

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Année : 2015-2016

N°d'ordre : 69

THÈSE DE DOCTORAT UNIQUE

Mention : Mathématiques et Modélisation
Spécialité : Analyse, Statistique et Applications

Présentée par

SEYDINA ISSA DIONE

TITRE

Méthodes de sélection dynamique pour l'optimisation de portefeuille d'actifs financiers:
Applications à la Bourse Régionale des Valeurs Mobilières

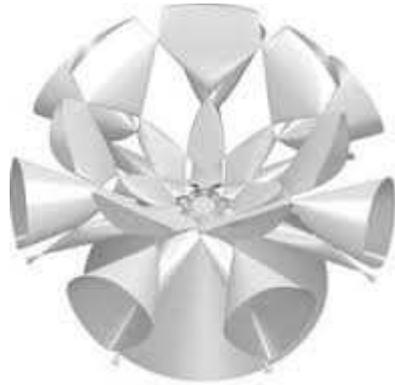
Soutenue le 10/02/2016 devant le jury composé de :

<u>Président</u> :	M. Diaraf Seck	Professeur, UCAD (Sénégal)
<u>Rapporteurs</u> :	M. Pape Ngom M. Ngalla Djitté M. Mamadou Abdoul Diop	Maître de conférences, UCAD (Sénégal) Maître de conférences, UGB (Sénégal) Maître de conférences, UGB (Sénégal)
<u>Examineurs</u> :	M. Gabriel Birame Ndiaye M. Serigne Aliou Lô M. Abdoulaye Sène M. Youssou Gningue	Maître de conférences, UCAD (Sénégal) Maître de conférences, UCAD (Sénégal) Maître de conférences, UCAD (Sénégal) Professeur, Laurentian University (Canada)
<u>Directeur de thèse</u> :	Mme Salimata Gueye Diagne	Maître de conférences, UCAD (Sénégal)

Université Cheikh Anta Diop de Dakar
Ecole doctorale de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences et Techniques
Thèse de Doctorat Unique

Méthodes de sélection dynamique pour
l'optimisation de portefeuille d'actifs
financiers: Applications à la Bourse
Régionale des Valeurs Mobilières

Seydina Issa Dione



SIMONS FOUNDATION

Cette thèse a été financée par le projet NLAGA
lequel est financé par la fondation SIMONS,
sous la direction du Pr. Salimata Gueye Diagne,
membre de l'équipe scientifique du projet.

Dédicaces

- ✓ A El Hadji Mamadou Dione, mon père, qui n'a jamais rien négliger pour notre réussite,
- ✓ A Ndeye Coumba Sy, ma mère, pour son dévouement pour sa famille que je ne saurais qualifier,
- ✓ A Seydina Issa Diagne, mon père et homonyme, pour ses conseils,
- ✓ A Mame Warkha Sy, notre tante qui nous a bercé depuis notre enfance,
- ✓ A Ndèye Fatou Gueye, mon épouse, qui a rampé avec moi avec une digne suffisance depuis le campus de St-louis,
- ✓ A Oumou Salamata, ma fille, mon bébé chérie dont le sourire me fait oublier mes peines,
- ✓ A Alioune Badara Dione, Adja Teumbe Diop, Alioune Ndiaye, Salif K. Dione, Bintou Madame Dione, Mamadou Diallo, mes frères et soeurs avec qui j'ai grandi. Je suis fier de vous,
- ✓ A Ahmet Dieye, mon meilleur ami et compagnon des premiers pas, et à toute sa famille,
- ✓ A Waly Bakhoum, mon cher ami.

Remerciements

Alhamdoulilah ! Je rends grâce à Dieu !

- ✓ Au Pr. Salimata Gueye Diagne, ma directrice de thèse, chercheuse très ouverte et très disponible, qui m'a offert l'opportunité de continuer mon option et passion de toujours, les mathématiques appliquées à la finance, dans un cadre extrêmement difficile ; avec une largesse intellectuelle, humaine et même financière spontanée depuis le master II. Au Pr. Youssou Gningue pour ses conseils et au Dr. Moustapha Sène de l'UGB pour son apport décisif dans la simulation,
- ✓ Aux éminents professeurs, Pr. Diaraf Seck, Pr. Pape Ngom, Dr. Maseye Gaye, Dr. Souleye Kane, Pr. Babacar M. Ndiaye, Dr. Mountaga Lam et toute l'équipe scientifique du projet Nlaga-simons, pour leurs apports inestimables sur les plans logistique, financier et scientifique,
- ✓ Aux membres du jury, les professeurs Pr. Diaraf Seck, Pr. Pape Ngom, Pr. Ngalla Djitté, Pr. Mamadou A .Diop, Pr. Gabriel B. Ndiaye, Pr. Serigne A. Lô, Pr. Abdoulaye Sène, Pr Youssou Gningue, pour leur spontanéité,
- ✓ A mon père, sans qui je n'aurais pas pensé quitter mon emploi d'alors et faire tant d'autres renoncements pour continuer mes études, je n'en serais sans doute pas arrivé là sans ses encouragements et son soutien constant,
- ✓ Aux membres de ma famille, qui m'ont soutenu tout au long de mon cursus, qui ont vécu les sacrifices avec moi et qui ont été mon espoir dans mes plus grands moments de désespoir,
- ✓ A mes camarades du laboratoire de Mathématiques Appliquées de la FST, Matar Diadiou, Déthié Dione, Coumba Ndiaye, Lamine Diop, Bakary Koné, Ahmadou Coulibaly, Abdou Gueye, Ndogotar Nélio, Youssouf Ahmada etc...
- ✓ A mes amis de promotion du projet Nlaga-simons, Don Bosco Diatta et Alpha Diallo

Résumé

Dans cette thèse nous avons mis en œuvre une nouvelle approche basée sur une combinaison d'outils utilisés dans la pratique et de modèles de la théorie mathématique pour l'optimisation d'un portefeuille d'actifs financiers. En effet nous avons développé une technique de sélection basée sur une limitation du price-earnings-ratio (PER), permettant à partir du modèle classique de Markowitz, de dresser à chaque niveau de rendement, la sélection de sous-portefeuille optimal devant conduire, pour un risque minimal, au même rendement qu'un portefeuille initial d'une grande taille. Nous montrons que se basant sur le PER, nous pouvons identifier à chaque niveau de rendement objectif, les titres dont l'investissement devra forcément être nul pour s'acheminer vers une sélection optimale. Nous avons ainsi introduit les nouveaux concepts de convergence de frontières efficientes et d'équivalence de frontières efficientes dans le cadre d'une analyse espérance-variance.

Nous avons aussi, dans ce travail, marqué une innovation à travers une contribution aux efforts de développement de nos systèmes financiers africains, et particulièrement pour une meilleure visibilité de notre environnement boursier Ouest-africain. En effet, le pari que s'est fixé les autorités du marché de notre sous région est de hisser ce dernier à la cinquième place des bourses africaines à l'horizon 2020. Et cela devra passer inévitablement par l'amélioration de son attractivité et de sa qualité. C'est ainsi que nous avons choisi d'expérimenter les simulations numériques sur des données de sociétés cotées à la BRVM (Bourse Régionale des Valeurs Mobilières) commune aux pays de l'union économique et monétaire Ouest-africaine (UEMOA). Nous avons ainsi déterminé l'horizon maximal, à travers le PER, sur lequel les investisseurs peuvent se limiter pour constituer des portefeuilles à rendement optimal à moindre risque.

Mots clés

Optimisation, Portefeuille, Modèle espérance-variance, Risque minimal, Sous-portefeuille, Price-Earning-Ratio, Aversion au risque, Convergence de frontières efficientes.

Abstract

In this thesis we have implemented a new approach based on a connection of tools used in the practice on the one hand and on the another hand mathematics theory models for portfolio optimization of financial assets. Indeed we have developed a selection technique based on price-earnings ratio (PER) limiting, which allows us from Markowitz classical model to set up at each performance level, the selection of optimal sub-portfolio that might lead, for a minimum risk, to the same return as a large initial portfolio. Thus, we show that on the basis on the PER, we can identify at each level of objective performance, the assets whose investment will necessarily have to be nil, this, in order to reach an optimal selection. In this respect, we have introduced two new concepts called efficient frontiers convergence and efficient frontiers equivalence in the context of a mean-variance analysis.

We also have, in this work, brought an innovation through a contribution to the development efforts of our African financial system, especially for a better visibility of our West-African stock market. Indeed, the bet of the authorities of our sub regional financial market is to raise it to fifth African stock exchanges by 2020. And this will inevitably pass by improving its attractiveness and its quality. It is in this view that we have chosen to test numerical simulations on data from companies listed on the BRVM (Regional Stock Exchange Securities) common to the countries of the West African Economic and Monetary Union (UEMOA). We have determined the maximum horizon, through the PER, that investors may choose as limit when composing their portfolios for optimal performance with less risk.

Keywords

Optimization, Portfolio, Mean variance model, Minimal risk, Sub-portfolio, Price-Earning-Ratios, Risk aversion, Efficient frontiers convergence.

Table des matières

Dédicaces	4
Remerciements	5
Résumé	6
Abstract	8
1 INTRODUCTION GÉNÉRALE	16
1.1 Etat de l'art	16
1.2 Problématique de la culture boursière en Afrique de l'Ouest	17
1.3 Objectifs et contributions	19
1.4 Plan de la thèse	20
I Cadre d'étude : Généralités et rappels	22
2 Methodes d'Optimisation utiles en Finance	23
2.1 Introduction	23
2.2 Optimisation linéaire et non linéaire	23
2.2.1 La méthode du simplexe	24
2.2.2 Problème primal, problème dual	25
2.2.3 Conditions d'optimalité	25
2.3 Optimisation quadratique	26
2.3.1 Dualité	26
2.3.2 Conditions d'optimalité	26
2.3.3 Methodes du point intérieur	27
2.4 Optimisation conique	27
2.4.1 Eléments de rappel sur les cônes	27
2.4.2 Problème d'Optimisation Conique (OC)	28
2.4.3 Approximation de matrices de covariance	29

2.5	La programmation en nombres entiers	31
2.5.1	Modélisation de conditions logiques avec la (PLN)	32
2.5.2	Les méthodes Branch and Bound et Branch and Cut	33
2.6	Programmation dynamique	34
2.6.1	Définition de quelques éléments de base	34
2.6.2	Énoncé du principe	35
2.6.3	Avantages et limites du principe	36
2.7	Optimisation avec l'incertitude des données	37
2.7.1	Programmation Stochastique (PS)	37
2.7.2	Optimisation robuste	40
2.8	Conclusion	42
3	Choix dans un avenir incertain et analyse du risque	43
3.1	Introduction	43
3.2	Définitions de quelques concepts de base	44
3.2.1	Valeurs mobilières	44
3.2.2	Action	44
3.2.3	Obligation	45
3.2.4	Titre financier	45
3.2.5	Marché financier	45
3.2.6	Actif financier	45
3.2.7	Les fonds propres	46
3.2.8	La vente à découvert	46
3.3	Les décisions d'investissement d'un individu	46
3.3.1	Techniques d'évaluation de la rentabilité d'un investissement	47
3.3.2	La Valeur Actuelle Nette (VAN)	48
3.3.3	Le Taux de Rendement Interne (TRI)	48
3.3.4	Les fonctions d'utilité	48
3.3.5	Efficiency et anticipations rationnelles	51
3.3.6	L'absence d'opportunité d'arbitrage	52
3.4	Le risque : théorie et concept	53
3.4.1	Un peu d'histoire	53
3.4.2	Définition et Concept de risque	54
3.4.3	Cohérence d'une mesure de risque	55
3.5	Différents types de risque	56
3.6	Analyse du risque	56

3.7	Conclusion	58
4	Théorie financière : Revue de littérature	59
4.1	Introduction	59
4.2	Approche de Markowitz (1952)	60
4.2.1	Le cas à n actifs	61
4.2.2	Les limites du modèle	62
4.3	Approche de Sharpe (1963-1964)	63
4.3.1	Modèle à indice simple de Sharpe	63
4.3.2	Modèle de marché de Sharpe	64
4.3.3	Modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF)	67
4.4	Approche de Markowitz et Perold (1981)	68
4.5	Approche de Lai (1991)	69
4.6	Le Modèle de Konno et Yamazaki (1991)	70
4.7	Le Modèle de Speranza (1993)	71
4.8	Modèle moyenne - semi-variances de Hamza et Janssen (1995)	72
4.9	Approche de Young (1998)	74
4.10	Approche basée sur la valeur à risque (2000)	75
4.11	Approche par semi-variances variables et intelligence artificielle de El Hachloufi (2013)	75
4.12	Conclusion	76

II Sélection de sous-portefeuilles optimaux : Utilisation du PER **77**

5	Sélection dynamique de sous-portefeuilles optimaux avec le PER ajusté	78
5.1	Introduction	78
5.2	Rappels sur quelques éléments d'Algèbre	79
5.2.1	Définitions préliminaires	79
5.2.2	Matrices définies positives - Matrice définies négatives	81
5.3	Rappel sur l'optimisation sous contraintes d'égalité	82
5.3.1	Le Lagrangien	83
5.3.2	Conditions de qualification des contraintes	83
5.3.3	Conditions du premier ordre	83
5.3.4	Matrice hessienne bordée du Lagrangien	84
5.3.5	Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum local :	84

5.3.6	Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global	84
5.4	Rappel sur quelques éléments de théorie de portefeuille	85
5.4.1	Rendement, PER et sous-portefeuille	85
5.4.2	Risque d'un portefeuille	86
5.4.3	Frontière efficiente - Convergence de frontières efficientes	87
5.5	Problème d'optimisation et de sélection de sous-portefeuilles avec le PER ajusté	88
5.5.1	Formulation mathématique du problème	88
5.5.2	Résolution du problème	88
5.6	Conclusion	91
6	Sélection à l'aide du PER brut et Optimisation multiobjectif de sous- portefeuilles	93
6.1	Introduction	93
6.2	Rappels d'Analyse convexe	94
6.2.1	Ensemble convexe	94
6.2.2	Fonctions convexes et fonctions concaves	94
6.3	Rappels sur l'Optimisation sous contraintes d'inégalités	95
6.3.1	Optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations : les conditions de Kuhn et Tucker	95
6.3.2	Optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations in- cluant des contraintes de non-négativité	97
6.4	Optimisation multiobjectif de sous-portefeuilles	98
6.4.1	Introduction du concept	98
6.4.2	Formulation mathématique du problème et résultats	100
6.5	Conclusion	105
7	Applications à la Bourse Régionale des Valeurs Mobilières	106
7.1	Introduction	106
7.2	Aperçu général sur la BRVM	107
7.2.1	Passage des ordres sur la BRVM	107
7.2.2	Les indices boursiers à la BRVM	107
7.2.3	Organisation de la BRVM	108
7.3	Applications	109
7.3.1	Problème de sélection avec le PER ajusté	109
7.3.2	Problème multiobjectif et sélection avec le PER brut	114
7.4	Résultats-Discussion	116

7.4.1	Sur l'utilisation du PER ajusté	116
7.4.2	Sur l'utilisation du PER brut	118
7.5	Conclusion	118
8	CONCLUSION GÉNÉRALE	119
8.1	Résumé des résultats	119
8.2	Limites	120
8.3	Conclusion	121
8.4	Perspectives	123
	Bibliographie	124
	Annexes	130
	Résumé	165

Liste des tableaux

7.1	Top 19 des p_i de la BRVM au 31 décembre 2014	110
7.3	Rendement estimé des 22 titres du premier compartiment de la BRVM sur la période du 05 Janvier au 20 mars 2015	115

Table des figures

2.1	Un arbre de scénario avec 3 étapes et 4 scénarios	38
3.1	Cas 1 : Agent risquophobe	57
3.2	Cas 2 : Agent risquophile	57
3.3	Cas 3 : Agent neutre vis à vis du risque	58
4.1	Risque et Diversification	67
5.1	La frontière des sous-portefeuilles efficaces	91
7.1	Frontières des sous-portefeuilles optimaux pour $\theta \in \{23, 21\}$	112
7.2	Frontières des sous-portefeuilles optimaux pour $\theta \in \{21, 19, 18, 17, 16\}$.	112
7.3	Frontières des portefeuilles optimaux pour $\theta \in \{16, 15, 13, 12\}$	113
7.4	Frontières des portefeuilles optimaux pour $\theta < 12$	114
7.5	Frontières optimales des sous-portefeuilles pour $\theta \in \{15.5, 16, 16.6, 17, 19, 20\}$	115
7.6	Frontières optimales des portefeuilles pour $\theta \in \{20, 21, 25, 26, 28, 30\}$. .	116

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Sommaire

1.1	Etat de l'art	16
1.2	Problématique de la culture boursière en Afrique de l'Ouest	17
1.3	Objectifs et contributions	19
1.4	Plan de la thèse	20

1.1 Etat de l'art

Dans un problème de sélection de portefeuille, parmi plusieurs titres financiers, nous avons comme objectif de trouver la manière optimale d'investir un montant bien défini dans chacun de ces titres. Chacune de ces différentes manières d'allouer des proportions de notre investissement entre ces titres, à travers une combinaison linéaire, est appelée portefeuille.

Markowitz [47] a été le premier à introduire une approche (le modèle espérance-variance) pour résoudre ce type de problème d'optimisation de portefeuille de titres financiers en posant la variance des rendements comme mesure de risque. Les portefeuilles offrant un risque minimal pour un niveau de rendement donné forment ce qui est nommé la frontière efficiente. Ainsi pour n'importe quel niveau de rendement désiré, cette frontière efficiente donne la meilleure manière d'investir notre capital.

Plusieurs critiques ont été faites à cette approche notamment au caractère quadratique de la fonction objectif et au calcul de la matrice de variance-covariance. Ainsi pour simplifier les difficultés associées à la structure du modèle de Markowitz, plusieurs autres modèles alternatifs ont été proposés. Certains auteurs tels que Sharpe [64], [65] et Stone [67] ont essayé de linéariser le problème de choix de portefeuille. Rudd et Rosenbeg [60] ont montré que le modèle de Markowitz dans sa formulation classique pourrait ne pas

satisfaire au maximum un investisseur professionnel et proposent un management de portefeuille encore plus réaliste.

Plus récemment, plusieurs modèles de programmation linéaire ont été développés pour la sélection de portefeuille. Konno et Yamazaki [42], Zenios et Kang [72] et Speranza [66] ont proposé le calcul du risque d'un portefeuille par l'utilisation de l'écart moyenne absolue. Ils ont aussi proposé une approche incluant le critère de risque asymétrique qui élimine plusieurs problèmes associés à ce modèle d'optimisation. Avec l'apparition des modèles linéaires, Yoshimoto [70] a développé un système d'optimisation basé sur le critère espérance-variance. Hamza et Janssen [33] ont généralisé des modèles standards en conservant le couple risque-rendement comme idée de base et en proposant une nouvelle mesure de risque définie comme une combinaison convexe des deux semi-variances. Ils ont aussi proposé un modèle général de programmation linéaire basé sur des techniques de programmation séparable.

Récemment, une nouvelle mesure de risque appelée Value at Risk (VaR) a été introduite pour quantifier la perte maximale pouvant se produire à une certaine probabilité sur une période donnée. Il existe plusieurs modèles pour calculer la VaR, le choix dépend de la nature du portefeuille et les données utilisées pour estimer ces paramètres [40], [6].

1.2 Problématique de la culture boursière en Afrique de l'Ouest

La bourse régionale des valeurs mobilières (ou BRVM) est un marché financier unique pour les sociétés de huit pays d'Afrique de l'Ouest : Bénin, Burkina Faso, Côte d'Ivoire, Guinée Bissau, Mali, Niger, Sénégal et Togo.

Sur un marché financier, interviennent principalement deux types d'agents : ceux à capacité d'épargne positive (les ménages, investisseurs institutionnels etc...) et ceux à besoin de financements (les entreprises, l'Etat). Loin d'être une entité abstraite ou irrationnelle, le marché financier représente en quelque sorte le moteur de l'économie puisqu'étant le lieu où le carburant, en l'occurrence l'argent, va être utilisé pour propulser de l'avant la machine, c'est-à-dire produire des richesses.

Pour qu'un marché puisse exister, il faut que le bien (l'argent), l'offre et la demande existent. Or en Afrique particulièrement, les agents à capacité d'épargne, notamment les ménages, présentent une profonde aversion pour le risque. Ainsi donc l'essentiel de l'épargne dégagée par ceux-ci se trouve en dépôt sur des comptes à vue ou des comptes d'épargne dans les banques où l'argent est immédiatement disponible. En face,

les agents à besoin de financement (les entreprises) souhaitent trouver des financements à long terme (20, 30, 40 ans) pour planifier leur croissance. D'où l'horizon que se fixe ces deux types d'agents se différencie et c'est ce qui rend l'échange effectif quelque peu problématique.

Par ailleurs, si pour les entreprises, être coté à la bourse donne de la notoriété et assure un accès à des ressources financières à long terme, on note aujourd'hui qu'au Sénégal et dans la plupart des pays de la sous région, les entreprises manifestent une méfiance et une ignorance à l'égard de la bourse. En effet, la BRVM, créée en 1996, n'a accueilli que trois entreprises sénégalaises. La bank of Africa (Boa), 38ème société inscrite à sa cote en décembre 2014, est la deuxième société sénégalaise admise après la Sonatel en 1998. Ce n'est que bien après qu'a été admise Total Sénégal. Malgré l'effet d'attraction de la BRVM qui inspire de plus en plus confiance, le nombre d'entreprises nationales cotées reste faible.

Plusieurs raisons sont souvent évoquées pour expliquer le manque d'empressement à la cote des entreprises sénégalaises. La première est sans doute l'obligation de transparence et d'audit. En effet, n'importe quelle société n'entre pas en bourse n'importe comment. Pour y accéder, l'entreprise doit d'abord respecter des préalables comme la certification de ses comptes, la publication d'informations financières crédibles afin de rassurer les investisseurs.

D'un autre côté, il est difficile d'avancer un chiffre sur les personnes détenant des comptes-titres au Sénégal. La bourse demeure méconnue du grand public. Persiste encore l'étiquette selon laquelle "la bourse, c'est pour les autres", qu'on a attribué au milieu boursier. Ce dernier semble en effet être dédié à un cercle restreint d'individus initiés en la matière.

Au-delà des épargnants individuels, il y a aussi l'absence de certains types d'acteurs institutionnels comme les gestionnaires de fonds qui ne favorisent pas l'éclosion d'un marché secondaire dynamique.

La littérature économique, après avoir longtemps opposé le financement des entreprises par le crédit bancaire (économie d'endettement) et le financement par l'émission de titres (économie de marché), tend désormais à attribuer un rôle complémentaire aux deux modes. Les études tendent à prouver que pour se développer une économie a besoin d'un système bancaire fiable et d'un marché financier actif et organisé.

C'est pourquoi, il apparaît nécessaire de voir quels mécanismes mettre en place afin de promouvoir la culture boursière auprès des agents économiques. Toutes les initiatives, de quelque bord qu'elles viennent, sont à encourager pour pousser les citoyens de la sous région à acquérir ou à compléter leur formation économique, financière et boursière et à

apporter chacun sa modeste contribution à l'édification d'un espace économique viable et diversifié en Afrique de l'Ouest.

1.3 Objectifs et contributions

Les différents modèles d'Optimisation que nous avons évoqués dans l'état de l'art s'appliquent à un portefeuille dans le but de trouver les proportions du capital investies qui le rendent optimal. Cependant, ils ne s'orientent pas sur une partie ou un ensemble d'actifs financiers de ce portefeuille pour atteindre le même but. C'est ainsi que nous avons utilisé dans ce travail la technique de sélection consistant à extraire à partir d'un portefeuille, dit initial, un ensemble de titres financiers dénommé sous-portefeuille. Cette démarche conduit en effet à l'obtention d'un sous-portefeuille de titres financiers d'une taille réduite par rapport au portefeuille initial et qui procure une performance identique ou même meilleure du point de vue des charges financiers et des charges de calcul.

La contribution majeure de ce travail réside dans le paramètre orientant le choix des titres individuels devant composer le portefeuille. En effet, nous avons introduit l'utilisation du PER (Price-Earning-Ratio), un instrument très prisé dans la pratique boursière, pour la sélection des sous-portefeuilles.

Malgré les brillantes avancées de la modélisation financière, comme décliné précédemment depuis l'avènement du modèle de Markowitz, nous avons remis ce modèle d'Optimisation à l'ordre du jour afin de l'optimiser à travers une alliance de la pratique et de la théorie. Ainsi ce modèle a été généralisé incluant une nouvelle contrainte de sélection le transformant, pour des valeurs dynamiques du PER, en un problème de sélection dynamique de sous-portefeuilles optimaux. Ceci nous a permis de créer et d'introduire le nouveau concept nommé convergence de frontières efficientes.

La Bourse Régionale des Valeurs Mobilières de l'Afrique de l'Ouest a été mise au devant de la scène à travers ce travail. En effet, l'un des aspects principaux qui a guidé le choix du modèle espérance-variance a été l'applicabilité de la plupart de ses hypothèses dans cette bourse, très jeune et peu profond, et qui a plus que jamais besoin de la contribution des chercheurs à ses efforts de développement. Ainsi les données de sociétés cotées recueillies nous ont permis de tenter de déterminer l'horizon maximal, par la donnée du PER, sur lequel les investisseurs doivent se limiter pour constituer dans ce marché des portefeuilles de rendement optimal à moindre risque.

1.4 Plan de la thèse

Le présent travail est organisé en deux grandes parties de trois chapitres chacune. La première partie est relative au cadre d'étude et est orientée principalement vers les généralités et rappels. Le chapitre 2, premier chapitre de cette partie, a été destiné exclusivement à la notion d'Optimisation. Il présente en effet la quasi totalité des méthodes d'Optimisation les plus courantes et se penche sur leur utilisation en Finance avec une brève présentation des techniques de résolution pour chacune d'elles. C'est ainsi que les sections du chapitre traitent respectivement l'optimisation linéaire et non linéaire, l'optimisation quadratique, l'optimisation conique, la programmation en nombres entiers, la programmation dynamique et enfin l'optimisation avec l'incertitude des données.

Le chapitre 3, intitulé "Choix dans un avenir incertain et analyse du risque", nous familiarise avec le monde financier en introduisant les notions clés et en posant les enjeux qui y animent les acteurs. En effet, dans la première section de ce chapitre se trouvent les définitions de quelques concepts de base. Ensuite, plusieurs techniques utilisées par les investisseurs pour affecter une richesse initiale limitée entre différents actifs financiers sont abordées à travers la section portant sur les décisions d'investissement d'un individu. Enfin ce chapitre est bouclé par trois sections traitant la notion de risque, sa conception, ses différents types et son analyse.

Par suite le chapitre 4, dernier chapitre de cette première partie, est consacré à une revue de littérature de la théorie mathématique financière. L'approche de Markowitz, l'approche de Sharpe, l'approche de Markowitz et Perold, l'approche de Lai, le modèle de Konno et Yamazaki, le modèle de Speranza, le modèle moyenne-semi-variances de Hamza et Janssen, l'approche de Young, l'approche basée sur la valeur à risque et plus récemment l'approche par les semi-variances variables et l'intelligence artificielle de El Hachloufi constituent chacune respectivement les sections de ce chapitre.

La deuxième partie est abordée tout juste après et est intitulée, Sélection de sous-portefeuilles optimaux : Utilisation du PER. Le chapitre 5 qui débute cette partie est orienté vers la sélection dynamique de sous-portefeuilles optimaux sur la base du PER ajusté. L'essentiel de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans la revue académique canadienne "Journal of Mathematics Research". Dans cet article nous proposons une technique de sélection de sous-portefeuille optimal basée sur l'utilisation de cet outil de la pratique boursière, le PER. Cette technique nous a conduit à l'introduction d'un nouveau concept nommé convergence de frontières efficientes. Après deux sections consacrées au rappel de quelques éléments d'Algèbre et d'optimisation notamment du Lagrangien, directement en rapport avec l'objet de ce chapitre, cette nouvelle notion de

convergence de frontières efficientes a été définie dans la troisième section. La quatrième et dernière section portant sur le problème d'optimisation de sous-portefeuilles avec le PER pose la formulation mathématique, la résolution ainsi que les résultats théoriques.

L'optimisation multiobjectif de sous-portefeuilles, cette fois-ci, sur la base du PER brut est le titre du chapitre 6 qui a fait l'objet d'un autre article accepté pour publication au "International Journal of Computing and Optimization". A cette étape du travail, il ne sera plus question de minimiser un risque pour un sous-portefeuille de rendement maximal, ou inversement. Nous aurons en outre pour but d'optimiser de manière combinatoire le risque et le rendement, après une sélection d'actifs à partir du PER brut qui n'a subi aucun ajustement et qui s'écrit directement en fonction du rendement. Pour ce faire, nous utilisons une extension du modèle espérance-variance dont la fonction objectif est une fonction multiobjectif convexe, incluant un paramètre d'aversion au risque, nous conduisant à un problème de programmation quadratique convexe. Les deux premières sections introduisent quelques rappels d'Analyse convexe et entre autres les conditions de Kuhn et Tucker. La dernière section présente l'optimisation multiobjectif de sous-portefeuilles avec le PER brut, de la formulation mathématique aux résultats sous forme d'un théorème et deux corollaires.

Le chapitre 7, dernier chapitre de cette section, a été exclusivement destiné aux applications des problèmes formulés au chapitre 5 avec l'illustration du concept de convergence de frontières efficientes et aussi au chapitre 6 avec l'énoncé d'une valeur limitative maximale du PER pour un investissement efficient à la BRVM. Dans la première section de ce chapitre, nous faisons un bref aperçu général sur la Bourse Régionale des Valeurs Mobilières dont les données des sociétés à la cote ont été utilisées dans ces applications. La deuxième section présente les tests numériques et la dernière section discute des résultats.

Le chapitre 8 relatif à la conclusion générale dresse un bilan des travaux accomplis. Nous y rapportons les limites de nos contributions ainsi que les perspectives pour les travaux futurs.

Première partie

Cadre d'étude : Généralités et rappels

Méthodes d'Optimisation utiles en Finance

Sommaire

2.1	Introduction	23
2.2	Optimisation linéaire et non linéaire	23
2.3	Optimisation quadratique	26
2.4	Optimisation conique	27
2.5	La programmation en nombres entiers	31
2.6	Programmation dynamique	34
2.7	Optimisation avec l'incertitude des données	37
2.8	Conclusion	42

2.1 Introduction

A l'instar de beaucoup de domaines telle que la Finance, en particulier, l'Optimisation joue un rôle essentiel. Dans ce chapitre, l'objectif est de passer en revue les méthodes d'Optimisation les plus utilisées en Finance. C'est ainsi que l'Optimisation linéaire et non linéaire, l'Optimisation quadratique, l'Optimisation conique, la programmation en nombres entiers, la programmation dynamique, la programmation stochastique et enfin l'Optimisation robuste seront respectivement abordées dans ce chapitre.

2.2 Optimisation linéaire et non linéaire

L'Optimisation Linéaire (OL) est l'un des types d'optimisation de base. C'est sans doute le plus connu et celui qui a le plus résolu de problèmes d'optimisation. Elle doit

sa popularité et surtout son grand succès aux problèmes du monde réel (Transport, Sociologie, Economie, Finance . . .) qu'elle a formulés et solutionnés.

Définition 2.1. *Dans un problème d'(OL) la fonction objectif à optimiser est linéaire et les contraintes d'égalité et/ou d'inégalité sont linéaires.*

Un problème d'optimisation linéaire générique a la forme standard suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{z}} c^T \mathbf{z} \\ s.c. \\ A\mathbf{z} = b \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et c^T sa transposée sont donnés, et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur à déterminer.

Dans ce document un vecteur k est vu comme une matrice $k \times 1$. D'où la formulation c^T donnée ci-dessus est une matrice $1 \times n$ et $c^T \mathbf{z}$ est une matrice 1×1 équivalent à $\sum_{j=1}^n c_j z_j$. Ainsi l'objectif du problème (2.1) est de minimiser la fonction linéaire $\sum_{j=1}^n c_j z_j$.

Définition 2.2. *On parle d'Optimisation non-linéaire dans le cas où la fonction objectif et/ou l'une au moins des contraintes du problème (2.1) est non-linéaire.*

Remarque 2.1. – *Le problème (2.1) dit être faisable si ses contraintes sont cohérentes*

- *Lorsqu'il existe une séquence de vecteurs possibles $\{\mathbf{z}^k\}$ tel que $c^T \mathbf{z} \rightarrow -\infty$ alors le problème (2.1) est appelé sans limite.*
- *Lorsque le problème (2.1) est faisable alors il a une solution optimale c'est-à-dire un vecteur \mathbf{z} qui satisfait les contraintes et minimise la valeur objective parmi tous les vecteurs possibles.*

2.2.1 La méthode du simplexe

Une des méthodes les plus connues et les plus efficaces pour résoudre les problèmes d'(OL) est la méthode du simplexe. On peut aussi citer celui du point intérieur (voir section 2.3.3). Les problèmes d'Optimisation non linéaire quant à eux peuvent être résolus en utilisant les techniques de recherche de gradient ainsi que des approches basées sur la méthode de Newton comme du point intérieur et les méthodes de programmation quadratique séquentielles. Cornuejols [18] présente sous tous ses aspects cette méthode.

Nous introduisons dans ce qui suit la notion essentielle de dualité.

2.2.2 Problème primal, problème dual

Définition 2.3. *Le dual du problème (2.1) appelé primal, s'écrit :*

$$DL : \begin{cases} \max_y b^T y \\ \text{s.c.} \\ A^T y \leq c \end{cases} \quad (2.2)$$

où $y \in \mathbb{R}^m$.

Remarque 2.2. *Le dual du dual est le primal.*

Théorème 2.1. *(Théorème de la dualité faible)*

Soit \mathbf{z} une solution réalisable du problème primal PL (2.1) et y une solution réalisable du problème dual (DL) (2.2) alors

$$c^T \mathbf{z} \geq b^T y$$

Démonstration. On a $\mathbf{z} \geq 0$ et $c - A^T y \geq 0$ d'où le produit scalaire de ces deux vecteurs ne peut être négatif :

$$(c - A^T y)^T \mathbf{z} = c^T \mathbf{z} - y^T A \mathbf{z} = c^T \mathbf{z} - y^T b \geq 0$$

□

Définition 2.4. *La quantité $c^T \mathbf{z} - y^T b$ est souvent appelée écart de dualité.*

Les trois résultats suivants sont des conséquences immédiates du théorème de la dualité faible.

Corollaire 2.1. *Si le primal est sans limite, alors le dual est irréalisable.*

Corollaire 2.2. *Si le dual est sans limite, alors le primal est irréalisable.*

Corollaire 2.3. *Si \mathbf{z} est réalisable pour le primal, y est réalisable pour le dual, et $c^T \mathbf{z} = y^T b$, alors \mathbf{z} est optimale pour le primal et y aussi est optimal pour le dual.*

2.2.3 Conditions d'optimalité

Théorème 2.2. *(Théorème de la dualité forte)*

Si le problème primal a une solution optimale \mathbf{z} , alors le dual a une solution optimale y tel que $c^T \mathbf{z} = b^T y$

Démonstration. Voir le manuel de Chvátal [16] □

Le théorème de dualité forte nous donne des conditions optimales pour identifier les solutions optimales (appelé conditions d'optimalité) : $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ est une solution optimale du problème (2.1) si et seulement si

1. \mathbf{z} est primal réalisable : $A\mathbf{z} = b$, $\mathbf{z} \geq 0$ et il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que :
2. y est dual réalisable : $A^T \mathbf{z} \leq c$, et
3. Il n'y a aucun écart de dualité : $c^T \mathbf{z} = b^T y$

2.3 Optimisation quadratique

Définition 2.5. *L'optimisation quadratique (QP) consiste en la minimisation d'une fonction objectif quadratique sous des contraintes linéaires. La forme standard est définie comme suit :*

$$\mathcal{DL} : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + c^T \mathbf{z} \\ s.c. \\ A\mathbf{z} = b \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont donnés, et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

2.3.1 Dualité

Comme dans l'Optimisation Linéaire, nous pouvons déterminer le dual de problèmes d'Optimisation Quadratique. Le dual du problème (2.3) s'écrit :

$$DL : \begin{cases} \max_{\mathbf{z}, y, s} b^T y - \frac{1}{2} \mathbf{z}^T Q \mathbf{z} \\ s.c. \\ A^T y - Q\mathbf{z} + s = c \\ \mathbf{z}, s \geq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3.2 Conditions d'optimalité

Théorème 2.3. *Supposons que \mathbf{z} est une solution optimale locale du problème (QP) (??) satisfaisant $A\mathbf{z} = b$; $\mathbf{z} \geq 0$ et supposons que Q soit une matrice semi-défini positive.*

Alors il existe des vecteurs y et s tels que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$A^T y - Qz + s = c \quad (2.5)$$

$$z, s \geq 0 \quad (2.6)$$

$$z_i s_i = 0, \forall i \quad (2.7)$$

En plus z est une solution globale.

Ces conditions sont couramment appelé conditions KKT (Voir section 6.3.1.)

Remarque 2.3. Notons que la condition de semi-défini-tude positive liée à la Hessienne de la fonction de Lagrange dans le théorème KKT est automatiquement satisfaite pour des problèmes de programmation quadratique convexes et donc ne sont pas inclus dans le théorème 2.3

2.3.3 Methodes du point intérieur

En 1984, Narendra Karmarkar a prouvé que la méthode du point intérieur (IPM) peut résoudre les problèmes d'(OL) en temps polynomial. Dans les deux décennies suivant la publication de l'article de Karmarkar, Les chercheurs se sont penchés sur les propriétés théoriques et pratiques des (IPM).

Une des premières découvertes fût que les (IPM) sont des modications de la méthode de Newton capable de gérer des contraintes d'inégalité. Nesterov et Nemirovski [54] ont montré que le mécanisme des (IPM) est applicable à une large variété de problèmes pas seulement de types (OL). Par exemple, les (IPM) font de loin parti des meilleurs méthodes existantes pour les problèmes de programmation quadratique convexes ainsi que pour la plupart des problèmes d'optimisation conique (Voir section suivante).

L'article de Karmarkar [41] et l'ouvrage de Cornuejols [18] étalent dans les détails cette méthode.

2.4 Optimisation conique

2.4.1 Eléments de rappel sur les cônes

Définition 2.6. Un ensemble C est un cône si $\lambda z \in C$ pour tout $\lambda \geq 0$ et $z \in C$.

Définition 2.7. Un cône est dit pointu s'il n'inclut aucune droite.

Nous rencontrons généralement des cônes convexes, fermés et pointus. Voici quelques exemples :

- $C_l := \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z \geq 0 \right\}$ l'orthant non négatif. En général, n'importe quel ensemble de la forme $C_l := \left\{ z \in \mathbb{R}^n : Az \geq 0 \right\}$ avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice, est dit cône polyédral. L'indice l est utilisé pour indiquer que le cône est défini par des inégalités linéaires.
- $C_q := \left\{ \mathbf{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : z_1^2 \geq \|(z_1, \dots, z_n)\|^2 \right\}$ le cône du second ordre. Ce cône est aussi appelé le cône quadratique (d'où l'indice q), Lorenzt cône ou cône crème glacée.
- $C_s := \left\{ X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_n^n : X = X^T, X \text{ semi-définie positive} \right\}$ le cône de matrices semi-définie positives symétriques.

Si C est un cône dans un espace vectoriel X muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors son cône dual est défini par :

$$C^* := \{ \mathbf{z} \in X : \langle \mathbf{z}, y \rangle \geq 0, \forall y \in C \}. \quad (2.8)$$

Il est facile de voir que l'orthant non négatif dans \mathbb{R}^n (avec le produit scalaire usuel) est égal à son cône dual. La même chose est valable pour le cône du second ordre et le cône de matrices semi définie positives symétriques.

Le cône polaire est la négation du cône dual c'est-à-dire

$$C^P := \{ \mathbf{z} \in X : \langle \mathbf{z}, y \rangle \leq 0, \forall y \in C \}. \quad (2.9)$$

2.4.2 Problème d'Optimisation Conique (OC)

Définition 2.8. *Considérons un cône C dans un espace vectoriel de dimension finie X , un problème d'optimisation conique s'écrit :*

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{z}} c^T \mathbf{z} \\ s.c. \\ A\mathbf{z} = b \\ \mathbf{z} \in C \end{cases} \quad (2.10)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et c^T sa transposée sont donnés, et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur à déterminer.

Remarque 2.4. 1. Si $X = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}_+^n$, alors le problème (2.10) est de la forme des problèmes d'(OL).

2. Beaucoup de problèmes de programmation convexe formulés en terme de problèmes d'optimisation dite robuste conduisent aux problèmes (CO) [8] [9].

Remarque 2.5. Deux types importants de problèmes d'(OC) qui sont les plus rencontrés en finance sont :

- l'optimisation de cône du second ordre et,
- l'optimisation semi définie.

Ce qui renvoie respectivement au cas où C est un cône du second ordre :

$$C_q := \left\{ \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_1^2 \geq z_2^2 + \dots + z_n^2, z_1 \geq 0 \right\} \quad (2.11)$$

et un cône de matrices semi-définie positives symétriques :

$$C_s := \left\{ X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_n^n : X = X^T, X \text{ semi-définie positive} \right\} \quad (2.12)$$

La récupération des probabilités risque-neutre à partir des prix d'options et l'Approximation de matrices de covariance sont entre autres des cas où interviennent l'optimisation conique. Dans ce qui suit, nous allons nous pencher en guise d'exemple sur l'approximation de matrices de covariance.

2.4.3 Approximation de matrices de covariance

La matrice de covariance de vecteurs de variables aléatoires est l'un des descripteurs statistiques les plus importants et les plus utilisées du comportement conjoint de ces types de variables. Les matrices de covariance sont fréquemment rencontrées en mathématiques financières, par exemple, dans l'optimisation moyenne-variance, dans la prévision, dans la modélisation des séries temporelles, etc.

Souvent, les vraies valeurs d'une matrice de covariance ne sont pas observables et on est obligé de se reposer sur des estimations de celles-ci. Litterman [44] dans son chapitre 16, traite cette question précise de l'estimation de matrices de covariance. Au

contraire, ici, nous considérerons le cas où une estimation de la matrice de covariance est déjà fournie et nous nous intéresserons à la détermination d'une modification de cette estimation pour que cette dernière respecte certaines propriétés. Typiquement, on se focalisera sur la plus petite distorsion de l'estimation initiale qui réalise ces propriétés souhaitées.

