i)) + v(t) \text{ pour } t \in J.$$

L'existence et l'unicité d'un point fixe de l'opérateur L pour chaque $v \in PC(J,X)$ implique que l'opérateur Q est bijective. Soit $u_1, u_2 \in PC(J,X)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|(Lu_1)(t) - (Lu_2)(t)\| &\leq \|R(t)g(u_1) - R(t)g(u_2)\| \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \|R(t-t_i)I_i(u_1(t_i)) - R(t-t_i)I_i(u_2(t_i))\| \\
&\leq R_b k\|u_1 - u_2\|_{PC} + R_b \sum_{i=1}^{p} k_i \|u_1 - u_2\|_{PC} \\
&\leq R_b\Big(k + \sum_{i=1}^{p} k_i\Big)\|u_1 - u_2\|_{PC}
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(\mathbf{H}_6)$, $R_b\Big(k + \sum_{i=1}^{p} ki\Big) < 1$, ce qui entraine que l'opérateur L est une contraction sur $PC(J,X)$. Ainsi, d'après le Théorème du point fixe de Banach, l'opérateur L a un unique point fixe sur $PC(J,X)$. On conclut que Q est un opérateur bijective.

Etape 4. L'opérateur Q^{-1} est Lipschitzien. En effet, soit $v_1, v_2 \in PC(J,X)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|(Q^{-1}v_1)(t) - (Q^{-1}v_2)(t)\| &\leq \|v_1 - v_2\| + \|R(t)g(Q^{-1}v_1) - R(t)g(Q^{-1}v_2)\| \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \|R(t-t_i)I_i(Q^{-1}v_1)(t_i) - R(t-t_i)I_i(Q^{-1}v_2)(t_i)\| \\
&\leq \|v_1 - v_2\|_{PC} + R_b k\|Q^{-1}v_1 - Q^{-1}v_2\|_{PC} \\
&+ R_b \sum_{i=1}^{p} k_i \|Q^{-1}v_1 - Q^{-1}v_2\|_{PC} \\
&\leq \|v_1 - v_2\|_{PC} + R_b(k + \sum_{i=1}^{p} k_i)\|Q^{-1}v_1 - Q^{-1}v_2\|_{PC} \\
&\leq \frac{1}{1 - R_b(k + \sum_{i=1}^{p} k_i))}\|v_1 - v_2\|_{PC}.
\end{aligned}$$

Etape 5. L'opérateur $Q^{-1}H$ est une α-contraction de W_r dans W_r.
W_r est stable par $Q^{-1}H$ c'est-à-dire $(Q^{-1}H)(W_r) \subset W_r$. En effet, pour chaque $u \in W_r \subset PC(J,X)$, posons $w = (Q^{-1}H)(u)$, d'après les hypothèses $(\mathbf{H}_5) - (\mathbf{H}_7)$, on a

$$\begin{aligned}
\|w(t)\| &\leq \|R(t)g(u)\| + \sum_{i=1}^{p} \|R(t-t_i)I_i(u)(t_i)\| + \int_0^t \|R(t-s)\| \sup_{s\in J, u\in W_r} \|f(s,u(s))\| ds \\
&\leq R_b\Big((k + \sum_{i=1}^{p} k_i)\|u\|_{PC} + \|g(0)\| + \sum_{i=1}^{p} \|I_i(0)\| + b \cdot \sup_{s\in J, u\in W_r} \|f(s,u(s))\|\Big) \\
&\leq r,
\end{aligned}$$

par conséquent, on a $\|w\|_{PC} \leq r$. Cela entraine que, $(Q^{-1}H)(W_r) \subset W_r$.
Prouvons que $Q^{-1}H$ est une α-contraction. Comme Q^{-1} est un opérateur Lipschitzien et H est continue sur $PC(J,X)$, alors on a $Q^{-1}H$ est continu sur $PC(J,X)$ en tant que composition de deux fonctions continues. Comme $H(W_r)$ est borné et equi-continu sur J, on peut même en déduire que $(Q^{-1}H)(W_r) \subset PC(J,X)$ est équi-continu sur chaque $J_i, i = 0, 1, \cdots, p$, où $J_0 = (0, t_1]; J_i = (t_i, t_{i+1}], i = 1, \cdots p$.
Comme Q^{-1} est Lipschitzien avec une constante de Lipschitz $\frac{1}{1-R_b(k+\sum_{i=1}^{p} k_i))}$ for $W \subset W_r$, on obtient que

$$\alpha(Q^{-1}HW) < \frac{1}{1 - R_b(k + \sum_{i=1}^{p} k_i))}\alpha(HW).$$

d'autre part, d'après le Lemme 4.3.1 pour tout $t \in J$, nous savons que

$$\alpha(HW(t)) \quad \leq \quad 4R_b \int_0^t \alpha(f(s, W(s))ds \leq 4R_b \int_0^t l(s)\alpha(W(s))ds.$$

Ainsi d'après les lemmes 4.2.1 et 4.3.1, on obtient que

$$\alpha(HW) \leq 4l_1 R_b \alpha(W).$$

Par conséquent,

$$\alpha(Q^{-1}HW) \leq \frac{4l_1 R_b}{1 - R_b(k + \sum_{i=1}^{p} k_i))}\alpha(W).$$

Comme $R_b(4l_1 + k + \sum_{i=1}^{p} k_i) < 1$, il s'en suit que l'opérateur $Q^{-1}H$ est une α-contraction dans W_r, d'après le théorème 2.2.11 de Darbo et Sadovskii l'opérateur $Q^{-1}H$ a un unique point fixe dans W_r qui n'est rien d'autre que la solution faible de l'équation (4.1). ce qui complète la preuve.

4.4 Application

Considérons l'équation intégrodifférentielles impulsive suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} z(t,x) & = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} z(t,x) + \displaystyle\int_0^t \gamma(t-s) \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} z(s,x) ds \\ & \quad + \lambda(t)\phi(z(t,x)) \text{ pour } t \in [0,b] \text{ et } x \in [0,\pi], \\ z(t,0) & = z(t,\pi) = 0, \\ z(0,x) & = \sum_{i=1}^{p} c_i z(t_i,x),\ 0 < t_1 < \cdots < t_p < b,\ x \in [0,\pi], \\ \Delta z(t_i,x) & = k_i z(t_i,x),\ i = 1,\cdots,p;\ k_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i. \end{cases} \tag{4.37}$$

où $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,b],\mathbb{R})$, $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est tel que il existe $a_1 > 0$ tel que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq a_1|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $c_i,\ k_i \in \mathbb{R}$ pour

$i = 1, \cdots, p$. Pour réécrire l'équation (4.37) sous la forme abstraite, introduisons l'espace suivant $X = L^2(0,\pi)$. Soit $A : D(A) \to X$ un opérateur linéaire non borné défini par

$$\begin{cases} D(A) &= H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \\ Ay &= y'' \end{cases} \tag{4.38}$$

Soit $C(t) : D(A) \to X$ défini par $C(t)y = \gamma(t)Ay$
Soit $f : [0,b] \times X \to X$ défini par

$$f(t,v)(x) = \lambda(t)\phi(v(x))\, pour\; t \in [0,b]\; et\; x \in [0,\pi]$$

Soit $g : PC([0,b],X) \to X$ défini par

$$g(u)(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i u(t_i)(x)\, pour\; 0 < t_1 < \cdots < t_p < b,\; et\; x \in [0,\pi]$$

Soit $I_i : X \to X$ défini par

$$I_i(v)(x) = k_i v(x)\, pour\; 0 < t_1 < \cdots < t_p < b,\; et\; x \in [0,\pi],$$

où $u(t)(x) = z(t,x)$. Supposons que $u(t) = z(t,x)$, ainsi l'équation (4.37) prend la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)u(s)ds + f(t,u(t)) \text{ pour } t \in J = [0,b] \text{ et } t \neq t_i \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)) \text{ pour } i = 1, \cdots, p \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < b \\ u(0) &= g(u), \end{cases} \tag{4.39}$$

Il est bien connu que l'opérateur A engendre un c_0-semi-groupe uniformément continu pour $t > 0$. D'où les conditions $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_3)$ sont satisfaites. De plus la condition $(\mathbf{H}_2)$ est satisfaite. Ainsi, il s'en suit que l'équation (4.39) a un unique opérateur résolvant $(R(t))_{t\geq 0}$ sur X. L'application $f : [0,b] \times X \to X$ définie par $f(t,v)(x) = \lambda(t)\phi(v(x))$ pour tout $t \in [0,b]$ et pour tout $x \in [0,\pi]$ est continue. En effet, soit $(v_n)_{n\geq 0} \subset L^2(0,\pi)$ tel que $v_n \to v$ dans $L^2(0,\pi)$,

$$\begin{aligned} \|f(t,v_n) - f(t,v)\|_{L^2(0,\pi)} &= \Big(\int_0^\pi |f(t,v_n)(x) - f(t,v)(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\int_0^\pi |\lambda(t)\phi(v_n(x)) - \lambda(t)\phi(v(x))|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda(t)|\Big(\int_0^\pi |\phi(v_n(x)) - \phi(v(x))|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Lemma 4.4.1 *[20] Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^2(0,\pi)$ et $f \in L^2(0,\pi)$ tel que $f_n \to f$ in $L^2(0,\pi)$. Alors il existe une sous suite (f_{n_k}) de (f_n) et une fonction $\rho \in L^2(0,\pi)$ tel que*

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quand $k \to +\infty$ p.p. sur $[0,\pi]$

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq \rho(x)$ pour tout k et pour presque tout $x \in [0,\pi]$.

