

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Année : 2014 - 2015

N° d'ordre : 75

THÈSE DE DOCTORAT UNIQUE

Mention : Mathématiques et Modélisation

Spécialité : Analyse, statistiques et applications

Présentée par :

Mohamed Taki ABDOUL-KARIM

TITRE

Une caractérisation des points de bifurcation de Hopf
dans le cadre des systèmes dynamiques multi-retards

Soutenue le 13 Avril 2016 devant le jury composé de :

Président :

Hamidou DATHE, Professeur titulaire, Université Cheikh Anta Diop de Dakar (Sénégal)

Rapporteurs :

- Gabriel BISSANGA, Professeur titulaire, Université Marien Nguabi de Brazzaville (Congo)
- Gabriel B. NDIAYE, Maître de conférences, Université Cheikh Anta Diop de Dakar (Sénégal)
- Ousséini SO, Maître de conférences, Université de Ouagadougou (Burkina Faso)

Examineurs :

- Roger Marcelin FAYE, Professeur titulaire, Université Cheikh Anta Diop de Dakar (Sénégal)
- Ibrahima MBAYE, Maître de conférences, Université de Thiès (Sénégal)
- Salam SAWADOGO, Professeur titulaire, Ecole polytechnique de Thiès (Sénégal)

Directeur de thèse :

Benjamin MAMPASSI, Professeur titulaire, Université Cheikh Anta Diop de Dakar (Sénégal)

Dédicace

A mes parents

A mes deux filles : Faatuma et Maryam

Remerciements

Je loue Allah pour avoir permis que ce travail voie le jour, en me donnant la volonté le courage et la ténacité qu'il fallait pour effectuer ce travail.

Je remercie vivement et respectueusement le professeur Benjamin MAMPASSI pour avoir accepté de diriger ce travail. Ce travail est le fruit des ses orientations claires et je ne peux lui remercier suffisamment pour ses conseils, et sa disponibilité à suivre le travail, sans parler de l'environnement propice qu'il a créé pour que la recherche puisse être bien menée.

Mes sincères remerciements vont à l'endroit de monsieur Hamidou DATHE, professeur titulaire à l'université Cheikh Anta Diop, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider mon jury de thèse.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs Gabriel BISSANGA, professeur titulaire à l'université Marien Ngouabi, Ousséini SO, maître de conférences à l'université de Ouag I Pr Joseph KI-ZERBO et Gabriel Birame NDIAYE, maître de conférences à l'université Cheikh Anta Diop, d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je leurs en suis reconnaissant.

J'adresse mes vifs remerciements à messieurs Ibrahima MBAYE, maître de conférences à l'université de Thiès ; Salam SAWADOGO, professeur titulaire à l'université de Thiès ; Roger Marcelin FAYE, professeur titulaire à l'université Cheikh Anta DIOP pour leur participation au jury. Je leur exprime ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à l'égard des membres de l'équipe d'Analyse Numérique du professeur MAMPASSI, avec qui j'ai eu des contacts privilégiés notamment Dr Franck Davhys Reval LANGA, Dr Mahamat Saleh DAOUSSA HAGGAR, Pr Hilaire NKOUNKOU, Siniki NDEUZOUMBET, Dr Gabyi SEWORÉ, Dr Yannick Alain Servais WELLOT, Dr Kossadoum NGARMADJI, Dr Temga DJAOKAMLA, Dr Djibet MBAIGUESSE, Dr Aboubakar TRAORÉ, Fabrice OUEDRAOGO, Hervé OUEDRAOGO, Dr Octave RINGAR, et les autres.

Je remercie professeur Mamadou BARRY pour son soutien constant.

Merci à Mon ami Dr Ernest BAZUBWABO pour sa disponibilité, ses conseils notamment

toutes les fois que j'ai pu compter sur lui pour qu'il relise mon document et pour les nombreuses fois que nous avons discuté pendant des heures sur les résultats de cette thèse. je lui exprime ma gratitude.

Un très grand Merci à Dr Papa Cheikhou Diop et tous les membres du département de mathématique de l'université de Thiès pour leur accueil chaleureux et leur soutien.

Je remercie infiniment professeur El hadji Issa SALL, président de l'université du Sahel pour sa collaboration et son soutien.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit géomètres et algébristes avec qui j'ai discuté longuement des résultats de cette thèse. Il s'agit notamment de Dr Cheikh KHOULÉ, Dr Ahmet NDIAYE, Dr Bakary MANGA, Cheikh LO, Ousmane NDIAYE, Mohamed TRAORÉ. je leur en suis vraiment reconnaissant

Je remercie infiniment mon ami et frère Abdallah Voundanou ADAM, pour son soutien et son accompagnement permanent, particulièrement le long de ce travail.

Mes remerciement vont à l'endroit de mes frères de la Jama'a particulièrement Ahamada ISSA, Abdoulanziz IDJABOU, Ibrahim MOHAMED, Youssouf AHAMADA, Farahane ALI BAKAR, Mohamed Ali NAKIB,....., pour la fraternité sincère que nous partageons depuis des années et qui m'a été d'une importance capitale dans la réalisation de ce travail.

Je remercie, mes parents, mes frères, mes soeurs et toute ma famille pour leurs soutiens et particulièrement YOUNOUSSA qui a été présent durant une très grande de la période de mon travail et qui m'a fortement soutenu.

Je remercie mon beau père Abdallah ATOISSI pour son soutien et sa compréhension qui m'ont toujours poussé à aller de l'avant. Je remercie par ailleurs mes beaux frères, particulièrement El-anis pour son soutien permanent.

Je remercie tous ce qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

Enfin, mes plus tendres remerciements vont à l'endroit de celle qui m'a accompagné et supporté durant les années qu' a duré cette thèse et qui continuera à le faire - je l'espère-encore longtemps. Son rôle dans la réalisation et l'aboutissement de cette thèse est important. Elle a partagé avec moi les moments d'angoisse comme ceux de joie. Un très grand merci donc à Farida, avec tout mon amour.

Résumé

De nombreux systèmes dans la nature présentent des phénomènes de retards. Leur évolution temporelle n'est pas seulement définie à partir d'un simple vecteur d'état exprimé au présent mais dépend aussi du passé. De tels systèmes sont dits héréditaires. Ces phénomènes sont modélisés mathématiquement par des équations différentielles fonctionnelles à retards (EDFR). L'étude sur les états asymptotiques de ces systèmes (stabilité, bifurcation et instabilité) a suscité un très grand intérêt ces dernières décennies. Parmi les problèmes rencontrés, celui de la caractérisation des points de bifurcation de Hopf s'est révélée particulièrement important puisqu'il permet de connaître les états transitoires de stabilité vers l'instabilité.

La théorie des bifurcations de Hopf est largement développée dans la littérature. Dans un certain nombre de situations, l'ensemble des points de bifurcation de Hopf est complètement caractérisé. Cependant, lorsque les paramètres considérés sont des retards, les points de bifurcation de Hopf ainsi que leurs directions de bifurcation sont difficiles à déterminer. Bien qu'il existe quelques résultats "satisfaisants" pour des systèmes différentiels à un ou à deux retards scalaires, le problème de la caractérisation des points de bifurcation de Hopf dans le cas de plusieurs retards variables restent encore un sujet ouvert.

Au vu de ces difficultés, nous développons donc dans cette thèse une approche basée sur la théorie des courbes denses. Précisément, l'idée fondamentale est de construire une courbe remplissant, au sens de la densité, l'espace des paramètres retards et ainsi de pouvoir se ramener à un problème à un seul paramètre. Grâce à ce procédé nous formulons un schéma algorithmique permettant de générer des points de bifurcation de Hopf. Nous avons aussi montré que l'on pouvait, sous certaines conditions, se contenter de chercher les racines se trouvant dans les courbes denses à cause de la densité des ces dernières dans l'ensemble des racines.

Mots clés : Equation différentielle fonctionnelle à retard, bifurcation de Hopf, stabilité, transformation réductrices, Courbes α -denses

Notations

Ensembles et nombres

- \mathbb{R} : ensemble de nombres réels.
- \mathbb{R}_+ : ensemble de nombres réels positifs ou nuls.
- \mathbb{C} : ensemble de nombres complexes.
- \mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur un corps des réels.
- $[a, b]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- $]a, b[$: intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- $[a, b[$ ou $[a, b)$: intervalle semi - ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- $[1, \dots, n]$: entiers naturels de 1 à n .
- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ ou bien \mathcal{C} : ensemble de fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R}^n .
- \mathcal{C}_a : ensemble des fonctions continues bornées par une constante réelle $a > 0$.
- $t \in \mathbb{R}_+$: variable temporelle.
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: dérivée de la variable x par rapport au temps.
- $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$: seconde dérivée de x par rapport au temps.

Vecteurs et fonctions

- x^T : transposé du vecteur x .
- $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$: vecteur de composantes x_i .
- $x(t, t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^n$: vecteur de \mathbb{R}^n représentant l'état d'un système à l'instant t ayant pour état $\varphi_0 \in \mathcal{C}$ à l'instant initiale t_0 .
- x_t : fonction de classe \mathcal{C} définie par $x_t(\theta) = x(t + \theta), \forall \theta \in [-\tau, 0]$ où $\tau > 0$ est donné.
- $|\cdot|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
- $\|\cdot\|$: norme sur \mathbb{R}^n .
- $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$: norme sur \mathcal{C} définie par $\forall \varphi \in \mathcal{C} : \|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|$.

Matrices

- A^T : transposée de la matrice A .
- $A > 0$ (respectivement $A < 0$) : A définie positive (respectivement définie négative).

-
- $\|A\|$: norme matricielle de A : $\|A\| = \sup_{u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$.
 - I_n : matrice identité d'ordre n .

Acronymes

- EDO : Equation différentielle ordinaire
- EDF : Equation différentielle fonctionnelle
- EDFR : Equation différentielle fonctionnelle retardée

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | <i>Représentation des trajectoires des solutions de l'équation différentielle (1.3) en variant les retards avec comme condition initiale $x_0 = 10$</i> | 5 |
| 1.2 | <i>Représentation des trajectoires des solutions du système d'équations différentielles (1.5) en variant les retards avec pour condition initiale $(x_0 = 10, y_0 = 10)$</i> | 6 |
| 2.1 | <i>Illustration de la fonction $x_t(\theta)$</i> | 13 |
| 2.2 | <i>Stabilité au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre x_e</i> | 25 |
| 2.3 | <i>Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre x_e</i> | 27 |
| 2.4 | <i>Une illustration de bifurcation de Hopf pour le système différentiel $\frac{dx}{dt} = -y + x(\alpha - x^2 - y^2)$, $\frac{dy}{dt} = x + y(\alpha - x^2 - y^2)$. L'origine est un point fixe pour toutes les valeurs de α. En $\alpha = 0$, on a une bifurcation de Hopf : l'origine devient instable et il apparait une solution périodique stable, comme on peut le voir sur le diagramme de bifurcation où l'on trace le rayon r du cercle en fonction de α. En $\alpha > 0$ la trajectoire de phase se dirige vers le point fixe à l'origine.</i> | 32 |
| 2.5 | <i>Une illustration de la bifurcation de Hopf pour le système $\frac{dx}{dt} = \beta x - \alpha y$, $\frac{dy}{dt} = \alpha x + \beta y$. Lorsque $\alpha = 3$ et $\beta = -1$, (a) et (b) la trajectoire est stable au niveau de l'origine et (c) la trajectoire de phase se dirige vers le point fixe à l'origine. Lorsque $\alpha = 3$ et $\beta = 0$, (d) et (e), la trajectoire est oscillatoire donc on a une bifurcation de Hopf. (f) la trajectoire de phase est une ellipse. Lorsque $\alpha = 3$ et $\beta = 1$, (g) et (h) la trajectoire est instable et (i) la trajectoire de phase, tous les points fuient l'origine.</i> | 33 |
| 3.1 | <i>Illustration des zones de stabilité et d'instabilité pour le système (3.40)</i> | 54 |
| 4.1 | <i>Illustration de l'α densité de la spirale d'Archimède</i> | 58 |
| 4.2 | <i>Illustration de l'α densité de la courbe $a\cos(\alpha_i\theta)$ pour $a= 10$ et pour différentes valeurs de α</i> | 61 |
| 4.3 | <i>Ensemble de points des bifurcations de Hopf pour l'équation différentielle (2) restreint au pavé $[0.25, 2.85] \times [0, 5]^2$ dans l'espace fréquence-retard.</i> | 68 |
| 4.4 | <i>Diagramme des bifurcations de Hopf dans le plan des paramètres retards (τ_1, τ_2) restreint dans un carré relativement à des niveaux de fréquences données.</i> | 69 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.5 | <i>Un faisceau de solutions relatives à des paramètres de bifurcation de Hopf.</i> | 69 |
| 4.6 | <i>Illustration de Solution de Hopf pour les paramètres retard $\tau_1 = .3925$ et $\tau_2 = .7500$, (fig (b)) et solution stable et instable pour une perturbation $\varepsilon = 0,05$ sur les paramètres, (a) et (b).</i> | 70 |
| 4.7 | <i>Ensemble de points des bifurcations de Hopf pour l'équation différentielle (3) restreint au pavé $[1.5, 4] \times [0, 5]^2$ dans l'espace fréquence-retard.</i> | 70 |
| 4.8 | <i>Diagramme des bifurcations de Hopf dans le plan des paramètres retards (τ_1, τ_2) restreint dans un carré relativement à des niveaux de fréquences données.</i> | 71 |
| 4.9 | <i>Un faisceau de solutions relatives à des paramètres de bifurcation de Hopf.</i> | 71 |
| 4.10 | <i>Représentation de la trajectoire de solution pour l'exemple à partir de l'état initial $x(0) = (1.3, 1.3)$. Pour toutes les figures, sur le côté gauche, la première composante de $x(t)$ est représentée par la ligne en trait plein, tandis que la seconde est représentée par la ligne en pointillée. La trajectoire de bifurcation et le portrait de phase sont représentés dans les figures (a) et (b). Les figures (c) et (d) représentent le cas de stabilité. Les figures (e) et (f) illustrent le cas d'instabilité</i> | 72 |
| 4.11 | <i>Ensemble de bifurcations de Hopf dans l'espace de paramètres retard (τ_1, τ_2, τ_3) relatif au système différentiel (4) pour des valeurs des fréquences données.</i> | 74 |
| 4.12 | <i>Diagramme de bifurcation de Hopf sur le plan (τ_1, τ_2) selon les niveaux de paramètres τ_3 et des valeurs de fréquences données.</i> | 75 |

Table des matières

| | |
|---|-------------|
| Dedicace | ii |
| Remerciement | iv |
| Notations | v |
| Liste des figures | viii |
| 1 Introduction | 1 |
| 1.1 Un point historique | 2 |
| 1.2 Impact des retards | 4 |
| 1.3 Etat de l'art | 7 |
| 1.4 Problématique | 9 |
| 1.5 Objectif | 9 |
| 1.6 Organisation du travail | 10 |
| 2 Généralités sur les systèmes dynamiques retardés | 11 |
| 2.1 Généralités sur les équations à retards | 12 |
| 2.1.1 Définitions | 12 |
| 2.1.2 Existence, unicité et dépendance aux conditions initiales | 17 |
| 2.2 Stabilité | 23 |
| 2.2.1 Définitions | 24 |
| 2.2.2 Stabilité uniforme | 25 |
| 2.2.3 Stabilité asymptotique | 26 |
| 2.2.4 Stabilité exponentielle | 26 |
| 2.2.5 Stabilité des systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov | 27 |
| 2.2.6 Approche par fonctionnelle de Krasovskii | 28 |
| 2.2.7 Approche par fonction de Razumikhin | 29 |
| 2.3 Bifurcations et solutions périodiques | 30 |
| 2.3.1 Bifurcation de Hopf | 31 |
| 2.4 Conclusion | 36 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Stabilité et bifurcations de Hopf dans le cas des systèmes linéaires multi-retards | 37 |
| 3.1 | Théorèmes généraux | 39 |
| 3.2 | Quelques propriétés qualitatives des racines caractéristiques | 41 |
| 3.3 | Majoration d'une solution de (3.3) en utilisant les transformées de Laplace | 45 |
| 3.4 | Stabilité | 50 |
| 3.5 | Certains tests analytiques et graphiques | 51 |
| 3.5.1 | Méthode \mathcal{D} -décomposition | 51 |
| 3.5.2 | Méthode τ -décomposition | 52 |
| 3.5.3 | Un exemple illustratif | 52 |
| 3.6 | Commentaires | 54 |
| 4 | Caractérisation numérique des bifurcations de Hopf | 56 |
| 4.1 | Courbes α -denses | 56 |
| 4.1.1 | Définitions | 57 |
| 4.1.2 | Quelques courbes α -denses | 58 |
| 4.2 | Formulation de l'ensemble des bifurcations de Hopf | 62 |
| 4.3 | Construction d'un sous-ensemble dense de l'ensemble de points des bifurcations de Hopf | 63 |
| 4.4 | Un algorithme | 66 |
| 4.5 | Expérimentation numérique | 67 |
| 4.5.1 | Exemple 1 | 67 |
| 4.5.2 | Exemple 2 | 68 |
| 4.5.3 | Exemple 3 | 73 |
| 5 | Conclusion générale et perspectives | 77 |
| 5.1 | Synthèse des travaux | 77 |
| 5.2 | Publications scientifiques | 78 |
| 5.3 | Perspectives | 78 |

Introduction

Sommaire

| | | |
|------------|--------------------------------|-----------|
| 1.1 | Un point historique | 2 |
| 1.2 | Impact des retards | 4 |
| 1.3 | Etat de l'art | 7 |
| 1.4 | Problématique | 9 |
| 1.5 | Objectif | 9 |
| 1.6 | Organisation du travail | 10 |

Un grand nombre de processus, naturels ou artificiels, en biologie, en physique, en ingénierie, en médecine, en chimie, en économie, etc., s'effectue avec un retard en temps [6, 45]. Ces retards se produisent, dans presque toutes les situations, si bien qu'on ne peut pas ignorer cette réalité [45]. Un exemple simple dans la nature est le processus de reboisement. Une coupe de la forêt, après le reboisement, aura au moins 20 ans avant d'atteindre n'importe quel type de maturité. Par conséquent, tout modèle mathématique de l'exploitation forestière et la régénération doit avoir clairement un retard. Un autre exemple en biologie est que les animaux doivent prendre le temps de digérer leurs nourritures avant que d'autres activités et les réponses physiologiques ne puissent avoir lieu. Il s'ensuit que tout modèle sans retard de la dynamique des espèces peut se révéler comme une approximation très éloignée de la réalité [45]. En télécommunication, un temps de latence s'observe toujours entre l'envoi des données ou des signaux et leur réception.

C'est dans cette lancée que Picard, lors du IV^e congrès international des Mathématiciens à Rome en 1908, avait fait la déclaration suivante dans laquelle il avait souligné l'importance de tenir compte des effets héréditaires dans la modélisation des systèmes physiques [55] :

" Les équations différentielles de la mécanique classique sont telles qu'il en résulte que le mouvement est déterminé par la simple connaissance des positions et des vitesses, c'est-à-dire par l'état à un instant donné et à l'instant infiniment voisin.

Les états antérieurs n'y intervenant pas, l'hérédité y est un vain mot. L'application de ces équations où le passé ne se distingue pas de l'avenir, où les mouvements sont de nature réversible, sont donc inapplicables aux êtres vivants.

Nous pouvons rêver d'équations fonctionnelles plus compliquées que les équations classiques parce qu'elles renfermeront en outre des intégrales prises entre un temps passé très éloigné et le temps actuel, qui apporteront la part de l'hérédité."

1.1 Un point historique

Un retard est défini comme étant une caractéristique d'un système physique pour lequel la réponse à une action appliquée est retardée dans son effet [83]. Les systèmes à retards, appelés aussi systèmes héréditaires ou encore systèmes décrits par des équations différentielles aux différences, représentent une classe de systèmes de dimension infinie [32, 33] largement rencontrée lors de la modélisation de phénomènes de transport et de propagation de matière, d'énergie ou d'information [15].

Par ailleurs, même si le procédé lui-même ne contient pas de retards, les capteurs, les actionneurs et le temps de calculs nécessaire à sa commande peuvent engendrer des retards non négligeables [49, 54]. Le retard peut avoir plusieurs origines qui peuvent être attribuées soit aux capteurs ou aux actionneurs, soit au système lui-même (cas d'un transport d'information ou de matière).

Les dispositifs de déclenchement eux mêmes sont physiquement limités de sorte que l'action n'est pas instantanément réalisable [86]. Les systèmes à retards sont des systèmes dont la dynamique ne dépend pas uniquement de la valeur d'un vecteur état x à un instant t , mais aussi des valeurs passées de celui-ci prises sur un certain horizon temporel.

On peut alors considérer que l'état d'un système est en fait une fonction définie sur un intervalle de temps égal au retard. Aussi ce type de système peut être modélisé dans des espaces fonctionnels de dimension infinie [32, 54].

De façon générale, un système continu retardé est représenté par un système différentiel qui peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t), & t \geq 0 \\ x_{t_0} = \varphi_0, & \text{sur } \mathcal{C} \\ x_t \in \mathcal{C} \text{ et } x_t(\theta) = x(t + \theta). \end{cases} \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace de fonctions continues de $[-\tau, 0]$ dans \mathbb{R}^n .

Un des premiers exemples traitant une classe générale d'équations à retard linéaire est du à Polossuchin (1910) [60, 84] et Schmidt (1911) [69, 84]. Schmidt a considéré les solutions à dérivée en $O(t^\alpha)$ quand $t \rightarrow \infty$ et a prouvé l'existence d'une connection entre ce type de solutions et l'équation caractéristique de l'équation linéaire. Une classe générale d'équations à retard non linéaires a été initialement introduite par Volterra (1928) [80], (1931) [81] pour étudier respectivement un modèle prédateur-proie et un modèle de viscoélasticité. Il a aussi clarifié quelques propriétés des solutions en utilisant une méthode d'énergie.

A partir des années 1940, la théorie des équations à retard a connu un grand développement : Bellman et Cooke (1963), dans leur monographie [7], ont classifié et étudié les équations linéaires avec un seul retard en se basant sur la transformée de Laplace. Elsgolts et Norkin (1973) [21], Hale [32] (1977), dans leurs livres, étudient les problèmes d'existence et d'unicité des solutions des EDFRs ainsi que leurs propriétés qualitatives. Kolmanovskii et Nososv (1986) [38] donnent des exemples de phénomènes qui se modélisent par des équations à retards et se focalisent sur les problèmes de stabilité. Ladde et Lakshmikantham (1987) [46] se focalisent sur les conditions d'oscillations des EDFRs linéaires. Györi et Ladas(1991) [30] regardent de manière générale les équations à retards fixes ou variant dans le temps, ils donnent des exemples d'équations retardées intégrables et considèrent le problème de contrôle optimal. Niculescu(2001) [54] étudie la stabilité des équations différentielles multi-retards en utilisant essentiellement les fonctions et fonctionnelles de Lyapunov. Gu, Kharitonov et Chen (2003) [27] considèrent le problème de stabilité des systèmes linéaires multi-retards en mélangeant l'approche fréquentielle (localisation des

racines) et l'approche temporelle (utilisation de dérivée de la théorie Lyapunov sur la stabilité). Niculescu et Wim (2007) [51] examinent la stabilité des EDFRs linéaires en se basant sur la localisation des racines caractéristiques. Shampine et Thompson (2003)[70] exposent des méthodes numériques de résolution des équations différentielles ordinaires et des équations différentielles à retard avec Matlab, ils ont par ailleurs présenté leur progiciel de résolutions des EDR, dde23 [71].

1.2 Impact des retards

La présence d'un retard dans un système dynamique a une influence considérable sur le comportement de celui-ci et peut être à l'origine d'instabilité ou d'oscillations indésirables[54]. Nous considérons ici deux exemples qui illustrent cette caractéristique. Soit l'équation différentielle sans retard suivante :

$$\dot{x}(t) + x(t) = 0 \tag{1.2}$$

Cette équation n'a pas de solutions oscillatoires et ses solutions sont stables. Par contre l'équation à retard

$$\dot{x}(t) + x(t - \tau) = 0. \tag{1.3}$$

admet des solutions oscillatoires pour $\tau = \frac{\pi}{2}$ et d'autres types de solutions pour certaines valeurs de τ (voir fig (1.1))

Dans l'exemple ci-après

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) - y(t), \\ \dot{y}(t) = 5x(t) - 2y(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

toutes les solutions sont oscillatoires. Par contre, le système retardé

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t - \tau) - y(t), \\ \dot{y}(t) = 5x(t) - 2y(t - \tau) \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

admet des solutions de nature qualitative très différente (voir fig 1.2).