Ces propriétés structurales partagées par toutes les «matrices de covariance sont la symétrie et la semi-défini-tude positive (Voir section 5.2.2). Une matrice de corrélation quant à elle satisfait la propriété additionnelle que sa diagonale est constituée uniquement de 1.

Dans certains cas, par exemple lorsque l'estimation de la matrice de covariance est effectuée entrée par entrée, l'estimation qui en résulte peut ne pas être une matrice semi-définie positive, ce qui signifie qu'elle peut avoir des valeurs propres négatives. L'utilisation d'une telle estimation suggère que certaines combinaisons linéaires des variables aléatoires sous-jacentes ont une variance négative et éventuellement cela entraîne des résultats désastreux dans l'optimisation moyenne-variance. D'où la nécessité de corriger de pareilles estimations avant qu'elles ne soient utilisés dans une prise de décisions financières.

Soit S^n l'espace des matrices symétriques $n \times n$ et $\hat{\Sigma} \in S^n$ une estimation d'une matrice de covariance où $\hat{\Sigma}$ n'est pas nécessairement semi-définie positive. Dans ce dernier scénario, une question importante serait de définir la matrice semi-définie positive la plus proche de $\hat{\Sigma}$. Ainsi, concrètement, on utilise la norme de Frobenius de la matrice de déformation en tant que mesure de proximité :

$$d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) = \sqrt{\sum_{i,j} (\Sigma_{ij} - \hat{\Sigma}_{ij})^2} \quad (2.13)$$

Dès lors, nous pouvons poser le problème de matrice de covariance la plus proche de la manière suivante, selon $\hat{\Sigma} \in S^n$ donné,

$$\begin{cases} \min_{\Sigma} d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) \\ s.c. \\ \Sigma \in C_s^n \end{cases} \quad (2.14)$$

C_s^n est le cône de matrices symétriques semi-définies positives $n \times n$. Remarquons que la variable de décision dans ce problème est représentée par une matrice et non un vecteur comme dans les toutes premières formulations de problèmes d'optimisation.

D'un autre côté, avec l'introduction d'une variable muette t , le problème (2.14) peut

se réécrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad t \\ s.c. \\ d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) \leq t \\ \Sigma \in C_s^n \end{array} \right. \quad (2.15)$$

On peut voir que l'inégalité $d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) \leq t$ peut être écrite comme une contrainte de cône de second ordre, et, par conséquent, la formulation ci-dessus peut ainsi être transformée en un problème d'optimisation conique.

Des variantes de cette formulation (2.15) peuvent être obtenues par l'introduction de contraintes linéaires supplémentaires. A titre d'exemple, considérons un sous-ensemble E de paires de covariance (i, j) et supposons que nous voulons imposer à ces entrées des limites supérieure h_{ij} et inférieure $b_{ij} \forall (i, j) \in E$. Nous aurons donc à résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad d_F(\Sigma, \hat{\Sigma}) \\ s.c. \\ b_{ij} \leq \Sigma_{ij} \leq h_{ij}, \quad \forall (i, j) \in E \\ \Sigma \in C_s^n \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Lorsque E se compose de 1 sur toute sa diagonale (i, i) et $h_{ij} = b_{ij} = 1$; nous obtenons ainsi le problème avec la matrice de corrélation, une autre version problème original. Par exemple, des matrices de corrélation de dimension 3 ont la forme suivante :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma \in C_s^3$$

2.5 La programmation en nombres entiers

Les programmes en nombres entiers sont des problèmes d'optimisation linéaires où les variables sont astreintes à prendre des valeurs entières. Un programme linéaire en nombres entiers (PLN) est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{z}} \quad c^T \mathbf{z} \\ s.c. \\ A\mathbf{z} \geq b \\ \mathbf{z} \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

où la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ sont donnés et $\mathbf{z} \in \mathbb{N}^n$ est le vecteur variable à déterminer.

Un cas important se produit lorsque les variables \mathbf{z}_j représentent des variables de décision binaire, à savoir, $\mathbf{z} \in \{0, 1\}^n$. Le problème est alors appelé un programme linéaire en 0 – 1.

Quand il y a en même temps des contraintes constituées de variables continues et des variables entières, le problème est appelé un programme linéaire mixte en nombres entiers (PLMN) :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{z}} c^T \mathbf{z} \\ s.c. \\ A\mathbf{z} \geq b \\ \mathbf{z} \geq 0 \\ \mathbf{z}_j \in \mathbb{N}, \quad \forall j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (2.18)$$

où A une matrice, b , c des vecteurs, sont donnés et l'entier p est part de l'entrée tel que $1 \leq p < n$.

2.5.1 Modélisation de conditions logiques avec la (PLN)

Le problème avec lequel nous allons travailler dans cette section est du type budgétisation du capital.

Supposons que nous voulons investir 19 Millions de FCFA et que nous avons déjà identifié quatre opportunités d'investissement. L'opportunité 1 nécessite un investissement de 6,7 Millions de FCFA et a une valeur actuelle nette de 8 Millions de FCFA ; l'opportunité 2 exige 10 Millions de FCFA et a une valeur actuelle nette de 11 Millions de FCFA ; l'opportunité 3 exige 5,5 Millions de FCFA et a une valeur actuelle nette de 6 Millions de FCFA et enfin l'opportunité 4 qui nécessite 3,4 Millions de FCFA et a une valeur actuelle nette de 4 Millions de FCFA.

Comment devrions-nous placer notre argent dans ces investissements de sorte à maximiser notre valeur actuelle nette totale ? Chaque projet se présente sous forme d'une opportunité à prendre ou à laisser : ce qui implique qu'il n'y a pas de possibilité d'investir de façon partielle dans ces projets.

Nous allons ainsi utiliser une variable z_j binaire pour chaque investissement.

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si on investit} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.19)$$

Cela conduit à un problème de programmation 0-1.

$$\begin{cases} \max 8z_1 + 11z_2 + 6z_3 + 4z_4 \\ s.c. \\ 6,7z_1 + 10z_2 + 5,5z_3 + 3,4z_4 \geq 19 \\ z_j = 0 \text{ ou } 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Parmi les méthodes de résolution de ces types de programmes en nombres entiers, la plus largement utilisée est la méthode "Branch and Bound" (qui existe en tant que SOLVER). cf section suivante. La solution optimale du problème mixte (PLMN) associé à (2.20) est $z_1 = 1$; $z_2 = 0,89$; $z_3 = 0$ et $z_4 = 1$ pour une valeur actuelle nette de 21,79 Millions de FCFA. La solution optimale du (PLN) est $z_1 = 0$; $z_2 = 1,89$; $z_3 = 1$ et $z_4 = 1$ pour une valeur actuelle nette de 21 Millions de FCFA.

2.5.2 Les méthodes Branch and Bound et Branch and Cut

L'algorithme par Séparation et Evaluation, ou Branch and Bound, est une méthode générique de résolution de problèmes d'optimisation combinatoire. Cette méthode de Branch and Bound est plutôt destinée aux problèmes de recherche opérationnelle mais elle est aussi très utilisée pour la résolution de problèmes NP-complets, c'est-à-dire des problèmes considérés comme difficiles à résoudre efficacement. Elle a été proposée en 1960 par Land et Dong et est basée en effet sur une division du problème en un certain nombre de petits problèmes (Branch) et ensuite une évaluation de leur qualité basée sur la résolution des programmes linéaires sous-jacents (Bound).

La méthode Branch and Bound a été aussi la plus efficace technique pour résoudre les problèmes de (PLMN) dans les quarante années ou plus qui ont suivi. Historiquement, la première méthode mise au point pour la résolution de (PLMN) était basée sur la méthode "cutting planes" ou simplement méthode de coupure, une approche introduite par Gomory en 1958.

Cependant, dans les trente dernières années, la méthode de coupure ont resurgi et sont efficacement combinées avec la méthode branch and bound dans une procédure globale appelée Branch and Cut. Ce terme a été inventé par Padberg et Rinaldi en 1987. Les solvers commerciaux les plus sophistiqués tels que CPLEX et XPRESS utilisent cette combinaison de Branch and Cut.

Le livre introductif de Wolsey [68] présente encore plus d'aspects intéressants concernant la programmation linéaire en nombre entier et ces méthodes de résolution.

2.6 Programmation dynamique

La programmation dynamique est une méthode exacte d'optimisation combinatoire adaptée à l'optimisation des systèmes dynamiques. Ces derniers évoluent dans le temps d'un état initial e_i à un état final e_f en transitant par des états intermédiaires. La transition d'un état à l'autre définit une étape. Cette méthode fait intervenir des décisions par étape. La programmation dynamique consiste alors à décomposer le problème initial en une série de sous-problèmes de taille inférieure. Ces derniers seront à leur tour décomposés jusqu'à atteindre des sous-problèmes de taille élémentaire dont la résolution est triviale. Cette manière d'obtenir la solution du problème initial à partir de celle des sous problèmes est basée sur le principe d'optimalité de Bellman. Ce principe permet de résoudre ces sous-problèmes de manière récursive en les liant par des relations de récurrence de type forward (récurrence avant) ou backward (récurrence arrière). Les équations qui en découlent sont appelées équations de Bellman. La programmation dynamique s'applique à des problèmes dynamiques déterministes ou stochastiques où respectivement on envisage que le temps discret ou continu.

2.6.1 Définition de quelques éléments de base

A l'évolution du système dynamique, on associe les variables suivantes :

- la variable de temps notée t prenant des valeurs discrètes dans \mathbb{N} ou continues sur un intervalle $[0; T]$ appartenant à \mathbb{R} où T est le nombre de phases ou de périodes appelé horizon du système ;
- la variable d'état $x(t)$ ou x_t qui représente un point de la trajectoire du système à l'instant t ;
- la variable de décision ou de contrôle ou de commande à l'instant t notée $u(t)$ ou u_t .

Définition 2.9. *L'évolution du système est décrite par une équation, appelée équation d'état ou d'évolution ou de comportement du système. Cette évolution se caractérise par un changement, au cours du temps, de l'état observé ; elle désigne aussi la trajectoire ou la dynamique du système.*

On désigne par :

$S_t(x_t)$ l'ensemble des états du système à l'instant t ;

$U_t(x_t)$ l'ensemble des décisions admissibles à l'état x_t ;

f_t les fonctions de transition ou de transfert à l'instant t d'un état x_t à un état x_{t+1} .

Définition 2.10. Le triplet (S_t, U_t, f_t) est appelé processus de décision séquentiel. C'est un modèle mathématique par lequel on schématise les problèmes d'optimisation qui évoluent en fonction du temps.

Définition 2.11. Une politique $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{T-1})$ est une séquence de décisions prise aux différentes phases du processus. Elle est dite optimale si pour chaque état du système une décision est prise dans le but d'optimiser un critère donné.

Définition 2.12. On appelle sous-politique toute politique d'un sous-problème.

2.6.2 Énoncé du principe

Ce principe a été énoncé par Richard Bellman de la manière suivante : *Une politique optimale a la propriété que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions restantes doivent constituer une politique optimale vis-à-vis de l'état résultant de la première décision* [7]

c'est à dire

"Toute politique optimale ne peut être formée que de sous politiques optimales".

En d'autres termes, si une suite de décisions $\pi = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}\}$ est politique optimale alors il en est de même de la suite de décisions $\pi_p = \{\mu_p, \mu_{p+1}, \dots, \mu_{N-1}\}$ pour l'état initial x_p et le critère $f(x_p, u_p) + f(x_{p+1}, u_{p+1}) + \dots + f(x_{N-1}, u_{N-1})$.

Démonstration. On va le faire par deux méthodes différentes.

• Première méthode

Supposons que la suite de décisions $\pi_p = \{\mu_p, \mu_{p+1}, \dots, \mu_{N-1}\}$ n'est pas optimale. On peut alors remplacer cette suite π_p par une autre suite $\pi'_p = \{\mu'_p, \mu'_{p+1}, \dots, \mu'_{N-1}\}$ qui serait elle-même optimale. Comme la fonction objectif est additive, la suite $\pi_p = \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu'_p, \mu'_{p+1}, \dots, \mu'_{N-1}\}$ conduira à un objectif meilleur que celui atteint grâce à la suite π . Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. D'où la suite π_p est optimale.

• Deuxième méthode

Posons $J_p = \min_{u_p, \dots, u_{N-1}} \{f(x_p, u_p) + f(x_{p+1}, u_{p+1}) + \dots + f(x_{N-1}, u_{N-1})\}$.

J_p ne dépend que de x_p et p , on écrit donc $J_p(x_p)$.

On a :

$$J_p(x_p) = \min_{u_p} \{f(x_p, u_p) + \min_{u_{p+1}, \dots, u_{N-1}} \{f(x_{p+1}, u_{p+1}) + \dots + f(x_{N-1}, u_{N-1})\}\} \quad (2.21)$$

C'est à dire

$$J_p(x_p) = \min_{u_p} \{f(x_p, u_p) + J_{p+1}(x_{p+1})\} \quad (2.22)$$

et comme $x_{p+1} = f(x_p, u_p, p)$,

$$J_p(x_p) = \min_{u_p} \{f(x_p, u_p) + J_{p+1}(f(x_p, u_p, p))\} \quad (2.23)$$

Pour $p = N - 1$, on a :

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \{f(x_{N-1}, u_{N-1}) + J_N(x_N)\}.$$

Par convention $J_N(x_N) = 0$

Alors $J_0(x_0)$ est l'optimum cherché. □

Les équations (2.21), (2.22), (2.23) sont appelées équations de Bellman ou équations de la programmation dynamique. Elles sont des relations de récurrence qui permettent de calculer de proche en proche $J_p(x_p)$ pour aboutir à $J_0(x_0)$ qui l'optimum cherché. Il existe des relations de récurrence de type forward ou pétrgrade et de type backward ou rétrograde.

2.6.3 Avantages et limites du principe

2.6.3.1 Les avantages

- ★ Très simple pour résoudre les sous problèmes d'un problème donné.
- ★ Fournit directement la solution optimale pour les problèmes de nature séquentielle.
- ★ Permet de traiter des problèmes déterministes, stochastiques.
- ★ S'adapte à des situations où le temps, les états et les décisions varient continûment.
- ★ Intervient dans les systèmes dynamiques et autres systèmes de décisions séquentielles.
- ★ Fournit de nombreuses applications en recherche opérationnelle : investissements, stocks, transports, renouvellement du matériel, réapprovisionnement.

2.6.3.2 Les limites

- ★ Très complexe pour la résolution des problèmes de grande taille (où le nombre d'états croit de manière exponentielle en fonction du nombre d'étapes).
- ★ Recours à d'autres méthodes de résolution :
 - utilisation de la méthode de *Branch and Bound* pour réduire la dimension de l'espace ;
 - application des méthodes heuristiques pouvant approcher la solution dans des temps de résolution très raisonnables.

Remarque 2.6. *Les modèles de programmation dynamiques sont omniprésents dans la littérature financière. Les exemples les plus connus et les plus courantes sont les modèles d'arbres ou de treillis (binomiale, trinôme, etc.) utilisé pour décrire l'évolution des prix d'actions, les taux d'intérêt, les volatilités, etc., et les prix et plans de couverture.*

2.7 Optimisation avec l'incertitude des données

Souvent, les paramètres du problème à résoudre correspondent à des données réalisables uniquement dans le futur ou simplement méconnaissable au moment où le problème doit être formulé et résolu. Ces situations sont particulièrement fréquentes dans modèles portant sur des données financières telles que les retours sur investissements, les risques, etc. Nous allons aborder de deux différentes approches fondamentales dans l'optimisation avec l'incertitude des données, la programmation stochastique et l'Optimisation robuste. Ces deux approches alternatives ne sont pas en fait des classes de problèmes (comme dans les problèmes (PL), (PQ), etc.), mais plutôt des techniques de modélisation pour traiter l'incertitude de données.

2.7.1 Programmation Stochastique (PS)

La programmation stochastique (PS) est une approche utilisée lorsque l'incertitude de données est aléatoire et peut être exprimée par une distribution de probabilité. Il y a en effet différents moyens d'intégrer cette incertitude. La programmation stochastique suppose que les paramètres incertains sont des variables aléatoires avec des distributions de probabilité connues. Cette information est ensuite utilisée pour transformer le programme stochastique en un programme déterministe équivalent qui peut être soit un programme linéaire, non linéaire ou soit un programme linéaire en nombres entiers.

Les modèles de programmation stochastique peuvent inclure des variables de décision anticipatives et/ou adaptatives. Les variables anticipatives correspondent à des décisions qui doivent être prises tout de suite et maintenant et qui ne peuvent pas dépendre des observations futures ou des réalisations partielles des paramètres aléatoires. Les variables adaptatives correspondent à des décisions du type "attendre et voir" qui peuvent être prises après que quelques (ou, parfois, la totalité) des paramètres aléatoires soient observés.

Les modèles de programmation stochastique qui comprennent à la fois des variables anticipatives et adaptatives sont appelées modèles de recours. En utilisant une formulation de programmation stochastique multi-étape, avec des variables recours à chaque

étape, on peut modéliser un environnement de décision où l'information est révélée progressivement et les décisions sont adaptées à chaque nouvel élément d'information.

Par exemple, dans la planification des investissements, chaque nouvelle opportunité de négociation représente une nouvelle décision à prendre. Par conséquent, les dates de négociation où les portefeuilles d'investissement peuvent être rééquilibrés deviennent des choix naturels pour les étapes de décision, et ces problèmes peuvent être formulés de manière commode en terme de problèmes de programmation stochastique multi-étape avec recours.

Exemple de formulations de problèmes stochastique multi-étages

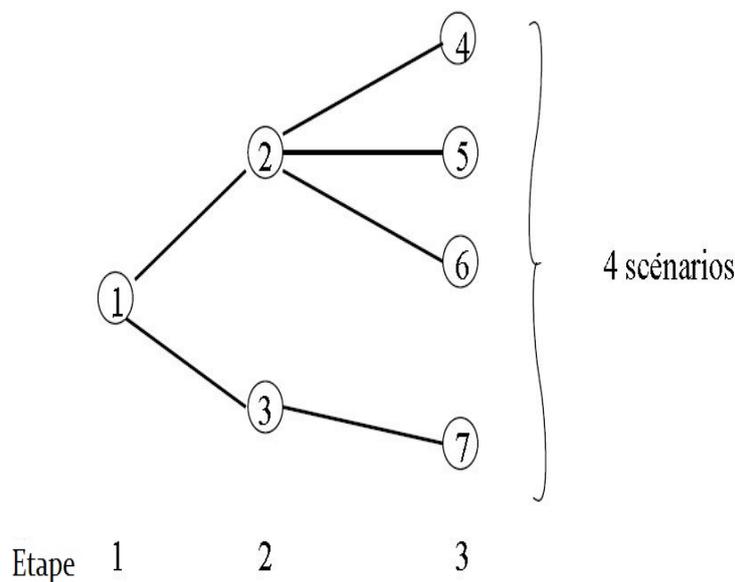


FIGURE 2.1 – Un arbre de scénario avec 3 étapes et 4 scénarios

Dans un programme stochastique multi-étages avec recours, les décisions de recours peuvent être prises en plusieurs points dans le temps, appelé étapes. Soit $n \geq 2$ le nombre d'étapes, l'événement aléatoire ω est un vecteur $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ qui est obtenu progressivement au fil du temps. Les décisions de la première étape sont prises avant que les composantes ω soient connues. Puis ω_1 est obtenu et ainsi avec la connaissance de ce dernier, on prend les décisions de la deuxième étape. Par suite, ω_2 est connu, et ainsi de suite, on alterne entre la connaissance d'une nouvelle composante de ω et la

mise en œuvre d'une décision de recours. Nous supposons que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_S\}$ est un ensemble fini et p_k la probabilité du scénario ω_k , $k = 1, \dots, S$.

Certains scénarios ω_k peuvent avoir leurs premières composantes identiques et devenir différents seulement dans les étapes ultérieures. Par conséquent, il devient judicieux d'introduire un arbre de scénarios, qui illustre comment les scénarios bifurquent à chaque étape. Les nœuds sont numérotés de 1 à N et le nœud 1 est la racine. Chaque nœud représente une seule étape, où la racine est le nœud unique de l'étape 1. Chaque nœud i de l'étape $k \geq 2$ est adjacent à un nœud unique $a(i)$ à l'étape $k - 1$. Le nœud $a(i)$ est appelé le père du nœud i . Les chemins de la racine aux feuilles (à l'étape n) représentent les scénarios. Ainsi, la dernière étape a autant de nœuds que de scénarios. Ces nœuds sont appelés les nœuds terminaux. La collection des scénarios passant par le nœud i de l'étape k a des composants identiques (o_1, \dots, o_{k-1}) .

Dans la figure (2.1), le nœud 1 est la racine, les nœuds 4, 5, 6 et 7 sont les nœuds terminaux. Le père du nœud 6 est le nœud 2, en d'autres termes $a(6) = 2$.

Un vecteur \mathbf{z}_i de décision de recours est associé à chaque nœud i . Pour un nœud i est l'étape k , les décisions \mathbf{z}_i sont prises basant sur l'information qui a été obtenue à l'étape k . Soit q_i la somme des probabilités p_k de toutes les scénarios ω_k qui passent par le nœud i . Par conséquent q_i est la probabilité du nœud i , à condition d'être à l'étape k . Le programme stochastique multi-étape avec recours peut être formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{z_1, \dots, z_N} \sum_{i=1}^K q_i c_i^T y_i \\ s.c. \\ Az_1 = b \\ B_i z_{a(i)} + C_i z_i = d_i \quad \forall i = 2, \dots, N \\ z_i \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Dans cette formulation, A et b définissent des contraintes déterministes au niveau de la première étape de décisions z_1 , où B_i , C_i , et d_i représentent des contraintes stochastiques liant les décisions de recours z_i au nœud i aux décisions de recours $z_{a(i)}$ au nœud père. La fonction objectif contient un terme $c_i^T y_i$ pour chaque nœud.

A titre d'illustration, nous présentons la reformulation de (2.24) de la figure 2.1. Les nœuds terminaux 4 à 7 correspondent aux scénarios 1 à 4 respectivement. Ainsi, nous avons $q_4 = p_1$, $q_5 = p_2$, $q_6 = p_3$ et $q_7 = p_4$, où p_k est la probabilité du scénario k . Nous avons aussi $q_2 = p_1 + p_2 + p_3$, $q_3 = p_4$ et $q_2 + q_3 = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \max c_1^T z_1 + q_2 c_2^T z_2 + q_3 c_3^T z_3 + p_1 c_4^T z_4 + p_2 c_5^T z_5 + p_3 c_6^T z_6 + p_4 c_7^T z_7 \\
 \text{s.c.} \\
 Az_1 = b \\
 B_2 z_1 + C_2 z_2 = d_2 \\
 B_3 z_1 + C_3 z_3 = d_3 \\
 B_4 z_2 + C_4 z_4 = d_4 \\
 B_5 z_2 + C_5 z_5 = d_5 \\
 B_6 z_2 + C_6 z_6 = d_6 \\
 B_7 z_3 + C_7 z_7 = d_7 \\
 z_i \geq 0
 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Remarque 2.7. La taille du programme linéaire (2.24) augmente rapidement en fonction du nombre d'étapes. Par exemple, pour un problème à 10 étapes et un arbre binaire correspondant, il y a 1024 scénarios et donc le programme linéaire (2.24) peut avoir plusieurs milliers de contraintes et de variables, en fonction du nombre de variables et de contraintes au niveau de chaque nœud. Les codes commerciaux modernes peuvent gérer ces grands programmes linéaires, mais une augmentation modérée du nombre d'étapes ou de branches à chaque étape pourrait faire de (2.24) un problème trop grand pour être résolu par les solveurs de programmation linéaire standard. Lorsque cela se produit, pour résoudre le problème, on peut envisager d'exploiter une structure particulière de (2.24) notamment son dual.

2.7.2 Optimisation robuste

L'optimisation robuste est utilisée lorsqu'on veut une solution adéquate dans toutes les réalisations possibles des données incertaines. En effet, cette approche part de l'hypothèse de l'aléatoire utilisée dans l'optimisation stochastique avec des paramètres incertains et donne la même importance à toutes les réalisations possibles. L'incertitude des paramètres est décrite à travers des ensembles d'incertitude qui contiennent toutes (ou la plupart) des valeurs possibles qui peuvent être réalisées par ces paramètres.

Il existe différentes définitions et interprétations de la robustesse et par conséquent les modèles résultants diffèrent. Un concept important rencontré dans la littérature est le modèle de robustesse renvoyant à l'introduction de la contrainte de robustesse.

Considérons un problème d'optimisation de la forme :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z}) \\ s.c. \\ G(\mathbf{z}, p) \in K \end{cases} \quad (2.26)$$

où \mathbf{z} représentent les variables de décision, f la fonction objectif (certaine), G et K les éléments de structure des contraintes qui sont supposés être certains et p les paramètres incertains du problème.

Considérons un ensemble d'incertitude \mathcal{U} qui contient toutes les valeurs possibles des paramètres incertains p . Une solution optimale liée à la contrainte robuste peut être trouvée en résolvant le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z}) \\ s.c. \\ G(\mathbf{z}, p) \in K \end{cases} \quad \forall p \in \mathcal{U} \quad (2.27)$$

On parle aussi d'objectif robuste lorsque des paramètres incertains apparaissent dans la fonction objectif. Dans la littérature, cela renvoie souvent au concept de solution robuste qui doivent rester proche de l'optimum pour toutes les réalisations possibles des paramètres incertains. Par exemple, considérons le problème d'optimisation de la forme :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z}, p) \\ s.c. \\ \mathbf{z} \in S \end{cases} \quad (2.28)$$

S est l'ensemble réalisable (certain) et f est la fonction objectif qui dépend des paramètres incertains p . Supposons comme ci-dessus que \mathcal{U} est l'ensemble d'incertitude qui contient toutes les valeurs possibles des paramètres incertains p . Alors, une solution "objectif" robuste est obtenue en résolvant :

$$\min_{\mathbf{z}} \max_{p \in \mathcal{U}} f(\mathbf{z}, p) \quad (2.29)$$

Remarque 2.8. *La robustesse dans l'objectif est un cas particulier de la robustesse de la contrainte. En effet, par l'introduction d'une nouvelle variable t (à minimiser) dans (2.28) et en imposant la contrainte $f(\mathbf{z}, p) \leq t$, nous obtenons un problème équivalent à (2.28). La formulation de la contrainte robuste du problème résultant est équivalent à (2.29).*

L'Optimisation robuste peut être considéré comme une alternative à l'analyse de la sensibilité et à la programmation stochastique. Les modèles d'optimisation robustes peuvent être particulièrement utiles dans les situations suivantes :

- Certains des paramètres du problème sont des estimations et comportent un risque d'estimation.
- Il y a des contraintes avec des paramètres incertains qui doivent être satisfaites quelles que soient les valeurs de ces paramètres.
- La fonction objectif ou les solutions optimales sont particulièrement sensibles aux perturbations.
- Le décideur ne peut pas se permettre de prendre risques de faible probabilité mais de haute amplitude.

2.8 Conclusion

Ce chapitre a été l'occasion d'étaler toute l'importance de l'Optimisation en Finance et cela a permis de voir même que la Finance est l'un des plus grands domaines d'application de l'Optimisation. En effet toutes les méthodes de base de l'Optimisation ont été présentées avec pour la plupart, des exemples dans des contextes financiers bien particulier où chacune de ces méthodes est adéquate.

Pour la suite de ce document, nous présenterons les éléments financiers qui guident le choix dans un avenir incertain et nous ferons l'analyse du risque. Un autre chapitre sera destiné par la suite à la revue littéraire de la théorie de portefeuille et nous découvrirons encore d'autres aspects de l'utilisation de ces méthodes d'optimisation traitées dans ce chapitre.

Choix dans un avenir incertain et analyse du risque

Sommaire

3.1	Introduction	43
3.2	Définitions de quelques concepts de base	44
3.3	Les décisions d'investissement d'un individu	46
3.4	Le risque : théorie et concept	53
3.5	Différents types de risque	56
3.6	Analyse du risque	56
3.7	Conclusion	58

3.1 Introduction

La manière dont les investisseurs doivent affecter une richesse initiale limitée entre les différents actifs financiers fait l'objet de la gestion de portefeuille. Nous pouvons citer pas mal de critères de choix en avenir incertain tels que : le critère de Wald (max-min) qui est le critère du "pessimisme absolu" où l'on fonde son choix uniquement sur ce qui peut arriver de pire et donc la stratégie optimale étant celle qui maximise la conséquence la plus défavorable ; le critère de Savage (minimax de regret) qui , entre les choix, identifie des « manques à gagner » appelés « regret » et cherche ainsi à minimiser le regret le plus élevé, minimisant ainsi les chances de se voir reprocher des « manques à gagner » importants ; le critère d'Hurwics (maximisation de la moyenne pondérée des max et des min) qui consiste à tenter un compromis entre le critère de Wald et son exact opposé nommé le critère du max-max en prenant en compte un coefficient de "pessimisme", il ne tient compte que des gains maximums et minimums de chaque stratégie ; ou encore le

critère de Laplace qui consiste à faire usage du « principe de raison insuffisante » pour supposer que la vraisemblance des divers états de la nature est identique puisque l'on ne dispose d'aucune information quant à leur vraisemblance relative, il donne ainsi une probabilité identique à tous les cas possibles et choisit la stratégie qui offre la moyenne des gains la plus forte. Tous ces critères constituent une aide à la prise de décision mais font défaut au niveau des conditions de rationalité qu'il serait souhaitable de leur appliquer.

L'objet de ce chapitre est d'étudier les préférences des individus dans un avenir incertain, entre autres, au moyen de la fonction d'utilité (Von neumann et Morgenstern, 1947) ou à l'aide de l'espérance de rentabilité et du risque des investissements et par suite, de poser les jalons de l'analyse du risque.

3.2 Définitions de quelques concepts de base

3.2.1 Valeurs mobilières

Les valeurs mobilières sont les titres émis par des personnes morales, publiques ou privées, transmissibles par inscription en compte.

Les valeurs mobilières confèrent des droits identiques par catégories et donnent accès, directement ou indirectement, à une partie du capital de la personne morale émettrice ou à un droit de créance général sur son patrimoine.

Les valeurs mobilières les plus usitées sont les actions, les obligations, les OPCVM (Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières) qui recouvrent principalement deux types d'entités les SICAV (Société d'investissement à Capital Variable) et les FCP (Fonds Commun de Placement), et plus récemment les trackers.

3.2.2 Action

Une action appartient à la catégorie des valeurs mobilières comme énoncé ci-dessus. Un détenteur d'actions possède un titre représentatif d'une partie du capital d'une entreprise privée.

Cela lui confère le statut d'associé et le bénéfice de certains droits :

- le droit pécuniaire (dividende ou paiement de dividende en action),
- le droit de vote (normalement un droit de vote par action),
- le droit de regard sur la gestion (communication des documents et Assemblée Générale),

- le droit sur l'actif net (bon de liquidation).

3.2.3 Obligation

Une obligation est un titre de créance représentant la part d'un emprunt obligataire émis soit par des entreprises publiques ou privées, soit par l'État ou des collectivités territoriales.

Une obligation représente donc une dette à l'égard de l'investisseur. Elle se définit par le nom de son émetteur, son taux d'intérêt, ses dates de paiement d'intérêts, son année d'émission et sa date de remboursement.

L'émetteur s'engage à verser un revenu constant, appelé intérêt ou coupon, pendant toute la durée de l'emprunt, puis à rembourser sa dette au terme de la vie de l'obligation.

3.2.4 Titre financier

Un titre financier est un titre représentatif d'une partie du capital d'une société (actions) ou d'une partie de sa dette (titres de créances négociables). Un titre financier peut également être émis par un Etat sous la forme d'un bon ou d'une obligation.

Un titre financier rapporte une rémunération certaine (intérêts) ou aléatoire (dividendes), sous réserve de la solvabilité de l'émetteur.

3.2.5 Marché financier

Le marché financier a comme rôle principal de financer le développement de l'économie (entreprises, Etat et collectivités), d'assurer la liquidité et la mobilité de l'épargne investie en valeurs mobilières, de fournir une évaluation régulière des titres cotés.

Il doit pour se faire faciliter les échanges, veiller à l'égalité entre tous les intervenants par sa transparence et son accessibilité et enfin sécuriser les transactions et leurs dénouements pour les différents acteurs.

Le marché financier se décompose en marché primaire qui est le marché de l'émission et en marché secondaire qui correspond au marché de la revente ou de l'occasion (la bourse). Il englobe les marchés d'actions, d'obligations et les marchés dérivés (marchés à terme).

3.2.6 Actif financier

Les actifs financiers constituent une catégorie d'actifs mobiliers acquis le plus souvent sur un marché de capitaux, une expression désignant un marché financier.

Ces actifs financiers permettent aux émetteurs et aux investisseurs de satisfaire les besoins de capitaux pour les premiers et les besoins de rémunération des capitaux investis pour les seconds. Les actifs financiers peuvent être sans risque de défaut (obligation émise par l'état) et apporter un rendement constant connu à l'avance.

Les actifs financiers sont aussi des actifs risqués lorsqu'il s'agira par exemple des actions ou des obligations émises par des entreprises pouvant faire défaut.

3.2.7 Les fonds propres

C'est la valeur comptable nette du patrimoine de l'entreprise. Les fonds propres constituent la forme de financement la plus courante lors de la création d'une entreprise. Il s'agit des fonds durablement investis au sein d'une entreprise par ses actionnaires.

Au fil du temps, les fonds propres se trouvent modifiés par l'accumulation des résultats positifs ou négatifs de l'entreprise. Ils peuvent être notamment augmentés par le recours à une augmentation de capital.

Le montant des fonds propres conditionne la capacité d'emprunt des entreprises. En règle générale, les banques acceptent difficilement de financer une entreprise au-delà de la somme de ses fonds propres.

3.2.8 La vente à découvert

La vente à découvert permet de vendre aujourd'hui un titre sur le marché boursier en anticipant sa baisse et à le racheter X temps plus tard moins cher, avec pour objectif de réaliser une plus-value. Les particuliers peuvent procéder ainsi en ayant recours à une vente à règlement différé. En d'autres termes, la vente à découvert n'est rien d'autre que la vente ou même l'emprunt de titres que l'on ne possède pas.

Cette opération est très spéculative et en fonction des périodes peut être interdite ou faire l'objet de limitation de la part des autorités monétaires et financières.

3.3 Les décisions d'investissement d'un individu

Un individu désirant investir est confronté à un problème d'optimisation sous contraintes. En effet, il cherchera à maximiser son rendement et à minimiser les risques. Il sera ainsi amené à faire une comparaison entre le coût de l'investissement et les gains associés à son utilisation, tout en tenant compte des risques. D'où la nécessité de procéder en deux étapes dans la prise de décisions,

✓ D'abord estimer le risque et la rentabilité espérée de l'ensemble des allocations possibles de sa richesse ;

✓ Ensuite, choisir la combinaison de titres ou d'actifs financiers qui procurera le rendement optimal selon son profil risque.

Remarque 3.1. *Certains individus ont une conception erronée du capital à investir, en particulier des fonds propres, et de l'évaluation de sa rentabilité. En guise d'exemple, nous voyons beaucoup de jeunes investisseurs faire faillite parce qu'ils pensent qu'il n'y a aucune exigence de rentabilité sur le capital qu'ils désirent investir, tout simplement parce que ce capital leur appartient. Alors que les fonds propres doivent être évalués au même titre que le prêt et, surtout, selon la même rigueur.*

3.3.1 Techniques d'évaluation de la rentabilité d'un investissement

Pour évaluer la rentabilité d'un investissement en finance, on a besoin du coût du capital à investir qui est :

- Soit le taux d'intérêt bancaire ou de marché auquel ce capital a été obtenu si c'est une dette ;
- Soit ce qu'on nomme le coût d'opportunité d'utilisation alternative, s'il s'agit de fonds propre. Puisqu'on suppose qu'au lieu de prendre le risque d'investir dans un quelconque projet, il existe un support sur le marché où le capital aurait pu être mis et où le gain serait certain.
- Soit enfin le taux d'intérêt moyen pondéré, s'il s'agit d'un capital formé de dettes et de fonds propres ou bien formé de dettes de différentes sources.

Devant une décision d'investissement, ce coût du capital jouera un rôle important car il sera le taux d'actualisation des Flux Nets de Trésorerie notés (*FNT*) que va générer l'investissement.

Les critères de mesure de la rentabilité de l'investissement sont nombreux et on peut citer les plus utilisés en pratique par ordre de pertinence :

1. La Valeur Actuelle Nette (VAN)
2. Le Taux de Rendement Interne (TRI)

3.3.2 La Valeur Actuelle Nette (VAN)

La VAN mesure l'excédent ou le déficit des FNT_j générés par un investissement et ramenés retrospectivement en année zéro par rapport au capital investi.

$$VAN = \sum_{j=0}^N \frac{FNT_j}{(1+t)^j}$$

avec FNT_j les Flux Nets de Trésorerie de l'année j ($FNT_j = \sum_j Recettes_j - \sum_j Depenses_j$), t le coût du capital investi et N la durée de vie en années de l'investissement.

- Si $VAN > 0$ alors le projet d'investissement est rentable,
- Si $VAN < 0$ le projet est non rentable
- Si $VAN = 0$ on a une situation neutre.

3.3.3 Le Taux de Rendement Interne (TRI)

Le TRI est la valeur d'annulation de la VAN. C'est le taux maximum que peut supporter le projet, si l'investissement est une dette, sans cesser d'être rentable.

$$\begin{aligned} VAN = 0 & \Rightarrow \sum_{j=0}^N \frac{FNT_j}{(1+TRI)^j} = 0 \\ & \Rightarrow -V_0 + \sum_{j=1}^N \frac{FNT_j}{(1+TRI)^j} = 0 \\ & \Rightarrow \sum_{j=1}^N \frac{FNT_j}{(1+TRI)^j} = V_0 \end{aligned}$$

avec V_0 l'investissement initial.

Ce TRI constitue donc un seuil que le coût du capital ne devrait pas dépasser. Dans le cas où le coût du capital t dépasse le TRI, le projet cesse simplement d'être rentable.

3.3.4 Les fonctions d'utilité

Devant des choix risqués, les économistes eux ont recours à la notion de fonction d'utilité pour modéliser le comportement de l'individu. Cette fonction d'utilité que nous noterons u est construite grâce aux axiomes de rationalité de Von Neumann et Morgenstern. Nous supposerons qu'elles sont continues, dérivables et strictement croissantes.

Les décisions de l'investisseur sont supposées maximiser la valeur de l'espérance

mathématique de son utilité¹ noté $E_{\mathbf{u}}$ et, sa richesse que nous noterons par W sera l'argument de la fonction d'utilité.

✓ Les fonctions d'utilité possèdent deux propriétés majeures :

Propriété 3.1. *Un individu préfère une richesse W_1 à W_2 si et seulement si, l'espérance des résultats de W_1 est supérieure à celle des résultats de W_2 c'est à dire*

$$W_1 \succeq W_2 \quad \Leftrightarrow \quad E_{\mathbf{u}}(W_1) \geq E_{\mathbf{u}}(W_2). \quad (3.1)$$

Propriété 3.2. *L'espérance d'utilité peut être utilisée dans le but de classer des combinaisons de placements risqués.*

✓ Etant aussi sensées refléter des préférences rationnelles, les fonctions d'utilité ont les propriétés particulières suivantes :

Propriété 3.3. *Les investisseurs vont préférer la richesse W_2 lorsque la richesse $W_2 > W_1$. Par conséquent, on a $\mathbf{u}(W_2) > \mathbf{u}(W_1)$, ce qui signifie que les fonctions d'utilités sont croissantes avec la richesse. D'où on a la dérivée de \mathbf{u} , $\mathbf{u}' > 0$.*

Propriété 3.4. *Les fonctions d'utilité sont concaves (la pente \mathbf{u}' décroît donc $\mathbf{u}'' < 0$). Une concavité qui traduit, sur le plan mathématique, non seulement la décroissance de l'utilité marginale mais aussi l'aversion à l'égard du risque.*

Les fonctions d'utilité reflètent ainsi le profil risque de l'investisseur. Le goût pour le risque, la neutralité devant le risque et l'aversion au risque sont les trois seuls comportements possibles. Les individus sont d'une manière générale averses au risque. Ce qui fait qu'à niveau de rentabilité égal, les individus choisiront l'investissement le moins risqué.

Exemple 3.1. *Pour illustrer la propriété 3.4, considérons un jeu de pile ou face pour un petit montant $h > 0$. Si l'individu ayant une richesse initiale W accepte de jouer à ce jeu, il verra sa richesse devenir $W+h$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$ ou bien $W-h$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Si l'individu préfère ne pas jouer et garder avec certitude sa richesse initiale W , c'est que :*

$$\mathbf{u}(W) > \frac{1}{2} \mathbf{u}(W+h) + \frac{1}{2} \mathbf{u}(W-h)$$

En multipliant par 2 les deux termes de cette inégalité et en réarrangeant, on obtient :

$$\mathbf{u}(W) - \mathbf{u}(W-h) > \mathbf{u}(W+h) - \mathbf{u}(W)$$

1. Si une fonction d'utilité est telle qu'on puisse poser $\mathbf{u}(W) = \mathbf{u}(W_0+G) = \mathbf{u}(W_0) + \mathbf{u}(G)$ avec W_0 la richesse initiale et G le gain de l'investissement, il suffit de maximiser $\mathbf{u}(G)$

D'où

$$\frac{\mathbf{u}(W) - \mathbf{u}(W - h)}{h} > \frac{\mathbf{u}(W + h) - \mathbf{u}(W)}{h}$$

En passant à la limite, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(W) - \mathbf{u}(W - h)}{h} > \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(W + h) - \mathbf{u}(W)}{h}$$

donc si \mathbf{u}' existe on a

$$\mathbf{u}'(W) > \mathbf{u}'(W + h)$$

D'où \mathbf{u}' est décroissante.

En définitive $\mathbf{u}''(W)$, s'il existe, est telle que :

$$\mathbf{u}''(W) < 0$$

Ce qui renvoie à la concavité tantôt énoncée car la pente est décroissante lorsque la richesse augmente.

