Université Cheikh Anta DIOP de DAKAR

Faculté des Sciences et Techniques
Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique

THESE UNIQUE

Spécialité : Mathématiques Pures
Option : Codages, Cryptographie, Algèbre et Applications
THEME :

LOCALISATION ET ALGEBRE DES POLYNOMES DANS UN DUO-ANNEAU

PROPRIETES HOMOLOGIQUES DU FONCTEUR $S^{-1}()$

Présentée et soutenue publiquement le 14 Mai 2016 à 09 H - Amphi 3

Par

Daouda FAYE

Sous la direction de Messieurs

Mohamed BEN MAAOUIA, Maitre de Conférences à l'UGB

Et

Mamadou SANGHARE, Professeur à l'UCAD

Devant le Jury composé de :

Président :	Mamadou	BARRY	Professeur	UCAD
Rapporteurs :	Sidy Demba	TOURE	Maitre de Conférences	UCAD
	Abdelmalek	AZIZI	Professeur	UMP-MAROC
	Abdellatif	ROCHDI	Professeur	UH2- MAROC
Examinateurs :	Cheikh Thiécoumba	GUEYE	Professeur	UCAD
	Oumar	DIANKHA	Professeur	UCAD
Directeurs :	Mohamed	BEN MAAOUIA	Maître de Conférences	UGB
	Mamadou	SANGHARE	Professeur	UCAD

Année universitaire 2014 – 2015

DEDICACES

Je rends grâce à ALLAH et à son PROPHETE (PSL).

A

Mes Parents qui ont tout investi pour ma réussite et qui m'ont sevré sans avoir goûté le fruit de leur investissement (que le PARADIS soit leur récompense !),

Ma famille qui m'a toujours soutenu sans faille dans la patience et la persévérance,

Mes frères et sœurs dont le lien ombilical qui nous a toujours guidés demeure le ciment de nos relations,

Tous mes amis qui m'ont toujours accompagné et soutenu,

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

Un travail de cette envergure est l'aboutissement d'un long processus. Sa réalisation est le fruit des efforts consentis par plusieurs personnes à qui j'adresse mes sincères remerciements.

Il s'agit particulièrement de mon Directeur de thèse Monsieur Mohamed BEN MAAOUIA, Maître de Conférences à l'Université Gaston Berger de Saint-Louis, à qui je rends un vibrant hommage. Sa rigueur, sa science et sa patience tout le long de ce processus ont fini par forger le respect et m'ont donné le goût de la recherche.

J'aimerais aussi lui témoigner toute ma reconnaissance ainsi qu'à sa famille pour leur soutien moral et leur contribution matérielle qui ont été déterminants.

Je remercie autant mon Co-directeur de thèse le Professeur Mamadou SANGHARE, Directeur de l'Enseignement Supérieur qui, malgré ses nombreuses charges professionnelles, a accepté de m'encadrer avec philosophie et méthode. Nous lui serons toujours reconnaissant pour avoir mis en place le Laboratoire d'Algèbre, de Cryptographie, de Géométrie Algébrique et Applications (LACGAA) dont la performance a fini par repousser les frontières de l'algèbre fondamentale et ses applications.

Monsieur Mamadou BARRY, Professeur et Chef du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de l'Université Cheikh Anta Diop m'a bien honoré en acceptant de présider ce jury, je l'en remercie très vivement.

Que Monsieur Cheikh Thiécoumba GUEYE, Professeur émérite au Département de Mathématiques et Informatique trouve en ces termes, l'expression de mes vifs remerciements pour m'avoir rendu beaucoup de services administratifs et pour avoir accepté d'évaluer ce travail en qualité d'examinateur dans le jury.

Je remercie également Monsieur Sidy Demba TOURE, Maître de Conférences au Département de Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences de l'Uni-

versité Cheikh Anta Diop pour son ouverture, sa disponibilité légendaire et pour avoir accepté d'évaluer ce travail de recherche en qualité de rapporteur et de membre du jury.

Monsieur Oumar DIANKHA, Professeur au Département de Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences de l'Université Cheikh Anta Diop, notre grand-frère, m'a été d'un très grand apport dans ce processus par sa sagesse et sa disponibilité. Je le remercie vivement pour avoir accepté de participer au jury.

Ma vive reconnaissance s'adresse aussi aux Professeurs Abdellatif ROCHDI et Abdelmalek AZIZI des Universités Hassane II et Mohamed Premier du Maroc pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté d'évaluer ce travail en qualité de rapporteurs et d'avoir participé au jury.

Que le Professeur Djiby SOW, mon promotionnaire et ami depuis nos années de galère voit en ces quelques lignes l'expression d'une reconnaissance exceptionnelle pour toutes les discussions très enrichissantes et les conseils qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer. J'aimerais joindre à ma voix celles de ceux qui n'ont pas la possibilité de le faire et qui le pensent pour lui adresser un merci chaleureux pour l'illustre exemple qu'il représente dans la communauté des anciens professeurs du moyen-secondaire.

Je souhaiterais également que tous les enseignants-chercheurs, les étudiants et les doctorants du Laboratoire d'Algèbre, de Cryptographie, de Géométrie Algébrique et Applications (LACGAA) de l'UCAD et du Laboratoire de Codes, Cryptographie, Algèbre et Applications (LACCA) de l'UGB acceptent mes remerciements pour leur soutien à l'édification de cette thèse.

J'exprime ma profonde gratitude à l'endroit du Professeur Moussa LO, Coordonnateur du Centre d'excellence CEA-MITIC de l'UFR SAT de l'Université Gaston Berger de Saint-Louis pour tout son soutien et son assistance pour la publication des

mes articles et l'appui pour les voyages à Dakar de mon Directeur de Thèse, le Pr. Mohamed BEN MAAOUIA.

Mes remerciements vont également à tous mes collègues et au personnel administratif du Lycée Blaise Diagne, du Collège Notre Dame du Liban et de l'Ecole Supérieure Polytechnique (ESP) que je ne saurais tous citer, de peur d'en oublier, pour leur soutien et leur sollicitude. Ils ont toujours fait preuve de compréhension durant mes nombreux voyages de recherche à Saint-Louis.

Je réserve une place de choix à mes tous mes amis, tous mes camarades syndicaux et politiques dans ces remerciements pour leurs soutiens moraux et matériels déterminants pour la réussite de ce projet. Je ne saurais ne pas citer le Doyen Abdoulaye GUEYE, membre fondateur de l'UDEN et de la Ligue Démocratique (LD), Mamadou DIOP "Castro", ancien Secrétaire Général de l'UDEN et Mamadou NDOYE, Premier Secrétaire Général de l'UDEN et Secrétaire Général de la LD pour le rôle exemplaire qu'ils ont joué dans ma formation syndicale et politique. Ils m'ont toujours fait comprendre que la carrière d'un homme doit être une priorité sur ses activités sociétales. Qu'ils trouvent tous en cette œuvre, l'expression d'une satisfaction morale.

Enfin, que mon épouse et mes enfants trouvent en ces mots, l'expression de ma profonde gratitude et ma reconnaissance infinie pour toutes les peines qui ont été les leurs pendant mes multiples déplacements. Je ne saurais ne pas donner une mention spéciale à mon fils ainé Arfang FAYE qui a fait des nuits blanches pour saisir cette thèse. Chère épouse et chers enfants, merci pour tous les sacrifices consentis !

Table des matières

Introduction

Cette thèse s'inspire des questions ouvertes des travaux de Monsieur Mohamed BEN MAAOUIA, Maitre de Conférences à l'UGB de Saint-Louis (thèse 3ème cycle, thèse d'Etat et articles). En effet, la problématique qui sous-tend ce travail de recherche est la suivante : dans un anneau commutatif A*, on peut construire un anneau de fractions à partir d'une partie non vide* S *de* A *ne contenant pas zéro en considérant la partie multiplicative saturée* $\overline{S}$ *engendrée par* S *. Dans le cas où l'anneau* A *n'est pas commutatif, il n'est pas évident que* $\overline{S}$ *existe, soit saturée et vérifie les conditions de Ore, ce qui est une condition nécessaire et suffisante (établie dans sa thèse d'Etat) pour pouvoir construire l'anneau de fractions* $(\overline{S})^{-1}A$ *et le module de factions* $(\overline{S})^{-1}M$ *pour tout* A*-module* M*. Cependant, dans le cas où* A *est un duo-anneau, nous avons établi que si* S *est formée d'éléments réguliers, alors* $\overline{S}$ *est une partie multiplicative saturée qui vérifie les Conditions de Ore. Alors, comment construire,s'ils existent l'anneau de fractions* $S^{-1}A$ *et le module de factions* $S^{-1}M$ *? Par ailleurs, les foncteurs* $S^{-1}A \otimes_A -$ *et* $Hom_A(S^{-1}A, -)$ *sont adjoints (établi dans sa thèse d'Etat). Les foncteurs* $Tor_0^A(S^{-1}A, -)$ *et* $Ext_A^0(S^{-1}A, -)$ *sont alors adjoints compte tenu des isomorphismes entre* $Tor_0^A(S^{-1}A, -)$ *et* $S^{-1}A \otimes_A -$ *d'une part et entre* $Ext_A^0(S^{-1}A, -)$ *et* $Hom_A(S^{-1}A, -)$ *d'autre part. Peut-on alors généraliser ce résultat pour tout entier naturel* n *et pour tout* A*-module* M *? En d'autre terme, les foncteurs* $Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, -)$ *et* $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, -)$ *où* B *est un anneau,* A *un sous-anneau de* B*,* S *une partie multiplicative saturée de* A *vérifiant les conditions de Ore à gauche et* M *un* A*-module à gauche sont-ils adjoints ?*

Nous avons répondu à ces différentes questions entre autres dans ce travail de recherche.

Ainsi, cette thèse est organisée de la manière suivante :

Le ***chapitre 1*** *est un rappel sur les anneaux et modules de fractions, le foncteur* $S^{-1}()$ *et les foncteurs dérivés EXT et TOR.*

Dans le ***chapitre 2****, sauf mention contraire,* A *désigne un duo-anneau,* M *un* A*-module à gauche et* S *une partie non vide de* A *formée d'éléments réguliers.*

Dans leurs travaux, beaucoup d'auteurs ont construit des anneaux de fractions dans le cas commutatif à partir d'une partie multiplicative S d'un anneau commutatif A (voir [1] et [26]). Dans [26],J.J.ROTMAN a construit, dans le cas commutatif, l'anneau de fractions $S^{-1}A$ et le module de fractions $S^{-1}M$ où S est une partie non vide quelconque de A en utilisant la parie multiplicative saturée $\overline{S}$. engendrée par S.
Dans ses travaux, Pr. Mohamed BEN MAAOUIA a construit, dans le cas où A n'est pas nécessairement commutatif, l'anneau des fractions $S^{-1}A$ et le module de fractions $S^{-1}M$ relativement à une partie multiplicative saturée S qui vérifie les conditions de Ore à gauche (voir [21] [22] et[23]).
Dans la ***section 1*** *de ce chapitre, nous construisons, dans le cas où A n'est pas nécessairement commutatif, l'anneau des fractions $S^{-1}A$ relativement à une partie non vide S formée d'éléments réguliers de A.*
Ainsi nous avons montré les résultats suivants :

1) $\overline{S}$, la partie multiplicative saturée engendrée par S vérifie les conditions de Ore à gauche.

2) L'idéal $\langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S}$ de l'algèbre des polynômes à S variables $A\left[(X_s)_{s\in S}\right]$ engendré par l'ensemble des polynômes $\{1 - sX_s, s \in S\}$ est bilatère.

3) $S^{-1}A$ existe et $S^{-1}A = A\left[(X_s)_{s\in S}\right]/\langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S}$.

4) $S^{-1}A \cong \left(\overline{S}\right)^{-1}A$.

Dans la **section 2** de ce chapitre, nous construisons le module de fractions $S^{-1}M$ et nous avons montré les résultats suivants :

1) En posant $S^{-1}M = (\overline{S})^{-1}M$, on a $S^{-1}M \cong \left(\overline{S}\right)^{-1}A \otimes_A M$.
Par conséquent $S^{-1}M \cong A\left[(X_s)_{s\in S}\right]/\langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S} \otimes_A M$.

2) $S^{-1}Tor_n^A(M, M')\cong Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$ où n est entier naturel

3) $S^{-1}Ext_A^n(M, BM') \cong Ext_{S^{-1}A}^n(S^{-1}M, S^{-1}M')$ où n est entier naturel et M est un A-module de type fini.

Le chapitre 2 a fait l'objet d'un article accepté par la revue américaine Springer et en instance de publication.

Dans le **chapitre 3** sauf mention contraire, A désigne un anneau associatif unitaire (non nécessairement commutatif), M et M' des A-modules à gauche (respectivement à droite), S une partie multiplicative non vide saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche (respectivement à droite)et $S^{-1}M$ un module de fractions à gauche(respectivement à droite) de M en S.

En utilisant les résultats sur la localisation notamment l'isomorphisme des foncteurs $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}(A) - Mod$ et $S^{-1}A \ \otimes_A - : A - Mod \longrightarrow S^{-1}(A) - Mod$ et la conservation de la projectivité du foncteur $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}(A) - Mod$ (voir [20], [21], [23]), nous avons montré les résultats suivants :

1) $S^{-1}Hom_A(A^n, M) \cong S^{-1}A \otimes_A Hom_A(A^n, M)$,
2) $Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A^n, S^{-1}M))$ est un $S^{-1}(A)$-module à gauche isomorphe au $S^{-1}(A)$-module $S^{-1}Hom_A(A^n, M)$,
3) $S^{-1}Tor_n^A(M, M') \cong Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$
4) $S^{-1}Ext_A^n(M, M') \cong Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$ où A est noethérien et M est de type fini.

   De plus si A est un duo-anneau et P un idéal premier de A et $M_P = S^{-1}M$ le module de fractions de M en S où S est l'ensemble des éléments réguliers de $A - P$, alors :
5) $Tor_n^A(M, N)_P \cong \ Tor_n^{A_P}(M_P, N_P)$ et
6) $Ext_A^n(M, N)_P \cong \ Ext^n_{A_P}(M_P, N_P)$ où A est noethérien et M est de type fini.
7) $Tor^n_{S^{-1}A}(S^{-1}A, M)$ est un A-module à gauche et $Ext_n^{S^{-1}A}(S^{-1}A, M)$ est un A-module à droite.

Le chapitre 3 a fait l'objet d'un article soumis dans le journal Afrika Mathematika.

Dans le **chapitre 4**, sauf mention contraire, B désigne un anneau associatif unitaire (non nécessairement commutatif), A un sous-anneau de B, ${}_AM$ un A-module

à gauche de type fini, ${}_AN_B$ un (A, B)- bimodule de type fini et P_B un B-module à droite , S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche.
La notion de foncteur adjoint à $S^{-1}()$ et les relations entre le foncteur $S^{-1}()$ et les foncteurs homologiques $Ext^n_A(M, -)$, $Ext^n_A(-, M)$ et $Tor^A_n(M, -)$ ont été établies par plusieurs auteurs (voir $[2]\,, chapIV$ et $[8]\,, chapVIIIetXI$).
Dans le cas où l'anneau est non nécessairement commutatif, M. BEN MAAOUIA, avec une partie multiplicative saturée S de A vérifiant les conditions de Ore à gauche, a établi dans ses travaux que le foncteur $S^{-1}()$ est isomorphe au foncteur $S^{-1}A \otimes_A -$ et que le foncteur $S^{-1}()$ est adjoint au foncteur $Hom_A(S^{-1}A-)$ (voir $[4]\,, chapI$ et [5]).
Nous savons que(voir [9]) le foncteur $Ext^0_A(M, -)$ est équivalent au foncteur $Hom_A(M-)$, $Ext^0_A(-, M)$ est équivalent au foncteur $Hom_A(-, M)$ et $Tor^A_0(M, -)$ est équivalent au foncteur $M \otimes_A -$ qui est isomorphe au foncteur $S^{-1}()$.
Ainsi $Ext^0_{S^{-1}A}(S^{-1}A, -)$ est adjoint à $S^{-1}()$ et $Tor^{S^{-1}A}_0(S^{-1}A, -)$ est isomorphe à $S^{-1}()$.
L'objet de ce chapitre est alors d'établir une généralisation de ces propriétés entre le foncteur $S^{-1}()$ et les fonteurs $Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, -)$ et $Tor^{S^{-1}A}_n(S^{-1}M, -)$ respectivement pour tout entier naturel n.
Ainsi nous avons établi les résultats suivants :

1)

$$Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N \otimes_A S^{-1}M, S^{-1}P) \cong Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M, Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, S^{-1}P)$$

2) Si P est injectif, alors on a l'isomorphisme :

$$Ext^n_A(M, Hom_B(N, P)) \cong Hom_B(Tor^A_n(M, N), P)$$

3) Si P est injectif, alors :

$$Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}N, S^{-1}P)) \cong Hom_{S^{-1}B}(Tor^{S^{-1}A}_n(S^{-1}M, S^{-1}N), S^{-1}P)$$

4) Si A est noethérien et P est injectif, alors :

$$Tor_n^A(Hom_B(N,P),M) \cong Hom_B(Ext_A^n(M,N),P)$$

5) $Tor_n^{S^{-1}A}(Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}N,S^{-1}P),S^{-1}M) \cong Hom_{S^{-1}B}(Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N),S^{-1}P)$

6) Si B est noethérien, $S^{-1}A$ l'anneau des fractions de A en S. Alors, pour tout entier naturel n, les foncteurs $Ext^n_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-)$ et $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M,-)$ sont adjoints.

Le chapitre 4 a fait l'objet d'un article publié par la revue "International Mathematical Forum", Vol. 16, 2016, no. 5, 227 - 237, HIKARI Ltd .

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS SUR LA LOCALISATION ET SUR L'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Introduction

Dans ce chapitre, composé de deux sections, nous rappelons les résultats essentiels de la localisation dans un anneau non nécessairement commutatif et de l'algèbre homologique.
Ainsi dans la **section 1**, nous définissons la partie multiplicative saturée $\overline{S}$ engendrée par une partie multiplicative S d'un anneau A vérifiant les conditions de Ore à gauche(respectivement à droite)et nous rappelons (voir [21]) que dans un duo-anneau A, $\overline{S}$ existe pour toute partie multiplicative S formée d'éléments réguliers.
Nous définissons ensuite l'anneau de fractions $(S^{-1}A, i_A^S)$ à gauche (respectivement à droite) d'un anneau quelconque A relativement à une partie multiplicative saturée S de A vérifiant les conditions de Ore à gauche (respectivement à droite) à isomorphisme près où $i_A^S : A \to S^{-1}A$ est un morphisme d'anneaux, appelé morphisme canonique, vérifiant les conditions de la **définition 1.1.8**.

Nous montrons ensuite la transitivité de la localisation :étant donnés deux anneaux A et B, S et T, deux parties multiplicatives saturées de A et B respectivement vérifiant les conditions de Ore à gauche, $f : A \to B$ un homomorphisme tel que $f(S) \subset T$, $(S^{-1}A, i_A^S)$ et $(T^{-1}B, i_B^T)$, les anneaux de fractions de A en S et B en T respectivement, alors il existe un homomorphisme $\overline{f} : S^{-1}A \to S^{-1}B$ tel que $\overline{f}(\frac{a}{1}) = \frac{f(a)}{1}$ pour tout a élément de A et de plus $(T^{-1}B, \overline{f} o i_A^S$ est un anneau de fractions à gauche de A en S.
Nous définissons également le module de fractions $(S^{-1}M, h_M$ à isomorphisme près où $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$-module et $h_M : M \longrightarrow S^{-1}M$ est le morphisme canonique.
On rappelle ensuite que le foncteur $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}A - Mod$ est covariant, additif, exact et préserve la projectivité.
Dans la **section 2**, nous rappelons d'abord le vocabulaire de l'algèbre homologique notamment les notions de catégorie, de foncteur, de suite et chaine complexe, de résolution injective et projective, de catégorie Comp et de foncteur homologie H_n.
Nous rappelons également la définition la définition des modules injectif, projectif et plat et leurs caractérisations, nécessaire à l'élaboration des **chapitres 3 et 4**.
Nous rappelons enfin les définitions des foncteurs dérivés Ext et Tor et leurs propriétés essentielles.

1.1 Section 1 : Anneaux et modules de fractions

1.1.1 Définition : Duo-anneau

Soit A un anneau, A est dit :

- duo-anneau à gauche si tout idéal à gauche est bilatère
- duo-anneau à droite si tout idéal à droite est bilatère
- duo-anneau s'il est duo-anneau à gauche et à droite

1.1.2 Proposition

A est un duo-anneau si et seulement si $\forall a \in A, aA = Aa$

Preuve (voir [3])

1.1.3 Définition : Partie multiplicative

Soit A un anneau et S une partie non vide de A. On dit que :

— S est une partie multiplicative de A si $1_A \in S$ et S est stable par multiplication, c'est à dire pour tout x, $t \in S$ $xt \in S$

— S est une partie multiplicative saturée si : pour tous x, $t \in A$, $xt \in S$ implique $x \in S$ S et $t \in S$.

1.1.4 Définition : Conditions de Ore

Soit S une partie multiplicative saturée d'un anneau A. On dit que S vérifie les conditions de Ore à gauche (respectivement à droite) si :

1. $\forall a \in A, \forall s \in S$, ils existent $t \in S$ et $b \in A$ tels que $ta = bs$ (respectivement $at = sb$). On dit que S est permutable à gauche (respectivement à droite).
2. $\forall a \in A, \forall s \in S$ tel que $as = 0$ (respectivement $sa = 0$), alors il existe $t \in S$ tel que $ta = 0$ (respectivement $at = 0$) . On dit que S est réversible à gauche (respectivement à droite).

1.1.5 Exemple

— L'ensemble des éléments réguliers (c'est à dire non diviseurs de zéro) d'un duo-anneau A est une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite (voir [21]) ;

— Si s est un élément régulier d'un duo-anneau A, l'ensemble
$S = \{s^k, k \in N\}$ est une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche et a droite (voir [21]).

— Si A est un anneau et P un idéal premier de A, alors le complémentaire de P est une partie multiplicative saturée de A (voir [21]).

— Si P est un idéal premier de A ; alors l'ensemble des éléments réguliers du complémentaire de P est une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite (voir [21]).

En particulier Si A est un duo-anneau intègre , alors :

— $A - \{0\}$ est une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore a gauche et à droite.(voir [21])

— Si P est un idéal premier de A alors $A - P$ est une partie multiplicative de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite.

1.1.6 Définition

Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A.
On appelle partie multiplicative saturée engendrée par S, la plus petite partie multiplicative saturée contenant S notée $\overline{S}$ si elle existe.

1.1.7 Proposition

Soit A un duo-anneau et S une partie multiplicative non vide de A formée d'éléments réguliers. Alors S engendre une partie multiplicative saturée $\overline{S}$ qui vérifie les conditions de Ore.

Preuve

Soit F l'ensemble des parties saturées de A contenant S et qui vérifient les conditions de Ore à gauche. F n'est pas vide, en effet, l'ensemble des éléments réguliers de A est une partie multiplicative saturée de A contenant S et qui vérifie les conditions de Ore(voir [21]).
Donc la plus petite partie multiplicative saturée de A contenant S et qui vérifient les conditions de Ore est appelée partie multiplicative saturée engendrée par S.

1.1.8 Exemples

- Si S est une partie multiplicative saturé qui vérifie les conditions de Ore, alors $\bar{S} = S$.
- Soit A un duo-anneau et s un élément régulier de A, on a $\bar{S} = \{1, s, s^1, s^2, s^3, \cdots\}$

1.1.9 Définition

Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A. Un anneau B est dit anneau de fractions à gauche de A par rapport à S s'il existe un morphisme d'anneaux $i : A \to B$ vérifiant :

1. $\forall\ s \in S, i(s)$ est inversible dans B
2. $\forall\ b \in B$, il existe $a \in A$ et $s \in S$ tels que $b = i(s)^{-1}i(a)$
3. Si $i(a) = 0$, alors $sa = 0 \forall\ s \in S$.