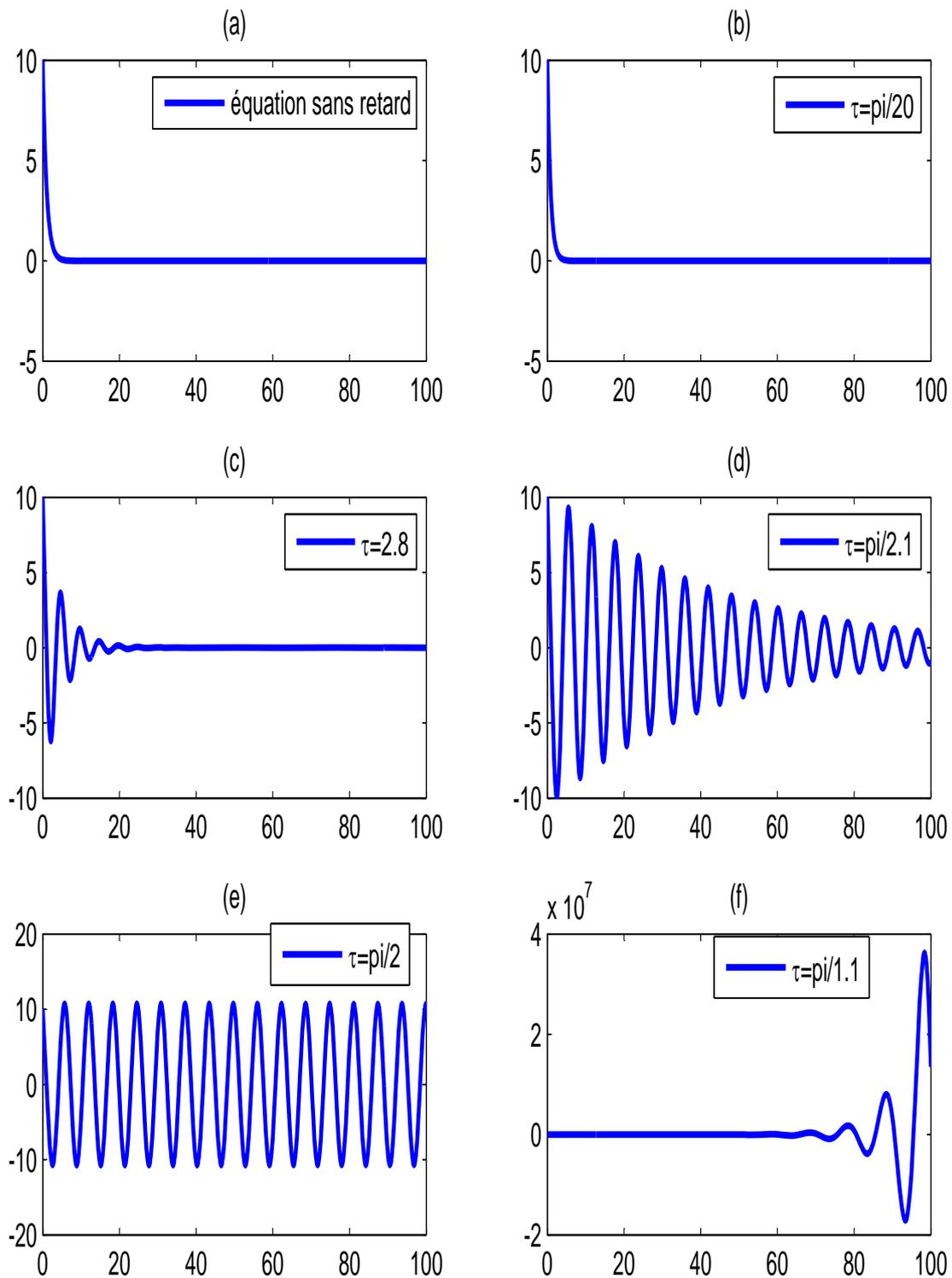


FIGURE 1.1 – Représentation des trajectoires des solutions de l'équation différentielle (1.3) en variant les retards avec comme condition initiale $x_0 = 10$.

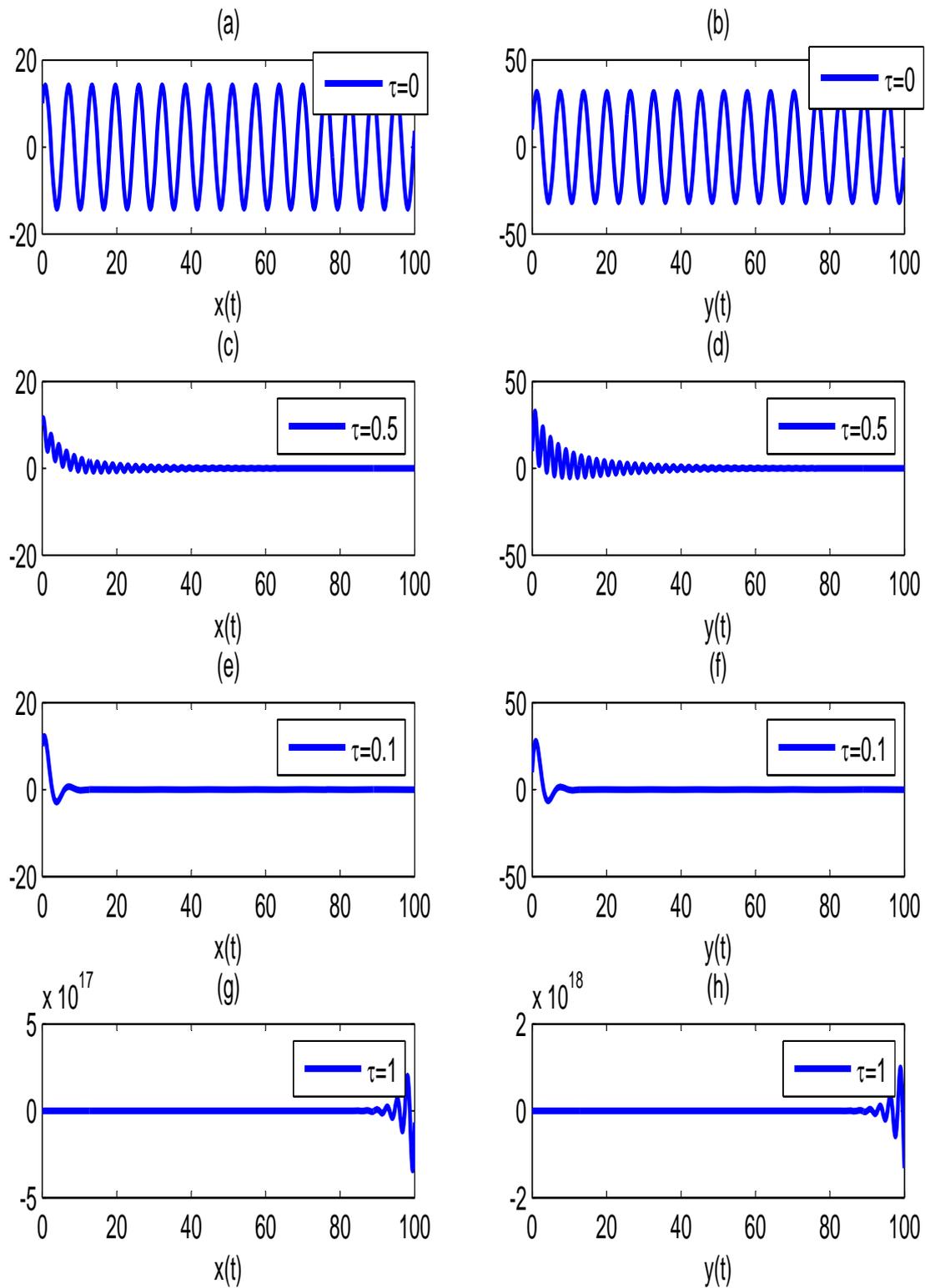


FIGURE 1.2 – Représentation des trajectoires des solutions du système d'équations différentielles (1.5) en variant les retards avec pour condition initiale $(x_0 = 10, y_0 = 10)$

Ces deux exemples montrent clairement que le retard peut changer catégoriquement la nature qualitative du système. Il peut déstabiliser des systèmes qui étaient stables, comme il peut aussi stabiliser des systèmes initialement instables.

1.3 Etat de l'art

Etant donné qu'un retard peut être source d'instabilité, l'étude de la stabilité des systèmes à retard se révèle plus qu'importante.

Il est naturel de vouloir adapter les méthodes bien connues de Lyapunov aux systèmes différentiels à retards. Deux approches ont été proposées à ce problème respectivement par Krasovskii [44] et Razumikhin[63]. Krasovskii a suggéré l'utilisation des fonctionnelles définies sur les trajectoires des équations au lieu de fonctions de Lyapunov [38, 43, 44]. Razumikhin, quant à lui a proposé une approche basée sur une modification de la méthode des fonctions de Lyapunov [38, 63, 64].

Dans le cas des systèmes linéaires autonomes, l'étude de la stabilité est liée à un certain type de fonctions analytiques appelées quasipolynômes (équation caractéristique). La distribution des zéros de ces derniers détermine la stabilité ou l'instabilité du système. En effet, si tous les zéros du quasipolynôme sont à parties réelles négatives, le système sera asymptotiquement stable, et s'il admet au moins une racine à partie réelle positive, le système est instable. Plusieurs critères ou tests ont été proposés pour étudier la distribution des zéros de ces quasipolynômes. On peut citer, à titre d'exemple le critère de Pontryagin[61, 62], la D-décomposition [53], la τ -partition[82]. L'idée de base qui est derrière la plupart de ces méthodes est la continuité des racines de fonctions analytiques par rapport à un paramètre[8, 19, 38, 51]. La méthodologie suivie dans la plupart de ces méthodes est de déterminer les valeurs τ^* du paramètre pour lesquelles les quasipolynômes ont une racine à partie réelle nulle ($\lambda = \pm i\omega$) [31, 54, 67]. Les points τ^* sont des points de bifurcation de Hopf si $\omega \neq 0$.

La théorie des bifurcations de Hopf est importante dans l'étude des systèmes à retard sous deux aspects : d'une part, pour l'étude de la stabilité du système. (ie sur le point de bifurcation, il y a changement qualitatif, le système passe de la stabilité vers l'instabilité ou vice versa) ; d'autre part, pour la détermination des solutions périodiques qui trouvent

leurs applications en biologie, économie[4, 31].

Particulièrement si nous considérons les systèmes linéaires avec des retards discrets (ponctuels) du type

$$\dot{x} = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) \quad (1.6)$$

où A_0 et A_i sont des matrices carrées d'ordre n et $0 \leq \tau_i \leq \tau$.

On suppose que pour $\tau_i = 0$ pour tout i , le système est stable. Considérant les retards τ_i comme des paramètres, il s'agit d'étudier la stabilité de (1.6) en fonction de ces derniers. Caractériser les régions de stabilité et des points de bifurcation pour les systèmes linéaires avec retard (1.6) par rapport aux retards, est un problème qui est encore ouvert [54]. Mais dans certains cas, des caractérisations complètes peuvent être données.

Dans le cas d'un seul retard où l'équation caractéristique peut s'écrire sous la forme

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\tau\lambda} = 0 \quad (1.7)$$

où P et Q sont des polynômes de degré respectifs n et m , $\tau \geq 0$, Cooke et Driessche [17] ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit l'équation (1.7) où P et Q sont des fonctions analytiques dans le demi plan complexe $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}(\lambda) > -\delta, \delta > 0\}$. Sous les conditions suivantes :*

- (i) $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ n'ont pas de racines imaginaires pures communes.
 - (ii) $\overline{P(-i\omega)} = P(i\omega)$, et $\overline{Q(-i\omega)} = Q(i\omega)$, pour $\omega \in \mathbb{R}$ où \bar{z} désigne le conjugué de z .
 - (iii) $P(0) + Q(0) \neq 0$.
 - (iv) Il existe au plus un nombre fini de racines de (1.7) dans le demi plan droit du plan complexe si $\tau = 0$.
 - (v) $F(\omega) = |P(i\omega)|^2 - |Q(i\omega)|^2$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ a au plus un nombre fini de racines réelles.
- Sous ces conditions, les assertions suivantes sont vérifiées.*
- (a) Si l'équation $F(\omega) = 0$ n'a pas de racines positives, alors si (1.7) est stable, elle restera stable pour $\tau \geq 0$.
 - (b) Si l'équation $F(\omega) = 0$ a au moins une racine positive simple, Si τ croît, alors il peut y avoir échange de stabilité. Il existe un $\tau^* > 0$ tel que l'équation (1.7) est instable pour $\tau > \tau^*$. Si τ varie de 0 à τ^* , il peut y avoir au plus un nombre fini

d'échanges de stabilité \square

Ce théorème donne une caractérisation presque complète des EDFR linéaire avec un seul retard.

1.4 Problématique

Pour le système (1.6) avec des retards commensurables, des résultats sur la stabilité ont été établis[27, 54]. Mais pour deux retards indépendants, le problème est loin d'être résolu. Et la recherche se fait activement dans ce domaine. Ruan S. et Filfil .R ont étudié un cas de réseaux neuronaux avec des retards comme paramètre et en considérant particulièrement le cas de deux retards[66]. Yu W. et Cao J. ont regardé le problème de la stabilité et la bifurcation de Hopf dans un modèle de deux neurones avec deux retards[85]. Dans la même période, Huang C. et al ont considéré un modèle de deux neurones avec 4 retards considérés comme paramètres, mais dont l'étude se ramène à deux retards, en utilisant la méthode des formes normales et la théorie de la variété centre [36]. Dans le cas où les retards ne sont pas proportionnels (commensurables) peut-on obtenir des résultats similaires avec le cas commensurable? Peut-on caractériser pour ce cas l'espace des bifurcations de Hopf? Telles sont les deux questions centrales de cette thèse.

1.5 Objectif

L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'étude des points de bifurcations de Hopf des systèmes à retards pouvant être décrits par le système (1.6). Précisément nous cherchons à caractériser l'ensemble des paramètres $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}_+^m$ pour lesquels l'application

$$\lambda \longmapsto \det\left(\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda \tau_i}\right)$$

admet des zéros imaginaires purs. Nous nous proposons d'utiliser une approche basée sur la théorie des courbes, notamment celles qui sont denses relativement à une topologie donnée, pour caractériser cet espace de bifurcation.

1.6 Organisation du travail

Ce mémoire est organisé comme suit :

- Le chapitre 2, propose une revue des connaissances sur quelques résultats généraux des systèmes différentiels à retards. Il est question notamment du problème d'existence et d'unicité des solutions, de la stabilité d'une solution d'équilibre et une présentation de la notion de bifurcation.
- le chapitre 3, est celui de l'étude des systèmes linéaires multi-retards, où nous exposons quelques propriétés des racines caractéristiques qui déterminent la stabilité la bifurcation ou l'instabilité du système et quelques théorèmes généraux permettant la localisation et la déterminations de ces racines.
- Le chapitre 4 propose une caractérisation des points de bifurcation de Hopf des systèmes linéaires multi-retards par utilisation des courbes α -denses.
- Le chapitre 5 propose une conclusion générale du projet de thèse et quelques perspectives.

Ce travail a fait l'objet de quatre articles publiés dans des journaux scientifiques indexés[1, 2, 31, 47].

Généralités sur les systèmes dynamiques retardés

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Généralités sur les équations à retards | 12 |
| 2.2 | Stabilité | 23 |
| 2.3 | Bifurcations et solutions périodiques | 30 |
| 2.4 | Conclusion | 36 |

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un tel système nécessite donc la connaissance de son état initial et de sa loi d'évolution. Un système peut être à temps continu ou à temps discret. Il peut également être autonome si sa loi d'évolution ne dépend pas explicitement du temps ou non autonome si sa loi d'évolution dépend du temps. Depuis Poincaré [56, 57, 58, 59] la théorie des systèmes dynamiques ne cesse d'évoluer et plusieurs problèmes ont été étudiés. Entre autres, la stabilité des états d'équilibre et le problème de la bifurcation dans le cas des systèmes dynamiques paramétrés.

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques définitions utilisées dans la théorie des systèmes dynamiques pour ensuite évoquer les notions de stabilité et de bifurcation. Nous nous focalisons essentiellement sur des systèmes gouvernés par des équations différentielles fonctionnelles à retards.

Formellement, dans le cas continu, un système dynamique peut être défini [25] par une application

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$$

vérifiant

$$\varphi(t_0, x_0) = x_0 \tag{2.1}$$

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x) \tag{2.2}$$

où U est un ouvert de \mathbb{R}^n , $n > 0$.

Noter que l'application

$$t \mapsto \varphi(t, x_0)$$

définit donc une trajectoire décrivant l'évolution d'un système dynamique dont l'état initial est x_0 . L'application φ est appelée flot et elle décrit toutes les évolutions possibles d'un système dynamique.

2.1 Généralités sur les équations à retards

Dans cette section, nous considérons les équations différentielles fonctionnelles à retards. Nous proposons de donner certaines définitions de base pour ensuite évoquer le problème d'existence et d'unicité.

2.1.1 Définitions

Soit τ un réel positif ou nul et $\mathcal{C} = \mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications continues de $[- \tau, 0]$ dans \mathbb{R}^n .

Soit $\phi \in \mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$. On définit une norme sur \mathcal{C} par

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\|$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . Muni de cette norme, \mathcal{C} est un espace de Banach. Pour $D \subseteq \mathbb{R}^n$, nous notons $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}([- \tau, 0], D)$ l'ensemble d'applications continues de $[- \tau, 0]$ dans D .

Définition 2.1. [20, 33]

Soit x une fonction définie sur $[t - \tau, t]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n . On définit par x_t une fonction $x_t : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

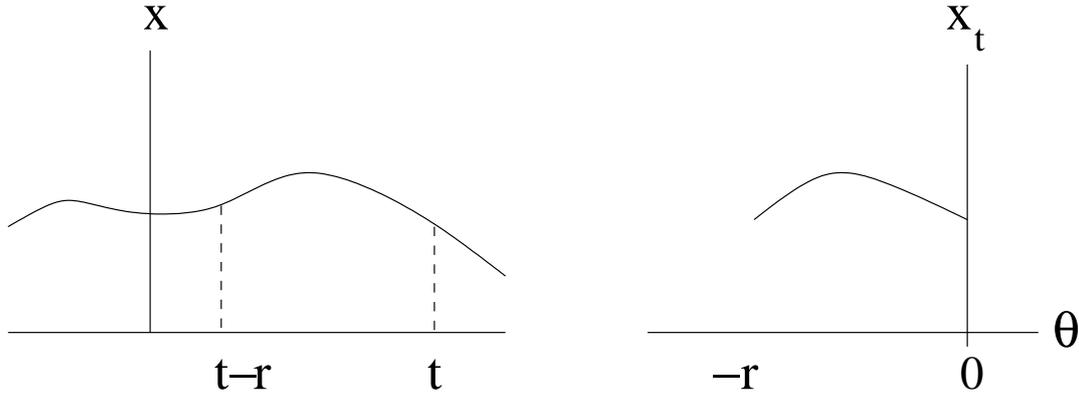


FIGURE 2.1 – Illustration de la fonction $x_t(\theta)$

Dans la suite on désigne par J un ouvert de \mathbb{R} .

Définition 2.2.

Soit $f : J \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction donnée. L'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t) \tag{2.3}$$

est appelée *équation différentielle à retard* ou bien *équation différentielle fonctionnelle à retard (EDFR)* sur $J \times \mathcal{C}$.

Notons que l'équation (2.3) est une équation générale qui inclut [32, 45] :

- les équation différentielles ordinaires (cas où $\tau=0$)

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \tag{2.4}$$

- les équations différentielles à plusieurs retards

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t))) \tag{2.5}$$

avec $0 \leq \tau_j(t) \leq \tau, j = 1, 2, \dots, p$, et

– les équations intégro-différentielles

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 g(t, \theta, x(t + \theta))d\theta. \quad (2.6)$$

Définition 2.3.

Soit $f : J \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Une fonction x est dite solution de (2.3) sur $[t_0, \beta]$ s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\beta > t_0$ tels que

(i) $x \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, \beta[, \mathbb{R}^n)$

(ii) $[t_0, \beta[\subset J$

(iii) $x(t)$ vérifie (2.3) pour $t \geq t_0$.

Pour un $t_0 \in \mathbb{R}$ donné et $\phi_0 \in \mathcal{C}$, on définit le problème à valeur initiale associé à l'EDFR(2.3) par

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \phi_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ou

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x(t) = \phi_0(t - t_0), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Définition 2.4.

La fonction x est solution de l'équation (2.7) sur $[t_0 - \tau, \beta[$ si x est solution de (2.3) sur $[t_0 - \tau, \beta[$ et vérifie $x_{t_0} = \phi_0$.

Les lemmes suivants sont utiles pour la suite.

Lemme 2.1. [33, 76]

Si la fonction $x : [t_0 - \tau, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, alors l'application $t \mapsto x_t$ est une fonction continue de $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ vers $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

Preuve

Comme x est continue sur le compact $[t_0 - \tau, t_0 + \alpha]$, elle y est uniformément continue et ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $\|x(t) - x(s)\| < \varepsilon$ si $|t - s| < \delta$. Par

conséquent, pour $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$,

$$|t - s| < \delta \Rightarrow \|x(t + \theta) - x(s + \theta)\| = \|x_t(\theta) - x_s(\theta)\| < \varepsilon \quad \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

□

Lemme 2.2. [20]

Soit $x : [t_0 - \tau, \beta[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \bar{t} \in [t_0, \beta[, \exists \delta > 0 : \|x_t - x_{\bar{t}}\| < \varepsilon$$

si $t \in [t_0, \beta)$ et $|t - \bar{t}| < \delta$.

Preuve

Soit $\bar{t} \in [t_0, \beta[$ et $\varepsilon > 0$ donnés. Soit $\delta_1 > 0$ tel que $t + \delta_1 < \beta$.

Comme x est uniformément continue dans le compact $[t_0 - r, \bar{t} + \delta_1]$, alors il existe $\delta \in]0, \delta_1]$ tel que si s et $\tilde{s} \in [t_0 - \tau, \bar{t} + \delta_1]$, on ait

$$\|x(s) - x(\tilde{s})\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour } |s - \tilde{s}| < \delta$$

et donc si $t \in [t_0, \beta[$ et $|t - \bar{t}| < \delta$ alors

$$\|x_t - x_{\bar{t}}\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|x(t + \theta) - x(\bar{t} + \theta)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

□

Lemme 2.3. [33]

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\phi_0 \in \mathcal{C}$. La fonction x est une solution de (2.7) sur $[t_0 - \tau, \beta[$ si et seulement si $x \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, \beta[, \mathbb{R}^n)$ et vérifie

$$\begin{cases} x_{t_0} = \phi_0, \\ x(t) = \phi_0(0) + \int_{t_0}^t f(t, x_s) ds, \quad t_0 \leq t \leq \beta \end{cases} \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) est une représentation intégrale de (2.7).

Définition 2.5.

Soit $f : J \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Lambda \subset J \times \mathcal{C}_D$. On dit que f est lipschitzienne sur Λ s'il existe $K \geq 0$ telle que

$$\|f(t, \phi) - f(t, \psi)\| \leq K \|\phi - \psi\|_{\mathcal{C}} \quad \forall (t, \phi), (t, \psi) \in \Lambda. \quad (2.10)$$

Définition 2.6. [20]

Soit $f : J \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est localement lipschitzienne si

$\forall (\bar{t}, \bar{\psi}) \in (J \times \mathcal{C}_D)$ donné, $\exists a > 0, b > 0$ telle que

$$\Lambda \equiv \left([\bar{t} - a, \bar{t} + a] \cap J \right) \times \left\{ \phi \in \mathcal{C} : \|\phi - \bar{\phi}\| \leq b \right\} \quad (2.11)$$

soit un sous ensemble de $(J \times \mathcal{C}_D)$ et f est lipschitzienne sur Λ

On peut remarquer que K peut dépendre de a , b et M .