Si l'individu de l'exemple 3.1 est indifférent entre jouer au jeu proposé et payer une somme π (dite prime de risque, supposée petite devant h), il est indifférent entre avoir une richesse $W^* = W - \pi$ avec une probabilité de 1 ou jouer au jeu de pile ou face. L'utilité de l'équivalent certain et celle du jeu sont donc égales. Ainsi,

$$\mathbf{u}(W^*) = \frac{1}{2}\mathbf{u}(W + h) + \frac{1}{2}\mathbf{u}(W - h). \quad (3.2)$$

\mathbf{u} est supposée être deux fois dérivable en particulier en W^* . En prenant le développement de Taylor de $\mathbf{u}(W^*)$ arrêté au premier ordre :

$$\mathbf{u}(W^*) = \mathbf{u}(W) - \pi\mathbf{u}'(W) + o(\pi^2). \quad (3.3)$$

et les développements de Taylor de $\mathbf{u}(W - h)$ et $\mathbf{u}(W + h)$ arrêtés au second ordre, puis en prenant la différence de ces deux derniers développements, on obtient :

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}(W + h) + \frac{1}{2}\mathbf{u}(W - h) = \mathbf{u}(W) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{u}''(W) + o(h^4). \quad (3.4)$$

d'où en tenant compte des relations 3.2, 3.3 et 3.4 et en négligeant les restes en π^2 et en h^4 , on a après arrangement

$$\pi = -\frac{1}{2}h^2 \frac{\mathbf{u}''(W)}{\mathbf{u}'(W)} = \frac{1}{2}h^2 A(W), \text{ avec } A(W) = -\frac{\mathbf{u}''(W)}{\mathbf{u}'(W)}. \quad (3.5)$$

La prime de risque π est proportionnelle à $A(W)$, pour un risque donné d'après l'équation 3.5.

Nous interprétons $A(W)$ comme étant le coefficient d'aversion absolue à l'égard du risque. Il est directement lié à l'individu et mesure l'intensité de l'aversion ou de l'attrait pour le risque.

Intuitivement les individus ont tendance à prendre plus de risque lorsqu'ils sont riches que lorsqu'ils sont pauvres. Ainsi plus la richesse d'un individu est grande, plus la prime de risque est faible. D'où, le coefficient $A(W)$ et le niveau de richesse sont inversement proportionnels, quand l'un augmente l'autre chute.

La fonction logarithme pour laquelle $u(W)=\log(W)$ et la fonction quadratique qui peut s'écrire $u(W)=W - bW^2$ (avec $b>0$) sont parmi les fonctions d'utilité les plus utilisées.

3.3.5 Efficience et anticipations rationnelles

3.3.5.1 Efficience

Eugène Fama² a donné au concept d'efficience son acceptation actuelle à travers la définition suivante :

Définition 3.1. *Le marché est efficient quand, à chaque instant, les prix incorporent toute l'information pertinente et disponible.*

Ainsi sur un marché efficient, dès qu'une information concernant un actif existe, le prix de cet actif est instantanément modifié pour incorporer cette nouvelle information. De ce fait, l'efficience est appréhendée a priori comme l'aptitude du marché à rétablir l'équilibre. La vision idéaliste que nous aurons d'un "marché efficient" est celle d'une économie dont les agents sont tous rationnels. D'où la définition suivante :

Définition 3.2. *Le marché est dit efficient si les prix qui s'y forment constituent des signaux fiables permettant aux investisseurs de prendre les bonnes décisions d'allocation des ressources.*

On considère trois formes d'efficience d'après Fama :

- L'efficience faible qui est celle d'un marché dont les prix incorporent à chaque instant le seul historique des prix passés.

2. Eugène Fama, économiste américain, est l'auteur de [la théorie d'efficience des marchés financiers](#) et est célèbre grâce aux hypothèses d'efficience des marchés et le modèle Fama-French à trois facteurs.

- L'efficience semi forte qui est celle d'un marché dont les prix incorporent à chaque instant non seulement la chronique des prix passés mais également toutes les informations pertinentes rendues publiques (bénéfices, projets d'investissement, dividende...).
- L'efficience forte est celle qui caractérise un marché dont les prix incorporent toute l'information disponible, qu'elle ait été rendue publique ou non.

Ces trois hypothèses, surtout l'efficience forte, n'ont pas manqué d'être mises en cause sur les plans théorique et empirique. Un premier argument est connu sous le nom de "paradoxe de Grossman et Stiglitz" qui stipule que si les prix reflétaient à tout instant toute information privilégiée, il ne serait pas rentable d'élaborer quelque information coûteuse que ce soit.

Jensen³ a répondu à cette objection par cette propriété fondamentale de l'efficience :

Propriété 3.5. *Dans un marché efficient, toute stratégie fondée sur des prévisions dégage un profit nul.*

3.3.5.2 Anticipations rationnelles

D'abord nous distinguons les anticipations rationnelles des anticipations myopes, où les acteurs prévoient que la situation future sera identique à la situation actuelle. On les distingue également des anticipations adaptatives où les individus extrapolent les événements récents du passé vers l'avenir.

Les anticipations rationnelles sont un postulat plus ambitieux que les deux autres dans la capacité des acteurs d'évaluation des risques. Cela n'implique pas que leurs prévisions seront confirmées.

Les anticipations rationnelles renvoient à une hypothèse selon laquelle les agents sont rationnels, maximisateurs, l'économie est en équilibre et les prix flexibles. Les acteurs économiques disposent ainsi de toute l'information disponible. Le marché est efficient et les acteurs intègrent toute information disponible, de façon immédiate, à leurs prévisions et donc à leurs décisions de marché. D'où le tâtonnement dit walrassien n'est plus utile pour décrire l'ajustement des prix sur ce marché.

3.3.6 L'absence d'opportunité d'arbitrage

Définition 3.3. *En théorie financière, une opportunité d'arbitrage est la possibilité de former un portefeuille d'actifs sans mise de fonds initiale et procurant des paiements*

3. Jensen (1939) est un économiste américain "spécialiste" de l'économie financière et professeur à Harvard. Le prix Jensen en finance d'entreprise et recherche en organisation est nommé en son honneur.

positifs ou nuls mais jamais négatifs.

C'est-à-dire

Définition 3.4. *Il y a absence d'opportunité d'arbitrage s'il n'existe pas de portefeuille θ tel que $V_0(\theta) \leq 0$ et $V_t(\theta) \geq 0$ avec une inégalité stricte au moins. $V_0(\theta)$ représentant ici la valeur du portefeuille à la période 0 et $V_t(\theta)$ celle du portefeuille à la période t .*

Remarque 3.2. Important

L'existence d'opportunité d'arbitrage sur un marché est incompatible avec l'équilibre de celui-ci. En effet, l'opportunité d'arbitrage déclenche une offre et une demande d'une amplitude incompatible avec l'équilibre. En revanche un marché exempt d'opportunité d'arbitrage n'est pas nécessairement en équilibre.

3.4 Le risque : théorie et concept

3.4.1 Un peu d'histoire

Afin de bien comprendre la gestion des risques et son évolution, il est indispensable de disposer de certains repères historiques [59].

- 1900 Thèse de Louis Bachelier "Théorie de la Spéculation".
- 1952 Parution de l'article "Portfolio selection" de Harry Markowitz dans Journal of Finance.
- 1964 William Sharpe invente le modèle CAPM.
- 1970 Synthèse des travaux sur l'efficience des marchés par Eugene Fama.
- 1973 Formule de valorisation d'une option européenne de Fisher Black et Myron Scholes.
- 1974 Etude de l'obligation risquée par Robert Merton.
- 1977 Modèles de taux de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross.
- 1992 Parution de l'article d'Heath, Jarrow et Morton dans Econometrica.
- 1994 RiskMetrics.

La naissance de la théorie financière est associée généralement aux travaux de Bachelier. Les années 30 marquent le début des recherches empiriques sur les prix des actifs avec la création de la Cowles Commission for Research in Economics en 1932 et celle de la revue Econometrica par Joseph Schumpeter en 1933. Ces recherches ont porté essentiellement sur la formation des prix, l'efficience du marché et la détection de stratégies profitables (en d'autres termes sur l'anticipation des cours des actions). Ce n'est que dans les années 50 que les chercheurs (Markowitz, Lintner, Sharpe, etc.) entreprennent

des travaux conséquents sur le risque. Ceux-ci aboutissent à la théorie moderne du choix de portefeuille basée sur les modèles CAPM et APT (Pour plus de détails, voir chapitre 4). L'année 1973 marque un tournant dans l'histoire financière pour deux raisons :

1. La première est la création du CBOE (Chicago Board Options Exchange) avec la mise en place de mécanismes d'une chambre de compensation (clearing house).
2. La seconde est la parution de la très célèbre formule de Black et Scholes pour valoriser une option Européenne.

3.4.2 Définition et Concept de risque

Le risque est considéré comme le vecteur directeur de tout choix que peut faire un investisseur, raison pour laquelle il occupe une importance et une attention de même niveau que la rentabilité ou plus. La théorie du risque a été développée par Frank Knight qui s'est intéressé à démontrer qu'il existe deux types de risques. Le premier type de risque est probabiliste et il peut être assuré tandis que le deuxième type de risque est celui de risque d'entreprise qui est non assuré car lié à la politique de cette dernière et non pas aux aléas.

Définition 3.5. *Le risque peut être défini comme le hasard lié à la variabilité de la rentabilité autour de son espérance. Il découle d'un événement préjudiciable et aléatoire qui ne répond à aucun facteur déterminé.*

Un investisseur est ainsi exposé aux risques avant tout parce qu'il ignore le comportement futur du retour sur investissement ⁴ (plus fréquemment noté dans la littérature ROE : Return On Equity). Le concept qui naît de cet effet de hasard est la volatilité qui définit le profil d'évolution aléatoire décrit par le ROE.

D'où la définition suivante :

Définition 3.6. *Le risque est défini par l'imprécision au niveau de la survenance du ROE, de sa réalisation, de la date de sa réalisation et son montant. Ainsi le risque d'un actif comme étant la probabilité de réaliser une rentabilité inférieure à un minimum acceptable. Plus cette probabilité est grande, plus l'actif est risqué.*

La mesure de risque se base ainsi donc sur l'analyse de la probabilité, de survenance d'un événement et de son estimation.

4. Le retour sur investissement est la variation de la valeur accumulée d'un actif ou d'un portefeuille (appréciation du prix et revenus des dividendes ou des intérêts) sur une période donnée.

3.4.3 Cohérence d'une mesure de risque

Soient Ω l'ensemble des valeurs ou des rendements possibles d'un actif financier. Une mesure de risque ρ est dite cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes [2] :

Propriété 3.6. Invariance par translation

$\forall c \in \mathbb{R}$ et $\forall X \in \Omega$ on a :

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c \quad (3.6)$$

Cette propriété signifie que pour toute augmentation respectivement diminution d'un montant c au portefeuille initial à travers l'actif de référence, la mesure de risque accroît respectivement décroît dans les mêmes proportions.

Propriété 3.7. Sous-additivité

Soient $X \in \Omega$ et $Y \in \Omega$, on a :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad (3.7)$$

Cette propriété illustre l'effet de réduction du risque à travers la diversification. Ce qui signifie que pour deux portefeuilles de risques séparés, le capital requis pour le portefeuille combiné est inférieur à la somme des capitaux requis pour chaque portefeuille.

Si $\rho(X+Y) = \rho(X)+\rho(Y)$ on parle d'additivité et dans ce cas l'effet de diversification est nul.

Propriété 3.8. Homogénéité

$\forall c \in \mathbb{R}$ et $\forall X \in \Omega$ on a :

$$\rho(cX) = c\rho(X) \quad (3.8)$$

Ainsi la multiplication de chaque risque d'un portefeuille par un scalaire positif multiplie la mesure de risque dans les mêmes proportions.

Propriété 3.9. Monotonie

Soient $X \in \Omega$ et $Y \in \Omega$, pour tous les risques on a :

$$\rho(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \quad (3.9)$$

Ce qui signifie que si le risque d'un portefeuille est supérieur à un autre alors respectivement le capital attendu du premier est plus grand.

3.5 Différents types de risque

D'une manière générale, on peut citer deux grands types de risques qui sont les risques non quantifiables et ceux quantifiables. Les risques dits non quantifiables sont des risques non mesurables pouvant engendrer des pertes financières importantes. Parmi les principaux risques appartenant à cette catégorie, on peut citer le risque légal, le risque opérationnel, et le risque médiatique.

Le risque légal intervient dans le cas où une entreprise effectue illégitimement des opérations financières avec une autre non habilitée à les effectuer. Le risque médiatique est dû à un événement qui entâche la confiance ou nuit à l'image de l'entreprise. Le risque opérationnel est le risque de pertes directes ou indirectes résultant d'une inadéquation ou d'une défaillance des systèmes internes, des personnes, ou provenant d'événements extérieurs.

Parmi les risques quantifiables, nous pouvons citer le risque de crédit et le risque de marché. Le risque de crédit, ou risque de défaut, survient lorsqu'une contrepartie ne peut ou ne veut pas remplir ses obligations contractuelles.

Le risque de marché quant à lui résulte des variations d'un ou de plusieurs facteurs du marché. Les principaux risques de marché sont :

- Le risque de change qui survient lorsque l'investisseur effectue des transactions dans une devise étrangère.
- Le risque de taux d'intérêt qui survient lorsque l'investisseur a des emprunteurs ou des prêteurs sur le marché. L'investisseur risque de voir des résultats défavorables grâce aux variations de taux d'intérêt.
- Le risque sur portefeuille d'actions dont l'évaluation du rendement dépend des fluctuations des actions dans le marché.

3.6 Analyse du risque

Dans cette section on abordera l'attitude des individus face au risque. Trois comportements sont ainsi à considérer. Pour les illustrer nous supposons un individu ayant une richesse initiale w_0 et détenant une loterie $\tilde{x} = L(h, -h; p_1, p_2)$; les valeurs $h > 0$ et $(-h)$ étant les issues se produisant aux probabilités respectives p_1 et p_2 . Sa richesse finale est notée :

$$\tilde{w}_f = w_0 + \tilde{x}$$

L'agent a le choix entre garder $w_0 + \tilde{x}$ ou alors obtenir de façon certaine $E(\tilde{w}_f)$ l'espérance de \tilde{w}_f .

- Si l'agent préfère obtenir de façon certaine l'espérance de sa richesse finale que la richesse finale, on dit que l'agent est **risquophobe**.

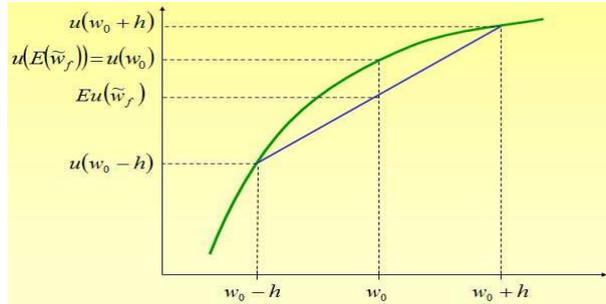


FIGURE 3.1 – Cas 1 : Agent risquophobe

$$E(\tilde{w}_f) \succ \tilde{w}_f \iff \mathbf{u}(E(\tilde{w}_f)) > E(\mathbf{u}(\tilde{w}_f)) \quad (3.10)$$

\succ étant l'opérateur pré-ordre : est préféré à

Nous constatons qu'on a l'allure d'une fonction concave (Voir figure 3.1).

- Si l'agent préfère garder sa richesse finale plutôt qu'obtenir de façon certaine l'espérance de sa richesse finale, on dit que l'agent est **risquophile**.

$$\tilde{w}_f \succ E(\tilde{w}_f) \iff E(\mathbf{u}(\tilde{w}_f)) > \mathbf{u}(E(\tilde{w}_f)) \quad (3.11)$$

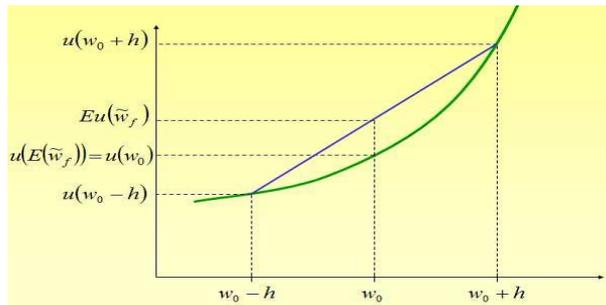


FIGURE 3.2 – Cas 2 : Agent risquophile

Ce qu'on constate dans ce cas est qu'on a l'allure d'une fonction convexe qui nous est aussi familier. (Voir figure 3.2).

- Et enfin si l'agent est indifférent entre avoir de façon certaine l'espérance de sa richesse finale et sa richesse finale, on dit que l'agent est **neutre par rapport au risque** (Voir figure 3.3).

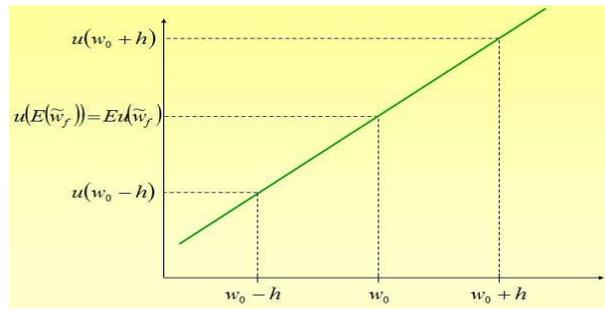


FIGURE 3.3 – Cas 3 : Agent neutre vis à vis du risque

$$E(\tilde{w}_f) \sim \tilde{w}_f \iff E(\mathbf{u}(\tilde{w}_f)) = \mathbf{u}(E(\tilde{w}_f)) \quad (3.12)$$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons, d'une manière synthétique, passé en revue l'essentiel des paramètres intervenant dans le choix d'un individu quand celui-ci doit le faire dans une totale incertitude.

Qui parle d'incertitude parle de risque d'où le choix dans un avenir incertain requiert une grande capacité d'anticipations rationnelles mais requiert aussi de l'efficience. La valeur actuelle nette, le taux de rentabilité interne, les fonctions d'utilité, le risque, l'arbitrage mais avant tout les valeurs mobilières sont autant de notions qui ont été présentées dans leur appréhension économique et mathématique.

Nous avons ainsi pris les prédispositions qui vont nous permettre de mieux aborder la revue de littérature de la théorie financière depuis le modèle espérance-variance de Markowitz.

Théorie financière : Revue de littérature

Sommaire

4.1	Introduction	59
4.2	Approche de Markowitz (1952)	60
4.3	Approche de Sharpe (1963-1964)	63
4.4	Approche de Markowitz et Perold (1981)	68
4.5	Approche de Lai (1991)	69
4.6	Le Modèle de Konno et Yamazaki (1991)	70
4.7	Le Modèle de Speranza (1993)	71
4.8	Modèle moyenne - semi-variances de Hamza et Janssen (1995)	72
4.9	Approche de Young (1998)	74
4.10	Approche basée sur la valeur à risque (2000)	75
4.11	Approche par semi-variances variables et intelligence artificielle de El Hachloufi (2013)	75
4.12	Conclusion	76

4.1 Introduction

En finance, l'optimisation de portefeuille d'actifs est depuis plusieurs dizaines d'années un sujet de grand intérêt. Dans un problème d'optimisation de portefeuille, l'objectif est de trouver la manière optimale d'investir un montant bien défini dans chaque actif d'un ensemble qu'on appelle marché financier. Chacune de ces différentes manières d'allouer des proportions d'un investissement entre ces actifs d'un marché, à travers une

combinaison linéaire, est appelée portefeuille. Ce qu'on désignera comme portefeuille optimal devrait procurer un meilleur rendement sans pour autant que le risque subi soit accentué.

Markowitz [47] a été le premier à introduire une approche (le modèle espérance-variance) pour résoudre ce type de problème d'optimisation de portefeuille de titres financiers en posant la variance des rendements observés autour de leur moyenne comme mesure de risque. Plusieurs critiques ont été faites à cette approche notamment au caractère quadratique de la fonction objectif et au calcul de la matrice de variance-covariance. Ce qui fait que c'est un modèle peu utilisé dans la pratique.

Pour simplifier ainsi les difficultés associées à la structure du modèle de Markowitz, plusieurs autres modèles alternatifs ont été proposés. Certains auteurs ont essayé de linéariser le problème de choix de portefeuille à l'image de Sharpe [64], [65] qui a élaboré le modèle à indice, le modèle de marché et le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF). Rudd et Rosenbeg [60] ont montré que le modèle de Markowitz dans sa formulation classique pourrait ne pas satisfaire au maximum un investisseur professionnel et proposent un management de portefeuille encore plus réaliste. Plus récemment, plusieurs modèles de programmation linéaire ont été développés pour la sélection de portefeuille. Konno et Yamazaki [42], Zenios et Kang [72] et Speranza [66] ont proposé le calcul du risque d'un portefeuille par l'utilisation de l'écart moyenne absolue. Ils ont aussi proposé une approche incluant le critère de risque asymétrique qui élimine principalement les difficultés associées au modèle d'optimisation quadratique. Avec l'apparition des modèles linéaires, Yoshimoto [70] a développé un système d'optimisation basé sur le critère espérance-variance. Hamza et Janssen [33] ont généralisé des modèles standards en conservant le couple risque-rendement comme idée de base et en proposant une nouvelle mesure de risque définie comme une combinaison convexe des deux semi-variances.

4.2 Approche de Markowitz (1952)

Harry Markowitz [47] a eu le premier, l'idée de mesurer la rentabilité d'un portefeuille par l'espérance de rendement et le risque par sa variance.

Le gestionnaire de portefeuille cherche toujours à maximiser le rendement pour un risque donné, ou à l'inverse minimiser le risque pour un rendement donné. Dans le cas d'une minimisation du risque, il est amené à sélectionner un portefeuille pour chaque rendement (espéré) objectif $\hat{\mu}$. Ainsi pour un ensemble de rendements objectifs possibles, il associera un ensemble de portefeuilles appelés *les portefeuilles efficients*. Dans un

repère orthonormé où nous représentons les rendements en ordonnée et le risque en abscisse, la *frontière des portefeuilles efficients* est la représentation de cet ensemble de couples rendement-risque efficients. Les principaux résultats de la théorie du portefeuille sur cette frontière seront présentés dans cette partie.

4.2.1 Le cas à n actifs

On suppose que tous les actifs financiers sont risqués. Pour chaque rendement objectif $\hat{\mu}$, le problème de sélection sera donc de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$P(\hat{\mu}) : \begin{cases} \min_{z_1, \dots, z_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i z_j \sigma_{ij} \\ s.c. \\ \sum_{i=1}^n z_i \bar{\mu}_i \geq \hat{\mu} \\ \sum_{i=1}^n z_i = 1 \\ z_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.1)$$

Si la matrice des covariances est

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

alors le problème (4.1) s'écrit sous forme matricielle :

$$P(\hat{\mu}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \mathbf{z}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{z} \\ s.c. \\ \bar{\mu} \cdot \mathbf{z} = \hat{\mu} \\ \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

avec σ est matrice des covariances, \mathbf{z} est le vecteur colonne des parts investies dans les différents actifs, $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1, $\hat{\mu}$ est le rendement exigé (rendement objectif) et $\bar{\mu}$ est le vecteur ligne des rendements espérés :

$$\bar{\mu} = [\bar{\mu}_1 \quad \dots \quad \bar{\mu}_i \quad \dots \quad \bar{\mu}_n]$$

Le problème (4.2) peut se réécrire comme suit :

$$P(\bar{\mu}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \sigma \cdot \mathbf{z} \\ s.c. \\ \bar{\mu} \cdot \mathbf{z} = \hat{\mu} \\ \mathbf{z}^\top \cdot \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce dernier problème, la variance est divisée par 2 uniquement pour ne pas avoir à conserver des constantes numériques dans les conditions de premier ordre du Lagrangien¹.

L'équation de la frontière efficiente est donnée par ?? :

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{C\hat{\mu}^2 - 2A\hat{\mu} + B}{D} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} A &= \bar{\mu} \sigma^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^\top \sigma^{-1} \bar{\mu}^\top \\ B &= \bar{\mu} \sigma^{-1} \bar{\mu}^\top \\ C &= \mathbf{1}^\top \sigma^{-1} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2.2 Les limites du modèle

L'approche moyenne-variance proposée par Markowitz reste peut employée dans la pratique à cause de plusieurs limites qui sont :

1. La charge de calcul : le déroulement de l'optimisation nécessite le calcul de $\frac{n(n+1)}{2}$ covariances, alors il est clair qu'à l'époque, ce programme d'optimisation nécessitait des ressources importantes en terme de matériel informatique.
2. Le caractère non linéaire (quadratique) de la mesure de risque utilisée par Markowitz est très sensible à la taille du programme d'optimisation utilisé pour la détermination de portefeuille optimal.
3. La perception du risque par l'investisseur n'est pas symétrique par rapport à la moyenne, alors que la variance prend en compte de la même manière les variations en-dessous et au-dessus de la rentabilité espérée.
4. La distribution de rendement : Markowitz suppose que le rendement des actifs suit la loi normale, cependant plusieurs études ont montré que ce résultat n'est

1. cf section 5.3.1 concernant le Lagrangien

pas toujours vérifié dans la réalité.

5. Le coût de transaction : Les coûts de transaction ne sont pas pris en compte dans l'approche de Markowitz, alors qu'ils sont incontrôlables dans la réalité.
6. La mesure de risque introduite par Markowitz ne permet de mesurer de manière explicite la perte éventuelle que pourra subir l'investisseur.

Il est intéressant de souligner que chacune de ces critiques adressées à cette approche a conduit à des tentatives de modification de cette approche pour accommoder ces critiques émises sur l'un ou l'autre des aspects.

4.3 Approche de Sharpe (1963-1964)

4.3.1 Modèle à indice simple de Sharpe

Sharpe [62] a été le premier qui a tenté de simplifier le modèle de Markowitz en développant les modèles à indice qui se base sur la simplification de la matrice de variances-covariances afin de réduire la charge de calcul.

Sharpe a proposé une diagonalisation de cette matrice en se basant sur le modèle à un seul indice en supposant que les fluctuations des rendements des actions peuvent être exprimés à l'aide d'une régression simple.

Autrement dit,

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_I + \varepsilon_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (4.5)$$

Où

- μ_i : Rendement du titre i
- μ_I : Taux de rendement de l'indice
- Les paramètres α_i et β_i sont obtenus par la régression simple comme suit :

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(\mu_i, \mu_I)}{\text{var}(\mu_I)} = \frac{\sigma_{iI}}{\sigma_I^2} \quad (4.6)$$

et

$$\alpha_i = E[\mu_i] - \beta_i E[\mu_I] = \bar{\mu}_i - \bar{\mu}_I \quad (4.7)$$

- ε est une variable aléatoire appelée bruit blanc qui vérifie les hypothèses suivant :
 - o $E[\varepsilon_i] = 0$ et $\sigma_{\varepsilon_i}^2 \neq 0$ pour $i=1, \dots, n$
 - o $\sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} = \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $\forall i \neq j$

$$\circ \sigma_{\varepsilon_i I} = \text{cov}(\varepsilon_i, \mu_I) = 0 \quad \text{pour } i=1, \dots, n$$

Le rendement de portefeuille devient :

$$\mu(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n z_i \mu_i = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i + \mu_I \left(\sum_{i=1}^n z_i \beta_i \right) + \sum_{i=1}^n z_i \varepsilon_i \quad (4.8)$$

Soit $z_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^n z_i \beta_i \right)$ il en résulte :

$$\mu(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i + z_{n+1} \mu_I + \sum_{i=1}^n z_i \varepsilon_i \quad (4.9)$$

Le rendement espéré est donné par :

$$E[\mu(\mathbf{z})] = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i + z_{n+1} E[\mu_I] \quad (4.10)$$

La variance du rendement est :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_{\varepsilon_i I}^2 + z_{n+1}^2 \sigma_I^2 \quad (4.11)$$

Donc on a besoin que de $(n+1)$ termes à estimer au lieu de $\frac{n(n+1)}{2}$ variances et covariances pour l'approche de Markowitz.

Le concept de l'approche de Markowitz est basé sur la diversification qui permet de réduire davantage le risque du portefeuille. Malheureusement on ne peut réduire complètement le risque en augmentant indéfiniment la taille du portefeuille.

Sharpe a montré que le risque d'un portefeuille quelconque peut être décomposé en deux parties : le risque diversifiable ou risque non systématique et le risque non diversifiable ou risque de marché.

4.3.2 Modèle de marché de Sharpe

Sharpe [63] a remplacé l'indice I par l'ensemble du marché M dans le modèle à indice simple. Dans ce cas, ce modèle porte le nom modèle de marché.

Le modèle de marché suppose une relation linéaire entre le rendement d'une action i et le rendement global du marché :

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M + \varepsilon_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

Où ε_i est une variable aléatoire définie comme dans le modèle à indice simple.

Les paramètres α_i et β_i sont obtenus par la régression simple comme suit :

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(\mu_i, \mu_M)}{\text{var}(\mu_M)} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \quad (4.13)$$

et

$$\alpha_i = E[\mu_i] - \beta_i E[\mu_M] = \bar{\mu}_i - \beta_i \bar{\mu}_M \quad (4.14)$$

Selon les hypothèses précédentes, il en résulte :

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \text{var}(\mu_i) = \text{var}(\alpha_i + \beta_i \mu_M + \varepsilon_i) = \text{var}(\beta_i \mu_M + \varepsilon_i) \\ &= \beta_i^2 \text{var}(\mu_M) + \text{var}(\varepsilon_i) = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

- Le coefficient bêta β_i est appelé le coefficient de risque systématique du titre i permet de mesurer le pourcentage des fluctuations du rendement de ce titre.
- Le risque d'une action peut ainsi être décomposé en deux parties :
 - $\beta_i^2 \sigma_M^2$: représente le risque systématique de l'action.
 - $\sigma_{\varepsilon_i}^2$: représente le risque non systématique.

Soit un portefeuille $\mathbf{z} = z_1, \dots, z_n$ composé de n titres où z_i représente la proportion du capital investie dans i^{eme} titre. Le rendement de chaque titre i s'écrit comme suit :

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M + \varepsilon_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

Le rendement global du portefeuille est :

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{z}) &= \sum_{i=1}^n z_i \mu_i = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i + \mu_M \sum_{i=1}^n z_i \beta_i + \sum_{i=1}^n z_i \varepsilon_i \\ &= \alpha_p + \beta_p \mu_M + \varepsilon(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

Le rendement du portefeuille est donné par :

$$E[\mu(\mathbf{z})] = \alpha_p + \beta_p E[\mu_M] = \alpha_p + \beta_p \bar{\mu}_M \quad (4.16)$$

où $\beta_p = \sum_{i=1}^n z_i \beta_i$ est appelé le coefficient bêta du portefeuille.

Le risque de portefeuille est :

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = \text{Var}[\mu(\mathbf{z})] &= \text{Var}(\alpha_p + \beta_p \mu_M + \varepsilon(\mathbf{z})) = \text{Var}[\beta_p \mu_M + \varepsilon(\mathbf{z})] \\ &= \text{Var}[\mu_M \beta_p] + \text{Var}[\varepsilon(\mathbf{z})] = \beta_p^2 \text{Var}[\mu_M] + \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n z_i \varepsilon_i\right] \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (4.17)$$

Supposons que $z_1 = z_2 = \dots = z_n = \frac{1}{n}$

Alors

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (4.18)$$

Posons $M = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_{\varepsilon_i}^2$ il en résulte que $0 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{\varepsilon_i}^2 \leq \frac{nM}{n^2} = \frac{M}{n}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_p^2) = \beta_p^2 \sigma_M^2$

Comme dans le cas d'un seul titre, le risque de portefeuille peut être décomposé en deux parties :

- $\beta_p^2 \sigma_M^2$: le risque systématique de portefeuille
- $\sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2$: le risque non systématique qui peut être éliminé en diversifiant le capital investi entre l'ensemble des actions.

Cette décomposition de risque est appelée l'effet de portefeuille ou l'effet de construction de portefeuille sur le risque, qui se décompose en deux éléments :

- L'effet Markowitz (ou effet des corrélations négatives)
- L'effet de diversification (ou effet des non-corrélations).

Considérons un portefeuille contenant n titres à pondération égale :

$$z_i = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Soit σ_{ij} la corrélation entre les rendements μ_i et μ_j des deux titres i et j .

- Si $\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ alors le risque de portefeuille sera :

$$Var[\mu(\mathbf{z})] = \sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_{ii} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (4.19)$$

Supposons que toutes les variances sont bornées, alors $\sigma_i^2 \leq M$ pour tout $i = 1, \dots, n$ Il en résulte que $Var[\mu(\mathbf{z})] \leq \frac{M}{n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} Var[\mu(\mathbf{z})] = 0$ Il s'agit de l'effet des non-corrélations.

- Par contre si $\sigma_{ij} \neq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n (i \neq j)$ alors le risque de portefeuille devient :

$$Var[\mu(\mathbf{z})] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{ij} \quad (4.20)$$

Pour n suffisamment grand, le risque de portefeuille devient approximativement :

$$Var[\mu(\mathbf{z})] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \sigma_{ij} \tag{4.21}$$

Or $\sigma_{ij} \leq \sigma_i \sigma_j \quad \forall i, j = 1, \dots, n \ (i \neq j)$ donc on aura $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \sigma_{ij} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \sigma_i \sigma_j \leq n^2 M^2$.

Posons $Cov_{moyenne} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \sigma_{ij}$.

Il en résulte que $\frac{n(n-1)}{n^2} Cov_{moyenne} \leq M^2$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} [Var[\mu(\mathbf{z})]] = \bar{\sigma}$ où $\bar{\sigma} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |Cov_{moyenne}|$

Donc le risque de portefeuille se décompose en deux parties :

1. Le risque diversifiable : la partie de risque qui est dû à l'effet de diversification et que l'on peut éliminer en augmentant la taille du portefeuille.
2. Le risque non-diversifiable (ou le risque de marché) : la partie de risque que l'on ne peut éliminer.

Remarque 4.1. *Il faut souligner que l'augmentation du nombre de titres au-delà d'un certain seuil ne permet pas de réduire le risque. La figure 4.1 montre bien cette situation :*

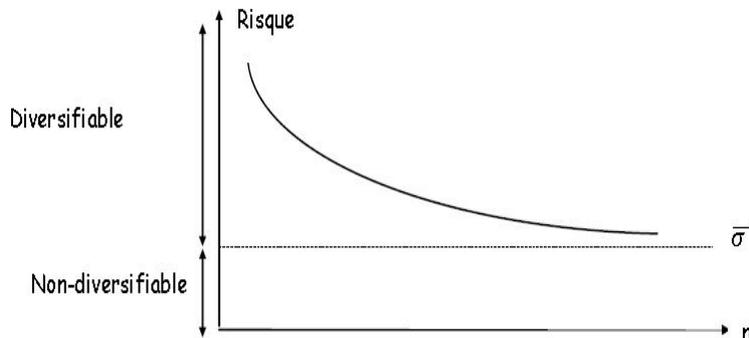


FIGURE 4.1 – Risque et Diversification

4.3.3 Modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF)

Suite à ses travaux concernant l'applicabilité de la matrice variancescovariances, Sharpe [64][65] a développé un nouveau modèle appelé le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) qui consiste à mesurer le degré de sensibilité du rendement d'un actif par rapport à celui du marché.

Le modèle d'équilibre des actifs financiers se base sur plusieurs hypothèses :

1. Tous les investisseurs font le choix de portefeuille selon le critère de moyenne-variance.
2. Le marché est supposé parfait :
 - Les dividendes et les gains de capitaux ne sont pas taxés
 - L'emprunt et le prêt des investisseurs se fait avec un taux pur sans influence de son niveau et le taux d'emprunt est égal au taux de prêt.
 - Aucun de coût de transaction
 - Les acheteurs et les vendeurs qui interviennent sur le marché n'ont pas d'influence sur les prix.
3. Tous les investisseurs ont la même période de l'investissement.
4. Tous les investisseurs prennent leurs décisions en même temps.
5. Tous les investisseurs détiennent leurs actifs pendant la même période.
6. Tous les investisseurs ont la même vision vis à vis les anticipations des performances futures des actifs.

Etant donné un portefeuille constitué de n actions de rendements μ_1, μ_2, \dots et μ_n et un actif sans risque de rendement μ_0 . Le rendement espéré de ce portefeuille est donné par :

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^n z_i \mu_i$$

où z_i représente la proportion investie dans l'action A_i pour $i = 1, \dots, n$

La relation qui caractérise le modèle d'équilibre des actifs financiers MEDAF est donnée par :

$$\bar{\mu}_i = \mu_0 + \beta(\bar{\mu}_M - \mu_0) \quad (4.22)$$

où :

- $\bar{\mu}_i$: le rendement espéré de l'action A_i
- $\bar{\mu}_M$: le rendement de portefeuille de marché
- σ_M^2 : le risque de portefeuille de marché
- $\beta = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$
- $\sigma_{iM} = \sum_{j=1}^n z_j \sigma_{ij}$

4.4 Approche de Markowitz et Perold (1981)

Le modèle à indice simple de Sharpe peut être généralisé à un modèle à plusieurs indices qui offre à l'investisseur la possibilité d'investir sur un marché international où

figure plusieurs indices boursiers notamment le marché européen , marché américain ou le marché asiatique.

Dans ce contexte, Markowitz et Perold [49] ont développé un modèle multiindiciels qui suppose qu'il y a une relation entre les titres sous la forme suivante :

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_{i1}F_1 + \dots + \beta_{iK}F_K + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.23)$$

où

- F_k représente le k^{eme} facteur aléatoire
- α_i et β_i sont des constantes
- ε_i est un bruit aléatoire de moyenne 0 et non corrélé avec F_k (pour tout $k = 1, \dots, K$)

Si $\sigma_i^2 = E[\varepsilon_i^2]$ et $\gamma_{rs} = cov[F_r, F_s]$ alors on obtient la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} z_i z_j = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 z_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K \gamma_{rs} \beta_{ir} \beta_{js} z_i z_j \quad (4.24)$$

Le programme d'optimisation est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 z_i^2 + \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K \gamma_{rs} \gamma_r \gamma_s \\ s.c. \\ \sum_{j=1}^n z_j E[\mu_j] \geq \hat{\mu}_0 \\ \sum_{j=1}^n \beta_{jk} z_j - \gamma_k = 0 \quad k = 1, \dots, K \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.25)$$

4.5 Approche de Lai (1991)

Afin d'améliorer la qualité d'optimisation, Lai [43] a proposé la programmation multicritère pour l'optimisation de portefeuille en prenant en considération le Skewness.

Selon Lai, étant donné un portefeuille $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ où z_i désigne la proportion du capital C_0 à investir par un investisseur dans les différents titres $i, i = 1, \dots, n$.

Le rendement et le rendement espéré de ce portefeuille sont donnés respectivement par :

$$\mu(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^n \mu_j z_j \quad (4.26)$$

et

$$\bar{\mu}(\mathbf{z}) = E[\mu(\mathbf{z})] = \sum_{j=1}^n E(\mu_j)z_j = \sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j z_j \quad (4.27)$$

Lai a proposé l'espace variance- unité $\{z, Var[\mu(\mathbf{z})] = 1\}$ pour l'optimisation de portefeuille. Selon cette hypothese, l'algorithme d'optimisation multicritère à résoudre s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \max\{\bar{\mu}(\mathbf{z})\} = \max\{\gamma[\mu(\mathbf{z})]\} \\ s.c. \\ Var[\mu(\mathbf{z})] = 1 \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.28)$$

Pour faire l'optimisation du portefeuille, Lai utilise les techniques de programmation polynomiale afin de résoudre le problème multicritère, et propose l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} \min\{(d_1)^{p_1} + (d_2)^{p_2}\} \\ s.c. \\ \bar{\mu}(\mathbf{z}) + d_1 = \bar{\mu}^* \\ \gamma(\mathbf{z}) + d_2 = \gamma^* \\ Var[\mu(\mathbf{z})] = 1 \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ d_1 \geq 0 \quad d_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

où

- μ^* : est la valeur optimale de l'objective $\mu(\mathbf{z})$ dans l'algorithme uni-critère,
- γ^* : est la valeur optimale de l'objective $\gamma(\mathbf{z})$ dans l'algorithme uni-critère,
- d_1 : est la variable positive représente l'écart entre $\mu(\mathbf{z})$ et μ^*
- d_2 : est la variable positive représente l'écart entre $\gamma(\mathbf{z})$ et γ^*
- p_i ($i = 1, 2$) : paramètre subjectif positif qui mesure le degré de préférence de l'investisseur entre les objectives.

4.6 Le Modèle de Konno et Yamazaki (1991)

Konno et Yamazaki [42] ont défini une fonction de risque $K(\mathbf{z})$ appelé écart moyen absolu du rendement du portefeuille par rapport à sa moyenne en remplaçant la fonction quadratique de Markowitz par la fonction K afin de rendre l'algorithme d'optimisation linéaire pour l'optimisation de portefeuille.

Ce modèle est exprimé comme suit :

$$K(\mathbf{z}) = E[|\mu(\mathbf{z}) - \bar{\mu}(\mathbf{z})|] = E\left[\left|\sum_{j=1}^n \mu_j z_j - E\left[\sum_{j=1}^n \mu_j z_j\right]\right|\right] \quad (4.30)$$

Konno et Yamazaki ont illustré que sous l'hypothèse de la normalité des rendements des actifs, la mesure de risque $K(\mathbf{z})$ est équivalente à celle de Markowitz.

L'algorithme d'optimisation de portefeuille proposé par Konno et Yamazaki est exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \max \left\{ K(\mathbf{z}) = E\left[\left|\sum_{j=1}^n \mu_j z_j - E\left[\sum_{j=1}^n \mu_j z_j\right]\right|\right] \right\} \\ \text{s.c.} \\ \sum_{j=1}^n E[\mu_j] z_j \geq \hat{\mu} \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.31)$$

4.7 Le Modèle de Speranza (1993)

Speranza [66] a proposé une mesure de risque sous forme d'une combinaison linéaire entre l'écart absolu en-dessous de la moyenne et l'écart absolu au-dessus de la moyenne, et ce dans un but d'amélioration du modèle de Konno et Yamazaki.

Cette mesure de risque est définie comme suit :

$$S(\mathbf{z}) = \alpha E\left[-\min\left(0, \sum_{j=1}^n \mu_j z_j - E\left[\sum_{j=1}^n \mu_j z_j\right]\right)\right] + \beta E\left[-\max\left(0, \sum_{j=1}^n \mu_j z_j - E\left[\sum_{j=1}^n \mu_j z_j\right]\right)\right] \quad (4.32)$$

où α et β sont les deux paramètres qui représentent les poids attribués à la fonction de risque permettant de mesurer le degré d'aversion au risque de l'investisseur.