1.1.10 Notation et Définition

S'il existe un anneau B vérifiant les conditions de la **Définition 1-1-8**, on dit que (B, i) est un anneau de fractions à gauche de A relativement à S.
Si S est une partie multiplicative saturée de A et si l'anneau de fractions de A en S existe, on le note par $(S^{-1}A, i_A^S)$ ou $S^{-1}A$ s'il n'y a pas de confusion où $i_A^S : A \to S^{-1}A$ est le morphisme canonique. Si $a \in A$, on note $i_A^S(a) = \frac{a}{1}$.

1.1.11 Remarques

1. Lorsque A n'est pas intègre, l'application $i_A^S : A \to S^{-1}A$ n'est pas nécessairement injective.
   Par exemple soit $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $P = \langle\overline{2}\rangle = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\}$. C'est un idéal maximal de A car $A/P \cong Z/2Z$ qui est un corps. Donc $A/P = \left\{\ \overline{1}, \overline{-1}, \overline{3}\right\}$ est une partie

multiplicative.
Comme $\overline{2}.\overline{3} = 0$ alors le noyau de i_A^S contient $\overline{2}$ donc $\ker(i_A^S) = P \neq \{\overline{0}\}$. Par conséquent i_A^S n'est pas injectif.

2. Le noyau de i_A^S est l'ensemble des éléments $a \in A$ tels qu'il existe $s \in \overline{S}$ vérifiant $s.a = 0$

3. S'il existe dans S des éléments nilpotents, on a $0 \in S$ et $S^{-1}A = \{0\}$

1.1.12 Proposition

Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A. Supposons que A admet un anneau de fractions à gauche $(S^{-1}A, i_A^S)$ relativement à S.
Alors l'application $i_A^S : A \to S^{-1}A$ est :

1. injectif si et seulement si S ne contient aucun diviseur de zéro
2. bijectif si et seulement tout élément $s \in S$ est inversible dans A

Preuve (voir [21])

1.1.13 Proposition (Propriété universelle des anneaux de fractions)

Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A. Supposons que A admet un anneau de fractions à gauche (B, i) relativement à S. Alors pour tout anneau B' et pour tout morphisme d'anneaux $f : A \to B'$ tel $f(s)$ soit inversible dans B' pour tout $s \in S$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\overline{f} : B \to B'$ tel que $\overline{f} o i = f$, en d'autres termes $\overline{f}$ rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B' \\ B \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"] & \end{tikzcd}$$

Preuve

Si $\overline{f}$ existe, on a nécessairement, pour tout $a \in A$,
$\overline{f}oi(a) = f(a)$. Alors pour $s \neq 0$, $1 = \overline{f}(1) = \overline{f}(i(s)i(s)^{-1}) = f(s)\overline{f}(i(s)^{-1})$ entraine que $\overline{f}(i(s)^{-1}) = f(s)^{-1}$. Enfin, comme $\frac{a}{s} = i(a)i(s)^{-1}$, nécessairement $\overline{f}$ doit vérifier $\overline{f}(\frac{a}{s}) = f(a)f(s)^{-1}$
Ceci montre que $\overline{f}$, s'il existe, est nécessairement unique.
Montrons maintenant que $\overline{f}$ est bien définie. Si $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$, alors il existe $u \in S$ tel que $u(at - bs) = 0$ (voir [21]).
D'où $f(u)f(a)f(t) = f(uat) = f(ubs) = f(u)f(b)f(s)$. Comme $f(s),\ f(t),\ f(u)$ sont inversibles, on en déduit que $f(a)f(s)^{-1} = f(b)f(t)^{-1}$;
Donc $\overline{f}(\frac{a}{s}) = \overline{f}(\frac{b}{t})$, ce qui montre que $\overline{f}$ est bien définie. En outre, la relation montre que $\overline{f}$ est un homomorphisme d'anneaux.

1.1.14 Proposition

Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A .Supposons que (B, i) et (B', i') sont deux anneaux de fractions de A relativement à S. Alors $B \cong B'$.

Preuve

Soit (B, i) et (B', i) deux anneaux de fractions à gauche de A en S. Montrons que $B \cong B'$. Il suffit de montrer l'existence d'un isomorphisme $\varphi : B \longrightarrow B'$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"] & B' \\
B \arrow[ur, dashed, "\varphi"] &
\end{tikzcd}
$$

Comme (B, i) et (B', i') vérifient la propriété universelle de la localisation, il existe respectivement deux homomorphismes φ et φ' tels que $\varphi\, o\, i = i\,'$ et $\varphi'\, o\, i\,' = i$.
On a alors $\varphi'\, o\, (\varphi\, o\, i) = i \;\Rightarrow\; (\varphi' o \varphi)\, o\, i = i$. Donc pour tout $a \in A$, on a $i(a) = \frac{a}{s}$.
D'où pour tout $a \in A, (\varphi' o \varphi)\, o\, i(a) = i(a) \Rightarrow (\varphi' o \varphi)\, (\frac{a}{s}) = \frac{a}{s}$. Donc $\varphi'\, o \varphi = 1_B$.
De même , on montre que $\varphi\ o \varphi\,' = 1_{B'}$.
Par conséquent φ est un isomorphisme.

1.1.15 Proposition

Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée. Alors A admet un anneau de fraction à gauche si et seulement si A vérifie les conditions de Ore à gauche relativement à S.

Preuve (voir [21])

1.1.16 Définition et Proposition

Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. La relation R définie sur $S \times A$ par
$(s_1, a_1)R(s_2, a_2) \Leftrightarrow \exists t \in S$ tel que $t(s_1a_2 - s_2a_1) = 0$ est une relation d'équivalence.
Posons $S^{-1}A = S \times A/R$ le quotient de $S \times A$ par R et notons $(\overline{s, a}) = \frac{a}{s}$ la classe d'équivalence de (s, a). On définit sur $S^{-1}A$ les deux lois de composition internes suivantes :

$"+"$: $\frac{a}{t} + \frac{b}{s} = \frac{xa+yb}{yt}$ où $x, y \in S$ tel que $xt = ys$

$"\times"$: $\frac{a}{t} \times \frac{b}{s} = \frac{zb}{wt}$ où $(w, z) \in S \times A$ tels que $wa = zs$

Alors $(S^{-1}A, +, \times)$ est un anneau de fractions à gauche ou localisation de A en S

Preuve (voir [21])

1.1.17 Exemples

1) L'ensemble des éléments réguliers d'un anneau A forment une partie multiplicative saturée vérifiant les conditions de Ore (voir [21]) notée A^X. Alors $(A^X)^{-1}A$ est un anneau de fractions de A en A^X appelé anneau total des fractions de A. L'homomorphisme de localisation dans ce cas est injectif.Si A intègre, $(A^X)^{-1}A$ est un corps appelé corps des fractions de A

2) Si A est un duo-anneau intègre et P un idéal premier de A, alors $A - P$ est une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore (voir [21]) alors $(A - P)^{-1}A$ est un anneau de fractions appelé localisé de A en P, on le note A_P

1.1.18 Proposition (Transitivité des anneaux de fractions)

Soient A et B deux anneaux ; S et T deux parties multiplicatives saturées de A et B respectivement vérifiant les conditions de Ore à gauche, $f : A \to B$ un homomorphisme tel que $f(S) \subset T$.

1. Alors il existe un homomorphisme $\overline{f} : S^{-1}A \to S^{-1}B$ tel que $\overline{f}(\frac{a}{1}) = \frac{f(a)}{1}$ pour tout a élément de A.

2. Si de plus T est contenue dans la partie multiplicative de B engendrée par $f(S)$, alors si f est surjectif (respectivement injectif) alors il en est de même pour $\overline{f}$.

Preuve

1. Il s'agit de montrer qu'il existe un homomorphisme $\overline{f} : S^{-1}A \to T^{-1}B$ unique rendant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & A \xrightarrow{f} B & \\ i_A^S \downarrow & & \downarrow i_B^T \\ & S^{-1}A \xrightarrow{G(t)} T^{-1}B & \end{array}$$

Or la relation $f(S) \subset T$ entraine que $i_B^T(f(S))$ est inversible dans $T^{-1}B$ pour tout $s \in S$.

En appliquant la propriété universelle à l'anneau de fractions $(S^{-1}A, i_A^S)$, il existe un morphisme $g : S^{-1}A \longrightarrow B$ rendons le diagramme suivant commutatif : C'est-à- dire $f = g \circ i_A^S$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_A^S"] & B' \\ S^{-1}A \arrow[ur, dashed, "g"] & \end{tikzcd}$$

De même en appliquant la propriété universelle à $(T^{-1}B, i_B^T)$, il existe $\overline{f}$: $S^{-1}A \to T^{-1}B$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} S^{-1}A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "\bar{f}"] & B \arrow[d, "i_B^T"] \\ & T^{-1}B \end{tikzcd}$$

On a alors $\overline{f} = i_B^T \circ g$

Par conséquent le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} S^{-1}A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_A^S"] & B \arrow[d, "i_B^T"] \\ S^{-1}A \arrow[r, "\bar{f}"] & T^{-1}A \end{tikzcd}$$

On a alors $\overline{f} \circ i_A^S = i_B^T \circ f$ et pour
$a \in A$ $\overline{f} \circ i_A^S(a) = i_B^T \circ f(a) \Longrightarrow \overline{f}(\frac{a}{1}) = \frac{f(a)}{1}$
On déduit que pour tout $a \in A$ et $s \in S$, on a $\overline{f}(\frac{a}{s}) = \frac{f(a)}{f(s)}$ (1)

2. Supposons que T soit contenue dans une partie multiplicative engendré par $f(S)$ qui n'est rien d'autre que $\overline{f}(S)$. Il en résulte de (1) que si f est surjectif, il en est de même pour $\overline{f}$.
   Supposons maintenant que f est injectif. Soit $\frac{a}{s}$ un élément de noyau de $\overline{f}$. Comme la partie multiplicative engendrée par T est $f(\overline{S})$, il y a un élément $s_1 \in \overline{S}$, tel que $f(s_1)f(a) = 0$, d'où $f(s_1a) = 0$ et par suite $s_1a = 0$. Puisque f est injectif on a alors $\frac{a}{s} = 0$, ce qui montre que $\overline{f}$ est injectif

1.1.19 Proposition et Définition

Soient A un duo-anneau, M un A-module à gauche S un sous ensemble non vide de A formé d'éléments réguliers, s un élément de S. Alors l'application
$\mu_s : M \to M$
$m \mapsto sm$
est bijective pour tout $s \in S$ si et seulement si M est un $S^{-1}A$-module. On appelle module de fractions à gauche de M relativement à S, tout couple (P, h_p) où P est un $S^{-1}A$-module à gauche (c'est à dire

$\mu_s : P \to P$
$p \mapsto sp$
) est bijective pour tout $s \in S$ et $h_p : M \longrightarrow P$ appelé morphisme canonique, qui est solution du problème universel :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & P \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

C'est à dire si $\varphi : M \longrightarrow M'$ est un morphisme de A-module à gauche où M' est un $S^{-1}A$-module, alors il existe un unique morphisme $\overline{\varphi} : P \longrightarrow M'$ tels que $\overline{\varphi} \circ h = \varphi$

Notation

Le module de fractions à gauche de M relativement à S, s'il existe, est noté par $(S^{-1}M, h)$ ou $S^{-1}M$ s'il n'y a pas de confusion.

1.1.20 Proposition

Soit A un duo-anneau et S une partie non vide de A formée d'éléments réguliers. Alors si la localisation de M en S existe, il est unique à isomorphisme près.

Preuve

Soient (P, h) et (P', h') deux localisations de M en S. Montrons que $P \cong P'$. Il suffit de montrer l'existence d'un isomorphisme $\varphi : P \longrightarrow P'$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "h"] & P' \\ P \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Comme (P, h) et (P', h') vérifie la propriété universelle de la localisation, il existe respectivement deux homomorphismes φ et φ' tels que $\varphi \circ h = h'$ et $\varphi' \circ h' = h$. On a alors $\varphi' \circ (\varphi \circ h) = h \Longrightarrow (\varphi' \circ \varphi) \circ h = h$. D'où $\varphi' \circ \varphi = 1_P$ comme h est injectif. De même $\varphi \circ (\varphi' \circ h') = h' \Longrightarrow (\varphi \circ \varphi') \circ h' = h'$. D'où $\varphi \circ \varphi' = 1_{P'}$ comme h' est injectif, par conséquent φ est un isomorphisme

1.1.21 Proposition et Définition

Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. La relation binaire R définie sur $S \times A$ par
$(s, m)R(s', m') \Leftrightarrow \exists x, y \in S$ tel que

$$\begin{cases} xy &= ym' \\ xs &= ys' \end{cases}$$

est une relation d'équivalence. Posons $S^{-1}M = S \times M/R$ le quotient de $S \times M$ par R et notons $(\overline{s,m}) = \frac{m}{s}$ la classe d'équivalence de (s,m). Alors

1) $S^{-1}A$ est muni d'une structure d'anneau de manière que si $\frac{a}{t}$ et $\frac{b}{s} \in S^{-1}A$ alors $\frac{a}{t} + \frac{b}{s} = \frac{xa+yb}{yt}$ où $x, y \in S$ sont tels que $xt = ys$ et $\frac{a}{t} \times \frac{b}{s} = \frac{zb}{wt}$ où $(w,z) \in S \times A$

2) $S^{-1}M$ est muni d'une structure de $S^{-1}A$ module à gauche de manière que si $\frac{a}{t} \in S^{-1}A$, $\frac{m}{s}$ et $\frac{m'}{s'} \in S^{-1}M$ alors $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{xm+ym'}{ys}$ où $x, y \in S$ sont tels que $xs = ys'$ et $\frac{a}{t} \bullet \frac{m}{s} = \frac{zm}{wt}$ où $(w,z) \in S \times A$ est tel que $wa = zs$

Le $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$ est appelé module de fractions de M en S

Preuve (voir [21])

1.1.22 Proposition et Définition

Soient A un anneau, S une partie multiplicative non vide de A vérifiant les conditions de Ore à gauche, M un A-module à gauche et $S^{-1}M$ un module de fractions de M en S. Alors

$$\begin{aligned} i_M^S : M &\to S^{-1}M \\ m &\mapsto \frac{m}{1} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de A-module à gauche. Il est dit morphisme canonique.

1.1.23 Théorème

Soient A un anneau, S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors la relation $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}A - Mod$ qui a tout $M \in A - Mod$ fait correspondre $S^{-1}M$ et à tout morphisme de A-module à gauche $f : M \longrightarrow M'$ fait correspondre $S^{-1}f$ est un foncteur covariant additif et exact.

Preuve (voir [21])

1.1.24 Théorème

Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le foncteur $S^{-1}()$ préserve la projectivité. C'est à dire si M est A-module à gauche projectif alors Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le foncteur $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$-module à gauche projectif.

Preuve (voir [21])

1.2 Section 2 : Foncteurs dérivés Ext et Tor

1.2.1 Définition

Soit A un anneau et M un A-module à gauche (respectivement à droite). On appelle suite complexe(ou résolution complexe) à gauche(respectivement à droite) associée à M , toute suite de morphismes de A-module de la forme
$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} M_1 \xrightarrow{d_1} M_2 \xrightarrow{d_2} M_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$ où $d_{n+1}od_n = 0 \forall n \in N$ (respectivement $\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_n} M_n \xrightarrow{d_n-1} \cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{d_1} M_1 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ où $d_n od_{n+1} = 0 \ \forall \ n \in N$
Une résolution à gauche(respectivement à droite) est dite injective (respectivement projective)si M_n est injectif (respectivement projectif)$\forall n \geq 1$. On note par(M)chacune des suites complexes.

1.2.2 Remarque

On définit de manière générale une suite complexe notée (M), par toute suite de morphisme de modules : $\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_n+1} M_n \xrightarrow{d_n} \cdots$ où $d_n od_{n+1} = 0 \ \forall \ n \in Z$

1.2.3 Proposition

Tout A-module M à gauche (respectivement à droite)admet une résolution complexe injective notée E_M et une résolution complexe projective notée P_M.

Preuve (voir [23])

1.2.4 Définition

Soient (M) et (M') deux suites complexes à gauche(respectivement à droite). On appelle chaine complexe à gauche (respectivement à droite) de (M) vers (M'), toute famille d'homomorphismes $(f_n : M_n \to M_n^{'})n \in N$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} M_1 \xrightarrow{d_1} M_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots \\ \qquad\quad \downarrow f \qquad \downarrow f_1 \qquad \downarrow f_2 \qquad\qquad\quad \downarrow f_n^{'} \quad \downarrow f_{n+1}^{'} \\ 0 \longrightarrow M^{'} \xrightarrow{d_0^{'}} M_1^{'} \xrightarrow{d_1^{'}} M_2^{'} \xrightarrow{d_2^{'}} \cdots \longrightarrow M_n^{'} \xrightarrow{d_n} M_{n+1}^{'} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

(respectivement :

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{e_n} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{e_1} P_1 \xrightarrow{e_0} M \longrightarrow 0 \\ \qquad\quad \downarrow g_{n+1} \quad \downarrow g_n \qquad\qquad\quad \downarrow g_2 \quad \downarrow g_1 \quad \downarrow f \\ 0 \longrightarrow P_{n+1}^{'} \xrightarrow{e_n^{'}} P_n^{'} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2^{'} \xrightarrow{e_1^{'}} P_1^{'} \xrightarrow{e_0^{'}} M^{'} \longrightarrow 0) \end{array}$$

1.2.5 Remarque

On définit de manière général une chaine complexe notée $f : M \longrightarrow M'$ où M et M' sont deux complexes, toute famille de morphismes $f_n : M_n \longrightarrow M_n^{'}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ \qquad\qquad \downarrow f_n \qquad \downarrow f_{n-1} \\ \qquad \longrightarrow M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \end{array}$$

C'est-à-dire pour $n \in Z$, $f_{n-1} \circ d_n = d_n \circ f_n$

1.2.6 Définition

Une catégorie notée C est la donnée

i) d'une classe d'objets noté $Ob(C)$

ii) Pour tous objets X, Y de C, d'un ensemble noté $Hom_C(X,Y)$ dont les éléments sont appelés morphismes de source X et de but Y

iii) Pour tout triplet (X,Y,Z) d'objets de C, d'une application

$$\begin{aligned} \theta(X,Y,Z) : Hom_C(X,Y) \times Hom_C(Y,Z) &\longrightarrow Hom_C(X,Y) \\ (f,g) &\longrightarrow g \circ f \end{aligned}$$

Cette application est la composée du morphisme f suivi du morphisme g.

Ces données doivent satisfaire aux trois axiomes suivants :

(a) si (X,Y) et (X',Y') sont deux couples d'objets de C différents, alors $Hom_C(X,Y) \cap Hom_C(X',Y') = \emptyset$

(b) La composition des morphismes est associative c'est-à-dire pour tout quadruplet (X,Y,Z,T) d'objets de C et pour tout triplet (f,g,h) où $f \in Hom_C(X,Y), g \in Hom_C(Y,Z)$ et $h \in Hom_C(Z,T)$ on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Pour tout objet X de C, il existe un morphisme noté id_X ou $1_X \in Hom_C(X,X)$ tel que pour tout $f \in Hom_C(X,Y)$ et pour tout $g \in Hom_C(Y,X)$, on a $f \circ 1_X = f$ et $1_X \circ g = g$

1.2.7 Notation

Dans la suite si $Xob(C)$, le morphisme $f \in Hom_C(X,Y)$ sera noté $f : X \longrightarrow Y$. Si X est un objet de C, on note $X \in C$

1.2.8 Définition

Soit E et D deux catégories. On appelle :

1. Foncteur Covariant $F : E \longrightarrow D$ la donnée :
   a) Pour tout objet A de E d'objet $F(A)$ de D
   b) Pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de E d'un morphisme $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ de D
   c) Si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont deux morphismes de E, alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
   d) $\forall A \in Ob(E), F(1_A) = 1_{F(A)}$
2. Foncteur Contravariant : $F : E \longrightarrow D$ la donnée :
   a) Pour tout objet A de E d'un objet $F(A)$ de D
   b) Pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de E, d'un morphisme $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$ de D
   c) Pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ de E alors $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$
   d) Pour tout objet A de E, $F(1_A) = 1_{F(A)}$

1.2.9 Exemple

Soit E une catégorie, $A \in Ob(E)$ on définit les deux foncteurs
$Hom_E(A, -) : E \longrightarrow Ens$ où Ens est la catégorie des ensembles et
$Hom_E(-, A) : E \longrightarrow Ens$ par :

1. a) $\forall B \in Ob(E), Hom_E(A, -)(B) = Hom_E(A, B)$
   b) Soit $f \in Hom_E(B, C)$, on a

$$\begin{aligned} Hom_E(A, -)(f) = Hom_E(A, f) : Hom_A(A, B) &\rightarrow Hom_E(A, C) \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

   On montre que le foncteur $Hom_E(A, -)$ est covariant
2. a) $\forall B \in Ob(E)$, $Hom_E(-, A)(B) = Hom_E(A, B)$

b) Soit $f \in Hom_E(B,C)$, on a

$$Hom_E(-,A)(f) : Hom_E(C,A) \to Hom_E(B,A)$$
$$\varphi \mapsto \varphi \circ f$$

On montre que $Hom_E(-,A)$ est un foncteur contravariant.