Nous prouvons maintenant quelques résultats qui seront utilisés dans la section suivante :

Lemme 2.4. (Lemme de Gronwall)[20]

Soient C une constante donnée et k une fonction continue non négative sur un intervalle J . Soient $t_0 \in J$. Si $v : J \longrightarrow [0, \infty[$ est continue et vérifie

$$v(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^t k(s)v(s)ds \right| \quad \forall t \in J \quad (2.12)$$

alors

$$v(t) \leq C e^{\left| \int_{t_0}^t k(s)ds \right|} \quad \forall t \in J \quad (2.13)$$

Preuve

Supposons que $t \geq t_0$ et $t \in J$. L'inégalité (2.12) devient

$$v(t) \leq C + \int_{t_0}^t k(s)v(s)ds$$

ou encore

$$k(t)v(t) - k(t) \left[C + \int_{t_0}^t k(s)v(s)ds \right] \leq 0.$$

Posons

$$Q(t) = C + \int_{t_0}^t k(s)v(s)ds,$$

alors

$$Q'(t) - k(t)Q(t) \leq 0. \quad (2.14)$$

En multipliant (2.14) par le facteur $e^{-\int_{t_0}^t k(s)ds}$ on obtient

$$\frac{d}{dt} \left[Q(t)e^{-\int_{t_0}^t k(s)ds} \right] \leq 0. \quad (2.15)$$

En intégrant (2.15) de t_0 à t et en remarquant que $Q(t_0) = C$, on a

$$Q(t)e^{-\int_{t_0}^t k(s)ds} - C \leq 0$$

ce qui implique que

$$Q(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t k(s)ds}.$$

En utilisant inégalité (2.12), on se ramène à

$$v(t) \leq Q(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t k(s)ds}.$$

On procède de la même façon si $t \leq t_0$ □

Dans cette sous-section, nous avons défini les équations différentielles à retards et avons donné des résultats qui seront utiles à l'établissement de la preuve de l'existence et l'unicité d'une solution de ces dites équations. L'établissement de la preuve de l'existence et l'unicité des EDFR est l'objet de la sous-section suivante.

2.1.2 Existence, unicité et dépendance aux conditions initiales

Dans cette sous-section nous donnons les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions de (2.7) ainsi que la dépendance continue par rapport aux conditions initiales.

Théorème 2.1. (*Unicité*)

Soit $f : [t_0, \alpha[\times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. Si f est continue et localement lipschitzienne sur son domaine, alors pour $\phi_0 \in \mathcal{C}_D$ et $\beta \in [t_0, \alpha[$, l'équation (2.7) admet au plus

une solution sur $[t_0 - \tau, \beta[$.

Preuve

Soit $\beta \in [t_0, \alpha[$. Supposons qu'il existe deux solutions x et \tilde{x} définies de $[t_0 - \tau, \beta[$ à valeurs dans \mathbb{R}^n avec $x \neq \tilde{x}$. Posons

$$t_1 = \inf \{t \in]t_0, \beta[: x(t) \neq \tilde{x}(t)\}.$$

Alors $t_0 < t_1 < \beta$ et $x(t) = \tilde{x}(t)$ pour $t_0 - \tau \leq t \leq t_1$.

Comme $(t_1, x_{t_1}) \in [t_0, \beta[\times \mathcal{C}_D$ et f est localement lipschitzienne, il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que l'ensemble

$$\Lambda = [t_1, t_1 + a] \times \{\psi \in \mathcal{C}_D : \|\psi - x_{t_1}\|_{\mathcal{C}_D} \leq b\} \subset [t_0, \alpha[\times \mathcal{C}_D$$

et f K -lipschitzienne sur Λ . En vertu du lemme 2.2, il existe $\delta \in]0, a]$ tel que $(t, x_t) \in \Lambda$ et $(t, \tilde{x}_t) \in \Lambda$ pour $t_1 \leq t \leq t_1 + \delta$. De plus x et \tilde{x} vérifient (2.9) pour $t_0 - \tau \leq t \leq t_1 + \delta$.

Par conséquent pour $t_1 \leq t \leq t_1 + \delta$,

$$\|x - \tilde{x}\| = \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x_s) - f(s, \tilde{x}_s)] ds \right\| \leq \int_{t_1}^t K \|x_s - \tilde{x}_s\|_{\mathcal{C}} ds.$$

Le membre de droite étant une fonction croissante en t et

$$\|x - \tilde{x}\| = 0 \quad \text{pour } t_1 - r \leq t \leq t_1,$$

$$\|x_t - \tilde{x}_t\|_{\mathcal{C}} \leq \int_{t_1}^t K \|x_s - \tilde{x}_s\|_{\mathcal{C}} ds \quad \text{pour } t_1 \leq t \leq t_1 + \delta. \tag{2.16}$$

De (2.16), en se servant du lemme 2.4, il résulte que $x(t) = \tilde{x}$ sur $[t_1, t_1 + \delta]$, ce qui contredit la définition de t_1 □

Théorème 2.2. *(Existence locale)[20]*

Soient D un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : [t_0, \alpha[\times \mathcal{C}_D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne. Alors pour $\phi_0 \in \mathcal{C}_D$, le problème (2.7) admet une unique solution sur $[t_0 - \tau, t_0 + \Delta[$, $\Delta > 0$.

Preuve

Soient a et b suffisamment petits tels que

$$\Lambda \equiv [t_0, t_0 + a] \times \{\psi \in \mathcal{C} : \|\psi - \phi_0\|_{\mathcal{C}} \leq b\} \subset [t_0, \alpha[\times \mathcal{C}[$$

et f lipschitzienne sur Λ de rapport K .

Définissons la fonction \bar{x} sur $[t_0 - \tau, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\bar{x} = \begin{cases} \phi_0(t - t_0), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \\ \phi_0(0), & t_0 \leq t \leq t_0 + a. \end{cases}$$

\bar{x} dépend continûment de t . Alors il existe une constante positive B_1 telle que $\|f(t, \bar{x}_t)\| \leq B_1$.

Posons $B = Kb + B_1$. Choisissons $a_1 \in]0, a[$ tel que $\|\bar{x}_t - \phi_0\|_{\mathcal{C}} = \|\bar{x}_t - \bar{x}_{t_0}\|_{\mathcal{C}} \leq b$, pour $t_0 \leq t \leq t_0 + a_1$. Soient $\Delta > 0$ tel que $\Delta \leq \min\{a_1, \frac{b}{B}\}$ et

$$S = \left\{ x \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n) : \begin{cases} x(t) = \phi_0(t - t_0), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \\ \|x(t) - \phi_0(0)\| \leq b, & t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta. \end{cases} \right\}$$

Si $x \in S$ et $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, alors $\|x(t) - \bar{x}_t\|_{\mathcal{C}} \leq b$. Il s'en suit que

$$\|f(t, x_t)\| \leq \|f(t, x_t) - f(t, \bar{x}_t)\| + \|f(t, \bar{x}_t)\| \leq K\|x_t - \bar{x}_t\|_{\mathcal{C}} + B_1 \leq B$$

Pour tout $x \in S$ définissons la fonction Tx sur $[t_0 - \tau, t_0 + \Delta]$ par

$$Tx(t) = \begin{cases} \phi_0(t - t_0), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \\ \phi_0(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds, & t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta \end{cases}$$

Tx est continue et comme $\|f(s, x_s)\| < B$, on a :

$$\|(Tx)(t) - \phi_0(0)\| \leq B\Delta \leq b \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta.$$

Ainsi $Tx \in S$ c'est à dire $T : S \rightarrow S$.

$$x^0(t) = \begin{cases} \phi(0), & t_0 \leq t \leq \sigma + \Delta \\ \phi(t - t_0), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

En utilisant la méthode des approximations successives, on a :

$$x^1 = Tx^0, x^2 = Tx^1, \dots, x^n = Tx^{n-1}.$$

Clairement

$$x^{m+1}(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s^{(m)}) ds \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta \quad (2.17)$$

et pour

$$m = 0, 1, \dots, \dots, x^m(t) = \phi(t - t_0) \quad \text{si } t_0 - r \leq t \leq t_0.$$

Montrons que la suite $(x^m(t))_m$ converge pour $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta$

$$\|x^1(t) - x^0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_s^0) \right\| ds \leq 2b, \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta].$$

De (2.17), en utilisant la condition de Lipschitz et du fait que $x_{t_0}^m = x_{t_0}^{m-1}$ il vient :

$$\begin{aligned} \|x^{m+1}(t) - x^m(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x_s^{(m)}) - f(s, x_s^{(m-1)})] ds \right\| \\ &\leq K \int_{t_0}^t \|x_s^{(m)} - x_s^{(m-1)}\| ds \\ &\leq K \int_{t_0}^t \|x_s^{(m)} - x_s^{(m-1)}\|_C ds \end{aligned}$$

En particulier

$$\|x^2(t) - x^1(t)\| \leq K \int_{t_0}^t \|x_s^1 - x_s^0\| ds = 2bK(t - t_0)$$

et

$$\|x^3(t) - x^2(t)\| \leq K \int_{t_0}^t \|x_s^2 - x_s^1\| ds = 2b \frac{[K(t - t_0)]^2}{2!}$$

et par récurrence

$$\|x^{m+1}(t) - x^m(t)\| \leq 2b \frac{[K(t - t_0)]^m}{m!} \quad (2.18)$$

La série $\sum_{m=0}^{\infty} 2b \frac{[K(t-t_0)]^m}{m!}$ étant convergente, la série

$$x^0(t) + \sum_0^{\infty} (x^{m+1}(t) - x^m(t))$$

converge normalement donc uniformément sur $[t_0 - \tau, t_0 + \Delta]$. Par conséquent la suite

$$x^m(t) = x^0(t) + \sum_{k=0}^{m-1} (x^{k+1}(t) - x^k(t))$$

converge uniformément sur $[t_0 - \tau, t_0 + \Delta]$.

Posons

$$x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x^m(t), \quad [t_0 - \tau, t_0 + \Delta].$$

$x(t)$ est continue et vérifie $x_{t_0} = \phi_0$.

Montrons maintenant que $x(t)$ vérifie (2.9). On remarque que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(s, x_s^m) = f(s, x_s), \quad t_0 \leq s \leq \sigma + A,$$

uniformément parce que

$$\|f(s, x_s^m) - f(s, x_s)\| \leq K \|x_s^m - x_s\| \leq K \|x^m - x(t)\|_C.$$

Cette convergence uniforme entraîne

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_s^m) ds = \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds.$$

Ainsi, en passant à la limite dans les deux membres de (2.17), on obtient (2.9). □

Définition 2.7.

Soient x définie sur $[t_0 - \tau, \beta_1[$ et y sur $[t_0 - \tau, \beta_2[$ deux solutions de (2.7).

Si $\beta_2 > \beta_1$ et $x(t) = y(t)$ pour $t \in [t_0 - \tau, \beta_1[$, on dit que y est un prolongement de x .

Définition 2.8.

Une solution x de (2.7) est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement. C'est à

dire que l'intervalle $[t_0 - \tau, \beta_1[$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution x .

Définition 2.9.

La fonctionnelle $f : [t_0, \alpha[\times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite quasi-bornée si f est bornée sur tout ensemble de la forme $[t_0, \beta[\times \mathcal{C}_A$ où $t_0 < \beta < \alpha$ et $A \subset D$ est un compact.

Théorème 2.3. (Prolongement)[20]

Soit $f : [t_0, \alpha[\times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, localement lipschitzienne et quasi-bornée. Alors pour tout $\phi_0 \in \mathcal{C}_D$ il existe un $\beta > 0$ tel que

- a) Le problème aux valeurs initiales (2.7) ait une unique solution maximale x sur $[t_0 - \tau, \beta[$.
- b) Si $\beta < \alpha$ alors pour tout compact $A \subset D$, $x(t) \notin A \forall t \in]t_0, \beta[$.

Théorème 2.4. (Existence globale)[20]

Soit $f : [t_0, \alpha) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, localement lipschitzienne. Si

$$\|f(t, \psi)\| \leq M(t) + N(t)\|\psi\|_{\mathcal{C}} \quad \text{sur } [t_0 - \tau, \alpha[\times \mathcal{C} \quad (2.19)$$

où M et N sont des fonctions continues positives sur $[t_0, \alpha[$, Alors l'unique solution non prolongeable de (2.7) existe sur $[t_0 - \tau, \alpha[$.

Théorème 2.5. (Conditions initiales)[20]

Soit $f : [t_0, \alpha[\times \mathcal{C}_D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et globalement lipschitzienne de rapport K . Soient $\phi_0, \tilde{\phi}_0 \in \mathcal{C}_D$ données et x et \tilde{x} les uniques solutions de (2.9) avec $x_{t_0} = \phi_0$ et $\tilde{x}_{t_0} = \tilde{\phi}_0$. Si x et \tilde{x} sont valides dans $[t_0, \beta[$, alors

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|_{\mathcal{C}} e^{K(t-t_0)} \quad (2.20)$$

Preuve

Soient x et \tilde{x} deux solutions de (2.9).

$$\begin{aligned} \|x(t) - \tilde{x}(t)\| &= \left\| \phi_0 - \tilde{\phi}_0 + \int_{t_0}^t [f(s, x_s) - f(s, \tilde{x}_s)] ds \right\| \\ &\leq \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\| + \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x_s) - f(s, \tilde{x}_s)] ds \right\| \\ &\leq \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|_{\mathcal{C}} + \int_{t_0}^t K \|x_s - \tilde{x}_s\|_{\mathcal{C}} ds \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t. \end{aligned}$$

Comme $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|$ sur $[t_0 - \tau, t_0]$ il s'en suit que

$$\|x_t - \tilde{x}_t\|_C \leq \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|_C + \int_{t_0}^t K \|x_s - \tilde{x}_s\|_C ds \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq \beta.$$

En appliquant le lemme de Gronwall avec $C = \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|_C$ et $k(s) = K$, on a :

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \|x_t - \tilde{x}_t\|_C \leq \|\phi_0 - \tilde{\phi}_0\|_C e^{K(t-t_0)} \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq \beta. \quad (2.21)$$

□

Dans cette section, nous avons donné des résultats sur l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (2.7). Un bon nombre de ces résultats peuvent être obtenus dans [20, 32].

A présent intéressons nous à la stabilité d'une solution de (2.7).

2.2 Stabilité

La stabilité est l'une des propriétés des systèmes dynamiques la plus étudiée. En effet, la résolution explicite, ou même approchée, d'une équation différentielle est en général impossible, les méthodes numériques permettant seulement de calculer sur un intervalle de temps fini une solution correspondant à des conditions initiales données. La théorie vise donc plutôt une étude qualitative des phénomènes et cherche en particulier à en comprendre l'évolution à long terme.

La notion de stabilité dont l'importance, pour de nombreux problèmes pratiques, est comparable à celle de la connaissance effective des solutions s'impose.

La notion de stabilité prend ses origines en mécanique et notamment dans l'étude du système solaire. A cet effet beaucoup de définitions de la stabilité ont été introduites (stabilité au sens de Lagrange-Dirichlet, stabilité au sens de Poisson- Poincaré, et la stabilité au sens de Lyapunov). Il s'agira ici de la stabilité au sens de Lyapunov

L'objet de cette section est de présenter la stabilité des systèmes à retards.

2.2.1 Définitions

Nous présentons quelques notions de base concernant la stabilité des systèmes à retards. Rappelons tout d'abord que l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'un système avec ou sans retard consiste toujours à observer que son évolution reste proche du point d'équilibre lorsqu'on s'en écarte d'un certain voisinage. La stabilité asymptotique, en plus de garantir la condition précédente, indique que le système reviendra exactement au point d'équilibre au bout d'un certain temps éventuellement infini (si on s'en écarte légèrement).

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0} = \varphi_0, & \text{sur } \mathcal{C} \end{cases} \quad (2.22)$$

Définition 2.10. [38]

La solution $z(t)$ du problème (2.22) est dite stable (au sens de Lyapunov) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que

$$\|x(t_0) - z_{t_0}\|_{\mathcal{C}} \leq \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \varphi_0) - z(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

La stabilité au sens de Lyapunov signifie qu'un voisinage étroit défini par un ε arbitraire de la solution $x(t)$ contient toutes les solutions du problème (2.22) qui sont suffisamment proche de z_{t_0} à l'instant initial t_0 [38].

Définition 2.11. Un état $x^e \in \mathbb{R}^n$ est dit état d'équilibre si l'application constante

$$t \mapsto x^e$$

est solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t)$$

Dans ce qui suit, il conviendra de poser $x^e = 0$, quitte à faire un changement d'inconnue approprié. En clair, ceci revient à supposer que $f(t, 0) = 0$ pour tout t .

L'étude de la stabilité de toute solution $z(t)$ peut être réduite à l'étude de la stabilité

de la solution triviale. Pour cela, il suffit d'introduire la fonction $y(t) = x(t) - z(t)$. Alors

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t + z_t) - f(t, z_t) = g(t, y_t), \quad g(t, 0) = 0 \quad (2.23)$$

Dans la suite nous supposons que $f(t, 0) = 0$ et nous allons étudier la stabilité de la solution d'équilibre x^e de (2.22).

Définition 2.12.

La solution d'équilibre x^e de (2.22) est dite stable si, $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ tel que

$$\|\varphi_0\|_c \leq \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Sinon la solution d'équilibre est dite instable

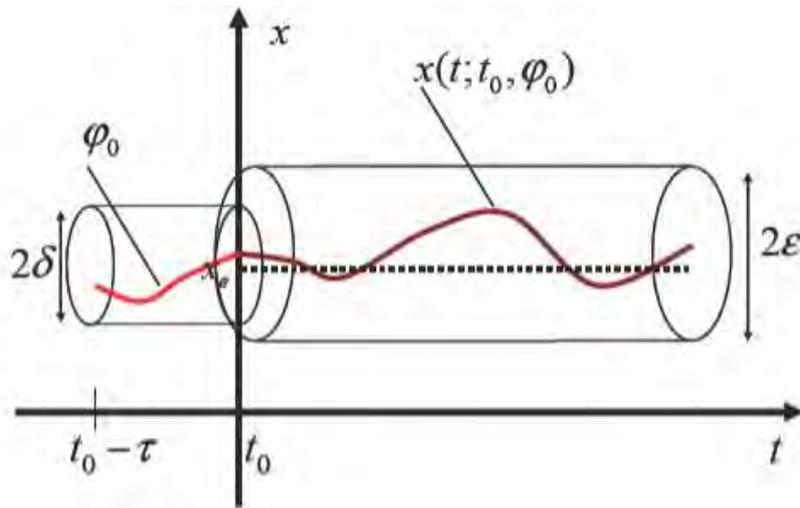


FIGURE 2.2 – Stabilité au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre x_e

2.2.2 Stabilité uniforme

Définition 2.13. [38]

L'état $x^e = 0$ est uniformément stable si, $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|\varphi_0\|_c \leq \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

La stabilité uniforme est plus forte que la stabilité au le sens de la définition 2.12.

2.2.3 Stabilité asymptotique

Définition 2.14. [38]

L'état $x^e = 0$ est dit asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $b_0(t_0) > 0$ tel que

$$\|\varphi_0\|_C \leq b_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \varphi_0) = 0$$

Définition 2.15.

L'état $x^e = 0$ est dit uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et s'il existe

$b_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe un $T(\eta)$ tel que :

$$\|\varphi_0\|_C \leq b_0 \Rightarrow \|x(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta).$$

Définition 2.16.

L'état d'équilibre $x^e = 0$ (2.22) est dite globalement uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément asymptotiquement stable quel que soit $\varphi_0 \in \mathcal{C}$.

2.2.4 Stabilité exponentielle

Définition 2.17.

L'état $x^e = 0$ est dit exponentiellement stable s'il existe trois constantes positives a , b et δ dépendant de t_0 telles que :

$$\|\varphi_0\|_C \leq \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, \varphi_0)\| \leq a\|\varphi_0\|_C e^{-b(t-t_0)}.$$

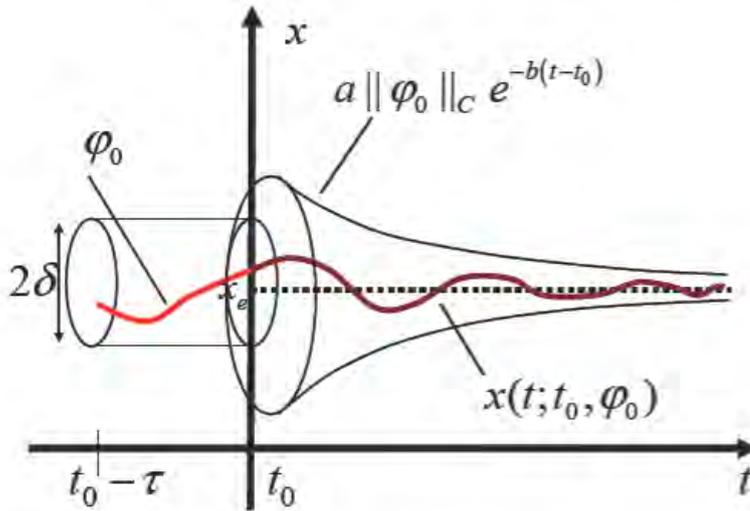


FIGURE 2.3 – *Stabilité exponentielle au sens de Lyapunov pour un point d'équilibre x_e*

2.2.5 Stabilité des systèmes à retards par la seconde méthode de Lyapunov

Dans cette partie, on rappelle quelques résultats concernant la stabilité asymptotique des systèmes à retards par des approches temporelles liées à la seconde méthode de Lyapunov. On considère le système (2.22) et on suppose qu'il admet une solution unique et un état d'équilibre $x_t = 0$. La seconde méthode de Lyapunov nécessite l'existence d'une fonction V définie positive telle que

$$\frac{dV}{dt} < 0, \quad \text{si } x \neq 0.$$

Cependant, cette méthode présente dans le cas général un inconvénient majeur car on doit imposer des conditions sévères sur le système pour prouver que cette dérivée est négative puisqu'elle n'est plus une fonction ordinaire mais une fonctionnelle qui dépend de certaines valeurs passées de l'argument t . Deux extensions ont été développées dans ce cadre, la première réalisée par Krasovskii conduit à l'utilisation des fonctionnelles, son principal inconvénient est lié à la difficulté de la détermination de telles fonctionnelles permettant de démontrer la stabilité de la solution nulle du système; la deuxième est développée par Razumikhin qui a proposé d'utiliser des fonctions plutôt que des fonction-

nelles.

2.2.6 Approche par fonctionnelle de Krasovskii

L'approche de Krasovskii consiste à rechercher des fonctionnelles $V(t, x_t)$ qui sont décroissantes le long des solutions de l'équation (2.22). Soit $V(t, \phi)$ une fonctionnelle ; la dérivée supérieure à droite au sens de Dini est définie comme suit :

$$\dot{V} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \varepsilon, x_{t+\varepsilon}) - V(t, x_t)}{\varepsilon} \quad (2.24)$$

On a le théorème suivant dû à Krasovskii :

Théorème 2.6. [33, 43]

On suppose que la fonction f de (2.22) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments.

Soient u, v et $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues, définies positives, croissantes telles que $u(\theta) > 0$ et $v(\theta) > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. S'il existe une fonctionnelle continue $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c)$,
2. $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$ pour tout $t \geq t_0$ le long des trajectoires de (2.22)

alors la solution nulle de (2.22) est uniformément stable.

Si de plus $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$ alors la solution nulle de (2.22) est uniformément asymptotiquement stable.

Si V vérifie les conditions :

1. $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c)$,
2. $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$ pour tout $t \geq t_0$ et $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$;
3. V est lipschitzienne par rapport à son second argument ;

alors la solution nulle de (2.22) est exponentiellement stable.

2.2.7 Approche par fonction de Razumikhin

Dans cette approche, on considère une fonction de Lyapunov $V(t; x(t))$ classique pour les équations différentielles ordinaires en se plaçant dans \mathbb{R}^n . Le théorème suivant montre qu'il est inutile de vérifier que

$\dot{V}(t; x(t)) \leq 0$ le long de toutes les trajectoires du système mais seulement pour les trajectoires de l'état qui ont "tendance" à s'éloigner du point d'équilibre.

Théorème 2.7. [43]

On suppose que la fonction f de (2.22) est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments. Soient u, v et $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ des fonctions continues, définies positives, croissantes telles que $u(\theta) > 0$ et $v(\theta) > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. On suppose qu'il existe une fonctionnelle $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que :

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n$$

On a les énoncés suivants :

1. $\dot{V}(t, x) \leq w(\|x\|)$ le long des trajectoires de (2.22),
Si $V(t + \theta; x(t + \theta)) \leq V(t, x(t))$ pour tout $\theta \in [-\tau, 0]$, alors la solution nulle de (2.22) est uniformément stable.
2. S'il existe une fonction $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue strictement croissante avec $p(\theta) > \theta$ pour tout $\theta > 0$ telle que :
 - (a) $\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x\|)$ le long des trajectoires de (2.22),
 - (b) $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t)))$ pour tout $\theta \in [-\tau, 0]$
 alors la solution nulle de (2.22) est uniformément asymptotiquement stable.