En utilisant le Lemme 5.3.1, on obtient l'existence d'une sous suite v_{n_k} de v_n tel que $v_{n_k}(z) \to v(z)$ p.p sur $[0,\pi]$ et $\rho \in L^2((0,\pi),\mathbb{R}^+)$ tel que $|v_{n_k}(z)| \leq \rho(z)$ p.p. sur $[0,\pi]$.
D'après la continuité de la fonction ϕ, $|\phi(v_{n_k}(x)) - \phi(v(x))| \to 0$ p.p. sur $[0,\pi]$ et $|\phi(v_{n_k}(x))| \leq a_1|v_{n_k}(x)| + |\phi(0)| \leq a_1\rho(x) + |\phi(0)| \in L^2(0,\pi)$. Ainsi d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue $\phi(v_{n_k}(\cdot)) \to \phi(v(\cdot))$ dans $L^2(0,\pi)$ pour toute sous suite $v_{n_k}(\cdot)$ de $v_n(\cdot)$. Alors on a $\phi(v_n(\cdot)) \to \phi(v(\cdot))$ dans $L^2(0,\pi)$ par conséquent $\|f(t,v_n) - f(t,v)\|_{L^2(0,\pi)} \to 0$ quand $n \to \infty$. D'où la condition $(\mathbf{H}_4)$ est satisfaite. Les conditions $(\mathbf{H}_5)$, $(\mathbf{H}_6)$ et $(\mathbf{H}_7)$ sont vérifiées avec $k = \sum_{i=1}^{p} |c_i|$ et de plus si l'inégalité

$$R_b(4l_1 + k + \sum_{i=1}^{p} k_i) < 1$$

est vérifiée, où $l_1 = \sup_{x\in[0,\pi]} \int_0^b |\rho(t)\phi(z(t,x))|dt$. Alors d'après le Théorème 4.3.1, l'équation (4.37) admet au moins une solution faible u dans X.

Chapitre 5

Stabilité des problèmes de contrôle optimale gouverné par des équations intégrodifférentielles

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et la stabilité de l'ensemble des contrôles admissibles du problème $(\mathcal{P})$. Le problème s'énonce comme suit

Problème $(\mathcal{P})$: Étant donné $b > 0$, $\overline{y}(\cdot) \in L^2(0, b; E)$, $y_0 \in E$ et $y_b \in E$, Trouver un contrôle optimal $\overline{u} \in \mathcal{U}[0, b]$ tel que

$$J(\overline{u}) \quad \leq J(u) \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}[0, b], \tag{5.1}$$

où

$$J(u) = \|y(b) - y_b\|_E^2 + \int_0^b \|y(t) - \overline{y}(t)\|_E^2 dt \tag{5.2}$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} y'(t) & = Ay(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)y(s)ds + f(t, y(t)) + Bu(t) \text{ pour } t \in [0, b], \\ y(0) & = y_0, \end{cases} \tag{5.3}$$

où A engendre un c_0-semi-groupe et $C(t)$ est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ tandis que f est une fonction qui sera caractérisée dans la suite. $u(\cdot)$ est une fonction contrôle donnée dans $\mathcal{U}[0, b] \subset L^1(0, b; X)$. L'ensemble $\mathcal{U}[0, b]$ est appelé ensemble des fonctions contrôles admissible et est défini par

$$\mathcal{U}[0, b] \quad = \{u : u(\cdot) \text{ est mesurable }, u(t) \in \mathcal{U} \subset X\} \tag{5.4}$$

où X est un espace de Banach séparable réflexif.
L'existence des solutions des problèmes de contrôle optimal est un sujet important en théorie du contrôle optimal. L'existence et la stabilité de l'ensemble des solutions des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des équations différentielles est très importantes dans le domaine des mathématiques appliquées [42] et [60], particulièrement en informatique [97, 22]. Dans les années cinquante, Fort [51] a introduit le concept de point fixe essentiel d'une application continue f sur un espace de Banach

X. D'abord, il a prouvé que chaque application continue sur X peut être approximée par une application continue sur X dont les points fixes sont tous essentiels. Ensuite, il a montré que si chaque point fixe d'une application continue f sur X est essentiel, alors l'ensemble des points fixes

$$F(f) = \{x \in X : f(x) = x\}$$

de f est stable dans le sens de Baire catégorie, où X est un espace métrique.
Fort énonce dans son théorème que si $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ est une fonction multivoque semi-continue supérieure d'un espace de Baire (X, τ) dans une partie compacte non vide d'un espace métrique (Y, d), alors F est semi-continue inférieure à chaque point d'une partie G_δ dense dans X.
K.Tan, J.Yu et X.Yuan [64], inspirés par les travaux de Fort [51], ont établi la stabilité des ensembles suivants

$$F(f) = \{y \in X : \sup_{x \in X} f(x, y) \leq 0\}$$

où f varie et X est une partie convexe compacte non vide d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff. Et

$$F(A, f) = \{y \in A : \sup_{x \in A} f(x, y) \leq 0\}$$

où f et A varient et X est un espace vectoriel topologique de Hausdorff et A est une partie compacte non vide de X. Dans les deux cas, l'application $f : X \times X \to \mathbb{R}$ est bornée. J.Vu et G.X.Z. YUAN [63] ont prouvé que les solutions de presque toutes les inclusions différentielles sont stables en utilisant la théorie de Baire Catégorie. Cela leur a permis d'étudier, d'une autre manière différente, la continuité des solutions des inclusions différentielles et des équations différentielles par rapport aux données initiales sans la condition de Lipschitz sur le terme non linéaire F. Ils ont prouvé l'existence d'un ensemble résidual dense $Q \subset Y$ tel que chaque $F \in Y$ est stable relativement à Y. Ils ont prouvé aussi que si $S(F)$ est un singleton, alors F est aussi stable relativement à Y. Où Y est l'ensemble des fonctions multivoques F tel que l'inclusion différentielle admette une solution et $S(F)$ est l'ensemble de toutes les solutions associées à F. Jian Yu et al. [65] ont établi l'existence d'un contrôle optimal du problème de contrôle optimal de Bolza suivant :

$$J(u) = h(y(b)) + \int_0^b g(t, y(t), u(t))dt \tag{5.5}$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t), u(t)) \text{ pour } t \in [0, b], \\ y(0) & = y_0, \end{cases} \tag{5.6}$$

Leur résultat a été établi en supposant que l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}[0, b]$ est une partie compacte de $\mathcal{C}(0, b; \mathbb{R}^n)$. Le problème consiste à trouver un contrôle $u^*(t)$ défini pour tout $t \in [0, b]$ qui minimise le coût $J(u)$ dans (5.5). En d'autres termes, trouver $u^*(t)$ tel que

$$h(y^*(b)) + \int_0^b g(t, y^*(t), u^*(t))dt = \min_{u \in \mathcal{U}[0,b]} \{h(y(t)) + \int_0^b g(t, y(t), u(t))dt\} \quad (5.7)$$

où $y(t)$ est déterminé par l'équation (5.6). Nous appelons un tel contrôle optimal $u^*(t)$ solution du problème de contrôle optimal. Évidemment, la solution $u^*(t)$ dépend de la fonction f qui est la vitesse d'évolution de l'état dans l'équation (5.6). Ils ont montré par un exemple que tous les problèmes de contrôle optimal ne sont pas stables. Cependant, leur résultat principal montre que, dans le sens de Baire catégorie, la plupart des problèmes de contrôle optimal sont stables. Hongyong Deng et Wei Wei d'abord dans [33] ont étudié le problème suivant :

$$\min J(u) = \phi(y(b)) + \int_0^b f(t, y(t), u(t))dt \quad (5.8)$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) + f(t, y(t), u(t)) \text{ pour } t \in [0, b], \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \quad (5.9)$$

Ils ont établi leur résultat en supposant que l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}[0, b]$ est une partie compacte de $L^1(0, b; \mathbb{R}^n)$. Ensuite dans [32], ils ont étudié l'existence et les propriétés de stabilité des solutions des problèmes de contrôle optimal gouvernés par une équation d'évolution semi-linéaire du type :

$$\min J(u) = \|y(b) - y_b\|_E^2 + \int_0^b \|y(t) - \overline{y}(t)\|_E^2 dt \quad (5.10)$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t) + f(t, y(t), u(t)) \text{ for } t \in [0, b], \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \quad (5.11)$$

où A engendre un c_0-semi-groupe et $u(\cdot)$ est une fonction contrôle donnée dans $\mathcal{U}[0, b] \subset L^1(0, b; X)$ défini par la relation (5.4). Ici X est un espace de Banach réflexif de dimension infinie. Il existe une grande littérature sur ce sujet, par exemple, on peut se référer aux travaux de [19] [77] [3] etc,. Ce chapitre est décomposé en quatre sections. Dans la première section, en utilisant la théorie des opérateurs résolvant introduite par Grimmer [55], nous étudierons l'existence d'un contrôle admissible de l'équation (5.3). Dans la deuxième section, on étudiera l'existence d'un contrôle optimal du **Problem** $(\mathcal{P})$ gouverné par une équation intégrodifférentielle semi-linéaire. Dans la troisième section, en utilisant la stabilité de le sens de Baire, nous étudierons la stabilité de l'ensemble des contrôles admissibles. En fin dans la quatrième section, nous donnerons un exemple pour illustrer les résultats abstraits obtenus.