Ce modèle peut prendre plusieurs formes selon les valeurs des paramètres α et β . Speranza a choisi $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ afin de rendre son modèle plus efficace, dans ce cas la mesure de risque devient :

$$S(\mathbf{z}) = E\left[-\min\left(0, \sum_{j=1}^n \mu_j z_j - E\left[\sum_{j=1}^n \mu_j z_j\right]\right)\right] \quad (4.33)$$

Alors l'algorithme d'optimisation est comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T \left\{ -\alpha \min \left(0, \sum_{j=1}^n (\mu_{jt} - \mu_j^*) z_j \right) \right\} \\ s.c. \\ \sum_{j=1}^n \mu_j^* z_j \geq \hat{\mu} \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.34)$$

où $\mu_j^* = E(\mu_j)$ et T la période

4.8 Modèle moyenne - semi-variances de Hamza et Janssen (1995)

Lorsqu'il y a une asymétrie de l'information dans les données utilisées, les mesures de risque précédent (variance, écart absolu) sont symétriques, elles ne permettent pas de prendre en considération l'asymétrie de données.

Pour remédier à ce problème, Hamza et Janssen ont proposé une mesure de risque définie par une combinaison convexe des deux semi-variances de rendement de portefeuille par rapport à sa rentabilité espérée [33] [34].

Ces deux semi-variances de rendement du portefeuille sont définies comme suit :

La première est celle qui mesure la variance en dessous de la moyenne :

$$E \left\{ \min \left(0, \mu(\mathbf{z}) - E[\mu(\mathbf{z})] \right) \right\}^2 \quad (4.35)$$

La deuxième est celle qui mesure la variance au-dessus de la moyenne :

$$E \left\{ \max \left(0, \mu(\mathbf{z}) - E[\mu(\mathbf{z})] \right) \right\}^2 \quad (4.36)$$

A partir de ces deux expressions, une nouvelle fonction est définie pour mesurer le risque exprimé sous forme d'une combinaison convexe de ces deux semi-variances comme suit :

$$N_{(\alpha,\beta)} = \alpha E \left\{ \min \left(0, \mu(\mathbf{z}) - E[\mu(\mathbf{z})] \right) \right\}^2 + \beta E \left\{ \max \left(0, \mu(\mathbf{z}) - E[\mu(\mathbf{z})] \right) \right\}^2 \quad (4.37)$$

où α et β sont deux paramètres positifs indiquant le degré d'aversion au risque de l'investisseur.

Alors l'algorithme d'optimisation est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \left\{ N_{(\alpha,\beta)}^*(\mathbf{z}) \right\} \\ s.c. \\ \sum_{j=1}^n \mu_j^* z_j \geq \hat{\mu} \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.38)$$

où $\mu_j^* = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mu_{jt}$ $j = 1, \dots, n$ et

$$N_{(\alpha,\beta)}^*(\mathbf{z}) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T \left\{ \alpha \left(\sum_{j=1}^n (\mu_{jt} - \mu_j^*) z_j \right)^2 + \beta \left(\sum_{j=1}^n (\mu_{jt} - \mu_j^*) z_j \right)^2 \right\} \quad (4.39)$$

Afin de simplifier cet algorithme d'optimisation, Hamza et Janssen ont proposé une représentation plus simple en introduisant les variables auxiliaires suivantes :

$$u_t = - \min \left(0, \sum_{j=1}^n (\mu_{jt} - \mu_j^*) z_j \right) \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (4.40)$$

et

$$v_t = \max \left(0, \sum_{j=1}^n (\mu_{jt} - \mu_j^*) z_j \right) \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (4.41)$$

L'algorithme d'optimisation précédent devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left\{ \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\alpha u_t^2 + \beta v_t^2) \right\} \\ s.c. \\ \sum_{j=1}^n \mu_j^* z_j \geq \hat{\mu} \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ \sum_{j=1}^n (\mu_{jt} - \mu_j^*) z_j = v_j - u_j \quad t = 1, \dots, T \\ v_j u_j = 0 \quad t = 1, \dots, T \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ u_j \geq 0, v_j \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \end{array} \right. \quad (4.42)$$

4.9 Approche de Young (1998)

Young [71] a proposé un critère appelé "minimax" pour mesurer le risque afin d'optimiser un portefeuille d'actions en se basant sur un ensemble de données historiques de longueur T .

Dans ce cadre il a utilisé les notations suivantes :

- $\{\mu_{jt} \text{ avec } j = 1, \dots, n \ t = 1, \dots, T\}$: l'ensemble des rendements historiques.
- $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mu_{jt}$: rendement espéré du titre $j = 1, \dots, n$
- $\sum_{j=1}^n z_j \mu_{jt}$: rendement de portefeuille à l'instant t
- $\sum_{j=1}^n z_j \mu_j^*$: rendement espéré de portefeuille,
- $\hat{\mu}$: rendement minimum souhaité par l'investisseur.

En se basant sur le critère "minimax", l'algorithme d'optimisation de portefeuille est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{(z_j)_{1 \leq j \leq n}} \min_{t=1, \dots, T} \left[\sum_{j=1}^n z_j \mu_{jt} \right] \\ \text{s.c.} \\ \sum_{j=1}^n z_j \mu_j^* \geq \hat{\mu} \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.43)$$

Cet algorithme d'optimisation est équivalent au programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\varphi, \mathbf{z}} \varphi \\ \text{s.c.} \\ \sum_{j=1}^n z_j \mu_{jt} - \varphi \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \\ \sum_{j=1}^n z_j \mu_j^* \geq \hat{\mu} \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Une expression équivalente à l'algorithme précédent, consiste à maximiser le rendement espéré comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathbf{z}} \sum_{j=1}^n z_j \mu_j^* \\ \text{s.c.} \\ \sum_{j=1}^n z_j \mu_{jt} \geq \rho \\ \sum_{j=1}^n z_j = 1 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.45)$$

avec ρ le rendement objectif.

4.10 Approche basée sur la valeur à risque (2000)

Toutes les mesures précédentes utilisées dans les différents modèles pour optimiser un portefeuille d'actifs financiers ne permettent pas de calculer de manière explicite la perte que pourrait subir un investisseur individuel ou une institution financière (établissement de crédit, banque, compagnie de l'assurance société cotée en bourse,...), d'où la naissance d'une nouvelle mesure de risque appelée valeur à risque (Value at Risk) [40] permettant de calculer la perte probable de manière explicite, rendue publique pour la première fois par la géante banque américaine J.P.Morgan en 1995 et publiée sous forme des travaux académiques en début de l'année 2000, [35], [36].

$$\begin{cases} \min \{VaR_\alpha\} \\ s.c. \\ \sum_{j=1}^n z_j V_j \geq V_0 \\ \sum_{j=1}^n z_j = C_0 \\ z_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.46)$$

où V_0 est la valeur du portefeuille attendue par l'investisseur et C_0 le capital investi.

4.11 Approche par semi-variances variables et intelligence artificielle de El Hachloufi (2013)

Les modèles construits pour minimiser la mesure de risque semi-variance (MRSV), supposent que les paramètres de cette dernière sont constants et agissent seulement sur les proportions. El Hachloufi [25] a considéré que les paramètres de risque mesurés par la combinaison convexe des deux semi-variances, ainsi que les proportions du portefeuille, sont variables et a développé un algorithme dynamique afin de déterminer simultanément et d'une façon dynamique les proportions et les paramètres de risque (MRSV) conduisant au choix optimal du portefeuille. Cette approche porte essentiellement sur l'utilisation de l'outil statistique et les techniques de l'intelligence artificielle.

En effet les modèles d'optimisation classiques (vus dans les sections précédentes) agissent soit sur le rendement (en le maximisant pour un risque donné) ou sur le risque (en le minimisant pour un rendement donné), afin de choisir un portefeuille optimal d'actifs financiers, mais ils n'agissent pas sur les deux en même temps d'une manière

dynamique. Cette démarche, d'ailleurs plus réaliste, n'est que peu entamée dans la littérature.

Ces modèles visent à travers l'optimisation, à déterminer les proportions du capital investies dans un portefeuille qui rendent optimal cet investissement. Cependant, ces méthodes ne s'appliquent pas sur une partie ou un ensemble restreint d'actifs financiers de ce portefeuille pour atteindre le même but. Une démarche en effet très rarement développée dans la littérature et qui est traitée dans les travaux de El Hachloufi qui a extrait à partir d'un portefeuille, appelé portefeuille initial, un ensemble d'actifs financiers, appelé sous portefeuille. Ces derniers actifs sont pertinents, dans la mesure où ils donnent lieu à un rendement plus élevé et un risque plus bas par rapport à celui du portefeuille initial, ce qui permet d'obtenir un sous-portefeuille d'actifs financiers optimal d'une taille réduite par rapport au portefeuille initial. Ce procédé conduit à un surplus de gain financier en termes de coût et une performance à la réduction de la charge de calcul.

4.12 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté tous les modèles qui ont marqué l'histoire de la théorie du portefeuille depuis ces débuts en 1952 avec les travaux de Markowitz jusqu'à l'introduction des techniques avancées d'Intelligence artificielles qui lui ont donné une autre allure.

Dans les chapitres suivants nous allons introduire l'objet de nos recherches basées sur l'optimisation de portefeuille par approche de sous-portefeuilles optimaux. Et ainsi par la suite nous allons appliquer ces résultats à des titres de la Bourse Régionale des Valeurs Mobilières à travers la constitution de sous-portefeuilles optimaux et le traçage des frontières efficientes associées.

Deuxième partie

Sélection de sous-portefeuilles optimaux : Utilisation du PER

Sélection dynamique de sous-portefeuilles optimaux avec le PER ajusté

Sommaire

5.1	Introduction	78
5.2	Rappels sur quelques éléments d'Algèbre	79
5.3	Rappel sur l'optimisation sous contraintes d'égalité	82
5.4	Rappel sur quelques éléments de théorie de portefeuille	85
5.5	Problème d'optimisation et de sélection de sous-portefeuilles avec le PER ajusté	88
5.6	Conclusion	91

5.1 Introduction

Dans un problème de sélection de portefeuille, parmi plusieurs titres financiers, nous avons comme objectif de trouver la manière optimale d'investir un montant bien défini dans chacun de ces titres. Chacune de ces différentes manières d'allouer des proportions de notre investissement entre ces titres, à travers une combinaison linéaire, est appelée portefeuille. Markowitz [47] a été le premier à introduire une approche (le modèle espérance-variance) pour résoudre ce type de problème d'optimisation de portefeuille de titres financiers en posant la variance des rendements comme mesure de risque. Les portefeuilles offrant un risque minimal pour un niveau de rendement donné forment ce qui est nommé la frontière efficiente. Ainsi pour n'importe quel niveau de rendement désiré, cette frontière efficiente donne la meilleure manière d'investir notre capital. Plu-

sieurs critiques ont été faites à cette approche notamment au caractère quadratique de la fonction objectif et au calcul de la matrice de variance-covariance. Ainsi plusieurs autres modèles alternatifs (cf chapitre 4) ont été proposés pour simplifier les difficultés associées à ce modèle.

Malgré les brillantes avancées à la modélisation financière, nous utiliserons dans ce chapitre ce modèle de base de Markowitz auquel nous allons adjoindre une nouvelle contrainte liée au PER (Price-Earning-Ratio) et fixant un seuil minimal pour chacun des rendements des titres devant composer le portefeuille. Cette contrainte, très utile dans la pratique [3], [56] et dont nous voulons étudier l'impact, devrait nous conduire, pour un portefeuille initial, à dresser des sous-portefeuilles composés de moins de titres et procurant pour un risque minimal, le même niveau de rendement que le portefeuille initial.

La première section de ce chapitre est consacré à des rappels sur quelques éléments d'Algèbre. La section suivante présente quelques éléments de rappel sur l'optimisation sous contraintes [24]. Quelques éléments de théorie de portefeuille seront définis dans la troisième section et enfin la dernière section portera sur l'optimisation selon l'approche par les sous-portefeuilles

5.2 Rappels sur quelques éléments d'Algèbre

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables (z_1, z_2, \dots, z_n) à valeurs réelles dont l'ensemble de définition E constitue un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On supposera toujours que f est continue et deux fois différentiable.

On note f'_i la dérivée partielle de f par rapport à z_i ($f'_i = \frac{\partial f(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_i}$) et f''_{ij} la dérivée croisée de f par rapport à z_i et z_j ($f''_{ij} = \frac{\partial^2 f(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_i \partial z_j}$)

5.2.1 Définitions préliminaires

5.2.1.1 Mineurs principaux d'une matrice

Définition 5.1. Soit M une matrice carrée symétrique de dimension (n, n) . Un mineur principal d'ordre k est le déterminant de la sous-matrice de M d'ordre k obtenue en supprimant $n - k$ lignes et les $n - k$ colonnes correspondantes dans M .

Exemple 5.1. Soit $M = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}$.

– Les trois mineurs principaux d'ordre 1 de M sont z_{11} , z_{22} , et z_{33} .

- Les trois mineurs principaux d'ordre 2 de M sont : $\begin{vmatrix} z_{22} & z_{23} \\ z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} z_{11} & z_{13} \\ z_{31} & z_{33} \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}$
- Le mineur principal d'ordre 3 de M est : $\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}$

5.2.1.2 Mineurs principaux diagonaux d'une matrice

Définition 5.2. Soit M une matrice carrée symétrique de dimension n . Le mineur principal diagonal d'ordre k (noté D_k) de la matrice M est le déterminant de la matrice de taille (k, k) obtenue en éliminant les $n - k$ dernières lignes et $n - k$ dernières colonnes de la matrice M .

Proposition 5.1. Une matrice carrée d'ordre n admet n mineurs principaux diagonaux.

Remarque 5.1. Le mineur principal diagonal d'ordre k d'une matrice est l'un de ses mineurs principaux d'ordre k .

Exemple 5.2. Soit $M = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}$.

- Le mineur principal diagonal d'ordre 1 de M est z_{11} .
- Le mineur principal diagonal d'ordre 2 de M est : $\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}$.
- Le mineur principal diagonal d'ordre 3 de M est : $\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}$

5.2.1.3 Matrice hessienne

Définition 5.3. On appelle matrice hessienne H_f de f la matrice des dérivées secondes de f évaluées au point (z_1, z_2, \dots, z_n) :

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & \cdots & f''_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Proposition 5.2. On a $f''_{ij} = f''_{ji}, \forall (i, j)$, donc la matrice hessienne de f est une matrice symétrique d'ordre n .

5.2.1.4 Matrice hessienne bordée

Définition 5.4. On appelle matrice hessienne bordée \overline{H}_f de f la matrice des dérivées secondes de f , bordée par les dérivées premières de f :

$$\overline{H}_f = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & f'_1 & f'_2 & \dots & f'_n \\ \hline f'_1 & f''_{11} & f''_{12} & \dots & f''_{1n} \\ f'_2 & f''_{21} & f''_{22} & \dots & f''_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f'_n & f''_{n1} & f''_{n2} & \dots & f''_{nn} \end{array} \right) \quad (5.2)$$

5.2.1.5 Matrice jacobienne

Soit $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ une fonction définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . A tout vecteur $\tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, la fonction F associe le vecteur de fonctions $(f_1(\tilde{z}), f_2(\tilde{z}), \dots, f_m(\tilde{z}))$.

Définition 5.5. On appelle matrice jacobienne de F la matrice de dimension (m, n) $J_F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ des dérivées partielles des m fonctions qui composent F :

$$J_F(z_1, z_2, \dots, z_n) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(\tilde{z}) & \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(\tilde{z}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(\tilde{z}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(\tilde{z}) & \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(\tilde{z}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n}(\tilde{z}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1}(\tilde{z}) & \frac{\partial f_m}{\partial z_2}(\tilde{z}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n}(\tilde{z}) \end{array} \right) \quad (5.3)$$

5.2.2 Matrices définies positives - Matrice définies négatives

Soit M une matrice carrée symétrique. Soit Z un vecteur colonne quelconque et on note Z^t sa transposée.

5.2.2.1 Matrice définie positive - Matrice définie négative

Définition 5.6. M est dite définie positive (respectivement définie négative) si et seulement si :

$$Z^t M Z > 0 \text{ (respectivement } < 0) \quad \forall Z \neq 0 \quad (5.4)$$

Remarque 5.2. Les éléments diagonaux z_{ii} d'une matrice définie positive (respectivement définie négative) sont tous > 0 (respectivement < 0).

5.2.2.2 Matrice semi-définie positive - Matrice semi-définie négative

Définition 5.7. Une matrice M est dite semi-définie positive (respectivement semi-définie négative) si et seulement si :

$$Z^t M Z \geq 0 \text{ (respectivement } \leq 0) \quad \forall Z \quad (5.5)$$

Remarque 5.3. Les éléments diagonaux z_{ii} d'une matrice semi-définie positive (respectivement négative) sont tous ≥ 0 (respectivement ≤ 0).

5.2.2.3 Caractérisation de matrice (semi) définie positive (négative)

- M définie positive \Leftrightarrow ses n mineurs principaux diagonaux D_k sont > 0 .
- M semi-définie positive \Leftrightarrow tous ses mineurs principaux (et pas seulement diagonaux!) D_k sont ≥ 0 .
- M définie négative \Leftrightarrow ses n mineurs principaux diagonaux D_k sont tels que $(-1)^k D_k > 0$.
- M semi-définie positive \Leftrightarrow tous ses mineurs principaux D_k (et pas seulement diagonaux!) sont tels que $(-1)^k D_k > 0$.

5.3 Rappel sur l'optimisation sous contraintes d'égalité

Nous envisageons dans cette section l'optimisation d'une fonction f à n variables sous m contraintes de la forme : $g_j(z_1, z_2, \dots, z_n) = c_j$, avec $j = 1, \dots, m$.

5.3.1 Le Lagrangien

On considère le programme de maximisation \mathcal{P} suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \max_{\tilde{z}} f(\tilde{z}) \\ \text{s.c.} \\ g_j(\tilde{z}) = c_j \quad \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (5.6)$$

Définition 5.8. On appelle Lagrangien et on le note L , la fonction suivante :

$$L(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = f(\tilde{z}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j(\tilde{z}) - c_j) \quad (5.7)$$

Où les variables λ_j sont appelées multiplicateurs de Lagrange associés aux j contraintes et $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

5.3.2 Conditions de qualification des contraintes

Proposition 5.3. On utilise le Lagrangien dans la résolution d'un programme d'optimisation sous plusieurs contraintes sous forme d'équation, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. Les fonctions contraintes g_j sont toutes linéaires.
2. La matrice jacobienne des fonctions contraintes g_j , $j = 1, \dots, m$ notée J_G et de taille (m, n) est de rang m lorsqu'elle est évaluée à l'optimum \tilde{z}^* .

5.3.3 Conditions du premier ordre

On suppose que la contrainte de qualification est vérifiée. Si le vecteur $\tilde{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ est une solution du programme de maximisation (\mathcal{P}) , alors il existe un unique λ^* tel que \tilde{z}^* vérifie les $n + m$ conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\tilde{z}^*, \lambda^*)}{\partial z_i} = 0 \\ \frac{\partial L(\tilde{z}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_j} = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\tilde{z}^*)}{\partial z_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \cdot \frac{\partial g_j(\tilde{z}^*)}{\partial z_i} = 0 & \forall i = 1, \dots, n \\ g_j(\tilde{z}^*) = c_j & \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (5.9)$$

5.3.4 Matrice hessienne bordée du Lagrangien

Définition 5.9. On appelle matrice hessienne bordée du Lagrangien \bar{H}_L dans le cas de m contraintes la matrice hessienne du Lagrangien bordée par les dérivées partielles premières des m fonctions contraintes g_j évaluée au point \tilde{z} :

$$\bar{H}_L(\tilde{z}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial z_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \frac{\partial g_m}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial z_n} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z_1 \partial z_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial z_1 \partial z_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial z_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial z_2 \partial z_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial g_1}{\partial z_n} & \frac{\partial g_2}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial z_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial z_1 \partial z_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial z_2 \partial z_n} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial z_n^2} \end{array} \right) \quad (5.10)$$

Proposition 5.4. \bar{H}_L est une matrice symétrique d'ordre $n + m$.

5.3.5 Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum local :

Supposons qu'il existe un \tilde{z}^* qui vérifie les CPO.

- Les $n - m$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $\bar{H}_L(\tilde{z}^*, \lambda^*)$ évaluée à l'optimum sont alternativement > 0 et < 0 , le dernier d'entre eux (D_{m+n}) étant de même signe que $(-1)^n \Rightarrow \tilde{z}^*$ est un maximum local.
- Les $n - m$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $\bar{H}_L(\tilde{z}^*, \lambda^*)$ évaluée à l'optimum sont tous strictement de même signe que $(-1)^m \Rightarrow \tilde{z}^*$ est un minimum local.

5.3.6 Conditions suffisantes du second ordre pour un optimum global

Supposons qu'il existe un \tilde{z}^* qui vérifie les CPO. Alors :

- Le Lagrangien L est une fonction concave (En particulier dans le cas où f est concave et les $\lambda_j^* g_j$ sont convexes) $\Rightarrow \tilde{z}^*$ est un maximum global.
- Le Lagrangien L est une fonction convexe (En particulier dans le cas où f est convexe et les $\lambda_j^* g_j$ sont concaves) $\Rightarrow \tilde{z}^*$ est un minimum global.

5.4 Rappel sur quelques éléments de théorie de portefeuille

5.4.1 Rendement, PER et sous-portefeuille

Définition 5.10. *Le rendement obtenu au moment t à travers l'investissement dans une action est donné par la différence de son cours au moment t augmenté des dividendes reçus sur la période $[t - 1, t]$ et de son cours au moment $t - 1$, divisé par le cours au moment $t - 1$:*

$$\mu_{it} = \frac{(c_t + d_t) - c_{t-1}}{c_{t-1}} \quad (5.11)$$

où :

c_t : Le cours de l'action i à la fin de la période t .

d_t : Le dividende reçu à la fin de la période.

Définition 5.11. *Le PER (Price Earning Ratio c'est à dire le rapport prix/gain) d'une action mesure le nombre d'années qu'il faut pour récupérer le montant investi s'il advenait que ce gain soit constant et il évalue par là même la cherté d'un titre par rapport aux prix des titres de sociétés du même secteur (plus le PER est faible, plus l'action est considérée comme bon marché). Il peut être interprété comme un rendement inversé selon Beaver et al. [5] et Penman [56] :*

$$p_i = \frac{1}{\mu_{it}} \quad (5.12)$$

où :

p_i : Le PER de l'action i

μ_{it} : Le rendement de l'action i au moment t .

Cependant le rendement réel peut être différent de celui obtenu après étude du PER du fait par exemple d'une politique de croissance de l'entreprise en question qui choisit de réinvestir au lieu d'une distribution totale sous forme de dividende. Dans ce cas on

parlera de PER ajusté pour désigner le PER intégrant les réorientations d'une partie des dividendes vers les réserves de l'entreprise. Dans le cas de la BRVM, ce PER ajusté est le plus souvent disponible sur les bulletins officiels de la cote (BOC) et est différent du PER brut renvoyant à l'inverse du rendement. Ce PER ajusté est aussi arrondi la plupart du temps de sorte qu'on ait $p_i \in \mathbb{N}^*$ pour mieux faciliter la suivie de l'indice.

Définition 5.12. *Le rendement espéré d'une action pour la période T est :*

$$\bar{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mu_{it} \quad (5.13)$$

Définition 5.13. *Le rendement espéré $\bar{\mu}_p$ d'un portefeuille composé de n actions de rendement espéré $\bar{\mu}_i$ est d'après Markowitz [47] :*

$$\bar{\mu}_p = \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \bar{\mu}_i \quad (5.14)$$

où $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ sont les parts de capital que l'investisseur place respectivement dans les actions i ($i = 1, \dots, n$).

Définition 5.14. *Nous appellerons sous-portefeuille un portefeuille de k actifs constitué à partir d'un portefeuille initial de n actifs ($k < n$).*

5.4.2 Risque d'un portefeuille

Le risque d'un titre financier désigne l'incertitude portant sur la valeur de ce titre à une date future. La variance, l'écart absolu moyen, la sémi-variance, la VaR (Valeur à Risque) et la CVaR sont des moyens de quantification du risque.

Le risque d'un portefeuille est mesuré par l'un des éléments cités précédemment. Il dépend de trois facteurs que sont :

- Le risque de chaque titre inclu dans le portefeuille,
- Le degré d'indépendance des variations de capitaux propres,
- Le nombre d'actions composant le portefeuille.

Pour un portefeuille de n actions, en supposant comme mesure de risque, la variance, Markowitz [47] établit l'expression suivante

$$\sigma^2(\bar{\mu}_p) = \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i^2 \sigma^2(\bar{\mu}_i) + 2 \sum_{i \neq j} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_j \text{cov}(\bar{\mu}_i, \bar{\mu}_j) \quad (5.15)$$

5.4.3 Frontière efficiente - Convergence de frontières efficientes

5.4.3.1 Frontière efficiente

Définition 5.15. *Dans un repère orthonormé où nous représentons le rendement en ordonnée et le risque en abscisse, l'objectif du gestionnaire de portefeuille est de maximiser son rendement pour un risque donné ou inversement de minimiser le risque pour un rendement donné. Tout portefeuille est défini par la donnée du couple risque-rendement correspondant et la frontière efficiente est la représentation de cet ensemble de couples risque-rendement optimaux (efficients) ou portefeuilles efficients.*

Nous introduisons les notions de frontières efficientes convergentes et celles équivalentes.

5.4.3.2 Convergence et équivalence de frontières efficientes

Soient deux ensembles de portefeuilles composés à partir respectivement de m et n actions d'un marché ($m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$) et notons f_m et f_n les frontières efficientes associées respectivement à chacune de ces compositions. P_m (respectivement P_n) est un portefeuille constitué à partir des m (respectivement n) actions.

Définition 5.16. *f_m et f_n convergent vers la même valeur si à partir d'un certain niveau de risque, f_m coïncide avec f_n , c'est à dire qu'il existe σ_0 strictement positif, tel qu'à un même niveau de risque supérieur à σ_0 , les rendements optimaux correspondant à chacune des deux différentes compositions de portefeuilles tendent vers la même valeur.*

$$\begin{aligned} \exists \sigma_0 > 0, \forall \left(\sigma(P_m), \bar{\mu}(P_m) \right) \in f_m, \left(\sigma(P_n), \bar{\mu}(P_n) \right) \in f_n, \quad \sigma(P_m) \geq \sigma_0, \sigma(P_n) \geq \sigma_0 \\ \text{alors} \quad \sigma(P_m) = \sigma(P_n) \iff \bar{\mu}(P_m) = \bar{\mu}(P_n) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Définition 5.17. *f_m équivaut à f_n si f_m et f_n converge vers la même valeur à tout niveau de risque où les portefeuilles efficients sont définis, c'est à dire qu'à un même niveau de risque, les rendements optimaux correspondant à chacune des deux différentes compositions de portefeuilles tendent vers la même valeur.*

$$\begin{aligned} \forall \left(\sigma(P_m), \bar{\mu}(P_m) \right) \in f_m, \left(\sigma(P_n), \bar{\mu}(P_n) \right) \in f_n, \\ \sigma(P_m) = \sigma(P_n) \iff \bar{\mu}(P_m) = \bar{\mu}(P_n) \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.5 Problème d'optimisation et de sélection de sous-portefeuilles avec le PER ajusté

5.5.1 Formulation mathématique du problème

Nous définissons notre problème d'optimisation de sous-portefeuilles de la façon suivante pour $k < n$ (n nombre total d'actions du marché) :

$$P(\hat{\mu}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} \\ s/c : \\ p_i \leq \theta \quad i = 1, \dots, n, \theta \in \mathbb{N}^* \\ \bar{\mu} \cdot \mathbf{z} = \hat{\mu} \\ \mathbf{z}^\top \cdot \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

avec :

- p_i est le PER de l'action i
- θ le nombre d'années exigé
- k désigne le nombre d'actions composant le sous portefeuille, c'est à dire le nombre d'actions i tel que $p_i \leq \theta$.
- $\tilde{\sigma}$ est la matrice des covariances des k actions composant les sous-portefeuilles,
- \mathbf{z} est le vecteur colonne des parts investies dans le sous portefeuille,
- $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1,
- $\hat{\mu}$ est le rendement exigé,
- $\bar{\mu}$ est le vecteur ligne des rendements espérés : $\bar{\mu} = [\bar{\mu}_1 \quad \dots \quad \bar{\mu}_i \quad \dots \quad \bar{\mu}_k]$.

5.5.2 Résolution du problème

La résolution de ce problème exigerait de travailler avec $k + 2$ multiplicateurs de Lagrange et la fonction de lagrange associée au problème $P(\hat{\mu})$ s'écrit :

$$L(\mathbf{z}, \lambda, \gamma, \alpha_i, \dots, \alpha_k) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - \lambda(\bar{\mu} \mathbf{z} - \hat{\mu}) - \gamma(\mathbf{1}^\top \cdot \mathbf{z} - 1) - \sum_{i=1}^k \alpha_i(p_i - \theta) \quad (5.19)$$

où $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, k$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes.

La condition de premier ordre est ici suffisante puisque l'on a une fonction quadra-

tique à minimiser sous des contraintes linéaires. Elle est :

$$\frac{\partial L(\mathbf{z}, \lambda, \gamma, \alpha_i, \dots, \alpha_k)}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} - \lambda \bar{\mu} - \gamma \cdot \mathbf{1}^\top = 0 \quad (5.20)$$

ou encore :

$$\tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - \lambda \bar{\mu}^\top - \gamma \cdot \mathbf{1} = 0 \quad (5.21)$$

Le réarrangement de ces équations permet de déterminer le portefeuille efficient :

$$\mathbf{z} = \tilde{\sigma}^{-1} (\lambda \bar{\mu}^\top + \gamma \cdot \mathbf{1}) \quad (5.22)$$

ou encore :

$$\mathbf{z}^\top = (\lambda \bar{\mu} + \gamma \cdot \mathbf{1}^\top) \tilde{\sigma}^{-1}$$

Ces expressions dépendent de la valeur des multiplicateurs (λ et γ), celle-ci dépendant du rendement $\bar{\mu}$ exigé. Pour déterminer la valeur de ces multiplicateurs, on substitue l'expression de \mathbf{z} dans les deux contraintes du problème :

$$\begin{aligned} (\lambda \bar{\mu} + \gamma \cdot \mathbf{1}^\top) \tilde{\sigma}^{-1} \mathbf{1} &= 1 \\ \bar{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} (\lambda \bar{\mu}^\top + \gamma \cdot \mathbf{1}) &= \hat{\mu} \end{aligned}$$

Le développement de ces deux expressions donne un système de deux équations à deux inconnues (λ et γ) :

$$\begin{aligned} \lambda \bar{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \mathbf{1} + \gamma \cdot \mathbf{1}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbf{1} &= 1 \\ \lambda \bar{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \bar{\mu}^\top + \gamma \bar{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \mathbf{1} &= \hat{\mu} \end{aligned}$$

En notant :

$$\begin{aligned} A &= \bar{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \bar{\mu}^\top \\ B &= \bar{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \bar{\mu}^\top \\ C &= \mathbf{1}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (5.23)$$

et en remarquant que A et B sont deux formes quadratiques positives puisque σ^{-1} , comme σ , est définie positive. Les équations précédentes se récrivent :

$$\begin{aligned} A \cdot \lambda + C \cdot \gamma &= 1 \\ B \cdot \lambda + A \cdot \gamma &= \hat{\mu} \end{aligned}$$

donc les solutions sont :

$$\lambda = \frac{A - C\hat{\mu}}{A^2 - B.C} \qquad \lambda = \frac{C\hat{\mu} - A}{D} \qquad (5.24)$$

$$\gamma = \frac{A\hat{\mu} - B}{A^2 - BC} \qquad \gamma = \frac{B - A\hat{\mu}}{D} \qquad (5.25)$$

où $D = BC - A^2$.

Pour déterminer le signe de D , on étudie la forme quadratique

$$(A\bar{\mu} - B.\mathbf{1}^\top)\tilde{\sigma}^{-1}(A\bar{\mu}^\top - B.\mathbf{1})$$

Celle-ci est positive puisque $\tilde{\sigma}^{-1}$ est définie positive et elle peut s'écrire :

$$B^2C - A^2B = B(BC - A^2) = B.D$$

Comme $B.D > 0$ et que $B > 0$ donc $D > 0$.

La connaissance des multiplicateurs permet d'obtenir immédiatement l'équation de la frontière des sous-portefeuilles efficients. En effet, à l'aide de la condition de premier ordre :

$$\tilde{\sigma}.\mathbf{z} = \lambda\bar{\mu}^\top + \gamma\mathbf{1}$$

La variance du portefeuille optimal se réécrit immédiatement :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{opt}^2 &= \mathbf{z}^\top \tilde{\sigma} \mathbf{z} \\ &= \mathbf{z}^\top (\lambda.\bar{\mu}^\top + \gamma\mathbf{1}) \\ &= \lambda\hat{\mu} + \gamma \end{aligned}$$

En remplaçant λ et γ par leurs valeurs on obtient ainsi l'équation de la frontière :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{opt}^2 &= \frac{(C\hat{\mu} - A)\hat{\mu} + B - A\hat{\mu}}{D} \\ &= \frac{C\hat{\mu}^2 - 2A\hat{\mu} + B}{D} \end{aligned}$$

Comme le montre la figure 5.1, l'allure de la frontière des sous-portefeuilles efficients est une parabole dont la base est le sous-portefeuille de variance minimale.

Proposition 5.5. *Si on a que des actifs risqués dans le portefeuille, la frontière d'efficience est la partie "supérieure" d'une parabole dont l'équation est :*

$$\sigma^2 = \frac{C\hat{\mu}^2 - 2A\hat{\mu} + B}{D}$$

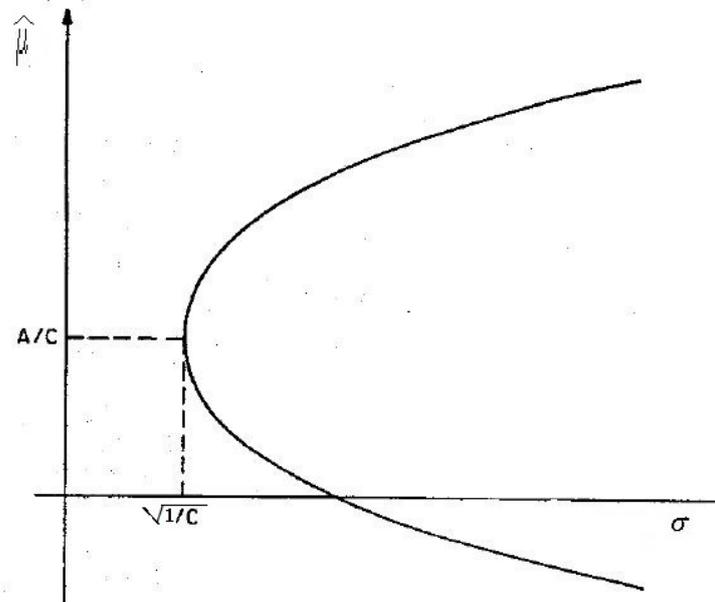


FIGURE 5.1 – La frontière des sous-portefeuilles efficaces

Théorème 5.1. *La condition du premier ordre est suffisante puisqu'on a une fonction quadratique à minimiser sous des contraintes linéaires (Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker). Elle est donnée par*

$$\frac{\partial L(\mathbf{z}, \lambda, \gamma; \alpha_i, \dots, \alpha_k)}{\partial \mathbf{z}} = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - \lambda \bar{\mu}^\top - \gamma \cdot \mathbf{1} = 0 \quad (5.26)$$

Remarque 5.4. – *La condition 5.26 est identique à la condition du premier ordre du Lagrangien du problème de base de Markowitz [48]. Avec l'introduction d'une contrainte sur p_i , il est important de noter qu'on réduit le nombre d'actions dans lesquelles on investit à travers un sous-portefeuille qui a le même niveau d'optimalité que le portefeuille initial.*

– *Ainsi donc selon la théorie de Markowitz, on peut identifier à l'aide du PER à chaque niveau de rendement objectif les actions dont la présence dans un portefeuille quelconque dévierait le rendement de l'optimum, aussi petites que seront les proportions qui y sont investies.*

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'optimisation de sous-portefeuilles sélectionnés sur la base du Price-earnings-ratio. En effet, partant du modèle standard de Markowitz et de ses hypothèses, nous avons introduit une contrainte dynamique supplémentaire

posée sur le PER transformant celui-ci en un problème de sélection successive de sous-portefeuille optimal.

La résolution de ce problème d'optimisation, nous a permis de voir qu'en se basant sur une restriction de l'horizon de l'investissement à l'aide du PER nous pouvons optimiser le nombre d'actifs même devant composer le portefeuille avant de viser un rendement global donné. Ceci nous a conduit d'introduire les nouveaux concepts de convergence et d'équivalence de frontières efficientes. Ainsi avec l'aide du PER, à chaque niveau de risque, nous allons pouvoir déterminer le minimum nécessaire d'actifs dans lesquels investir pour atteindre le rendement maximal nous plaçant sur la frontière efficiente du modèle de Markowitz standard.

Dans le chapitre 7 relatif aux applications, nous allons, à partir de données recueillies de la BRVM, déterminer selon l'intervalle du rendement objectif, le nombre d'années auquel il est optimal de restreindre le PER ainsi que l'assiette minimale d'actions sur lesquelles on devra se focaliser pour atteindre ce rendement objectif.

Sélection à l'aide du PER brut et Optimisation multiobjectif de sous-portefeuilles

Sommaire

6.1	Introduction	93
6.2	Rappels d'Analyse convexe	94
6.3	Rappels sur l'Optimisation sous contraintes d'inégalités	95
6.4	Optimisation multiobjectif de sous-portefeuilles	98
6.5	Conclusion	105

6.1 Introduction

Dans les problèmes traditionnels d'optimisation de portefeuille, nous minimisons généralement le risque pour un rendement donné ou nous maximiser le rendement pour un risque donné. Dans ce chapitre, nous avons pour but d'optimiser de manière combinatoire le risque et le rendement, surtout après une sélection d'actifs à partir du Price-Earnings Ratio (PER) brut qui n'a subi aucun ajustement et qui s'écrit directement en fonction du rendement. Ainsi à partir d'une extension du modèle moyenne-variance, nous obtenons un problème de programmation quadratique convexe avec une contrainte sur le PER des actifs et dont la fonction objectif est une fonction multiobjectif incluant un paramètre d'aversion au risque. La contrainte sur le PER permettra de sélectionner les meilleurs titres qui composeront le sous-portefeuille optimal.

Dans ce chapitre nous présentons une solution analytique complète de ce problème après le rappel de quelques notions dans les deux premières sections.

6.2 Rappels d'Analyse convexe

6.2.1 Ensemble convexe

Définition 6.1. Un ensemble V de \mathbb{R}^n est convexe si et seulement si, $\forall (x, y) \in V^2$:

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in V, \forall \lambda \in [0, 1] \quad (6.1)$$

En d'autres termes, un ensemble convexe est tel que tout segment reliant deux points de cet ensemble se trouve à l'intérieur de l'ensemble.

6.2.2 Fonctions convexes et fonctions concaves

Soit f une fonction de plusieurs variables définie sur un ensemble convexe V .

6.2.2.1 Fonction convexe

Définition 6.2. f est convexe sur V si et seulement si, $\forall (x, y) \in V^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (6.2)$$

Définition 6.3. f est strictement convexe sur V si et seulement si $\forall \lambda \in]0, 1[$, $x \neq y$:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (6.3)$$

6.2.2.2 Propriétés importantes

1. f concave $\Leftrightarrow -f$ convexe
2. Si f et g sont des fonctions convexes (resp. concaves), alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $(a.f + b.g)$ une fonction convexe (resp. concave).
3. Si f est une fonction concave et g est une fonction croissante et concave, alors la fonction $g(f(x))$ est concave.
4. Si f est une fonction convexe et g est une fonction croissante et convexe, alors la fonction $g(f(x))$ est convexe.
5. Une fonction affine est à la fois concave et convexe.

6.2.2.3 Caractérisation pour les fonctions à une seule variable

- f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

- $f'' > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strictement convexe (attention : la réciproque n'est pas nécessairement vraie).

6.2.2.4 Caractérisation pour les fonctions à plusieurs variables

- f convexe \Leftrightarrow la matrice hessienne de f est semi-définie positive $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- La matrice hessienne de f est définie positive $\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ strictement convexe (attention : la réciproque n'est pas nécessairement vraie).

6.3 Rappels sur l'Optimisation sous contraintes d'inégalités

6.3.1 Optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations : les conditions de Kuhn et Tucker

On considère le programme de maximisation (\mathcal{P}) suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \max_{\tilde{z}} f(\tilde{z}) \\ \text{s.c. } g_j(\tilde{z}) \leq c_j \quad \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (6.4)$$

Soit \tilde{z}^* la solution de ce programme. Deux situations peuvent se présenter pour chaque contrainte j

- Soit $g_j(\tilde{z}) = c_j$: dans ce cas, on dit que la contrainte j est *saturée* à l'optimum ;
- Soit $g_j(\tilde{z}) < c_j$: dans ce cas, on dit que la contrainte j est *non saturée* à l'optimum.

Définition 6.4. on définit le Lagrangien comme la fonction L suivante :

$$L(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = f(\tilde{z}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j(\tilde{z}) - c_j) \quad (6.5)$$

Où les variables λ_j sont les multiplicateurs de Lagrange associés à chaque contrainte j et $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

6.3.1.1 Conditions de qualification des contraintes

Proposition 6.1. On utilise le Lagrangien dans la résolution d'un programme d'optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- Les fonctions contraintes g_j , $j = 1, \dots, s$ sont toutes linéaires.
- Soit $s \leq m$ le nombre de contraintes saturées à l'optimum \tilde{z}^* . On suppose sans perte de généralité qu'il s'agit des s premières contraintes g_j , $j = 1, \dots, s$. Si la matrice jacobienne évaluée à l'optimum \tilde{z}^* de ces s fonctions contraintes, notée J_G et de taille (s, n) , est de rang s , alors la condition de qualification des contraintes est vérifiée.