1.2.10 Définition

Soient E et D deux catégories, F et G deux foncteurs de E dans D.On appelle morphisme fonctoriel ou transformation naturelle $\phi : F \to G$ la donnée :

a) Pour tout $A \in Ob(E)$ il existe $\phi : F(A) \to G(A)$

b) Pour tout morphisme $f : A \to B$ le diagramme suivant est commutatif (on suppose que F et G sont covariants) :

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(t)} & F(B) \\ \downarrow \phi_A & & \downarrow \phi_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(t)} & G(B) \end{array}$$

c'est à dire : $G(f) \circ \phi_A = \phi_A \circ F(f)$
Si F et G sont contravariants, on a diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(B) & \xrightarrow{F(t)} & F(A) \\ \downarrow \phi_B & & \downarrow \phi_A \\ G(B) & \xrightarrow{G(t)} & G(A) \end{array}$$

c'est à dire $G(f) \circ \phi_B = \phi_A \circ F(f)$

1.2.11 Proposition et Définition : Catégorie des foncteurs

Soient E et D deux catégories, $\mathcal{F}$ la classe des foncteurs covariants de E dans D. Alors on définit la catégorie des foncteurs notée $\mathcal{F}$ de la manière suivante :

1. Les objets de $\mathcal{F}$ sont des foncteurs de E dans D

2. Les morphismes de $\mathcal{F}$ sont des transformations naturelles (ou morphisme fonctorielles) $\varphi : F \to G$.

est définit par :

a) Pour tout objet A de E on a : $\varphi_A : F(A) \to G(A)$

b) Pour tout morphisme $f : A \to A'$ de E le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{l} F(A) \xrightarrow{\varphi_A} G(A) \\ \downarrow F(f) \quad\quad \downarrow G(f) \\ F(A') \xrightarrow{\varphi_{A'}} G(A') \end{array}$$

Si $F \in \mathcal{F}$, on a $1_F : F \to F$ tel que $1_{F(A)} : F(A) \xrightarrow{F(1_A)} F(A)$

Soit $f : A \to A'$ un morphisme de E le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{l} F(A) \quad \xrightarrow{F(1_A)} \quad F(A) \\ \downarrow F(f) \quad\quad \downarrow F(f) \\ F(A') \quad \xrightarrow{F(1_{A'})} \quad F(A') \end{array}$$

En effet $F(f) \circ F(1_A) = F(f \circ 1_A) = F(f)$

1.2.12 Proposition et Définition

On appelle foncteur homologie noté H_n le foncteur défini par : $H_n : COMP \longrightarrow Ab$ où Ab est la catégorie des groupes abéliens et Comp, la catégorie des complexes. H_n est un foncteur additif covariant.

a) <u>Action sur les objets de COMP</u>
Soit $A \in Ob(COMP)$ on a $H_n(M) = ker(d_n)/Im(d_{n+1}$ avec
$M : \cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$
<u>NB</u> :$ker(d_n)/Im(d_{n+1})$ a un sens car $d_n \circ d_{n+1} = 0 \Longrightarrow Im(d_{n+1} \subset ker(d_n)$

b) <u>Action sur les morphismes de COMP</u>
Soit $f \in Hom_{COMP}(M, M') : f : M \longrightarrow M'$ on définit H_n par : $\begin{array}{r} H_n(f) : H_n(M) \to H_n(M') \\ \overline{z_n} \mapsto H_n(f)\overline{(z_n)} \end{array}$

avec $\overline{z_n} = z_n + Im(d_{n+1}$ et $\overline{f_n(z_n)} = f_n(z_n) + Im(d'_{n+1}$ où $f : A \longrightarrow A'$ est la chaine défini par :

$$\begin{array}{ll} A :\longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \\ f\downarrow \quad f_{n+1}\downarrow \qquad\quad f_n\downarrow \quad f_{n-1}\downarrow \\ A' :\longrightarrow A'_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A'_n \xrightarrow{d_n} A'_{n-1} \end{array}$$

Preuve

Montrons que $H_n(f)$ est bien défini
Soit $z_n \in ker(d_n) \Longrightarrow d_n(z_n) = Of_{n-1} \circ d_n(Z_n) = 0 \Longrightarrow d_n \circ f_n(z_n) = 0 \Longrightarrow f_n(z_n) \in ker(d'_n)$ donc $f_n(z_n) + Im(d'_{n+1}) \in ker(d'_n/Im(d'_{n+1}) = H_n(A')$. Soit $Z_n \in Im(d_{n+1}$, montrons que $f_n(z_n) \in Im(d'_{n+1}$ on a $z_n \in Im(d_{n+1}$ alors $\exists z_{n+1} \in A_{n+1}$ tel que $d_{n+1}(z_{n+1}) = z_n \Longrightarrow f_n \circ d_{n+1}(z_{n+1}) \Longrightarrow d'_{n+1} \circ f_{n+1}(z_{n+1}) = f_n(z_n) \in Im(d'_{n+1}$ d'où $\underline{H_n(f)(\overline{z_n}) = \overline{0}}$ $\overline{z_n} = \overline{y_n} \Longrightarrow \overline{z_n - y_n} = \overline{0} z_n - y_n \in Im(d_{n+1})$ donc $\overline{H_n(f)(z_n - y_n)} = \overline{f_n(z_n - y_n)} = \overline{0}$ si $\Longrightarrow \overline{f_n(z_n) - f_n(y_n)} = \overline{0} \Longrightarrow \overline{H_n(f)(\overline{y_n})}$

(*) De plus on a : $H_n(f)(\overline{z_n} + \overline{y_n}) = H_n(f)(\overline{z_n + y_n}) = \overline{f_n(z_n + y_n)} = \overline{f_n(z_n) + f_n(y_n)} = \overline{f_n(z_n)} + \overline{f_n(y_n)} = H_n(f)(\overline{z_n}) + H_n(f)(\overline{y_n})$ D'où $H_n(f)$ est un morphisme groupe

(**) $H_n(g \circ f)(\overline{z_n}) = (\overline{g_n \circ f_n})(\overline{g_n(f_n(z_n))}) = H_n(g)(\overline{f_n(z_n)}) = H_n(g)[H_n(f(\overline{z_n}))]$ d'où $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ donc H_n est un foncteur covariant

(***) $\begin{array}{rl} H_n(1_A) : H_n(A) \to H_n(A') & \\ \overline{z_n} \mapsto H_n(f)\overline{f_n(z_n)} = \overline{(z_n)} \end{array}$ donc $H_n(1_A) =^1 H_n(A)$

(****) $H_n(f + g) = H_n(f) + H_n(g)$ où f et g sont deux chaînes, H_n est alors un foncteur additif

1.2.13 Définition (Notion de chaine nullhomotopique)

Soit $A \to A'$ la chaîne complexe correspondant au diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
M:\ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, dashed, "S_n"] & M_{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "S_{n-1}"] & {} \\
M':\ldots \arrow[r] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] & M'_{n-1} \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

On dit que f est nullhomotopique si pour tout entier relatif n, il existe deux homomorphismes $S_n : M_n \to M'_{n+1}$ et $S_{n-1} : M_{n-1} \to M_n$ tels que : $f_n = S_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ S_n$

1.2.14 Définition (Chaînes homotopiques)

Soient f et g deux chaînes complexes de M vers M'. On dit que f est homotopique à g si $(f - g)$ est nullhomotopique.

1.2.15 Théorème

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

Preuve

o) Réflexivité
Soit f la chaîne complexe $(f_n : M_n \to M'_n)_{n\in Z}$. La chaîne $f - f$ est la chaîne nulle : $(0 : M_n \to M'_n)_{n\in Z}$. Il suffit pour tout n de prendre les homomorphismes nuls $S_n : M_n \to M'_{n+1}$ et $S_{n-1} : M_{n-1} \to M'_n$.
On a bien pour tout n, $f - f = 0 = S_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ S_n$

o) Symétrie
Supposons f homotopique à g. Pour tout n entier, on a :
$f_n - g_n = S_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ S_n \Rightarrow g_n - f_n = -S_{n-1} \circ d'_n - d'_{n+1} \circ S_n$.
Il suffit de poser $S'_{n-1} = -S_{n-1}$ et $S'_n = -S_n$ pour avoir pour tout entier relatif n : $g_n - f_n = S'_{n-1} \circ d_n - d'_{n+1} \circ S'_n$.
La relation d'homotopie est symétrique.

o) Transitivité
Soient f, g et h trois chaînes complexes telles que f homotopique à g et g

homotopique à h. Pour tout entier n, on a les familles d'homomorphismes S_n et S'_n de M_n vers M'_n telles que :
$f_n - g_n = S_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ S_n$ et $g_n - h_n = S'_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ S'_n$.
On en déduit : $f_n - h_n = S_{n-1} \circ d'_n + d'_{n+1} \circ [S_n - S'_n]$.
D'où f homotopique à h.
Conclusion : la relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

1.2.16 Théorème

Soit f et g deux chaînes complexes de M vers M'.
Si f et g sont homotopiques, alors $\forall n \in Z, H_n(f) = H_n(g)$

Preuve

Soient f et g deux chaînes homotopiques (voir diagramme ci-dessous).

$$\begin{tikzcd}
M : \dots \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f-g"] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n-g_n"] \arrow[dl, dashed, "S_n"] & M_{n-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "S_{n-1}"] & {} \\
M' : \dots \arrow[r, dashed] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] & M'_{n-1} \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

Pour tout entier n on a : $f_n - g_n = S_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ S_n$.
Soit $Z_n \in Kerd_n$.
$[f_n - g_n](Z_n) = S_{n-1} \circ d_n(Z_n) + d'_{n+1} \circ S_n(Z_n)$
$= S'_{n-1}(0) + d'_{n+1} \circ S_n(Z_n)$
$= d'_{n+1} \circ S_n(Z_n) \in Imd'_{n+1}$ Par suite $H_n(f-g)(\overline{Z_n}) = \overline{0} = \overline{(f_n - g_n)(Z_n)} = \overline{f_n(Z_n) - g_n(Z_n)} = \overline{f_n(Z_n)} - \overline{g_n(Z_n)} = H_n(f)(\overline{Z_n}) - H_n(g)(\overline{Z_n}) = \overline{0}$
On en déduit que : $H_n(f) = H_n(g)$.

1.2.17 Théorème (premier Théorème de comparaison)

On considère le diagramme (3) suivant où les lignes sont des complexes, f un homomorphisme de module de M vers M' :

$$\begin{array}{l} \dashrightarrow X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow f \\ \dashrightarrow X_2' \xrightarrow{d_2'} X_1' \xrightarrow{d_1'} X_0' \xrightarrow{\varepsilon'} M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Si les X_p sont tous projectifs et la ligne du bas exacte, alors il existe une chaîne $\overline{f} : X_M \longrightarrow X_{M'}$ rendant le diagramme ci-suivant commutatif :

$$\begin{array}{lll} X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M \\ \downarrow \overline{f_0} & & \downarrow f \\ X_0' & \xrightarrow{F'} & M' \end{array}$$

En plus, cette chaîne est unique à l'homotopie près.

Remarque

On dit que $\overline{f}$ est une chaîne au dessus de f.

Preuve

a) Existence de la chaîne $\overline{f} : X_M \to X_{M'}$
Procédons par réccurence.

i) Posons $u = f \circ \varepsilon : X_M \to M'$

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dl, dashed, "\overline{f_0}"'] \arrow[d, "f\circ\varepsilon"] & \\ X_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, ε' est un épimorphisme (la suite du bas dans le diagrame 3 étant exacte) et X_0 est projectif. Donc il existe $f_0 : X_0 \to X_0'$ tel que $u = f \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ \overline{f_0}$

ii) Supposons que, pour tout n naturel, $\overline{f_n} : X_n \to X_n^{'}$ existe jusqu'a l'ordre k, k entier naturel.

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[r, "d_{k+1}"] \arrow[d, dashed, "\overline{f_{k+1}}"] & X_k \arrow[r, "d_k"] \arrow[d, "\overline{f_k}"] & X_{k-1} \arrow[r, "d_{k-1}"] \arrow[d, "\overline{f_{k-1}}"] & X_{k-2} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\overline{f_{k-2}}"] & {} \\
X_{n+1}^{'} \arrow[r, "d_{k+1}^{'}"] & X_k^{'} \arrow[r, "d_k^{'}"] & X_{k-1}^{'} \arrow[r, "d_{k-1}^{'}"] & X_{k-2}^{'} \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

Montrons que $Im\overline{f_k} \circ d_{k+1} \subset Imd_{k+1}^{'}$. Il existe alors $Z_{k+1} \in X_{k+1}$ tel que $\overline{f_k} \circ d_{k+1}(Z_{k+1})Z_k^{'}$. On en déduire $d_k^{'}(Z_k^{'}) = d_k^{'} \circ \overline{f_k} \circ d_{k+1}(Zd_{k+})$

La commutativité du diagramme précédent permet de dire que : $d_k^{'} \circ \overline{f_k} = \overline{f}_{k-1} \circ d_k$

Par conséquent : $d_k^{'}(Z_k^{'}) = \overline{f}_{k-1}(d_k \circ d_{k+1})(Z_{k-1})$

Or $d_k \circ d_{k+1} = 0$ (les lignes étant des suites complexes) ; par suite $d_k^{'}(Z_k^{'}) = \overline{f}_{k-1}(0) = \overline{0}$

D'où $Z_k^{'} \in Imd_k^{'}$. Comme la ligne du base est exacte, on a $Z_k^{'} \in Imd_{k+1}^{'} = KerZ_k^{'}$.

On a bien : $Im\overline{f_k} \circ d_{k+1}^{'} \subset Imd_{k+1}$

Considérons maintenant le diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
 & X_{n+1} \arrow[dl, dashed, "\overline{f_{k+1}}"'] \arrow[d, "f_k \circ d_{k+1}"] & \\
X_{n+1}^{'} \arrow[r, "d_{k+1}^{'}"] & Imd_k^{'} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$d_{k+1}^{'} : X_{k+1}^{'} \to Imd_{k+1}^{'}$ induit un monomorphisme et $X_{k+1}^{'}$ est projectif.

Donc il existe $\overline{f}_{k+1} : X_{k+1} \to X_{k+1}^{'}$ tel que $d_{k+1}^{'} \circ \overline{f_{k+1}} = \overline{f}_k \circ d_{k+1}$

i) et ii) permet de conclure à l'existence d'une chaîne $\overline{f} : X_M \to X_{M'}$

b) Montrons l'unicité de $\overline{f}$ à l'homotopie près. Soient $\overline{f}$ et $\overline{h} : X_M \to X_{M'}$ deux chaines rendant respectivement les deux diagrammes ci-après commutatifs :

Procédons là aussi par la récurrence en posant : $S_{-1} : \{0\} \to X_0^{'}$

i) Cas où $n = 0$

$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\overline{f_0}"] & M \arrow[d, "f"] \\
X_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & M'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\overline{h_0}"] & M \arrow[d, "f"] \\
X_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & M'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\overline{f}_2-\overline{h}_2"] & X_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\overline{f}_1-\overline{h}_1"] \arrow[dl, "S_1"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}_0-\overline{h}_0"] \arrow[dl, "S_0"] & 0 \arrow[dl, "S_{-1}"] \\
X_2' \arrow[r, "d_2'"] & X_1' \arrow[r, "d_1'"] & X_0' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Par hypothèse, X_0 est projectif et d_1' de X_1' vers X_0' est un épimorphisme.

Il existe alors, $S_0 : X_0 \to X_1'$ tel que : $\overline{f}_0 - \overline{h}_0 = d_1' \circ S_0$.

En remarquant que $S_{-1} \circ 0 : X_0 \to X_0'$ est le morphisme nul, on a : $\overline{f}_0 - \overline{h}_0 = S_{-1} \circ 0 + d_1' \circ S_0$. Notons $(\mathfrak{R}_0)$ cette relation est vraie pour $n = 0$.

ii) Soit n un entier naturel fixé. Supposons que la relation : $(\mathfrak{R}_k) : \overline{f}_k - \overline{h}_k = S_{k-1} \circ d_k' + d_{k+1}' \circ S_k$ notée $(\mathfrak{R}_k)$ est vraie pour tout k entier naturel inférieur où égal à n.

Montrons que $(\mathfrak{R}_{n+1})$ est vraie.

Considèrons le diagramme ci-dessous

$$
\begin{tikzcd}
\dots X_{n+2} \arrow[r, "d_{n+2}"] \arrow[d, "\overline{f}_{n+2}-\overline{h}_{n+2}"] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\overline{f}_{n+1}-\overline{h}_{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "S_{n+1}"] & X_n \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}_n-\overline{h}_n"] \arrow[dl, "S_n"] & X_n \dots \arrow[dl, "S_{n-1}"] \\
\dots X_{n+2}' \arrow[r, "d_{n+2}'"] & X_{n+1}' \arrow[r, "d_{n+1}'"] & X_n' \arrow[r] & X_{n-1}' \dots
\end{tikzcd}
$$

Montrons d'abord que $Im[\overline{f}_{n+1} - \overline{h}_{n+1} - S_n \circ d_{n+1}] \subset Imd_{n+2}'$.

Rappelons que dans le diagramme ci-dessus la ligne du bas est exacte.

Donc $Imd_{n+2}' = Kerd_{n+1}'$.

Soit $Z_{n+1}' \in Im[\overline{f}_{n+1} - \overline{h}_{n+1} - S_n \circ d_{n+1}]$.

Notons Z_{n+1} un élément de X_{n+1} tel que $[\overline{f}_{n+1} - \overline{h}_{n+1} - S_n \circ d_{n+1}](Z_{n+1}) = Z_{n+1}'$.

Il suffit de montrer que $d_{n+1}'(Z_{n+1}') = 0$

$d'_{n+1}(Z'_{n+1}) = d'_{n+1} \circ [\overline{f}_{n+1} - \overline{h}_{n+1} - S_n \circ d_{n+1}](Z_{n+1})$
$= [d'_{n+1} \circ (\overline{f}_{n+1} - \overline{h}_{n+1}) - d'_{n+1} \circ S_n \circ d_{n+1}](Z_{n+1})$
$= [(\overline{f}_n - \overline{h}_n) \circ d_{n+1} - [\overline{f}_n - \overline{h}_n - S_{n-1} \circ d_n] \circ d_{n+1}](Z_{n+1})$
$= S_{n-1} \circ [d_n \circ d_{n+1}](Z_{n+1})$
$= S_{n-1} \circ (0)$
$d'_{n+1}(Z'_{n+1}) = 0$ (car $d_n \circ d_{n+1} = 0$)
Par suite, $Im[\overline{f}_{n+1} - \overline{h}_{n+1} - S_n \circ d_{n+1}] \subset Imd'_{n+2} = Kerd'_{n+1}$.
Prouvons maintenant l'existence de $S_{n+1} : X_{n+1} \to X'_{n+2}$.
Considérons le shéma ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & X_{n+1} \arrow[dl, dashed, "S_{n+1}"'] \arrow[d, "\overline{f}_{n+1}-\overline{h}_{n+1}-S_n\circ d_{n+1}"] & \\ X'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & Imd'_{n+2} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On sait que X_{n+1} est projectif et d'_{n+2} est un épimorphisme.
D'où l'existence de $S_{n+1} : X_{n+1} \to X'_{n+2}$ tel que $\overline{f}_{n+1} - \overline{h}_{n+1} - S_n \circ d_{n+1} = d'_{n+2} S_{n+1}$
Ceci qui nous donne : $\overline{f}_{n+1} - \overline{h}_{n+1} = S_n \circ d_{n+1} + d'_{n+2} \circ S_{n+1}$ pour tout entier n.
Par suite $\overline{f}$ et $\overline{h}$ sont homotopiques.
Ce qui achève la démonstration du théorème.

1.2.18 Théorème (Deuxième Théorème de comparaison)

On considère le diagramme suivant où les lignes sont des complexes, f un homomorphisme de A-module de M vers M'

$$\begin{array}{l} 0 \dashrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} Y_0 \xrightarrow{d_0} Y_1 \xrightarrow{d_1} Y_2 \dashrightarrow \\ \quad\ \downarrow f \qquad \downarrow \overline{f_0} \\ 0 \dashrightarrow M' \xrightarrow{\varepsilon'} Y'_0 \xrightarrow{d'_0} Y'_1 \xrightarrow{d'_1} Y'_2 \dashrightarrow \end{array}$$

Si les Y'_p sont injectifs et la ligne du haut exacte, alors il existe une chaîne

$\overline{f} : Y_M \longrightarrow Y'_{M'}$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif

$$\begin{array}{lcl} M & \xrightarrow{\varepsilon} & Y_0 \\ \downarrow f & & \downarrow \overline{f_0} \\ M' & \xrightarrow{\varepsilon'} & Y' \end{array}$$

En plus, cette chaîne $\overline{f}$ est unique à homotopie près

Preuve

La preuve est analogue à celle du Théorème 1.2.17

1.2.19 Proposition

Étant donné un foncteur covariant $T : A - Mod \longrightarrow Ab$, on définit son foncteur dérivé à gauche noté L_nT, $n \in Z$ de la façon suivante :

a) Pour un A-module M, $L_nT(M) = H_n(TP_M) = KerTd_n/ImTd_{n+1}$

b) Pour un homomorphisme de module $f : M \longrightarrow M'$, $\begin{array}{r} L_nT(f) : L_n(A) \longrightarrow L_nT(M') \\ \overline{z_n} \longrightarrow H_n(T\overline{f})[\overline{z_n}] \end{array}$ ($\overline{f}$ étant la chaîne au dessus de f). En plus, chaque foncteur dérivé L_nT est un foncteur covariant additif.

Preuve

i) Action de L_nT sur un objet M de $A - Mod$
Dans la définition, l'action de L_nT sur un module M à pour préalable le choix d'une résolution projective de M. Une résolution projective de M n'est pas définie de manière univoque, il se pose une question de taille : "$L_nT(M)$ dépend-elle de la résolution projective choisie ?".
La réponse à cette question nécessite l'intervention d'une notion non encore

abordée : celle de "foncteur naturellement équivalent". Nous admettons provisoirement que $L_nT(M)$ ne dépend pas de la résolution projective choisie.

ii) Action de L_nT sur un morphisme de A-module
Soit $f : M \longrightarrow M'$ un morphisme de A-module. Considérons les deux résolutions projectives respectives de M et M' indiquées dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{l} \dashrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \\ \quad \downarrow \overline{f_2} \qquad \downarrow \overline{f_1} \quad \downarrow \overline{f_0} \quad \downarrow f \\ \dashrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nous savons que ces deux lignes du diagramme précédent sont des suites exactes. Les conditions d'application du théorème 1.2.17 sont remplies. Donc il existe une chaîne complexe $\overline{f} : P_M \longrightarrow P_{M'}$ au dessus de f. D'après 1.2.17 , cette chaîne est unique à l'homotopie près ; cela signifie que si $\overline{h} : P_M \longrightarrow P_{M'}$ est une autre chaîne au dessus de f, alors $\overline{h}$ et $\overline{f}$ sont homotopiques. On en déduit que $T\overline{f}$ et $T\overline{h}$ sont homotopiques et par conséquent : $H_n(T\overline{f}) = H_n(T\overline{h})$. (D'après 1.2.16)

iii) Action de L_nT sur la composée de morphisme de $A - Mod$
Soient $f : M \longrightarrow M'$ et $g : M' \longrightarrow M"$ deux homomorphismes de A-modules. Soient P_M, $P_{M'}$ et $P_{M"}$ trois résolutions projectives respectives de M, M' et $M"$. Considérons aussi deux chaînes $\overline{f}$ et $\overline{g}$ respectivement au dessus de f et g. En appliquant le foncteur T aux deux chaînes $\overline{f}$ et $\overline{g}$, on obtient le diagramme ci-après :

$$\begin{array}{lllll} TP_M : & \dashrightarrow TP_{n+1} \xrightarrow{Td_{n+1}} & TP_n \xrightarrow{Td_n} & TP_{n-1} \dashrightarrow \\ \downarrow \overline{f} & \quad \downarrow T\overline{f}_{n+1} & \downarrow T\overline{f}_n & \downarrow T\overline{f}_{n-1} \\ TP_{M'} : & \dashrightarrow TP'_{n+1} \xrightarrow{Td'_{n+1}} & TP'_n \xrightarrow{Td'_n} & TP'_{n-1} \dashrightarrow \\ \downarrow \overline{g} & \quad \downarrow T\overline{g}_{n+1} & \downarrow T\overline{g}_n & \downarrow T\overline{g}_{n-1} \\ TP_{M"} : & \dashrightarrow TP"_{n+1} \xrightarrow{Td"_{n+1}} & TP"_n \xrightarrow{Td"_n} & TP"_{n-1} \dashrightarrow \end{array}$$

Pour $z_n \in KerTd_n$, Calculons :
$L_nT(g \circ f)(\overline{z}_n) = H_n[T\overline{g} \circ T\overline{f}](\overline{z}_n) = \overline{T(\overline{g}_n)[T(\overline{f}_n)](z_n)} = H_n(T\overline{g}_n)[\overline{T(\overline{f}_n)(z_n)}] =$

$H_n(T\overleftarrow{g}_n) \circ H_n(T\overline{f}_n)(\overline{z}_n) = L_n(Tg) \circ L_n(Tf)(\overline{z}_n)$
On a bien : $L_nT(g \circ f)(\overline{z}_n) = L_n(Tg) \circ L_n(Tf)$

iv) Action de L_nT sur un morphisme identité 1_M, où M est un A-module
Soit $1_M : M \longrightarrow M$ et P_M une résolution projective de M. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lllll} TP_M : & \dashrightarrow TP_{n+1} & \stackrel{Td_{n+1}}{\longrightarrow} TP_n & \stackrel{Td_n}{\longrightarrow} TP_{n-1} & \dashrightarrow \\ \downarrow T1_M & \downarrow T1_{Pn+1} & \downarrow T1_{Pn} & \downarrow T1_{Pn-1} & \\ TP_M : & \dashrightarrow TP_{n+1} & \stackrel{Td_{n+1}}{\longrightarrow} TP_n & \stackrel{Td_n}{\longrightarrow} TP_{n-1} & \dashrightarrow \end{array}$$

$L_nT(1)(\overline{z}_n) = H_n[T(1_P)(\overline{z}_n)] = \overline{T(1_{P_M})(z_n)} = \overline{1_{TP^n}(z_n)} = 1_{L_nT(M)}(z_n)$ avec $z_n \in Kerd_n$. Donc $L_nT(1_M) = 1_{L_nT(M)}$

v) Montrons que $L_nT(f)$ est additif
Pour $z_n, y_n \in KerTd_n$ calculons :
$\underline{L_nT(f)(z_n + y_n) =} L_nT(f)(\overline{z_n + y_n}) = \overline{Tf_n(z_n + y_n)} = \overline{Tf_n(z_n) + Tf_n(y_n)} = \overline{Tf_n(z_n)} + \overline{Tf_n(y_n)} = L_nT(f)(\overline{z}_n) + L_nT(f)(\overline{y}_n)$.
Donc $T_n(f)$ est additif

Conclusion : i), ii) iii) iv) et v) entraînent que pour entier relatif n, $L_nT(f)$ est un foncteur covariant additif.