5.2 Existence d'un contrôle admissible

Définition 20 *[57] Une fonction continue $x : [0; b] \to E$ est dite solution faible de l'équation (5.3) si x satisfait l'équation suivante*

$$\begin{cases} x(t) &= R(t)x_0 + \displaystyle\int_0^t R(t-s)\Big[f(s, x(s)) + Bu(s)\Big]ds \text{ pour } t \in J, \\ x(0) &= x_0 \in E. \end{cases} \tag{5.12}$$

Pour garantir l'existence d'un contrôle admissible de l'équation (5.3), nous posons les conditions suivantes :

($\mathbf{H}_1$) A est le générateur infinitésimal d'un c_0-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X.

($\mathbf{H}_2$) Pour chaque $t \geq 0$, $C(t)$ est un opérateur linéaire fermée de Y dans X, $C(t) \in \mathcal{B}(Y, X)$. De plus pour tout $y \in Y$, l'application $t \mapsto C(t)y$ est dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^+, X)$ et il existe $c \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que

$$\|C'(t)y\|_X \leq c(t)\|y\|_Y \text{ pour tout } y \in Y \text{ et } t \geq 0.$$

($\mathbf{H}_3$) (a) Pour chaque $x \in E$, la fonction $f(\cdot, x) : J \to E$ est fortement mesurable.

(b) Il existe une fonction positive $L \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ tel que

i. $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|$ pour tout $x, y \in E$ et $t \in J$

ii. $\|f(t, 0)\| \leq L(t)$ pour tout $t \in J$

(c) B est un opérateur lináire borné de X dans E.

Théorème 5.2.1 *Supposons que les hypothèses $(\boldsymbol{H}_1) - (\boldsymbol{H}_3)$ sont satisfaites. Alors l'équation (5.3) admet au moins un contrôle admissible.*

Preuve : Soit $0 < a \leq b$. Considérons la fonction

$$N : \mathcal{C}_a \to \mathcal{C}_a \tag{5.13}$$

définie par

$$Ny(t) = R(t)y_0 + \int_0^t R(t-s)\big[Bu(s) + f(s, y(s))\big]ds, \tag{5.14}$$

où $\mathcal{C}_a$ est l'espace des fonctions continues de $[0, a]$ dans E muni de la norme de la convergence uniforme. En utilisant le théorème du point fixe de Banach, on montre que l'application N admet un unique point fixe pour tout $a \in]0, b]$. Soient y_1 et $y_2 \in \mathcal{C}_a$, alors on a

$$\begin{aligned} Ny_1(t) - Ny_2(t) &= R(t)y_0 + \int_0^t R(t-s)\big[Bu(s) + f(s, y_1(s))\big] \\ &- R(t)y_0 + \int_0^t R(t-s)\big[Bu(s) + f(s, y_2(s))\big] \\ &= \int_0^t R(t-s)\big[f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\big]ds \end{aligned}$$

alors, en prenant la norme dans les deux membres, on obtient

$$\begin{aligned}\|Ny_1(t) - Ny_2(t)\| &\leq R_b \int_0^t \|f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))\|ds \\ &\leq R_b \int_0^t L(s)\|y_2(s) - y_1(s)\|ds\end{aligned}$$

où $R_b = \sup_{t\in[0,b]} R(t)$. Donc

$$\begin{aligned}\|N^2y_1(t) - N^2y_2(t)\| &\leq R_b \int_0^t L(s)\|Ny_2(s) - Ny_1(s)\|ds \\ &\leq R_b^2 \int_0^t L(s) \int_0^s L(\tau)\|y_2(\tau) - y_1(\tau)\|d\tau ds.\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème de Fubini, On obtient l'estimation suivante :

$$\|N^2y_1(t) - N^2y_2(t)\| \leq R_b^2 \frac{\left(\int_0^b L(s)ds\right)^2}{2}\|y_2 - y_1\|.$$

En itérant ce procédé n fois, on aura

$$\|N^ny_1(t) - N^ny_2(t)\| \leq R_b^n \frac{\left(\int_0^b L(s)ds\right)^n}{n!}\|y_2 - y_1\|.$$

Comme $R_b^n \frac{\left(\int_0^b L(s)ds\right)^n}{n!} \to 0$ as $n \to +\infty$,alors, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > n_0$, on obtient

$$\|R_b^n \frac{\left(\int_0^b L(s)ds\right)^n}{n!}\| < 1.$$

En utilisant le théorème du point fixe de Banach, il existe un unique $y \in \mathcal{C}_b$ tel que

$$N^ny(t) = y(t).$$

Or, $N^ny = y \Rightarrow N^{n+1}y = Ny \Rightarrow N^n(Ny) = Ny$. Cela nous permet de dire que Ny est un point fixe de N^n. Par unicité du point fixe, alors, on obtient $Ny = y$. Ce qui complète la preuve.

Lemma 5.2.1 *Soient a et b deux nombres réels tel que $a < b$ et soient α et β deux fonctions numériques continues positives définies sur $[a, b]$ et K une constante positive. Si*

$$\alpha(t) \leq K + \int_a^t \alpha(s)\beta(s)ds, \quad \textit{pour tout } t \in [a, b] \tag{5.15}$$

alors on a

$$\alpha(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right), \quad \textit{pour tout } t \in [a, b] \tag{5.16}$$

Théorème 5.2.2 *Supposons que les hypothèses du théorèmes ci-dessus sont satisfaites et que $x \in \mathcal{C}(J,E)$ est la solution faible de l'équation (5.3). Alors l'application $u(\cdot) \to x(\cdot, u(\cdot))$ de $L^1([0,b],X)$ dans $\mathcal{C}(J,E)$. est continue*

Preuve : Soient $x_k(\cdot) = x(\cdot, u_k(\cdot))$ et $x(\cdot) = x(\cdot, u(\cdot))$ les solutions faibles de l'équation (5.3) associées respectivement à u_k et u. Alors, d'après la définition 20 on a

$$x_k(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)\Big[f(s, x_k(s)) + Bu_k(s)\Big]ds$$

et

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t-s)\Big[f(s, x(s)) + Bu(s)\Big]ds$$

Soit $u_k \in L^1([0,b],X)$ tel que $u_k \to u$ dans $L^1([0,b],X)$

$$\begin{aligned}
\|x_k(t) - x(t)\| &\leq R_b \int_0^t \|f(s, x_k(s)) - f(s, x(s))\| ds \\
&+ R_b \int_0^t \|Bu_k(s) - Bu(s)\| ds \\
&\leq R_b \int_0^t \|f(s, x_k(s)) - f(s, x(s))\| ds \\
&+ R_b \|B\| \int_0^t \|u_k(s) - u(s)\| ds \\
&\leq R_b \int_0^t \|f(s, x_k(s)) - f(s, x(s))\| ds + R_b \|B\| \|u_k - u\|_{L^1([0,b],X)} \\
&\leq R_b \int_0^t L(s) \|x_k(s) - x(s)\| ds + R_b \|B\| \|u_k - u\|_{L^1([0,b],X)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient que

$$\|x_k(t) - x(t)\| \leq R_b \|B\| \exp\Big(R_b \int_0^b L(s) ds\Big) \|u_k - u\|_{L^1([0,b],X)} \text{ pour tout } t \in [0,b]$$

Ainsi, on déduit de la convergence de $u_k \to u$ dans $L^1([0,b],X)$ que $x_k(\cdot) \to x(\cdot)$ in $\mathcal{C}([0,b];E)$.