6.3.1.2 Conditions du premier ordre (Kuhn et Tucker)

On suppose que la contrainte de qualification est vérifiée. Si le vecteur $\tilde{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ est une solution du programme de maximisation \mathcal{P} , alors il existe un unique λ^* tel que \tilde{z}^* vérifie les $n + 3m$ conditions suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\tilde{z}^*, \tilde{\lambda}^*)}{\partial z_i} = 0 & \forall i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial L(\tilde{z}^*, \tilde{\lambda}^*)}{\partial \lambda_j^*} \geq 0 & \forall j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* \geq 0 & \forall j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* (g_j(\tilde{z}^*) - c_j) = 0 & \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (6.6)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\tilde{z}^*)}{\partial z_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \cdot \frac{\partial g_j(\tilde{z}^*)}{\partial z_i} = 0 & \forall i = 1, \dots, n \\ g_j(\tilde{z}^*) \leq c_j & \forall j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* \geq 0 & \forall j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* = 0 \text{ ou } g_j(\tilde{z}^*) = c_j & \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (6.7)$$

Remarque 6.1. Ces conditions n'excluent pas la possibilité que $\lambda_j^* = 0$ et $g_j(\tilde{z}^*) = c_j$ simultanément.

6.3.1.3 Note sur les programmes de minimisation sous contraintes d'inéquations

On peut passer d'un programme de minimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations à un programme de maximisation.

Soit \mathcal{P}' le programme de minimisation suivant :

$$\mathcal{P}' : \begin{cases} \min_{\tilde{z}} f(\tilde{z}) \\ s.c. \\ g_j(\tilde{z}) \geq c_j & \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (6.8)$$

On peut transformer le programme \mathcal{P}' en un programme de maximisation \mathcal{P}^* tel que :

$$\mathcal{P}^* : \begin{cases} \max_{\tilde{z}} & -f(\tilde{z}) \\ \text{s.c.} & \\ & -g_j(\tilde{z}) \leq -c_j \quad \forall j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (6.9)$$

6.3.2 Optimisation sous contraintes prenant la forme d'inéquations incluant des contraintes de non-négativité

Dans de nombreuses application économiques, les programmes d'optimisation considérés imposent que les variables considérées ne puissent pas être négatives.

On considère le programme de maximisation \mathcal{P} suivant :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \max_{\tilde{z}} & f(\tilde{z}) \\ \text{s.c.} & g_j(\tilde{z}) \geq c_j \quad \forall j = 1, \dots, m \\ & z_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6.10)$$

En réalité, le programme \mathcal{P} n'est qu'un cas particulier du programmes d'optimisation étudié dans la section précédente (il suffit de réécrire les contraintes $z_i \geq 0$ sous la forme $-z_i \leq 0$ pour s'en apercevoir). Toutefois, la résolution de ce programme selon la méthode exposée précédemment exigerait de travailler avec $n + m$ multiplicateurs de Lagrange, ce qui est peu commode lorsque n est grand. C'est la raison pour laquelle on préférera, pour ce type de programmes, travailler à partir d'un Lagrangien dit « modifié », à partir duquel on peut dériver des conditions de Kuhn et Tucker plus simples à manipuler.

6.3.2.1 Lagrangien modifié

Définition 6.5. *Le Lagrangien modifié, noté $\mathcal{M}(\tilde{z}, \tilde{\lambda})$ suivante :*

$$\mathcal{M}(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = f(\tilde{z}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j(\tilde{z}) - c_j) \quad (6.11)$$

Remarque 6.2. *On remarquera que ce Lagrangien ne contient pas explicitement les contraintes de nonnégativité $z_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.*

6.3.2.2 Conditions du premier ordre (Kuhn et Tucker) :

On suppose que la contrainte de qualification est vérifiée. Si le vecteur $\tilde{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ est une solution du programme de maximisation \mathcal{P} , alors il existe un unique $\tilde{\lambda}^*$ tel que

\tilde{z}^* vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathcal{M}(\tilde{z}^*, \lambda^*)}{\partial z_i} \leq 0 & \forall i = 1, \dots, n \\ z_i^* \geq 0 & \forall i = 1, \dots, m \\ z_i^* \cdot \frac{\partial \mathcal{M}(\tilde{z}^*, \lambda^*)}{\partial z_i} \geq 0 & \forall j = 1, \dots, m \\ \frac{\partial \mathcal{M}(\tilde{z}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_j^*} \geq 0 & \forall j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* \geq 0 & \forall j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* (g_j(\tilde{z}^*) - c_j) = 0 & \forall j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (6.12)$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f(\tilde{z}^*)}{\partial z_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \cdot \frac{\partial g_j(\tilde{z}^*)}{\partial z_i} \leq 0 & \forall i = 1, \dots, n \\ z_i^* \geq 0 & \forall i = 1, \dots, m \\ z_i^* = 0 \text{ ou } \frac{\partial \mathcal{M}(\tilde{z}^*, \lambda^*)}{\partial z_i} = 0 & \forall j = 1, \dots, m \\ g_j(\tilde{z}^*) \leq c_j & \forall j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* \geq 0 & \forall j = 1, \dots, m \\ \lambda_j^* = 0 \text{ ou } g_j(\tilde{z}^*) = c_j & \forall j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (6.13)$$

6.4 Optimisation multiobjectif de sous-portefeuilles

6.4.1 Introduction du concept

Le problème de minimisation de fonction convexe quadratique de n variables, sous x contraintes linéaires (sous forme d'égalité ou d'inégalité) sur les variables est appelé programmation quadratique convexe. En général, sa forme standard est donné par [4] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top Q \mathbf{z} - q^\top \mathbf{z} \\ \text{s.c. } A \mathbf{z} = b, \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{array} \right. \quad (6.14)$$

Où Q est une matrice symétrique semi-définie positive $n \times n$, q est un vecteur de dimension n , A une matrice $m \times n$, b un vecteur de dimension m et " \top " renvoie à l'opérateur de transposition [53]. Gould et al. [31] ont présenté plusieurs papiers traitant ces types de problèmes quadratiques et les algorithmes appliqués pour les résoudre. CPLEX, KNITRO, LINDO and QUADPROD sont parmi les multitudes de solveurs de programmation quadratique [32][50]. Bayón et al. [4], Cambini et al. [15] and Goh et al. [30] ont élaboré des solutions analytiques pour certains types de problèmes quadratiques. En outre, lorsque considérant le modèle moyenne-variance de Markowitz (cf section 4.2), le problème de sélection de portefeuille est en fait un cas de problème de programmation

quadratique. Fernandez et al. [26] ont présenté le modèle de Markowitz sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - (1 - \lambda) \mu \cdot \mathbf{z} \\ s.c. \mathbb{I}^\top \cdot \mathbf{z} = 1 \\ 0 \leq \mathbf{z} \leq 1 \end{cases} \quad (6.15)$$

Où la variable additionnelle $\lambda \in [0, 1]$ est le paramètre d'aversion au risque. Selon les valeurs de λ , on peut distinguer deux cas particuliers. Le premier cas est lorsque $\lambda = 0$, ce qui coïncide à la minimisation de $(-\mu \cdot \mathbf{z})$ qui en fait équivaut à maximiser uniquement le rendement total du portefeuille $\mu \cdot \mathbf{z}$. Dans ce cas, l'optimum sera obtenu avec l'actif ayant le plus grand rendement. Le deuxième cas correspond à $\lambda = 1$ et minimise exclusivement le risque total du portefeuille $(\frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z})$ et, ainsi plusieurs actifs composeront le resultat optimal. Le cas $\lambda \in]0, 1[$ représente le problème d'optimisation qui implique alternativement les expressions de la variance et du rendement.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement à ce dernier cas où $\lambda \in]0, 1[$ lorsque la fonction multiobjective à optimiser est convexe et quadratique. Nous introduirons en plus, une contrainte de sélection de sous-portefeuille se basant sur le Price-Earnings-Ratio (PER) et nous tenterons d'apporter une solution analytique complète à ce nouveau problème. Nous utiliserons directement le PER dans sa forme standard, c'est-à-dire comme l'inverse du rendement de l'actif, et nous minimiserons l'impact de toute politique interne des entreprises concernant les dividendes. En effet, comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent, le rendement réel d'un actif peut différer de celui obtenu avec l'étude du PER. Le plus souvent à cause d'une politique de croissance bien spécifique, les managers d'une entreprise peuvent choisir de réinvestir une partie des dividendes ou de renforcer les réserves de l'entreprise au lieu d'une distribution totale aux actionnaires.

Par ailleurs, plusieurs auteurs ont travaillé récemment, sur l'utilisation de techniques très diverses dans la sélection et l'optimisation de portefeuille, surtout les connaissances avancées comme les réseaux de neurones [26] ou la Classification et les algorithmes génétiques [25]. Mais très peu ou même aucun auteur a tenté de combiner la théorie de l'optimisation et les outils utilisés par les praticiens de la finance. C'est ce que nous expérimenterons avec l'introduction du PER comme paramètre de sélection.

6.4.2 Formulation mathématique du problème et résultats

Nous définissons le problème d'optimisation multiobjectif de sous-portefeuilles de la manière suivante pour $k < n$ (n nombre total d'actifs dans le marché) :

$$P_\lambda : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - (1 - \lambda) \mu \cdot \mathbf{z} \\ \text{subject to} \\ \mu_i = \frac{1}{\theta_i} \geq \frac{1}{\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i = k \\ \mathbb{I}^\top \cdot \mathbf{z} = 1 \\ \mathbf{z}_i > 0, \quad i = 1, \dots, k \end{cases} \quad (6.16)$$

Où :

- λ est le paramètre d'aversion au risque, $\lambda \in]0, 1[$,
- θ_i est le PER de l'actif i , θ le PER exigé,
- x_i ; $i = 1, \dots, n$ sont des variables telles que $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_i \geq \frac{1}{\theta} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- k est le nombre d'actifs composant le sous-portefeuille, c'est-à-dire le nombre d'actif tel que $x_i = 1$ ($\mu_i \geq \frac{1}{\theta}$).
- \mathbf{z} est le vecteur colonne des parts investies dans chacun des k actifs du sous-portefeuille,
- $\tilde{\sigma}$ est la matrice de variance-covariances des k actifs composant le sous-portefeuille,
- \mathbb{I} est le vecteur colonne dont les k composantes sont égales à 1,
- μ est le vecteur ligne des rendements espérés : $\mu = [\mu_1 \quad \dots \quad \mu_i \quad \dots \quad \mu_k]$.

6.4.2.1 Théorème

Soit θ le PER exigé ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$) et ainsi pour $k \in \mathbb{N}$ nombre d'actifs composant le sous-portefeuille, la variance σ_{opt}^2 et le rendement μ_{opt} du sous-portefeuille optimal pour le problème P_λ dépendent de $\lambda \in]0, 1[$ et sont écrits :

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{D \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 - 2D \left(\frac{1}{\lambda} \right) + D + 1}{B} \quad (6.17)$$

$$\mu_{opt} = \frac{1}{\lambda} \frac{D}{B} + \frac{A - D}{B} \quad (6.18)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top = \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\ B &= \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\ C &= \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top \\ D &= BC - A^2 \end{aligned}$$

Démonstration. Résoudre le problème (6.16) requiert en premier lieu la détermination de k , le nombre d'actifs composant le sous-portefeuille, ce que nous obtenons par la donnée de θ le PER exigé.

Supposons que l'on fixe θ ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$), donc nous avons $\sum_{i=1}^N x_i = k$ qui renvoie au nombre d'actifs tels que $\mu_i \geq \frac{1}{\theta}$. Ainsi le problème devient pour n'importe quel sous-portefeuille défini par le PER θ :

$$P_\lambda^\theta : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - (1 - \lambda) \mu \cdot \mathbf{z} \\ \text{subject to} \\ \mathbb{I}^\top \cdot \mathbf{z} = 1 \\ \mathbf{z}_i > 0, \quad i = 1, \dots, K \end{cases} \quad (6.19)$$

Le lagrangien associé au problème P_λ^θ peut être écrit comme suit :

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \gamma) = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - (1 - \lambda) \mu \cdot \mathbf{z} + \gamma (1 - \mathbb{I}^\top \mathbf{z}) \quad (6.20)$$

Où $\gamma \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange .

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de P_λ^θ sont écrites comme suit [[10], [31], [52]] :

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} - (1 - \lambda) \mu - \gamma \mathbb{I}^\top = 0 \\ \mathbb{I}^\top \mathbf{z} - 1 = 0 \\ \mathbf{z} > 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

A cause du fait que la fonction à optimiser est convexe, les conditions KKT (6.21) sont nécessaires et suffisantes pour que \mathbf{z}^* soit minimum global pour le problème P_λ^θ .

Alors

$$\begin{aligned}
 \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} - (1 - \lambda)\mu - \gamma \mathbb{I}^\top &= 0 \\
 \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} &= (1 - \lambda)\mu + \gamma \mathbb{I}^\top \\
 \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} &= \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right)\mu + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I}^\top \\
 \text{or} \\
 \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} &= \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right)\mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I}
 \end{aligned}$$

Et ainsi nous obtenons l'expression de \mathbf{z}^* :

$$\mathbf{z}^* = \tilde{\sigma}^{-1} \left[\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right)\mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \right] \quad (6.22)$$

Nous remarquons que l'expression de \mathbf{z} dépend du multiplicateur de Lagrange γ .
Dons en substituant par sa valeur dans la contrainte, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I}^\top \cdot \mathbf{z} &= 1 \\
 \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \left[\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right)\mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \right] &= 1 \\
 \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} &= 1 \\
 \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} &= 1 - \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top \\
 \gamma &= \frac{\lambda \left[1 - \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top \right]}{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}}
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\gamma = \frac{\lambda - (1 - \lambda) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top}{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}} \quad (6.23)$$

La variance du sous-portefeuille optimal s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \sigma_{opt}^2 &= \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \\
 &= \mathbf{z}^\top \left[\frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} + \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right)\mu^\top \right] \\
 &= \frac{\gamma}{\lambda} \mathbf{z}^\top \mathbb{I} + \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right) \mathbf{z}^\top \mu^\top
 \end{aligned}$$

Or $\mathbf{z}^\top \mathbb{I} = \mathbb{I}^\top \mathbf{z} = 1$ and $\mathbf{z}^\top \boldsymbol{\mu}^\top = \boldsymbol{\mu} \mathbf{z}$, so

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{\gamma}{\lambda} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \boldsymbol{\mu} \mathbf{z}$$

En substituant \mathbf{z} par sa valeur, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma_{opt}^2 &= \frac{\gamma}{\lambda} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \boldsymbol{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \left[\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \boldsymbol{\mu}^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \right] \\ &= \frac{\gamma}{\lambda} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 \boldsymbol{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}^\top + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \cdot \frac{\gamma}{\lambda} \boldsymbol{\mu} \cdot \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} (6.23) \Rightarrow \frac{\gamma}{\lambda} &= \frac{\lambda - (1-\lambda) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}^\top}{\lambda \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}} \\ \frac{\gamma}{\lambda} &= \frac{1}{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \frac{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}^\top}{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}^\top = \boldsymbol{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\ B &= \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\ C &= \boldsymbol{\mu} \tilde{\sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}^\top \end{aligned} \quad (6.26)$$

Alors (6.25) devient

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \frac{A}{B} \quad (6.27)$$

Par suite de (6.24) nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_{opt}^2 &= \left[\frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \frac{A}{B} \right] + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 C + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) A \left[\frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \frac{A}{B} \right] \\ &= \frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \frac{A}{B} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 C + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \frac{A}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{A^2}{B} \\ &= \frac{1}{B} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 C - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{A^2}{B} \\ \Rightarrow \sigma_{opt}^2 &= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 \left(C - \frac{A^2}{B} \right) + \frac{1}{B} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Avec

$$\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} + 1$$

alors

$$\begin{aligned}
\sigma_{opt}^2 &= \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} + 1\right) \left(C - \frac{A^2}{B}\right) + \frac{1}{B} \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \left(C - \frac{A^2}{B}\right) - \frac{2}{\lambda} \left(C - \frac{A^2}{B}\right) + \left(C - \frac{A^2}{B}\right) + \frac{1}{B} \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{BC - A^2}{B}\right) - \frac{2}{\lambda} \left(\frac{BC - A^2}{B}\right) + \left(\frac{BC - A^2}{B} + \frac{1}{B}\right)
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Posons $D = BC - A^2$, donc :

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{D}{B} - \frac{2}{\lambda} \frac{D}{B} + \frac{D+1}{B} \tag{6.30}$$

Ainsi pour un θ fixé, l'expression de la variance du sous-portefeuille optimal s'écrit comme suit :

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{D\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 2D\left(\frac{1}{\lambda}\right) + D + 1}{B} \tag{6.31}$$

Nous remarquons que σ_{opt}^2 dépend de λ qui est dans $]0,1[$.

D'un autre côté, pour un θ fixé, l'expression du rendement du sous-portefeuille optimal s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\mu_{opt} &= \mu \mathbf{z} \\
&= \mu \tilde{\sigma}^{-1} \left[\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \right] \\
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) C + \left[\frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \frac{A}{B}\right] A \\
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) C + \frac{A}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \frac{A^2}{B} \\
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \left(\frac{BC - A^2}{B}\right) + \frac{A}{B} \\
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \left(\frac{D}{B}\right) + \frac{A}{B} \\
&= \frac{1}{\lambda} \frac{D}{B} - \frac{D}{B} + \frac{A}{B} \\
\mu_{opt} &= \frac{1}{\lambda} \frac{D}{B} + \frac{A - D}{B}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

□

6.4.2.2 Corollaires

Corollaire 6.1. *Dans un repère orthonormé où nous représentons la variance en abscisse et le rendement en ordonnée, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, σ_{opt}^2 défini par l'équation (6.17) décrit une parabole. μ_{opt} donne, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, le rendement correspondant pour n'importe quel portefeuille sur la parabole. Ainsi la frontière efficiente qui représente l'ensemble de tous les sous-portefeuilles optimaux défini par θ ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$) est la partie supérieure de cette parabole comme dans le problème standard de Markowitz [47].*

Corollaire 6.2. *Dans l'hypothèse que $\lambda = 1$, nous avons un cas particulier du problème (6.16) qui minimise exclusivement le risque total du portefeuille ($\frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z}$) sous les mêmes contraintes. Le problème demeure un problème de programmation quadratique et peut être résolu avec l'utilisation du lagrangien comme dans la preuve 6.4.2.1.*

Ainsi le résultat particulier que nous pouvons obtenir immédiatement à partir du théorème 6.4.2.1 est :

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{1}{B} \quad \text{and} \quad \mu_{opt} = \frac{A}{B} \quad (6.33)$$

6.5 Conclusion

Après le rappel de quelques éléments d'Analyse convexe et d'Optimisation sous contraintes, la dernière section de ce chapitre a été consacrée exclusivement à l'exposition de la résolution du problème d'optimisation multi-objectif de sous-portefeuilles. Ainsi selon le PER exigé par l'investisseur et son aversion au risque donnée par le paramètre d'aversion au risque, nous avons dégagé les expressions du risque et du rendement du sous portefeuille optimal à travers un théorème suivi de deux corollaires.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons la Bourse Régionale des Valeurs Mobilières (BRVM) et nous nous focaliserons sur les applications numériques.

Applications à la Bourse Régionale des Valeurs Mobilières

Sommaire

7.1	Introduction	106
7.2	Aperçu général sur la BRVM	107
7.3	Applications	109
7.4	Résultats-Discussion	116
7.5	Conclusion	118

7.1 Introduction

La bourse régionale des valeurs mobilières (BRVM) est le marché financier de l'Afrique de l'Ouest, très jeune et peu profond en terme de densité des transactions comparé aux grandes bourses de l'Afrique et du monde. A travers nos travaux, nous comptons apporter notre contribution aux grands efforts de développement initiés par les autorités de la bourse pour hisser cette dernière à la cinquième place des bourses africaines à l'horizon 2020 avec l'amélioration de son attractivité et de sa qualité.

La première section de ce chapitre est consacrée à une brève présentation de la BRVM. La deuxième partie sera orientée principalement aux application. D'abord nous commençons par l'optimisation de sous-portefeuilles sélectionnés sur la base des PER ajustés de titres risqués de la BRVM où nous avons suivi, sur la période du 12 janvier au 06 février 2015, les rendements de 19 sociétés dont 18 du premier compartiment et figurant dans le classement officiel des 20 meilleurs PER du dernier trimestre 2014. Par la suite nous verrons l'optimisation de sous-portefeuilles sélectionnés sur la base des PER brut avec 22 titres du premier compartiment suivis sur la période du 05 Janvier au 20 Mars 2015. Enfin la troisième section est consacrée aux discussions sur les résultats.

7.2 Aperçu général sur la BRVM

La bourse régionale des valeurs mobilières (ou BRVM) est une institution financière spécialisée créée le 18 décembre 1996, conformément à une décision du conseil de ministres de l'UEMOA prise en décembre 1993. C'est une société anonyme dotée d'une mission de service public communautaire et disposant d'un capital de 2 904 300 000 francs CFA. C'est un marché financier unique pour les sociétés de huit pays d'Afrique de l'Ouest : Bénin, Burkina Faso, Côte d'Ivoire, Guinée Bissau, Mali, Niger, Sénégal et Togo.

Cette bourse est basée à Abidjan. Ce marché régional dispose d'antennes nationales de Bourse (ANB) dans chacun des pays concernés. Chaque ANB est reliée au siège par un relais satellitaire qui assure l'acheminement des ordres et des informations à tous les investisseurs de la Bourse de façon équitable. Une quarantaine de sociétés sont cotées sur cette bourse régionale, dont une grande majorité issue de Côte d'Ivoire. A la date du 31 décembre 2015, sur 39 sociétés cotées, on a 13 en classe A avec plus de 100 milliards de capitalisation boursière, 20 en classe B entre 10 et 100 milliards et 6 en classe C avec moins de 10 milliards de capitalisation boursière. Les cotations sont indiquées en francs CFA (FCFA), monnaie commune à ces pays de l'Union Economique et Monétaire Ouest Africaine (UEMOA).

7.2.1 Passage des ordres sur la BRVM

Pour placer son argent et investir dans les sociétés listées sur la BRVM, il faut passer par une société de gestion et d'intermédiation (SGI). Ces dernières ont le monopole de la négociation de valeurs mobilières sur cette place boursière. Il faut donc ouvrir un compte dans ces SGI (ou dans une banque classique) pour accéder au marché financier d'Afrique de l'Ouest.

7.2.2 Les indices boursiers à la BRVM

La Bourse régionale des valeurs Mobilières propose deux indices aux investisseurs afin de suivre la tendance globale du marché :

Le BRVM 10 : C'est l'indice des "stars" de la cote puisqu'il est composé des 10 sociétés les plus actives de la bourse, ce sont les actions les plus liquides, celles qui concentrent le plus de transactions. La composition du BRVM 10 est revue tous les trimestres.

Le BRVM Composite : Cet indice global prend en compte l'intégralité des actions cotées sur le marché et donne la tendance de fond du marché. A noter que les deux

indices réalisent de tendances très similaires.

7.2.3 Organisation de la BRVM

La Bourse Régionale est dotée de deux compartiments pour les actions dénommés : premier et deuxième compartiment, et d'un compartiment pour les emprunts obligataires.

Les conditions à remplir par une société pour son introduction sur le marché boursier varient selon les compartiments.

7.2.3.1 Premier Compartiment

Est admissible au Premier Compartiment de la cote régionale, tout titre de capital répondant aux conditions suivantes :

1. Présenter une capitalisation boursière de plus de 500 millions de FCFA ;
2. Avoir une marge nette sur chiffre d'affaires sur chacune des trois dernières années de 3% ;
3. Présenter 5 années de comptes certifiés ;
4. S'engager à signer un contrat d'animation de marché prévoyant une cotation ou une indication de cours lors des séances dont la fréquence est précisée par Instruction de la Bourse Régionale ;
5. Diffuser dans le public au moins 20% de son capital, dès l'introduction en bourse ;
6. s'engager à publier au BOC (Bulletin Officiel de la cote) des estimations semestrielles de chiffre d'affaires et de tendance de résultats.

Les valeurs rattachées à ces titres de capital sont également éligibles au Premier Compartiment.

7.2.3.2 Deuxième Compartiment

Est admissible au Second Compartiment de la cote régionale tout titre de capital répondant aux conditions suivantes :

1. Présenter une capitalisation boursière de plus de 200 millions de FCFA ;
2. Présenter 2 années de comptes certifiés ;
3. S'engager à signer un contrat d'animation de marché prévoyant une cotation ou une indication de cours dont la fréquence est précisée par Instruction de la Bourse Régionale ;

4. S'engager à diffuser dans le public au moins 20% de son capital dans un délai de deux ans, ou 15% en cas d'introduction par augmentation de capital.

Les valeurs rattachées à ces titres de capital sont également éligibles au Second Compartiment.

7.2.3.3 Compartiment Obligataire

Est admissible au Compartiment obligataire de la cote régionale tout titre de capital répondant aux conditions suivantes :

1. Nombre minimal de titres à l'émission : 25 000 titres ;
2. Valeur nominale minimale de l'émission : 500 millions de francs CFA.

7.3 Applications

7.3.1 Problème de sélection avec le PER ajusté

Nous exposons dans cette partie les tests de choix de composition optimale de sous-portefeuilles et la frontière optimale dans quatre principaux cas comparatifs où les sous-portefeuilles seront dressés dynamiquement à partir de la contrainte posée sur les PER (p_i) des actions les constituant [3]. Nous supposons particulièrement que les investisseurs ne mettent dans leur sous-portfeuille aucun actif sans risque, ils vont les constituer sur la seule base du marché action (risquée) constitué au plus de $n = 19$ titres du premier compartiment de la BRVM figurant dans le Top 20 des p_i officiellement publié sur le site web de la BRVM en janvier en rapport avec les performances réalisées lors du dernier trimestre 2014.

7.3.1.1 Présentation des données

Nous présentons d'abord le classement de nos 19 actions selon leur p_i officiellement publié pour le compte du dernier trimestre 2014. Nous soulignons que les ex aequo ont été classés en fonction des chiffres après la virgule.

TABLE 7.1: Top 19 des p_i de la BRVM au 31 décembre 2014

Rang	Titres	p_i	Rang	Titres	p_i
1er	SAPH CI	7	11e	BICI CI	14
2e	BANK OF AFRICA BF	9	12e	SICABLE CI	15
3e	SOGB CI	12	13e	BANK OF AFRICA BN	15
4e	PALM CI	12	14e	AIR LIQUIDE CI	16
5e	SONATEL SN	12	15e	TOTAL CI	17
6e	BERNABE CI	12	16e	SITAB CI	18
7e	ONATEL BF	12	17e	SOLIBRA CI	19
8e	ECOBANK TRANS. INCORP. TG	12	18e	BANK OF AFRICA NG	21
9e	BANK OF AFRICA CI	13	19e	SGB CI	23
10e	TRACTAFRIC MO- TORS CI	13			

Sur la période du 12 janvier au 06 février 2015, soit quatre semaines de bourse, nous avons recueilli à partir des bulletins officiels de la cote (BOC) publiés journalièrement par la bourse, les données relatives aux titres de la table 7.1. Celles-ci nous ont permis d'avoir une estimation de la matrice de covariance-variance $\tilde{\sigma}$ et le vecteur rendement moyen $\bar{\mathbf{R}}$ des 19 titres risqués donnés à la page suivante. Nous précisons que nous ne prenons pas en compte la corrélation sérielle sur la période relativement très courte que nous utilisons pour l'estimation du sigma.

1	0.0257	0.0107	-0.0068	0.0044	0.0105	0.0068	-0.0115	-0.0014	0.0048	0.0007	0.0098	-0.0003	0.0132	0.0194	-0.0027	-0.0108	0.0020	0.0168	-0.0047
2	0.0107	0.0184	-0.0094	0.0146	0.0089	0.0161	-0.0117	-0.0027	0.0062	-0.0010	0.0076	-0.0005	0.0167	0.0361	-0.0034	-0.0141	0.0021	0.0162	0.0027
3	-0.0068	-0.0094	0.0106	-0.0094	-0.0046	-0.0096	0.0098	0.0005	-0.0032	0.0003	-0.0065	-0.0003	-0.0135	-0.0206	0.0023	0.0137	-0.0024	-0.0128	-0.0048
4	0.0044	0.0146	-0.0094	0.0137	0.0137	0.0327	-0.0030	-0.0071	-0.0022	-0.0073	0.0060	-0.0027	0.0512	0.0851	-0.0042	-0.0259	0.0026	0.0161	0.0038
5	0.0105	0.0089	-0.0046	0.0137	0.0120	0.0090	-0.0063	-0.0005	0.0063	-0.0006	0.0067	-0.0005	0.0108	0.0221	-0.0023	-0.0089	0.0020	0.0107	0.0042
6	0.0068	0.0161	-0.0096	0.0327	0.0090	0.0278	-0.0105	-0.0044	0.0094	-0.0032	0.0061	-0.0016	0.0200	0.0594	-0.0040	-0.0180	0.0015	0.0158	0.0022
7	-0.0115	-0.0117	0.0098	-0.0030	-0.0063	-0.0105	0.0423	-0.0036	-0.0030	-0.0004	-0.0038	0.0006	-0.0138	-0.0166	0.0028	0.0132	0.0009	-0.0174	-0.0007
8	-0.0014	-0.0027	0.0005	-0.0071	-0.0005	-0.0044	-0.0036	0.0041	0.0020	0.0009	-0.0021	0.0002	-0.0038	-0.0105	0.0005	0.0032	-0.0007	0.0004	-0.0012
9	0.0005	0.0090	-0.0018	-0.0065	0.0207	-0.0024	-0.0045	0.0226	0.0005	0.0014	-0.0006	0.0048	0.0062	-0.0032	0.0063	0.0063	-0.0030	-0.0030	0.0040
10	0.0007	-0.0010	0.0003	-0.0073	-0.0006	-0.0032	-0.0004	0.0009	0.0005	0.0009	0.0002	0.0003	-0.0001	-0.0003	-0.0005	-0.0038	-0.0084	0.0003	0.0048
11	0.0098	0.0076	-0.0065	0.0060	0.0067	0.0061	-0.0038	-0.0021	0.0014	0.0002	0.0118	0.0003	0.0081	0.0122	-0.0015	-0.0090	0.0034	0.0078	0.0040
12	-0.0003	-0.0005	-0.0003	-0.0027	-0.0005	-0.0016	0.0006	0.0002	-0.0006	0.0003	0.0003	0.0003	-0.0011	-0.0045	0.0002	0.0005	0.0003	-0.0005	-0.0040
13	0.0132	0.0167	-0.0135	0.0512	0.0108	0.0200	-0.0138	-0.0038	-0.0065	-0.0038	0.0081	-0.0011	0.0463	0.0556	-0.0041	-0.0254	0.0037	0.0226	0.0045
14	0.0194	0.0361	-0.0206	0.0851	0.0221	0.0594	-0.0166	-0.0105	0.0207	-0.0084	0.0122	-0.0045	0.0556	0.1518	-0.0098	-0.0447	0.0026	0.0371	0.0044
15	-0.0027	-0.0034	0.0023	-0.0042	-0.0023	-0.0040	0.0028	0.0005	-0.0024	0.0003	-0.0015	0.0002	-0.0041	-0.0098	0.0011	0.0039	-0.0006	-0.0040	-0.0002
16	-0.0108	-0.0141	0.0137	-0.0259	-0.0089	-0.0180	0.0132	0.0032	-0.0045	0.0018	-0.0090	0.0005	-0.0254	-0.0447	0.0039	0.0246	-0.0032	-0.0190	-0.0034
17	0.0020	0.0021	-0.0024	0.0026	0.0020	0.0015	0.0009	-0.0007	0.0005	-0.0001	0.0034	0.0003	0.0037	0.026	-0.0006	-0.0032	0.0019	0.0024	0.0005
18	0.0168	0.0162	-0.0128	0.0161	0.0107	0.0158	-0.0174	0.0004	0.0090	-0.0003	0.0078	-0.0005	0.0226	0.0371	-0.0040	-0.0190	0.0024	0.0254	0.0013
19	-0.0002	0.0027	-0.0016	0.0038	0.0012	0.0022	-0.0007	-0.0012	-0.0018	-0.0005	0.0020	-0.0000	0.0045	0.0064	-0.0002	-0.0034	0.0005	0.0013	0.0017

$$\bar{R} = (0.03690.06770.05790.06920.06070.06520.14530.04110.04930.06730.05380.04780.04060.03010.03960.05170.02860.03480.0344)$$

7.3.1.2 Frontières des portefeuilles optimaux pour $p_i \leq \theta$ avec $\theta \in \{23, 21\}$

Pour $\theta = 23$ ans, les portefeuilles sont composés à partir de $k = 19$ actions, soit la totalité des titres de notre marché et pour $\theta = 21$ ans, k commence à régresser, le nombre d'actions devant composer les sous portefeuilles passe à 18. On a une première comparaison de scénario à la figure 7.1.

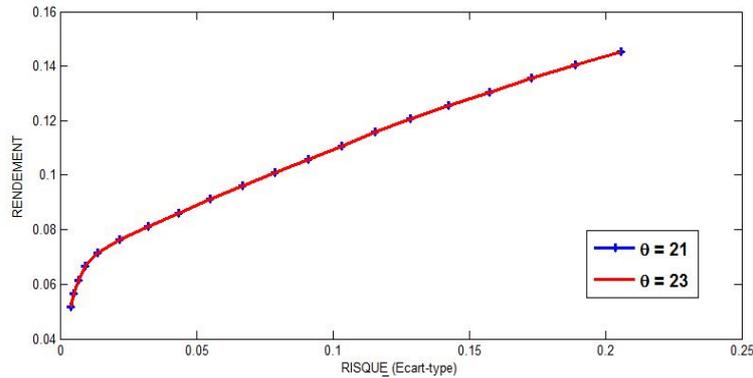


FIGURE 7.1 – Frontières des sous-portefeuilles optimaux pour $\theta \in \{23, 21\}$

7.3.1.3 Frontières des portefeuilles optimaux pour $p_i \leq \theta$ avec $\theta \in \{21, 19, 18, 17, 16\}$

Nous examinons de manière comparative les cas où θ prend successivement les valeurs 21, 19, 18, 17 et 16 ans, ce qui correspond à une diminution de k avec les valeurs respectives de 18, 17, 16, 15 et 14 actions. Le résultat montre une équivalence des frontières efficaces présentées à la figure 7.2.

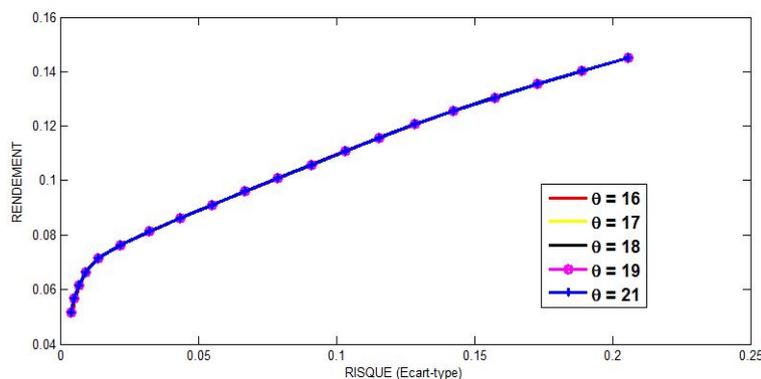


FIGURE 7.2 – Frontières des sous-portefeuilles optimaux pour $\theta \in \{21, 19, 18, 17, 16\}$

7.3.1.4 Frontières des portefeuilles optimaux pour $p_i \leq \theta$ avec $\theta \in \{16, 15, 14, 12\}$

La frontière optimale pour $\theta = 16$ ans devient la courbe de référence de notre comparaison suite à cette parfaite convergence des frontières optimales pour $\theta > 16$. La simulation des frontières pour $\theta \in \{15, 14, 13, 12\}$ montre une convergence avec la frontière pour $\theta = 16$ débutant chacune à partir d'un certain point (Voir Figure 7.3). Nous notons trois points, C_0 début de la convergence entre $\theta = 16$ et $\theta = 15$, X_0 celui entre $\theta = 16$ et $\theta = 13$ et Y_0 celui entre $\theta = 16$ et $\theta = 12$.

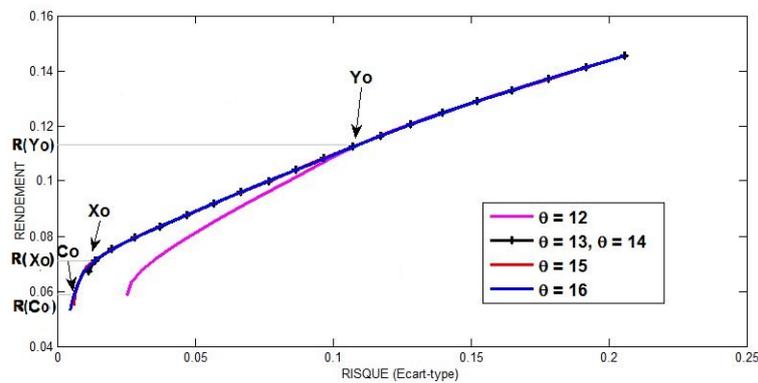


FIGURE 7.3 – Frontières des portefeuilles optimaux pour $\theta \in \{16, 15, 13, 12\}$

Lorsque $\theta = 14$ et $\theta = 13$ les frontières sont équivalentes d'où X_0 sera le début de convergence avec $\theta = 16$ pour toutes les deux valeurs d'où il sera meilleur de prendre $\theta = 13$.

7.3.1.5 Frontières des portefeuilles optimaux pour $p_i \leq \theta$, $\theta < 12$

On assiste à une perte de convergence pour les valeurs entières de θ inférieures à 12, comme nous pouvons le voir à la figure 7.4 en comparaison avec $\theta = 16$ et $\theta = 12$.

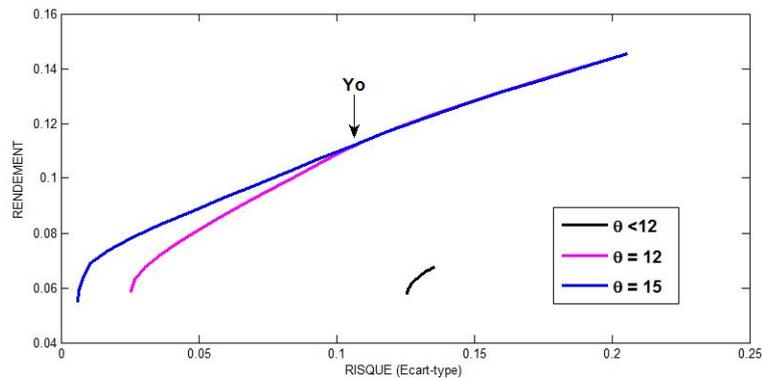


FIGURE 7.4 – Frontières des portefeuilles optimaux pour $\theta < 12$

7.3.2 Problème multiobjectif et sélection avec le PER brut

Dans cette section, nous présentons un exemple dans lequel nous appliquons le problème d'optimisation 6.16 à 22 actifs dans le premier compartiment de la BRVM.

7.3.2.1 Présentation des données

Nous avons collecté les données relatives aux sociétés listées dans le tableau 7.3 à partir des bulletins officiels de la cote sur la période du 05 Janvier au 20 Mars 2015. Ces données nous ont permis d'estimer les rendements espérés de chacun de ces titres (μ) que nous utilisons par la suite pour déterminer leurs PER bruts individuels et, pour n'importe quelle valeur de θ ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$), le nombre de titres k qui composera le sous-portefeuille optimal et son niveau de performance en fonction de son risque (exprimé par la variance).

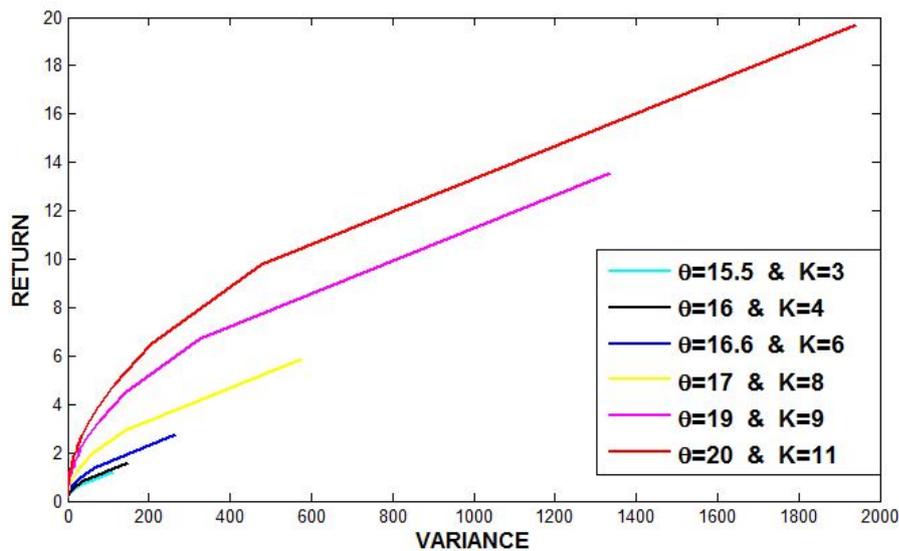
7.3.2.2 Frontières des portefeuilles optimaux selon le PER brut

Nous avons tracé les frontières des portefeuilles optimaux pour des valeurs successives et croissantes du PER exigé θ spécialement pour deux cas. Pour le premier cas, (voir figure 7.5), nous avons $\theta \leq 20$ avec les valeurs 15.5, 16, 16.6, 17, 19 et 20 correspondant respectivement aux sous-portefeuilles composés de k égal à 3, 4, 6, 8, 9 et 11 titres. Le choix précis de ces valeurs pour $\theta \leq 20$ a été guidé par le fait que nous avons pour but de diversifier les sous-portefeuilles avec au moins 3 titres et que nous avons choisi une seule valeur de θ pour représenter les cas d'équivalence de frontières efficientes même avec des variations de k .