1.2.20 Définition (foncteur Tor)

Soit $N \in A - Mod$ Posons $T = - \otimes N$.
Dans ce cas, le foncteur dérivé à gauche de T, L_nT est appelé foncteur $Tor_n^A(-, N)$.
Soit M un A-module dont l'une des résolutions projective est P_M :
$\dashrightarrow P_2 \stackrel{d_2}{\longrightarrow} P_1 \stackrel{d_1}{\longrightarrow} P_0 \longrightarrow$
L'application de $T = - \otimes N$ à P_M nous donne alors $TP_M = P_{M \otimes N}$; c'est la suite :
$\dashrightarrow P_2 \otimes N \stackrel{d_2 \otimes 1_N}{\longrightarrow} P_1 \otimes N \stackrel{d_1 \otimes N}{\longrightarrow} P_0 \otimes N \longrightarrow 0$
Finalement : $L_nT(M) = Tor_n^A(-, N)(M) = H_n(P_M \otimes N) = Kerd_n \otimes 1_N / Kerd_{n+1} \otimes 1_N$

Remarque

Il reste toujours à établir que le foncteur L_nT ne dépend pas de la résolution projective choisie.

Pour ce faire, étant donné une A-module M choisissons de ces deux résolutions projective P_M et $\acute{P}_M$ et étudions leurs fonctions dérivés correspondant respectifs L_nT et $L_n^{'}T$.
Nous aurons pour cela de définir une nouvelle notion, celle de foncteur naturellement équivalents.

1.2.21 Définition(Foncteurs naturellement équivalents)

Soient F et F' deux foncteurs covariants de C et D. On dit que F et F' sont naturellement équivalents si :

a) Pour tout $M \in Obj(C)$, il existe un isomorphisme :
$t_M : F(M) \longrightarrow F'(M)$

b) Pour tout $f \in Hom_C(M, N)$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F(t)} & F(N) \\ \downarrow t_M & & \downarrow t_N \\ F'(M) & \xrightarrow{F'(t)} & F'(N) \end{array}$$

Remarque

Dans le cas de foncteurs F et F' contravariant de C et D, on a une autre définition analogue ;

a) Pour tout $M \in Obj(C)$, il existe un isomorphisme : $t_M : F(M) \longrightarrow F'(M)$

b) Pour tout $f \in Hom_C(M, N)$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$
\begin{array}{ccc}
F(N) & \xrightarrow{F(t)} & F(M) \\
\downarrow t_M & & \downarrow t_N \\
F'(N) & \xrightarrow{F'(t)} & F'(M)
\end{array}
$$

1.2.22 Théorème

Pour tout foncteur covariant T, L_nT et $L_n^{'}T$ sont naturellement équivalents. En particulier pour chaque A-module M, $L_nT(M) \cong L_n^{'}T(M)$.
Conséquence importante : le foncteur Tor qui est un cas particulier de foncteur dérivé à gauche ne dépend pas de la résolution projective choisie.

Remarque

Pour un A-module à gauche, on a aussi $M \otimes -$ est aussi un foncteur covariant
Pour $T = M \otimes -$ on a : $LnT = Tor(M-)$
$Tor_n(M, -)(N) = H_n(M \otimes P_N)$
En résumé : $Tor_n(M, N) = H_n(M \otimes P_N) = (P_M \otimes N)$

QUELQUES RÉSULTATS SUR LE FONCTEUR TOR

1.2.23 Théorème

$Tor_n(M, N) = 0, \forall n < 0$

Preuve

Soit P_n la résolution projective de N ci-dessous (deleted) :
$\dashrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow$

En tensorisant à droite, on obtient la suite :
$M \otimes P_N : \dashrightarrow \otimes P_2 \xrightarrow{d_2^*} \otimes P_1 \xrightarrow{d_1^*} \otimes P_0 \longrightarrow 0$
Tous les modules de chaîne à droite de $M \otimes P_0$ sont nuls. Par suite $Tor_n(M, N) = 0, \forall n < 0$

1.2.24 Théorème

$Tor_0(M, -)$ est naturellement équivalent à $M \otimes -$

Preuve

a) Soit N un A-module. Déterminons d'abord un isomorphisme de $Tor_0(M, N)$ vers $M \otimes N$. Notons P_N une résolution projective de N on a :
$P_N : \dashrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon}\longrightarrow B \longrightarrow 0$
Puisque $M\otimes$ est exacte à droite, la suite ci-après est exacte à droite :
$M \otimes P_N : \dashrightarrow M \otimes P_1 \xrightarrow{1_N \otimes d_1} M \otimes P_0 \xrightarrow{1_M \otimes \varepsilon}\longrightarrow M \otimes N \longrightarrow 0$
D'où l'égalité : $Ker 1_N \otimes \varepsilon = Ker \varepsilon^* = Im 1_N \otimes d_1$. Par suite, $1_N \otimes \varepsilon$ induit un isomorphisme de $Tor_0(M, N)$ vers $M \otimes N$

b) Soit $f : N \longrightarrow M$ un A-homomorphisme
Considérons le diagramme suivant, dont les lignes sont des résolutions projectives respectives de N et de M' et où $\overline{f}$ est la chaîne au dessus de f :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon_N"] \arrow[d, "\bar{f}_0"] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
{} \arrow[r, dashed] & P_2' \arrow[r, "d_2'"] & P_1' \arrow[r, "d_1'"] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon_M'"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Montrons que le diagramme ci-après est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Tor_O(M,N) & \overset{Tor_0(M,\overline{f_0})}{\longrightarrow} & Tor_0(N,M') \\ \downarrow \varepsilon_N^* & & \downarrow \varepsilon_{M'}^* \\ M\otimes N & \overset{1_M\otimes f}{\longrightarrow} & M\otimes M' \end{array}$$

Soit $\alpha \in Tor_0(M,N)$. On a : $\varepsilon_{M'}^* \circ Tor_0(M,\overline{f_0})(\alpha) = \varepsilon_{M'}^* \circ \overline{f_0^*}(\alpha) = (\varepsilon_{M'}^*)^*(\alpha) = (f\circ\varepsilon_N)^*(\alpha) = f^*\circ\varepsilon_N^*(\alpha) = (1_M\otimes f)\circ\varepsilon_N(\alpha)$. Donc $\varepsilon_{M'}^*\circ Tor_0(M,\overline{f_0}) = (1_M\otimes f)\circ\varepsilon_N$

Le diagramme considéré est commutatif.

a) et b) entrainent que $Tor_0(M,-)$ est naturellement équivalent à $M\otimes -$.

1.2.25 Théorème

Si P est projectif, alors $\forall n>0$, pour tout A-module N, on a : $Tor_n(P,N) = O$

Preuve

Comme P est projectif, en posant $P_0 = P$, et en prenant $\varepsilon = 1_P : P_0 \longrightarrow P$, on obtient la résolution projective de P : $P_P : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$
Sa deleted complexe est : $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$
Tous les modules à gauche de P sont nuls
D'où : $Tor_n(P,N) = Kerd_n\otimes 1_B/Imd_{n+1}\otimes 1_B = 0$. D'où le résultat

1.2.26 Théorème

Si F est plat, alors $Tor_n(F,N) = 0$ pour tout A-module N et pour tout $n>0$

Remarque

Ce théorème améliore le théorème précédent car tout module projectif est plat.

Preuve (par récurrence)

a) Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$
Soit N un A-module. Comme la catégorie des $A - Mod$ a assez de projectifs, il existe un épimorphisme $p : P \longrightarrow N$ avec P projectif. Soit K un A-module isomorphe à $Kerp$; notons $i : K \longrightarrow Kerp$ un isomorphisme. Donc i induit un monomorphisme de K vers P. Par construction, la suite ci-dessous est exacte :
$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$
L'application du foncteur Tor nous donne,
$\dashrightarrow Tor_1(F, P) \longrightarrow Tor_1(F, N) \longrightarrow F \otimes K \longrightarrow F \otimes P \longrightarrow$
Or nous savons d'une part P projectif ; d'où $Tor_1(F, P) = 0$. D'autre part, F est plat, par suite $1_F \otimes i$ est un monomorphisme ; $Ker1_F \otimes i = 0$. On a donc la suite ci-dessous exacte
$0 \longrightarrow Tor_1(F, N) \longrightarrow Ker1_F \otimes i = 0$
Finalement, on a $Tor_1(F, N) = 0$. La relation est vraie à l'ordre 0

b) Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n. Montrons qu'elle est aussi vraie à l'ordre $n + 1$
On a la suite exacte :
$Tor_{n+1}(F, P) \longrightarrow Tor_{n+1}(F, N) \longrightarrow Tor_n(F, K)$
On a : $Tor_{n+1}(F, P) = 0$ car P est projectif ; $Tor_n(F, K) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit : $Tor_{n+1}(F, N) = 0$

a) et b) entraine que la propriété est vraie.

FONCTEUR DERIVE A DROITE

Présentation générale des foncteur dérivé à droite.
Étant donné un foncteur $T : A - Mod \longrightarrow Ab$, nous allons définir son foncteur dérivé à droite notée R^nT, $n \in Z$. La démarche sera presque la même que celle adoptée pour définir le foncteur dérivé à gauche. Mais ici, nous considérons successivement

les deux cas suivants :

- T covariant
- T contravariant

a) **Cas où T est covariant**

Dans cas cas, l'action du foncteur dérivé à droite R^nT sur un A-module se détermine comme suit :

(a) Choix résolution injective quelconque de N et sa deleted complexe E_N :
$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \dashrightarrow$

(b) Adoption d'une nouvelle indexation décroissante pour se conformer à l'écriture des complexes :
$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_{-2} \dashrightarrow$

(c) Application du foncteur covariant T à E_N ce qui donne la suite TE_N :
$0 \longrightarrow TE_0 \xrightarrow{Td_0} TE_1 \xrightarrow{Td_1} TE_2 \dashrightarrow$

(d) Application du foncteur homologique à la suite complexe TE_N

b) **Cas où T est contravariant**

L'action du foncteur dérivé à droite R^nT sur un A-module se détermine comme suit :

(a) Choix d'une résolution projective quelconque de M et sa deleted complexe notée P_M
$\longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$

(b) Application du foncteur contravariant T à P_M (ce qui donne la suite TP_M) :
$0 \longrightarrow TP_0 \xrightarrow{Td_1} TP_1 \xrightarrow{Td_2} TP_2 \dashrightarrow$

(c) Adoption d'une nouvelle indexation décroissance :
$0 \longrightarrow TP_0 \xrightarrow{Td_{-1}} TP_{-1} \xrightarrow{Td_{-2}} TP_{-2} \dashrightarrow$

(d) Application du foncteur homologique à la suite complexe TP
$R^nT(M) = H_{-n}(TP_M) = KerTd_{-n-1}/ImTd_{-n}$.

1.2.27 Définition

a) **<u>Foncteur dérivée à droite : cas où T est un foncteur covariant</u>**
Si T est un foncteur covariant, on définit son foncteur dérivé à droite noté R^nT de la façon suivante :

i) Si N est A-module, on a : $R^nT(N) = H_n(TE_N) = KerTd_{-n}/ImTd_{-n+1}$

ii) Si $f : M \longrightarrow M'$ est un homomorphisme de A-module on a : $\begin{array}{ll} R^nT(f): & R^nT(M) \longrightarrow R^n \\ & (z_n + ImTd_{-n+1}) \longrightarrow (T\overline{f}_{-n} \end{array}$

Avec $z_n \in KerTd_{-n}$ et $\overline{f}$ la chaîne complexe de E_M à $E_{M'}$ au dessus de f.

b) **<u>Foncteur dérivé à droite : cas où T est contravariant</u>**
Si T est un foncteur contravariant, on définit son foncteur dérivé noté R^nT de la façon suivante :

i) Si M est un A-module on a : $R^nT(M) = H_{-n}(TP_M) = KerTd_{-n-1}/ImTd_{-n}$

ii) Si $f : M' \longrightarrow M"$ est un homomorphisme de A-module on a : $\begin{array}{ll} R^nT(f): & R^nT(M") \longrightarrow R^n \\ & (z_{-n} + ImTd_{-n+1}) \longrightarrow (T\overline{f} \end{array}$

Avec $z_{-n} \in KerTd_{-n}$ et $\overline{f}$ la chaîne complexe de P_M à $P_{M'}$.

Remarque

On établit de la même façon que dans le paragraphe précédent le théorème suivant :

1.2.28 Théorème

a) Si T est covariant, chaque R^nT est un foncteur covariant additif ne dépendant pas de la résolution injective choisie.

b) Si T est contravariant, chaque R^nT est un foncteur contravariant additif ne dépendant pas de la résolution projective choisie.

1.2.29 Foncteur Ext

<u>$1^e r$ **cas : T est le foncteur covariant** $Hom(M, -)$</u>

Si T est le foncteur covariant $Hom(M, -)$ on a : $R^nT(M) = Ext^n(M, -)$. Donnons l'action de $Ext^n(M, -)$ sur un module N.
Si N est un A-module de résolution injective après la deleted complexe notée E_N :
$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \dashrightarrow$.
La suite $Hom(M, E_N)$ s'écrit après adoption d'une nouvelle indexation décroissante :
$\dashrightarrow Hom(M, E_N) \xrightarrow{d^*_{-n+1}} Hom(M, E_{-n}) \xrightarrow{d^*_{-n}} Hom(M, E_{-n+1}) \dashrightarrow$
On en déduit, dans le cas général :
$Ext^n(M, -)(N) = Ext^n(M, N)$
$Ext^n(-N)(M) = Ext^n(M, N) = H_{-n}[Hom(R_M, N)]$
$= KerHom(M, d_{-n})/ImHom(M, d_{-n+1} = Kerd^*_{-n}/Imd^*_{-n+1}$

<u>$2^i eme$ **cas : T est le foncteur contravariant** $Hom(-N)$</u>

Si T est le foncteur contravariant $Hom(-N)$ on a : $R^nT(N) = Ext(-N)$. Donnons l'action de $Ext^n(-, N)$ sur un module M.
Si M est un A-module de résolution projective P_M (schéma ci-dessous)
$\longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0$
La suite $Hom(P_M, N)$ s'écrit après adoption d'une nouvelle indexation :
$\dashrightarrow Hom(P_{-n+1}, N) \xrightarrow{Hom(d_{-n},N)} Hom(P_{-n}, N) \xrightarrow{Hom(d_{-n-1},N)} Hom(P_{-n-1}, N) \dashrightarrow$
On en déduit, dans le cas général :
$Ext^n(-, N)(M) = Ext^n(M, N) = H_{-n}[Hom(P_M, N)] = KerHom(d_{-n+1})/ImHom(d_{-n}, N) = Kerd^*_{-n-1}/Imd^*_n$
En résumé
$Ext^n(M, N) = H_{-n}[Hom(P_M, N)] = H_{-n}[Hom(M, E_N)]$
Notons que le foncteur Ext est un cas particulier de foncteur dérivé à droite. On en déduit le corollaire suivant :

1.2.30 Corollaire

a) $Ext^n(M,-)$ est un foncteur covariant additif.
En plus $Ext^n(M,-)(N)$ ne dépend pas de la résolution injective de N choisie.

b) $Ext^n(-,N)$ est un foncteur contravariant additif.
En plus $Ext^n(-,N)(M)$ ne dépend pas de la résolution injective de N choisie.

Abordons maintenant plus en détail quelques résultats importants concernant les deux foncteurs Ext et Tor.

QUELQUES RESULTATS IMPORTANTS SUR LE FONCTEUR EXT

Rappelons la définition de $Ext^n(M,N)$
P_M étant une résolution projective du A-module M, E_N une résolution injective du A-module N, $Ext^n(M,N) = H_{-n}[Hom(P_M,N)] = H_{-n}[Hom(M,E_N)]$

1.2.31 Théorème

Si $n < 0$, alors $\forall M, N$ deux A-modules : $Ext^n(M,N) = 0$

Preuve

Soit E_N la résolution injective (deleted) de N ci-dessous :
$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_{-2} \dashrightarrow$
$Hom(M,E_N)$ est la suite :
$\dashrightarrow 0 \longrightarrow Hom(M,E_0) \xrightarrow{d_0} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} Hom(P_{-n-1},N)E_{-2} \dashrightarrow$
A gauche de $Hom(M,E_0)$ (ce qui correspond à $n < 0$) tous les groupes figurant dans la suite sont nuls.
Donc on a bien : $n < 0 \Rightarrow Ext^n(M,N) = 0$ pour tous les A-modules M et N
$a)$ et $b)$ entraînent que la propriété considérée est vraie.

1.2.32 Théorème

Le foncteur $Ext^0(M,-)$ est naturellement équivalent à $Hom(M,-)$

Preuve

a) Soit N un A-module. Existe-il un isomorphisme $Hom(M,N) \longrightarrow Ext^0(M,N)$? E_N étant une résolution injective de N considérons sa deleted complexe ci-dessous :

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_{-2} \dashrightarrow$$

$$Ext^0(M,N) = Kerd_0^*/Imd_1^* = Kerd_0^* \text{ car } Imd_1 = 0$$

Considérons maintenant la résolution injective de laquelle est déduite la deleted complexe E_N

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varepsilon} E_0 \xrightarrow{d_0} E_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} E_{-2} \dashrightarrow$$

Puisque le foncteur $Hom(M,-)$ est exacte à gauche, la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow Hom(M,N) \xrightarrow{\varepsilon^*} Hom(M,E_0) \xrightarrow{d_0^*} Hom(M,E_{-1}) \dashrightarrow$$

Par conséquent, $Ker\varepsilon^* = Imd_0^*$. Par suite $Ext^0(M,N) = Kerd0^*$. D'autre part, ε^* est un monomorphisme (la suite précédente étant exacte). D'où ε^* induit un isomorphisme $t_N : Hom(M,N) \longrightarrow Ext^0(M,N)$

b) Soit $f : N \longrightarrow M'$ un homomorphisme de A-modules.
Considérons les deux foncteurs :
$Ext^0(M,-), Hom(M,-) : A - Mod \longrightarrow Ab$

Considérons le diagramme (i) ci-dessous :

$Hom(M,N) \overset{Hom(M,f)}{\longrightarrow} Hom(M,M')$

$\downarrow t_M \qquad \downarrow t_{M'}$

$Ext^0(M,N) \overset{Ext^0(M,f)}{\longrightarrow} Ext^0(M,M')$

Montrons que le diagramme (i) est commutatif.
Considérons pour cela le diagramme (ii) ci-dessous où la première et la seconde ligne sont des résolutions injectives respectives de N et M'

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f"] & E_0 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & E_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "f_1"] & {} \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varepsilon'"] & E_0' \arrow[r, "d_1'"] & E_0' \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

D'après **1.2.18 (deuxième Théorème de comparaison)**, il existe une chaîne $\overline{f}$ de E_N vers $E_{M'}$ au dessus de f et rendant le premier carré de gauche du diagramme (ii) commutatif.
On a donc : $\overline{f_1} \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f$
Soit $\varphi \in Hom(M,N)$, on a :
$\varepsilon'^{*} \circ Hom(M,f)(\varphi) = \varepsilon'^{*} \circ (f \circ \varphi) = \varepsilon'^{*} \circ f^{*}(\varepsilon) = (\varepsilon' \circ f)^{*}(\varphi) = (\overline{f_1} \circ \varepsilon)^{*}(\varphi) = (\overline{f_1}^{*} \circ \varepsilon^{*})(\varphi)$
Par suite le diagramme (i) est commutatif.

a) et b) entraînent que les foncteurs $Ext^0(M,-)$ et $Hom(M,-)$ sont naturellement équivalents.

1.2.33 Théorème

Soit la suite courte exacte de A-modules ci-dessous :
$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N" \longrightarrow 0$ (1)
On a alors la suite longue exacte suivante :
$0 \longrightarrow Hom(M,N') \longrightarrow Hom(M,N) \longrightarrow Hom(M,N") \overset{\partial}{\longrightarrow} Ext^1(M,N') \dashrightarrow$ (2)

Preuve

Puisque la suite (1) est exacte et le foncteur T covariant, d'après **[26], théorème 10.42 (Triangle exact)**, la suite ci-après est exacte :
$\dashrightarrow R^nT(N') \to R^nT(N) \to R^nT(N") \to R^{n+1}T(N') \dashrightarrow$
Pour le foncteur covariant $T = Hom(M, -)$ la suite précédente s'écrit :
$\dashrightarrow Ext^n(M, N') \to Ext^n(M, N) \to Ext^n(M, N") \xrightarrow{\delta} Ext^{n+1}(M, N') \dashrightarrow$
Le Théorème **1.2.31** affirme que pour tout n entier strictement négatif : $Ext^n(C, D) = 0$ pour C et D deux R-module quelconques. On déduit que la suite suivante est exacte :
$\dashrightarrow Ext^\upsilon(M, N') \to Ext^\upsilon(M, N) \to Ext^\upsilon(M, N") \xrightarrow{\delta} Ext^1(M, N') \dashrightarrow$
D'après le Théorème **1.2.32**, $Ext^\upsilon(M, N')$, $Ext^\upsilon(M, N)$, $Ext^\upsilon(M, N")$ sont respectivement isomorphes à $Hom(M, N')$, $Hom(M, N)$ et $Hom(M, N")$.
Donc la suite longue (2) est exacte.

1.2.34 Théorème

$Ext^0(-, N)$ est naturellement équivalent à $Hom(-, N)$

Preuve

a) Montrons l'existence d'un isomorphisme $Hom(M, N)$ vers $Ext^0(M, N)$
Soit M un R-module et P_M sa résolution projective (après deleted complexe)
$\dashrightarrow P_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} P_0 \to 0$
Par définition, $Ext^0(M, N) = Kerd^*_{-1}/Imd^*_0 = Kerd^*_{-1}$ (i)
Reprenons la résolution projective complete de M (avant la deleted complexe)
$\dashrightarrow P_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$
L'action du foncteur exact à gauche $Hom(-, N)$ sur la suite exacte précédente nous donne la suite exacte :
$0Hom(M, N) \xrightarrow{\varepsilon *} Hom(P_0, N) \xrightarrow{d^*_{-1}} Hom(P_{-1}, N)$
On tire : $Kerd^*_{-1} = Im\varepsilon *$(ii)

Par suite, $\varepsilon*$ induit un isomorphisme de $Hom(M, N)$ vers $Ext^0(A, N)$

b) Nous devons montrer que, pour deux R-modules M et C quelconque et pour un homomorphisme $f : M \to C$, le diagramme ci-après est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
Hom(C,N) \arrow[r, "Hom(f{,}N)"] \arrow[d, "\varepsilon"''] & Hom(M,N) \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
Hom'(C,N) \arrow[r, "Ext^{\upsilon}(f{,}N)"] & Ext^0(M,N)
\end{tikzcd}$$

Considérons deux résolution injectives respectives de M et C (voir diagramme ci-dessous)

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, dashed] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed] & P_1P_2 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\overline{f_0}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
{} \arrow[r, dashed] & P_2' \arrow[r, "d_2'"] & P_1' \arrow[r, "d_1'"] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème 1.2.17 (premier Théorème de comparaison), il exist une chaîne $\overline{f}$ au dessus de f tel que : $f \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ \overleftarrow{f_0}$

Si $\varphi \in Hom(C, N)$

$\varepsilon \circ Hom(f, N)(\varphi) = \varepsilon * \circ f * (\varphi)$

$= (f \circ \varepsilon) * (\varepsilon)$

$= (\varepsilon' \circ \overline{f_0}) * (\varphi)$

$= \overline{f_0} * \circ \varepsilon^{1*}(\varphi)$

$= Ext^0(f, N) \circ \varepsilon^{1*}(\varphi)$

Le diagramme considéré est commutatif.

a) et b) entraînent que $Ext^0(-, N)$ est naturellement équivalent à $Hom(-, N)$

1.2.35 Théorème

Si P est projectif, alors $Ext^n(P, B) = 0$ tout R-module B et pour tout entier $n > 0$

Preuve

Nous savons que pour $Ext^n(P, B)$ est indépendant du choix de la résolution projective de P.
Comme P est projectif, en posant $P_0 = P$, et en prenant $\varepsilon = 1_P : P_0 \longrightarrow P$, on obtient la résolution projective de P :
$P_P : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$
Rappelons la définition : $Ext^n(P, B) = H_{-n}[Hom(P_P, B)]$
A gauche de P_0, tous les modules figurant dans la résolution projective sont nuls : $P_1 = P_2 = P_3 = \cdots = 0$
D'où le résultat : $Ext^n(P, B) = 0$ pour tout R-module et B pour tout entier relatif $n > 0$

1.2.36 Théorème

Soit la suite courte exacte de A-modules ci-dessous
$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$
On a alors la suite longue exacte suivante :
$0 \longrightarrow Hom(M", N) \longrightarrow HOm(M, N) \longrightarrow Hom(M', N) \longrightarrow Ext^1(M", N) \dashrightarrow$

Preuve (voir [26])

1.2.37 Théorème

Si E est injectif, $Ext^n_A(M, E) = 0$ pour tout A-module M et pour tout entier relatif $n > 0$

Preuve

Soit A un $R-Mod$. 0 étant un module injectif, considérons la résolution injective de E :

$E_E : 0 \longrightarrow E \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$

avec $\varepsilon = 1_E : E \longrightarrow E_0$.