5.3 Existence d'un contrôle optimal

Pour garantir l'existence d'un contrôle optimal du problème $\mathcal{P}$, nous posons la condition suivante :

$(\mathbf{H}_4)$: Supposons que l'ensemble U est compact dans X, $\mathcal{U}[0,b] \subset L^1(0,b;X)$ et

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(0,b;X)} \to 0 \text{ quand } h \to 0, \text{ uniformément par rapport à } u \in \mathcal{U}[0,b].$$

Lemma 5.3.1 *[32] Si l'hypothèse $(\boldsymbol{H}_4)$ est satisfaites, alors l'ensemble $\mathcal{U}[0,b]$ est compact dans $L^1(J;X)$.*

Preuve : La preuve de ce lemme est décomposée en deux étapes :

Étape 1 En utilisant le théorème de Fréchet-Kolmogrov, on montre que l'ensemble $\mathcal{U}[0,b]$ est relativement compact dans $L^1(J;X)$. Pour cela il suffit de montrer que, pour tout $U \subset X$ compact, l'ensemble suivant

$$\Big\{ \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt; u \in \mathcal{U}[0,b] \Big\} \tag{5.17}$$

est relativement compact dans X pour tout $0 < t_1 < t_2 < b$.
En effet, soit $u \in \mathcal{U}[0,b]$ fixé, alors $u(t) \in U$ pour tout $t \in J$. D'après le lemme 4.2.3

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t)dt \in (t_2 - t_1)\overline{co}(\{u(t) : t \in [t_1, t_2]\}) \subset (t_2 - t_1)\overline{co}(U).$$

donc

$$\Big\{ \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt; u \in \mathcal{U}[0,b] \Big\} \subset (t_2 - t_1)\overline{co}(U).$$

Comme U est compact, alors $\overline{co}(U)$ est compact. Ainsi en utilisant les propriétés de monotonicité et de régularité de la mesure de non compacité on obtient :

$$\Big\{ \int_{t_1}^{t_2} u(t)dt; u \in \mathcal{U}[0,b] \Big\}$$

est relativement compact dans X. Comme l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$ est satisfaites, alors d'après le théorème de Fréchet-Kolmogrov, l'ensemble $\mathcal{U}[0,b]$ est relativement compact dans $L^1(J;X)$.

Étape 2 On montre que $\mathcal{U}[0,b]$ est fermé. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{U}[0,b]$ tel que u_n converge vers u dans $L^1(J;X)$ c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^1(J;X)} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^b \|u_n(s) - u(s)\|_X ds = 0. \tag{5.18}$$

Ainsi, d'après le lemme 3.4.1, il existe une sous suite u_{n_k} de u_n et une application $\rho \in L^2((0,b), \mathbb{R}^+)$ tel que

$$|u_{n_k}(t)| \leq \rho(t) \text{ pour tout } k \text{ et presque partout dans } [0,b]. \tag{5.19}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_X = 0 \text{ presque partout dans } [0,b], \tag{5.20}$$

D'après l'équation 5.20, il existe une partie $I \subset [0,b]$ tel que

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_X = 0 \text{ pour tout } t \in I \text{ et } \mu([0,b] - I) = 0. \tag{5.21}$$

Pour tout $t \in I$ fixé, $u_{n_k}(t) \in U$. Comme U est une partie compact dans X, alors il existe $\overline{u}(t) \in U$ tel que

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_{n_k}(t) - \overline{u}(t)\|_X = 0. \tag{5.22}$$

Par unicité de la limite $u(t) = \overline{u}(t)$ pour tout t fixé dans I.
Soit $u_0 \in U$, définissons la fonction suivante

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in I, \\ u_0, & t \in [0,b] - I. \end{cases} \tag{5.23}$$

Il est claire que $\tilde{u}(t) \in U$ pour tout $t \in [0,b]$, donc $\tilde{u} \in \mathcal{U}[0,b]$. On a d'après l'expression (5.23) $\tilde{u}(t) = u(t)$ presque partout sur $[0,b]$. Ainsi il s'en suit que $u \in \mathcal{U}[0,b]$, ce qui nous permet de conclure que $\mathcal{U}[0,b]$ est fermé. cela complète la preuve du lemme.

Exemple 5.3.1 *[32] Soit* $\mathcal{U}[0,b] \subset L^1(0,b;H^1(]0,\pi[))$. *Pour tout* $x \in]0,\pi[$*, supposons que* $u(t,x)$ *est une fonction continue par morceaux par rapport à la variable* t*, ayant un nombre fini de points de discontinuités de premiers espèce. Posons* $U = \{u(t,\cdot) | t \in [0,b]\}, U$ *est une partie fermée bornée de* $H^1(]0,\pi[)$*. Alors d'après le lemme 5.3.1,* $\mathcal{U}[0,b]$ *est une partie compacte de* $L^1(0,b;L^2(]0,\pi[))$.

Preuve On sait que $H^1(]0,\pi[)$ est relativement compact dans $L^2(]0,\pi[)$. Comme U est une parie fermée et bornée de $H^1(]0,\pi[)$, alors U est compact dans $L^2(]0,\pi[)$. Soient $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ l'ensemble des points de discontinuité de u. Posons $t_0 = 0$ et $t_{N+1} = b$. Définissons la fonction

$$\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & t \in [0,b], t \neq t_i, i = 1,\cdots,N \\ u(t^-,x), & t = t_i, i = 1,\cdots,N. \end{cases} \tag{5.24}$$

Soit $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^1(0,b-h;L^2(]0,\pi[))} &= \int_0^{b-h} \|u(t+h) - u(t)\|_{L^2(]0,\pi[)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|u(t+h) - u(t)\|_{L^2(]0,\pi[)} + \int_{t_N}^{b-h} \|u(t+h) - u(t)\|_{L^2(]0,\pi[)} \\
&= \sum_{i=1}^{N+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i-h} \|\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t)\|_{L^2(]0,\pi[)} + \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i-h}^{t_i} \|\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t)\|_{L^2(]0,\pi[)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i-h} \|\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t)\|_{L^2(]0,\pi[)} + 2MNh.
\end{aligned}$$

D'après la continuité de u dans chaque intervalle $]t_{i-1}, t_i[, i = 1,\cdots,N+1$ et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{h\to 0} \int_{t_{i-1}}^{t_i-h} \|\tilde{u}(t+h) - \tilde{u}(t)\|_{L^2(]0,\pi[)} = 0 \tag{5.25}$$

Ainsi on obtient

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h u - u\|_{L^1(0,b-h;L^2(]0,\pi[))} = 0. \tag{5.26}$$

Donc l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$ est satisfaite. D'après le lemme 5.3.1 l'ensemble $\mathcal{U}[0,b]$ est compact dans $L^1(0,b;L^2(]0,\pi[))$.

Définition 21 *Une suite minimisante d'une fonction coût J sur l'ensemble K est une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tel que $u_n \in K$ et*

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{v\in K} J(v)$$

Dans ce qui suit, Nous étudions l'existence d'un contrôle optimal du problème $(\mathcal{P})$.

Théorème 5.3.1 *[32] Supposons que les hypothèses $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_4})$ sont satisfaites. Alors le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins un contrôle optimal dans $\mathcal{U}[0,b]$.*

Preuve : Supposons qu'il existe une suite minimisante $(u_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{U}[0,b]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{v\in\mathcal{U}[0,b]} J(v) \tag{5.27}$$

Comme $\mathcal{U}[0,b]$ est compact, alors il existe une sous suite $(u_{n'})$ de (u_n) et $\overline{u} \in \mathcal{U}[0,b]$ tel que

$$u_{n'} \to \overline{u} \text{ dans } L^1(0,b;E) \text{ quand } n' \to \infty. \tag{5.28}$$

D'après le Théorème 5.2.2, on obtient

$$x_{u_{n'}}(\cdot) \to x_{\overline{u}}(\cdot) \text{ dans } \mathcal{C}([0,b];E) \text{ quand } n' \to +\infty, \tag{5.29}$$

où $x_{u_{n'}}(\cdot) = x(\cdot, u_{n'}(\cdot))$ et $x_{\overline{u}}(\cdot) = x(\cdot, \overline{u}(\cdot))$ sont les solutions de l'équation (5.3) associées respectivement à $u_{n'}$ et $\overline{u}$. Donc

$$x_{u_{n'}}(b) \to x_{\overline{u}}(b) \;\text{ dans E quand } n' \to +\infty \tag{5.30}$$

et

$$\|x_{u_{n'}}(b) - x_b\| \to \|x_{\overline{u}}(b) - x_b\| \text{ dans } \mathbb{R} \text{ quand } n' \to +\infty \tag{5.31}$$

Alors on a

$$\|x_{u_{n'}}(b) - x_b\|^2 \to \|x_{\overline{u}}(b) - x_b\|^2 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ quand } n' \to +\infty \tag{5.32}$$

En utilisant (5.28), alors il existe une sous suite de $(u_{n'})$, notée par $(u_{n''})$, tel que

$$\|u_{n''}(t) - \overline{u}(t)\|_X \to 0 \text{ presque pour tout } t \in [0,b]. \tag{5.33}$$