Dans le cas où $\theta \geq 20$, nous avons fait l'expérience avec les valeurs θ égales à 20, 21, 25, 26, 28 et 30 correspondant respectivement aux sous-portefeuilles composés de k égal

TABLE 7.3 – Rendement estimé des 22 titres du premier compartiment de la BRVM sur la période du 05 Janvier au 20 mars 2015

Assets	μ (%)
SICABLE CI	5.28
AIR LIQUIDE CI	2.91
SOLIBRA CI	2.83
SITAB CI	5.21
CIE CI	3.69
ONATEL BF	14.02
SODE CI	3.40
SONATEL SN	5.91
BICI CI	5.19
BANK OF AFRICA BN	3.96
BANK OF AFRICA BF	6.64
BANK OF AFRICA CI	4.87
BANK OF AFRICA NG	3.51
ECOBANK TRANS. INCORP. TG	4.15
SAFCA CI	6.11
SGB CI	3.43
BOLLORE AFRICA LOGISTICS CI	5.99
SOGB CI	6.06
SAPH CI	3.64
BERNABE CI	6.43
TRACTAFRIC MOTORS CI	6.63
TOTAL CI	4.02

FIGURE 7.5 – Frontières optimales des sous-portefeuilles pour $\theta \in \{15.5, 16, 16.6, 17, 19, 20\}$

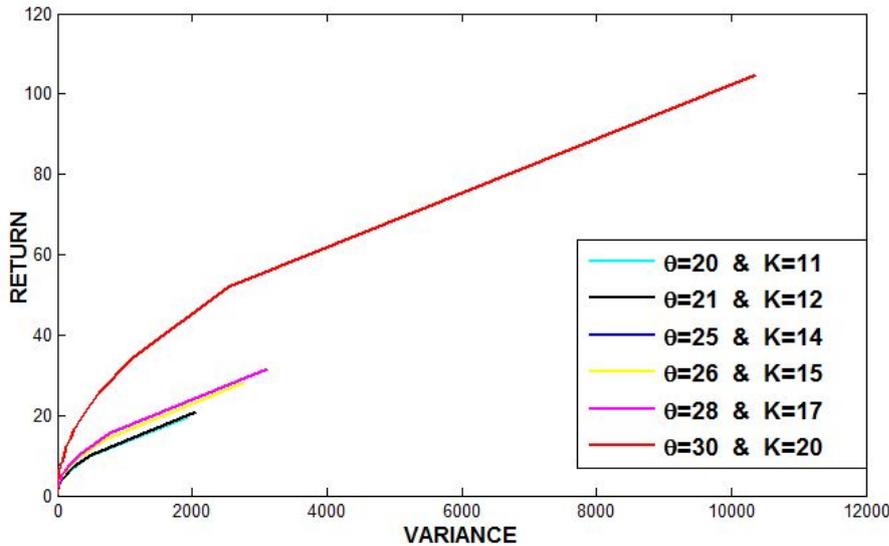


FIGURE 7.6 – Frontières optimales des portefeuilles pour $\theta \in \{20, 21, 25, 26, 28, 30\}$

11, 12, 14, 15, 17 et 20 assets (voir figure 7.6). Nous avons choisi de nous arrêter à $\theta = 30$ à cause du fait que 30 ans représentent généralement la limite en terme d’investissement à long terme.

7.4 Résultats-Discussion

7.4.1 Sur l’utilisation du PER ajusté

Les premières simulations au niveau des figures 7.1 et 7.2 nous montrent une parfaite convergence des frontières des sous-portefeuilles optimaux pour $\theta \in \{23, 21, 19, 18, 17, 16\}$. L’approche par les sous-portefeuilles sélectionnés sur la base d’une contrainte posée sur les PER p_i des 19 titres de la BRVM suivis, nous a permis d’avoir comme première conclusion qu’un investisseur peut restreindre p_i à 16 et avec ce sous-portefeuille de $k = 14$ titres, obtenir exactement les mêmes portefeuilles optimaux que le fait de se concentrer sur toutes les $n = 19$ actions suivies ou même toutes les actions de toute la

BRVM. Dès lors le problème qu'il posera sera directement :

$$P(\tilde{R}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} \\ s/c : \\ p_i \leq 16 \quad i \leq n \\ \bar{\mu} \cdot \mathbf{z} = \tilde{\mu} \\ \mathbf{z}^\top \cdot \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Nous considérons ainsi la frontière optimale pour $\theta = 16$ ans comme courbe de référence et nous faisons encore décroître θ successivement à 15, 14 et 12. Le point C_0 bien qu'étant le début de la convergence entre les frontières de sous-portefeuilles $\theta = 16$ et $\theta = 15$ n'élucide pas clairement la différence de celles-ci. Ce qui fait que résoudre le problème (7.1) revient presque à le résoudre pour $\theta = 15$ c'est à dire :

$$P(\tilde{R}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} \\ s/c : \\ p_i \leq 15 \quad i \leq n \\ \bar{\mu} \cdot \mathbf{z} = \tilde{\mu} \\ \mathbf{z}^\top \cdot \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

Les résultats que nous soulignerons à ce niveau seront faits aux points X_0 et Y_0 à travers leurs rendements respectifs $\mu(X_0) \simeq 0,075$ soit 7,5% et $\mu(Y_0) \simeq 0,115$ soit 11,5% (cf figure 7.3).

Ainsi nous pouvons énoncer les trois conclusions suivantes :

1. un investisseur visant un rendement objectif $\tilde{\mu} < \mu(X_0)$ résoudra le problème (7.2) pour $k = 13$ actions.
2. L'investisseur se fixant comme rendement objectif $\tilde{\mu} \in]\mu(X_0), \mu(Y_0)[$, devra se focaliser sur l'optimisation du sous-portefeuille composé d'actions dont le PER p_i est au plus égal à 13 d'où la résolution du problème d'optimisation pour $\theta = 13$ avec $k = 10$ actions.
3. S'il se fixe $\tilde{\mu} > \mu(Y_0)$, il aura dès le départ à résoudre le problème d'optimisation pour $\theta = 12$ en se concentrant sur la recherche de la composition z pour un sous-portefeuille de $k = 8$ actions au lieu d'un portefeuille de $n = 19$ actions tout en sachant que la frontière optimale sera exactement la même.

7.4.2 Sur l'utilisation du PER brut

1. La première grande conclusion, d'après les données collectées de Janvier à Mars 2015, est la valeur $\theta = 20$ comme valeur maximale que le PER exigé ne doit pas dépasser dans une sélection efficiente de sous-portefeuille optimal à la BRVM. L'investisseur détermine le niveau de performance qu'il pourra atteindre en fonction du risque qu'il est près à faire face (Figure 7.5). Au delà de 20 ans pour le PER θ , le rendement croît mais le risque que l'investisseur doit subir est extrêmement élevé (Voir figure 7.6). C'est ce que les investisseurs doivent éviter surtout dans un marché jeune et encore fragile comme la BRVM.
2. Un autre résultat aussi est que nous avons la confirmation que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ la frontière optimale des sous-portefeuilles est la partie supérieure d'une parabole (corollaire 6.1).

7.5 Conclusion

Ce chapitre a été l'occasion d'apporter une contribution à l'effort de développement du marché financier sous régional Ouest-africain, la BRVM. Nous y avons étudié l'optimisation de sous-portefeuilles sélectionnés sur la base des PER ajustés d'un côté et de l'autre des PER brut de titres risqués que nous avons suivi, sur la période de Janvier à Mars 2015.

La résolution du problème d'optimisation de sous-portefeuilles sélectionnés sur la base du PER, nous a permis de voir qu'en se basant sur une restriction du PER ajusté ainsi que du PER brut nous pouvons optimiser le nombre d'actifs même devant composer le portefeuille avant de viser un rendement global donné. Dans le cas de la BRVM et selon les données avec lesquelles nous avons travaillé, nous avons pu déterminer selon l'intervalle du rendement objectif, le nombre d'années auquel il est optimal de restreindre le PER ainsi que l'assiette minimale d'actions sur lesquelles on devra se focaliser pour atteindre ce rendement objectif. D'autre part nous avons pu projeter une valeur maximale du PER pour qu'un investissement reste dans les limites de l'efficience.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Sommaire

8.1	Résumé des résultats	119
8.2	Limites	120
8.3	Conclusion	121
8.4	Perspectives	123

Dans un contexte financier Ouest-africain marqué par la présence d'acteurs entre méfiance et ignorance de la bourse, il s'avère nécessaire d'édifier un espace économique viable et diversifié doté d'un système bancaire fiable mais aussi d'un marché financier actif et organisé. C'est pourquoi nous nous sommes penché sur le cas de la BRVM, en intégrant un outil pratique qui y est largement utilisé (le PER) à un modèle théorique classique adapté à son niveau actuel (le modèle espérance-variance). A travers une technique de sélection à l'aide du PER, nous sommes arrivés à optimiser ce modèle d'optimisation de portefeuille. Dans ce présent chapitre nous soulignons les principales contributions de cette thèse, ensuite nous spécifions les limites relatives à nos propositions et enfin nous énonçons les perspectives de ce travail.

8.1 Résumé des résultats

Le principal objectif de cette thèse était de concevoir et de proposer aux acteurs de la bourse sous-régionale une technique d'optimisation de portefeuille intégrant des outils qui leur sont familiers aux techniques de mathématiques. Cet objectif a été atteint dans la mesure où cette thèse a donné lieu à des contributions touchant doublement la théorie et la pratique. A titre récapitulatif, les contributions essentielles de la présente thèse se résument comme suit :

- ✓ Une mise à jour du modèle classique de Markowitz. En effet, de plus en plus, commen-

çait à se propager l'idée selon laquelle l'étau s'était complètement refermé autour de ces modèles et qu'il n'y avait rien à apporter. L'incorporation d'une sélection de sous-portefeuilles optimaux sur la base du PER nous a conduit à introduire le nouveau concept de convergence de frontières efficientes.

- ✓ Nous avons implicitement proposé une technique permettant de décortiquer ce qui se passait sur une frontière efficiente classique de Markowitz, c'est-à-dire permettant à chaque niveau de risque de connaître le nombre minimal d'actifs nécessaire pour composer le portefeuille de rendement maximal. En d'autres termes, quels sont les titres d'un marché dont les proportions d'investissement doivent être nulles dans tout portefeuille optimal pour un niveau de risque donné, car la contribution de ces dits titres, aussi petite qu'elle soit, déviara le rendement de l'optimum.
- ✓ Nous avons ainsi démontré que le PER était efficace pour identifier, à partir d'une constitution de sous-portefeuilles, les titres qui dans un portefeuille, à partir d'un certain niveau, n'apportent rien en terme de rendement mais augmentent considérablement le risque de ce dernier.
- ✓ Nous avons pu voir que 20 ans était la valeur maximale du PER pour qu'un investissement reste dans les limites de l'efficience au niveau de la BRVM. Avec les premières simulations fait à partir du PER ajusté, nous avons retenu la valeur de 16 ans comme horizon à partir duquel on relevait la convergence des frontières efficientes. Ce qui nous conduit à édifier l'intervalle entre 16 et 20 ans comme intervalle des meilleures valeurs limitatives du PER prenant en compte des sociétés ayant une bonne structure financière interne et pouvant améliorer leur PER dans un avenir proche.
- ✓ Nous avons par ailleurs apporté notre contribution pour impulser davantage la culture boursière et pour l'édification d'un système financier plus développé en Afrique de l'Ouest. A cet effet, la Bourse Régionale des valeurs Mobilières ainsi que les sociétés à sa cote ont été plébiscitées dans cette thèse à travers l'application de ces techniques intégrant cet outil pratique très intéressant à ce modèle théorique classique adapté à son niveau actuel.

8.2 Limites

La technique d'intégration d'une sélection d'actifs à l'aide du PER au modèle espérance-variance présente cependant deux types de limites.

Le premier type regroupe les limites inhérentes au modèle espérance-variance (cf

section 4.2.2). Quoique la composition de la matrice de covariances-variance se voit être optimiser, impliquant une minimisation de la charge de calcul, la limite sur la mesure de risque persiste quant à son aptitude à donner avec plus de précision la perte maximale auquel est exposée l'investisseur.

L'autre type de limite de notre technique intègre le fait que dès l'instant où l'investisseur se fixe un horizon pour avoir son retour sur investissements complet à travers un PER fixé, tous les actifs dont les PER individuels sont inférieurs à ce PER donné sont examinés dans le cadre du sous-portefeuille optimal. Bien qu'étant financièrement avantageux, il peut arriver que l'investisseur veuille choisir un nombre limité de titres parmi ceux-ci. Cette limite introduit ainsi le caractère très difficilement modélisable avec la précision réelle des choix des investisseurs.

Par ailleurs, on pourrait souligner la période relativement courte (Janvier-Mars 2015) sur laquelle les données ont été recueillies pour arriver à ces résultats. Cependant il faut dire que pendant quinze années d'existence on procédait à la cotation au fixing au niveau de la BRVM. En effet, démarrées en 1998, les activités de la BRVM ont débuté, par la cotation électronique centralisée au fixing, avec saisie des ordres au siège d'Abidjan, avant de passer en 1999, à la possibilité de saisie des ordres à partir des pays de l'Union économique et monétaire ouest africaine (UEMOA), trois fois par semaine. En 2001, la BRVM adopte la cotation quotidienne au fixing avec un délai de règlement-livraison de cinq jours qui n'évoluera qu'en 2007. Ce n'est qu'en 2013 que la cotation en continu a démarré avec pour but d'aboutir à la détermination de plusieurs cours pour une valeur pendant la même journée et de se rapprocher davantage des standards internationaux. Cependant, la réalité des bulletins officiels de la cote (BOC) publiés quotidiennement révèle que plusieurs titres restent des jours voire des mois sans une variation de leurs indices. Ce qui laisse notre période de recueil dans les limites de la pertinence.

8.3 Conclusion

Le chapitre 2 a été l'occasion d'étaler toute l'importance de l'Optimisation en Finance et cela a même permis de voir que la Finance est l'un des plus grands domaines d'application de l'Optimisation. Toutes les méthodes de base de l'Optimisation y ont été présentées avec pour la plupart, des exemples dans des contextes financiers bien particuliers où chacune de ces méthodes est adéquate.

D'une manière synthétique, le chapitre 3, a été consacré à une revue de l'essentiel des paramètres intervenant dans le choix d'un individu quand celui-ci doit le faire dans une totale incertitude. Qui parle d'incertitude parle de risque d'où le choix dans un avenir

incertain requiert une grande capacité d'anticipations rationnelles mais requiert aussi de l'efficience. La valeur actuelle nette, le taux de rentabilité interne, les fonctions d'utilité, le risque, l'arbitrage mais avant tout les valeurs mobilières sont autant de notions qui ont été présentées dans leur appréhension économique et mathématique. Nous avons dès lors pris les prédispositions qui nous ont permis de mieux aborder la revue de littérature de la théorie financière de 1952 à nos jours.

A travers le chapitre 4, nous avons présenté tous les modèles qui ont marqué l'histoire de la théorie du portefeuille depuis ces débuts en 1952 avec les travaux de Markowitz jusqu'à l'introduction des techniques avancées d'Intelligence artificielles qui lui ont donné une autre allure.

Dans le chapitre 5, nous avons étudié l'optimisation de sous-portefeuilles sélectionnés sur la base d'une restriction de l'horizon de l'investissement à travers le Price-earnings-ratio. En effet, partant du modèle standard de Markowitz et de ses hypothèses, nous avons introduit en plus une contrainte de sélection dynamique posée sur le PER transformant le problème en un problème de sélection successive de sous-portefeuilles optimaux. La résolution de ce problème d'optimisation, nous a permis de démontrer qu'en se basant sur une restriction du PER nous pouvons optimiser le nombre d'actifs même devant composer le portefeuille avant de viser un rendement global donné. C'est dans ce chapitre que nous avons introduit les nouveaux concepts de convergence et d'équivalence de frontières efficientes. Ainsi avec l'aide du PER, à chaque niveau de risque, nous allons pouvoir déterminer le minimum nécessaire d'actifs dans lesquels investir pour atteindre le rendement maximal nous plaçant sur la frontière efficiente du modèle de Markowitz standard.

Après le rappel de quelques éléments d'Analyse convexe et d'Optimisation sous contraintes notamment les conditions de Kuhn et Tucker, le chapitre 6 a été consacré exclusivement à l'exposition de la résolution du problème d'optimisation multiobjectif de sous-portefeuilles. Ainsi selon le PER brut exigé par l'investisseur et son degré d'aversion au risque donné par un paramètre d'aversion au risque, nous avons dégagé les expressions du risque et du rendement du sous-portefeuille optimal à travers un théorème suivi de deux corollaires.

Dans le chapitre 7, nous présentons la Bourse Régionale des Valeurs Mobilières et nous nous sommes focalisés sur les applications numériques. Nous avons, à partir de données recueillies de sociétés cotées à la BRVM, déterminé selon l'intervalle du rendement objectif, l'horizon de l'investissement c'est-à-dire le nombre d'années auquel il est optimal de restreindre le PER ainsi que l'assiette minimale d'actions sur lesquelles se focaliser pour atteindre ce rendement objectif. On a par ailleurs mis en évidence les cas

où se présentent la convergence et l'équivalence de frontières efficientes.

8.4 Perspectives

Comme perspective de cette thèse, nous comptons approfondir l'approche de sélection avec d'autres outils de la pratique boursière et la combinaison avec des mesures de risque encore plus adaptées à la réalité de notre marché financier. A cet effet, nous envisageons particulièrement une approche combinant la CVaR (la Value at Risk conditionnelle) comme mesure de risque et l'espérance conditionnelle pour le rendement pour prendre en compte l'aspect complexe du choix des investisseurs et leur conséquence dans la composition des portefeuilles. Il serait aussi intéressant d'envisager d'autre part une anticipation sur un cas de modèle de marché à temps continu où l'on pourra faire appel aux processus de Wiener ainsi que d'Itô.

Par ailleurs, nous envisageons pousser la recherche de sous-portefeuilles optimaux avec l'introduction d'actifs financiers autres que les actions tels que les produits dérivés, de l'assurance et les produits de la finance islamique qui se développent de plus en plus en Afrique de l'Ouest.

Bibliographie

- [1] Allaire G., *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, 2nd édition, Ellipses, 2012.
- [2] Artzner, Ph., Delbaen F. , Eber J.-M. , Heath D., *Thinking Coherently*, Risk magazine, **10**, November 1997, 68-71.
- [3] Basu S. *Investment performance of common stocks in relation to their Price-Earnings Ratios : A test of the efficient market hypothesis*, The Journal of Finance, 1977, **32** (3) : 663-682.
- [4] Bayón L., Grau J. M., Ruiz M. M., Suárez P. M., *An analytic solution for some separable convex quadratic programming problems with equality and inequality constraints*, Journal of mathematical inequalities, **4** (2010), 453-465.
- [5] Beaver W., Morse D. *What Determines Price-Earnings Ratios ?*, Financial Analysts Journal, 1978, **34** (4) : 65-76.
- [6] Beder T. *VaR : Seductive but dangerous*, Financial Analysts Journal, 1995, 51 : 12-24.
- [7] Bellman R., *Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press, 1957. - Réimpression 2003, Dover Publication, Mineola, New-York.
- [8] Ben-Tal A., Nemirovski A. N. *Robust convex optimization*, Mathematics of Operations Research, 1998, **23** (4) : 769-805.
- [9] Ben-Tal A., Nemirovski A. N. *Robust solutions of uncertain linear programs*. Operations Research Letters, 1999, **25** (1) : 1-13.
- [10] Bertsekas D., *Constrained Optimization and Lagrange multiplier Methods*, Academic Press, 1982.
- [11] Bierlaire M., *Introduction à l'optimisation différentiable*, PPUR, 2006.
- [12] Billionnet A., *Optimisation discrète : De la modélisation à la résolution par des logiciels de programmation mathématiques*

- [13] Bonnans F., *Optimisation continue : cours et problèmes corrigés*, Dunod, 2006.
- [14] Boyd S., Vandenberghe L., *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [15] Cambini R., *Soluzione ottima esplicita di un particolare problema di programmazione quadratica*, Decisions in Economics and Finance, Springer, Milan, **15** (1992), 73-86.
- [16] Chvátal V., *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [17] Ciarlet P. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.
- [18] Cornuejols G. & Tutuncu R. *Optimization methods in finance*, Cambridge University Press, 2007.
- [19] Culioli J-C, *Introduction à l'optimisation*, Ellipses, Références sciences, 2012.
- [20] Debreu G. *Definite and semidefinite quadratic forms*, 1952, *Econometrica* 20, 295-300.
- [21] Delfour M., *Introduction à l'optimisation et au calcul semi-différentiel*, Dunod, Sciences Sup, SMAI, 2012.
- [22] Demengel Françoise, Demengel Gilbert, *Convexité dans les espaces fonctionnels, Théorie et illustration par les exemples*, Ellipses, 2004.
- [23] Demengel F., Demengel G., *Exercices corrigés sur la convexité*, Ellipses, 2004.
- [24] Dodge Y., *Optimisation appliquée*, Springer, 2004.
- [25] El hachloufi M., Guennoun Z. , Hamza F. *Stocks Portfolio Optimization Using classification and Genetic Algorithms*. Applied Mathematical Sciences, 2012, **6**, (94) : 4673-4684.
- [26] Fernandez A., Gomez S., *Portfolio selection using neural network*, Computers & Operations Research **34**(2007), 1177-1191.
- [27] Fieldsend J, Mitatko J, Peng M. *Cardinality constrained portfolio optimization*, 5th International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning (IDEAL 2004), Exeter, England, Lecture Notes in Computer Science, vol 3177, p.788-793.
- [28] Ghedria K., *Optimisation combinatoire par métaheuristique : Origines, Concepts et éléments de base - Algorithmes canoniques et étendus*, Technip, Sciences et technologies, 2007.
- [29] Gilli M, Küllezi E. *Heuristic Approaches for Portfolio Optimization*. In : Sixth International Conference on Computing in Economics and Finance of the Society for Computational Economics. Barcelona, July 6-8, 2000.

- [30] Goh C. J., Yang X. Q., *Analytic efficient solution set for multi-criteria quadratic programs*, European J. Oper. Res., **92**(1996), 166-181.
- [31] Gould N.I.M, Toint Ph.L, *A Quadratic Programming Bibliography*, <http://www.optimization-online.org/DB-HTML/2001/02/285.html>, (2001).
- [32] Gould N.I.M, Toint Ph.L, *A Quadratic Programming Page*, <http://www.numerical.rl.ac.uk/qp/qp.html>.
- [33] Hamza F., Janssen J., *Portfolio Optimization Model Using Asymmetric risk Functions*, Actuarial Approach for Financial Risks, 1995, **3** Bis, 3-32.
- [34] Hamza, F., Janssen. J., *The Mean-Semi-variances Approach to Realistic Portfolio Optimization Subject to Transaction Costs*, Applied Stochastic Models In Business and Industry, John Wiley and Sons, **14**, 4, p .275-283, 1998a.
- [35] Hamza. F., Janssen. J, *Formule Explicite de La Value at Risk pour un portefeuille d'actions investi dans un marché log-normal*, Proceedings of the First Financial and Economic Engineering International Symposium (FEES 2K8), 20-21 Juin, Agadir, Morocco, p. 91-96, 2008.
- [36] Hamza. F, El Kharim. M, El Hachloufi. M., *Mean Variance Portfolio Selection Subject to Value at Risk Constraints applied to Real Stock Market Data*, Chapter Book in Computational Techniques for Banking and Risk Management, C. Zopounidis and M. Doumpos, Nova Science Publishers, NewYork, 2013.
- [37] Hiriart-Urrity J-B., *Les mathématiques du mieux faire - Volume 1, Premiers pas en optimisation*, Ellipses, Opuscules, 2007.
- [38] Hiriart-Urrity J-B., *Optimisation et Analyse convexe*, Eyrolles, 1998.
- [39] Jobst N, Horniman M, Lucas C, Mitra G. *Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints*. Quantitative Finance, 2001, **1** :1-13.
- [40] Jorion.P *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2nd Edition McGraw-Hill, 2000.
- [41] KARMARKAR N. *A New Polynomial-Time Algorithm For Linear Programming* A Combinatorica, 1984, **4** (4) :373-395
- [42] Konno H., Yamazaki H., *A Mean Absolute Deviation Portfolio Optimisation Model and Application to Tokyo Stock Market*. Management Science, 1991, **37** :519-531.
- [43] Lai. T. Y, *Portfolio Selection with Skewness : A Multiple-Objective Approach, Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1991, **1** :293-305.

- [44] Litterman R. & Quantitative Resources Group. *Modern Investment Management : An Equilibrium Approach*. John Wiley and Sons, 2003.
- [45] Lamberton D., Lapeyre B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2nd édition, Ellipses, Paris, 1998.
- [46] Makoto Ohsaki *Optimisation of Finite Dimensional Structures*, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, Japan, 2011.
- [47] Markowitz H. M. "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 1952, **7** (1) : 77-91.
- [48] Markowitz Harry M. *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments*, Wiley, 1959, Yale University Press, 1970, Basil Blackwell, 1991.
- [49] Markowitz. H , Perold. A., *Sparsity and Piecewise Linearity in Large Scale Portfolio Optimization Problems In Sparse Matrices and Their Uses*, I.S, Duff (ed.), Academic Press, New York, 1981, p. 89-108.
- [50] Mittelman H. D., *Decision tree for Optimization Software*, <http://plato.asu.edu/guide.html>.
- [51] Moisdon J-C., Nakhla M., *Recherche Opérationnelle : Méthodes d'optimisation en Gestion*, Presses des Mines-Transvalor, Economie et gestion, 2010.
- [52] Moraru V., *An Algorithm for Solving Quadratic Programming Problems*, *Computer Science Journal of Moldova*, **5** (1997).
- [53] Moraru V., Melnic R., *A Newton-type Method for Convex Quadratic Programming*, 8th *International Conference on Development and Applications systems*, Suceava, Romania, May 25-27, (2006).
- [54] Nesterov Y., Nemirovski A. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1994.
- [55] Nobert Y., Ouillet R., Parent R., *Méthodes d'optimisation pour la gestion*, Gaetan morin, 2008.
- [56] Penman S. H. *The Articulation of Price-Earnings Ratios and Market-to-Book and the evaluation of Growth*, *Journal of Accounting and Research*, 1996, **34** (2) : 235 (abstract).
- [57] PONCET P., PORTAIT R., *Finance de marché*, Dalloz Gestion, Dalloz, 3rd Edition, 2012.
- [58] PONCET P., PORTAIT R., *Finance de marché*, Dalloz Gestion, Dalloz, 4th Edition, 2014.
- [59] Roncalli T., *Introduction à la gestion des risques*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, 2001.

- [60] Rudd, Rosenbeg *Realistic Portfolio Optimisation. TIMS Studies in the Management Science*, 1979, 11 :21-46.
- [61] Schaerf A. *Local Search Techniques for Constrained Portfolio Selection Problems. Computational Economics*, 2002, 20 :177-190
- [62] Sharpe. W.F. *A simplified model for portfolio analysis, Management Science*, 1963, 9 :277-293.
- [63] Sharpe. W.F. *Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risks. Journal of Finance*, 1964, 19 :425-442.
- [64] Sharpe. W.F. *A Linear programming Algorithm for Mutual fund Portfolio Selection, Management Science*, 1967, 13 : 499-510.
- [65] Sharpe. W.F. *A Linear Programming Approximation for General Portfolio Selection Problem, J.Quantitative Anal*, 1971, 6 :1263-1275.
- [66] Speranza *Linear Programming Models for Portfolio Optimisation. Finance*, 1993, 14 :107-123.
- [67] Stone A *Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem, J.Quantitative Anal*, 1973, 6 :107-123.
- [68] Wolsey L.A., *Integer Programming. John Wiley and Sons, New York, NY, 1988.*
- [69] Yann C., Siarry P., *Optimisation multiobjectif, Eyrolles, 2002.*
- [70] Yoshimoto, *The Means Approach to Portfolio Optimisation Subject to Transaction Costs. Journal of the Operation Research, Society of Japan*, 1996, 99-117.
- [71] Young. R. M., *A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution, Management Science*, 1998, 5 :673-683.
- [72] Zenios, Pang, *A Mean Absolute Deviation Portfolio Optimisation for Mortgage Backed Securities. Annals of Operations Research*, 1993, **45**,(9) :433- 450.
- [73] [http :www.brvm.org](http://www.brvm.org)
- [74] [http :www.dynamique-mag.com](http://www.dynamique-mag.com)
- [75] [http :www.wikipédia.org](http://www.wikipédia.org)
- [76] [http :www.trader-finance.fr](http://www.trader-finance.fr)

Annexes

BRVM 10	269,37
Variation:	↑ 0,37%
Variation / 31	↑ 0,69%
Déc. 2014:	
BRVM Composite	264,41
Variation:	↑ 0,41%
Variation / 31	↑ 2,45%
Déc. 2014:	

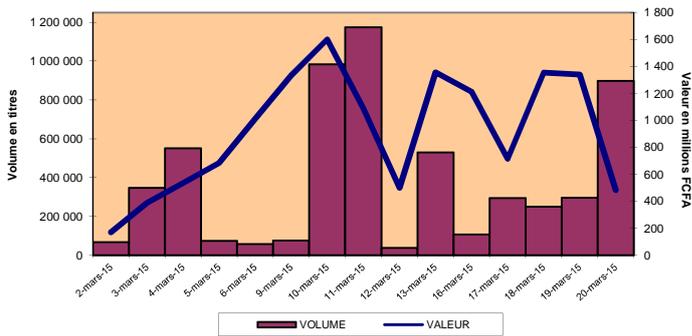
BULLETIN OFFICIEL DE LA COTE



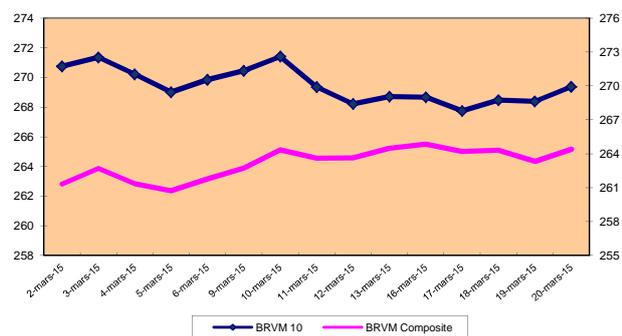
BOURSE REGIONALE DES VALEURS MOBILIERES
Afrique de l'Ouest

Capitalisations	- Actions:	6 524,51
(en milliards de FCFA) :	- Obligations:	1 301,32

Volumes et valeurs transigés



Evolution des indices



RESUME DE LA COTE

La BRVM a clôturé sa séance du vendredi 20 mars 2015 en hausse par rapport à la séance précédente. L'indice BRVM 10 est passé de 268,38 à 269,37 points, soit une progression de 0,37%. L'indice BRVM Composite, pour sa part, a gagné 0,41% à 264,41 points contre 263,34 précédemment.

- La valeur des transactions s'est établie à 483,93 millions de FCFA contre 1,34 milliard de FCFA le jeudi dernier.
- La capitalisation boursière du marché des actions se chiffre à 6 524,51 milliards de FCFA. Celle du marché obligataire s'élève à 1 301,32 milliards de FCFA.
- Le titre le plus actif en volume est Ecobank Transnational Incorporated TG avec 866 923 actions échangées. Le titre le plus actif en valeur est ONATEL BF avec 107,76 millions de FCFA de transactions.

PLUS FORTES HAUSSES

COOTE COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	75 000
Variation:	7,14%
FAO COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	59 990
Variation:	7,12%
NIWAX COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	72 500
Variation:	3,57%
OLIBRA COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	190 000
Variation:	2,70%
VO ENERGY COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	65 000
Variation:	2,48%

PLUS FORTES BAISES

SAPH COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	14 845
Variation:	-7,48%
FILTISAC COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	30 000
Variation:	-3,77%
AIR LIQUIDE COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	23 495
Variation:	-2,10%
BOLLORE AF. LOGISTICS COTE D'IVOIRE	
Cours (en FCFA):	169 000
Variation:	-1,74%
BANK OF AFRICA BURKINA FASO	
Cours (en FCFA):	98 000
Variation:	-1,61%

TITRES LES PLUS ACTIFS

Titres	Volumes	Valeurs (en FCFA)
Ecobank Transnational Incorporated TOGO	866 923	39 880 724
ONATEL BURKINA FASO	14 414	107 763 325
SIFCA 6.90% 2013-2021	7 815	78 150 000
Etat du Senegal 6,50% 2013-2023	3 440	34 056 000
SONATEL SENEGAL	735	18 283 490

Compartiments

	Titres Echangés / Inscrits	Volumes	Valeurs (en FCFA)	Nombre de transactions	Nombre de Titres		
					Gains	Inchangés	Pertes
Actions	34 / 39	886 073	368 362 779	250	10	13	11
Obligations	5 / 33	11 591	115 565 364	8	0	3	2
Total	39 / 72	897 664	483 928 143	258	10	16	13

INFORMATIONS

Opération en cours:

TRITURAF CI - Report de radiation de la cote.

INDICATEURS

Indices du jour	Ouverture	Clôture	Variation
BRVM 10	267,86	269,37	0,56%
BRVM Composite	262,99	264,41	0,54%
Ratio de liquidité:	62,61%		
PER moyen:	27,01		
Nombre de SGI participantes/Total:	19 / 21		



BENIN
Tel: (229) 21 312 126
Fax: (229) 21 312 077
paticoupe@brvm.org



BURKINA FASO
Tel: (226) 50 308 773
Fax: (226) 50 308 719
louedraogo@brvm.org



COTE D'IVOIRE
Tel: (225) 20 315 550/588
Fax: (225) 20 326 684
pbrizoua@brvm.org



GUINEE-BISSAU
Tel: (245) 32 016 02
Fax: (245) 32 016 02
saliuba@hotmail.com



MALI
Tel: (223) 44 901 810
Fax: (223) 44 901 811
abocoum@brvm.org



NIGER
Tel: (227) 20 736 692
Fax: (227) 20 736 947
imagagi@brvm.org



SENEGAL
Tel: (221) 33 821 15 18
Fax: (221) 33 821 15 06
nkisy@brvm.org



TOGO
Tel: (228) 22 212 305
Fax: (221) 22 212 341
natchotli@brvm.org

BOURSE REGIONALE DES VALEURS MOBILIERES

BRVM - Société Anonyme au capital de 3.062.040.000 CFA - RC: CI-ABJ-1997-B-208435-CC : 9819725 - E

Siège Social: Abidjan-CÔTE D'IVOIRE, Adresse: 18, Rue Joseph ANOMA (Rue des Banques)-Abidjan
Tél: +225 20 32 66 85/86, Fax: +225 20 32 66 84, Mail: brvm@brvm.org, Site Web: www.brvm.org

MARCHE DES ACTIONS

vendredi 20 mars 2015

Symbole	Titre	Séance de cotation		Cours Précedent	Cours du jour			Variation	Variation de l'année (31/12/2014)	Cours Référence	Ecart maximum		Dernier dividende Payé		Comp.	Rdt. Net	PER
		Volume	Valeur		Ouv.	Clôt.	Moy.				Bas	Haut	Montant net	Date			
SECTEUR - INDUSTRIE 162 points ▲ 0,59%																	
CABC	SICABLE CI			73 300	NC	NC	NC		-28,14%	73 300	67 805	78 795	5 169,6	29-avr.-14	1 ^{er}	7,05%	15,49
FTSC	FILTISAC CI	663	21 355 000	31 175	32 990	30 000	32 210	-3,77%	1,69%	30 000	27 750	32 250	550	24-juin-14	1 ^{er}	1,83%	43,86
NEIC	NEI-CEDA CI	10	42 150	4 205	4 215	4 215	4 215	0,24%	5,38%	4 215	3 900	4 530	225	28-juin-01	1 ^{er}	-	53,60
N TLC	NESTLE CI	99	4 752 000	48 000	48 000	48 000	48 000	0,00%	-12,73%	48 000	44 400	51 600	630	12-août-11	2 ^{ème}	-	89,59
SEMC	CROWN SIEM CI			22 850	NC	NC	NC		-0,70%	22 850	21 140	24 560	607,5	25-sept.-14	2 ^{ème}	2,66%	113,37
SIVC	AIR LIQUIDE CI	26	611 680	24 000	23 495	23 495	23 526	-2,10%	38,21%	23 495	21 735	25 255	630	7-juil.-14	1 ^{er}	2,68%	21,67
SLBC	SOLIBRA CI (*)	22	4 180 000	185 000	190 000	190 000	190 000	2,70%	-5,00%	190 000	175 750	204 250	5 490	27-juin-14	1 ^{er}	2,89%	17,67
SMBC	SMB CI	46	837 200	18 200	18 200	18 200	18 200	0,00%	30,09%	18 200	16 835	19 565	450	18-juil.-12	1 ^{er}	-	-
STBC	SITAB CI	34	5 076 000	150 000	149 000	150 000	149 294	0,00%	-5,65%	150 000	138 750	161 250	8 016	15-juil.-14	1 ^{er}	5,34%	17,19
TTRC	TRITURAF CI-Sté en Liquidation			490	SP	SP	SP			490	455	525	1 440	19-juil.-02	2 ^{ème}	ND	ND
UNLC	UNILEVER CI	6	225 000	38 000	37 500	37 500	37 500	-1,32%	1,35%	37 500	34 690	40 310	1 233	9-juil.-12	2 ^{ème}	-	-
UNXC	UNIWAX CI	25	1 833 500	70 000	74 000	72 500	73 340	3,57%	81,25%	72 500	67 065	77 935	1 350	15-sept.-14	2 ^{ème}	1,86%	22,95
TOTAL		931	38 912 530														
SECTEUR - SERVICES PUBLICS 749,61 points ▲ 0,78%																	
CIEC	CIE CI	113	8 292 700	70 000	70 000	75 000	73 387	7,14%	-9,09%	75 000	69 375	80 625	2 668,5	6-juin-14	1 ^{er}	3,56%	25,37
ONTBF	ONATEL BF	14 414	107 763 325	7 500	7 505	7 495	7 476	-0,07%	1,28%	7 495	6 935	8 055	994	2-juin-14	1 ^{er}	13,26%	12,96
SDCC	SODE CI	51	3 366 000	66 000	66 000	66 000	66 000	0,00%	-27,71%	66 000	61 050	70 950	2 430	23-juin-14	1 ^{er}	3,68%	24,27
SNTS	SONATEL SN	735	18 283 490	24 900	24 810	24 995	24 876	0,38%	9,63%	24 995	23 125	26 865	1 395	6-mai-14	1 ^{er}	5,58%	11,45
TOTAL		15 313	137 705 515														
SECTEUR - FINANCES 92,6 points ▼ -0,14%																	
BICC	BICI CI	40	3 283 000	82 000	83 000	82 000	82 075	0,00%	5,13%	82 000	75 850	88 150	4 271,22	1-août-14	1 ^{er}	5,21%	14,74
BOAB	BANK OF AFRICA BN			120 000	NC	NC	NC		46,33%	120 000	111 000	129 000	3 576	15-mai-14	1 ^{er}	2,98%	21,84
BOABF	BANK OF AFRICA BF	29	2 842 000	99 600	98 000	98 000	98 000	-1,61%	8,89%	98 000	90 650	105 350	6 209	23-avr.-14	1 ^{er}	6,34%	10,62
BOAC	BANK OF AFRICA CI	6	564 135	94 000	94 100	94 010	94 023	0,01%	4,46%	94 010	86 960	101 060	4 400	8-mai-14	1 ^{er}	4,68%	15,26
BOAN	BANK OF AFRICA NG	523	42 624 500	81 500	81 500	81 500	81 500	0,00%	-6,32%	81 500	75 390	87 610	2 960	8-mai-14	1 ^{er}	3,63%	20,03
BOAS	BANK OF AFRICA SN	118	8 636 000	73 500	74 000	73 500	73 186	0,00%	13,95%	73 500	67 990	79 010			1 ^{er}	-	33,28
ETIT	ECOBANK TRANS. INCORP. TG (**)	866 923	39 880 724	46	46	46	46	0,00%	-8,00%	46	43	49	1,99	19-juil.-13	1 ^{er}	-	11,38
SAFC	SAFCA CI	2	48 960	24 000	24 480	24 480	24 480	2,00%	2,71%	24 480	22 645	26 315	1 440	29-juil.-11	1 ^{er}	5,88%	-
SGBC	SGB CI	452	42 797 575	95 000	95 000	94 750	94 685	-0,26%	-2,11%	94 750	87 645	101 855	3 268	17-juin-14	1 ^{er}	3,45%	22,59
TOTAL		868 093	140 676 894														
SECTEUR - TRANSPORT 825,31 points ▼ -1,71%																	
SDSC	BOLLORE AFRICA LOGISTICS CI	10	1 690 000	172 000	169 000	169 000	169 000	-1,74%	-32,12%	169 000	156 325	181 675	10 798	1-juil.-14	1 ^{er}	6,39%	18,73
SVOC	MOVIS CI	22	111 980	5 090	5 090	5 090	5 090	0,00%	-25,64%	5 090	4 710	5 470	270	5-juil.-99	2 ^{ème}	-	-
TOTAL		32	1 801 980														
SECTEUR - AGRICULTURE 224,11 points ▼ -1,38%																	
PALC	PALM CI	365	6 568 180	18 000	18 000	18 300	17 995	1,67%	7,96%	18 300	16 930	19 670	1 260	30-mai-14	2 ^{ème}	6,89%	12,82
SICC	SICOR CI	7	35 000	5 000	5 000	5 000	5 000	0,00%	-1,77%	5 000	4 625	5 375	1 919	25-sept.-00	1 ^{er}	-	73,98
SOGC	SOGB CI	263	6 338 300	24 100	24 100	24 100	24 100	0,00%	-24,45%	24 100	22 295	25 905	1 710	28-juil.-14	1 ^{er}	7,10%	8,91
SPHC	SAPH CI	39	578 955	16 045	14 845	14 845	14 845	-7,48%	-15,53%	14 845	13 735	15 955	581	13-juin-14	1 ^{er}	3,91%	5,54
TOTAL		674	13 520 435														
SECTEUR - DISTRIBUTION 371,64 points ▲ 1,62%																	
ABJC	SERVAIR ABIDJAN CI	44	1 979 000	45 070	44 900	45 000	44 977	-0,16%	15,68%	45 000	41 625	48 375	450	9-juil.-14	1 ^{er}	1,00%	37,72
BNBC	BERNABE CI	6	479 500	80 000	79 500	80 000	79 917	0,00%	7,82%	80 000	74 000	86 000	5 040	3-juil.-14	1 ^{er}	6,30%	13,18
CFAC	CFAO CI	1	59 990	56 000	59 990	59 990	59 990	7,12%	30,12%	59 990	55 495	64 485	1 689	15-juil.-14	2 ^{ème}	2,82%	31,97
PRSC	TRACTAFRIC MOTORS CI			175 200	NC	NC	NC		3,67%	175 200	162 060	188 340	11 250	20-juin-14	1 ^{er}	6,42%	13,57
SHEC	VIVO ENERGY CI	5	325 000	63 425	65 000	65 000	65 000	2,48%	8,33%	65 000	60 125	69 875	644	18-août-14	2 ^{ème}	0,99%	26,91
T TLC	TOTAL CI	3	555 000	187 000	185 000	185 000	185 000	-1,07%	-7,50%	185 000	171 125	198 875	7 875	27-juin-14	1 ^{er}	4,26%	15,59
T TLS	TOTAL SN (***)	571	19 146 935	33 500	34 000	33 490	33 532	-0,03%	159,61%	33 490	30 980	36 000			1 ^{er}	-	50,72
TOTAL		630	22 545 425														
AUTRES SECTEURS 407,41 points ■ 0,00%																	
STAC	SETAO CI	400	13 200 000	33 000	33 000	33 000	33 000	0,00%	-2,94%	33 000	30 525	35 475			2 ^{ème}	-	13,11
TOTAL		400	13 200 000														
TOTAL - Marché des actions		886 073	368 362 779														

MARCHE DES DROITS

Symbole	Titre	Séance de cotation		Cours Précedent	Cours du jour			Variation	Variation depuis l'origine	Cours Référence	Ecart maximum		Parité	Période de négociation	
		Volume	Valeur		Ouv.	Clôt.	Moy.				Bas	Haut		Début	Fin
TOTAL-Marché des droits															

Légende:

(*) Dividende ajustés par rapport au fractionnement du 30 décembre 2014 : à raison de deux (2) actions nouvelles pour une (1) action ancienne.