Tous les modules à droite de E_0 sont nuls $E_1 = E_2 = E_3 = \cdots = 0$.

Donc : $Ext^n_A(A, E) = H_{-n}[Hom(A, E_E)] = 0$

1.2.38 Définition : n^{ieme} noyau d'une résolution projective d'un A-module

Soit une résolution projective P_M d'un A-module M.

$P_M : \dashrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$

$Ker(d_n)$ est appelé le n^{ieme} noyau de P_M. Le 0^{ieme} noyau (noyau de rang 0) est $Ker\varepsilon = Imd_1$

1.2.39 Lemme

Soit P_M une résolution projective de M de n^{ieme} noyau K_n. Alors on a $Ext^{n+1}_A(M, N) \cong Ext^1(K_{n-1}, N)$

Preuve

Soit la résolution projection P_M de M ci-dessous

$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$

Ainsi : $d_1 : P_1 \longrightarrow K_0$ est un épimorphisme.

On peut ainsi écrire les résolutions projectives de M et de K_0comme suit :

$P_M : \cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$

$P_{k_0} : \cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$

En tenant compte du décalage des indices au niveau de ces deux résolutions projec-

tives on a :
$Ext_A^{n+1}(M,N) \cong Ext_A^n(K_0,N)$
Ainsi on établit par itération :
$Ext_A^{n+1}(M,N) \cong Ext_A^n(K_0,N)$
$Ext_A^n(K_0,N) \cong Ext_A^{n-1}(K_1,N)$
$\cdots\cdots\cdots$
$Ext_A^2(K_{n-2},N) \cong Ext_A^1(K_{n-1},N)$
D'où le résultat.

1.2.40 Lemme

Soit K_{n-1} le $(n-1)^{ieme}$ noyau d'une résolution projective d'un A-module M. Alors on a :
$Tor_{n+1}^A(M,N) \cong Tor_1^A(K_{n-1},N)$.

Preuve

Soit P_M une résolution projective de M
$P_M : \dashrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$
Considérons ses noyaux K_{n-1} et K_0
On peut déduire de P_M une résolution projective P_{K_0} de K_0 :
$P_{K_0} \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow 0$
On en déduit que : $Tor_{n+1}^A(M,N) \cong Tor_n^A(K_0,N)$ et par itération on a :
$Tor_n^A(K_0,N) \cong Tor_{n-1}^A(K_1,N)$
$Tor_{n-1}^A(K_1,N) \cong Tor_{n-2}^A(K_2,N)$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$
$Tor_{n-2}^A(K_2,N) \cong Tor_1^A(K_{n-1},N)$
D'où le résultat : $Tor_{n+1}^A(M,N) \cong Tor_1^A(K_{n-1},N)$.

1.2.41 Définition $n^{ième}$ image d'une résolution injective d'un A-module M

Soit E_N la résolution injective de N suivante :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varepsilon} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} E_2 \dashrightarrow$$

Imd_n est appelé $n^{ième}$ image de E_N. L'image de rang 0 est $Im_{\varepsilon_0} = Kerd_0$

1.2.42 Lemme

Soit E_N une résolution injective de N de $(n-1)^{ième}$ image de
$I_{n-1} = Imd_{n-1}$
On a : $Ext_A^{n+1}(M, N) \cong Ext_A^1(M, I_{n-1})$

Preuve

Considérons la résolution injective de N suivante :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varepsilon} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \cdots E_n \xrightarrow{d_n} E_{n+1} \dashrightarrow$$

Montrons d'abord que : $Ext_A^{n+1}(M, N) = Ext_A^n(M, I_0)$ où $I_0 = Im\varepsilon = Kerd_0$ (P_M étant exact) I_0 est un sous module de E_0 et par conséquent ε induit un isomorphisme de I_0 vers E_1.
Donc : $0 \longrightarrow I_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \cdots$ est une résolution de I_0.
Ecrivons successivement les résolutions injectives de M et de I_0 et puis tenons compte du décalage au niveau des indices.
$E_N : 0 \longrightarrow N \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \cdots \longrightarrow E_n \cdots$
$E_{I_0} : 0 \longrightarrow I_0 \longrightarrow E_1 \cdots \longrightarrow E_n \cdots$
On a donc : $Ext_A^{n+1}(M, N) \cong Ext_A^n(M, I_0)$
On établit de même que :

$Ext_A^n(M, I_0) \cong Ext_A^{n+1}(M, I_0)$
$Ex_At^{n-1}(M, I_1) \cong Ext_A^{n-2}(M, I_2)$
....
$Ext_A^2(M, I_{n-2} \cong Ext_A^{n-2}(M, I_{n-1})$.

D'où le résultat cherché : $Ext_A^{n+1}(M, N) \cong Ext_A^1(M, I_{n-1})$.

Chapitre 2

LOCALISATION ET ALGEBRE DES POLYNOMES DANS UN DUO-ANNEAU

Introduction

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, A désigne un duo-anneau, M un A-module à gauche et S une partie non vide de A formée d'éléments réguliers.
Dans leurs travaux, beaucoup d'auteurs ont construit des anneaux de fractions dans le cas commutatif à partir d'une partie multiplicative S d'un anneau commutatif A (voir [1],[26] et [27]).Dans [26],J.J.ROTMAN a construit, dans le cas commutatif, l'anneau de fractions $S^{-1}A$ et le module de fractions $S^{-1}M$ où S est une partie non vide quelconque de A ne contenant pas zéro en utilisant la parie multiplicative saturée $\overline{S}$. engendrée par S.
Dans ([21]), Pr. Mohamed Ben MAAOUIA a construit, dans le cas où A n'est pas nécessairement commutatif, l'anneau des fractions $S^{-1}A$ et le module de fractions $S^{-1}M$ relativement à une partie multiplicative saturée S qui vérifie les conditions de Ore à gauche.

Dans la **section 1** de ce chapitre, nous construisons,dans le cas où A n'est pas nécessairement commutatif, l'anneau des fractions $S^{-1}A$ relativement à une partie non vide S formée d'éléments réguliers de A. Ainsi nous avons montré les résultats suivants :

1) $\overline{S}$, la partie multiplicative saturée engendrée par S vérifie les conditions de Ore à gauche.

2) L'idéal $\langle 1 - sX_s \rangle_{s\in S}$ de l'algèbre des polynômes à S variables $A\left[(X_s)_{s\in S}\right]$ engendré par l'ensemble des polynômes $\{1 - sX_s, s \in S\}$ est bilatère.

3) $S^{-1}A$ existe et $S^{-1}A = {}^{A\left[(X_s)_{s\in S}\right]}\!/\!_{\langle 1 - sX_s \rangle_{s\in S}}$.

4) $S^{-1}A \cong \overline{(S)}^{-1}A$.

Dans la **section 2** de ce chapitre, nous construisons le module de fractions $S^{-1}M$ et nous avons montré les résultats suivants :

1) En posant $S^{-1}M = (\overline{S})^{-1}M$, on a $S^{-1}M \cong \overline{(S)}^{-1} A \otimes_A M$.
Par conséquent $S^{-1}M \cong {}^{A\left[(X_s)_{s\in S}\right]}\!/\!_{\langle 1 - sX_s \rangle_{s\in S}} \otimes_A M$

2) $S^{-1}Tor_n^A(M, M')\cong Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$ où n est entier naturel

3) $S^{-1}Ext_A^n(M, M') \cong Ext_{S^{-1}A}^n(S^{-1}M, S^{-1}M')$ où n est entier naturel et M est un A-module de type fini.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis et accepté par le journal Springer.

2.1 Section 1 : Anneau de fraction et algèbre des polynômes dans un duo-anneau

2.1.1 Définition : L'anneau des polynômes A[X]

Soit A un anneau et X une partie non vide de A.
Notons $IN^{(X)}$ l'ensemble des applications de X dans IN à support fini, c'est le

monoïde engendré par X.

$$f \in IN^{(X)} \Leftrightarrow f = \sum_{x \in X} e_x = \sum_{i \in I \subset X} e_{x_i}$$

où e_{xi} : $\begin{array}{l} e_{x_i} : X \to A \\ \quad x \to e_{s_i}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = x_i \\ o & \sin on \end{cases} \end{array}$

Notons $(A^{(X)}, +, .)$ le A-module libre engendré par $\{e_x\}_{x \in X}$qui est une base de $A^{(X)}$.

$$p \in A^{(X)} \Rightarrow P = \sum_{x \in X} a_x e_x.$$

Cas particuliers : Si X=IN , A$^{(IN)} = A[X]$, où $A[X]$ est l'anneau des polynômes à une indéterminée.

On définit de manière analogue l'anneau des polynômes à deux indéterminées $A[X, Y]$ par $A[X, Y] = A^{(IN \times IN)}$. On définit également l'anneau des polynômes à n indéterminées X$_1$, X$_2$, ...X$_n$ par $A[X_1, X_2, \ldots X_n] = A^{(IN \times IN \times \ldots \times IN)}$ Cas général : Soit S un ensemble non vide. Notons par $IN^{(S)}$ l'ensemble des applications de S dans IN à support fini. Si $f \in IN^{(S)}$, alors

$$f = \sum_{i \in I \subset S} e_{s_i}$$

où I est fini.
$A^{(IN^{(S)})}$est l'ensemble des applications à support fini de IN$^{(S)}$ dans A , c'est le A-module libre engendré par IN$^{(S)}$ On appelle anneaux des polynômes à S variables, l'anneau $A^{(IN^{(S)})}$ noté $A[S]$ ou $A\left[(X_s)_{s \in S}\right]$.

2.1.2 Théorème : Existence de l'anneau de fraction

Soient A un duo-anneau, S une partie non vide de A formée d'éléments réguliers, $A\left[(X_s)_{s \in S}\right]$ l'algèbre des polynômes à S variables à coefficients dans A.

Alors la correspondance $\begin{array}{c}\varphi : A\left[(X_s)_{s\in S}\right] \to \left(\overline{S}\right)^{-1} A \\ P \mapsto \varphi(P) = P\left(\left({}^{1}\!/_{s}\right)_{s\in S}\right)\end{array}$ est un épimorphisme d'anneaux et $\ker\varphi = \langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S}$ où $\langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S}$ est l'idéal bilatère de l'algèbre des polynômes $A\left[(X_s)_{s\in S}\right]$ engendré par l'ensemble des polynômes $\{1 - sX_s, s \in S\}$. De plus, on a l'isomorphisme$A\left[(X_s)_{s\in S}\right]\!/\!\langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S} \cong \left(\overline{S}\right)^{-1} A$ où $\overline{S}$ est la partie multiplicative saturée engendrée par les éléments $(1 - sX_S)_{s\in S}$.

Preuve

Soient P et Q deux polynômes ; on a :

$$\varphi(P+Q) = (P+Q)(({}^{1}\!/_{s})_{s\in S}) = (P({}^{1}\!/_{S}))_{s\in S}+ (Q({}^{1}\!/_{S}))_{s\in S} = \varphi(p) + \varphi(Q)$$

$$\varphi(PQ) = (PQ)(({}^{1}\!/_{s})_{s\in S}) = (P({}^{1}\!/_{S}))_{s\in S}(Q({}^{1}\!/_{S}))_{s\in S} = \varphi(p)\varphi(Q)$$

$$\varphi(1_{A\left[(X_s)_{s\in S}\right]} = \varphi(1_A) = {}^{1}\!/_{1} = 1_{(\overline{S})^{-1}A}$$

$$\varphi(\lambda P) = (\lambda P)(({}^{1}\!/_{s})_{s\in S}) = \lambda(P({}^{1}\!/_{S})_{s\in S}) = \lambda\varphi(P)$$

Vérifions que $\ker\varphi = \langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S}$

1. Si $P = (1 - sX_S)_{s\in S}$ *alors* $P(\frac{1}{s}) = (1 - s.\frac{1}{s})_{s\in S} = 0$,
   alors $\langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S} \subseteq \ker\varphi$
2. Si $P \notin \langle 1 - sX_s\rangle$, alors $\varphi(P) \neq 0 \Rightarrow P \notin \ker\varphi$.

Par conséquent $\ker\varphi = \langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S}$ et donc $\langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S}$ est un idéal bilatère.

D'où, d'après la propriété universelle des anneaux quotients, on a l'isomorphisme : $A\left[(X_s)_{s\in S}\right]\!/\!\langle 1 - sX_s\rangle_{s\in S} \cong \left(\overline{S}\right)^{-1} A$

2.1.3 Corollaire

Soit A un duo-anneau, s un élément régulier de A. Soit $S = \{s\}$ On sait que $\overline{S} = \{1, s, s^2 \ldots\}$ est une partie multiplicative saturée de A. Alors l'application

$$\varphi : A[X] \to \left(\overline{S}\right)^{-1} A$$
$$p \mapsto \varphi(p) = p\left({}^{1}\!/_{s}\right)$$

est un morphisme surjectif de noyau l'idéal$\langle 1 - sX\rangle$. Il en résulte un isomorphisme $\overline{\varphi}$: $A[X] / (1 - sX) \to \left(\overline{S}\right)^{-1} A$. $A[X]$ est l'anneau des polynômes à une indéterminée X.

Démonstration

Un élément de $\left(\overline{S}\right)^{-1} A$ s'écrit ${}^{a}\!/_{s^n}$ pour un certain $n \geq 1$ et un élément $a \in A$. On a ainsi ${}^{a}\!/_{s^n} = \varphi(aX^n)$, donc φ est bien surjectif.
Montrons que $\ker\varphi = \langle 1 - sX\rangle$:

- $Si p = 1 - sX, alors p(1/s) = 1 - s.1/s = 1 - 1 = 0$
- Si $p = Q(1 - sX), alors p(1/s) = \varphi(p) = 0$

D'où $\langle 1 - sX\rangle \subset \ker\varphi$

- Si $p \notin \langle 1 - sX\rangle$, alors $\varphi(p) \neq 0$, d'où $p \notin \ker\varphi$

Par conséquent, $\ker\varphi \subset \langle 1 - sX\rangle$, d'où le résultat $\ker\varphi = \langle 1 - sX\rangle$.
D'après la proposition universelle des anneaux quotients, il existe un homomorphisme $\overline{\varphi} : {}^{A[X]}\!/_{(1 - sX)} \to \left(\overline{S}\right)^{-1} A$
Montrons que $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme. Soit $g : A \to {}^{A[X]}\!/_{(1 - aX)}$ le morphisme canonique tel que pour tout$a \in A$ associe $\overline{a}$où $\overline{a}$ est la classe de b : $\begin{array}{l} g : A \to {}^{A[X]}\!/_{(1 - sX)} \\ a \mapsto \overline{a} \end{array}$

$\overline{a}$ est la classe du polynôme constant a. Dans l'anneau${}^{A[X]}\!/_{(1 - sX)}$
On a : $\overline{1 - sX} = \overline{0} \Rightarrow \overline{sX} = \overline{1} = 1 \Rightarrow \overline{s} \cdot \overline{X} = \overline{1}$ donc $\overline{s}$ est inversible, d'inverse$\overline{X}$.
D'après la propriété universelle de la localisation, il existe un morphisme $\Psi : S^{-1}A \to {}^{A[X]}\!/_{(1 - sX)}$ tel que pour tout $a \in A$, $\Psi\left({}^{a}\!/_{1}\right) = g(a)$. Par construction si $a \in A$ et

$n \geq 1$ on a $\Psi\left({}^{a}/_{s^n}\right) = b\left(\overline{X^n}\right) = \overline{aX^n}$.
Montrons alors que Ψ est l'inverse de $\overline{\varphi}$. Soit $P \in A\left[X\right]$, on a $\Psi\left(\overline{\varphi}\left(\overline{P}\right)\right) = \Psi\left(P\left({}^{1}/_{s}\right)\right)$. Si$P = \sum a_n X^n$ on a : $\Psi\left(\overline{\varphi}\left(\overline{P}\right)\right) = \Psi\left(\varphi\left(P\right)\right) = \Psi\left(P\left({}^{1}/_{s}\right)\right) = \Psi\left(\sum\left({}^{a_n}/_{s^n}\right)\right) = \sum \Psi\left({}^{a_n}/_{s^n}\right) = \sum \overline{aX^n} = \overline{\sum a_n X^n} = \overline{P}$ d'où $\Psi \circ \overline{\varphi} = Id$. De plus $\overline{\varphi}\left(\Psi\left({}^{a}/_{s^n}\right)\right) = \overline{\varphi}\left(\overline{aX^n}\right) = \varphi\left(sX^n\right) = {}^{a}/_{s^n}$. Alors $\overline{\varphi} \circ \Psi = Id$. Par conséquent, $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme. Enfin comme $\overline{\varphi}$ injectif, alors
$\ker\varphi = (1 - sX)$.

2.1.4 Corollaire

Soit A un duo-anneau s et t deux éléments réguliers de A. Soit $S = \{s, t\}$. Alors $\overline{S} = \langle s^m, t^n \rangle$, c'est-à-dire $\overline{S}$ est l'idéal engendré par $s^m t^n$ lorsque m et n parcourent N.
Alors l'homomorphisme $\begin{array}{c} \varphi : A\left[X, Y\right] \to \left(\overline{S}\right)^{-1} A \\ P\left(X, Y\right) \mapsto P\left({}^{1}/_{s}, {}^{1}/_{t}\right) \end{array}$ est surjectif et que son noyau contient l'idéal $(1 - sX, 1 - tY)$ engendré par $1 - sX$et $1 - tY$ dans $A\left[X, Y\right]$. On a alors l'isomorphisme ${}^{A\left[X,Y\right]}/_{(1 - sX, 1 - tY)} \cong \left(\overline{S}\right)^{-1} A$

Preuve

D'après [**1**], le morphisme $\varphi : A\left[X, Y\right] \to A\left[X\right]\left[Y\right]$ tel que $\varphi\left(X\right) = X$et $\varphi\left(Y\right) = Y$ est un isomorphisme
Définissons le morphisme $\begin{array}{c} \Psi : A\left[X\right]\left[Y\right] \to \left(\overline{S}\right)^{-1} A \\ P\left[Y\right] \mapsto \Psi\left(P\right) = P\left({}^{1}/_{t}\right) \text{ où } P = P_1\left(X\right) \in A\left[X\right] \end{array}$.
D'après Proposition 15, le morphisme $\overline{\Psi} : {}^{A\left[X\right]}/_{(1 - tY)} \to \left(\overline{S}\right)^{-1} A$ est un isomorphisme et $\ker\Psi = (1 - tY)$
Définissons : le morphisme $f = \Psi \circ \varphi$ (surjectif)

$$\begin{tikzcd} A[X,Y] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "f=\Psi\circ\varphi"'] & A[X][Y] \arrow[d, "\Psi"] \\ & S^{-1}A \end{tikzcd}$$

où $\ker \Psi = (1 - tY)$.

$P \in \ker f \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}) = 0 \Leftrightarrow P \in \{Q(1 - sX)(1 - tY)\} = \langle 1 - sX, 1 - tY \rangle$

D'où l'isomorphisme $A[X,Y]/_{(1 - sX, 1 - tY)} \cong \left(\overline{S}\right)^{-1} A$

2.1.5 Théorème : (Existence de la localisation)

Soient A un duo-anneau et S une partie non vide d'éléments réguliers de A . Alors la localisation de A en S $S^{-1}A$ existe.

Preuve

Posons $X = \{x_s : s \in S\}$ tel que l'application $\begin{array}{c} \varphi : X \to S \\ x_s \mapsto \varphi(x_s) = s \end{array}$ soit une bijection

Soient $A[(X_s)_{s \in S}]$ l'anneau des polynômes sur A à S variables et $I = \langle 1 - sX_s \rangle_{s \in S}$ l'idéal bilatère engendré par l'ensemble $\{1 - sx_s : s \in S\}$. Montrons que $S^{-1}A = A[(X_s)_{s \in S}]/_{I}$. Comme I est bilatère alors $A[(X_s)_{s \in S}]/I$ est un anneau et même une algèbre.

Définissons $\begin{array}{c} i : A \to A[(X_s)_{s \in S}]/_{I} \\ a \mapsto i(a) = a + I \end{array}$ la surjection canonique ;

On a $\overline{1 - sX_s} = \overline{0} \Rightarrow \overline{sX_s} = \overline{s}.\overline{X_s} = \overline{1}$. De même $\overline{X_s.s} = \overline{X_s}.\overline{s} = \overline{1}$ car les variables commutent avec les constantes(éléments de A) dans $A[(X_s)_{s \in S}]$. Donc $\overline{s} = i(s)$.

Et comme la localisation $\mathrm{S}^{-1}A$ de A en S existe à isomorphisme près, on peut prendre

$$S^{-1}A = A[(X_s)_{s \in S}]/_{I}.$$

2.1.6 Proposition

Soit S une partie non vide d'un duo-anneaux A formée d'éléments réguliers, alors la partie multiplicative saturée $\overline{S}$ engendrée par S vérifie les conditions de Ore à gauche(d'après [**19**]). Alors on a $\left(\overline{S}\right)^{-1} A \cong S^{-1}A$.

Preuve

Cette proposition résulte des **Théorèmes 2.1.2 et 2.1.5**

2.1.7 Proposition

Soit S une partie non vide d'un duo-anneau A formée d'éléments réguliers. Alors tout $y \in S^{-1}A$ s'écrit sous la forme $y = i_A^S(a)\, i_A^S(\sigma)^{-1}$ où $a \in A$ et $\sigma \in \overline{S}$. Cette écriture n'est pas unique.

Preuve

D'après le théorème d'existence de la localisation $S^{-1}A$ et sa construction $S^{-1}A = A[X]/I$ où$X = \{x_s : s \in S\}$ et $I = \langle s x_s - 1 : s \in S\rangle$ on déduit que tout $y \in S^{-1}A$ est de la forme $y = f(x_1, x_2 ... x_n) + I$ où $x_i = x_{s_i}$ où $s_i \in S$
Si $n = 0$ alors $y = i_A^S(f)$
Par récurrence sur n, écrivons $y = f(x_1, x_2, ... x_n) + I$
Posons $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = X$ et $x_n = x$; on a $f(X, x_n) = g_o(X) + g_1(X)\, x + ... + g_m(X)\, x^m$ où $g_i(X) \in A[X] \quad \forall\, 1 \leq i \leq n - 1\$$;
Dans $S^{-1}A$, on a $s = i_A^S(s)^{-1}$ où $s \in S$ et par conséquent $g_i(X) = i_A^S(a_i)\, i_A^S(\sigma_i)$ où $a_i \in Aet\sigma_i \in \overline{S}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} y &= i_A^S(a_0)\, i_A^S(\sigma_0)^{-1} + i_A^S(a_1)\, i_A^S(\sigma_1)^{-1}\, i_A^S(s)^{-1} + ... + i_A^S(a_m)\, i_A^S(\sigma_m)^{-1}\, i_A^S(s)^{-m} \\ &= i_A^S(s)^{-m}\left[i_A^S(a_0)\, i_A^S(\sigma_0)^{-1}\, i_A^S(a_1)\, i_A^S(\sigma_1)^{-1}\, i_A^S(s)^{m-1} + ... + i_A^S(a_m)\, i_A^S(\sigma_m)^{-1}\right] \\ &= i_A^S(a')\, i_A^S(\sigma)^{-1} \end{aligned}$$

où $a' \in A$ et $\sigma = \sigma_0\sigma_1 ... \sigma_m s^m \in \overline{S}$
Par conséquent $y = i_A^S(r')\, i_A^S(\sigma)^{-1}$.