Alors on obtient d'après (5.29) et (5.33) que

$$\|x_{u_{n''}}(t) - \overline{x}(t)\|_E \to \|x_{\overline{u}}(t) - \overline{x}(t)\|_E \text{ presque pour tout } t \in [0,b].$$

Comme $u_{n''}(t) \in \mathcal{U}$ (une partie compact de X) et $x_{u_{n''}}(\cdot) = x(\cdot, u_{n''}(\cdot)) \in C([0,b];E)$, l'image d'une partie compact par rapport à x est compacte. Pour tout n'', il existe une constante positive M, tel que

$$\|x_{u_{n''}}(t) - \overline{x}(t)\|_X \leq M \tag{5.34}$$

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\int_0^b \|x_{u_{n''}}(t) - \overline{x}(t)\|_X^2 dt \to \int_0^b \|x_{\overline{u}}(t) - \overline{x}(t)\|_X^2 dt. \tag{5.35}$$

D'après tout ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
J(\overline{u}) &= \|x_{\overline{u}}(b) - x_b\|_X^2 + \int_0^b \|x_{\overline{u}}(t) - \overline{x}(t)\|_X^2 dt \\
&= \lim_{n''\to\infty} \|x_{u_{n''}}(t) - x_b\|_X^2 + \lim_{n''\to\infty} \int_0^b \|x_{u_{n''}}(t) - \overline{x}(t)\|_X^2 dt \\
&= \lim_{n''\to\infty} J(u_{n''}) = \inf_{v\in\mathcal{U}[0,b]} J(u).
\end{aligned}$$

D'où $\overline{u} \in \mathcal{U}[0, b]$ est un contrôle optimal. Cela complète la preuve du Théorème.

5.4 Stabilité

Dans cette section, nous utilisons la théorie des fonctions multivoques et la notion de solution essentielle pour étudier la stabilité de l'ensemble des contrôles optimale.

Définition 22 *[32] Une fonction multivoque $F : W \to \mathcal{P}_0(Z)$ est dite compacte semi-continue supérieure (USCO) si $F(w)$ est compact pour chaque $w \in W$ et que F semi-continue supérieure.*

Définition 23 *[32] Une fonction multivoque $F : W \to \mathcal{P}_0(Z)$ est dite fermée si son graphe $Graph(F)$ est fermé.*

Lemma 5.4.1 *[32] Si la fonction multivoque $F : W \to \mathcal{P}_0(Z)$ est fermée et Z compact, alors F une application USCO.*

Afin d'établir la propriété de stabilité au sens de Baire Categorie des solutions des problèmes de contrôle optimale nous introduisons la définition suivante

Définition 24 *[64] Soit W un espace métrique, pour tout $w_0 \in W$,*

1. *$z_0 \in F(w_0)$ est dit essentiel par rapport à W si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta > 0$ tel que pour tout $w \in W$ avec $\rho(w, w_0) < \delta$, alors il existe $z \in F(w)$ avec $d(z, z_0) < \varepsilon$.*
2. *w_0 est dit essentiel par rapport à W, si chaque $z \in F(w_0)$ est essentiel par rapport à W.*

Théorème 5.4.1 *[64] Une fonction multivoque F est continue en $w_0 \in W$ si et seulement si w_0 est essentiel par rapport à W.*

Remarque 5.4.1 *Le théorème 5.4.1 montre que $F(w_0)$ est stable si et seulement si w_0 est essentiel par rapport à W.*

Définition 25 *[32] Une partie $Q \subset W$ est dite un ensemble résiduel si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts dense dans W.*

Lemma 5.4.2 *[64] Si W est un espace métrique, Z un espace topologique et $F : W \to \mathcal{P}_0(Z)$ une fonction multivoque usco, alors l'ensemble des points Q, où F est semi-continue inférieure, est un ensemble résiduel dans W, par conséquent F est continue en tout point $f \in Q$.*

Définition 26 *Un espace de Baire est un espace topologique X satisfaisant la propriété suivante : Pour toute famille $(U_n)_{n\geq 0}$ d'ouverts dense dans X, leur intersection $\cap_{n\geq 0} U_n$ est dense dans X.*

Le théorème suivant donne une caractérisation importante des espaces métriques.

Théorème 5.4.2 ***(Baire theorem)***
Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

On a le corolaire suivant.

Corollary 5.4.1 *Si W est un espace métrique complet, alors toute partie résiduel de W est dense dans W.*

Lemma 5.4.3 *[32] Soit W un espace métrique complet, Z un espace métrique et $F : W \to \mathcal{P}_0(Z)$ une fonction multivoque USCO, Alors il existe un ensemble résiduel Q dense dans W tel que F soit semi-continue inférieure en tout point $x \in Q$, a savoir F est continue en tout $x \in Q$.*

Définition 27 *[94] Une partie $S \subset W$ est dite nulle part dense ou rare si l'intérieure de sa fermeture $(\overset{\circ}{\overline{S}})$ est vide. Une partie $Q \subset W$ est dite de première catégorie ou maigre si elle est réunion dénombrable de parties nulle part denses. Une partie S de W qui n'est pas de première catégorie est dite de seconde catégorie dans W.*

Remarque 5.4.2 *[65] Si W est un espace métrique complet, alors la partie résiduel Q de W est dense dans W et elle est un ensemble de seconde catégorie.*

Maintenant, nous considérons la stabilité de l'ensemble des contrôles optimaux associés à l'opérateur linéaire borné B. Notons par $Y = \mathcal{L}(X, E)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans E. On sait que Y muni de la norme opérateur défini dans le chapitre 1 est un espace de Banach. Notons par $S(B)$ l'ensemble des solutions de l'équation (5.1) associé à l'opérateur linéaire borné B. Alors

$$S(B) = \{\overline{u} : \overline{u} \text{ est un contrôle optimal associé à } B \in Y\}$$

Évidement, $\overline{u}$ dépend de B. La correspondance $B \to S(B)$ est une fonction multivoque $S : Y \to \mathcal{P}_0(\mathcal{U}[0, b])$. L'objectif de cette section est d'établir la stabilité de l'ensemble des solutions $S(B)$ de l'équation (5.1) lorsque l'opérateur linéaire B est une perturbation. En utilisant la théorie de Baire catégorie, on montre que les solutions de presque tous les problèmes d'optimisation $\mathcal{P}$ sont stable dans le sens de Baire cartégorie.

Étudions tout d'abord les propriétés de l'application multivoque S. Nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.4.3 *Supposons que les hypothèses* $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_4})$ *sont satisfaites, Alors* $S(B) \neq \emptyset$ *pour chaque* $B \in Y$.

La proposition suivante est très importante pour étudier la stabilité des contrôles optimaux.

Proposition 5.4.1 *Soit* (B_n) *une suite dans* Y *tel que* $B_n \to B$ *dans* Y *et* (u_n) *une suite dans* $\mathcal{U}[0,b]$ *tel que* $u_n \to u$ *dans* $L^1(0,b;X)$*, alors* $y(\cdot,u_n(\cdot),B_n) \to y(\cdot,u(\cdot),B)$ *dans* $C([0,b];X)$ *quand* $n \to +\infty$

Proof : Posons $y_n(\cdot) = y(\cdot,u_n(\cdot),B_n)$ et $y(\cdot) = x(\cdot,u(\cdot),B)$ les solutions faibles de l'équation (5.3) associées à u_n et B_n (respectivement associée u et B). Alors

$$y_n(t) = R(t)y_0 + \int_0^t R(t-s)\Big[f(s,y_n(s)) + B_n u_n(s)\Big]ds$$

et

$$y(t) = R(t)y_0 + \int_0^t R(t-s)\Big[f(s,y(s)) + Bu(s)\Big]ds$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|y_n(t) - y(t)\| &\leq R_b \int_0^t \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\|ds \\
&+ R_b \int_0^t \|B_n u_n(s) - Bu_n(s)\|ds + R_b \int_0^t \|Bu_n(s) - Bu(s)\|ds \\
&\leq R_b \int_0^t L(s)\|y_n(s) - y(s)\|ds + bR_b\|B_n - B\|_{\mathcal{L}} \\
&+ R_b\|B\|\|u_n - u\|_{L^1([0,b],X)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\|y_n(t) - y(t)\| \leq R_b \exp\Big(R_b \int_0^b L(s)ds\Big)\Big[\|B\|\|u_k - u\|_{L^1([0,b],X)} + b\|B_n - B\|_{\mathcal{L}}\Big]$$

pour tout $t \in [0,b]$. On déduit de $B_n \to B$ dans Y et de $u_n \to u$ dans $L^1(0,b;X)$ que $y_n(\cdot) \to y(\cdot)$ dans $\mathcal{C}([0,b];E)$.