Dans cette approche, la condition de négativité de la fonction candidate de Lyapunov n'est sollicitée que pour des trajectoires appartenant à certains espaces définis par l'évolution du système dans l'intervalle $[t - \tau, t]$.

Pour plus de détails on peut se référer à [33, 39, 42].

L'utilisation des fonctions ou fonctionnelles de Lyapunov, qui est une approche temporelle pour l'étude de la stabilité du système (2.22) n'est pas une tâche aisée. La difficulté

reside sur la construction de la fonctionnelle ou fonction devant vérifier les hypothèses des théorèmes (2.6) ou (2.7), en particulier, les conditions de décroissance de la dérivée de V . Dans le cas des systèmes linéaires on peut contourner cette difficulté en utilisant une approche fréquentielle.

Cette approche sera exposée au chapitre suivant. Cette dernière utilise la notion de bifurcations que nous présentons ci-après.

2.3 Bifurcations et solutions périodiques

Les systèmes d'intérêt physique ont généralement des paramètres qui apparaissent dans les systèmes d'équations les définissant[28]. Si ces paramètres varient, des changements dans la structure qualitative peuvent se produire dans la solution pour certaines valeurs des paramètres. Ces changements sont appelés bifurcations et les valeurs des paramètres sont appelées valeurs de bifurcation[28].

La théorie de bifurcation traite de l'analyse des points de branchement d'équations non linéaires dans les espaces de Banach.

Soit

$$F : X \times K \longrightarrow Y \tag{2.25}$$

une application lisse où X, Y sont des espaces de Banach et $K \subset \mathbb{R}^p$ un espace de paramètre. Supposons que $F(u_0, \lambda_0) = 0$. Nous nous intéressons à la résolution de l'équation

$$F(u, \lambda) = 0 \tag{2.26}$$

dans un voisinage de (u_0, λ_0) . Si la dérivée de Fréchet $\mathbf{F}_u(u, X)$ est un homéomorphisme de X à Y , le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une unique branche lisse $(u(\lambda), \lambda)$ de l'équation (2.26) : $F(u(\lambda), \lambda) = 0$ avec $u(\lambda_0) = u_0$, définie pour $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 > 0$

La théorie de bifurcation étudie le cas où $\mathbf{F}_u(u, X)$ n'est pas inversible. Autrement dit la matrice jacobienne admet une valeur propre à partie réelle nulle $\lambda = i\omega$. Si $\omega = 0$, on a une bifurcation transcritique ou fourche et $\omega \neq 0$ on a une bifurcation de Hopf. Dans

cette situation singulière il y a une variété de solutions possibles de l'ensemble de solutions de (2.26). Dans de nombreux cas, l'application F est associée à une équation différentielle ordinaire ou à retard, ou plus généralement une équation d'évolution dépendant d'un paramètre.

Du point de vue des systèmes dynamiques, la notion de bifurcation correspond au passage du système d'une position d'équilibre à une autre, ou d'une position d'équilibre à une orbite fermée. L'un des cas les plus importants de passage d'un équilibre à une orbite fermée correspond à la bifurcation de Hopf.

2.3.1 Bifurcation de Hopf

Une bifurcation importante est la bifurcation de Hopf. Pour la définir, considérons le système différentiel autonome à un paramètre suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x; \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.27)$$

où f est une fonction suffisamment régulière.

Définition 2.18. (Bifurcation de Hopf)

On dit qu'un réel α^* est un point de bifurcation de Hopf pour le système (2.27) si :

i) en $\alpha = \alpha^*$, (2.27) admet un point d'équilibre x_0 et en ce point la matrice Jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \alpha^*)$ admet une paire de valeurs propres simples imaginaires pures $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$.

ii) et (2.27) admet un cycle limite unique correspondant à une solution périodique.

Théorème 2.8. (Poincaré - Andronov - Hopf) [50]

Supposons que le système autonome non-linéaire (2.27) admet un point d'équilibre $x = x_0$ et que la matrice jacobienne $A = \frac{\partial f(x_0, \alpha)}{\partial x}$ admet une paire de valeurs propres conjuguées $\lambda(\alpha)$ et $\bar{\lambda}(\alpha)$. S'il existe α^* tel que

(i) $Re(\lambda(\alpha^*)) = 0$

(ii) $\left. \frac{\partial Re(\lambda)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \alpha^*} \neq 0$

alors α^* est un point de bifurcation de Hopf.

Quand une paire de valeurs propres complexes conjuguées se déplace à travers l'axe imaginaire, généralement une bifurcation de Hopf se produit. Cette bifurcation est liée à la bifurcation fourche, comme nous le verrons plus tard. La bifurcation de Hopf a lieu lorsque le paramètre de contrôle λ prend une valeur critique λ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées qui traversent l'axe imaginaire et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparition d'un cycle limite. Cette bifurcation est illustrée sur les figures 2.4 et 2.5.

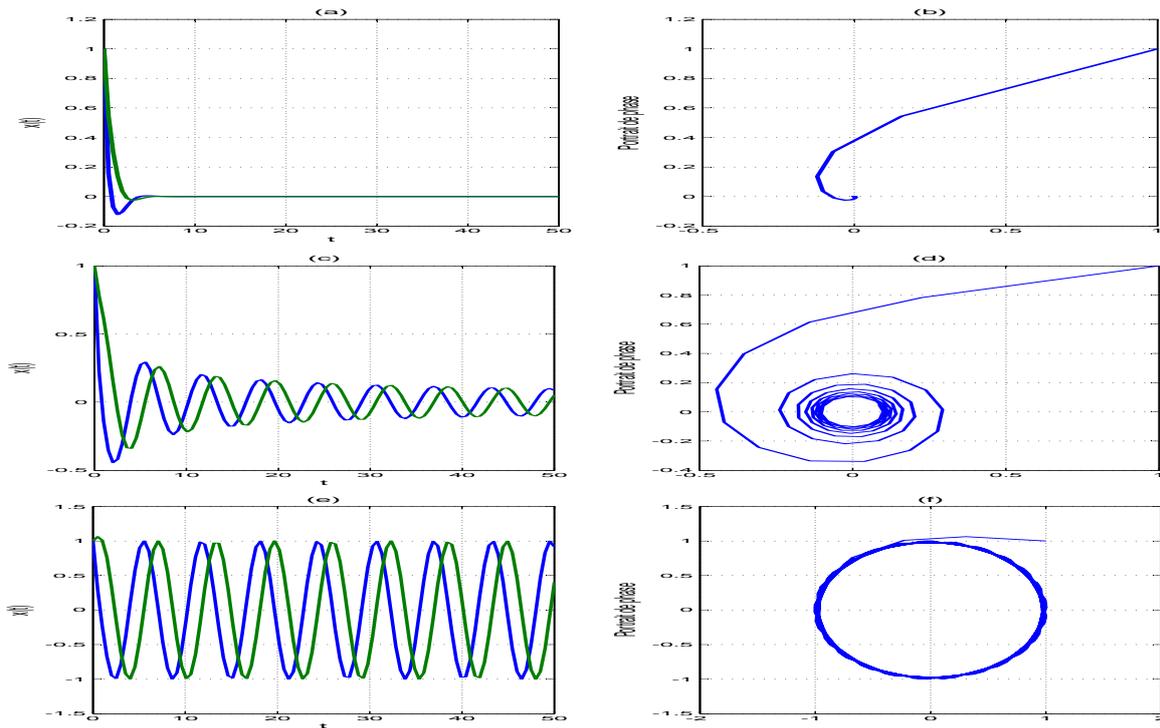


FIGURE 2.4 – Une illustration de bifurcation de Hopf pour le système différentiel $\frac{dx}{dt} = -y + x(\alpha - x^2 - y^2)$, $\frac{dy}{dt} = x + y(\alpha - x^2 - y^2)$. L'origine est un point fixe pour toutes les valeurs de α . En $\alpha = 0$, on a une bifurcation de Hopf : l'origine devient instable et il apparaît une solution périodique stable, comme on peut le voir sur le diagramme de bifurcation où l'on trace le rayon r du cercle en fonction de α . En $\alpha > 0$ la trajectoire de phase se dirige vers le point fixe à l'origine.

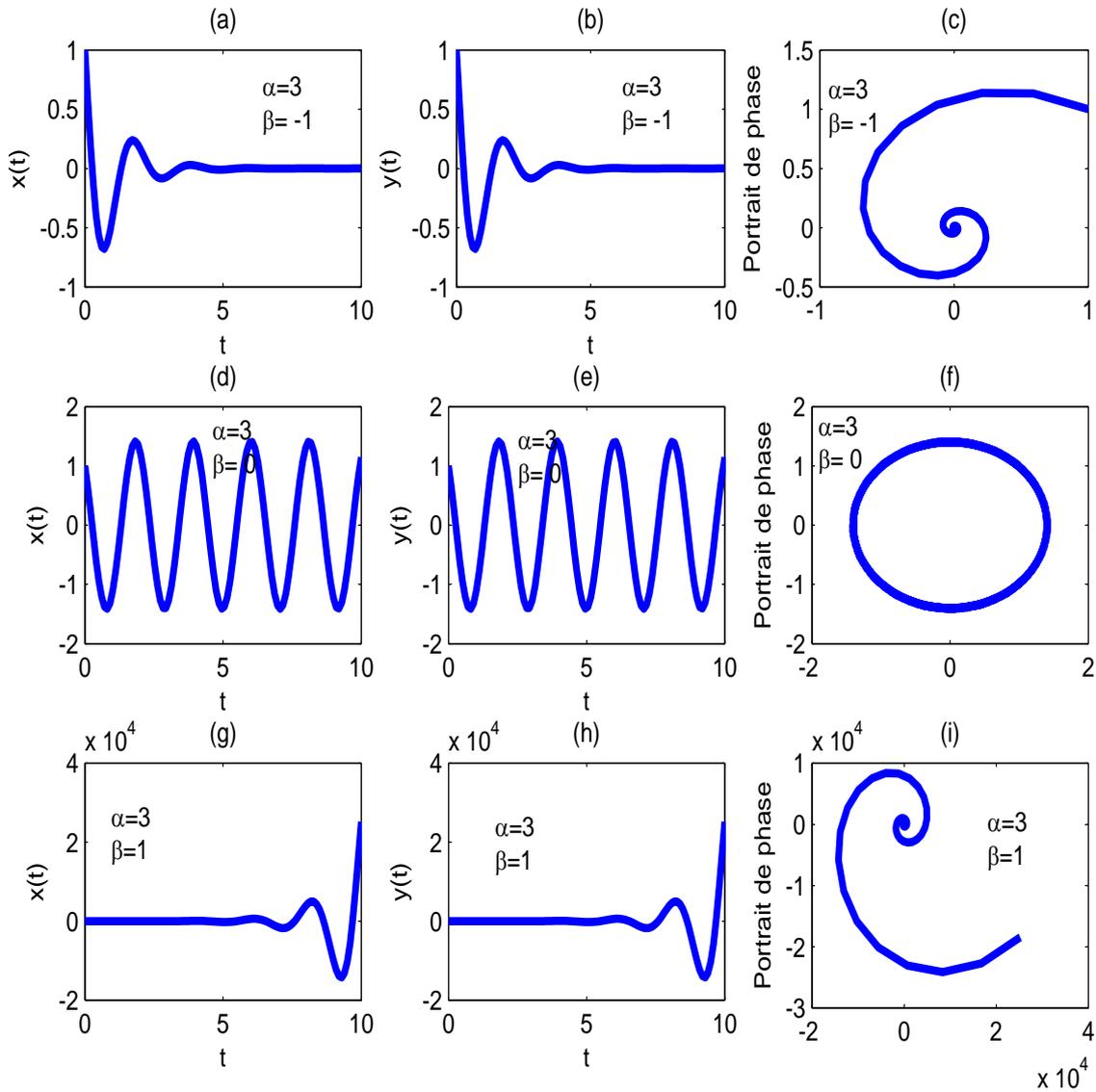


FIGURE 2.5 – Une illustration de la bifurcation de Hopf pour le système $\frac{dx}{dt} = \beta x - \alpha y$, $\frac{dy}{dt} = \alpha x + \beta y$. Lorsque $\alpha = 3$ et $\beta = -1$, (a) et (b) la trajectoire est stable au niveau de l'origine et (c) la trajectoire de phase se dirige vers le point fixe à l'origine. Lorsque $\alpha = 3$ et $\beta = 0$, (d) et (e), la trajectoire est oscillatoire donc on a une bifurcation de Hopf. (f) la trajectoire de phase est une ellipse. Lorsque $\alpha = 3$ et $\beta = 1$, (g) et (h) la trajectoire est instable et (i) la trajectoire de phase, tous les points fuient l'origine.

2.3.1.1 Bifurcation de Hopf dans le cas des équations à retards

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude de changements qualitatifs d'états d'équilibre en fonction du paramètre α de l'équation différentielle (2.27). Dans le cadre des équations différentielles ordinaires on peut se référer à [35, 40, 50].

Par ailleurs, pour les équations différentielles à retard, Chafée[12] a donné une première

étude du problème de bifurcation de Hopf. Ensuite Hale[32] en a étudié ce problème dans le cas d'un retard fini. Chow et Mallet-Paret [16] ont appliqué la méthode de moyennisation aux équations différentielles retardées pour déterminer les éléments de la bifurcation : stabilité, l'amplitude et la direction de l'orbite périodique bifurquée. Arino [5] a donné une nouvelle formulation analogue à celle considérée dans [32], en se ramenant à un problème de point fixe d'opérateurs. Stech [78] a utilisé la théorie de Lyapunov-Schmidt et les techniques de Hale [32] pour étudier la bifurcation de Hopf dans des équations différentielles à retard infini. Il a aussi donné un algorithme de calcul des éléments de bifurcation par un développement limité de la fonction de bifurcation. Tandis que Staffans [77] a utilisé le problème de bifurcation de Hopf dans un cas analogue à celui de Stech [78] et aussi pour des équations différentielles de type neutre avec retard infini. Il a aussi calculé les éléments de bifurcation de ces familles d'équations. Les techniques utilisées sont analogues à celles utilisées dans [78]. Dieckmann [18] a reformulé le problème sous forme d'une équation intégrale. En utilisant la théorie de perturbation par dualité, il montre le théorème de variété centre pour les équations différentielles à retard et déduit l'existence des solutions périodiques bifurquées par réduction de l'équation intégrale à une équation différentielle ordinaire dans \mathbb{R}^3 . Adimy [3] a utilisé la théorie des semi-groupes intégrés pour étudier le problème de bifurcation de Hopf. Par contre Talibi[79] a utilisé une méthode d'approximation pour obtenir l'existence des solutions périodiques.

2.3.1.2 Théorème de bifurcation de Hopf dans le cas des équations à retard

Considérons maintenant le système à retard sous la forme plus compacte suivante

$$\dot{x} = F(\alpha, x_t). \quad (2.28)$$

L'équation linéarisée autour de la position d'équilibre $\varphi = 0$ est :

$$\dot{v}(t) = D_\varphi F(\alpha, 0)v_t \quad (2.29)$$

Nous formulons, ici, les hypothèses suivantes :

2.3. Bifurcations et solutions périodiques

-(H_0) $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe \mathcal{C}^{k+3} , $F(\alpha, 0) = 0$, pour tout α , avec, $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, et $k \geq 0$ et les applications $D_\varphi^j F(\alpha, \varphi)$ sont bornées pour tout α dans un borné et tout entier $j \leq 3 + k$.

-(H_1) L'équation caractéristique

$$\det(\lambda Id - D_\varphi F(\alpha, 0)e^{\lambda(\cdot)} Id) = 0 \quad (2.30)$$

du système linéarisé (2.29) possède en un certain $\alpha = \alpha_0 \geq 0$ une racine imaginaire pure simple $\lambda = \lambda(\alpha_0) = i\omega_0$ et ne possède pas d'autres racines $\lambda_j \neq \lambda_0$ et $\bar{\lambda}_0$ du type $\lambda_j = m\lambda_0$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

-(H_2) Soit $\lambda(\alpha)$ la racine de l'équation (2.30), pour α voisin de α_0 , on suppose que

$$\left. \frac{\partial R_e \lambda(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0. \quad (2.31)$$

Sous les hypothèses (H_0), (H_1) et (H_2), on aboutit au résultat suivant.

Théorème 2.9. [32] *Supposons que $F(\alpha, \varphi)$ possède des dérivées continues en $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}$, $F(\alpha, 0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et les hypothèses (H_0) , (H_1) et (H_2) sont vérifiées. Alors il existe $t_0, \alpha_0 > 0$, des fonctions $\alpha(t) \in \mathbb{R}$, $\omega(t) \in \mathbb{R}$, toutes les fonctions étant de classe \mathcal{C}^1 pour $|t| < t_0$, telles que l'équation (2.28) possède une solution $\omega(t)$ -périodique, notée $x^*(t)$, de classe \mathcal{C}^1 pour $|t| < t_0$, pour $|\alpha_0| < \alpha_0$. En particulier, lorsque $\alpha = 0$, l'équation (2.28) possède une solution périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$. \square*

Pour la preuve de ce théorème on peut se référer à [32]. \square

L'hypothèse (\mathbf{H}_2) est appelée "hypothèse de transversalité". Elle signifie que lorsqu'une valeur propre à partie réelle nulle apparaît, la branche de la valeur propre traverse l'axe des imaginaires purs.

Sous l'hypothèse de transversalité et l'hypothèse (\mathbf{H}_1) , l'équation (2.28) possède donc une solution périodique lorsque $\alpha = 0$ et les solutions périodiques perdurent au moins pour des valeurs de $\alpha > 0$ proches de zéro.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques éléments de la théorie des systèmes dynamiques. Nous nous sommes focalisés sur les systèmes dynamiques définis par des équations différentielles fonctionnelles à retards. Nous avons introduit le problème de la stabilité et de la bifurcation de Hopf de manière générale, et dans le chapitre suivant, nous allons nous limiter au cas linéaire.

Stabilité et bifurcations de Hopf dans le cas des systèmes linéaires multi-retards

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 3.1 | Théorèmes généraux | 39 |
| 3.2 | Quelques propriétés qualitatives des racines caractéristiques | 41 |
| 3.3 | Majoration d'une solution de (3.3) en utilisant les transformées de Laplace | 45 |
| 3.4 | Stabilité | 50 |
| 3.5 | Certains tests analytiques et graphiques | 51 |
| 3.6 | Commentaires | 54 |

L'étude locale de la stabilité d'un système dynamique peut être déduite de celle de son linéarisé. Le théorème de Hartmann-Grobmann[25, 26, 34] assure l'existence d'un homéomorphisme entre le linéarisé et le système initial. Les systèmes linéaires bénéficient de beaucoup d'outils d'analyse qui ne sont pas applicables aux systèmes non linéaires. C'est ainsi que nous nous intéressons aux systèmes linéaires. Soit le système d'équations différentielles à retards suivant :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), x_t(\tau_1), \dots, x_t(\tau_m)\right), \quad (3.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^{n \times (m+1)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire, et les $\tau_j > 0$, $j = 1, \dots, m$ sont des paramètres retards. Nous définissons une solution stationnaire $x(t) \equiv x^e \in \mathbb{R}^n$

comme solution du système non linéaire

$$f(x^e, x^e, x^e, \dots, x^e) = 0. \quad (3.2)$$

La linéarisation du système (3.1) autour de cette solution permet de ramener le système (3.1) à un système différentiel linéaire que nous pouvons formellement écrire sous la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0x(t) + \sum_{j=1}^m A_jx(t - \tau_j), \quad (3.3)$$

en considérant f comme une fonction des variables x^0, x^1, \dots, x^m ; A_j la dérivée partielle de f à x^e évaluée par rapport à $(m + 1)$ arguments :

$$A_j \equiv \frac{\partial f}{\partial x^j}(x^e, x^e, \dots, x^e), \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

Dans toute la suite nous nous intéressons aux systèmes linéaires multi-retards décrits par une équation de la forme (3.3). En admettant que $x(t) = x_0e^{\lambda t}$ est une solution non triviale de l'équation (3.3), il vient que la matrice

$$\Delta(\lambda; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \lambda I - A_0 - \sum_{j=1}^m A_j e^{-\lambda \tau_j} \quad (3.5)$$

doit être non inversible pour assurer l'existence de solution non trivialement nulle. Ceci n'est possible que si λ est solution de l'équation

$$P(\lambda; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) := \det \left(\lambda I - A_0 - \sum_{j=1}^m A_j e^{-\lambda \tau_j} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Il faut noter que

- la matrice (3.5) est la matrice caractéristique du système (3.3).
- l'équation (3.6) est l'équation caractéristique du système (3.3).

Cette équation est transcendante c'est-à-dire, c'est une équation polynômiale en $e^{\lambda \tau_i}$. Les propriétés d'équations transcendantes sont évoquées dans [7, 51].

Si on pose $x(\phi) : t \in [-\bar{\tau}, \infty[\rightarrow x(\phi)(t) \in \mathbb{R}^n$ où $\bar{\tau} = \max_{1 \leq i \leq m} \tau_i$, l'unique solution de

(3.3) avec la condition initiale

$$x(\phi)(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\bar{\tau}, 0]$$

alors l'état du système au temps t est donné par

$$x_t(\phi) = x(\phi)(t + \theta) \quad \theta \in [-\bar{\tau}, 0].$$

Posons $T(t), t \geq 0$ l'opérateur solution

$$(T(t)\phi)(\theta) = x(\phi)(t + \theta) \quad \theta \in [-\bar{\tau}, 0].$$

Le générateur infinitésimal \mathcal{A} de $T(t)$ défini sur

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}([-\bar{\tau}, 0], \mathbb{R}^n), \frac{d\phi}{d\theta} \in \mathcal{C}([-\bar{\tau}, 0], \mathbb{R}^n), \phi(0) = A\phi(0) + \sum_{i=1}^m A_i \phi(-\tau_i) \right\} \quad (3.7)$$

est tel que

$$\mathcal{A}\phi = \frac{d\phi}{d\theta}. \quad (3.8)$$

On écrit l'équation (3.3) sous la forme d'une équation différentielle abstraite

$$\frac{d}{dt}x_t = \mathcal{A}x_t \quad (3.9)$$

On voit que si λ est valeur propre de \mathcal{A} , alors une fonction propre correspondante est de la forme $ve^{\lambda\theta}$, $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ et $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

3.1 Théorèmes généraux

Nous donnons ici quelques théorèmes généraux utiles pour la suite.

Théorème 3.1. (*Théorème de Rouché*)[8, 19]

Soient f et g deux fonctions analytiques à l'intérieur et sur un contour simple fermé C

du plan complexe. Si

$$|g(z)| < |f(z)| \tag{3.10}$$

pour tout z sur C , alors f et $f + g$ ont le même nombre (les multiplicités inclus) de zéros à l'intérieur C .

Pour la preuve, on peut se référer à [8, 19, 29, 41].

Exemple 3.1. Combien a-t-on de racines de l'équation

$$z^6 - 5z^5 + z^3 - 2 = 0 \tag{3.11}$$

dans le cercle unité ($|z| = 1$) ?

Posons $f(z) = -5z^5$ et $g(z) = z^6 + z^3 - 2$ alors si $|z| = 1$ on a $|f(z)| = 5$ et $|g(z)| \leq 4$.

Ainsi $|f(z)| > |g(z)|$ sur le cercle $|z| = 1$. Par conséquent f et $f + g$ ont même nombre de racine sur le cercle $|z| = 1$ ie l'équation (3.11) a 5 racines sur $|z| = 1$. \square

Le théorème de Rouché est un puissant outil pour la localisation des zéros des fonctions. Le théorème ci-après appelé théorème de Continuité des racines d'une équation en fonction des paramètres se démontre en utilisant le théorème de Rouché.

Théorème 3.2. [19]

Soient A un ensemble ouvert connexe de \mathbb{C} , F un espace métrique,

$f : A \times F \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue telle que pour tout $\alpha \in F$, la fonction $z \mapsto f(z, \alpha)$ soit analytique dans A .

Soit B une partie ouverte de A , dont l'adhérence \bar{B} dans \mathbb{C} est compacte et contenue dans A et soit $\alpha_0 \in F$ tel que la fonction $z \mapsto f(z, \alpha_0)$ n'admet pas de zéro sur ∂B la frontière de B . Alors il existe un ouvert W de α_0 dans F tel que :

- Pour tout $\alpha \in W$, la fonction qui à tout $z \mapsto f(z, \alpha)$ n'admet pas de zéro sur la frontière de B ,
- La somme des ordres des zéros de $z \mapsto f(z, \alpha)$ appartenant à B est indépendant de α .