(**) le capital de la société contient des actions de priorité convertibles au bout de 3 - 5 ans en actions ordinaires.

(***) Variation de l'année = variation depuis son introduction, le 20 février 2015.

Cours du jour: Ouv.: Ouverture Clôt.: Clôture Moy.: Moyen

Mentions: NC: Non Coté Ex-c: Ex-coupon Ex-d: Ex-droit SP: Suspendu Val-T: Valeur Théorique

PER = Cours / BNPA selon les données disponibles Rdt. Net: Rendement net (DNPA / Cours)

Comp.: 1 - Premier Compartiment 2 - Second Compartiment 3 - Compartiment de croissance

Ratio de liquidité = Titres échangés / Volume des ordres de vente

▲ : Progression de l'indice sectoriel ▼ : Recul de l'indice sectoriel ■ : Stabilité de l'indice sectoriel

MARCHE DES OBLIGATIONS

vendredi 20 mars 2015

Symbole	Titre	Séance de cotation		Cours Précédent	Cours du jour			Variation	Cours Référence	Ecart maximum		Valeur nominale	Coupon couru	Type Amort	Coupon d'intérêt		
		Volume	Valeur		Ouv.	Clôt.	Moy.			Bas	Haut				Période	Montant net	Eché.
BLIGATIONS REGIONALES																	
BHB.01	BHB 6.25% 2012-2017			9 800	NC	NC	NC		9 800	9 065	10 535	10 000	257,53	AC	A	587,5	11-oct
DC.02	BIDC 6.75 % 2010-2017			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	308,84	ACD	S	336,58	04 avr. / 04 oct.
DC.03	BIDC-EBID 6.50% 2014-2021			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	310,64	ACD	S	325,00	28 mars/ 28 sep.
DABF.03	BOA BURKINA F. 6.25% 2012-2017			9 900	NC	NC	NC		9 900	9 160	10 640	10 000	257,53	AC	A	587,5	11-oct
DAC.02	BOA - CI 6.25% 2012-2017			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	268,49	AC	A	612,5	11-oct
DAD.011	BOAD 5.95% 2012-2019			9 900	NC	NC	NC		9 900	9 160	10 640	10 000	22,76	ACD	A	595,00	06-mars
DAN.02	BOA NIGER 6.25% 2012-2017			9 250	NC	NC	NC		9 250	8 560	9 940	10 000	257,53	AC	A	587,5	11-oct
DAS.02	BOA SENEGAL 6.50% 2012-2017			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	267,84	IF	A	611,00	11-oct
DAB.03	CAA BENIN 6,50% 2011-2016	5	50 000	10 000	10 000	10 000	10 000	0,00%	10 000	9 250	10 750	10 000	233,29	ACD	A	650,00	09-nov
DRRH.01	CRRH-UEMOA 6.10% 2012-2022			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	58,98	AC	S	305,00	13 fév. / 13 août
DRRH.02	CRRH-UEMOA 6.10% 2012-2024			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	104,48	AC	S	305,00	17 janv. / 17 juil.
DRRH.03	CRRH-UEMOA 6% 2013-2023			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	239,01	AC	S	300,00	26 avril / 26 oct.
DS.03	ETAT SENEGAL 6.75% 2010-2015			2 500	NC	NC	NC		2 500	2 315	2 685	2 500	57,33	ACD	A	168,75	16-nov
DS.04	ETAT SENEGAL 6.70% 2012-2019			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	176,22	ACD	A	670,00	14-déc
DS.05	ETAT SENEGAL 6.50% 2013-2023	3 440	34 056 000	10 000	9 900	9 900	9 900	-1,00%	9 900	9 160	10 640	10 000	89,78	ACD	S	325,00	29 janv. / 29 juil.
DS.06	ETAT SENEGAL 6.50% 2014-2021			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	202,90	ACD	S	325,00	27 nov. / 27 mai.
DT.02	ETAT TOGOLAIS 6.50% 2011-2016			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	8,88	ACD	A	650,00	15-mars
DRT.01	ORAGROUP 6.75% 2013-2019	13	130 000	10 000	10 000	10 000	10 000	0,00%	10 000	9 250	10 750	10 000	196,57	ACD	S	337,5	04 juin. / 04 déc.
DAC.01	PAA 6.95% 2010-2017			5 400	NC	NC	NC		5 400	4 995	5 805	5 000	104,48	ACD	S	168,85	28 mai / 28 nov.
DAS.02	PAD 7% 2010-2017			6 250	NC	NC	NC		6 250	5 785	6 715	6 250	91,77	ACD	S	189,79	22 juin / 22 déc.
DALC.01	PALMCI 7% 2009-2016			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	154,11	ACD	S	342,06	28 juin / 28 déc.
DHAF.03	SHELTER AFRIQUE 6.6% 2014-2021			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	36,16	ACD	S	327,29	28 fév. / 28 août
DFC.01	SIFCA 6.90% 2013-2021	7 815	78 150 000	10 000	10 000	10 000	10 000	0,00%	10 000	9 250	10 750	10 000	414,98	ACD	A	676,2	08-août
DFBF.02	TPBF 6,50% 2011-2016			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	158,49	ACD	A	650,00	21-déc
DFBF.03	TPBF 6,50% 2013-2020			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	199,31	ACD	S	325,00	29 mai / 29 nov.
DFCI.010	TPCI 7% 2010-2017			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	326,03	AC	A	700,00	01-oct
DFCI.011	TPCI 6,5% 2011-2016			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	331,23	ACD	A	650,00	15-sept
DFCI.012	TPCI 6.00% 2012-2015			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	491,51	ACD	A	600,00	25-mai
DFCI.013	TPCI 6.50% 2012-2017			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	324,11	ACD	A	650,00	19-sept
DFCI.014	TPCI 6.00% 2013-2016	318	3 179 364	9 999	9 998	9 998	9 998	-0,01%	9 998	9 250	10 745	10 000	419,18	IF	A	600,00	08-juil
DFCI.015	TPCI 6.30% 2013-2018			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	185,19	ACD	S	315,00	03 juin / 03 dec.
DFCI.016	TPCI 6.55% 2014-2022			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	545,53	ACD	A	655,00	20-mai
TOTAL		11 591	115 565 364														
BLIGATIONS INTERNATIONALES																	
DFD.01	AFD 5.25% 2008-2016			10 000	NC	NC	NC		10 000	9 250	10 750	10 000	11,48	IF	A	525,00	12-mars
TOTAL																	
TOTAL-Marché des obligations		11 591	115 565 364														

Légende:
 Cours du jour: Ouv.: Ouverture Clôt.: Clôture Moy.: Moyen
 Type Amort: Type d'Amortissement IF: In Fine AC: Amortissement Constant AD: Amortissement Dégressif ACD: Amortissement Constant Différé
 Période: Périodicité de paiement des coupons A: Annuelle S: Semestrielle T: Trimestrielle
 éché.: Echéance de paiement des intérêts
 Conventions: NC: Non Coté Ex: Ex-coupon ou Ex-droit SP: Suspendu

Articles

Dynamic Selection of Optimal Sub-portfolio - Application in the Regional Stock Exchange of Securities in West Africa (BRVM)

Seydina I. Dione¹, Salimata G. Diagne¹, Déthié Dione¹, Youssou Gningue²

¹ Cheikh Anta Diop University, Dakar, Senegal

² Laurentian University, Canada

Correspondence: Seydina I. Dione, Cheikh Anta Diop University, Dakar, Senegal. Tel: 221-77-525-73-57. E-mail: seydaissa.dione@ucad.edu.sn

Received: July 1, 2015 Accepted: July 22, 2015 Online Published: August 14, 2015

doi:10.5539/jmr.v7n3p198 URL: <http://dx.doi.org/10.5539/jmr.v7n3p198>

Abstract

In this paper, we consider a generalization of the mean-variance model of Markowitz, including a new limiting constraint on marginal returns through the PER (price earnings ratio), that we apply to an optimal portfolio selection in the Regional Stock Exchange of Securities in West Africa (BRVM). We study the PER restriction impact through a dynamic selection of optimal sub-portfolios from an initial portfolio. We trace out dynamically the efficient frontiers of the sub-portfolios for different integer values of the PER. The main objective is to provide, for every level of performance (in term of returns) and for a fixed PER, the selection of optimal sub-portfolios that should lead, for a minimal risk, to the same performance as the original portfolio. We show that based on the PER, we can know for each level of performance, the securities to turn down to be able to define the best selection that converge to the optimal portfolio. Moreover, this work is a contribution to the development efforts of our financial systems and our West African stock market environment. The plots of the efficient frontiers of the sub-portfolios were carried out throughout data collected from the BRVM (Regional Stock Exchange Securities) in the period from October 2014 to February 2015.

Keywords: Mean-variance model, Minimal risk, Sub-portfolio, Price earnings ratio, Efficient frontiers convergence

1. Introduction

The main idea in a portfolio selection problem is to find out the very best way (optimal) to invest a defined capital among many financial stocks. What we name portfolio is given by each one of the multitude of possible affectations, through a linear combination, of this capital between those stocks. Markowitz (1952) was the first to introduce an approach (mean-variance model) to solve this kind of portfolio optimization problem of financial securities by posing the variance of returns as a measure of risk. The efficient frontier gives the set of the portfolios with a minimum risk for a given level of performance and then provides the optimum for any desired level of performance. Several critics of this approach were proved including the quadratic nature of the objective function and the calculation of the variance-covariance matrix. Thus to simplify the difficulties associated with the structure of Markowitz model, several alternative models have been proposed. Some authors such as Sharpe (1967), (1971) and Stone (1973) tried to linearize the portfolio choice problem. Rudd & Rosenbeg (1979) showed that the Markowitz model in its classic formulation may not be able to satisfy a professional investor and propose an even more realistic portfolio management. More recently, several linear programming models have been developed for portfolio selection. Konno & Yamazaki (1991), Zenios & Kang (1993) and Speranza (1993) proposed the calculation of portfolio risk through the use of the mean absolute deviation. They also proposed an approach including asymmetric risk criterion which eliminates many problems related to this optimization model. With the development of linear models Yoshimoto (1996) has developed optimization system based on the mean-variance criterion. Hamza & Janssen (1995) generalized standard models retaining the risk-return couple as a basic idea and suggesting a new risk measure defined as a convex combination of two semi-variances. They also proposed a general linear programming model based on separable programming techniques. Recently, a new measure of risk called Value at Risk (VaR) has been introduced in order to estimate the maximum loss that might occur at a quite probability during a given period. There are many models to assess the VaR, but its choice depends on the kind of portfolio and the datas used to estimate the parameters, Beder (1995), Jorion (2000). The different models that we present in this paper consist either in the maximization of the return for a given risk or in the minimization

of this risk for a given return. More recently, El Hachloufi & al. (2012) have suggested a method based on the classification and genetic algorithm in order to optimize a portfolio while acting simultaneously on the risk and the return. However, none of these imposes any parameter to guide the choice of individual shares that must constitute the portfolio.

On the other side, Fieldsend & al. (2004) have studied the introduction of cardinal constraints in the portfolio optimization. Gilli & al. (2000) have elaborated a synthesis of heuristic approaches in the optimal portfolio selection, whereas Schaefer (2002), Jobst & al. (2001) are interested in the simulation as an option, particularly in face of discrete constraints about assets choice. Despite the outstanding progress in the financial modelling, as above-mentioned in the literature since the advent of Markowitz model, we are going to use this last model expectation-variance as well as the hypothesis in a more specific African stock exchange context. In addition, we are going to insert a constraint linked to the Price Earnings Ratio, by fixing a minimum threshold for each return of the assets that might constitute the portfolio. This constraint, which we want to study the impact, is very useful in the practice (Basu, 1977; Penman, 1996). This constraint should lead us, from an initial portfolio, to elaborate sub-portfolios composed of fewer assets and providing the same level of return as the initial portfolio for a minimum risk. So the Markowitz model was generalized including this constraint which turns it into a dynamic selection problem of sub-optimal portfolios, for dynamic values of the price earnings ratio. We focus on digital simulation appearance through the efficient frontier plotting of sub-portfolios from an initial portfolio of nineteen shares with the best PER in the first compartment of the Regional Stock Exchange of Securities in West Africa at the end of last quarter 2014. The results obtained with the sub-portfolios were compared with the efficient frontier of the initial portfolio to draw up for each performance level, the selection of sub-portfolio that should lead, at a minimal risk, to the same performance as the original portfolio and implicitly the securities for which no amount will be invested in for any risk level.

This paper is organized as follows: Section 1 is the introduction, section 2 presents the elements of portfolio theory and the new introduced notion called convergence of efficient frontiers. The mathematical formulation of the dynamic selection model of sub-portfolios is described in Section 3. In Section 4 we present some numerical experiments and finally in Section 5 we describe the experimental results.

2. Portfolio Theory Elements

2.1 Return, PER and Sub-portfolio

The return obtained at the time t through an investment in a share is given by the difference between its course at the time t plus dividends received over the period $[t - 1, t]$ and its course at the time $t - 1$ divided by the price at the time $t - 1$:

$$r_t = \frac{(c_t + d_t) - c_{t-1}}{c_{t-1}} \quad (1)$$

Wherein :

c_t : Course of share i at the end of period t .

d_t : Dividends received at the end of the period.

The PER (price earnings ratio) of a share measures the number of years it takes to recover the invested amount in the event that this gain is constant. It evaluates thereby the dearness of a security relative to the prices of the corporate securities in the same sector (the higher the PER, the lower the action is considered cheap). It can be interpreted as an inverted yield according to Beaver & al. (1978) and Penman (1996).

$$p_i = \frac{1}{r_{it}} \quad (2)$$

wherein :

p_i : PER of the share i

r_{it} : Return of the share i at the time t .

However actual performance may differ from those obtained after the study of the PER for example because of a company growth policy for which the company in question chooses to reinvest instead of a total distribution of the

result by way of dividend. In practice, p_i is usually adjusted or round up so that we have $p_i \in \mathbb{N}^*$ to better facilitate its supervision.

The expected return of a share for the period T is :

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it} \quad (3)$$

According to (Markowitz, 1952), the expected return \bar{R}_p of a portfolio composed by n shares having \bar{r}_i as expected return is:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i \bar{r}_i \quad (4)$$

wherein $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ are the portions of capital that the investor places respectively in the assets i , ($i = 1, \dots, n$).

We will call sub-portfolio a portfolio of k assets constituted from an initial portfolio of n assets ($k \leq n$).

2.2 Portfolio Risk

The risk of a financial asset is the uncertainty about the value of this asset at a future date. The variance, the mean absolute deviation, the semi-variance, the VaR (Value at Risk) and the CVaR (Conditional Value at Risk) are tools used to measure the risk.

The risk of a portfolio can be measured by one of the above-mentioned elements. It depends on three factors, namely:

- The risk of each security included in the portfolio,
- The degree of independence of changes in equity,
- The number of shares which compose the portfolio.

Suppose the variance as a measure of risk, Markowitz (1952) establishes the following expression for a portfolio of n shares.

$$\sigma^2(\bar{R}_p) = \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i^2 \sigma^2(\bar{r}_i) + 2 \sum_{i \neq j} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_j \text{cov}(\bar{r}_i, \bar{r}_j) \quad (5)$$

2.3 Efficient Frontier - Convergence of Efficient Frontiers

2.3.1 Efficient Frontier

In an orthonormal axis system where we represent the risk in abscissa and the return in ordinate, the portfolio manager's objective is to maximize his return for a given risk or conversely to minimize risk for a given yield. Any portfolio is defined by the data of the torque corresponding risk-return and the efficient frontier is the representation of this set of optimal risk-return pairs (efficient) or efficient portfolios. We introduce the concepts of convergent efficient frontiers and those equivalent.

2.3.2 Convergence and Equivalence of Efficient Frontiers

Given two sets of portfolios composed from respectively m and n assets of a market ($m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$), let f_m and f_n be the efficient frontiers respectively associated with each of these compositions. Let P_m (respectively P_n) be a portfolio made from the m (respectively n) assets.

Definition 1 f_m and f_n converge to the same value if from a certain level of risk, f_m coincides with f_n , ie there is σ_0 strictly positive, such as at a same level of higher risk than σ_0 , the optimum yields corresponding to each of the two different compositions of portfolio tend toward the same value.

$$\exists \sigma_0 > 0, \forall (\sigma(P_m), \bar{R}(P_m)) \in f_m, (\sigma(P_n), \bar{R}(P_n)) \in f_n, \sigma(P_m) \geq \sigma_0, \sigma(P_n) \geq \sigma_0 \quad (6)$$

thus $\sigma(P_m) = \sigma(P_n) \iff \bar{R}(P_m) = \bar{R}(P_n)$

Definition 2 f_m is equivalent to f_n if f_m and f_n converge to the same value at any level of risk where efficient portfolios are defined, ie at the same level of risk, the optimum yields for each of the two different compositions of

portfolio tend toward the same value.

$$\begin{aligned} \forall (\sigma(P_m), \bar{R}(P_m)) \in f_m, (\sigma(P_n), \bar{R}(P_n)) \in f_n, \\ \sigma(P_m) = \sigma(P_n) \iff \bar{R}(P_m) = \bar{R}(P_n) \end{aligned} \tag{7}$$

3. Mathematical Formulation of the Problem

We define our sub-portfolio optimization problem as following for $k < n$ (n total number of assets in the market):

$$P(\tilde{R}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \tilde{\sigma} \mathbf{z} \\ \text{Subject to} \\ p_i \leq \theta \quad i = 1, \dots, n, \theta \in \mathbb{N}^* \\ \bar{\mathbf{R}} \mathbf{z} = \tilde{R} \\ \mathbf{z}^T \mathbf{1} = 1 \\ \mathbf{z} \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

with :

- p_i is the PER of the asset i
- θ the number of required years
- k is the number of assets which compose the sub-portfolio, ie the number of assets such as $p_i \leq \theta$.
- $\tilde{\sigma}$ is the covariance matrix of the k assets composing the sub-portfolio,
- \mathbf{z} is the column vector of portions of equity invested in the sub-portfolio,
- $\mathbf{1}$ is the column vector whose components are equal to 1,
- \tilde{R} is the required return,
- $\bar{\mathbf{R}}$ is the row vector of expected returns: $\bar{\mathbf{R}} = [\bar{r}_1 \quad \dots \quad \bar{r}_i \quad \dots \quad \bar{r}_k]$.

Solve this problem would require to work with $(k+2)$ Lagrange multipliers and the Lagrangian function associated with the problem $P(\tilde{R})$ can be written as following (Cornuejols G. et al. (2007))

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \lambda, \mu; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \tilde{\sigma} \mathbf{z} - \lambda (\bar{\mathbf{R}} \mathbf{z} - \tilde{R}) - \mu (\mathbf{1}^T \mathbf{z} - 1) - \sum_{i=1}^k \alpha_i (p_i - \theta) \tag{9}$$

wherein $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \alpha_i \in \mathbb{R}$ for $i = 1, \dots, k$ are the lagrange multipliers associated with the constraints.

Theorem 1 *The first order condition is sufficient since we minimize a quadratic function under linear constraints (the Karush-Kuhn-Tucker conditions). It is given by*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{z}, \lambda, \mu; \alpha_1, \dots, \alpha_k)}{\partial \mathbf{z}} = \tilde{\sigma} \mathbf{z} - \lambda \bar{\mathbf{R}}^T - \mu \mathbf{1} = 0 \tag{10}$$

Remark 1 The condition (10) is identical to the first order condition of the lagrangian function in the basic Markowitz problem (1959). With the introduction of a constraint on p_i as in the problem (8), it is important to note that we reduce the number of assets in which we invest through a sub-portfolio with the same level of optimality that the initial portfolio.

Proposition 1 *Considering the condition (10), the following of the resolution of the problem for the sub-portfolio defined from p_i becomes the same as the initial Markowitz problem (1952, 1959) and, consequently the variance of the optimal portfolio is given by expression:*

$$\tilde{\sigma}_{opt}^2 = \frac{C\tilde{R}^2 - 2A\tilde{R} + B}{D} \tag{11}$$

wherein

$$\begin{aligned} A &= \bar{\mathbf{R}}\tilde{\sigma}^{-1}\mathbf{1} = \mathbf{1}^{\top}\tilde{\sigma}^{-1}\bar{\mathbf{R}}^{\top} \\ B &= \bar{\mathbf{R}}\tilde{\sigma}^{-1}\bar{\mathbf{R}}^{\top} \\ C &= \mathbf{1}^{\top}\tilde{\sigma}^{-1}\mathbf{1} \end{aligned} \quad (12)$$

The shape of the optimal sub-portfolios frontier is a parabola branch, whose base is called the minimum variance sub-portfolio.

4. Numerical Experiments

We show in this part, the choice test of the sub-portfolios optimal composition and the optimal frontier in four main comparative cases where the sub-portfolios will be dynamically compiled from the constraint on the PER (p_i) of the shares which constitute these sub-portfolios (BASU, 1977). Particularly we suppose that investors don't put into their sub-portfolio risk-free asset, they will compose them on the basis of shares in the market composed at most with $n = 19$ the titles in the first (except PALM CI belonging to the second one) compartment of the stock exchange listed in the Top 20 p_i officially published on the BRVM's website in January in connection with the performance achieved in the fourth quarter 2014. We emphasize that the fact of being part of the first compartment shows more or less a guarantee in the reliability of published results because of the requirements to be part of this compartment.

4.1 Data Presentation

We first present the classification of our 19 shares according to their p_i officially published on behalf of the fourth quarter 2014. We emphasize that the ties were classified according to the decimal.

Table 1. Top 19 of the p_i in the first compartment of the Regional Stock Exchange of Securities in West Africa on December 31, 2014

Rank	Assets	p_i
1st	SAPH CI	7
2nd	BANK OF AFRICA BF	9
3th	SOGB CI	12
4th	PALM CI	12
5th	SONATEL SN	12
6th	BERNABE CI	12
7th	ONATEL BF	12
8th	ECOBANK TRANS. INCORP. TG	12
9th	BANK OF AFRICA CI	13
10th	TRACTAFRIC MOTORS CI	13
11th	BICI CI	14
12th	SICABLE CI	15
13th	BANK OF AFRICA BN	15
14th	AIR LIQUIDE CI	16
15th	TOTAL CI	17
16th	SITAB CI	18
17th	SOLIBRA CI	19
18th	BANK OF AFRICA NG	21
19th	SGB CI	23

Over the period from January 12 to February 6, 2015, that is to say four weeks of market, we collected datas about the assets named in table 1 from daily reports of the stock market (BOC). Those datas allowed us to get an estimation of the covariance matrix $\tilde{\sigma}$ and the mean return vector $\bar{\mathbf{R}}$ of the 19 risked assets given on the following page. We specify that we do not take in account serial correlation because of the relatively very short multivariate time series we use for the estimation of $\tilde{\sigma}$.

1	0.0257	0.0107	-0.0068	0.0044	0.0105	0.0068	-0.0115	-0.0014	0.0048	0.0007	0.0098	-0.0003	0.0132	0.0194	-0.0027	-0.0108	0.0020	0.0168	-0.0002
2	0.0107	0.0184	-0.0094	0.0146	0.0089	0.0161	-0.0117	-0.0027	0.0062	-0.0010	0.0076	-0.0005	0.0167	0.0361	0.0034	-0.0141	0.0021	0.0162	0.0027
3	-0.0068	-0.0094	0.0106	-0.0094	-0.0046	-0.0096	0.0098	0.0005	-0.0032	0.0003	-0.0065	-0.0003	-0.0135	-0.0206	0.0023	0.0137	-0.0024	0.0128	-0.0016
4	0.0044	0.0146	-0.0094	0.1013	0.0137	0.0327	-0.0063	-0.0071	-0.0022	-0.0073	0.0060	-0.0027	0.0512	0.0851	-0.0042	-0.0259	0.0026	0.0161	0.0038
5	0.0105	0.0089	-0.0094	0.0137	0.0120	0.0090	-0.0063	-0.0044	0.0094	-0.0006	0.0067	-0.0005	0.0108	0.0221	-0.0023	-0.0089	0.0020	0.0107	0.0012
6	0.0068	0.0161	-0.0096	0.0327	0.0090	0.0278	-0.0105	-0.0044	0.0094	-0.0032	0.0061	-0.0016	0.0200	0.0594	-0.0040	-0.0180	0.0015	0.0158	0.0022
7	-0.0115	-0.0117	0.0098	-0.0030	-0.0063	-0.0105	0.0423	-0.0036	-0.0030	-0.0004	-0.0038	0.0006	-0.0038	-0.0166	0.0028	0.0132	0.0009	-0.0174	-0.0007
8	-0.0014	-0.0027	0.0005	-0.0071	-0.0005	-0.0044	-0.0036	0.0041	0.0020	0.0005	-0.0021	0.0002	-0.0038	-0.0105	0.0005	0.0032	-0.0007	0.0004	-0.0012
9	0.0005	0.0090	-0.0018	-0.0065	0.0207	-0.0032	-0.0044	0.0009	0.0005	0.0014	-0.0006	0.0048	0.0062	-0.0032	0.0005	0.0063	0.0094	-0.0030	0.0020
10	0.0007	-0.0010	0.0003	0.0060	0.0067	-0.0032	-0.0004	0.0009	0.0005	0.0009	0.0002	0.0003	-0.0001	-0.0003	-0.0005	-0.0038	-0.0084	0.0003	0.0018
11	0.0098	0.0076	-0.0065	0.0060	0.0067	0.0061	0.0006	0.0002	-0.0006	0.0002	0.0118	0.0003	0.0003	0.0122	0.0015	-0.0090	0.0034	0.0078	0.0020
12	-0.0003	-0.0005	-0.0003	-0.0027	-0.0005	-0.0016	0.0006	-0.0021	-0.0006	-0.0038	0.0081	-0.0011	-0.0011	-0.0045	0.0002	0.0005	0.0003	-0.0005	-0.0000
13	0.0132	0.0361	-0.0135	0.0512	0.0108	0.0200	-0.0138	0.0038	-0.0065	-0.0038	0.0081	0.0463	0.0463	0.0556	-0.0041	-0.0254	0.0037	0.0226	0.0045
14	0.0194	0.0361	-0.0206	0.0851	0.0221	0.0594	-0.0166	-0.0105	0.0207	-0.0084	0.0222	0.0045	0.0556	0.1518	-0.0098	-0.0447	0.0026	0.0371	0.0064
15	-0.0027	-0.0034	0.0023	-0.0042	-0.0023	-0.0040	0.0028	0.0005	-0.0024	0.0003	-0.0015	0.0002	-0.0041	-0.0098	0.0011	0.0039	-0.0006	-0.0040	-0.0002
16	-0.0108	-0.0141	0.0137	-0.0259	-0.0089	-0.0180	0.0132	0.0032	-0.0045	0.0018	-0.0090	0.0005	-0.0254	-0.0447	0.0039	0.0246	-0.0032	-0.0190	-0.0034
17	0.0020	0.0021	-0.0024	0.0026	0.0020	0.0015	0.0009	-0.0007	0.0005	-0.0001	0.0034	0.0003	0.0037	0.0026	-0.0006	-0.0032	0.0019	0.0024	0.0005
18	0.0168	0.0162	-0.0128	0.0161	0.0107	0.0158	-0.0174	0.0004	0.0090	-0.0003	0.0078	-0.0005	0.0226	0.0371	-0.0040	-0.0190	0.0024	0.0254	0.0013
19	-0.0002	0.0027	-0.0016	0.0038	0.0012	0.0022	-0.0007	-0.0012	-0.0018	-0.0005	0.0020	-0.0000	0.0045	0.0064	-0.0002	-0.0034	0.0005	0.0013	0.0017

$$\bar{R} = (0.03690.06770.05790.06920.06070.06520.14530.04110.04930.06730.05380.04780.04060.03010.03960.05170.02860.03480.0344)$$

4.2 Optimal Portfolios Frontier for $p_i \leq \theta$ with $\theta \in \{23, 21\}$

For $\theta = 23$ years, the portfolios are composed from $k = 19$ shares, ie the whole shares of our reduced market and for $\theta = 21$ years, k starts to decrease, the number of shares which going to compose the sub-portfolio becomes 18. We have a first comparison on figure 1.

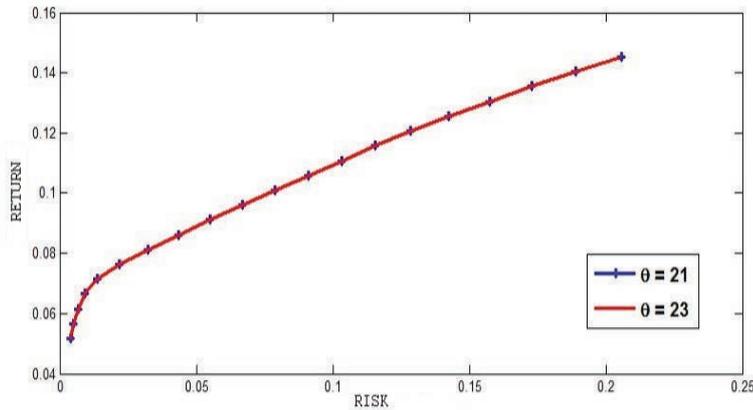


Figure 1. Optimal portfolios frontier for $\theta \in \{23, 21\}$

4.3 Optimal Portfolios Frontier for $p_i \leq \theta$ with $\theta \in \{21, 19, 18, 17, 16\}$

We examine comparatively the cases where θ successively takes the values 21, 19, 18, 17 and 16 years, which corresponds to a decreasing of k with the respective values of 18, 17, 16, 15 et 14 shares. The result shows an equivalence of efficient frontiers presented in figure 2.

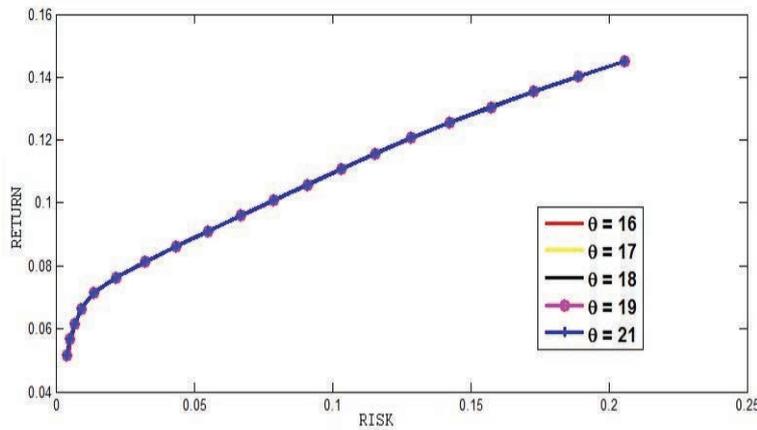


Figure 2. Optimal portfolios frontier for $\theta \in \{21, 19, 18, 17, 16\}$

4.4 Optimal Portfolios Frontier for $p_i \leq \theta$ with $\theta \in \{16, 15, 14, 12\}$

The optimal frontier for $\theta = 16$ becomes the reference curve of our comparison since we have that perfect convergence of optimal frontiers for $\theta > 16$. The plotting of the frontiers for $\theta \in \{15, 14, 13, 12\}$ shows convergence with the frontier for $\theta = 16$ starting each one from a given point (cf Figure 3). We note three points, C_0 beginning of the convergence between $\theta = 16$ and $\theta = 15$, X_0 the this between $\theta = 16$ and $\theta = 13$ and Y_0 the beginning between $\theta = 16$ and $\theta = 12$.

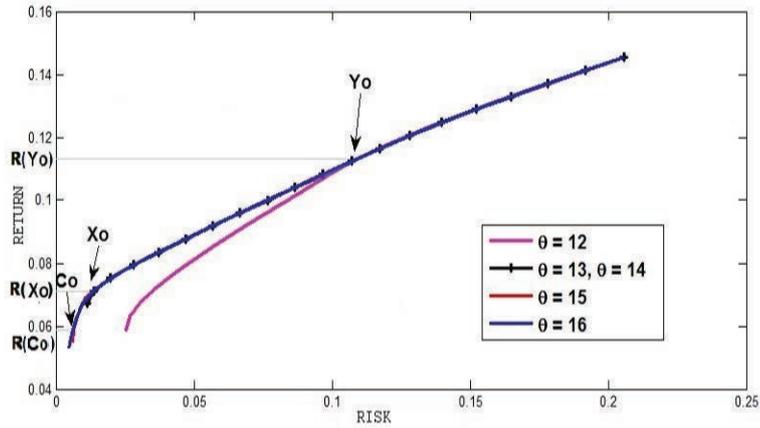


Figure 3. Optimal portfolios frontier for $\theta \in \{16, 15, 13, 12\}$

When frontiers $\theta = 14$ and $\theta = 13$ are equivalent where X_0 is the beginning of the convergence with $\theta = 16$ for both values. Thus it will be better to take $\theta = 13$.

4.5 Optimal Portfolios Frontier for $p_i \leq \theta, \theta < 12$

We notice a convergence loss for θ , an integer inferior to 12, as we can see in Figure 4 with the comparison of $\theta = 16$ and $\theta = 12$.

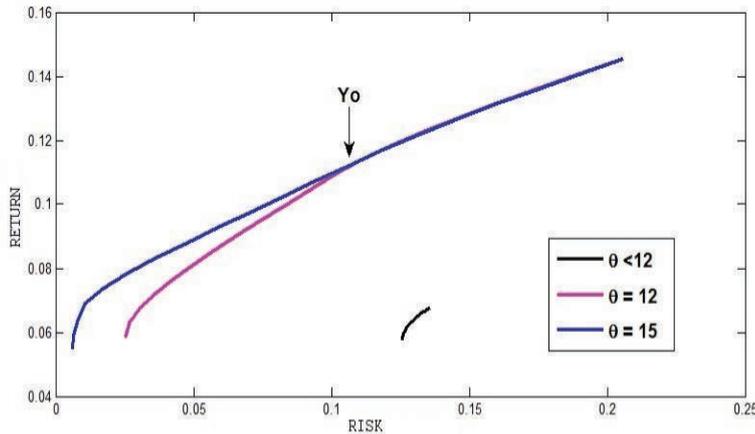


Figure 4. Optimal portfolios frontier for $\theta < 12$

5. Empirical Results

The first simulations through figures 1 and 2 show us a perfect convergence of the sub-portfolio optimal frontiers for $\theta \in \{23, 21, 19, 18, 17, 16\}$.

The approach by selected sub-portfolios on the basis of a constraint on the PER p_i of 19 shares in the Regional Stock Market Securities, allows us to deduce as a first conclusion that an investor may restrict p_i to 16, and with this sub-portfolio of $k = 14$, he can get exactly the same optimal portfolios than in focusing on $n = 19$ shares or even all shares of the Regional Stock Market Securities.

Therefore, the equation that we will formulate is:

$$P(\tilde{R}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} \\ s/c : \\ p_i \leq 16 & i \leq n \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} = \tilde{R} \\ \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{1} = 1 \end{cases} \quad (13)$$

Thus, we consider the optimal frontier for $\theta = 16$ as a reference curve and we decrease again successively to 15, 14 et 12. The point C_0 although being the beginning of the convergence between the frontiers of the sub-portfolios

$\theta = 16$ et $\theta = 15$ do not illustrate clearly the difference of these two frontiers. That is solve the problem (13) almost amounts to solve it for $\theta = 15$:

$$P(\bar{R}) : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{z} \\ s/c : \\ p_i \leq 15 & i \leq n \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} = \bar{R} \\ \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{1} = 1 \end{cases} \quad (14)$$

The results that we are going to emphasize at this level will be lied in the points X_0 and Y_0 throughout their respective yields $R(X_0) \simeq 0,075$ or 7,5% and $R(Y_0) \simeq 0,115$ or 11,5% (cf figure 3).

Then we may express the three following conclusions:

1. The investor who aims an objective return $\bar{R} < R(X_0)$ will solve the problem (14) for $k = 13$ shares.
2. The investor whose aim is an objective return $\bar{R} \in]R(X_0), R(Y_0)[$, must focus on the optimization of a sub-portfolio composed by shares which Price Earnings Ratio p_i is at most equal to 13 hence the resolution of an optimization problem for $\theta = 13$ with $k = 10$ shares.
3. If he sets a target of $\bar{R} > R(Y_0)$, he must solve at the beginning the optimization problem for $\theta = 12$ by focusing on the research of the composition z for a sub-portfolio of $k = 8$ shares instead of a bigger portfolio of $n = 19$ shares while knowing that the optimal frontier will be the same.

6. Discussion

This paper is a contribution to the development effort of the west african financial market, the Regional Stock Market Securities and was the opportunity for us to study selected sub-portfolios optimization on the base of Price Earnings Ratio of shares published at the end of the last quarter of the year 2014. Indeed, we have followed from January 12 to February 06 the returns of 19 companies of first section that appear in the ranking of the 20 best Price Earnings Ratio of the last quarter.

The resolution of the optimization problem of Markowitz with a dynamic constraint on the Price Earnings Ratio, which change this problem to an optimal dynamic sub-portfolio selection, allows us to see that being focused on a Price Earnings Ratio restriction we can optimize the number of shares which compose the portfolio before targeting a given global output. In the case of the Regional Stock Market Securities and according to the datas with which we have worked, we might determine depending on the objective return interval, the number of years during which it is optimal to restrict the Price Earnings Ratio, as well as the minimal base of shares on which we have to focus in order to reach this objective return.

We long to continue this work through a multiobjective optimization, which includes the research about the Price Earnings Ratio impact, and uses real values, without formulating a hypothesis about the outputs distribution. At the same time, we are going to focus on the risk measure and especially we will try to collect datas for a more long time. However, this is a real difficulty when we notice the flaws of our stock exchange system in this field.

Acknowledgements

This work was supported by NLAGA-Simons project. We do thank as well Dr. Moustapha Sene of Gaston Berger University in Senegal for all his help during the research.

References

- Basu, S. (1977). Investment performance of common stocks in relation to their Price-Earnings Ratios: A test of the efficient market hypothesis. *The Journal of Finance*, 32(3), 663-682.
- Beaver, W., & Morse, D. (1978). What Determines Price-Earnings Ratios?. *Financial Analysts Journal*, 34(4), 65-76. <http://dx.doi.org/10.2469/faj.v34.n4.65>
- Beder, T. (1995). VaR : seductive but dangerous. *Financial Analysts Journal*, 51, 12-24. <http://dx.doi.org/10.2469/faj.v51.n5.1932>
- Ciarlet, P. (1998). *Introduction l'analyse numrique matricielle et l'optimisation*, Dunod.
- Cornuejols, G., & Tutuncu, R. (2007). *Optimization methods in finance*, Cambridge University Press.

- Debreu, G. (1952). Definite and semidefinite quadratic forms. *Econometrica*, 20, 295-300.
<http://dx.doi.org/10.2307/1907852>
- El hachloufi, M., Guennoun, Z., & Hamza, F. (2012). Stocks Portfolio Optimization Using classification and Genetic Algorithms. *Applied Mathematical Sciences*, 6(94), 4673-4684.
- Fieldsend, J, Mitatko, J., & Peng, M. (2004). *Cardinality constrained portfolio optimization*, 5th International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning (IDEAL 2004), Exeter, England, Lecture Notes in Computer Science, vol 3177, p.788-793.
- Gilli, M, Kllezi, E. (2000, July 6-8). *Heuristic Approaches for Portfolio Optimization*. In: Sixth International Conference on Computing in Economics and Finance of the Society for Computational Economics. Barcelona.
- Hamza, F., & Janssen, J. (1995). Portfolio Optimization Model Using Asymmetric risk Functions. *Actuarial Approach for Financial Risks*, 3 Bis, 3-32.
- Jorion, P. (2000). *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2nd Edition McGraw-Hill.
- Jobst, N, Horniman, M, Lucas, C., & Mitra, G. (2001). Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints. *Quantitative Finance*, 1, 1-13.
<http://dx.doi.org/10.1088/1469-7688/1/5/301>
- Konno., & Yamazaki. (1991). A Mean Absolute Deviation Portfolio Optimisation Model and Application to Tokyo Stock Market. *Management Science*, 37, 519-531. <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519>
- Makoto, O. (2011). *Optimisation of Finite Dimensional Structures*, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, Japan.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz Harry, M. (1959, 1970, 1991). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Wiley, 1959, Yale University Press, 1970, Basil Blackwell, 1991.
- Penman, S. H. (1996). The Articulation of Price-Earnings Ratios and Market-to-Book and the evaluation of Growth. *Journal of Accounting and Research*, 34(2), 235 (abstract). <http://dx.doi.org/10.2307/2491501>
- Rudd., & Rosenbeg. (1979). Realistic Portfolio Optimisation. *TIMS Studies in the Management Science*, 11, 21-46.
- Schaerf, A. (2002). Local Search Techniques for Constrained Portfolio Selection Problems. *Computational Economics*, 20, 177-190. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1020920706534>
- Sharpe. (1967). A Linear programming Algorithm for Mutual fund Portfolio Selection. *Management Science*, 13, 499-510.
- Sharpe. (1971). A Linear Programming Approximation for General Portfolio Selection Problem. *J.Quantitative Anal*, 6, 1263-1275.
- Speranza. (1993). Linear Programming Models for Portfolio Optimization. *Finance*, 14, 107-123.
- Stone. (1973). A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem. *J.Quantitative Anal*, 6, 107-123.
- Yoshimoto. (1996). The Means Approach to Portfolio Optimisation Subject to Transaction Costs. *Journal of the Operation Research*, Society of Japan, pp.99-117.
- Zenios., & Pang. (1993). A Mean Absolute Deviation Portfolio Optimisation for Mortgage Backed Securities. *Annals of Operations Research*, 45(9), 433-450.