2.1.8 Proposition

Si S est une partie non vide d'un duo-anneau A formée d'éléments réguliers et $i_A^S : A \to S^{-1}A$, le morphisme de localisation, alors $\ker i_A^S = \{a \in A : \sigma a = 0\}$ pour tout $\sigma \in \overline{S}$.

Preuve

Si $\sigma a = 0$, alors$0 = i_A^S(\sigma)\, i_A^S(a)$dans$S^{-1}A$. Comme $i_A^S(a)$est inversible, on a $0 = i_A^S(\sigma)^{-1}\, i_A^S(\sigma)\, i_A^S(a) = i_A^S(a)$, d'où$a \in \ker(i_A^S)$
Supposons maintenant que $i_A^S(a) = 0$ dans $S^{-1}A$ comme $S^{-1}A = A[X]/I$ où $I = \langle s x_s - 1, s \in S\rangle$ on a $a = \sum_{i=1}^{n} f_i(X)(s_i x_{s_i} - 1)$ dans $A[X]$
Posons $S_0 = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \bigcup \{\text{coeff non nuls des } f(X_i)\}$ et $i_A^{S_0} : A \to S_0^{-1}A$, le morphisme de localisation (canonique) ; alors $a \in \ker i_A^{S_0}$
En effet, si $s = s_1 s_2 ... s_n$ et $i_A^{\{s\}} : A \to \{s\}^{-1}A$, le morphisme de localisation, alors tout $i_A^{\{s\}}(s_i)$ est inversible avec $s_i^{-1} = s^{-1} s_1 ... \underset{i}{\hat{s}} ... s_n$.
On a :$\{s\}^{-1}A = A[X]/(sx-1)$. Dire que $a \in \ker i_A^{\{s\}}$ signifie que $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ avec $a = f(x)(sx-1) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)(sx-1) = \sum_{i=0}^{m}(s a_i x^{i+1} - a_i x^i)$ dans $A[x]$
L'identification des coefficients de x donne :

$$a = -a_0, s a_0 = a_1, \ldots, s a_{m-1} = a_m, s a_m = 0$$

D'où $sa = -sa_0 = -a_1$ et par conséquent $s^i a = -a_i$ pour tout i. En particulier $s^m a = -a_m$ et par conséquent $s^{m+1} a = -s a_m = 0$. D'où le résultat.

2.1.9 Corollaire

Si a/σ et a'/σ' avec $\sigma, \sigma' \in \overline{S}$, alors $a/\sigma = a'/\sigma'$ si et seulement si il existe $\sigma" \in \overline{S}$ tel que $\sigma"(a\sigma' - a'\sigma) = 0$ dans A

2.1.10 Remarque

Si S ne contient pas de diviseurs de zéro, alors
$\sigma" \left(a\sigma' - a'\sigma\right) = 0 \Rightarrow a\sigma' - a'\sigma) = 0$ car $\sigma"$ est inversible, d'où $a\sigma' = a'\sigma$.

Preuve

Si $\frac{r}{\sigma} = \frac{r'}{\sigma'}$, alors en multipliant à droite par $\sigma\sigma'$ on obtient $r\sigma' = \frac{r'}{\sigma'}(\sigma\sigma')$ dans $S^{-1}A$.Or A est un duo anneau, il existe donc $\sigma_1 \in A$ tel que $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma_1$. On a alors $r\sigma' = \frac{r'}{\sigma'}(\sigma'\sigma_1)$, d'où $r\sigma' - r'\sigma_1 = 0$.Alors $r\sigma' - r'\sigma_1 \in \ker i_A^S$ et d'après la **proposition 1.1.21** il existe $\sigma'' \in \overline{s}$ tel que $\sigma'' \left(r\sigma' - r'\sigma_1\right) = 0$ dans A. Réciproquement si $\sigma'' \left(r\sigma' - r'\sigma\right) = 0$ dans A avec $\sigma'' \in \overline{s}$ alors $i_A^S\left(\sigma''\right) i_A^S\left(r\sigma' - r'\sigma\right) = 0$ dans $S^{-1}A$ et comme $i_A^S\left(\sigma''\right)$ est inversible, alors $i_A^S\left(r\right) i_A^S\left(\sigma'\right) - i_A^S\left(r'\right) i_A^S\left(\sigma\right)$
Or $i_A^S\left(\sigma\right)$et$i_A^S\left(\sigma'\right)$ sont inversibles, donc $i_A^S\left(r\right) i_A^S\left(\sigma\right)^{-1}$, d'où $\frac{r}{\sigma} = \frac{r'}{\sigma'}$

2.1.11 Corollaire

(i) Si S ne contient pas de diviseurs de zéros, alors $i_A^S : A \to S^{-1}A$ est injective

(ii) Si A est un domaine et si $Q = Frac\left(A\right)$, alors $S^{-1}A \subset Q$ et en particulier

$S = A - \{0\}$ alors $S^{-1}A = Q$

Preuve

(i) Est une conséquence directe de la **proposition 1.1.21**

(ii) Le morphisme canonique $i_A^S : A \to S^{-1}A$ est injectif d'après la **proposition 1.1.21**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i_A^S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & S^{-1}A \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

où φ est l'inclusion
Si $\tilde{\varphi}\left(i_A^S(r)\, i_A^S(\sigma)^{-1}\right) = 0$, alors $\tilde{\varphi}\left(i_A^S(r)\right) = 0$ car $i_A^S(\sigma)$ est inversible dans $S^{-1}A$
Avec la commutativité du diagramme on a $\tilde{\varphi} o i_A^S(r) = \varphi(r)$. Comme φ est une injection alors $\tilde{\varphi}$ est une injection.

2.1.12 Exemple

Si S une partie non vide d'un duo-anneau A formée d'éléments réguliers et si I est idéal de A contenant un élément $\sigma \in \overline{S}$ tel que $I \bigcap \overline{S}$, alors $S^{-1}I$contenant $\frac{\sigma}{\sigma} = 1$ et par conséquent $S^{-1}I = S^{-1}A$

2.1.13 Proposition

S une partie non vide d'un duo-anneau A formée d'éléments réguliers :

(i) Tout idéal J de $S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}I$ où I est un idéal de A
.

(ii) Si I est un idéal de A, alors $S^{-1}I = S^{-1}A$ si et seulement si $I \bigcap \overline{S} \neq \emptyset$

(iii) Si P est un idéal premier de A tel que $P \bigcap \overline{S} \neq \emptyset$, alors $S^{-1}P$ est un idéal premier de$S^{-1}A$

(iv) L'application $p \mapsto S^{-1}P$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de A disjoints avec $\overline{S}$ vers $Spec\,(S^{-1}A)$

Preuve (voir [21])

2.1.14 Définition

Si P est un idéal premier d'un duo-anneau A, alors le complémentaire $S = A - P$ est une partie multiplicative saturée et $S^{-1}A$ notée A_P

2.1.15 Proposition

Si A est un duo-anneau intègre, alors $\bigcap_m A_m = A$ où l'intersection est déterminée sur l'ensemble des idéaux maximaux de A

Preuve (voir [21])

2.1.16 Proposition

Si P est un idéal premier d'un duo-anneau A, alors A_P est un anneau avec comme idéal maximal $pA_P = \{a/s : a \in p \text{ et } s \notin p\}$

2.1.17 Lemme

Soit A un anneau local avec comme idéal maximal m un élément $a \in A$ est inversible si et seulement si $a \notin m$

Preuve(voir [21])

2.1.18 Proposition

Si A est un anneau local, alors tout A-module de type fini B est libre

Preuve(voir [23])

2.2 Section 2 : Module de fraction et algèbre des polynômes dans un duo-anneau

2.2.1 Définition

Soient A un duo-anneau, S est une partie non vide de A formée d'éléments réguliers, $\overline{S}$ la partie multiplicative saturée engendrée par S vérifiant les conditions

de Ore et M un A-module à gauche.
Alors on définit le module de fractions de M à gauche relativement à S noté $S^{-1}M$ par $S^{-1}M = (\overline{S})^{-1}M$ où $(\overline{S})^{-1}M$ est le module de fractions à gauche de M relativement à la partie multiplicative saturée $\overline{S}$ vérifiant les conditions de Ore à gauche (voir [21] et [23]).

2.2.2 Théorème

Soient A un duo-anneau, S une partie non vide de A formée d'éléments réguliers et M un A-module à gauche. Alors le couple $((\overline{S})^{-1}A \otimes_A M, h)$ où $h)$ est le morphisme défini par : $\begin{array}{c} h : M \to (\overline{S})^{-1}A \otimes_A M \\ m \mapsto \; 1 \otimes m \end{array}$ est un module de fractions de M à gauche relativement à S

Preuve

Soit $\varphi : M \to M'$ un morphisme où M' est un $S^{-1}A$-module
Le morphisme $\begin{array}{c} \overline{(S)}^{-1} A \times M \to M' \\ (a/\sigma, m) \mapsto (a/\sigma)\varphi(m) \end{array}$ où $a \in A$ et $\sigma \in \overline{S}$ est A-bilinéaire. Il existe alors un unique morphisme $\overline{\varphi} : (\overline{S})^{-1}A \otimes_A M \to M'$ tel que $\overline{\varphi} \circ h = \varphi$. Comme $h(M)$ engendre $(\overline{S})^{-1}A \otimes_A M$, alors $\overline{\varphi}$ est l'unique morphisme rendant le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "h"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & (\overline{S})^{-1}A \otimes_A M \arrow[dl, dashed, "\overline{\varphi}"] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

Donc d'après la propriété universelle de la localisation, $(\overline{S})^{-1}A \otimes_A M$ est un module de fractions de M relativement à $\overline{S}$.

2.2.3 Corollaire

Soient A un duo-anneau, S une partie non vide de A formée d'éléments réguliers, M un A-Module à gauche et $S^{-1}M$ un module de fractions de M à gauche relativement à S. Alors $S^{-1}M \cong \left(\overline{S}\right)^{-1} A \otimes_A M$ et par conséquent $S^{-1}M \cong A\left[(X_s)_{s\in S}\right] / \langle 1 - sX_s \rangle_{s\in S} \otimes_A M$

Preuve

La preuve résulte des **Propositions 2.1.2, 2.1.5 et 2.2.2**

2.2.4 Proposition

Soient S une partie non vide formée d'éléments réguliers d'un duo-anneau A et $\overline{S}$ la partie multiplicative saturée engendrée par S. Si M est un A-module et si $h_M : M \to S^{-1}M$ est le morphisme de localisation, alors $\ker h_M = \left\{ m \in M : \sigma\, m = 0 \text{ pour tout } \sigma \in \overline{S} \right\}$

Preuve

Notons $K = \{m \in M : \sigma m = 0\}$. Si $\sigma m = 0$, avec $m \in M \text{et} \sigma \in \overline{S}$, alors $h_M(m) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) h_M(\sigma\, m) = 0$, donc $K \subset \ker h_M$. Réciproquement, soit $m \in K$ il existe $\sigma \in \overline{S}$ tel que $\sigma\, m = 0$

Considérons le cas particulier $S = \{\sigma\}$ où$\sigma \in \overline{S}$. On a alors $S^{-1}A = A[x] / (\sigma x - 1)$, on a alors $A[x] \otimes_A M \cong \sum_i Ax^i \otimes_A M$ car $A[x]$ est le A-module libre de base $\{1, x, x^2, \ldots\}$

Par conséquent, tout élément de $A[x] \otimes_A M$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_i x^i \otimes\, m_i \text{où} m_i \in M$

En particulier si $m \in \ker h_M$, alors $0 = 1 \otimes m = (\sigma\, x - 1) \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes m_i = \sum_{i=0}^{n} (\sigma\, x^{i+1} \otimes m_i - x^i \otimes m_i)$,

D'après la **Proposition 2.1.7** , les coefficients vérifient les équations suivantes : $1 \otimes m = -1 \otimes m_0\,;\, x \otimes \sigma\, m_0 = x \otimes m_1\,;\, \ldots ;\, x^n \otimes \sigma\, m_{n-1} = x^n \otimes m_n\,;\, x^{n+1} \otimes \sigma\, m_n = 0$

Il s'en suit que : $m = -m_0,\ \sigma\, m_0 = m_1,\ \ldots,\ \sigma\, m_{n-1} = -m_n,\ \sigma\, m_n = 0$

Par conséquent $\sigma m = -\sigma m_0 = -m_1$ et par récurrence $\sigma^i m = -m_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. En particulier $\sigma^n m = -m_n$ et de même $\sigma^{n+1} m = -\sigma m_n = 0$ dans M. Par conséquent $\ker h_M \subseteq M$

2.2.5 Corollaire

Soient S une partie non vide formée d'éléments réguliers d'un duo-anneau A, $\overline{S}$ la partie multiplicative saturée engendrée par S et M un A-module :

(i) Tout élément $u \in S^{-1}M$ est de la forme $u = \sigma^{-1} m$ où $\sigma \in \overline{S}$ et $m \in M$

(ii) $S_1^{-1} m_1 = S_2^{-1} m_2$ dans $S^{-1}M$ si et seulement si $\sigma \left(S_1^{-1} m_1 - S_2^{-1} m_2 \right) \in M$ où $\sigma \in \overline{S}$

Preuve

(i) Si $u \in S^{-1}M$, alors $u = \sum_i (r_i/\sigma_i)\ m_i$ où $r_i \in A$, $\sigma_i \in \overline{S}$ et $m_i \in M$
Définissons $r = \prod \alpha_i$ et $\hat{\sigma}_i = \prod_{j+i} \alpha_j$ d'où
$u = \sum_i (1/\sigma_i)\ r_i m_i = \sum_i (\hat{\sigma}_i/\sigma)\, r_i m_i = \frac{1}{\sigma} \sum_i \hat{\sigma}_i r_i m_i = \left(\frac{A}{\sigma}\right) m$ où$m = \sum \hat{\alpha}_i m_i \in A$

(ii) Si $\sigma \in \overline{S}$ avec $\sigma (S_2 m_1 - S_1 m_2) = 0$ dans M, alors
$(\sigma/1)\ \ (S_2 m_1 - S_1 m_2) = 0$ dans $S^{-1}M$. Comme ${}^{\sigma}/_{1}$ est inversible, alors $S_2 m_1 - S_1 m_2$ et donc$S_2^{-1} m_2$ réciproquement si $S_1^{-1} m_1 = S_2^{-1} m_2$ dans $S^{-1}M$ alors $\left(\frac{1}{S_1 S_2}\right) (S_2 m_1 - S_2 m_1) = 0$.
Comme $\frac{1}{S_1 S_2}$ est inversible, on a $(S_2 m_1 - S_1 m_2) = 0 \Rightarrow S_2 m_1 - S_1 m_2 \in \ker h_M$
D'après la proposition 1-30, il existe $\sigma \in \overline{S}$ tel que $(S_2 m_1 - S_1 m_2) = 0$

2.2.6 Corollaire

Soient S une partie non vide formée d'éléments réguliers d'un duo-anneau A. Si M est un $S^{-1}A$-module alors $M \cong S^{-1}M$

Preuve

Définissons

$$\begin{aligned} \varphi : M &\to S^{-1}M \\ m &\mapsto 1 \otimes m \end{aligned}$$

Si $\varphi(m) = 0$ alors il existe $\sigma \in S$ tel que $\sigma m = 0$. Comme σ est inversible dans $S^{-1}A$ et M dans $S^{-1}A$ – module, l'équation $m = \sigma^{-1}\sigma m) = 0$ a un sens dans M. D'où φ est injective. Remarquons que, $\left(1/_{\sigma}\right) \otimes m = \varphi(\sigma^{-1}m)$ d'où φ est surjective.

2.2.7 Théorème

Soient S une partie non vide formée d'éléments réguliers d'un duo-anneau A, $\overline{S}$ la partie multiplicative saturée vérifiant les conditions de Ore à gauche engendrée par S. Alors $\overline{S}^{-1}A$ est un A-module plat.

Preuve

Nous devons montrer que si $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'$ est exacte, alors
$0 \longrightarrow \overline{S}^{-1}A \xrightarrow{1\otimes f} \overline{S}^{-1}A \otimes_A B$ est exacte.
Soit $u \in \ker(1 \otimes f)$, du **Corollaire 2.2.4**, on déduit que $u = \sigma^{-1} \otimes m$ où $\sigma \in \overline{S}$, on a alors $0 = (1 \otimes f)\ (u) = \sigma^{-1} \otimes f(m)$. D'où $f(m) \in \ker h_M$
D'après la **Proposition 2.2.5**, il existe $t \in \overline{S}$ tel que $0 = tf(m) = f(tm)$. Par conséquent $0 = 1 \otimes t\,m = t(1 \otimes m) = tu$. Finalement $u = 0$, car t est inversible. Par conséquent $S^{-1}A$ est un A – module plat.

2.2.8 Corollaire

Soient S une partie non vide formée d'éléments réguliers d'un duo-anneau A, $\overline{S}$ la partie multiplicative saturée vérifiant les conditions de Ore à gauche engendrée par S, alors le foncteur localisation $S^{-1}() : {}_AMod \to {}_{\overline{S}^{-1}A}Mod$ qui à tout A-module M fait correspondre $S^{-1}(M) = (\overline{S})^{-1}A \otimes_A M$ et à tout morphisme de A-modules à gauche $f : M \to M'$ fait correspondre le morphisme de $(\overline{S})^{-1}A$-modules $S^{-1}(f)$: $S^{-1}(M) \to S^{-1}(M')$ est un foncteur exact.

Preuve (voir [21]

2.2.9 Proposition

Soient I et J deux idéaux d'un duo-anneau intègre A. Si $I_m = J_m$ pour tout idéal maximal m, alors $I = J$

Preuve

Soit $b \in J$. Définissons $(I : b) = \{a \in A/ab \in I\}$
Soit un idéal maximal de A. Comme $I_m = J_m$, il existe $x \in I$ et $s \notin m$ tel que $\frac{b}{1} = \frac{x}{s}$. Comme A est intègre alors $sb = x \in I$ donc $s \in (I : b)$. Mais comme $s \notin m$, alors $(I : b) \subseteq m$. Par conséquent, $(I : b)$ n'est pas un idéal propre de A car il est contenu dans tout idéal maximal de A. Donc $(I : b) = A$ alors $1 \in (I : b)$ et donc $b = 1.b \in I$. Par conséquent $J \subseteq I$. On montre de même que $I \subseteq J$. D'où le résultat

2.2.10 Proposition

Soit A un duo-anneau

(i) Si M est un A-module avec $M_m = \{0\}$ pour tout idéal maximal m, alors $M = \{0\}$

(ii) Si $f : M \to N$ est un morphisme et $f_m : M_m \to N_m$ est une injection pour tout idéal maximal m, alors f est une injection

(iii) Si $f : M \to N$ est un morphisme et$f_m : M_m \to N_m$ est une surjection pour tout idéal maximal m, alors x est une surjection

(iv) Si $f : M \to N$ est un morphisme et $f_m : M_m \to N_m$ est un isomorphisme pour tout idéal maximal m, alors f est un isomorphisme

Preuve

i) Si $M \neq \{0\}$ alors il existe $x \in M$ tel que $x \neq 0$. Il en résulte que l'annulateur $I = \{a \in A/ax = 0\}$ est un idéal propre de A donc $1 \notin I$. Donc il existe un idéal maximal contenant I or $1 \otimes x = 0$ dans M_m alors $x \in Kerh_M$ est d'après la **Proposition 2.2.4** on a $s \notin m$ tel que $sm = 0$, d'où $s \in I \subseteq m$ ce qui est absurde. D'où $M = \{0\}$

ii) Il existe une suite exacte $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ où $K = Kerf$ et comme le foncteur $S^{-1}()$ est exacte alors la suite
$0 \longrightarrow K_m \longrightarrow M_m \xrightarrow{f_m} N_m$ est exact pour tout idéal maximal m. De (i) on déduit que $K = \{0\}$ et donc f est injective.

iii) Il existe une suite exacte $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow C \longrightarrow 0$ où $C = N/Imf$ et comme le foncteur produit tensoriel est exacte à droite, alors $C_m = \{0\}$ pour tout idéal maximal m, d'où $C = \{0\}$ et comme f surjective alors $C = N/Imf = \{0\}$

iv) résulte de (ii) et (iii)

Chapitre 3

FONCTEURS EXT, TOR ET FONCTEUR $S^{-1}()$

Introduction

Dans ce chapitre sauf mention contraire, A désigne un anneau associatif unitaire (non nécessairement commutatif), M et M' des A-modules à gauche (respectivement à droite), S une partie multiplicative non vide saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche (respectivement à droite)et $S^{-1}M$ un module de fractions à gauche(respectivement à droite) de M en S.
En utilisant les travaux de Pr.Mohamed Ben Fraj Ben MAAOUIA, notamment dans sa thèse de 3è-cycle ([18]), sa thèse d'Etat ([19]), ses articles avec le Pr. Mamadou SANGHARE : "Localisation dans les duo-anneaux" ([21]), concernant la localisation et le foncteur $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}(A) - Mod$ qui est isomorphe au foncteur $S^{-1}A \otimes_A - : A - Mod \longrightarrow S^{-1}(A) - Mod$ et qui conserve entre autres la projectivité , nous avons montré les résultats suivants :

1) $S^{-1}Hom_A(A^n, M) \cong S^{-1}A \otimes_A Hom_A(A^n, M)$,
2) $Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A^n, S^{-1}M))$ est un $S^{-1}(A)$-module à gauche isomorphe au $S^{-1}(A)$-

module $S^{-1}Hom_A(A^n, M)$,

3) $S^{-1}Tor_n^A(M, M')\tilde{=}Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$

4) $Tor_n^A(M, N)_P \cong Tor_n^{A_P}(M_P, N_P)$ où P est un idéal premier de A et $M_P = S^{-1}M$ le module de fractions de M où S est l'ensemble des éléments réguliers de $A - P$.

De plus si A est noethérien et M est de type fini, alors on a :

5) $S^{-1}Ext_A^n(M, M') \cong Ext_{S^{-1}A}^n(S^{-1}M, S^{-1}M')$ et

6) $Ext_A^n(M, N)_P \cong Ext_{A_P}^n(M_P, N_P)$.

7) $Tor_{S^{-1}A}^n(S^{-1}A, M)$ est un A-module à gauche et $Ext_n^{S^{-1}A}(S^{-1}A, M)$ est un A-module à droite.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis au journal Afrika Mathematika.

3.1 Lemme

Soit A un anneau. Considérons le diagramme commutatif suivant formé de morphismes de A-modules à gauche (respectivement à droite) où les lignes sont exactes et où f et g sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M.'' & \longrightarrow & 0 \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \\ N' & \xrightarrow{j} & N & \xrightarrow{q} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Alors il existe un isomorphisme unique $h : M'' \longrightarrow N''$ rendant le nouveau diagramme commutatif

Preuve

a) Existence de h

Soit $m'' \in M''$. Comme p est surjectif, il existe

$m \in m$ tel que $p(m) = m''$

Définissons h par $h(m") = q \circ g(m)$

Soit $u \in M$ tel que $p(u) = m^{''}$, alors $q \circ g(u) = q \circ g(m)$. Comme $p(m) = p(u)$ alors $p(m-u) = 0 \Rightarrow m - u \in \ker p = Imi$ puisque que les lignes sont exactes $m - u = i(m')$ où $m' \in M'$.

Alors $q \circ g(m-u) = q \circ g \circ i(m') = q \circ j \circ f(m^{'}) = 0$ car $q \circ j = 0$. Par conséquent h est bien définie.

b) Unicité de h

Si $h^{'} : M'' \longrightarrow N''$ tel que $h' \circ p = q \circ g$

Soit $m'' \in M''$, choisissons $m \in M$ tel que $p(m) = m''$; on a :

$h' \circ p(m) = h'(m'') = q \circ g(m) = h(m'')$

D'où l'unicité de h

c) Montrons que h est un isomorphisme

D'après ce qui précède, il existe un morphisme h' rendant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} N' & \xrightarrow{j} & N & \xrightarrow{q} & N'' & \longrightarrow & 0 \\ f^{-1}\downarrow & & g^{-1}\downarrow & & \downarrow h' & & \\ M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Il s'agit de montrer que

$h' = h^{-1}$ on a $h^{'} \circ q = p \circ g^{-1} \Rightarrow h^{'} \circ h \circ p = h^{'} \circ q \circ g = p \circ g^{-1} \circ g = p$

Comme p est surjectif alors $\mathbf{s}h^{'} \circ h \circ p = p \Rightarrow h^{'} \circ h = 1_{M''}$.