Pour la preuve de ce théorème on peut se référer à [19]. Ce théorème de continuité des zéros, d'une fonction paramétrique peut être utilisé pour l'étude des systèmes à retard en

prenant $A = \mathbb{C}$ et $F = \mathbb{R}_+^n$ l'espace des retards. Plus explicitement nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.3. [67]

Soient B un ensemble ouvert et connexe de \mathbb{R}^n , $(\lambda, \mu) \mapsto h(\lambda, \mu)$ une fonction continue sur $\mathbb{C} \times B$ et $\lambda \mapsto h(\lambda, \mu)$ analytique sur \mathbb{C} . Soit $\lambda_i(\mu)$ les zéros de $\lambda \mapsto h(\lambda, \mu)$ tels que $Re(\lambda_i(\mu)) \geq 0$ et m_i l'ordre de multiplicité de $\lambda_i(\mu)$. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $|\lambda_i(\mu)| \leq r$. Soit $B_1 \subset B$ un ensemble connexe, fermé et borné. Si pour tout $\mu \in B_1$ $h(\lambda, \mu) \neq 0 \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R}$, alors $\sum m_i = \text{constante}$ sur B_1 .

Pour la preuve, se référer à [67].

Corollaire 3.1.

Sous les hypothèses du théorème (3.3), si μ varie, la somme des ordres des zéros de $h(\lambda, \mu)$ dans $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) \geq 0\}$ peut changer s'il existe un λ_0 et un zéro $\lambda = i\omega$ ($\omega \in \mathbb{R}$) tels que $h(i\omega, \mu_0) = 0$.

Après ce bref rappel sur quelques théorèmes généraux nous passons en revue quelques propriétés qualitatives des racines de l'équation (3.6).

3.2 Quelques propriétés qualitatives des racines caractéristiques

Bien que l'équation caractéristique (3.6) soit transcendante (admet un nombre infini de zéros), notons cependant qu'elle a certaines simples et intéressantes propriétés. Nous en citons ici quelques unes.

Proposition 3.1.

Soit $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}_+^m$. L'ensemble des zéros de l'application

$$\lambda \mapsto \det\left(\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda \tau_i}\right)$$

est discret.

Preuve

Il suffit de vérifier que la fonction $\lambda \mapsto \det \left(\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda \tau_i} \right)$ est analytique sur \mathbb{C} , et conclure grâce au principe des zéros isolés. \square

De manière générale, pour toute fonction entière non triviale, on a [29, 41, 48] :

- les racines caractéristiques ont des ordres finis ;
- l'ensemble des racines caractéristiques n'a pas un point d'accumulation fini ;
- il y a au plus un nombre dénombrable de racines.

Proposition 3.2. *Il y a seulement un nombre fini de racines caractéristiques dans toute bande verticale du plan complexe, donnée par*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re}(\lambda) < \beta\}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\alpha < \beta$.

Proposition 3.3.

Soit $\rho \in \mathbb{R}$, il existe au plus un nombre fini de racines caractéristiques vérifiant $\operatorname{Re}(\lambda) > \rho$.

Preuve

Soit $\rho \in \mathbb{R}$, λ une racine caractéristique avec $\operatorname{Re}(\lambda) > \rho$. Alors pour $s > 0$

$$|e^{-\lambda s}| = e^{-\operatorname{Re}(\lambda)s} \leq e^{-\rho s}.$$

Notons que l'équation caractéristique peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} P(\lambda; \tau_1, \dots, \tau_m) = & \lambda^n + p_{n-1}(e^{-\lambda \tau_1}, \dots, e^{-\lambda \tau_m}) \lambda^{n-1} + p_{n-2}(e^{-\lambda \tau_1}, \dots, e^{-\lambda \tau_m}) \lambda^{n-2} \\ & + \dots - p_0(e^{-\lambda \tau_1}, \dots, e^{-\lambda \tau_m}) = 0 \end{aligned}$$

avec $|p_k(e^{-\lambda \tau_1}, \dots, e^{-\lambda \tau_m})| \leq C_k$, C_k dépendant de ρ . Choisissons un nombre positive très grand R vérifiant

$$\frac{C_{n-1}}{R} + \dots + \frac{C_0}{R^n} < 1 \tag{3.12}$$

et supposons $|\lambda| > R$. Alors de (3.12), on a

$$\begin{aligned} |\lambda|^n &> \frac{C_{n-1}}{R} |\lambda|^n + \dots + \frac{C_0}{R^n} |\lambda|^n \\ &\geq C_{n-1} |\lambda|^{n-1} + \dots + C_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

mais

$$\begin{aligned} \lambda^n &= -p_{n-1}(e^{-\lambda\tau_1}, \dots, e^{-\lambda\tau_m})\lambda^{n-1} - p_{n-2}(e^{-\lambda\tau_1}, \dots, e^{-\lambda\tau_m})\lambda^{n-2} \\ &\quad - \dots - p_0(e^{-\lambda\tau_1}, \dots, e^{-\lambda\tau_m}) \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|\lambda|^n \leq C_{n-1} |\lambda|^{n-1} + \dots + C_0 \quad (3.14)$$

et qui contredit (3.13). Par conséquent $|\lambda| < R$. Or $P(\lambda; \tau_1, \dots, \tau_m)$ est une fonction analytique non triviale, elle ne peut pas avoir plus d'un nombre infini de racines dans un intervalle borné (Proposition 3.2), par conséquent $P(\lambda; \tau_1, \dots, \tau_m)$ peut seulement avoir un nombre fini de racine vérifiant $\mathcal{Re}(\lambda) > \rho$. \square

La proposition 3.2 assure qu'on ne peut pas trouver un nombre infini de racine dont les parties réelles dépassent un nombre réel quelconque ρ . En cas d'existence d'une suite infinie de racines de l'équation caractéristique, la proposition suivante nous dit que les parties réelles de ce dernières tendent vers moins l'infini.

Proposition 3.4. [20, 54]

S'il existe une suite (λ_k) de racines de (3.6) telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| \rightarrow +\infty$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Re}(\lambda_k) \rightarrow -\infty$$

Preuve

La fonction $\lambda \mapsto P(\lambda; \tau_1, \dots, \tau_m)$ étant analytique, l'ensemble de ses racines ne peut pas avoir un point d'accumulation fini. Et, d'après la proposition (3.2), $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Re}(\lambda_k) \neq +\infty$.

Il ne reste que le cas $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}e(\lambda_k) \rightarrow -\infty$. □

Corollaire 3.2. *Il existe un nombre $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que toutes les racines caractéristiques soient confinées dans le demi-plan*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(\lambda) < \gamma\} \tag{3.15}$$

Preuve

Soient $\rho \in \mathbb{R}$, il existe un nombre fini de racines λ_k vérifiant $\mathcal{R}e(\lambda_k) > \rho$. Rangeons ces racines par ordre croissant,

$$\mathcal{R}e(\lambda_1) \leq \mathcal{R}e(\lambda_2) \leq \dots \leq \mathcal{R}e(\lambda_N) \tag{3.16}$$

Pour un γ tel que $\mathcal{R}e(\lambda_N) < \gamma$, on a $\mathcal{R}e(\lambda) < \gamma$. □

Plus précisément on a aussi les propriétés suivantes :

Proposition 3.5.

Si λ est une racine de (3.6) alors elle vérifie

$$|\lambda| \leq \|A_0\|_2 + \sum_{i=1}^m \|A_i\|_2 e^{-\mathcal{R}(\lambda)\tau_i}. \tag{3.17}$$

Preuve

En effet, l'expression

$$\det\left(\lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda\tau_i}\right) = 0 \tag{3.18}$$

est équivalente à

$$\lambda \in \sigma\left(A_0 + \sum_{i=0}^m A_i e^{-\lambda\tau_i}\right), \tag{3.19}$$

ce qui conduit à

$$|\lambda| \leq \left\| A_0 + \sum_{i=1}^m A_i e^{-\mathcal{R}(\lambda)\tau_i} \right\|_2 \tag{3.20}$$

□

De ces propriétés, on peut remarquer qu'il y a un nombre fini de racines caractéristiques à parties réelles positives. Ce qui est d'une grande utilité dans l'étude de la stabilité. Pour

finir avec les propriétés des racines de l'équation caractéristique, nous considérons une racine imaginaire pure $\lambda = i\omega$ l'inégalité (3.17) donne

$$|\omega| \leq \sum_{i=0}^m \|A_i\| \quad (3.21)$$

ce qui signifie que l'intervalle sur lequel on peut trouver une racine imaginaire pure s'il existe est indépendant des retards.

3.3 Majoration d'une solution de (3.3) en utilisant les transformées de Laplace

Théorème 3.4. [76] Soit γ un réel tel que pour tout λ racine de l'équation caractéristique (3.6), on ait $\operatorname{Re}(\lambda) < \gamma$ alors il existe $M = M(\lambda)$ tel que

$$\|x(t)\| \leq M e^{\gamma t} \|\phi\|_c$$

où $x(t)$ est solution de l'équation (3.3). □

Pour prouver cet important théorème, nous avons besoin des transformées de Laplace.

Posons :

$$X(\lambda) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-\lambda t} dt \quad (3.22)$$

la transformée de Laplace de $x(t)$.

La transformée de Laplace de la relation (3.3) est

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{j=0}^m A_j x(t - \tau_j)\right\}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\lambda X(\lambda) - \phi_0(0) &= \sum_{j=0}^m A_j \left(e^{-\lambda\tau_j} \int_{-\tau_j}^0 e^{-\lambda u} \phi_0 du + e^{-\lambda\tau_j} X(\lambda) \right) \\ &= \sum_{j=0}^m A_j e^{-\lambda\tau_j} \int_{-\tau_j}^0 e^{-\lambda u} \phi_0 du + \sum_{j=0}^m A_j e^{-\lambda\tau_j} X(\lambda)\end{aligned}\quad (3.23)$$

il s'en suit que :

$$\left(\lambda I - \sum_{j=0}^m A_j e^{-\lambda\tau_j} \right) X(\lambda) = \phi_0(0) + \sum_{j=0}^m A_j e^{-\lambda\tau_j} \int_{-\tau_j}^0 e^{-\lambda u} \phi_0(u) du \quad (3.24)$$

De (3.24) on a :

$$X(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) \left[\phi_0(0) + \sum_{j=0}^m A_j e^{-\lambda\tau_j} \int_{-\tau_j}^0 e^{-\lambda u} \phi_0(u) du \right] \quad (3.25)$$

Notons que la solution C solution de (3.3) avec la condition initiale

$$C(t) = \begin{cases} I, & t = 0 \\ 0, & -r \leq t < 0. \end{cases}$$

est appelée matrice fondamentale. Sa transformée de Laplace est

$$\mathcal{L}\{C(t)\} = \Delta^{-1}(\lambda) \quad (3.26)$$

En effet, pour $C(t)$, $\left[\phi_0(0) + \sum_{j=0}^m A_j e^{-\lambda\tau_j} \int_{-\tau_j}^0 e^{-\lambda u} \phi_0 du \right] = I$ dans (3.25).

L'expression (3.25) s'écrit alors

$$X(\lambda) = \mathcal{L}\{C(t)\} \left[\phi_0(0) + \sum_{j=0}^m A_j e^{-\lambda\tau_j} \int_{-\tau_j}^0 e^{-\lambda u} \phi_0 du \right] \quad (3.27)$$

La solution $x(t)$ de (3.3) peut s'exprimer en fonction de la solution fondamentale selon la formule (souvent appelée formule de variation de la constante) donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.6. [24, 33]

Soit $x(t)$ une solution de (3.3) et $C(t)$ la solution fondamentale (3.3), on a :

$$x(t) = C(t)\phi_0(0) + \sum_{k=0}^m \int_{-\tau_k}^0 C(t - \theta - \tau_k) A_k \phi_0(\theta) d\theta \quad (3.28)$$

Preuve

On applique la transformée de Laplace inverse à l'expression (3.27).

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}\{C(t)\}\phi_0(0)\right) = C(t)\phi_0(0)$$

et pour $e^{-\lambda\tau_j} \int_{-\tau_j}^0 e^{-\lambda u} x(u) du$ considérons la fonction $\omega : [-\tau_j, \infty[\rightarrow [0, 1]$ définie par

$$\begin{cases} \omega(\theta) = 0, & \text{si } \theta \geq 0 \\ \omega(\theta) = 1, & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

et ϕ est prolongé à $[-\tau_j, \infty[$ par $\phi_0(\theta) = \phi_0(0)$ pour $\theta \geq 0$. On a,

$$e^{-\lambda\tau_j} \int_{-\tau_j}^0 e^{-\lambda u} \phi_0(u) du = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \phi_0(-\tau_j + s) \omega(-\tau_j + s) ds \quad (3.29)$$

$$= \mathcal{L}\left(\phi_0(-\tau_j + s) \omega(-\tau_j + s)\right) \quad (3.30)$$

et par suite la transformée inverse de $\mathcal{L}\{C(t)\}\mathcal{L}(x(-\tau_j + s)\omega(-\tau_j + s))$ est donnée par la formule de convolution pour $t > 0$,

$$\int_0^t C(t - s) x(-\tau_j + s) \omega(-\tau_j + s) = \int_0^{\tau_j} C(t - s) x(-\tau_j + s). \quad (3.31)$$

En posant $s = r + \theta$, on obtient la formule

$$\int_0^{\tau_j} C(t - s) x(-\tau_j + s) = \int_{-\tau_j}^0 C(t - \theta - \tau_j) \phi(\theta) d\theta \quad (3.32)$$

Proposition 3.7.

L'unique solution du système (3.3) est donnée par

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(\lambda)\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} X(\lambda) e^{\lambda t} ds \quad (3.33)$$

où γ est telle que les racines caractéristiques de $\det \Delta(\lambda) = 0$ vérifie $\mathcal{R}e(\lambda) < \gamma$.

Preuve

Les pôles de $\Delta^{-1}(\lambda)$ sont les racines de $\det \Delta(\lambda) = 0$. De la proposition (3.2), il existe γ telle que toutes les racines de $\det \Delta(\lambda)$ vérifient $\mathcal{R}e(\lambda) < \gamma$ ainsi $\Delta^{-1}(\lambda)$ est analytique pour $\mathcal{R}e(\lambda) > \gamma$. Aussi $\hat{\phi}$ est analytique car ϕ est analytique. Par conséquent $X(\lambda)$ est analytique pour $\mathcal{R}e(\lambda) > \gamma$. D'où le résultat d'après [7] théorème 3.13 et particulièrement

$$C(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \Delta^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} ds, \quad t \geq 0 \quad (3.34)$$

Proposition 3.8.

Soit γ tel que $\mathcal{R}e(\lambda) < \gamma$ pour tout λ solution de $\det \Delta(\lambda) = 0$. Alors il existe une constante $k = k(\gamma)$ telle que

$$\|C(t)\| = \left\| \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \Delta^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} ds \right\| \leq k e^{\gamma t}, \quad t \geq 0 \quad (3.35)$$

Preuve

Les pôles de $\Delta^{-1}(\lambda)$ sont les racines de $\det \Delta(\lambda) = 0$. Soit k_i une racine de $\det \Delta(\lambda) = 0$ de multiplicité α

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \Delta^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda &= \sum \text{Res}(\Delta^{-1}(\lambda) e^{\lambda t}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_{\alpha_i-1}(\lambda) e^{k_i t} \end{aligned}$$

La série $\sum_{i=1}^{\infty} P_{\alpha_i-1}(\lambda) e^{k_i t}$ est convergente sur $\mathcal{R}e(\lambda) \leq \gamma$, en vertu des propriétés des racines k_i de $\det \Delta(\lambda) = 0$, notamment le fait qu'il existe a plus un nombre fini de racines à parties réelles positives. Il s'en suit

$$\begin{aligned} \|C(t)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} P_{\alpha_i-1}(s) e^{k_i t} \right\| \\ &\leq k e^{\gamma t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

□

Dans la preuve précédente, on a utilisé les résultats de la remarque suivante

Remarque 3.1.

Le résidu de $e^{\lambda t} X_0(\lambda)$ en s_r est

$$Res = \frac{1}{(\alpha - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow s_r} \frac{d^{\alpha-1}}{d^{\alpha-1}} [(\lambda - s_r)^\alpha e^{\lambda t} X_0(\lambda)]$$

où α est la multiplicité de s_r . Il est prouvé dans [39] ce résidu est un polynôme de degré $\alpha - 1$.

On peut à présent énoncer et prouver la proposition principale suivante.

Proposition 3.9.

Soit γ tel que $\mathcal{R}e(\lambda) < \gamma$ pour tout s solution de $\det \Delta(\lambda) = 0$. Alors il existe une constante $M = M(\gamma)$ telle que

$$\|x(t)\| \leq M e^{\gamma t} \|\phi\|_c \tag{3.36}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|C(t)\phi(0) + \sum_{k=0}^m \int_{-\tau_k}^0 C(t)A_k\phi_0(s - \tau_k)ds\| \\ \|x(t)\| &\leq \|C(t)\phi(0)\| + \sum_{k=0}^m \int_{-\tau_k}^0 \|C(t)\| \|A_k\| \|\phi_0(s - \tau_k)\| ds \\ &\leq k e^{\gamma t} \|\phi(0)\| + \sum_{k=0}^m \int_{-\tau_k}^0 k e^{\gamma t} \|A_k\| \|\phi_0(s - \tau_k)\| ds \\ &\leq k e^{\gamma t} \|\phi\|_c + \sum_{k=0}^m \int_{-\tau_k}^0 k e^{\gamma t} \|A_k\| \|\phi\|_c ds \\ &\leq k e^{\gamma t} \left(1 + \sum_{k=0}^m \int_{-\tau_k}^0 \|A_k\| ds \right) \|\phi\|_c \end{aligned}$$

Ce théorème montre que le système (3.3) est (exponentiellement) stable si et seulement si les racines de (3.6) sont à parties réelles strictement négatives.

3.4 Stabilité

Il est connu [27] que pour les systèmes linéaires, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité exponentielle. Introduisons la définition suivante

Définition 3.1.

L'état d'équilibre x^e de (3.3) est dit absolument stable (c'est - à - dire stable asymptotiquement indépendamment des retards) si il est stable pour tous les retards $\tau_j \geq 0$. Il est dit conditionnellement stable (c'est - à - dire stable asymptotiquement dépendant des retards) si il est stable asymptotiquement pour τ_j dans certains intervalles mais non nécessairement pour tous les τ_j .

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité absolue de (3.3).

Théorème 3.5.

Le système (3.3) est absolument stable si et seulement si

- (i) $Re(\lambda) < 0, \quad \forall \lambda$ valeur propre de $\sum_{j=0}^m A_j$
- (ii) $det\left(i\omega I - A_0 - \sum_{j=0}^m A_j e^{-i\omega\tau_j}\right) \neq 0 \quad \forall \omega.$

L'hypothèse (i) garantit que le système (3.3) avec $\tau_j = 0$ ($1 \leq j \leq m$) est stable asymptotiquement, alors que l'hypothèse (ii) assure que $i\omega$ n'est pas une racine de l'équation (3.6). Clairement, le théorème assure qu'il ne peut y avoir de stabilité absolue si l'équation caractéristique de (3.6) admet une racine imaginaire pure. Compte tenu de (3.6), on voit bien que le théorème est particulièrement utile pour l'étude de stabilité et de bifurcation de Hopf pour des systèmes différentiels à retards. En effet, si la condition (ii) du théorème 3.5 n'est pas satisfaite alors l'équation caractéristique (3.6) admet une paire de racines imaginaires pures $\pm i\omega_0$ et le système (3.3), dans ce cas, n'est plus inconditionnellement stable mais peut être conditionnement stable. En se référant alors sur le théorème (3.3), la bifurcation de Hopf apparaît, c'est - à - dire, une famille de solutions périodiques bifurquées au niveau de l'état d'équilibre autour du point critique $\tau_0^* = a \pm i\omega_0$ où $\pm i\omega_0$ est racine de l'équation caractéristique (3.6).

Posons

$$\Omega = \left\{ \omega \in \mathbb{R}_+^* \mid P(i\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0 \text{ pour un } (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}_+^m \right\} \quad (3.37)$$

et

$$\mathcal{T} = \left\{ (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}_+^m : P(i\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0, \omega \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.38)$$

l'ensemble \mathcal{T} est souvent désigné par 'courbe critique' ou 'courbe de bifurcation de Hopf (m=2)' et surface de bifurcation de Hopf ou critique si m>2 et Ω par ensemble des fréquences.

3.5 Certains tests analytiques et graphiques

Nous donnons ici quelques méthodes développées dans la littérature pour l'analyse de la stabilité, car la plupart d'entre elles sont basées sur les propriétés mentionnées ci-dessus. De plus amples détails sur les méthodes proposées ci-dessous peuvent être trouvés dans [33, 38, 39]. Considérons le cas d'un système à retard de la forme (3.3) comportant un seul retard.

L'idée des méthodes de localisation des racines est de déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles l'équation caractéristique a des racines sur l'axe des imaginaires purs. Il s'agit des situations pour lesquelles les changements de comportement du système se produisent dans le sens de l'augmentation ou la diminution du nombre de racines dans le demi-plan droit ouvert du plan complexe.

3.5.1 Méthode \mathcal{D} – décomposition

Cette méthode due à Neimark [53] consiste à décomposer l'espace des paramètres en plusieurs régions, telles que chaque région soit délimitée par une hypersurface qui correspond au cas où au moins une racine se trouve sur l'axe des imaginaires. En outre, pour tous les paramètres se trouvant dans une région donnée, l'équation caractéristique correspondante a le même nombre de racines avec partie réelle positive. Dans ce cas, l'étude de stabilité est réduite à l'analyse des régions sans racines instables. Il est clair que chaque

région stable dépend des paramètres du système (3.3), à savoir les entrées A , A_1 et $\tau = \tau_1$ (dans le cas d'un seul retard) et donc, chaque hypersurface peut être considérée comme une fonction de τ . Si τ est considéré comme un paramètre, l'évolution de cette hypersurface comme des fonctions permet de détecter les régions stables dépendant du retard et les régions stables indépendamment du retard. Le cas scalaire peut être facilement analysé, mais pour des systèmes généraux, la méthode peut s'avérer difficile à appliquer.

3.5.2 Méthode τ -décomposition

Cette méthode (appelée aussi méthode de τ -subdivision) est appliquée uniquement pour l'étude de la stabilité des systèmes à un seul retard en fonction du paramètre retard et en supposant que tous les autres paramètres du système sont fixés. Elle nécessite la transformation de l'équation caractéristique sous la forme :

$$e^{\lambda\tau} = D_0(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} \quad (3.39)$$

L'idée de la méthode consiste à analyser le comportement du contour $D_0(i\omega)$ ($\omega \in \mathbb{R}$) par rapport au cercle unité dans le plan complexe (car pour $\lambda = i\omega$, $e^{i\omega\tau}$ est sur le cercle unité). En particulier, s'il n'y a pas d'intersection avec le cercle unité, il est facile de conclure que la stabilité du cas $\tau = 0$ est conservée pour toutes les valeurs positives du retard. Toutefois, cette condition est suffisante mais non nécessaire. La τ décomposition est duale à la D-décomposition, dans la mesure où dans la D-décomposition on suppose que certains paramètres du système varient mais le retard est fixé alors que dans la τ -décomposition on fait l'inverse. Notons également certaines similitudes entre les méthodes de Cooke et Van den Driessche [17]

3.5.3 Un exemple illustratif

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - \tau) \\ (a, b, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (3.40)$$

avec des conditions initiales appropriées. L'utilisation de la D-décomposition donne une paramétrisation de l'espace en plusieurs régions caractérisées par le même nombre de racines à partie réelle positive.

En plus, ces régions sont délimitées par des hypersurfaces (ici de dimension 1) qui ont la propriété qu'au moins une racine est sur l'axe des imaginaires ($\lambda = 0$, ou $\lambda = \pm i\omega$) pour les paramètres a, b, τ correspondants.

La méthodologie utilisée est la suivante :

- premièrement, on trouve les hypersurfaces en prenant $\lambda = i\omega$ dans l'équation caractéristique,
- deuxièmement, pour ces régions, on considère un point dont l'analyse de l'équation caractéristique est simple

Ici, les hypersurfaces sont représentées par

$$a + b = 0$$

correspondant à $\lambda = 0$ et

$$\begin{cases} a + b\cos(\omega\tau) = 0 \\ \omega - b\sin(\omega\tau) = 0 \end{cases} \quad \omega \neq 0$$

l'équation $\omega^2 + a^2 = b^2$ d'inconnue ω , correspondant à l'existence d'une racine imaginaire pure de l'équation caractéristique, n'a pas de solution si $a \geq |b|$ et admet de solutions

si $b \geq |a|$ vérifiant $\begin{cases} \omega = \sqrt{b^2 - a^2} \\ \tau = \frac{\arccos(\frac{-a}{b})}{\sqrt{b^2 - a^2}} \end{cases}$ et on doit avoir $a+b > 0$ pour garantir que le

système sans retard est stable. En définitive si $(a, b) \in S_\infty = \{(a, b) : a + b > 0, a \leq |b|\}$ le système est stable indépendamment du retard. Si $(a, b) \in S_\tau = \{(a, b) : a + b > 0, b \leq |a|\}$,

le système est stable si $\tau < \frac{\arccos(\frac{-a}{b})}{\sqrt{b^2 - a^2}} := \tau_0$.