On obtient facilement la proposition suivante à partir de la proposition (5.4.1)

Proposition 5.4.2 *Soit* (B_n) *une suite dans* Y *tel que* $B_n \to B$ *dans* Y *et* (u_n) *un suite dans* $\mathcal{U}[0,b]$ *tel que* $u_n \to u$ *dans* $L^1(0,b;X)$*. Alors* $J_{B_n}(u_n) \to J_B(u)$ *quand* $k \to +\infty$.

Théorème 5.4.4 *[32] Supposons que les hypothèses* $(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_4)$ *sont satisfaites. Alors la fonction multivoque* $S : Y \to \mathcal{P}(\mathcal{U}[0,b])$ *est USCO.*

Définition 28 *[63] Pour tout* $B_0 \in Y$,

1. $\overline{u}_0 \in S(B_0)$ *est dit solution essentielle du problème* $(\mathcal{P})$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $B \in Y$ *avec* $\|B - B_0\|_{\mathcal{L}} < \delta$, *alors il existe* $\overline{u} \in S(B)$ *tel que* $\|u - u'\|_{L^1} < \varepsilon$.
2. *Le problème de contrôle optimal* $(\mathcal{P})$ *associé à* B_0 *est dit essentiel si et seulement toutes ses solutions sont essentielles.*

Théorème 5.4.5 *[32] Le problème de contrôle optimal* $(\mathcal{P})$ *associé à* B_0 *est essentiel si et seulement si la fonction multivoque* $S : Y \to \mathcal{P}(\mathcal{U}[0,b])$ *est semi-continue inférieure en* $B_0 \in Y$.

D'après le lemme 5.4.3 et le théorème 5.4.4, nous avons le lemme suivant.

Lemma 5.4.4 *[32] Il existe une partie résiduelle* $Q \subset Y$ *dense tel que* S *soit semi-continue inférieure en tout* $B \in Q$, *à savoir,* S *est continue en tout* $B \in Q$.

Comme la partie $Q \subset Y$ est de seconde catégorie, Y un espace de Banach et S est continue en tout point $B \in Q$. Le Lemme 5.4.4 et le théorème 5.4.5 fournissent la stabilité dans le sens de Baire catégorie. Par conséquent, chaque problème de contrôle optimal associé à $B \in Y$ peut être densément approximé par un problème essentiel .

Théorème 5.4.6 *[33] Quand l'ensemble des solutions* $S(B)$ *est un singleton, c'est-à-dire* $S(B) = \{u\}$, *le résultat est encore satisfait. si* $B_k \to B$ *dans* Y, *alors les contrôles optimal correspondant* u_k *et* u *vérifient* $u_k \to u$ *dans* $L^1([0,T]; E)$. *On peut constater aussi que pour tout* $B \in Y$, *le problème de contrôle optimal peut être densément approximé par un problème essentiel.*

5.5 Application

Pour illustrer notre résultat abstrait, considérons le problème suivant.

$$\min_{u \in \mathcal{U}[0,b]} J(u) = \int_0^{\pi} |y(b,x) - y_b(x)|^2 dx + \int_0^b \int_0^{\pi} |y(t) - \overline{y}(t)|^2 dx dt \tag{5.36}$$

sous la contrainte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y(t,z) & = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} y(t,z) + \displaystyle\int_0^t \gamma(t-s) \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} y(s,z) ds \\ & \quad + \alpha(t)\phi\big(y(t,z)\big) + Bu(t) \text{ pour } t \in [0,b] \text{ et } z \in]0,\pi[, \\ y(t,0) & = y(t,\pi) = 0, \\ y(0,z) & = y_0(z), \end{cases} \tag{5.37}$$

où $\overline{y}(\cdot) \in L^2(0,b; L^2(0,\pi))$, $y_0 \in L^2(0,\pi)$ et $y_b \in L^2(0,\pi)$, $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,b],\mathbb{R}), \alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est continue, u une fonction contrôle dans $\mathcal{U}[0,b]$, $B : L^1(0,b) \to \mathbb{R}$ est un opérateur linéaire borné et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est tel que $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \le a_1 |x_1 - x_2|$; $a_1 > 0$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Pour réécrire l'équation (5.37) sous la forme abstraite, on introduit

l'espace $E = L^2(0,\pi)$.
Soit $A : D(A) \to E$ défini par

$$\begin{cases} D(A) & = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \\ Ay & = y'' \end{cases} \tag{5.38}$$

Soit $C(t) : D(A) \to E$ défini par $C(t)y = \gamma(t)Ay$.
Soit $f : [0,b] \times E \to E$ défini par $f(t,v)(z) = \alpha(t)\phi\big(v(z)\big)$ pour $t \in [0,b]$ et $z \in [0,\pi]$.
Supposons que $Y(t) = y(t,z)$, l'équation (5.37) prend la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}Y(t) & = AY(t) + \displaystyle\int_0^t C(t-s)Y(s)ds + f(t,Y(t)) + Bu(t) \text{ pour } t \in [0,b], \\ Y(0) & = Y_0. \end{cases} \tag{5.39}$$

On sait que A engendre un c_0-semi-groupe sur $L^2(0,\pi)$, ce qui implique l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$ est satisfaite. De plus l'hypothèse $(\mathbf{H}_2)$ est vérifié, il s'en suit que l'équation intégro-différentielle homogène (2.4) admet un unique opérateur résolvant $(R(t))_{t\geq 0}$ défini sur E.
Let $v_1, v_2 \in L^2(0,\pi)$,

$$\begin{aligned} \|f(t,v_1) - f(t,v_2)\|_{L^2(0,\pi)} &= \Big(\int_0^\pi |f(t,v_1)(z) - f(t,v_2)(z)|^2 dz\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\int_0^\pi |\alpha(t)\phi(v_1(z)) - \alpha(t)\phi(v_2(z))|^2 dz\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= a_1|\alpha(t)|\Big(\int_0^\pi |v_1(z) - v_2(z)|^2 dz\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= a_1|\alpha(t)|\|v_1 - v_2\|_{L^2(0,\pi)}. \end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \|f(t,0)\|_{L^2(0,\pi)} &= \Big(\int_0^\pi |f(t,0(z))|^2 dz\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_0^\pi |\alpha(t)\phi(0(z))|^2 dz\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C|\alpha(t)|, \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante positive. on en déduit que l'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ est satisfaite. D'après le théorème (5.2.1), on obtient que l'équation (5.37) admet un contrôle admissible sur $[0,b]$.

Soit

$$\mathcal{U}[0,b] = \Big(\cup_1^N \{u_k(t,x) \in \{\sin x, -e^{\frac{1}{2k}}\sin x\}\}\Big) \cup \Big(\cup_1^{+\infty} \{u^m(t,x) = \frac{1}{m}\}\Big)$$

où

$$u_k(t,x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } t \in [\frac{2lb}{2k}, \frac{(2l+1)b}{2k}], l = 1, \cdots, k-1 \\ -e^{\frac{1}{2k}}\sin x & \text{si non .} \end{cases} \tag{5.40}$$

Comme dans l'exemple 5.3.1, $\mathcal{U}[0,b]$ est compact dans $L^1([0,b];L^2(0,\pi))$. Ici $X = L^2(0,\pi)$, par conséquent l'hypothèse $(\mathbf{H_4})$ est satisfaite. Ainsi d'après le théorème (5.3.1), l'équation (5.36) admet au moins un contrôle optimal.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié dans un premier temps la contrôlabilité d'une classe d'equations intégrodifférentielles dans les espaces de Banach. Ensuite l'existence d'au moins une solution faible de ces équations avec des conditions de type non locale et impulsive. Enfin, nous avons étudié la stabilité au sens des catégories de Baire de l'ensemble des solutions d'un problème de contrôle optimal régi par une équation intégrodifférentielle. Notre travail repose essentiellement sur l'opérateur résolvant qui joue le rôle du semi-groupe mais ne vérfie pas la propriété de translation.

Le chapitre 1 de ce travail est consacré à un peu d'historique sur les équations intégrodifférentielles et leurs applications dans plusieurs domaines tel que la médecine, la biologie, la physique etc,.
Des modèles mathèmatiques comme ceux de Volterra ainsi que leur évolution durant ces dernières décennies sont exposés.

Le chapitre 2 fait l'objet de quelques rappels de résultats fondamentaux sur les la théorie des semi-groupes, la théorie des opérateurs résolvants et les équations intégrodifférentielles.

Le chapitre 3, qui est un developpement de notre travail [35], est consacré à l'étude de la contrôlabilité du système d'equations intégrodifférentielles . Des conditions de type Carathéodory, plus générales que celles de Lipschitz, sont utilisées pour établir les résultats.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de l'existence d'au moins une solution faible du sytème impulsif en utilisant la notion de mesure de non compacité et le fait que le semi groupe n'est pas compact cette fois ci. Ce chapitre repose sur notre travail [36]

Enfin, dans le chapitre 5, nous avons établi des résultats d'existences d'une solution faible, l'existence d'un contrôle admissible et la stabilité. Ce chapitre repose sur notre travail [37]

A la fin de chacun des trois dernièrs chapitres, une application est donnée pour illustrer les résultats abstraits obtenus. Comme perspectives, on projette étudier la contrôlabilité du système d'équations intégrodifférentielles impulsive et essayer de voir s'il est possible d'obtenir l'unicité et la régularité. On pourra aussi essayer d'affaiblir les conditions utilisées pour l'obtention de certains de nos résultats.