On montre de même que $h \circ h^{'} = 1_{N''}$Donc $h^{'} = h^{-1}$.

Donc h est isomorphisme

3.2 Lemme

Soit A un anneau. Considérons le diagramme commutatif suivant formé de morphismes de A-modules à gauche (respectivement à droite) où les lignes sont exactes et où g et h sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \\ & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 \longrightarrow & N' & \xrightarrow{j} & N & \longrightarrow & N'' \end{array}$$

Alors il existe un unique isomorphisme $f : M' \longrightarrow N'$ rendant le nouveau diagramme commutatif.

Preuve

La preuve est analogue à celle du **Lemme 3.1**

3.3 Lemme

Considérons le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

(i) Si h_2 et h_4 sont surjectifs et h_5 injectif, alors h_3 est surjectif

(ii) Si h_2 et h_4 sont injectifs et h_1 surjectif alors, h_3 est injectif

(iii) Si h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 sont des isomorphismes alors h_3 est un isomorphisme

Preuve

La preuve résulte du des **Lemmes 3.1 et 3.2**

3.4 Lemme

Soient M un A-module à gauche (respectivement à droite), n un entier naturel strictement positif et S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche (respectivement à droite).Alors $S^{-1}Hom_A(A^n, M) \cong S^{-1}A \otimes_A Hom_A(A^n, M)$.

Preuve

a) Supposons que M est un A-module à gauche, alors $Hom_A(A^n, M)$ est un A-module à droite. En effet, il est claire que $(Hom_A(A^n, M), +)$ est un groupe commutatif. De plus, considérons l'opération :

$$\begin{aligned} Hom_A(A^n, M) \times A &\to Hom_A(A^n, M) \\ (f, a) &\mapsto f.a \end{aligned}$$

où l'application $f.a$ définie par :

$$\begin{aligned} f.a : A^n &\to M \\ b = (a_1, a_2, ..., a_n) &\mapsto (f.a)(b) = f(b.a) \end{aligned}$$

est un homomorphisme de A-module à gauche.Ce qui permet de munir $(Hom_A(A^n, M))$d'une structure de A-module à droite puisque A^n est un $(A - A)$-bimodule.
De même on montre que si M est un A-module à droite, alors $Hom_A(A^n, M)$ est un A-module à gauche car l'opération :

$$\begin{aligned} A \times Hom_A(A^n, M) &\to Hom_A(A^n, M) \\ (a, f) &\mapsto f.a \end{aligned}$$

où l'application :

$$\begin{aligned} f.a : A^n &\to M \\ b = (a_1, a_2, ..., a_n) &\mapsto (f.a)(b) = f(a.b) \end{aligned}$$

est un homomorphisme de A-module à droite, permet de munir $(Hom_A(A^n, M))$d'une structure de A-module à gauche comme A^n est un $(A - A)$-bimodule.

b) $Hom_A(A^n, M)$ étant un A-module à gauche(respectivement à droite), on déduit de [19], chapitre 1, l'isomorphisme $S^{-1}Hom_A(A^n, M) \cong S^{-1}A \otimes_A Hom_A(A^n, M)$.

3.5 Lemme

Soit A un anneau, S une partie multiplicative saturée non vide de A vérifiant les conditions de Ore à gauche.
Soient P et M des A-modules où P est de type fini. Alors il existe un isomorphisme naturel $\psi_P : S^{-1}Hom_A(P, M) \to Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}P, S^{-1}M))$

Preuve

Il suffit de construire les isomorphismes naturels
$\theta_P : Hom_A(P, S^{-1}M) \to Hom_{S^{-1}P}(S^{-1}P, S^{-1}M)$ et
$\varphi_P : S^{-1}Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, S^{-1}M)$ et par conséquent prendre
$\psi_p = \theta_p \circ \varphi_p$

a) Supposons que $P = A^n$ est un A-module libre de type fini. Soit p_1, $p_2, \cdots, p_n$ une base de P, alors $\frac{p_1}{1}, \frac{p_2}{1}, \ldots, \frac{p_n}{1}$ est une base de $S^{-1}P = S^{-1}A \otimes_A A^n$
Le morphisme $\theta_{A^n} : Hom_A(P, S^{-1}M) \to Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}P, S^{-1}M)$ défini par $\theta_{A^n}(f) = \tilde{f}$ avec $\tilde{f}(\frac{p_i}{\delta}) = \frac{f(p_i)}{\delta}$ est bien défini et est un isomorphisme

b) Soit maintenant P un A-module de type fini, alors la suite $A^t \to A^n \to P \to 0$ est exacte.
Appliquons à cette suite les foncteurs contravariants $Hom_A(-, Q)$ et $Hom_{S^{-1}A}(-, Q)$ où $Q = S^{-1}M$. On obtient le diagramme commutatif suivant ou les lignes sont exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & Hom_A(P, Q) & \longrightarrow & Hom_A(A^n, Q) & \longrightarrow & Hom_A(A^t, Q) \\ & \downarrow \theta_P & & \downarrow \theta_{A^n} & & \downarrow \theta_{A^t} \\ 0 \longrightarrow & Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}P, Q) & \longrightarrow & Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A^n, Q) & \longrightarrow & Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}(A)^t, Q) \end{array}$$

Puisque θ_{A^n} et θ_{A^t} sont des isomorphismes alors d'après **le lemme 3.2,** θ_P existe et est un isomorphisme.
L'isomorphisme θ_P est défini par $\theta_P(\beta) = \tilde{\beta}$où$\beta \in Hom_A(P, Q)$ et
$\tilde{\beta} : S^{-1}B \to Q = S^{-1}M$
$\frac{p}{\delta} \mapsto \frac{\beta(p)}{\delta}$
Construisons maintenant φ_P par $\varphi_P : S^{-1}Hom_A(P, M) \to Hom_A(P, S^{-1}M)$
par $\varphi_P : \frac{g}{\delta} \mapsto g_\delta$ où $\begin{array}{l} g_\delta : P \to S^{-1}M \\ \quad p \mapsto g_\delta(p) = \frac{g(p)}{\delta} \end{array}$
D'après le **Lemme 3.4**, on a $S^{-1}Hom_A(P, M) = S^{-1}A \otimes_A Hom_A(P, M)$ et que φ_P est un isomorphisme si P est un A-module libre de type fini.
En appliquant à la suite exacte $A^t \to A^n \to P \to 0$ les foncteurs contravariants exacts à gauche : $Hom_A(-, M)$ et $Hom_A(-, S^{-1}M)$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & S^{-1}Hom_A(P, M) & \longrightarrow & S^{-1}Hom_A(A^n, M) & \longrightarrow & S^{-1}Hom_A(A^t, M) \\ & \downarrow \varphi_P & & \downarrow \varphi_{A^n} & & \downarrow \varphi_{A^t} \\ 0 \longrightarrow & Hom_A(P, S^{-1}M) & \longrightarrow & Hom_A(A^n, S^{-1}M) & \longrightarrow & Hom_A(A^t, S^{-1}M) \end{array}$$

φ_{A^n} et φ_{A^t} étant des isomorphismes, d'après le **Lemme 3.2**, φ_P est un isomorphisme.

3.6 Théorème

Soient A et B deux anneaux et $T : {}_AMod \to {}_BMod$ un foncteur exact et additif. Alors T commute avec le foncteur homologie H_n : pour tout complexe (C, D) de la catégorie ${}_AComp$ et tout entier relatif n, on a :
$H_n(TC, TD) \cong TH_n(C, D)$.

Preuve

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} & & \\ d'_{n+1} \downarrow & & \uparrow k & & \\ 0 \longrightarrow im\, d_{n+1} & \xrightarrow{j} & \ker d_n \longrightarrow H_n(C.) \longrightarrow 0 & & \end{array}$$

Où j et k sont des inclusions et d'_{n+1} est le morphisme d_{n+1}si l'on change C_n par $im\, d_{n+1}$. En appliquant le foncteur T on obtient le diagramme commutatif suivant ou la dernière ligne est exacte.

$$\begin{array}{ccccc} & T\,C_{n+1} \xrightarrow{T\,d_{n+1}} & T\,C_n \xrightarrow{T\,d_n} T\,C_{n-1} & & \\ T\,'d'_{n+1} \downarrow & & \uparrow k & & \\ 0 \longrightarrow T(im\, d_{n+1}) & \xrightarrow{T\,j} & T(\ker d_n) \longrightarrow T\,H_n(C.) \longrightarrow 0 & & \end{array}$$

or T est exacte alors $T(im\, d_{n+1}) = im(T\, d_{n+1})$ et $T(\ker d_n) = \ker(T d_n)$, on a alors

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow im\,(T d_{n+1}) \longrightarrow \ker(T d_n) \\ \downarrow \\ T\,H_n(C.) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par définition on a : $\ker(T\, d_n / im\,(T\, d_{n+1})) = H_n(C.)$ et par conséquent d'après le **Lemme 3.1**, on a : $H_n(T\,C.) \cong T\,H_n(C.)$

3.7 Théorème

Soient A un anneau et S une partie multiplicative non vide de A vérifiant les conditions de Ore à gauche. Alors pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tous A-modules M et M', on a : $S^{-1}Tor_n^A(M, M') \cong Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$

Preuve

a) Pour $n = 0$ on déduit du **Théorème 1.2.24** :
$Tor_0^A(M, M') \cong M_k \otimes M'$ et $Tor_0^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M') \cong S^{-1}M \otimes S^{-1}M'$. De

plus d'après les **Lemmes 3.4** et **3.5** (en prenant T = S^{-1} ( )), on a :
$S^{-1}(M \otimes_A M') \cong S^{-1}M \otimes_A S^{-1}M'$, d'où le résultat.

b) Soit maintenant $P_{M'}$ une résolution projective de M'
Comme le foncteur S^{-1} conserve la projectivité **(Théorème 1.1.24)** alors $S^{-1}(P_{M'})$ est une résolution projective de $S^{-1}M'$.
D'après le **Lemme 3.4**, prouvant l'existence de l'isomorphisme ψ_P, on déduit l'isomorphisme des complexes $S^{-1}(M \otimes {}_AP_{M'}) \cong S^{-1}M \otimes {}_{S^{-1}A}S^{-1}(P_{M'})$.
Par conséquent leurs groupes d'homologie sont isomorphes et comme le foncteur S^{-1}( ) est exact (voir [5]) et par définition du foncteur Tor, on a $H_n(S^{-1}(M\otimes {}_AP_{M'}) \cong S^{-1}H_n(M \otimes {}_AP_{M'}) \cong S^{-1}Tor_n^A(M, M')$;
de même comme $S^{-1}(P_{M'})$ est une résolution projective de $S^{-1}M'$, donc $H_n(S^{-1}M \otimes {}_{S^{-1}A}S^{-1}(P_{M'})) \cong Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$

3.8 Corollaire

Soient A un duo-anneau, P un idéal premier de A, S l'ensemble des éléments réguliers de $A - P$, M et N des A-modules à gauche. Notons respectivement par A_P , M_P et N_P l'anneau de fractions $S^{-1}A$ et les modules de fractions $S^{-1}M$ et $S^{-1}N$.
Alors on a : $Tor_n^A(M, N)_P \cong Tor_n^{A_P}(M_P, N_P)$

Preuve

D'après [19], l'anneau de fractions A_P et les modules de fractions M_P et $N_P$existent.
Il suffit alors d'appliquer le **Théorème 3.7**

3.9 Lemme

Soit F un A-module libre et soit $B = \{bi, i \in I\}$ un système générateur de F
Si M est un A-module quelconque et si $y : B \to M$ est un morphisme quelconque alors il existe un morphisme unique $g : F \to M$ définie par $g(bi) = y(bi)$ pour tout

$i \in I$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[r, "y"] & M \end{tikzcd}$$

Preuve

Tout élément $\upsilon \in F$ s'écrit de manière unique $\upsilon = \sum_{i \in I} r_i b_i$où$r_i \in A$ et presque tous les r_i sont nuls
Définissons $g : F \to M$ par $g\left(\upsilon\right) = \sum_{i \in I} r_i y\left(b_i\right)$ on a bien :
$g\left(b_i\right) = y\left(b_i\right) \forall i \in I$

3.10 Proposition

Tout A-module M est quotient d'un A-module libre F. Par conséquent F est de type fini

Preuve

Soit $F = \sum_{i \in I} A_i$ où $A_i = \langle b_i \rangle \cong A$ pour tout $i \in A$. Alors F est un module libre
Soit $\{x_m : m \in M\}$ une base de F
D'après le **Lemme 3.9**, il existe un morphisme
$g : F \to M$ tel que $g\left(m\right) = m$ pour tout$m \in M$; g est alors surjective et par conséquent on a $F/\ker g \cong M$
Si M est de type fini, Posons $M = \langle m_1, m_2, ..., m_n \rangle$ choisissons F comme le A-module libre dont la base est $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $g : F \to M$ défini par $g\left(x_i\right) = m_i$ est une surjection alors :
$img = \langle g\left(x_1\right), g\left(x_2\right), ..., g\left(x_n\right) \rangle = \langle m_1, m_2, ..., m_n \rangle = M$

3.11 Proposition

Soit A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. Il existe une résolution projective P_* de M pour laquelle chaque P_n est de type fini.

Preuve

Comme M est de type fini, il existe un A-module libre de type fini P_o et un morphisme surjectif $\varepsilon : P_o \to M$. Comme A est un noethérien $\ker \varepsilon$ est de type fini. Par conséquent, il existe un A-module à gauche de type fini P_1 et un morphisme surjectif$A_1 : P_1 \to \ker \varepsilon$
Définissons $D_1 : P_1 \to P_0$ par la composé iod_1 où $i : \ker \varepsilon \to P_0$ est l'inclusion, alors la suite$0 \to \ker D_1 \to P_1 \xrightarrow{D_1} P_0 \to M \to 0$ est exacte.
Le reste de la démonstration se fait par itération comme $\ker D_1$ est de type fini

Remarque

la suite exacte ci-dessus définit une résolution projective de M.

3.12 Théorème

Soient A un anneau noethérien et S une partie multiplicative non vide de A vérifiant les conditions de Ore à gauche, M un A-module à gauche de type fini . Alors on a : $S^{-1}Ext^n_A\,(M, M') \cong Ext^n_{S^{-1}A}\,(S^{-1}M, S^{-1}M')$ pour tout $n \geq 0$ et tout A-module à gauche M'.

Preuve

Comme A est noethérien et M est de type fini, il existe une résolution projective P_M de M pour laquelle chaque terme est de type fini.
D'après le **Lemme 3.4**, il existe un isomorphisme naturel

$\psi_M : S^{-1}Hom\,(M, M') \to Hom_{S^{-1}A}\,(S^{-1}M, S^{-1}M')$ pour tout A-module M'.
On en déduit l'isomorphisme des complexes
$S^{-1}\,(Hom_A\,(P_M, M')) \cong Hom_{S^{-1}A}\,(S^{-1}\,(P_M)\,, S^{-1}M')$
En appliquant le foncteur homologie H_n on a :
$H_n\,(S^{-1}\,(Hom_A\,(P_M, M'))) \;\cong\; S^{-1}H_n\,(Hom_A\,(P_M, M')) \;\cong\; S^{-1}Ext^n_A\,(M, M')$ puis que le foncteur $S^{-1}\,()$ est exacte par conséquent on a :
$H_n\,(Hom_{S^{-1}A}\,(S^{-1}P_M, S^{-1}M')) \;=\; Ext^n_{S^{-1}A}\,(S^{-1}M, S^{-1}M')$ car $S^{-1}\,(P_M)$ est une résolution projective.

3.13 Corollaire

Soient A un duo-anneau, P un idéal premier de A, S l'ensemble des éléments réguliers de $AnP, MetNdesA$-modules à gauche où M est de type fini, A_P, M_PetN_P l'anneau de fractions $S^{-1}A$ et les modules de fractions $S^{-1}M$ et $S^{-1}N$ respectivement.
Alors on a : $Ext^n_A(M, N)_P \cong\; Ext^n_{A_P}(M_P, N_P)$

Preuve

Elle résulte de [19] et du **Théorème 3.13**

3.14 Proposition

Soient A un anneau, S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche, M un A-module à gauche, $S^{-1}(A)$ un anneau de fraction de A relativement à S. Alors $Tor^n_{S^{-1}A}(S^{-1}A, M)$ est un A-module à gauche et $Ext^{S^{-1}A}_n(S^{-1}A, M)$ est un A-module à droite.

Preuve

a) Montrons que $Tor^n_{S^{-1}A}(S^{-1}A, M)$ est un A-module à gauche.
Soit $P_M :\to \cdots \to P_n \overset{d_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \overset{d_2}{\to} P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{d_0}{\to} M \to 0$ une résolution projective de M
Alors $\to \cdots \to S^{-1}A \otimes P_n \overset{d_n^*}{\to} S^{-1}A \otimes P_{n-1} \to \cdots \to S^{-1}A \otimes P_2 \overset{d_2^*}{\to} S^{-1}A \otimes P_1 \overset{d_1^*}{\to} S^{-1}A \otimes P_0 \overset{d_0^*}{\to} S^{-1}A \otimes \to 0$ est une résolution projective de $S^{-1}A \otimes M$
Comme $S^{-1}A$ est une $(A - A)$ bimodule (voir [4]) et P_{n-1}, P_n sont des A-modules à gauche, alors $S^{-1}A \otimes P_{n-1}$ et $S^{-1}A \otimes P_n$ sont des A-modules à gauche. Donc $Ker(1_{S^{-1}A} \otimes d_{n-1})$ et $Im(1_{S^{-1}A} \otimes d_n)$ sont des A-modules à gauche.
Par conséquent $Tor^n_{S^{-1}A}(S^{-1}A, M) = H_n(S^{-1}A \otimes P_M) = \frac{Ker(1_{S^{-1}A} \otimes d_{n-1})}{Im(1_{S^{-1}A} \otimes d_n)}$ est un A-module à gauche.

b) Montrons que $Ext_n^{S^{-1}A}(S^{-1}A, M)$ est un A-module à droite. Il suffit de considérer une résolution injective $E_M : 0 \to M \overset{d_0}{\to} E_0 \overset{d_1}{\to} E_1 \to E_2 \to \cdots \overset{d_{n-1}}{\longrightarrow} E_{n-1} \overset{d_n}{\to} E_n \to \cdots$ de M.
On déduit, comme au a) que :
$Ext_n^{S^{-1}A}(S^{-1}A, M) = H_n(Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A, E_M)) = \frac{Ker(1_{S^{-1}A} \otimes d_{n-1})}{Im(1_{S^{-1}A} \otimes d_n)}$ est un A-module à droite.

3.15 Remarque : Les foncteurs

$Tor^n_{S^{-1}A}(S^{-1}A, -) : S^{-1}A - Mod \longrightarrow A.Mod$ et $Ext_n^{S^{-1}A}(S^{-1}A, -) : S^{-1}A - Mod \longrightarrow Mod - A$ sont alors bien définis.

Chapitre 4

FONCTEUR $S^{-1}()$ ET ISOMORPHISME ADJOINT

Introduction

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, B désigne un anneau associatif unitaire (non nécessairement commutatif), A un sous-anneau de B, ${}_AM$ un A-module à gauche de type fini, ${}_AN_B$ un (A, B)- bimodule de type fini et P_B un B-module à droite , S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche.
La notion de foncteur adjoint à $S^{-1}()$ et les relations entre le foncteur $S^{-1}()$ et les foncteurs homologiques $Ext^n_A(M, -)$, $Ext^n_A(-, M)$ et $Tor^A_n(M, -)$ ont été établies par plusieurs auteurs (voir $[2]\,, chapIV$ et $[8]\,, chapVIIIetXI$).
Dans le cas où l'anneau est non nécessairement commutatif, M.BEN MAAOUIA, avec une partie multiplicative saturée S de A vérifiant les conditions de Ore à gauche, a établi dans ses travaux que le foncteur $S^{-1}()$ est isomorphe au foncteur $S^{-1}A \otimes_A -$ et que le foncteur $S^{-1}()$ est adjoint au foncteur $Hom_A(S^{-1}A-)$ (voir $[19]\,, chapI$ et [5]).
Nous savons que(voir [27]) le foncteur $Ext^0_A(M, -)$ est équivalent au foncteur $Hom_A(M-)$, $Ext^0_A(-, M)$ est équivalent au foncteur $Hom_A(-, M)$ et $Tor^A_0(M, -)$ est équivalent

au foncteur $M \otimes_A -$ qui est isomorphe au foncteur $S^{-1}()$.
Ainsi $Ext^0_{S^{-1}A}(S^{-1}A, -)$ est adjoint à $S^{-1}()$ et $Tor_0^{S^{-1}A}(S^{-1}A, -)$ est isomorphe à $S^{-1}()$.
L'objet de ce chapitre est alors d'établir une généralisation de ces propriétés entre le foncteur $S^{-1}()$ et les foncteurs $Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, -)$ et $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, -)$ respectivement pour tout entier naturel n.
Ainsi nous avons établi les résultats suivants :

1)

$$Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N \otimes_A S^{-1}M, S^{-1}P) \cong Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M, Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, S^{-1}P)$$

2) Si P est injectif, alors on a l'isomorphisme :

$$Ext^n_A(M, Hom_B(N, P)) \cong Hom_B(Tor_n^A(M, N), P)$$

3) Si P est injectif, alors :

$$Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}N, S^{-1}P)) \cong Hom_{S^{-1}B}(Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N), S^{-1}P)$$

4) Si A est noethérien et P est injectif, alors :

$$Tor_n^A(Hom_B(N, P), M) \cong Hom_B(Ext^n_A(M, N), P)$$

5) $Tor_n^{S^{-1}A}(Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}N, S^{-1}P), S^{-1}M) \cong Hom_{S^{-1}B}(Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N), S^{-1}P)$

6) Si B est noethérien, A un sous-anneau de B $S^{-1}A$ l'anneau des fractions de A en S. Alors, pour tout entier naturel n, les foncteurs $Ext^n_{S^{-1}B}(S^{-1}M, -)$ et $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, -)$ sont adjoints.

Le chapitre 4 a fait l'objet d'un article publié par la revue "International Mathematical Forum", Vol. 16, 2016, no. 5, 227 - 237, HIKARI Ltd .

4.1 Définition : Transformations naturelles ou isomorphismes fonctoriels

Soient C et D deux catégories, F et G deux foncteurs de même variance de C dans D. Une transformation naturelle ou isomorphisme fonctoriel de F dans G est une application $\eta :\ F \rightarrow\ G$telle que :

a) Si F et G sont covariants, alors :

$\eta :\ Ob(\mathrm{C}) \rightarrow\ Mor(D)$

$M \mapsto \eta_M$

est une application telle que $\eta_M :\ F(M) \rightarrow\ F(G)$ et pour tout $f \in Mor(C)$ telle que $f :\ M \rightarrow\ N$, alors le diagramme suivant est commutatif.