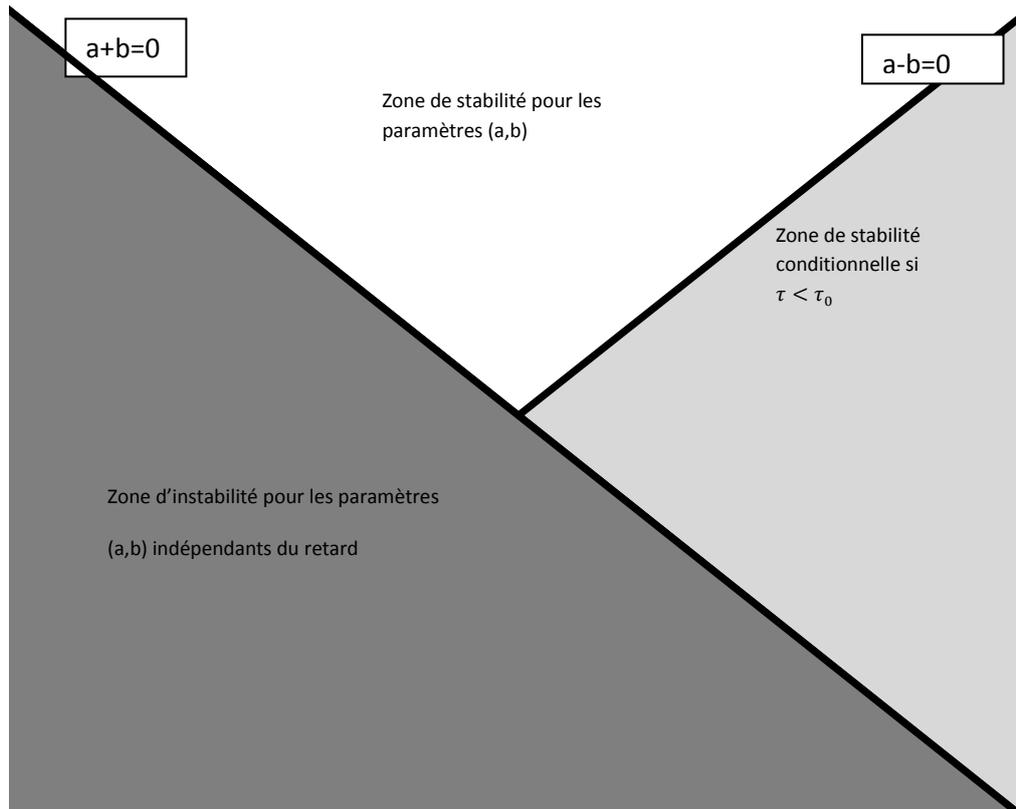


FIGURE 3.1 – Illustration des zones de stabilité et d’instabilité pour le système (3.40)

3.6 Commentaires

La détermination de l’ensemble des bifurcations de Hopf des systèmes multi-retards a intéressé plus d’un chercheur ces dernières années. Plusieurs approches ont été développées.

Une approche pour la détermination de la région critique a été proposée par Sipahi et Olgac [73, 74, 75]. Cette approche utilise la transformation suivante appelée transformation de Rekasius [65]. Il a proposé de remplacer le terme transcendant par une expression rationnelle

$$e^{-\lambda\tau_k} = \frac{1 - T_k\lambda}{1 + T_k\lambda}, \quad T_k \in \mathbb{R} \quad (3.41)$$

Pour $\lambda = \pm i\omega$ la transformation (3.41) est exacte et on a :

$$\tau_k = \frac{2}{\omega} [\arctan(\omega T_k) + l\pi], \quad Tl = 0, 1 \dots \quad (3.42)$$

A l’aide de la théorie des semi-groupes, Engelborghs et al [22] ont proposé une discrétisation

sation de l'opérateur solution et ont mis au point un utilitaire de matlab, ddebiftool[23]. Leur approche ne considérait pas uniquement le retard comme paramètre de bifurcation. Une autre approche utilisant la théorie des semi-groupes par discrétisation du générateur infinitésimal est proposé dans [9, 10]. Ils utilisent une discrétisation avec un schéma de Runge-Kutta[9] et une discrétisation pseudo-spectrale[10] du générateur infinitésimal. Leur approche permet aussi de connaître la direction de bifurcation en calculant à des endroits appropriés l'abscisse spectrale. Cette approche est resumée dans un GUI appelé "traceDDE"[11]. Une autre approche n'utilisant pas la théorie des semi-groupes est présentée dans [37]. L'auteur utilise des opérateurs de Lyapunov pour paramétriser l'ensemble des bifurcation de Hopf et aboutit à la résolution d'un problème aux valeurs propres.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les systèmes linéaires à retards. Nous avons porté notre attention sur le problème de la stabilité et nous avons évoqué quelques théorèmes généraux permettant d'étudier et de caractériser l'ensemble des bifurcations de Hopf. Quelques approches de détermination de l'ensemble des points des bifurcations de Hopf dans le cas particulier de deux retards ont été évoquées. Au chapitre suivant, nous proposons une caractérisation des points de bifurcation de Hopf en se basant sur des courbes ayant une certaine propriété de densité dans l'espace.

Caractérisation numérique des bifurcations de Hopf

Sommaire

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Courbes α -denses | 56 |
| 4.2 | Formulation de l'ensemble des bifurcations de Hopf | 62 |
| 4.3 | Construction d'un sous-ensemble dense de l'ensemble de points des bifurcations de Hopf | 63 |
| 4.4 | Un algorithme | 66 |
| 4.5 | Expérimentation numérique | 67 |

La caractérisation de l'ensemble de points de bifurcation de Hopf des systèmes différentiels paramétrés reste un sujet d'actualité. D'importants travaux de recherche sur ce sujet sont référés dans [37, 72]. Dans le cadre des EDO multi-retard, on s'intéresse ici, en fonction des paramètres retards, aux solutions présentant des comportements oscillatoires et pouvant évoluer vers des états chaotiques. De telles solutions, constituant des états transitoires entre états stables et instables, sont caractérisées par des paramètres de bifurcation de Hopf. Nous nous proposons, ici, d'établir un résultat de caractérisation complète de l'ensemble des points de bifurcation pour des systèmes différentiels multi-retard en nous basant sur des propriétés de courbes α -denses remplissant \mathbb{R}^n .

4.1 Courbes α -denses

L'objet des courbes α -denses est d'approcher des fonctions de plusieurs variables par des fonctions d'une seule variable en utilisant des courbes qui ont une certaine propriété de densité dans l'espace : ces courbes sont alors appelées transformations réductrices. Ces

transformations réductrices ont la propriété d'alpha-densité dans l'espace qui n'est qu'une généralisation des courbes qui remplissent l'espace[68]. A titre d'exemple, on peut citer les courbes de Peano, de Hilbert et de Lebesgues. Nous considérons les courbes α -denses avec α pouvant tendre vers 0. Cette notion d' α -densité a été utilisée pour l'optimisation globale des fonctions à plusieurs variables[14].

Nous donnons quelques définitions.

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.

Un sous ensemble S de \mathbb{R}^n est dit α -dense dans \mathbb{R}^n si

$\forall M \in \mathbb{R}^n, \exists N \in S$ telle que : $d(M, N) \leq \alpha$, où $d(M, N)$ est la distance euclidienne.

Définition 4.2. [14]

Soit $A = [0, M]$, avec $M > 0$, un compact de \mathbb{R} . Une courbe de \mathbb{R}^n définie par

$$h : A \longrightarrow \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

est dite α -dense dans $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, si pour tout $x \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, il existe $t \in A$ tel que $d(x, h(t)) \leq \alpha$, d étant la distance euclidienne dans \mathbb{R}^n . Le réel α est appelé paramètre de densification.

On donne l'exemple suivant.

Exemple 4.1.

La Spirale d'Archimède $r = \alpha\theta$, $\theta \geq 0$ est $\pi\alpha$ -dense dans \mathbb{R}^2 .

En effet, soit M un point quelconque de \mathbb{R}^2 . Sachant que la distance entre deux spires successives dans la spirale d'Archimède est égale à $2\pi\alpha$, on peut toujours trouver un point M_0 de la spirale tel que $d(M, M_0) \leq \pi\alpha$. (la moitié de la distance entre deux spires successives).

La généralisation de ce résultat à \mathbb{R}^d peut se faire facilement en itérant le processus. Dans \mathbb{R}^3 , par exemple, si les coordonnées sont désignés par x_1, x_2, x_3 , alors on construit

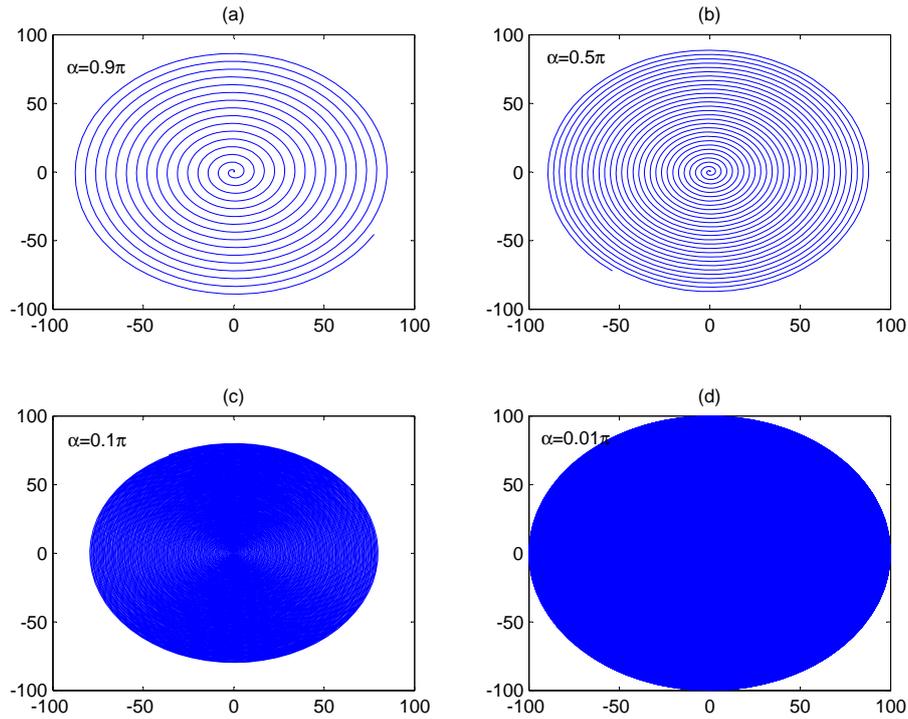


FIGURE 4.1 – Illustration de l' α densité de la spirale d'Archimède

la spirale d'Archimède en posant

$$x_1 = \alpha\theta_1 \cos \theta_1, \quad x_2 = \alpha\theta_1 \sin \theta_1, \quad x_3 = x_3. \quad (4.2)$$

En reliant θ_1 et x_3 par une seconde spirale d'Archimède : $\theta_1 = \alpha\theta \sin \theta$ et $x_3 = \alpha\theta \sin \theta$, on obtient

$$x_1 = \alpha^2\theta \cos \theta \cos(\alpha\theta \cos \theta), \quad x_2 = \alpha^2\theta \cos \theta \sin(\alpha\theta \cos \theta), \quad x_3 = \alpha\theta \sin \theta. \quad (4.3)$$

4.1.2 Quelques courbes α -denses

La difficulté avec la spirale d'Archimède est que les fonctions composantes $h_i(\theta)$ ne s'obtiennent pas en une seule étape. La procédure de leur obtention constitue une structure d'arbre à plusieurs paliers. A chaque palier on fait appel à la spirale d'Archimède pour relier deux à deux les variables, jusqu'à l'obtention des expressions finales en fonction d'une unique variable θ . Le temps de calcul est en fait proportionnel au nombre de variables, ce

qui augmente le temps d'évaluation de la fonction à approcher $f^*(\theta)$.

On propose ici, d'autres courbes α -denses obtenues directement en une seule étape, sans utilisation d'une succession de spirales d'Archimède. De plus, ces courbes sont simples et très faciles à obtenir. On a

Proposition 4.1. [14]

La transformation $\theta \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ avec

$$x_i = a\theta \cos(\alpha_i \theta), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

densifie \mathbb{R}^n si l'on choisit $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_i \gg \alpha_{i-1}$.

Il est pratique de chercher des transformations α -denses dans $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, au lieu de faire la restriction des transformations qui densifient \mathbb{R}^n à $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

A titre d'exemple les transformations

$$x_i = \cos \alpha_i \theta, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

et

$$x_i = \sin \alpha_i \theta, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

sont α -denses dans $\prod_{i=1}^n [-1, 1]$ [13].

En plus, elles permettent d'exprimer, en une seule étape, toutes les variables en fonction d'une seule et donc d'obtenir plus facilement les expressions de $h_i(\theta)$. Nous nous intéresserons à la transformation (4.5) mais les résultats resteront valables pour (4.6). Nous avons le résultat fondamental suivant :

Proposition 4.2. [13, 52]

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ une suite lentement croissante. La transformation $\theta \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i = \cos \alpha_i \theta, i = 1, \dots, n$ est α -dense dans le pavé $[-1, 1]^n$ pour

$$\pi \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \sqrt{n-1} \leq \alpha. \quad (4.7)$$

Le paramètre de densification α est obtenu pour un choix de

$$\alpha_n = \pi \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha} \sqrt{n-1} \quad (4.8)$$

Preuve

Remarquons d'abord que chaque $x_i = \cos \alpha_i \theta$ est périodique, de période $\frac{2\pi}{\alpha_i}$. De plus, la distance entre deux extrema successifs vaut $\frac{\pi}{\alpha_i}$. Nous allons montrer que, pour un choix adéquat de la suite $(\alpha_i)_i$, la transformation (4.5) remplit bien l'hypercube $[-1, 1]^n$ avec une α -densification que nous préciserons. Soit P un point quelconque fixé dans $[-1, 1]^n$. Montrons l'existence d'un point $P'(x_1^*, \dots, x_n^*)$ appartenant à la courbe réductrice définie par (4.5) et vérifiant

$$d(P, P') \leq \alpha.$$

En choisissant : $x_n = x_n^* = \cos \alpha_n^*$, on obtient : $|x_n - x_n^*| = 0$. Par ailleurs, comme chaque θ_i appartient à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{\alpha_n}$, on déduit :

$$|\theta_i - \theta^*| \leq \frac{\pi}{\alpha_n} \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction \cos , on déduit l'inégalité suivante :

$$|x_i - x_i^*| = |\cos \alpha_i \theta_i - \cos \alpha_i \theta_i^*| \leq \pi \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

ce qui implique :

$$d^2(P, P') = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_i^*|^2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\pi \frac{\alpha_i}{\alpha_n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2$$

Donc, le point $P'(x_1^*, \dots, x_n^*)$ approche le point $P(x_1, \dots, x_n)$ avec un paramètre de densification qui vaut

$$\frac{\pi^2}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2.$$

Si l'on veut obtenir une densification de paramètre α , on doit satisfaire :

$$\frac{\pi^2}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \leq \alpha^2 \quad (4.9)$$

Comme la suite $(\alpha_i)_i$ est choisie croissante, la borne supérieure du premier terme de (4.9) est $\frac{\pi^2}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n-1}^2$. On peut alors choisir α_n et α_{n-1} tels que :

$$\alpha = \pi \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \sqrt{(n-1)}$$

□

On notera que pour des courbes denses dans un pavé quelconques $[-a, a]^n$ de \mathbb{R}^n , il suffit de poser

$$x_i = a \cos(\alpha_i \theta). \quad (4.10)$$

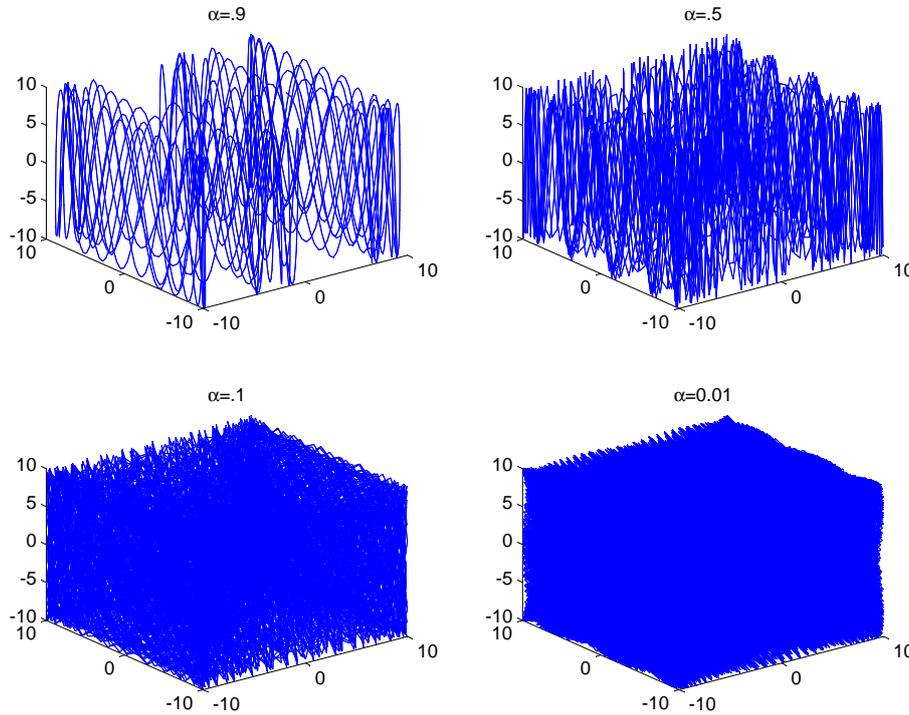


FIGURE 4.2 – Illustration de l' α densité de la courbe $\cos(\alpha_i \theta)$ pour $a=10$ et pour différentes valeurs de α

4.2 Formulation de l'ensemble des bifurcations de Hopf

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_0x(t) + \sum_{k=1}^m A_kx(t - \tau_k), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-\bar{\tau}, 0], \end{cases} \quad (4.11)$$

avec $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m = \bar{\tau}$, $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d'équation caractéristique

$$P(\lambda; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \det \left(\lambda I - A_0 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-\lambda \tau_k} \right) = 0 \quad (4.12)$$

D'après la théorie développée dans le chapitre précédent, la condition d'existence d'un point de bifurcation de Hopf est l'apparition d'un couple de racines imaginaires pures $\lambda = \pm i\omega$ quand on fait varier les retards. Ce qui conduit à chercher les racines imaginaires pures de l'équation caractéristique (4.12). Les points de bifurcations de Hopf sont donc les points $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que $P(i\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) = 0$ pour des valeurs de ω dans \mathbb{R}_+^* . Il faut cependant noter qu'il existe des paramètres $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels l'équation (4.12) n'admet pas de solutions. Il serait alors plus indiqué de s'intéresser à la recherche des points de bifurcations de Hopf dans un espace fréquence-paramètres \mathbb{R}^{m+1} , c'est à dire l'ensemble de points $(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m)$ racines de l'équation caractéristique (4.12). Nous proposons dans la suite de donner une approche permettant de caractériser l'ensemble des bifurcations.

L'ensemble des bifurcations vérifie

$$P(i\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0 \quad (4.13)$$

Pour la suite on note

$$f(\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \mathcal{Re}(P(\lambda, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) \quad (4.14)$$

$$g(\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \mathcal{Im}(P(\lambda, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)). \quad (4.15)$$

Pour la construction de l'ensemble de bifurcation de Hopf, il est immédiat de voir que

4.3. Construction d'un sous-ensemble dense de l'ensemble de points des bifurcations de Hopf

le point $(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m)$ est solution de (4.13) si et seulement si

$$G(\omega, \tau_1, \dots, \tau_m) := f^2(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) + g^2(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) = 0. \quad (4.16)$$

Il s'ensuit que l'ensemble des points de bifurcation peut être formellement noté par

$$S = G^{-1}(0) = \left\{ (\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m : G(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) = 0 \right\} \quad (4.17)$$

4.3 Construction d'un sous-ensemble dense de l'ensemble de points des bifurcations de Hopf

Si on pose

$$f(\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \operatorname{Re}(P(i\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) \quad (4.18)$$

$$g(\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \operatorname{Im}(P(i\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)), \quad (4.19)$$

alors il est immédiat de voir que le point $(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m)$ est solution de l'équation caractéristique (4.12) si et seulement si

$$G(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) := f^2(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) + g^2(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) = 0 \quad (4.20)$$

Il s'ensuit que l'ensemble des points de bifurcation de Hopf peut être formellement noté par

$$G^{-1}(0) = \left\{ (\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m : G(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) = 0 \right\} \quad (4.21)$$

Considérons maintenant une transformation réductrice h_α qui soit α -dense dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$ c'est à dire : h_α est une application de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$ telle que pour tout point $P \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\|h_\alpha(\theta) - P\| \leq \alpha \quad (4.22)$$

Posons à cet effet

$$S_\alpha = \left\{ h_\alpha(\theta), \theta \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad : G \circ h_\alpha(\theta) = 0 \right\} \quad (4.23)$$

4.3. Construction d'un sous-ensemble dense de l'ensemble de points des bifurcations de Hopf

Par construction, S_α est bien un sous-ensemble de $G^{-1}(\{0\})$. Afin d'établir un résultat de densité, on aura besoin du résultat suivant.

Proposition 4.3.

Soit $\underline{\omega}$ et $\bar{\omega}$ vérifiant $0 < \underline{\omega} < \bar{\omega}$ et $\tau \in \mathbb{R}^+$, alors la restriction de G à $[\underline{\omega}, \bar{\omega}] \times [0, \tau]^m$ est lipschitzienne.

Preuve

Il suffit de remarquer que l'expression (4.12) peut s'écrire explicitement sous la forme suivante :

$$P(\lambda; \tau_1, \dots, \tau_m) = \lambda^n + \sum_{k=1}^m p_k(e^{-\lambda\tau_1}, \dots, e^{-\lambda\tau_m}) \quad (4.24)$$

où p_k sont des polynômes de degré k sur \mathbb{R}^m . Il s'en suit que les applications

$$(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) \longmapsto f(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) = \mathcal{R}e(P(i\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) \quad (4.25)$$

et

$$(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) \longmapsto g(\omega; \tau_1, \dots, \tau_m) = \mathcal{I}m(P(i\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) \quad (4.26)$$

sont de classes C^∞ sur \mathbb{R}^{m+1} . On en déduit que la restriction de G à $[\underline{\omega}, \bar{\omega}] \times [0, \tau]^m$ ainsi que toutes ses dérivées sont bornées. Cette restriction est alors lipschitzienne. \square

Dans la suite, nous désignons par $G_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$ la restriction de la fonction G à $[\underline{\omega}, \bar{\omega}] \times [0, \tau]^m$ et nous posons

$$S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau} = G_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}^{-1}(\{0\}) \quad (4.27)$$

En vertu de la propriété de continuité de $G_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$, $S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$ est un sous-ensemble fermé de $[\underline{\omega}, \bar{\omega}] \times [0, \tau]^m$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.1. Soit $\underline{\omega}$ et $\bar{\omega}$ satisfaisant $0 < \underline{\omega} < \bar{\omega}$ et $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $P \in S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$|G_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau} \circ h_\alpha(\theta)| \leq \beta\alpha \quad (4.28)$$

où β est une constante positive.