Bibliographie

[1] A.Belleni-Morante and A.C.McBride. *Applied Nonlinear Semigoups : An introduction.* Jhon Wiley and Sons Incorporated, (1998). (Cité en page 16.)

[2] G.L. Acedo, T.D. Benavides, and J.M.A. Toledano. *Measure of NonCompactness in Metric Fixed Point Theory.* Springer Science and Business Media, (1997). (Cité en pages 23 et 25.)

[3] N. U. Ahmed and K. L. Teo. *Optimal Control of Distributed Parameter Systemsl.* Elsevier North Holland, New York, (1981). (Cité en page 57.)

[4] Sergiu Aizicovici and Nicolae H Pavel. *Differential equations and control theory*, volume 225. CRC Press, 2001. (Cité en page 12.)

[5] Rustjam R Akhmerov, MI Kamenskii, AS Potapov, AE Rodkina, BN Sadovskii, and A IACOB. Measures of noncompactness and condensing operators. *Operator theory*, 55 :1–244, 1992. (Cité en page 24.)

[6] Giovambattista Amendola, Mauro Fabrizio, and John Murrough Golden. *Thermodynamics of materials with memory.* Springer, 2012. (Cité en page 8.)

[7] K Balachandran. Existence of solutions of semilinear evolution equation of sobolev type with nonlocal condition in banach spaces. *Dynamic Systems and Applications*, 9(1) :69–76, 2000. (Cité en page 28.)

[8] K Balachandran and JP Dauer. Controllability of nonlinear systems via fixed-point theorems. *Journal of optimization theory and applications*, 53(3) :345–352, 1987. (Cité en page 27.)

[9] K Balachandran and JP Dauer. Controllability of nonlinear systems in banach spaces : a survey. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 115(1) :7–28, 2002. (Cité en page 28.)

[10] K Balachandran, JP Dauer, and P Balasubramaniam. Controllability of nonlinear integrodifferential systems in banach space. *Journal of optimization theory and applications*, 84(1) :83–91, 1995. (Cité en page 28.)

[11] K. Balachandran and R.V. Kumar. Existence of solutions of integrodifferential evolution equations with time varying delays. *Applied Mathematics E-Notes*, 7 :1–8, (2007). (Cité en page 29.)

[12] Krishnan Balachandran and Rajagounder Ravi Kumar. Existence of solutions of integrodifferential evolution equations with time varying delays. *Applied Mathematics E-Notes*, 7 :1–8, 2007. (Cité en page 22.)

[13] Józef Banaś. On measures of noncompactness in banach spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 21(1) :131–143, 1980. (Cité en page 25.)

[14] Józef Banaś and Mohammad Mursaleen. *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations.* Springer, 2014. (Cité en page 25.)

[15] V Barbu. Exact controllability of the superlinear heat equation. *Applied Mathematics & Optimization*, 42(1) :73–89, 2000. (Cité en page 29.)

[16] L Bass, AJ Bracken, K Holmåker, and BRF Jefferies. Integro-differential equations for the self-organisation of liver zones by competitive exclusion of cell-types. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 29(02) :156–194, 1987. (Cité en page 8.)

[17] Leonard David Berkovitz and Negash G Medhin. *Nonlinear optimal control theory*. CRC press, 2012. (Cité en page 12.)

[18] H. Bouzahir and X. Fu. Controllability of neutral functional differential equation with infinite delay. *Acta Mathematica Sciencia*, 31(1), (2011). (Cité en page 29.)

[19] A. Bressan and B. Piccoli. *Introduction to the Mathematical Theory of Control*. American Institute of Mathematical Sciences Press, (2007). (Cité en page 57.)

[20] H. Brezis. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contraction dans les espaces de Hilbert*, volume 5. Elsevier, (1973). (Cité en pages 37 et 52.)

[21] V Capasso. Asymptotic stability for an integrodifferential reaction-diffusion system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 103(2) :575–588, 1984. (Cité en page 8.)

[22] Eduardo Casas and Karl Kunisch. Optimal control of semilinear elliptic equations in measure spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(1) :339–364, 2014. (Cité en page 55.)

[23] Benoit Chachuat. Nonlinear and dynamic optimization : from theory to practice. Technical report, 2007. (Cité en page 12.)

[24] Goong Chen and Ronald Grimmer. Integral equations as evolution equations. *Journal of Differential Equations*, 45(1) :53–74, 1982. (Cité en page 22.)

[25] Chen Chuanmiao and Shih Tsimin. *Finite element methods for integrodifferential equations*, volume 9. World Scientific, 1998. (Cité en page 8.)

[26] EN Chukwu and SM Lenhart. Controllability questions for nonlinear systems in abstract spaces. *Journal of Optimization theory and Applications*, 68(3) :437–462, 1991. (Cité en page 29.)

[27] Bernard D Coleman. On thermodynamics, strain impulses, and viscoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(3) :230–254, 1964. (Cité en page 5.)

[28] Bernard D Coleman and Morton E Gurtin. Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 18(2) :199–208, 1967. (Cité en pages 5 et 6.)

[29] R. F. Curtain and Anthony J Pritchard. *Infinite dimensional linear systems theory*, volume 8. Springer-Verlag Berlin, 1978. (Cité en page 27.)

[30] R. F. Curtain and H ZWART. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, volume 21. Springer-Verlag New York, 1995. (Cité en page 27.)

[31] Jim M Cushing. *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics*, volume 20. Springer Science & Business Media, 2013. (Cité en page 8.)

[32] H. Deng and W. Wei. Stability analysis for optimal control problems governed by semilinear evolution equation. *Advances in Difference Equations*, 32(3) :277–296, (1979). (Cité en pages 57, 60, 62, 63, 64, 65, 66 et 67.)

[33] Hongyong Deng. Existence and stability analysis for nonlinear optimal control problems with 1-mean equicintinuous control. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 11(4) :1409–1422, (2015). (Cité en pages 57 et 67.)

[34] W. Desch, R. Grimmer, and W. Scharppacher. Some considerations for linear integrodifferential equation. *J.Mathematical Analysis and Applications*, 104(1) :219–234, (1984). (Cité en pages 19, 20 et 22.)

[35] M.A. Diallo and al. Contrôlabilité pour une classe d'équations integrodifférentielles dans un espace de banach. *Optimal Control, Applications and Methods.* (Cité en pages 13 et 69.)

[36] M.A. Diallo and al. Impulsive integro-differential equations with nonlocal conditions in banach spaces. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute.* (Cité en pages 13 et 69.)

[37] M.A. Diallo and al. Optimal control problem for some integrodifferential equation in banach spaces. *Optimal Control, Applications and Methods.* (Cité en page 69.)

[38] Hui-Sheng Ding, Ti-Jun Xiao, and Jin Liang. Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338(1) :141–151, 2008. (Cité en page 22.)

[39] Jennifer A Dixon. A nonlinear weakly singular volterra integro-differential equation arising from a reaction-diffusion study in a small cell. *Journal of computational and applied mathematics*, 18(3) :289–305, 1987. (Cité en page 7.)

[40] Q. Don, G. Li, and L. Zhu. Impulsive differential equations with nonlocal condition in general Banach spaces. *Advance in Differential equations*, 2012(1) :1–11, (2012). (Cité en pages 25, 40, 43 et 49.)

[41] Kirk Donald. Optimal control theory : An introduction. *Mineola, NY : Dover Publications, Inc*, 1970. (Cité en page 12.)

[42] AL Dontchev and WW Hager. Lipschitzian stability for state constrained nonlinear optimal control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 36(2) :698–718, 1998. (Cité en page 55.)

[43] José Paulo C Dos Santos. Existence results for a partial neutral integro-differential equation with state-dependent delay. *EJ Qualitative Theory of Diff. Equ*, 29 :1–12, 2010. (Cité en page 22.)

[44] E.Hille and R.S.Phillips. *Functional analysis and semi-groups*, volume 31. American Mathematical Society, Colloquium Publucations, (1957). (Cité en page 18.)

[45] M El-Doma. Analysis of nonlinear integro-differential equations arising in age-dependent epidemic models. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 11(8) :913–937, 1987. (Cité en page 8.)

[46] Klaus-Jochen Engel and Rainer Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194. Springer Science & Business Media, 2000. (Cité en page 17.)

[47] N.Dunford et I.E.Segal. Semigroups of operators and the weierstrass theorem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52 :911–914, (1946). (Cité en page 18.)

[48] K. Ezzinbi, H. Toure, and I. Zabsorne. Existence and regularity of solutions for some partial functional integrodifferential equations in Banach spaces. *Nonlinear Analysis*, 70(7) :2761–2771, (2009). (Cité en page 29.)