$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N)$

$\downarrow \eta_M \qquad\qquad \downarrow \eta_N$

$G(M) \xrightarrow{G(f)} G(N)$

b) Si F et G sont contravariants, alors le diagramme suivant est commutatif :

$F(N) \xrightarrow{F(f)} F(M)$

$\downarrow \eta_N \qquad\qquad \downarrow \eta_M$

$G(N) \xrightarrow{G(f)} G(M)$

Exemple (voir [27])

Soit A un anneau, alors on a $Hom_A(A, -) \cong\ A \otimes_A -$

4.2 Définition :Foncteurs adjoints

Soient Λ et Γ deux catégories, $F : \Lambda \rightarrow \Gamma$ et $G : \Gamma \rightarrow \Lambda$ deux foncteurs. On dit que le couple (F, G) est adjoint si pour tout $A \in Ob(\Lambda)$ et pour tout $B \in Ob(\Gamma)$, il existe un isomorphisme $r_{A,B} : Hom_\Lambda(A, G(B)) \rightarrow Hom_\Gamma(F(A), B)$ tel que :

a) pour tout $f \in Hom_\Lambda(A, A')$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Hom_\Lambda(A, G(B)) & \overset{f_*=Hom(f,G(B))}{\longrightarrow} & Hom_\Lambda(A', G(B)) \\ \downarrow r_{A,B} & & \downarrow r_{A',B} \\ Hom_\Gamma(F(A), B) & \overset{F(f)_*=Hom(F(f),B)}{\longrightarrow} & Hom_\Gamma(F(A'), B) \end{array}$$

b) pour tout $g \in Hom_\Gamma(B, B')$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Hom_\Lambda(A, G(B)) & \overset{(G(g))^*=Hom(A,G(g))}{\longrightarrow} & Hom_\Lambda(A, G(B')) \\ \downarrow r_{A,B} & & \downarrow r_{A',B} \\ Hom_\Gamma(F(A), B) & \overset{g^*=Hom(F(A),g)}{\longrightarrow} & Hom_\Gamma(F(A), B') \end{array}$$

4.3 Proposition

1. (voir [27]) Soient A et B deux anneaux et ${}_A\mathrm{M}_B$ un $(A-B)$ bimodule . Alors les foncteurs $Hom_A(M,-) : {}_AM \to {}_BM$ et $M \otimes_B -\ : {}_BM \to {}_AM$ sont adjoints.
   Par conséquent si ${}_AM$, ${}_AN_B$ et P_B sont respectivement un A-module à gauche, un (A, B) bimodule et un B-module à droite, alors on a l'isomorphisme :

   $$Hom_A(N \otimes M, P) \cong Hom_B(M, Hom_A(N, P)$$

2. (voir [21]) Soient A un anneau, S une partie multiplicative saturé vérifiant les conditions de Ore à gauche, $S^{-1}A$ l'anneau des fractions de A en S alors les foncteurs $S^{-1}A \otimes_A -$ et $Hom_A(S^{-1}A-)$ sont adjoints.

4.4 Proposition

Soient A et B deux anneaux et ${}_AM, {}_AN_B$ et P_B respectivement un A-module à gauche de type fini, un (A, B) bimodule de type fini et un B-module à droite , S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche. Alors, on a :

$$Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N \otimes S^{-1}M, S^{-1}P) \cong Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M, Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, S^{-1}P)$$

Preuve

Elle résulte du **Corollaire 3.5** (prouvant que le foncteur $S^{-1}()$ commute avec le foncteur $Hom(P, -)$ si P est un A-module de type fini) et de la **Proposition 4.3**.

4.5 Proposition

Soient A et B deux anneaux et ${}_AM$, ${}_AN_B$ et P_B respectivement un A-module à gauche, un (A, B) bimodule et un B-module à droite, alors on a l'isomorphisme :

$$Hom_A(M \otimes N, P) \cong Hom_B(M, Hom_A(N, P))$$

Preuve

En utilisant la commutativité du produit tensoriel et la **Proposition 4.3**, on a :

$$Hom_A(M \otimes N, P) \cong Hom_A(N \otimes M, P) \cong Hom_B(M, Hom_A(N, P)$$

4.6 Proposition

Soit A un anneau noethérien, alors le foncteur
$S^{-1}(\ ) : A - Mod \to S^{-1}A - Mod$ conserve l'injectivité, c'est-à dire que pour tout A-module M injectif, alors $S^{-1}(M)$ est un S^{-1} A-module injectif.

Preuve

En utilisant le critère de Baer (voir [26] Chapitre 7), il suffit de montrer que le morphisme : $i^* : Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}A, S^{-1}E) \longrightarrow Hom_{S^{-1}A}(J, S^{-1}E)$

est surjective pour tout A-module E injectif et tout idéal de $S^{-1}A$ où $i : J \longrightarrow S^{-1}A$ est l'inclusion.
D'après la **Proposition 2.1.15**, tout idéal J de $S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}I$ où I est un idéal de A.
Comme A est un noethérien, tout idéal de A est un A-module de type finie.
De plus d'après le **Lemme 3.5** le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}Hom_A(A,E) & \longrightarrow & S^{-1}Hom_A(I,E) \\ \downarrow t_A & & \downarrow t_I \\ Hom_{S^{-1}A]}(S^{-1}A, S^{-1}E) & \xrightarrow{i^*} & Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}I, S^{-1}E) \end{array}$$

où les morphismes t_A et t_I des isomorphismes.
Soit $j : I \longrightarrow A$ l'inclusion, alors E étant injectif, on déduit que le morphisme $j^* : Hom_A(A,E) \longrightarrow Hom_A(I,E)$.
Par conséquent le foncteur localisation $S^{-1}()$ étant exacte, on déduit que le morphisme i^* du diagramme si dessus est surjectif.
D'où $J = S^{-1}I$ est un $S^{-1}A$-module injectif.

4.7 Proposition

Soient A et B deux anneaux et ${}_AM, {}_AN_B$ et P_B respectivement un A-module à gauche, un (A,B) bimodule et un B-module à droite. Si P est injectif, alors on a l'isomorphisme :

$$Ext^n_A(M, Hom_B(N,P)) \cong Hom_B(Tor^A_n(M,N), P)$$

.

Preuve

Soit X une résolution projective de M. Par définition du foncteur $Ext^n_A(M,-)$, on a :

$Ext^n_A(M, Hom_B(N, P)) = H_n(Hom_A(X, Hom_B(N, P))) \cong H_n(Hom_B(X \otimes_A (N, P)))$
Comme P est injectif, alors le foncteur $Hom_B(-, P)$ est exact et par conséquent d'après le **Théorème 3.6**, le foncteur homologie H_n commute avec le foncteur $Hom_B(-, P)$. Alors on a : $H_n(Hom_B(X \otimes_A (N, P))) \cong Hom_B(H_n(X \otimes_A (N, P)) \cong Hom_B(Tor^A_n(M, N)P)$. D'où $Ext^n_A(M, Hom_B(N, P)) \cong Hom_B(Tor^A_n(M, N)P)$

4.8 Corollaire

Soient A et B deux anneaux et ${}_AM$, ${}_AN_B$ et P_B respectivement un A-module à gauche, un (A, B) bimodule et un B-module à droite ; S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche.
Si P est injectif, alors on a l'isomorphisme :
$Ext^n_A(S^{-1}M, Hom_B(S^{-1}N, S^{-1}P)) \cong Hom_B(Tor^A_n(S^{-1}M, S^{-1}N), S^{-1}P)$

Preuve

Elle résulte de **4.6 et 4.7**

4.9 Proposition

Soient A et B deux anneaux et ${}_AM, {}_AN_B$ et P_B respectivement un A-module à gauche, un (A, B) bimodule et un B-module à droite.
Si A est noethérien , M est de type fini et P est injectif, alors on a l'isomorphisme :

$$Tor^A_n(Hom_B(N, P), M) \cong Hom_B(Ext^n_A(M, N), P)$$

Preuve

Soit X une résolution projective de M. Comme A est noethérien et M de type fini, la résolution X peut-être choisie comme étant composée de modules projectifs

de type fini (voir [15], V-1.3).
Par définition du foncteur :
$Tor_n^A(Hom_B(N,P),M) = H_n(Hom_B(N,P) \cong_A, X)$
Or comme P est injectif, alors le foncteur $Hom_B(-,P)$ est exact et d'après ([13] , IV-7.2), on a l'isomorphisme $H_n(Hom_B(N,P),X) \cong Hom_B(H_n(Hom_A(X,N),P))$ (2).
Or par définition du foncteur $Ext_A^n(M,-)$, on a $Ext_A^n(M,N) = H_n(Hom_A(X,N))(3)$ pour toute résolution projective X de M.
Donc de (1), (2) et (3) on a :
$Tor_n^A(Hom_B(N,P),M) \cong Hom_B(Ext_A^n(M,N),P)$

4.10 Théorème

Soient A et B deux anneaux et ${}_AM$, ${}_AN_B$ et P_B respectivement un A-module à gauche, un (A,B) bimodule et un B-module à droite ; S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche.
Alors on a l'isomorphisme :

$$Tor_n^{S^{-1}A}(Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}N,S^{-1}P),S^{-1}M) \cong Hom_{S^{-1}B}(Ext_{S^{-1}A}^n(S^{-1}M,S^{-1}N),S^{-1}P)$$

Preuve

Elle résulte de **4.7 et 4.9**

4.11 Théorème

Soient B un anneau noethérien, A un sous-anneau de B, ${}_AM$, ${}_AN_B$ et P_B respectivement un A-module à gauche, un (A,B) bimodule et un B-module à droite, S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche,

$S^{-1}A$ l'anneau des fractions de A en S. Alors les foncteurs $Ext^n_{S^{-1}B}(S^{-1}M, -)$ et $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, -)$ sont adjoints.

Preuve

Pour démontrer ce théorème on peut supposer que N est projectif et P est injectif, par conséquent les foncteurs $Hom_A(-, P)$ et $Hom_B(N, -)$ sont exacts.

1. D'après les **Lemmes 3.4 et 3.5** on a $S^{-1}Hom_A(N, Hom_B(M, P)) \cong S^{-1}Hom_B(M \otimes_A N, P)$, ce qui équivaut à $Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M, S^{-1}P)) \cong Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}} S^{-1}N, S^{-1}P)$
   D'après **1.1.24 et 4.6** $S^{-1}M$ est projectif et $S^{-1}P$ est injectif, donc les foncteurs $Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, -)$ et $Hom_{S^{-1}B}(-, S^{-1}P)$ sont exacts.
   Donc d'après la **Proposition 4.5** on a :
   $H_n[Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M, S^{-1}P))] \cong H_n[Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N, S^{-1}P)]$ ce qui équivaut à $Hom_{S^{-1}A}[H_n(S^{-1}N, Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M, S^{-1}P))] \cong Hom_{S^{-1}B}[H_n(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N, S^{-1}P)]$
   Soient X_N une résolution projective de $S^{-1}N$ et Y_P une résolution injective de $S^{-1}P$.
   On a alors $Hom_{S^{-1}A}[H_n(X_N, Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M, S^{-1}P))] \cong Hom_{S^{-1}B}[H_n(S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N, Y_P)]$ ce qui équivaut à $Hom_{S^{-1}A}[S^{-1}N, Ext^n_{S^{-1}B}(S^{-1}M, S^{-1}P)] \cong Hom_{S^{-1}B}[Tor_n^{S^{-1}A}($
2. Démontrons maintenant par récurrence sur $n \in N$ que les deux diagrammes suivants, où $F = (Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, -))$ et $G = Ext^n_{S^{-1}B}(S^{-1}M, -)$ sont commutatifs :

Soient $f : S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}N'$ et $g : S^{-1}P \longrightarrow S^{-1}P'$

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, G(S^{-1}P)) & \overset{f_*=Hom(f,G(S^{-1}P))}{\longrightarrow} & Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N', G(S^{-1}P)) \\
\downarrow r_{S^{-1}N, S^{-1}P} & & \downarrow r_{S^{-1}N', S^{-1}P} \\
Hom_{S^{-1}B}(F(S^{-1}N), S^{-1}P) & \overset{(Ff)_*=Hom(F(f),S^{-1}P)}{\longrightarrow} & Hom_{S^{-1}B}(F(S^{-1}N'), S^{-1}P)
\end{array} \tag{4.1}$$

$$
\begin{array}{ccc}
Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, G(S^{-1}P)) & \stackrel{G(g)^*=Hom(S^{-1}N,G(g))}{\longrightarrow} & Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}N, G(S^{-1}P')) \\
\downarrow r_{S^{-1}N,S^{-1}B} & & \downarrow r_{S^{-1}N',S^{-1}P} \\
Hom_{S^{-1}B}(F(S^{-1}N), S^{-1}P) & \stackrel{g^*=Hom(F(S^{-1}N),g)}{\longrightarrow} & Hom_{S^{-1}B}(F(S^{-1}N), S^{-1}P')
\end{array}
\tag{4.2}
$$

a) Pour $n=0$, on a $Ext^0_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-) \cong Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-)$ et $Tor_0^{S^{-1}B}(S^{-1}M,-) \cong S^{-1} \otimes_{S^{-1}A} -$ or (voir[21], les foncteurs $Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-)$: $S^{-1}A - Mod \to S^{-1}B - Mod$ et $M \otimes_{S^{-1}B} - : S^{-1}B - Mod \to S^{-1}A - Mod$ sont adjoints. Il en résulte que les diagrammes (1) et (2) sont commutatifs en prenant $F = M \otimes_{S^{-1}A} -$ et $G = Hom_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-)$

b) Supposons que pour tout entier $k \leqslant n$ les diagrammes (1) et (2) sont commutatifs où $F = Tor_k^{S^{-1}A}(S^{-1}M,-)$ et $G = Ext^k_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-)$.
Montrons alors que (1) et (2) sont commutatifs en posant $F = Tor_{n+1}^{S^{-1}A}(S^{-1}M,-)$ et $G = Ext^{n+1}_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-)$.
Soit $P_{S^{-1}M} : \cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} S^{-1}N \longrightarrow 0$
Une résolution projective de $S^{-1}M$ de n^{iem} noyau $K_n = Ker(d_n)$.
D'après les **Lemmes 1.2.39** et **1.2.40** on a respectivement :
$Ext^{n+1}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}P) \cong Ext^1_{S^{-1}A}(K_{n-1}, S^{-1}P)$
et $Tor_{n+1}^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N) \cong Tor_1^{S^{-1}A}(K_{n-1}, S^{-1}N)$
Par conséquent il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux foncteurs $Ext^1_{S^{-1}A}(K_{n-1},-)$ et $Tor_1^{S^{-1}A}(K_{n-1},-)$.

c) On conclut alors que pour tout entier naturel n les foncteurs $Ext^n_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-)$ et $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M,-)$ sont adjoints.

Remarque

Si A est un sous-anneau de B et S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche, l'anneau de fractions $S^{-1}B$ a un sens, ce qui n'est pas nécessairement le cas si A et B sont deux anneaux quelconques.

Cependant, si B est une A-algèbre, le théorème 4.11 peut toujours être vérifié si $S^{-1}B$ est une $S^{-1}A$-algèbre.

4.12 Corollaire

Soient A un anneau noethérien et S une partie multiplicative saturée de A vérifiant les conditions de Ore à gauche, $S^{-1}A$ l'anneau des fractions de A en S. Alors les foncteurs $Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}A, -)$ et $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}A, -)$ sont adjoints.

Preuve

Elle résulte du **Théorème 4.11** et du fait que l'anneau $S^{-1}A$ est un $(S^{-1}A - S^{-1}A)$-bimodule.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons utilisé principalement les travaux de Monsieur Mohamed Ben Fraj Ben MAAOUIA notamment sa thèse d'Etat([19]), sa thèse de troisième cycle ([18])et ses articles ([20] et [21])et le livre Advanced Modern Algebra de J.J.ROTMAN ([26]) pour construire l'anneau de fractions $(\overline{S})^{-1}A$ et le module de fractions $(\overline{S})^{-1}M$ où A est un duo-anneau, S une partie non vide de A formée d'éléments réguliers et $\overline{S}$ la partie multiplicative saturée engendrée par S. Nous avons élargi les propriétés du foncteur localisation $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}A - Mod$ en montrant qu'en plus du fait qu'il est exact, covariant, additif, conserve les limites directes et indirectes, est un monofoncteur et un épifoncteur (voir [21]), il commute avec les foncteurs $Tor_n^A : A - Mod \longrightarrow S^{-1}A - Mod$ et $Ext_A^n : A - Mod \longrightarrow S^{-1}A - Mod$ si A est noethérien et M est un module de type fini.
Nous avons aussi généralisé le résultat :les foncteurs $S^{-1}A \otimes_A -$ et $Hom_A(S^{-1}A-)$ sont adjoints (voir [21]) en montrant que les foncteurs $Ext_B^n(S^{-1}M, -)$ et $Tor_n^A(S^{-1}M, -)$ sont adjoints où B est un anneau noethérien et A un sous-anneau de B.
Cependant, beaucoup des pistes restent encore à explorer :

1) Les foncteurs $Ext_B^n(S^{-1}M, -)$ et $Tor_n^A(S^{-1}M, -)$ sont-ils adjoints lorsque A est un anneau noethérien et B une A- algèbre ?

2) Peut-on généraliser le **théorème 4.14** dans le cas où l'anneau B n'est pas nécessairement noethérien ?

3) Le foncteur $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}A - Mod$, conserve-t-il les extensions scindées ? c'est-à dire, si $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est extension scindée de M par P dans A- Mod,
$0 \longrightarrow S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}P \longrightarrow 0$ est-elle une extension scindée de $S^{-1}M$ par $S^{-1}P$ dans $S^{-1}A - Mod$?

4) Le foncteur $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}A - Mod$, conserve-t-il les dimensions homologiques et cohomologiques, notamment les dimensions projectives, globale projective, injective, globale injective, plate et globale faible ?

5) Le foncteur $S^{-1}() : A - Mod \longrightarrow S^{-1}A - Mod$, conserve-t-il les produits direct et indirect de modules ?

Bibliographie

[1] ANDERSON, F. W. and FULLER, K. R. *Rings and categories of modules. New York, Springer - Verlag (1973).*

[2] Antoine Chambert-Loir, Algebre commutative, *Cours de l'Universite de Rennes I*,(2006-2007), 85 - 87.

[3] ATIYAH M. F., FRS I. G. MACDONALD *University of OXFORD : Introduction to commutative algebra, Addison - Wesley Publishing Company.*

[4] AUGUST ERNEST BEHRENS *Rings theory, Academic Press New York and London (1972).*

[5] BOURBAKI N. *Eléments de Mathématiques (algèbre chapitre 1 à 3), Hermann, Paris (1970).*

[6] BOURBAKI N. *Eléments de Mathématiques (algèbre chapitre à 7) Masson Paris, New York, Barcelone, Milan Mexico et Rio de Janeiro 1981*

[7] BOURBAKI N. *Eléments de Mathématiques (algèbre chapitre 10) Masson, Paris New York, Barcelone, Milan Mexico et Rio de Janeiro 1980.*

[8] BOURBAKI N. *Eléments de Mathématiques (Théorie deqs ensembles chapitre 1 à 4) Paris, Milan, Barcelone et Mexico 1990.*

[9] BRIGNS H. H. *Three questions on duo - Rings, Pacific Journal of Mathematics Vol. 58, N°*2*, 1975.*

[10] COLBY, R. R. *Rings which have flat injective modules. Journal of algebra 35, 239 - 252 (1975).*

[11] DAMIANO, ROBERT F. *Coflat rings and modules. PACIFIC Journal of Mathematics Vol. 81, N°2, 1979.*

[12] Daouda FAYE, Mohamed Ben MAAOUIA et Mamadou SANGHARE, *Localisation In Duo-Ring and Polynomials Algebra, Dakar's Workshop in Honor of Prof. KAIDI, Springer, 2014, june.(article accepté).*

[13] Daouda FAYE, Mohamed Ben MAAOUIA et Mamadou SANGHARE, *Functor $S^{-1}()$ and Adjoint Isomorphism, International Mathematical Forum, Vol. 11, 2016, no. 5, 227- 237.*

[14] G. RENAULT, Gauthier, Villars, *Algèbre non commutative*, Paris-Bruxelles, Montréal, (1975).

[15] Henri CARTAN et Samuel EILENBERG, *Homological Algebra*, New Jersey, Princeton University Press(1956).

[16] JIANLONG Chen *P. projective modules. Communication in algebra. 24(3), 821 - 831 (1996).*

[17] Jans. J. *Rings and homology, Halt, 1964*

[18] Mac LANE, S. *Homology, Academic Press, 1963.*

[19] MATLIS E. *Injective modules over noethérian rings. Pacific J. Math, 8 : 511 - 528, 1958.*

[20] Mohamed Ben MAAOUIA, *These 3ème cycle*, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Juillet (2003).

[21] Mohamed Ben MAAOUIA, *These d'Etat*, Université Cheikh Anta Diop, Dakar,(2011).

[22] Mohamed Ben MAAOUIA et Mamadou SANGHARE, *Anneaux et modules de fractions*-International Journal of Mathematic- mai (2012).

[23] Mohamed Ben MAAOUIA et Mamadou SANGHARE, *: Localisation dans les duo - anneaux*, Afrika Mathematika, (2009).

[24] NORTHCOTT, D. *Introduction to homological algebra, Cambridge, 1960.*

[25] PIRTLE Elbert M.(Kansas Ciry, Missouri) *Localisation in duo - Ring.*

[26] ROTMAN Joseph J, *Advanced Modern Algebra*, Printice Hall, 1*st* edition(2002), 898 - 921.

[27] ROTMAN Joseph J, *Notes on homological algebra* , University of Illinois,Urbana, 1968

[28] ROTMAN Joseph J, *An introduction to homological algebra* , Académic Press New York,(1972).

RESUME

Cette thèse s'inspire des questions ouvertes des travaux de Monsieur Mohamed BEN MAAOUIA, Maitre de Conférences à l'UGB de Saint-Louis (thèse $3^{ème}$ *cycle, thèse d'Etat et articles). En effet, la problématique qui sous-tend ce travail de recherche est la suivante : dans un anneau commutatif* A*, on peut construire un anneau de fractions* $S^{-1}A$ *à partir d'une partie non vide de* A *ne contenant pas zéro en considérant la partie multiplicative saturée* $\overline{S}$ *engendrée par* S*. Dans le cas où l'anneau* A *n'est pas commutatif, il n'est pas évident que* $\overline{S}$ *existe, soit saturée et vérifie les conditions de Ore, ce qui est une condition nécessaire et suffisante (voir thèse d'Etat M.BEN MAAOUIA) pour pouvoir construire l'anneau de fractions* $(\overline{S})^{-1}A$*.*

Par ailleurs, compte tenu des isomorphismes $Tor_0^A(S^{-1}A,-) \cong S^{-1}A \otimes_A -$ *et* $Ext_A^0(S^{-1}A,-) \cong Hom_A(S^{-1}A,-)$ *et du fait que les foncteurs* $S^{-1}A \otimes_A -$ *et* $Hom_A(S^{-1}A,-)$ *sont adjoints (voir thèse d'Etat M.BEN MAAOUIA), les foncteurs* $Ext_A^0(S^{-1}A,-)$ *et* $Tor_0^A(S^{-1}A,-)$ *sont alors adjoints.*
Peut-on alors généraliser ce résultat pour tout entier naturel n *et tout* A*-module* M*, c'est-à-dire, les foncteurs* $Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M,-)$ *et* $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M,-)$ *où* B *est un anneau,* A *un sous-anneau de* B*,* S *une partie multiplicative saturée de* A *vérifiant les conditions de Ore à gauche et* M *un* A*-module à gauche sont-ils adjoints ?*
Les réponses à ces questions, entre autres, ont fait l'objet des résultats suivants :

- *Soit* A *un duo-anneau,* S *une partie non vide de* S *formée d'éléments réguliers, alors* $\overline{S}$ *est une partie multiplicative saturée de* A *qui vérifie les Conditions de Ore à gauche ;*
- $S^{-1}A$ *existe et* $S^{-1}A \cong A\left[(X_s)_{s\in S}\right]/\langle 1-sX_s\rangle_{s\in S}$ *où* $\langle 1-sX_s\rangle_{s\in S}$ *est l'idéal de l'algèbre des polynômes à* S *variables* $A\left[(X_s)_{s\in S}\right]$ *engendré par l'ensemble des polynômes* $\{1-sX_s, s\in S\}$ *;*
- $S^{-1}A \cong \left(\overline{S}\right)^{-1}A$ *;*
- *En posant* $S^{-1}M = \left(\overline{S}\right)^{-1}M$ *, on a* $S^{-1}M \cong \left(\overline{S}\right)^{-1}A \otimes_A M$ *où* M *est un* A*-module et* $S^{-1}M$ *le module de fractions de* M *en* S *;*
- $S^{-1}Tor_n^A(M,M') \cong Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$ *où* n *est entier naturel où* M *et* M' *deux* A*-modules ;*
- $S^{-1}Ext_A^n(M,M') \cong Ext^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}M')$ *où* n *est entier naturel et* M *est un* A*-module de type fini et* M' *un* A*-module quelconque ;*
- *les foncteurs* $Ext^n_{S^{-1}B}(S^{-1}M,-)$ *et* $Tor_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M,-)$ *où* B *est un anneau,* A *un sous-anneau de* B*,* S *une partie multiplicative saturée de* A *vérifiant les conditions de Ore à gauche,* M *un* A*-module à gauche de type fini sont adjoints.*