Preuve

4.3. Construction d'un sous-ensemble dense de l'ensemble de points des bifurcations de Hopf

Soit $P \in S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$. Comme $S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$ est fermé dans $[\underline{\omega}, \bar{\omega}] \times [0, \tau]^m$, il existe une suite $(P_k) \subset [\underline{\omega}, \bar{\omega}] \times [0, \tau]^m$ qui vérifie

$$\begin{cases} G(P_k) = 0 \\ \|P - P_k\| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (\text{i})$$

En vertu de l' α -densité de h_α , il existe θ tel que

$$\|P - h_\alpha(\theta)\| \leq \alpha \quad (\text{ii})$$

et pour tout k , il existe θ_k tel que

$$\|P_k - h_\alpha(\theta_k)\| \leq \alpha \quad (\text{iii})$$

Par conséquent, grâce à (iii), on peut écrire

$$\|P - h_\alpha(\theta_k)\| \leq \|P - P_k\| + \alpha \quad (\text{iv})$$

Or d'après (i) $\|P - P_k\| \rightarrow 0$, il s'ensuit de (iv) que la suite $(h_\alpha(\theta_k))$ est bornée et, grâce à la continuité h_α , la suite (θ_k) l'est aussi. Ainsi, la suite θ_k (modulo une sous suite) converge. Il existe alors θ telle que $\theta_k \rightarrow \hat{\theta}$ (modulo une sous suite) et par continuité de h_α , nous avons

$$h_\alpha(\theta_k) \rightarrow h_\alpha(\theta). \quad (\text{v})$$

(modulo une sous suite). D'autre part, en vertu de la proposition (4.3), on sait que $G_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$ est lipschitzien sur $[\underline{\omega}, \bar{\omega}] \times [0, \tau]$, donc il existe une constante β tel que

$$\begin{aligned} \|G_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}(P_k) - G_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}(h_\alpha(\theta_k))\| &\leq \beta \|P_k - h_\alpha(\theta_k)\| \\ &\leq \beta \|P_k - h_\alpha(\theta)\| + \|h_\alpha(\theta_k) - h_\alpha(\theta)\| \end{aligned} \quad (\text{vi})$$

En passant à la limite, grâce à (iv) et (v), on en déduit finalement

$$\|G(P_k) - G(h_\alpha(\theta))\| \leq \beta\alpha \quad (\text{vii})$$

sachant que $G(P) = 0$, le théorème est alors prouvé. \square

Le théorème (4.1) montre en fait que si α est choisi suffisamment petit alors $S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau} \cap \text{image}(h_\alpha)$ est dense dans $S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$ au sens où à chaque point P de $S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau}$ on peut trouver $\hat{\theta} \in \mathbb{R}$ tel que le point $\hat{P} = h_\alpha(\hat{\theta})$ soit aussi proche de P . Le théorème offre donc une opportunité de construire un algorithme permettant de déterminer une approximation de l'ensemble des points de bifurcation dans un pavé de \mathbb{R}^m .

4.4 Un algorithme

Les matrices A_j $j = 1, \dots, m$ dans l'expression (4.12) étant données, ainsi que la fonction $\theta \mapsto h_\alpha(\theta)$, l'algorithme permettant de déterminer l'ensemble de bifurcation dans un pavé $[\underline{\omega}, \bar{\omega}] \times [0, \tau]^m$ est résumé par

(1) Lire le paramètre d'approximation N_{max}

(2) Définir G relativement à (4.18), (4.19) et (4.20)

• pour $k = 0 : N_{max}$

– Résoudre l'équation $G(h_\alpha(\theta)) = 0$, dans l'intervalle $[k\delta\theta, (k+1)\delta\theta]$; soit $\hat{\theta}_k$ la solution si elle existe

– $S_{\underline{\omega}, \bar{\omega}, \tau} \ni (\hat{\theta}_k)$

– Calculer τ_1, \dots, τ_m

\square

4.5 Expérimentation numérique

Pour notre simulation numérique, nous considérons comme courbe α -dense, la courbe (4.10) dont l' α -densité est prouvée dans la section(4.1.2), c'est-à- dire

$$h_\alpha : \theta \longmapsto (l\cos(\alpha_1\theta), \dots, l\cos(\alpha_{n+1}\theta)) \quad (1)$$

où $\alpha_1 = 1, \alpha_{i+1} = \pi \frac{\sqrt{n}}{\alpha} \alpha_i, i = 1, \dots, n$ et nous appliquons l'algorithme ci-dessus. Nous considérons ci-après quelques exemples.

4.5.1 Exemple 1

Comme premier exemple, nous considérons l'équation différentielle à deux retards suivant

$$\frac{dx}{dt} = 0,5x(t) - 0,9x(t - \tau_1) - 1,5x(t - \tau_2) \quad (2)$$

Les résultats de la simulation numérique relatifs à cet exemple sont représentés sur les figures 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6. Sur la figure 4.3 est représenté l'ensemble des points de bifurcation de Hopf sur le pavé $[0,25, 2,85] \times [0, 5]^2$ dans l'espace fréquence-retards (ω, τ_1, τ_2) . Le diagramme des bifurcations dans le plan des paramètres retards (τ_1, τ_2) est représenté sur la figure 4.4

Sur la figure 4.5 nous avons représenté un faisceau de solutions relatives à quelques paramètres de bifurcations de Hopf. Toutes les solutions représentées sur la figure 4.5 ont la même valeur initiale et leurs aspects sont en accord avec la théorie de bifurcation de Hopf. Le caractère transitoire des solutions de Hopf est illustré sur la figure 4.6 qui montre bien que pour une petite perturbation autour des paramètres de Hopf, on passe d'une solution asymptotiquement stable à une solution instable.

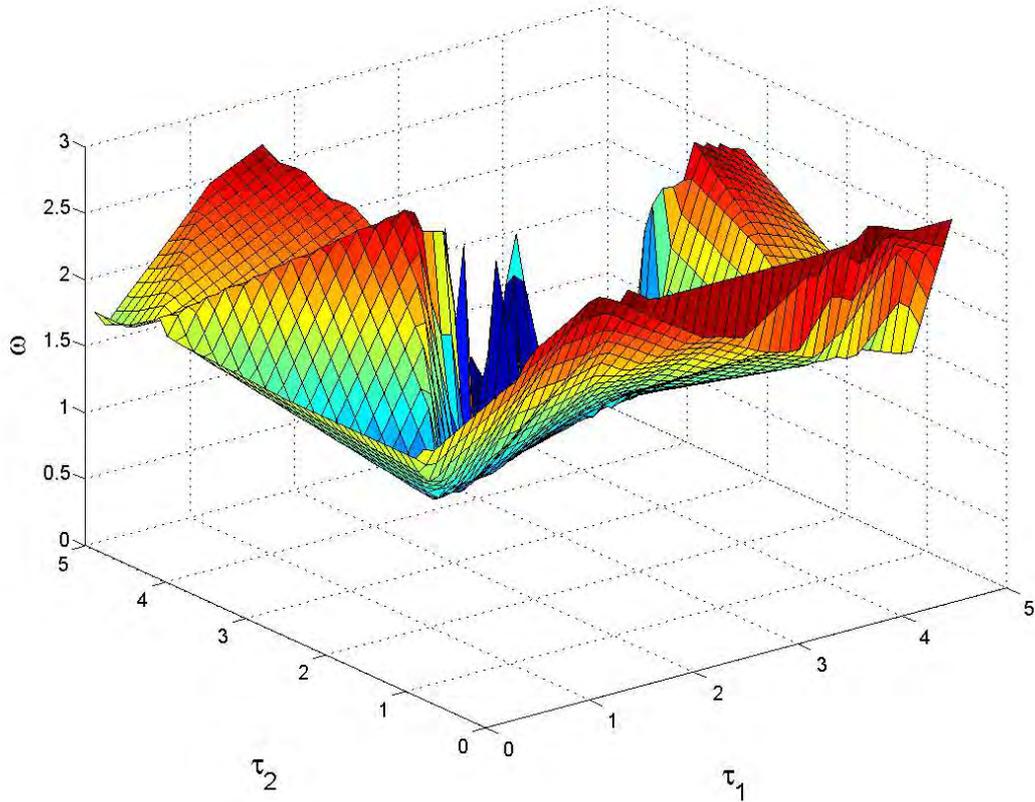


FIGURE 4.3 – Ensemble de points des bifurcations de Hopf pour l'équation différentielle (2) restreint au pavé $[0.25, 2.85] \times [0, 5]^2$ dans l'espace fréquence-retard.

4.5.2 Exemple 2

Considérons le système différentiel suivant

$$\dot{x} = A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1) + A_2x(t - \tau_2) \quad (3)$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons représenté les résultats de la simulation numérique relatifs à cet exemple sur les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10. Sur la figure 4.7 est représenté l'ensemble des points de bifurcation de Hopf sur le pavé $[1.5, 4] \times [0, 5]^2$ dans l'espace fréquence-retards (ω, τ_1, τ_2) .

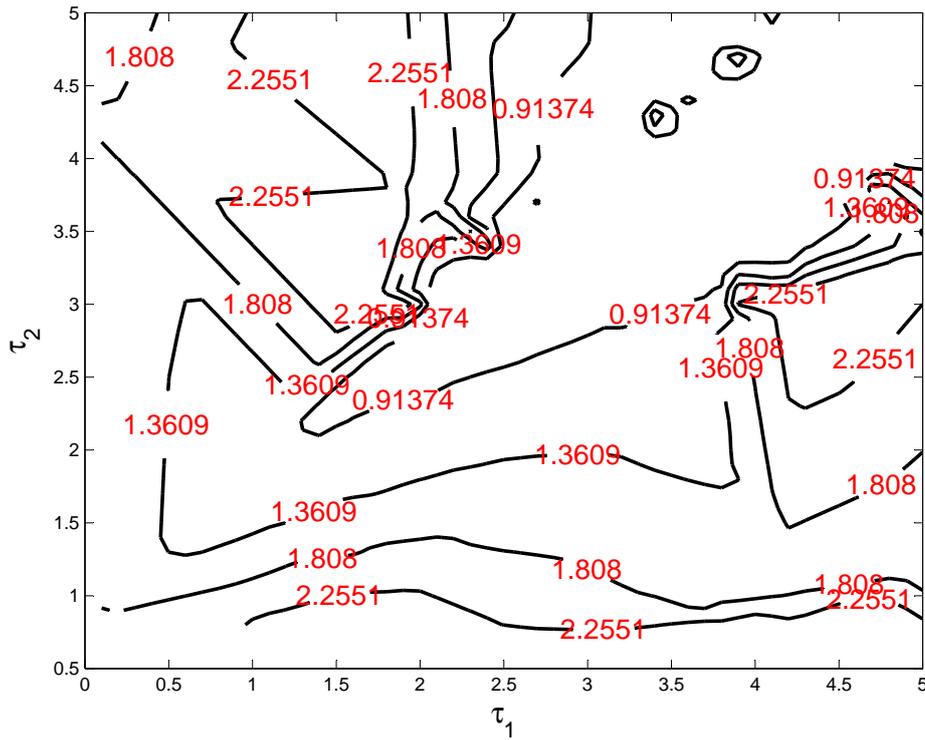


FIGURE 4.4 – Diagramme des bifurcations de Hopf dans le plan des paramètres retards (τ_1, τ_2) restreint dans un carré relativement à des niveaux de fréquences données.

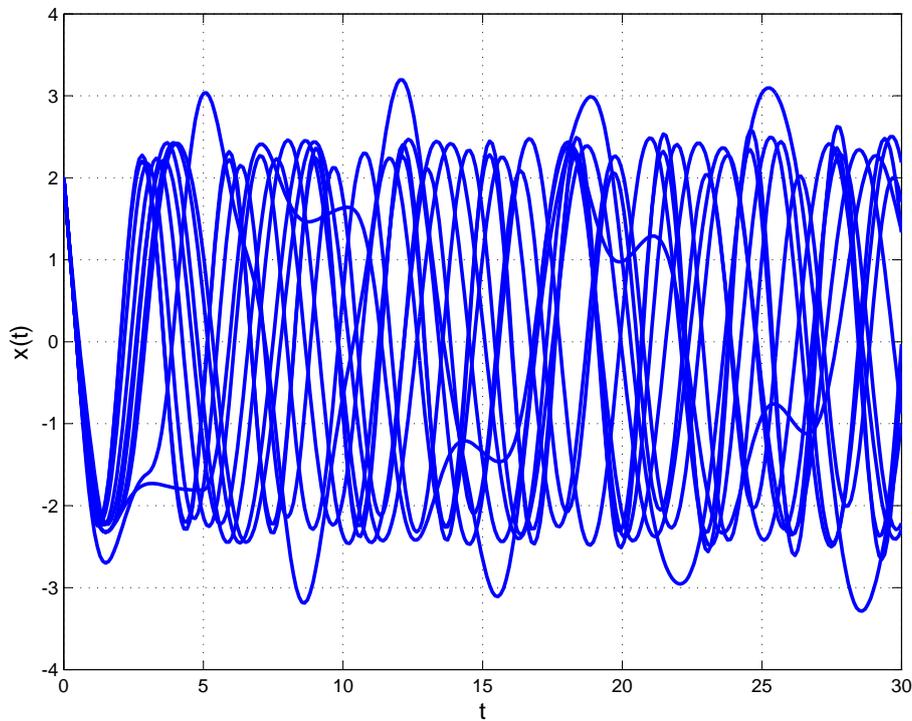


FIGURE 4.5 – Un faisceau de solutions relatives à des paramètres de bifurcation de Hopf.

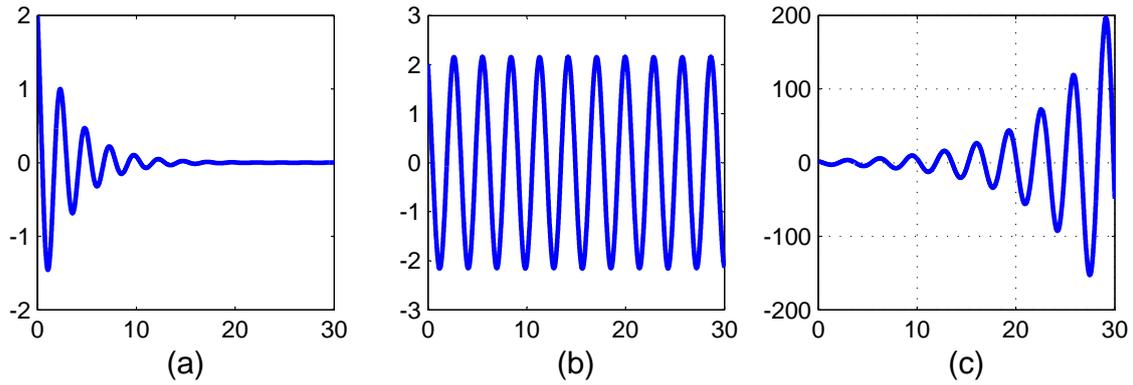


FIGURE 4.6 – *Illustration de Solution de Hopf pour les paramètres retard $\tau_1 = .3925$ et $\tau_2 = .7500$, (fig (b)) et solution stable et instable pour une perturbation $\varepsilon = 0,05$ sur les paramètres, (a) et (b).*

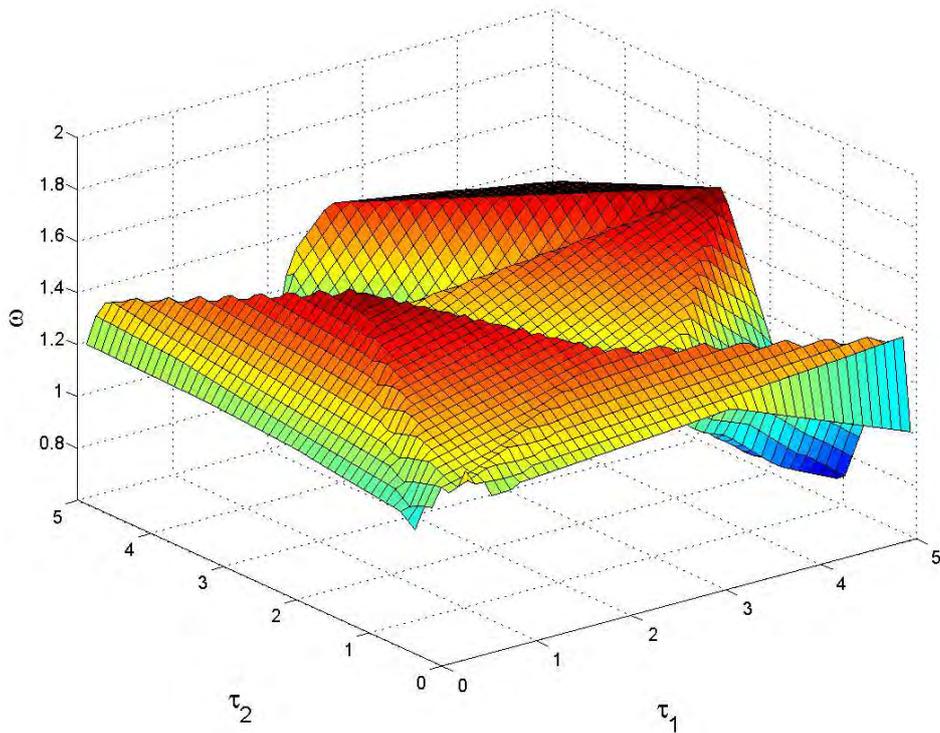


FIGURE 4.7 – *Ensemble de points des bifurcations de Hopf pour l'équation différentielle (3) restreint au pavé $[1.5, 4] \times [0, 5]^2$ dans l'espace fréquence-retard.*

Le diagramme des bifurcations dans le plan des paramètres retards (τ_1, τ_2) est représenté sur la figure 4.8.

Sur la figure 4.9 nous avons représenté un faisceau de solutions relatives à quelques paramètres de bifurcations de Hopf. Toutes les solutions représentées sur la figure 4.9 ont

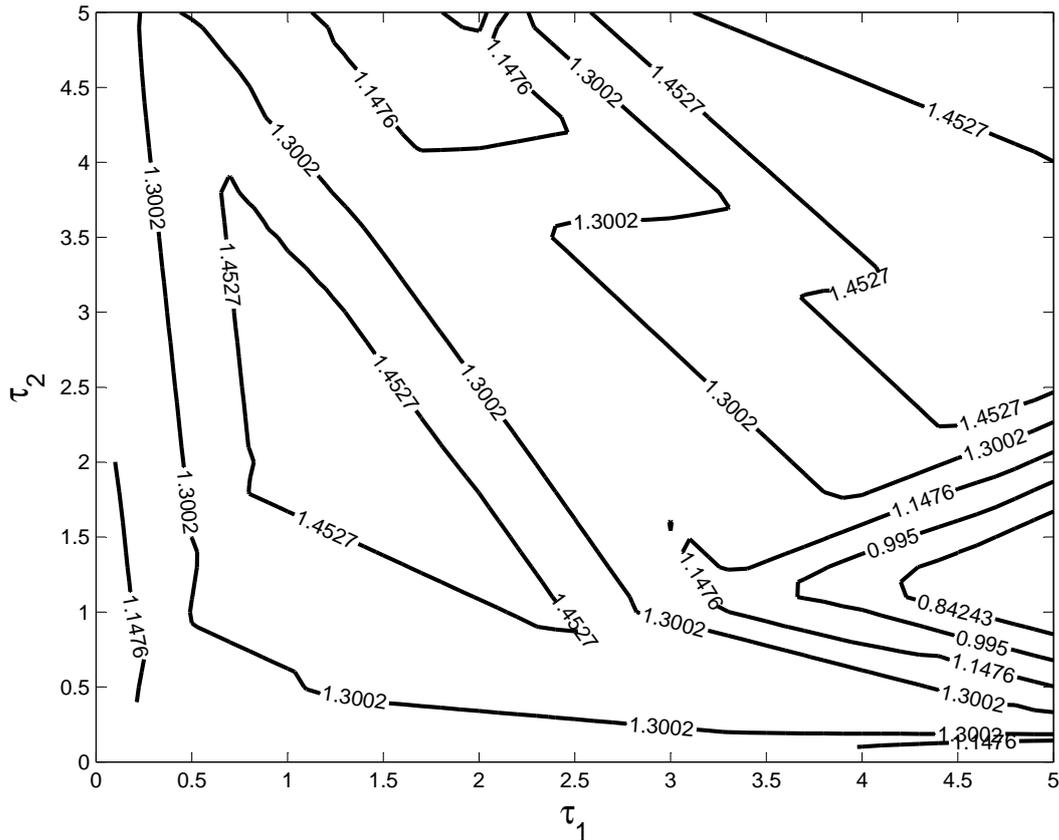


FIGURE 4.8 – Diagramme des bifurcations de Hopf dans le plan des paramètres retards (τ_1, τ_2) restreint dans un carré relativement à des niveaux de fréquences données.

la même valeur initiale et leurs aspects sont en accord avec la théorie de bifurcation de Hopf. Le caractère transitoire des solutions de Hopf est illustré par la figure (4.10) qui

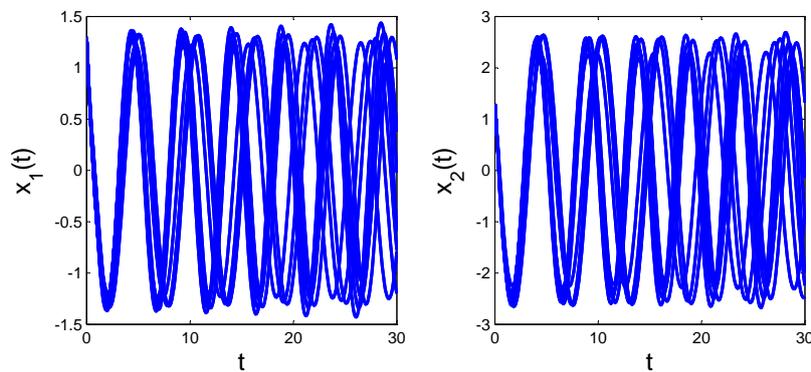


FIGURE 4.9 – Un faisceau de solutions relatives à des paramètres de bifurcation de Hopf.

montre bien que pour une petite perturbation autour des paramètres de Hopf, on passe

d'une solution asymptotiquement stable à une solution instable. Nous avons représenté aussi les portraits de phases relatifs à ces états.

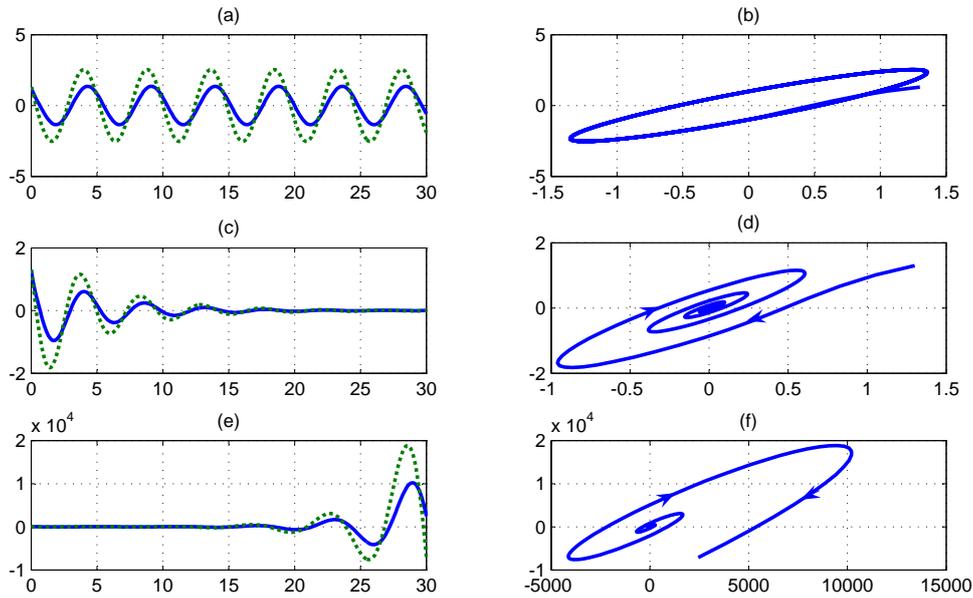


FIGURE 4.10 – Représentation de la trajectoire de solution pour l'exemple à partir de l'état initial $x(0) = (1.3, 1.3)$. Pour toutes les figures, sur le côté gauche, la première composante de $x(t)$ est représentée par la ligne en trait plein, tandis que la seconde est représentée par la ligne en pointillée. La trajectoire de bifurcation et le portrait de phase sont représentés dans les figures (a) et (b). Les figures (c) et (d) représentent le cas de stabilité. Les figures (e) et (f) illustrent le cas d'instabilité .

4.5.3 Exemple 3

Considérons le système différentiel

$$\dot{x} = A_0x(t) + A_1x(t - \tau_1) + A_2x(t - \tau_2) \quad (4)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 & 1 \\ 0 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les résultats numériques relatifs à ce système sont représentés sur les figures 4.11 et 4.12. Sur la figure 4.11, nous avons représenté quelques surfaces de bifurcation pour des valeurs de fréquences données. La figure 4.12 représente le diagramme de bifurcation dans le plan des paramètres (τ_1, τ_2) pour des valeurs du 3^{ème} paramètre τ_3 et des fréquences ω données.