[49] Caroline Fabre, Jean-Pierre Puel, and Enrike Zuazua. Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 125(01) :31–61, 1995. (Cité en page 29.)

[50] HO Fattorini. On complete controllability of linear systems. *Journal of Differential Equations*, 3(3) :391–402, 1967. (Cité en page 28.)

[51] M. K. Fort. Points of continuity of semicontinuous functions. *Publ. Math. Debrecen*, 2 :100–102, (1951). (Cité en pages 55 et 56.)

[52] Raju K George. Approximate controllability of nonautonomous semilinear systems. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 24(9) :1377–1393, 1995. (Cité en page 28.)

[53] Jerome A Goldstein. *Semigroups of linear operators and applications*. Oxford University Press, USA, 1985. (Cité en pages 17 et 18.)

[54] L. Górniewicz, S.K. Ntouyas, and D. O'regan. Controlability of semilinear differential equation and inclusions via semigroup theory in Banach spaces. *Reports on Mathematical Physics*, 56(3) :437–470, (2005). (Cité en page 29.)

[55] R. Grimmer. Resolvent opérateurs for integral equation in a Banach space. *Transaction of the American Mathematical Society*, 273(1) :333–349, (1982). (Cité en pages 12, 13, 21, 22, 30, 40 et 57.)

[56] R. Grimmer and A.J. Pritchard. Analytic resolvent operator for integral equation in Banach space. *J.Differential Equations*, 50(2) :234–259, (1983). (Cité en pages 20 et 22.)

[57] R. Grimmer and J. Pruss. On linear Voltera equation in Banach spaces. *Comput. Math. Appl.*, 11(1) :189–205, (1985). (Cité en pages 20, 21, 22 et 58.)

[58] Morton E Gurtin. On the thermodynamics of materials with memory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 28(1) :40–50, 1968. (Cité en page 6.)

[59] Morton E Gurtin and Allen C Pipkin. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 31(2) :113–126, 1968. (Cité en pages 5 et 6.)

[60] Audrey Hermant. Stability analysis of optimal control problems with a second-order state constraint. *SIAM Journal on Optimization*, 20(1) :104–129, 2009. (Cité en page 55.)

[61] Eduardo Hernández, Hernán R Henrıquez, and José Paulo C dos Santos. Existence results for abstract partial neutral integro-differential equation with unbounded delay. *Electr. J. Qualitative Th. Diff. Equa*, 29 :1–23, 2009. (Cité en page 22.)

[62] Mimmo Iannelli and Andrea Pugliese. Mathematical modeling of epidemics. In *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*, pages 209–264. Springer, 2014. (Cité en page 8.)

[63] G.Z. Yuan J. Yu and G. Isac. The stability of solutions for differential inclusions and differential equations in the sense of baire category theory. *Appl. Math. Lett.*, 11(4) :51–56, (1998). (Cité en pages 56 et 66.)

[64] K. Tan J. Yu and X.Z. Yuan. The stability of ky fan's points. *Proceedings of the American Mathematicals Society*, 123(5) :1511–1519, (1995). (Cité en pages 56, 64 et 65.)

[65] Z. X. Liu J. Yu and D. T. Peng. Existence and stability analysis of optimal control. *Optimal Control Applications and Methods*, 35(6) :721–729, (2014). (Cité en pages 56 et 65.)

[66] Shaochun Ji and Shu Wen. Nonlocal cauchy problem for impulsive differential equations in banach spaces. *Int. J. Nonlinear Sci*, 10(1) :88–95, 2010. (Cité en page 40.)

[67] MC Joshi and N Sukavanam. Approximate solvability of semilinear operator equations. *Nonlinearity*, 3(2) :519, 1990. (Cité en page 28.)

[68] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, and P. Zecca. *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces.* Walter de Gruyter, (2001). (Cité en pages 22, 24, 25 et 43.)

[69] J Klamka. Schauder's fixed-point theorem in nonlinear controllability problems. *Control and Cybernetics*, 29 :153–165, 2000. (Cité en page 27.)

[70] JERZY KLAMKA. Constrained controllability of nonlinear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 12(3) :245–252, 1995. (Cité en page 29.)

[71] Jerzy Klamka. Constrained controllability of nonlinear systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 201(2) :365–374, 1996. (Cité en page 29.)

[72] V Kolmanovskii and A Myshkis. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*, volume 463. Springer Science & Business Media, 2013. (Cité en page 8.)

[73] Vadim Krotov. *Global methods in optimal control theory*, volume 195. CRC Press, 1995. (Cité en page 12.)

[74] K.Yosida. On the diïňĂerentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. *Journal of the Mathematical Socitey of Japan*, 1 :15–21, (1948). (Cité en page 18.)

[75] James R Leigh. Functional analysis and linear control theory. 1980. (Cité en page 12.)

[76] James R Leigh. *Control theory*, volume 64. Iet, 2004. (Cité en page 12.)

[77] X. J. Li and J. M. Yong. *Optimal Control Theory for InïňĄnite Dimensional Systems*. Birkhauser, Boston, (1995). (Cité en page 57.)

[78] J. Liang, J.H. Liu, and T.J Xiao. Nonlocal problems for integrodifferential equations. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series A*, 15(6) :815–824, (2008). (Cité en pages 22 et 29.)

[79] J. Liang, J.H. Liu, and T.J Xiao. Nonlocal impulsive problems for nonlinear differential equations in Banach spaces. *Math. Comput. Modeling*, 49(3) :798–804, (2009). (Cité en page 40.)

[80] J.H. Liu. Nonlinear impulsive evolution equations. *Dynamics of Continuous Discrete Impulsive Systems*, 6(1) :77–85, (1999). (Cité en page 39.)

[81] AS Lodge, JB McLeod, and JA Nohel. A nonlinear singularly perturbed volterra integrodifferential equation occurring in polymer rheology. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 80(1-2) :99–137, 1978. (Cité en page 6.)

[82] Eberhard Malkowsky and Vladimir Rakocevic. An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness. *Zbornik radova, Matematicki institut SANU*, 9(17) :143–243, 2000. (Cité en page 25.)

[83] R.H. Martin. Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces. (1976). (Cité en page 45.)

[84] Robert-H Martin Jr. Nonlinear operators and differential equations in banach spaces. 1976. (Cité en page 12.)

[85] M MCKIBBON. Controllability of abstract evolution systems with nonlocal initial data. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 4(3) :317–343, 2000. (Cité en page 28.)

[86] RK Miller. An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 66(2) :313–332, 1978. (Cité en page 6.)

[87] Koichiro Naito. Controllability of semilinear control systems dominated by the linear part. *SIAM Journal on control and Optimization*, 25(3) :715–722, 1987. (Cité en page 28.)

[88] Koichiro Naito. Approximate controllability for trajectories of semilinear control systems. *Journal of Optimization theory and Applications*, 60(1) :57–65, 1989. (Cité en page 28.)

[89] Koichiro Naito. Feedback controllability of a semilinear control system. *Control, theory and advanced technology*, 7(2) :217–236, 1991. (Cité en page 28.)

[90] Jace W Nunziato. On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math*, 29(187-204) :69, 1971. (Cité en page 5.)

[91] A. Pazy. *Semigroups of linear Operators and Application to Partial DiïňĂerential Equations*. Applied Mathematical sciences, (1983). (Cité en pages 15, 16, 18 et 20.)

[92] G Peichl and W Schappacher. Constrained controllability in banach spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(6) :1261–1275, 1986. (Cité en page 29.)

[93] S Joe Qin and Thomas A Badgwell. An overview of industrial model predictive control technology. In *AIChE Symposium Series*, volume 93, pages 232–256. Citeseer, 1997. (Cité en page 11.)

[94] W. Rudin. *Functional analysis*. Internat. Ser. Pure Appl. Math, (1991). (Cité en page 65.)

[95] Eduardo D Sontag. *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, volume 6. Springer Science & Business Media, 2013. (Cité en page 12.)

[96] T.Cazenav and A.Haraux. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, volume 13. Oxford University Press on Demand, (1998). (Cité en pages 17 et 18.)

[97] Kok Lay Teo, C Goh, and K Wong. A unified computational approach to optimal control problems. 1991. (Cité en page 55.)

[98] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert, 2008. (Cité en page 12.)

[99] W.Feller. On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators. *Annals of Mathematics*, 58 :166–174, (1953). (Cité en page 18.)

[100] M Yamamoto and JY Park. Controllability for parabolic equations with uniformly bounded nonlinear terms. *Journal of Optimization theory and Applications*, 66(3) :515–532, 1990. (Cité en page 28.)

[101] Qi Zhou. Exact internal controllability of maxwellâĂŹs equations. *Japan journal of industrial and applied mathematics*, 14(2) :245–256, 1997. (Cité en page 29.)