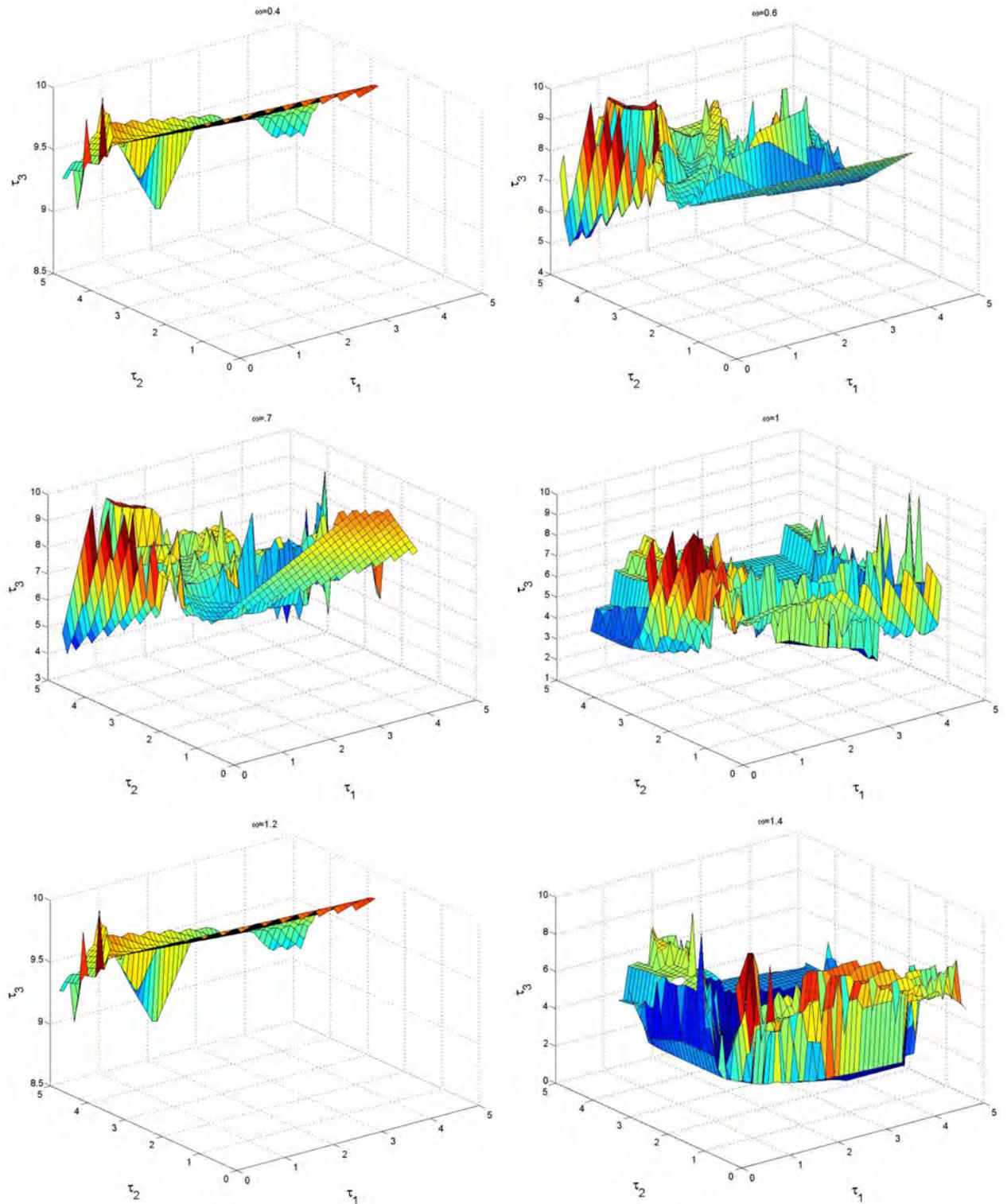


FIGURE 4.11 – Ensemble de bifurcations de Hopf dans l'espace de paramètres retard (τ_1, τ_2, τ_3) relatif au système différentiel (4) pour des valeurs des fréquences données.

4.5. Expérimentation numérique

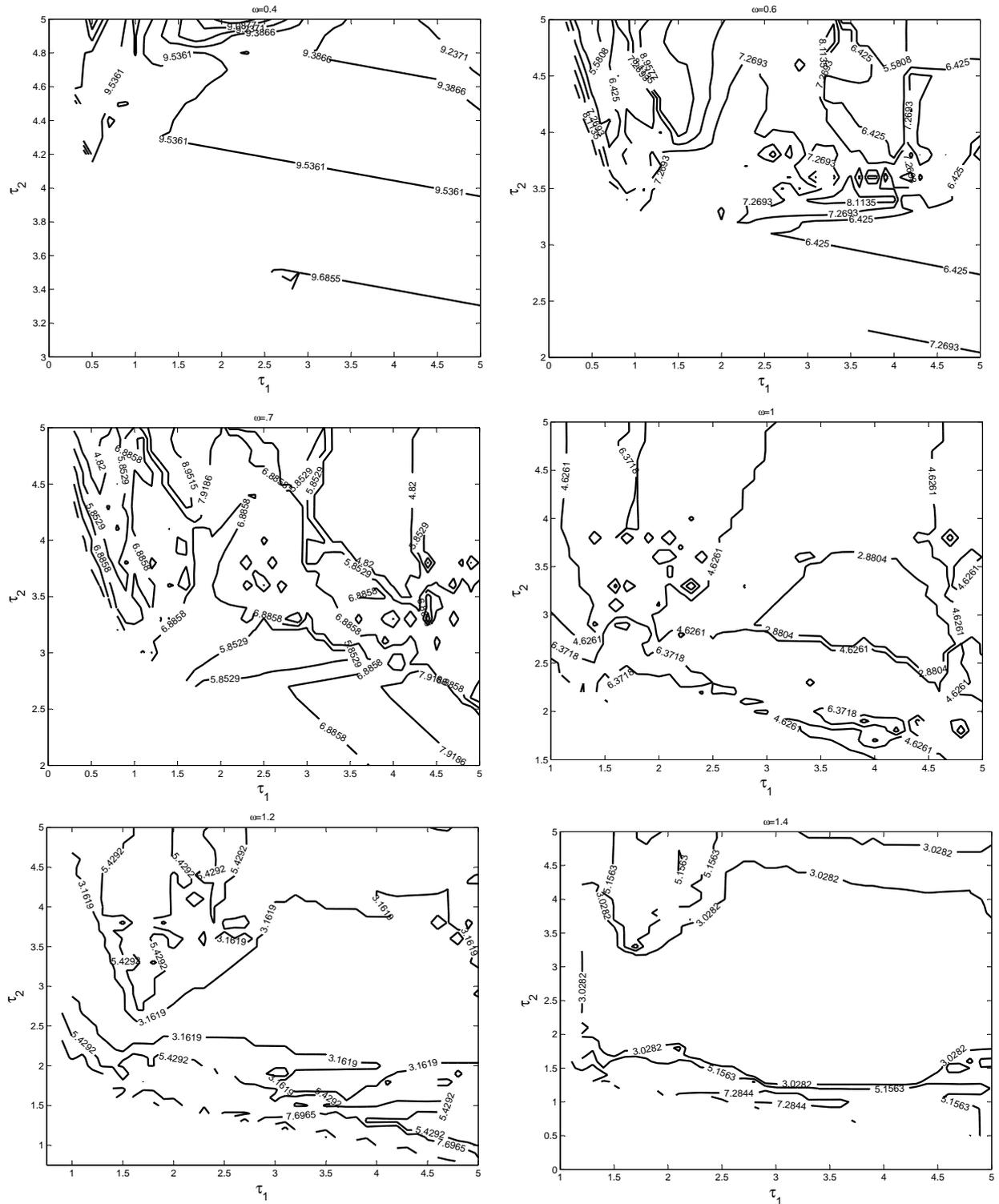


FIGURE 4.12 – Diagramme de bifurcation de Hopf sur le plan (τ_1, τ_2) selon les niveaux de paramètres τ_3 et des valeurs de fréquences données.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé des approches pour la détermination des ensembles de bifurcations de Hopf dans le cas des systèmes linéaires multi-retard. Nous avons prouvé un théorème de densité permettant de caractériser les points de bifurcations en nous servant des courbes α -dense, par suite nous avons proposé un algorithme basé sur le théorème de densité pour caractériser numériquement l'ensemble des points de bifurcation de Hopf.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif principal de ce travail de thèse a été de donner une caractérisation des points de bifurcation de Hopf pour les systèmes dynamiques multi-retards. L'approche considérée a été l'utilisation des courbes α -denses.

5.1 Synthèse des travaux

Le chapitre 1 qui est l'introduction générale, a présenté un bref historique sur l'évolution de la théorie des équations différentielles fonctionnelles à retard. Outre la problématique et les objectifs du travail qui y sont donnés, ce chapitre a montré certains impacts de présence d'un retard sur la nature qualitative des solutions d'un EDFR et propose un état de l'art sur la stabilité et la bifurcation de Hopf sur les EDFR. La problématique et les objectifs du travail sont donnés.

Le chapitre 2 qui est une revue de la littérature sur les systèmes dynamiques, a été évoqué les problèmes d'existence et d'unicité de solution d'une EDFR. Les définitions et les théorèmes généraux sur la stabilité et la bifurcations ont été donnés.

Dans le chapitre 3, particulièrement consacré à l'étude des systèmes dynamiques linéaires multi-retard, nous avons établi que la nature qualitative des solutions (stables, oscillatoires ou instables) dépend de la position des racines de l'équation caractéristiques par rapport à l'axe des imaginaires pures.

Le chapitre 4, quant à lui, s'est focalisé sur la détermination des solutions de Hopf. Après un rappel sur la théorie des courbes α -denses, Nous y avons étudié les solutions transitoires de Hopf.

Notre contribution essentielle apparaît au niveau de ce chapitre, dans lequel nous avons établi une caractérisation numérique des bifurcations de Hopf par un résultat de den-

sité. Nous avons par ailleurs élaboré un schéma algorithmique permettant de calculer des points de bifurcation de Hopf dans le cas de plusieurs retards en réduisant le nombre de paramètres à un seul paramètre variable par le biais des courbes α -dense. Une expérimentation a été fournie comme illustration des résultats.

5.2 Publications scientifiques

L'ensemble de nos contribution dans cette thèse a fait l'objet de quatre publications dans des revues scientifiques que nous pouvons classifier en deux parties.

La première partie comprend deux articles regroupant les principaux résultats théoriques de notre thèse. Le premier article [47] concerne une approche pour déterminer les points de bifurcations de Hopf pour des systèmes différentiels en se basant sur les courbes α -dense. Le second article de cette thèse [1] porte sur une approximation de l'ensemble des bifurcations de Hopf pour des systèmes différentiels à plusieurs retards basé sur un résultat de caractérisation établi au chapitre 4.

La deuxième partie regroupe les articles portant sur des applications des résultats théoriques de la thèse dans le domaine de la recherche en physiologie des systèmes cardiovasculaires et respiratoires humaines [2, 31] .

5.3 Perspectives

Cette thèse ouvre plusieurs perspectives. Une première perspective consisterait à chercher des courbes α -denses qui donnent en même temps les directions de bifurcations. Ainsi, elle permettrait d'affiner sur le plan théoriques les résultats obtenus dans cette thèse. Une seconde perspective s'ouvrirait sur un plan numérique qui consisterait à construire une interface graphique (GUI) permettant à l'utilisateur de définir le système en précisant les paramètres et les retards, et d'obtenir à la sortie l'ensemble des points de bifurcation de Hopf avec les zones de stabilité et celles d'instabilité.

Bibliographie

- [1] Abdoul-Karim M. T., Ndeuzoumbet S., Daoussa Haggar M. S., and Mampassi B. *A numerical characterization of Hopf bifurcation points for multiple delayed differential systems*, International Journal of Applied Mathematical Sciences, Volume 8, Number 4 , pp. 253-262, 2015
- [2] Abdoul-Karim M. T., Daoussa Haggar M. S., Ngarkodje N., Langa F. D. R. and Mampassi B. *Numerical simulation of optimal control of delay mathematical Model of the human cardiovascular and respiratory system*, Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 6, Number 1, Pages 1-16, 2012.
- [3] Adimy M. *Bifurcation de Hopf locale par semigroupes intégrés*, C. R. Acad. Sci. Paris, t311, 423 – 428, 1990.
- [4] Adimy M. and Fabien Crauste. *Stability and instability induced by time Delay in an erythropoiesis model*, Monografias del Seminario Matemático Garcia de Galdeano 31, 3 – 12, (2004)
- [5] Arino O. *Contribution à l'étude des comportements des solutions d'équations différentielles à retard par des méthodes de monotonie et de bifurcation*, Thèse d'état, Université de Bordeaux I, 1980.
- [6] Balachandran, B and Kalmár-Nagy, T and Gilsinn, D. E. *Delay differential equations : Recent advances and new directions*, Springer, 2009.
- [7] Bellman R. et Cooke K. *Differential-difference equations*, Academic Press, 1963.
- [8] Bhattacharyya S.P., Datta A. and Keel L.H. *Linear control theory, structure, robustness and optimisation* , Taylor & francis, New York, 1998.
- [9] Breda, D and Maset, S and Vermiglio, R. *Computing the characteristic roots for delay differential equations*, IMA Journal of Numerical Analysis 24,1, 1-19, 2004.
- [10] Breda, D Maset, S and Vermiglio, R. *Pseudospectral differencing methods for characteristic roots of delay differential equations*, SIAM Journal on Scientific Computing 27, 2 , 482-495, 2005.

- [11] Breda, D., Maset, S. and Vermiglio, R. *TRACE-DDE : a tool for robust analysis and characteristic equations for delay differential equations*, In *Topics in Time Delay Systems*. Springer, pp. 145-155, 2009.
- [12] Chafee N. *A Bifurcation problem for functional differential equation of finitely retarded type*, J. Math. Ana. Appl.35, 312 – 348. MR. 43, 3587, 1971.
- [13] Cherruault, Y. *A new reducing transformation for global optimization (with Alienor method)*. Kybernetes 34, 7/8, 1084-1089, 2005.
- [14] Cherruault, Y. and Mora, G. *Optimisation globale : théorie des courbes α -denses*. Economica, 2005.
- [15] Chiasson J. , Loiseau J.J. *Application of time delay systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [16] Chow S. N. and Mallet-Paret J. *Integral averaging and bifurcation*, Journal of Differential Equations, 26,1, 112 – 159, 1977.
- [17] Cooke K. and Rriessche P. *On the zeroes of some transcendental equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 29,1, 77-99, 1986.
- [18] Diekmann O., Van Gils S. A. Verduyn Lunel S. M. and Walter H. O. *Delay equations : functional modeling, complex, and nonlinear analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [19] Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New-York, 1960.
- [20] Driver, R. D. *Ordinary and delay differential equations*, vol. 20. Springer-verlag, New York, 1977.
- [21] Elsgolts L. E. and Norkin S. B. *Introduction to the theory and Application of Differential Equations with deviating Arguments*, Mathematics in science and Engineering, Vol. 105, Academic Press, 1973.
- [22] Engelborghs K, Luzyanina T., and D. Roose D. *Collocation methods for the computation of periodic solutions of delay differential equations*, SIAM J. Sci. Comput., 22, 5, 1593-1609, 2001.
- [23] Engelborghs K., Luzyanina T., and Samaey G. *DDE-BIFTOOL v. 2.00 : a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations*, TW Report 330, De-

- partment of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, October 2001.
- [24] Fridman, E. *Introduction to time-delay systems : Analysis and control*, Springer, 2014.
- [25] Ginoux, J.-M. *Differential geometry applied to dynamical systems*. World Scientific, 2009.
- [26] Grobman, DM. *Topological equivalence in the large for systems of differential equations* .Sbornik : Mathematics, 2, 4, 535-542, 1967.
- [27] Gu K., Kharitonov V.,Chen J. *Stability of time-delay systems*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [28] Guckenheimer .J, Holmes .P *Nonlinear oscillations, dynamical system,and bifurcation of vector fields*, springer-verlag ,New york inc, vol 42, 1985.
- [29] Gürlebeck, K.s Habetha, K. and Sprößig, W. *Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [30] Györi I. and Ladas G. *Oscillation theory of differential equations with deviating arguments*, Oxford university Press, New York, 1991.
- [31] Hagggar D. M. S., Nkounkou H., Abdoul-Karim M. T., Langa F. D. R., Ntanganda J. M. and Mampassi B. *Asymptotic states of the cardiovascular and respiratory system during physical activity*, Far East Journal of Applied Mathematics, 59, 2, 123-147, 2011).
- [32] Hale J. K. *Theory of functionnal differential equations*, New-York : Springer-verlag, 1977.
- [33] Hale J. K. and Verduyn-Lunel S. *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [34] Hartman, P. *On the local linearization of differential equations*, Proceedings of the American Mathematical Society 14,4, 568-573, 1963.
- [35] Hopf E. *Absweigung einer periodischen lösung eines differential systems*,Berichen Math. Phys. KI. Säch. Akad. Wiss. Leipzig. 94, 1-22, 1942.(German)

- [36] Huang C., Huang L., Feng J. Nai M. and He Y. *Hopf bifurcation analysis for a two-neuron network with four delays*, Chaos Solitons & Fractals. 34, pp. 795 – 812, 2007.
- [37] Jarlebring E. *The spectrum of delay-differential equations : numerical methods, stability and perturbation*, thèse, Von der Carl-Friedrich-GauSS-Fakultät Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig (German), 2008.
- [38] Kolmanovskii V., and Nososv V.R. *Stability of functional differential equations*, Academic press,inc. London, 1986.
- [39] Kolmanovskii V. and Myshkin A. *Applied theory of fundational differential equations*, Kluwer Acad. Pub, 1992.
- [40] Kopell, N and Howard, LN. *Bifurcations under nongeneric conditions*, Advances in Mathematics 13, 3, 274-283, 1974
- [41] Krantz, S. G. *A guide to complex variables*, vol. 32. MAA, 2008.
- [42] Krasovskii N. N. *Stability of motion :Application s of Lyapunov 's second method to differential systems and equations with delay*, standford univ. Press, Standford, 1963.
- [43] Krasovskii N. N. *Inversion of theorems of Liapunov direct methods and stability in first approximation*, Prikl.Math.Meh 20(2), 255-265, 1956.
- [44] Krasovskii, NN. *Some problems in the stability theory of motion*, Moscow, Fiz.-Tek. Publishing Co, 1959.
- [45] Kuang Y. *Delay differential equations with applications in populations dynamics* , Academic press. London, 1993.
- [46] Ladde G.S., Lakshmikantham V. and Zhang B.G. *Oscillation theory of differential equations with deviating arguments*, Marcel Dekker New York, 1987.
- [47] Langa F. D. R., Abdoul Karim M. T., Mahamat S. D. H. and Mampassi B. *An approach for determining Hopf bifurcation points of multiple delayed linear differential systems*, Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences , Volume 2, Number 1, 35-42, 2011.
- [48] Levin, B. I. *Distribution of zeros of entire functions*, American Mathematical Soc. vol. 5. 1964.

- [49] Mahmoud M. S. *Robust control and filtering for time-delay systems*, New York, Marcel Dekker, 2000.
- [50] Marsden J. E. and McCracken M. *The Hopf bifurcation and Its Application*, Applied Math. Sciences, Springer-Verlag New York, 19, 1976.
- [51] Michiels W. and Niculescu S. I. *Stability and stabilization of time-delay systems : an eigenvalue-based approach*, Siam, Philadelphia 2007.
- [52] Mora, G. and Cherruault, Y. *The theoretic calculation time associated to α -dense curves*, Kybernetes 27, 8, 919-939, 1998.
- [53] Neimark, J. *D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials*, Prikl. Math. Mech., 13, 349-380, 1949.
- [54] Niculescu S. I. *Delay Effects on Stability :A robust control approach*, Springer 2001.
- [55] Picard, É. *La mathématique dans ses rapports avec la physique*, Actes du IVe congrès international des Mathématiciens, Rome, 1908
- [56] Poincaré H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I)*, Journal de mathématiques pures et appliquées 3 eme série, tome 7, pp. 375-422, 1881
- [57] Poincaré H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II)*, Journal de mathématiques pures et appliquées 3 eme série, tome 8, pp. 251-296, 1882
- [58] Poincaré H. *sur les courbes définies par une équation différentielle (III)*, Journal de mathématiques pures et appliquées 4 eme série, tome 1, pp. 167-244, 1885
- [59] Poincaré H. *sur les courbes définies par une équation différentielle (IV)*, Journal de mathématiques pures et appliquées 4 eme série, tome 2, pp. 151-217, 1886
- [60] Polossuchin O. *Über eine Besondere Klasse von Dierentialen Funktionalgleichungen*, Inaugural Dissertation, Zürich, 1910. (German).
- [61] Pontryagin, L. S. *On the zeros of some elementary transcendental functions*, Izv. Akad. Nauk SSSR 6(3), 115-134, 1942.
- [62] Pontryagin, L. S. *On the zeros of some transcedental functions*, Doklady Akad. Nauk. SSSR 91,1279-1280, 1953.
- [63] Razumikhin, B. S. *On the stability of systems with a delay*. Prikl. Mat. Meh. 20(4), 500-512, 1956.

- [64] Razumikhin, B. S. *Application of Liapunov method to problems in the stability of systems with a delay*. Automat, i Telemekh. (21), 740-749, 1960.
- [65] Rekasius, ZV. *A stability test for systems with delays*, Proc. Joint Automatic Control Conf., Paper No. TP9-A, 1980.
- [66] Ruan S. and Filfil R. *Dynamics of a two-neuron system with discrete and distributed delays*, Physca D iol. 191, pp. 323 – 342, 2004.
- [67] Ruan S. and Wei J. *On the zeros of transcental functions with Applications to Stability of Delay Differential Equations with Delays*, Dynamics of Continuous, Discrete and impulsive Systems Serie A : Mathematical analysis 10, 863 – 874, 2003.
- [68] Sagan, H. *Space-filling curves*, vol. 18. Springer-Verlag New York, 1994.
- [69] Schmidt E. *Über eine Klasse linearer funktionaler differentialgleichungen*, Math. Ann. 70 , 499-524, 1911.(German)
- [70] Shampine L.F. Gladwell I, Thompson S. *Solving ODEs with MATLAB* , Cambridge university press, 2003
- [71] Shampine L.F. , Thompson S. *Solving DDEs in MATLAB*, Applied Numerical Mathematics 37, 441-458, 2001
- [72] Sipahi, R. and Delice I. I. *Advanced clustering with frequency sweeping methodology for the stability analysis of multiple time-delay systems*, IEEE Transactions on Automatic Control 56(2), 467-472, 2011.
- [73] Sipahi, R. and Olgac N. *Degenerate cases in using direct method*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 125(2), 194-201, 2003.
- [74] Sipahi, R. and Olgac N. *Stability robustness of retarded LTI systems with single delay and exhaustive determination of their imaginary spectra*, SIAM Journal on Control and Optimization 45(5), 1680-1696, 2006
- [75] Sipahi, R. and Olgac N. *Kernel and offspring concepts for the stability robustness of multiple time delayed systems (MTDS)* , ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 129(3), 245-251, 2007.
- [76] Smith, H. L. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Springer New York, 2011.

- [77] Staffans O. *Hopf Bifurcation for functional and functional differential equations with infinite delay*, J. D. E, 70, 114 – 151, 1987.
- [78] Stech H. *Hopf bifurcation calculations for functional differential equations*, J. M. A. A, 1109, 472 – 491, 1985.
- [79] Talibi A. H. *Contribution à l'étude du problème de bifurcation de Hopf locale dans le cadre des équations différentielles avec Retard*, Thèse d'état, Université Mohamed V Rabat, 1992.
- [80] Volterra V. *Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires*, J. de Mathématiques 7, 249-298, 1928
- [81] Volterra V. *Leçons sur la théorie mathématiques de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [82] Walton, K. and Marshall, J. E. *Direct method for TDS stability analysis*, IEE Proc. 134 part D 101-107, 1987
- [83] Xia Y. , Fu M., Shi P. *Analysis and synthesis of dynamical systems with time-delays*, Springer, 2009.
- [84] Yafia R. *Contribution à l'Etude de la bifurcation de Hopf dans le cadre des equations différentielles à retard, application à un Problème en dynamique de population*, thèse, Université Chouaib Doukkali(Maroc), 2006
- [85] Yu W., Cao J. *Stability and Hopf bifurcation on a two neuron system with time delay in the frequency domain* , international Journal of bifurcation and chaos. 17, 1355 – 1366, (2007) .
- [86] Zhong Q.C. *Robust control of time-delay system* , Springer, London, 2006.