Copyrights

Copyright for this article is retained by the author(s), with first publication rights granted to the journal.

This is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution license (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>).

Multiobjective sub-portfolio optimization : An analytic solution for a convex quadratic programming problem with a dynamic cardinality constraint on the Price-Earnings-Ratio

Seydina I. Dione¹, Salimata G. Diagne¹, Moustapha Sene²,
Mbaye B. Gueye¹

¹ Cheikh Anta Diop University, Dakar, Senegal

² Gaston Berger University, St-Louis, Senegal

Received: 08/14/15 - Accepted: 11/23/15

International Journal of Computing and Optimization

ISSN 2367-5594 HIKARI Ltd

Abstract

In traditional portfolio optimization problem, we minimize the risk for a given return or we maximize the return for a given risk. In this paper, we aim to optimize a balanced measure of risk and return, mainly after an asset selection using Price-Earning-Ratio (PER). Starting from the mean-variance model, we have a multiobjective function including a parameter of risk aversion which lead us to a convex quadratic programming problem with a cardinality constraint on the PER of the assets. This latter function is used to dynamically select the best stocks that compose our optimal sub-portfolio of a reduced size. We give a complete analytic solution to this problem and trace out the efficient frontier for different values of the PER as an application by using collected data from the Regional Stock Exchange Securities in West Africa (BRVM).

Keywords:

Mean variance model, Optimal sub-portfolio frontier, Risk aversion, Price-Earning-Ratios, Convex quadratic function, Lagrangian function

1 Introduction

The problem of minimizing a convex quadratic function in n variables, subject to x linear constraints (equality or inequality) over the variables is known as Convex Quadratic Programming. In general, its standard form is [2]:

$$\begin{aligned} \text{minimize} & : \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top Q \mathbf{z} - q^\top \mathbf{z} \\ \text{subject to} & : A \mathbf{z} = b, \mathbf{z} \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Here Q is a symmetric and positive semidefinite $n \times n$ matrix, q is an n -vector, A is an $m \times n$ -matrix, b is an m -vector and " \top " symbol refers to the transposition operator [14]. Gould et al. [10] present several papers which deal with this type of quadratic problems and applied algorithms to solve them. CPLEX, KNITRO, LINDO and QUADPROD are some of the multitude quadratic programming solvers [11][13]. Bayón et al. [2], Cambini et al. [5] and Goh et al. [9] have elaborated analytic solutions for certain instances of quadratic problems. Furthermore, when we consider the standard Markowitz mean-variance model we can see the portfolio selection problem as a case of quadratic programming problem. This well known standard model is given in [12] by:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} & : \frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \tilde{\sigma} \mathbf{z} \\ \text{Subject to} & : \mathbb{I}^\top \mathbf{z} = 1, \quad 0 \leq \mathbf{z} \leq 1 \\ & \mu \mathbf{z} = \bar{\mu} \end{aligned} \quad (2)$$

Where $\tilde{\sigma}$ is the covariance matrix between returns of the n different assets, \mathbf{z} is the column vector of portions of capital invested in each one of the n assets, μ is the row vector of the n assets expected returns and \mathbb{I} is the column vector whose n components are equal to 1 and $\bar{\mu}$ represents the required return. The problem (2) consists of minimizing the risk for a given level of return $\bar{\mu}$. Fernandez et al. [8] presented the Markowitz model for the portfolio selection as following:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} & : \frac{1}{2} \lambda \mathbf{z}^\top \tilde{\sigma} \mathbf{z} - (1 - \lambda) \mu \mathbf{z} \\ \text{Subject to} & : \mathbb{I}^\top \mathbf{z} = 1, \quad 0 \leq \mathbf{z} \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Where the additional variable $\lambda \in [0, 1]$ is the parameter of risk aversion. We can underline two particular cases with the value of λ . The first case is when $\lambda = 0$ that coincide of minimizing $(-\mu \mathbf{z})$ what is equivalent to maximizing $\mu \mathbf{z}$ the portfolio mean return, so the optimal result will be reached with the

greatest asset mean return. The second particular case with $\lambda = 1$ exclusively minimizes the total risk of the portfolio ($\frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z}$) and several assets will be composed for the optimal result. The case $\lambda \in]0, 1[$ represents the optimization problem which in a balanced way involve the variance and the mean return expressions.

In this work, we will specifically focus on $\lambda \in]0, 1[$ where the multiobjective function to optimize is a convex quadratic one. In addition, we will introduce a dynamic sub-portfolio selection using Price-Earnings-Ratio (PER) and will provide a complete analytic solution for this new problem. As a reminder, the PER of an asset is a ratio widely used in practice which gages the number of years it takes to recover the invested amount in the event that the gain is constant. It evaluates thereby the dearness of a security relative to the prices of the corporate securities in the same sector, the higher the PER is, the lower the action is considered cheap, ([1], [15]). It can be interpreted as an inverted yield according to Beaver et al. [3].

$$\theta_i = \frac{1}{\mu_i} \tag{4}$$

Where θ_i is the PER of the asset i and μ_i the mean return of the asset i . However actual performance may differ from those obtained after the study of the PER. For example because of a company growth policy for which the company in question chooses to reinvest instead of a total distribution of the result by way of dividend. Recently, several authors have worked on the use of very different technics in optimization and portfolio selection even advanced ones like Neural Networks [8] or Classification and Genetic algorithms [7]. But none or very few have tried to mix optimization theory and tools widely used in practice. That is what we will attempt with the introduction of the PER through a dynamic selection of optimal sub-portfolios.

After this first section, the second one presents the mathematical formulation and the theoretical results by providing the complete analytic solution for our problem. In the third section we give the applications on data of the Regional Stock Exchange Securities in West Africa as numerical experiments and end up with some discussions.

2 Theoretical results

2.1 Mathematical formulation of the problem

We define our multiobjective sub-portfolio optimization problem as following for $k < n$ (n total number of assets in the market):

$$P_\lambda : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - (1 - \lambda) \mu \cdot \mathbf{z} \\ \text{subject to} \\ \mu_i = \frac{1}{\theta_i} \geq \frac{1}{\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^N x_i = k \\ \mathbb{I}^\top \cdot \mathbf{z} = 1 \\ \mathbf{z}_i > 0, \quad i = 1, \dots, k \end{cases} \quad (5)$$

wherein:

- λ is the parameter of risk aversion, $\lambda \in]0, 1[$,
- θ_i is the the Price-Earning-Ratio of the asset i , θ the the Price-Earning-Ratio required,
- $x_i; i = 1, \dots, n$ are variables such as $x_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu_i \geq \frac{1}{\theta} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- k is the number of assets composing the sub-portfolio, ie the number of assets such as $x_i = 1$ ($\mu_i \geq \frac{1}{\theta}$).
- \mathbf{z} is the column vector of portions of capital invested in each one of the k assets in the sub-portfolio,
- $\tilde{\sigma}$ is the covariance matrix of the k assets composing the sub-portfolio,
- \mathbb{I} is the column vector whose k components are equal to 1,
- μ is the row vector of expected returns: $\mu = [\mu_1 \quad \dots \quad \mu_i \quad \dots \quad \mu_k]$.

2.2 Theorem and Proof

Theorem For a fixed PER θ ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$) and thus for $K \in N$ number of assets composing the sub-portfolio, the variance σ_{opt}^2 and the return μ_{opt} of the optimal sub-portfolio for the problem P_λ depend on $\lambda \in]0, 1[$ and are written:

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{D \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 - 2D \left(\frac{1}{\lambda} \right) + D + 1}{B} \quad (6)$$

$$\mu_{opt} = \frac{1}{\lambda} \frac{D}{B} + \frac{A - D}{B} \quad (7)$$

with

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top = \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\ B &= \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\ C &= \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top \end{aligned}$$

Proof Solve the problem (5) would require at first to determine k , the number of assets composing the sub-portfolio, what we obtain when we fix θ the Price-Earning-Ratio required.

Suppose we fix θ ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$), so we have $\sum_{i=1}^N x_i = k$ that means the number of assets such as $\mu_i \geq \frac{1}{\theta}$. Thus the problem becomes for a given sub-portfolio defined by the PER θ :

$$P_\lambda^\theta : \begin{cases} \min_{\mathbf{z}} \frac{1}{2} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - (1 - \lambda) \mu \cdot \mathbf{z} \\ \text{subject to} \\ \mathbb{I}^\top \cdot \mathbf{z} = 1 \\ \mathbf{z}_i > 0, \quad i = 1, \dots, K \end{cases} \quad (8)$$

The Lagrangian function associated with the problem P_λ^θ can be written as following:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \gamma) = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} - (1 - \lambda) \mu \cdot \mathbf{z} + \gamma (1 - \mathbb{I}^\top \mathbf{z}) \quad (9)$$

where $\gamma \in \mathbb{R}$ is the Lagrange multiplier.

The Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions for P_λ^θ will be written [[4], [10]]:

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} - (1 - \lambda) \mu - \gamma \mathbb{I}^\top = 0 \\ \mathbb{I}^\top \mathbf{z} - 1 = 0 \\ \mathbf{z} > 0 \end{cases} \quad (10)$$

Because our function to optimize is convex, the KKT conditions (10) are necessary and sufficient to make \mathbf{z}^* be considered global minimum point in the problem P_λ^θ .

Thus

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} - (1 - \lambda) \mu - \gamma \mathbb{I}^\top &= 0 \\ \lambda \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} &= (1 - \lambda) \mu + \gamma \mathbb{I}^\top \\ \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} &= \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \mu + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I}^\top \\ \text{or} & \\ \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z} &= \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \end{aligned}$$

And then we have the expression of \mathbf{z}^* :

$$\mathbf{z}^* = \tilde{\sigma}^{-1} \left[\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \right] \quad (11)$$

We remark that the expression of \mathbf{z} depend on the Lagrange multiplier γ . So substituting for its value in the constraint, we get:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^\top \cdot \mathbf{z} &= 1 \\
\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \left[\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \right] &= 1 \\
\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} &= 1 \\
\frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} &= 1 - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top \\
\gamma &= \frac{\lambda \left[1 - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top \right]}{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}}
\end{aligned}$$

Consequently

$$\gamma = \frac{\lambda - (1-\lambda) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top}{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}} \quad (12)$$

The optimal sub-portfolio variance is written as

$$\begin{aligned}
\sigma_{opt}^2 &= \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \\
&= \mathbf{z}^\top \left[\frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mu^\top \right] \\
&= \frac{\gamma}{\lambda} \mathbf{z}^\top \mathbb{I} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mathbf{z}^\top \mu^\top
\end{aligned}$$

Or $\mathbf{z}^\top \mathbb{I} = \mathbb{I}^\top \mathbf{z} = 1$ and $\mathbf{z}^\top \mu^\top = \mu \mathbf{z}$, so

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{\gamma}{\lambda} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mu \mathbf{z}$$

Substituting \mathbf{z} for its value, we obtain

$$\begin{aligned}
\sigma_{opt}^2 &= \frac{\gamma}{\lambda} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mu \tilde{\sigma}^{-1} \left[\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \right] \\
&= \frac{\gamma}{\lambda} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \cdot \frac{\gamma}{\lambda} \mu \cdot \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}
\end{aligned} \quad (13)$$

Then the equation (12) implies

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\lambda} &= \frac{\lambda - (1-\lambda) \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top}{\lambda \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}} \\
\frac{\gamma}{\lambda} &= \frac{1}{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \frac{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top}{\mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I}}
\end{aligned} \quad (14)$$

Let

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top = \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\
B &= \mathbb{I}^\top \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \\
C &= \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top
\end{aligned} \quad (15)$$

So (14) becomes

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \frac{A}{B} \quad (16)$$

Consequently from (13) we get

$$\begin{aligned} \sigma_{opt}^2 &= \left[\frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \frac{A}{B} \right] + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 C + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) A \left[\frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \frac{A}{B} \right] \\ &= \frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \frac{A}{B} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 C + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \frac{A}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{A^2}{B} \\ &= \frac{1}{B} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 C - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{A^2}{B} \\ &\Rightarrow \sigma_{opt}^2 = \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 \left(C - \frac{A^2}{B}\right) + \frac{1}{B} \end{aligned} \quad (17)$$

With

$$\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} + 1$$

So

$$\begin{aligned} \sigma_{opt}^2 &= \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} + 1\right) \left(C - \frac{A^2}{B}\right) + \frac{1}{B} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(C - \frac{A^2}{B}\right) - \frac{2}{\lambda} \left(C - \frac{A^2}{B}\right) + \left(C - \frac{A^2}{B}\right) + \frac{1}{B} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{BC - A^2}{B}\right) - \frac{2}{\lambda} \left(\frac{BC - A^2}{B}\right) + \left(\frac{BC - A^2}{B} + \frac{1}{B}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

Let $D = BC - A^2$, so:

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{D}{B} - \frac{2}{\lambda} \frac{D}{B} + \frac{D+1}{B} \quad (19)$$

Thus for a fixed θ , the variance expression of the optimal sub-portfolio is written as follows :

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{D\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 2D\left(\frac{1}{\lambda}\right) + D + 1}{B} \quad (20)$$

We note that σ_{opt}^2 depends on λ which is in $]0,1[$.

On the other side, for a fixed θ , the return expression of the optimal sub-portfolio is written as follows:

$$\begin{aligned} \mu_{opt} &= \mu \mathbf{z} \\ &= \mu \tilde{\sigma}^{-1} \left[\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mathbb{I} \right] \\ &= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mu^\top + \frac{\gamma}{\lambda} \mu \tilde{\sigma}^{-1} \mathbb{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)C + \left[\frac{1}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\frac{A}{B}\right]A \\
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)C + \frac{A}{B} - \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\frac{A^2}{B} \\
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{BC - A^2}{B}\right) + \frac{A}{B} \\
&= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{D}{B}\right) + \frac{A}{B} \\
&= \frac{1}{\lambda}\frac{D}{B} - \frac{D}{B} + \frac{A}{B} \\
\mu_{opt} &= \frac{1}{\lambda}\frac{D}{B} + \frac{A - D}{B} \tag{21}
\end{aligned}$$

□

2.3 Corollaries

Corollary 2.1 *In an orthonormal axis system where we have the variance in abscissa and the return in ordinate, for any $\lambda \in]0, 1[$, σ_{opt}^2 defined by the equation (6) describe a parabola. μ_{opt} gives, for any $\lambda \in]0, 1[$, the corresponding return of any portfolio in the parabola. Thus the efficient frontier which represents the set of all the optimal sub-portfolio defined by θ ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$) is an upper portion of this parabola as in the original Markowitz problem [12].*

Corollary 2.2 *Under the hypothesis that $\lambda = 1$, we get a particular instance of the problem (5) which means to exclusively minimize the total risk of the portfolio $(\frac{1}{2} \mathbf{z}^\top \cdot \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{z})$ under the same constrains. The problem remains a quadratic programming problem and could be solved with the lagrangian function as in Proof 2.2.*

Thus the particular result we can obtain immediately from the theorem 2.2 is:

$$\sigma_{opt}^2 = \frac{1}{B} \quad \text{and} \quad \mu_{opt} = \frac{A}{B} \tag{22}$$

3 Numerical experiments

In this section we present an example in which we apply this optimization problem to a set of 22 assets in the first compartment of the Regional Stock Exchange of Securities in West Africa (BRVM). We collected data about the assets listed in table 1 from daily reports of the stock market (Bulletin Officiel de la cote) over the period from January 05, to March 20, 2015. We just emphasize that the fact of being part of the first compartment of this market guarantees more or less the reliability of published results because of the

Table 1: Estimated return of 22 Assets in the first compartment of the Regional Stock Exchange of Securities in West Africa over the period from January 05, to March 20, 2015

Assets	μ (%)
SICABLE CI	5.28
AIR LIQUIDE CI	2.91
SOLIBRA CI	2.83
SITAB CI	5.21
CIE CI	3.69
ONATEL BF	14.02
SODE CI	3.40
SONATEL SN	5.91
BICI CI	5.19
BANK OF AFRICA BN	3.96
BANK OF AFRICA BF	6.64
BANK OF AFRICA CI	4.87
BANK OF AFRICA NG	3.51
ECOBANK TRANS. INCORP. TG	4.15
SAFCA CI	6.11
SGB CI	3.43
BOLLORE AFRICA LOGISTICS CI	5.99
SOGB CI	6.06
SAPH CI	3.64
BERNABE CI	6.43
TRACTAFRIC MOTORS CI	6.63
TOTAL CI	4.02

requirements to be part of it. The data collected allowed us to estimate the mean return (μ) of each of the assets which we use to determine, for any value of θ ($\theta \in \mathbb{R}_+^*$), the number k of assets that compose the optimal sub-portfolio and its level of performance based on the risk (variance).

We plot the optimal portfolios frontiers for successive values of the required PER θ specially in two cases. In the first one (see figure 1), we have $\theta \leq 20$ with the values 15.5, 16, 16.6, 17, 19 and 20 respectively corresponding to sub-portfolios of k equal to 3, 4, 6, 8, 9 and 11 assets. The choice of these fixed values for $\theta \leq 20$ was guided by the fact that we aim to diversify the sub-portfolios with at least 3 assets and we just take one fixed θ to represent all the values of θ that provide equivalent portfolios frontiers even if k can vary.

In the case of $\theta \geq 20$, we experiment the values θ equal to 20, 21, 25, 26,

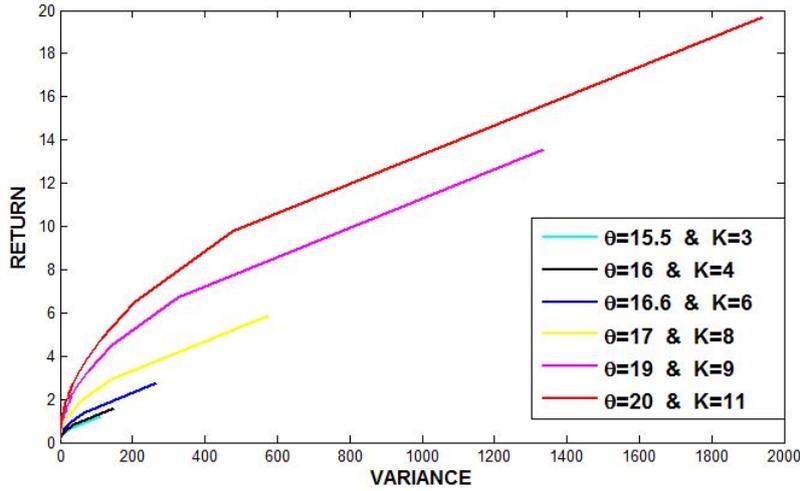


Figure 1: Optimal sub-portfolios frontier for $\theta \in \{15.5, 16, 16.6, 17, 19, 20\}$

28 and 30 respectively corresponding to sub-portfolios of 11, 12, 14, 15, 17 and 20 assets (see figure 2). We choose to stop to $\theta = 30$ for the PER as 30 years generally limit long-term investment.

Numerical results

- As a first result of the plotting experiment, we can confirm that for any $\lambda \in]0, 1[$ and for any $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ the optimal sub-portfolio frontier is an upper portion of a parabola (corollary 2.1).
- The second important conclusion is the choice of $\theta = 20$ as a maximum value that the PER required should take when selecting sub-portfolios in the Regional Stock Exchange Securities in West Africa (BRVM) according to the data collected from January to March, 2015. The investor can determine the level of performance which he can reach depending on the risk (variance) he is ready to face (Figure 1). Over 20 years for the PER θ , the return increase but the risk which the investor has to face is extremely high (see Figure 2). That is what investor should not do in a young and somehow weak market like BRVM.

4 Conclusions

In this paper we have provided an analytic solution to a multiobjective sub-portfolio problem. In fact, after dynamically selecting the sub-portfolios based on a cardinality constraint on the Price-Earning-Ratio, we have had a convex quadratic programming problem inspired by the mean-variance model. Thus

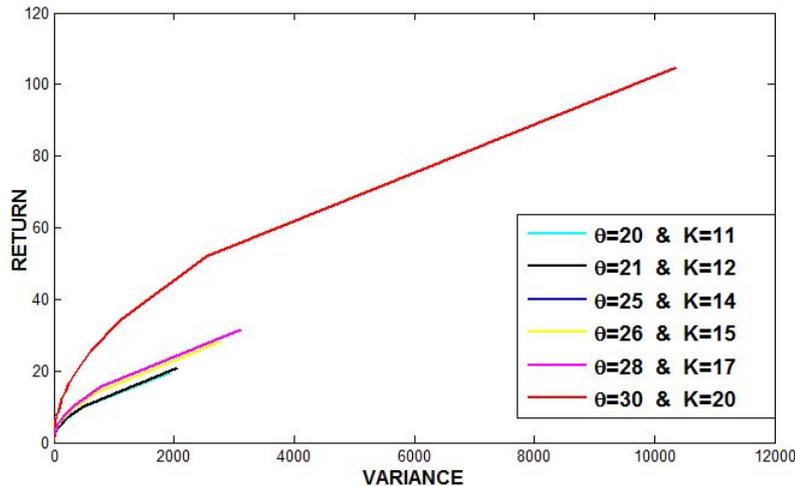


Figure 2: Optimal portfolios frontier for $\theta \in \{20, 21, 25, 26, 28, 30\}$

we had to minimize a balanced objective function with both sub-portfolio risk and return expressions. Furthermore, this study constitutes a continuation of a prior paper in which we study the impact of selecting sub-portfolio on the basis of the PER in the Regional Stock Exchange Securities in West Africa (BRVM). But in that paper, we used the corrected PER published about the quoted companies, not the ones coming directly from the return expression. We have demonstrated that the introduction of tools widely used in practice could be very interesting for the theory and could determine, for every investor depending on their risk aversion, the minimal number of assets that provide the optimal performance. Moreover, we saw in this work that 20 years is the maximum value of the PER that one should take when they are planning their investments in shares of that market.

We intend to continue this work that combines applied mathematics and practice in stock market, through applications of these theoretical results in the Regional Stock Exchange Securities in West Africa (BRVM). This will particularly contribute to the development effort of the West Africa financial market.

References

- [1] S. Basu, *Investment performance of common stocks in relation to their Price-Earnings Ratios: A test of the efficient market hypothesis*, The Journal of Finance, **32** (1977), 663-682.
- [2] L. Bayón, J.M. Grau, M.M. Ruiz, P.M. Suárez, *An analytic solution for some separable convex quadratic programming problems with equality and*

- inequality constraints*, Journal of mathematical inequalities, **4** (2010), 453-465.
- [3] W. Beaver, D. Morse, *What Determines Price-Earnings Ratios?*, Financial Analysts Journal, **34** (1978), 65-76.
- [4] D. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange multiplier Methods*, Academic Press, (1982).
- [5] R. Cambini, *Soluzione ottima esplicita di un particolare problema di programmazione quadratica*, Decisions in Economics and Finance, Springer, Milan, **15** (1992), 73-86.
- [6] K. Dahiya, S.K. Suneja, V. Verma, *Convex programming with single separable constraint and bounded variables*, Computational Optimization and Applications. An international Journal, **36**(2007), 67-82.
- [7] M. El hachloufi, Z. Guennoun, F. Hamza, *Stocks Portfolio Optimization Using classification and Genetic Algorithms*. Applied Mathematical Sciences, **6**(2012), 4673-4684.
- [8] A. Fernandez, S. Gomez, *Portfolio selection using neural network*, Computers & Operations Research **34** (2007), 1177-1191.
- [9] C.J. Goh, X.Q. Yang, *Analytic efficient solution set for multi-criteria quadratic programs*, European J. Oper. Res., **92** (1996), 166-181.
- [10] N.I.M Gould, Ph.L Toint, *A Quadratic Programming Bibliography*, <http://www.optimization-online.org/DB-HTML/2001/02/285.html>, 2001.
- [11] N.I.M Gould, Ph.L Toint, *A Quadratic Programming Page*, <http://www.numerical.rl.ac.uk/qp/qp.html>.
- [12] H.M. Markowitz, *"Portfolio Selection"*, Journal of Finance, **7** (1952), 77-91.
- [13] H.D. Mittelmann, *Decision tree for Optimization Software*, <http://plato.asu.edu/guide.html>.
- [14] V. Moraru, R. Melnic, *A Newton-type Method for Convex Quadratic Programming*, 8th International Conference on Development and Applications systems, Suceava, Romania, May 25-27, 2006.
- [15] S.H. Penman, *The Articulation of Price-Earnings Ratios and Market-to-Book and the evaluation of Growth*, Journal of Accounting and Research, **34**(1996), 235 (abstract).

- [16] S.M. Stefanov, *Convex quadratic minimization subject to a linear constraint and box constraints.*, Appl. Math. Res. eXpress, **1**(2004), 17-42.

CODES

```
%%%%%%%%FONCTION PORTOPT%%%%%%%%
function [PortRisk, PortReturn, PortWts] = portopt(ExpReturn, ExpCovariance, NumPorts, PortReturn, ConSet,
varargin)

% Vérifier les erreurs d'entrées
if (nargin < 2)
    error('finance:portopt:missingInputs', ...
        'You must enter ExpReturn and ExpCovariance.');
```

% Vérifier que le nombre de valeurs de rendements entrées coïncide avec le nombre de lignes/colonne de la matrice de covariances

```
ExpReturn = ExpReturn(:);
NASSETS = length(ExpReturn);
covRows, covCols] = size(ExpCovariance);
if(covRows ~= covCols)
    error('finance:portopt:invalidCovMatrix', ...
        'The covariance matrix must be NxN, where N = number of assets');
```

% Vérifier si la matrice de covariances est positive-semidefinie et symetrique

```
if norm(ExpCovariance - ExpCovariance',inf) > eps
    warning('finance:portopt:asymmetricCovariance', ...
        'Non-symmetric covariance matrix will be made symmetric.');
```

ExpCovariance = 0.5*(ExpCovariance + ExpCovariance');

```
end
[L, D] = ldl(ExpCovariance); %#ok
if any(diag(D) < 0)
    warning('finance:portopt:nonposdefCovMatrix', ...
        'Non-positive-semidefinite covariance input.');
```

end
clear L
clear D

% Vérifier que le problème est faisable

```
if size(ExpCovariance, 1) ~= NASSETS
    error('finance:portopt:invalidExpReturns', ...
        'The number of expected returns does not equal the number of assets.');
```

end

% process name-value pairs (if any)

```
if nargin > 5
    if mod(nargin-5,2) ~= 0
        error('finance:portopt:InvalidNameValuePair', ...
            'Invalid (odd number) of optional name-value pairs.');
```

end

```
names = { 'algorithm', 'maxiter', 'tiebreak', 'tolcon', 'tolpiv' };      % noms
values = { 'lcprog', 100000, 'first', 1.0e-6, 1.0e-9 };                % valeurs par défaut
try
    [algorithm, maxiter, tiebreak, tolcon, tolpiv] = parsepvpairs(names, values, varargin{:});
```

catch E
E.throw

```

    end
else
    algorithm = 'lcprog';
    maxiter = 100000;
    tiebreak = 'first';
    tolcon = 1.0e-6;
    tolpiv = 1.0e-9;
end

% verifier les arguments

if ~isempty(strmatch(lower(algorithm),'lcprog'))
    alg = 1;
elseif ~isempty(strmatch(lower(algorithm),{'qp','quadprog'}))
    alg = 2;
else
    error('finance:portopt:InvalidAlgorithm', ...
        'Invalid algorithm selected. Choices are "lcp","qp".');
end

if isempty(strmatch(tiebreak,{'default','first','last','random'}))
    error('Finance:portopt:InvalidTieBreak', ...
        'Invalid choice to break ties in pivot selection. Choices are "first","last","random".');
end

if tolcon < 2*eps
    error('Finance:portopt:InvalidTolerance', ...
        'Unrealistically small tolerance (tolcon) specified. ');
end

if tolpiv < 2*eps
    error('finance:portopt:InvalidTolerance', ...
        'Unrealistically small tolerance (tolpiv) specified. ');
end

if maxiter <= 0
    error('finance:portopt:NonPositiveInteger', ...
        'Maximum number of iterations (maxiter) must be a positive integer. ');
end

% Determiner les arguments optionnels donnés comme non vide.

if (nargin < 3 || isempty(NumPorts))
    NumPortsEntered = 0;
else
    NumPortsEntered = 1;
    NumPorts = double(NumPorts);
end

if (nargin < 4 || isempty(PortReturn))
    PortReturnEntered = 0;
else
    PortReturnEntered = 1;
end

% En entrant le taux de rendement seuil(PortReturn), entrer NumPorts comme une matrice vide.

if (NumPortsEntered == 1) && (PortReturnEntered == 1)
    error('finance:portopt:emptyNumPorts', ...
        'When entering the target rate of return, PortReturn, enter NumPorts as an empty matrix. ');
end

```

```

% Si 'défaut' du probleme, afficher un message pour les poids négatifs (rmt4)
if (nargin < 5) || isempty(ConSet)
    % A default constraint matrix ConSet will be created if this is not entered.
    ConSet = portcons('default', NASSETS);
    TrimWeights = true;
else
    TrimWeights = false;
end

[Aineq, Bineq, Aeq, Beq, LB, UB] = ineqparse(ConSet);

if isempty(LB) || any(~isfinite(LB)) || (~isempty(UB) && any(~isfinite(UB)))
    warning('finance:portopt:switchQPsolver', ...
        'Unbounded bound constraints. Cannot use lcplog. Switching to quadprog.');
```

alg = 2;

```

end

% Si PortReturn est donné, verifier le respect des contraintes. Sinon construire le vecteur par défaut.
W0 = ones(NASSETS, 1)/NASSETS;

%-----
% Calcul du rendement maximum
%-----

options = optimset('Display','off','LargeScale','off','MaxIter',maxiter);

[MaxReturnWeights, Fval, ErrorFlag] = linprog(-ExpReturn, Aineq, Bineq, Aeq, Beq, LB, UB, W0, options); %#ok

if ErrorFlag <= 0
    error('finance:portopt:noPortfolios', ...
        'No portfolios satisfy all the input constraints');
```

end

```

MaxReturn = MaxReturnWeights*ExpReturn;

% Trouver la variance du rendement minimal.

F = zeros(NASSETS, 1);

if alg == 1
    [MinVarWeights, Fval, ErrorFlag] = qplcprog(ExpCovariance, F, Aineq, Bineq, Aeq, Beq, LB, UB, ...
        'maxiter', maxiter, 'tiebreak', tiebreak, 'tolcon', tolcon, 'tolpiv', tolpiv); %#ok
else
    [MinVarWeights, Fval, ErrorFlag] = quadprog(ExpCovariance, F, Aineq, Bineq, Aeq, Beq, LB, UB, ...
        W0, options); %#ok
end

if ErrorFlag <= 0
    error('finance:portopt:noMinVarPortfolio', ...
        'A solution was not feasible for the minimum variance portfolio.');
```

end

```

MinVarReturn = MinVarWeights*ExpReturn;

%-----
% Calculer le rendement correspondant au risqué minimal (variance)
%-----

if PortReturnEntered
    if (min(PortReturn) < MinVarReturn*(1 - 1000*eps))
        error('finance:portopt:missingMinPortfolios', ...
            'One or more requested returns are less than the return %f of the least risky portfolio', ...
```

```

    MinVarReturn);
end
if (max(PortReturn) > MaxReturn*(1 + 1000*eps))
    error('finance:portopt:missingMaxPortfolios', ...
        'One or more requested returns are greater than the maximum achievable return of %f', ...
        MaxReturn);
end

NumFrontPoints = length(PortReturn);
PortfOptResults = zeros(NumFrontPoints, 2 + NASSETS);
StartPoint = 1;
EndPoint = NumFrontPoints;
else
% Si NumPorts n'est pas donné, afficher valeur par défaut.

    if NumPortsEntered
        NumFrontPoints = NumPorts;
    else
        NumFrontPoints = 10;
    end

    MinVarStd = sqrt(MinVarWeights' * ExpCovariance * MinVarWeights);

    if MaxReturn > MinVarReturn
        PortReturn = [MinVarReturn+(0:NumFrontPoints-2)*(MaxReturn-MinVarReturn)/(NumFrontPoints-1) MaxReturn];
    else
        PortReturn = MaxReturn;
        NumFrontPoints = 1;
    end

    PortfOptResults = zeros(NumFrontPoints, 2 + NASSETS);
    PortfOptResults(1, :) = [MinVarReturn MinVarStd MinVarWeights(:)];
    StartPoint = 2;
    EndPoint = NumFrontPoints-1;
end

FrontPointConstraint = -ExpReturn';
Aeq = [FrontPointConstraint; Aeq];
% Ajouter nouvelle contrainte d'égalité
Beq = [0; Beq];
% Ajouter nouvelle contrainte d'égalité
W0 = MaxReturnWeights;

for Point = StartPoint:EndPoint
    Beq(1) = -PortReturn(Point);

    if alg == 1
        [Weights, Fval, ErrorFlag] = qplcprog(ExpCovariance, F, Aineq, Bineq, Aeq, Beq, LB, UB, ...
            'maxiter', maxiter, 'tiebreak', tiebreak, 'tolcon', tolcon, 'tolpiv', tolpiv); %#ok
    else
        [Weights, Fval, ErrorFlag] = quadprog(ExpCovariance, F, Aineq, Bineq, Aeq, Beq, LB, UB, ...
            W0, options); %#ok
    end

    if ErrorFlag <= 0
        PortfOptResults(Point, :) = [Beq(2) nan*ones(1, NASSETS+1)];
    else
        Return = dot(Weights, ExpReturn);
        Std = sqrt(Weights'*ExpCovariance*Weights);
        PortfOptResults(Point, :) = [Return Std Weights(:)];
    end
end

```

```

end

if ~PortReturnEntered
    % Le dernier point correspond au rendement maximal qui a été déjà
    Std = sqrt(MaxReturnWeights*ExpCovariance*MaxReturnWeights);
    PortfOptResults(end, :) = [MaxReturn, Std, MaxReturnWeights(:)];
end

%-----
% Valider les résultats et générer à la sortie
%-----

ErrorIndex = find(isnan(PortfOptResults(:, 2)));
if ~isempty(ErrorIndex)
    NumErrors = num2str(length(ErrorIndex));
    warning('finance:portopt:InfeasibleProblem', ...
        'A solution was not feasible for %d expected return(s).', NumErrors);
end

PortReturn = PortfOptResults(:, 1);
PortRisk = PortfOptResults(:, 2);
PortWts = PortfOptResults(:, 3:size(PortfOptResults, 2));

% Si la borne inf est zero, forcer tous les poids negatif à être nuls TrimWeights
PortWts(PortWts < 0) = 0;
end

%Un tracé de la frontière efficiente est retourné si la fonction est appelé sans arguments.

if nargout == 0
    FrontWin = figure;

    set(FrontWin, 'NumberTitle', 'off');
    set(FrontWin, 'Name', 'Efficient Frontier');
    set(FrontWin, 'Resize', 'on');

    set(FrontWin, 'Tag', 'FrontWin');

    plot(PortRisk, PortReturn);
    title('Mean-Variance-Efficient Frontier', 'Color', 'k');
    xlabel('Risk (Standard Deviation)');
    ylabel('Expected Return');
    grid on;

    % Enpecher nimporte quelle sortie
    clear PortRisk;
end

```

CODE ARTICLE 1

```

function brvmval
%r1= mean('E:\siseht_seydina\élément brvm\sousport.feuille1')
% chemin='E:\siseht_seydina\élément brvm';
% c1='sousport.feuille1';
% fich=strcat(chemin,'\',c1, '.xlsx');
% clc
% A=mean('E:\siseht_seydina\élément brvm\sousport.PER<10.xlsx')
clc
A1=xlsread('sousport.xlsx',1); %extraire données du fichier excel
rd1=10^(-2)*mean(A1); %PER<10, vect rendement
b1=cov(A1);%PER<=10, matrice cov-var

```

```

A2=xlsread('sousport.xlsx',2);
rd2=10^(-2)*mean(A2); %PER<=12, vect rendement
b2=cov(A2);%PER<=12, matrice cov-var

A3=xlsread('sousport.xlsx',3);
rd3=10^(-2)*mean(A3); %PER=12, vect rendement
b3=cov(A3); %PER=12, matrice cov-var
%
A4=xlsread('sousport.xlsx',4);
rd4=10^(-2)*mean(A4); %12<=PER<=20, vect rendement
b4=cov(A4); %12<=PER<=20, matrice cov-var
%
A5=xlsread('sousport.xlsx',5);
rd5=10^(-2)*mean(A5); %vect rendement
b5=cov(A5); % matrice cov-var
A6=xlsread('sousport.xlsx',6);
rd6=10^(-2)*mean(A6); % vect rendement
b6=cov(A6); % matrice cov-var
%
A7=xlsread('sousport.xlsx',7);
rd7=10^(-2)*mean(A7); % vect rendement
b7=cov(A7); % matrice cov-var

[risque1,rendement1]= portopt(rd1,b1,20);
[risque2,rendement2]= portopt(rd2,b2,20);
[risque3,rendement3]= portopt(rd3,b3,20);
[risque4,rendement4]= portopt(rd4,b4,20);
[risque5,rendement5]= portopt(rd5,b5,20);
[risque6,rendement6]= portopt(rd6,b6,20);
[risque7,rendement7]= portopt(rd7,b7,20);

figure(1)
plot(risque1,rendement1,'r'); %PER<=10
%plot(risque01,rendement01,risque01,rendement02)
hold on %faire la combinaison des tracés de deux sélections désirées
n= plot(risque2,rendement2,'-');
plot(PortRisk,PortReturn,'.k');
%plot(risque3,rendement3,'m')
% plot(risque4,rendement4,'b')
% plot(risque5,rendement5,'k')
% plot(risque6,rendement6,'r')
%p=plot(risque7,rendement7,'+-.')

hold off
% %%%%%%%%%%%
xlabel('Risque')
ylabel('rendement')
title('frontière des portefeuilles optimaux')
set(p,'Color','red','LineWidth',2)
set(n,'Color','m','LineWidth',3)

end

CODE ARTICLE 2

function perbrutest
clc
%clf
Obs=xlsread('article2.xlsx',1);
%%%%%%%%%%-----teta1-----%%%%%%%%%%
teta1=1/15.5;
mu=10^(-2)*mean(Obs); % le vecteur des rentabilités

```

```

z=[];
Obsteta1=[];
for i=1:length(mu)
    if mu(i)>= teta1 % vérification de la contrainte sur le per
        Obsteta1 =[Obsteta1 Obs(:,i)]; %renvoie la matrice des observations vérifiant la condition teta
        z(i)=1;
    else
        z(i)=0;
    end
end
sum_z=sum(z,2) %nombre de titres dans le sous-portefeuille
Obsteta1;

CoV1=cov(Obsteta1);
mu1=10^(-2)*mean(Obsteta1);

I1=ones(length(mu1),1);
A1=mu1*CoV1^(-1)*I1;
B1=I1*CoV1^(-1)*I1;
C1=mu1*CoV1^(-1)*mu1';
D1=B1*C1-A1^2;

lamda=0.01:0.01:1;
risk1=[];
for k=1:length(lamda)
    risk1=[risk1 (D1*(1/lamda(k))^2-2*D1*(1/lamda(k))+D1+1)/B1];
end

rend1=[];
for k=1:length(lamda)
    rend1=[rend1 (1/lamda(k))*D1/B1+(A1-D1)/B1];
end

%%%%%%%%%%%%%%-----teta2-----%%%%%%%%%%%%%%
teta2=1/16;

z2=[];
Obsteta2=[];
for i=1:length(mu)
    if mu(i)>= teta2 % vérification de la contrainte sur le per
        Obsteta2 =[Obsteta2 Obs(:,i)]; %renvoie la matrice des observations vérifiant la condition teta
        z2(i)=1;
    else
        z2(i)=0;
    end
end
sum_z2=sum(z2,2) %nombre de titres dans le sous-portefeuille
Obsteta2;

CoV2=cov(Obsteta2);
mu2=10^(-2)*mean(Obsteta2);

I2=ones(length(mu2),1);
A2=mu2*CoV2^(-1)*I2;
B2=I2*CoV2^(-1)*I2;
C2=mu2*CoV2^(-1)*mu2';
D2=B2*C2-A2^2;

lamda=0.01:0.01:1;
risk2=[];
for k=1:length(lamda)
    risk2=[risk2 (D2*(1/lamda(k))^2-2*D2*(1/lamda(k))+D2+1)/B2];
end

```

```

end

rend2=[];
for k=1:length(lamda)
    rend2=[rend2 (1/lamda(k))*D2/B2+(A2-D2)/B2];
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%-----teta3----- %%%%%%%%%%%%%%
teta3=1/16.6;
z3=[];
Obsteta3=[];
for i=1:length(mu)
    if mu(i)>= teta3 % vérification de la contrainte sur le per
        Obsteta3 =[Obsteta3 Obs(:,i)]; %renvoie la matrice des observations vérifiant la condition teta
        z3(i)=1;
    else
        z3(i)=0;
    end
end
sum_z3=sum(z3,2) %nombre de titres dans le sous-portefeuille
Obsteta3;

CoV3=cov(Obsteta3);
mu3=10^(-2)*mean(Obsteta3);

I3=ones(length(mu3),1);
A3=mu3*CoV3^(-1)*I3;
B3=I3*CoV3^(-1)*I3;
C3=mu3*CoV3^(-1)*mu3';
D3=B3*C3-A3^2;

lamda=0.01:0.01:1;
risk3=[];
for k=1:length(lamda)
    risk3=[risk3 (D3*(1/lamda(k))^2-2*D3*(1/lamda(k))+D3+1)/B3];
end

rend3=[];
for k=1:length(lamda)
    rend3=[rend3 (1/lamda(k))*D3/B3+(A3-D3)/B3];
end

%Les valeurs teta4 à teta6 ont des ossatures similaires sauf pour le contrôle sur le teta

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%-----figure----- %%%%%%%%%%%%%%
%[risque,rendement]= portopt(mu,cov(Obs),20);
hold on
    %plot(risque,rendement, '+-k','LineWidth',1)
plot(risk1, rend1, 'c','LineWidth',2)% teta=14.5, k=2;
plot(risk2, rend2, 'k','LineWidth',2)
plot(risk3, rend3, 'b','LineWidth',2)
plot(risk4, rend4, 'y','LineWidth',2)
plot(risk5, rend5, 'm','LineWidth',2)
plot(risk6, rend6, 'r','LineWidth',2)
hold off

end

```

Résumé

Dans cette thèse nous avons mis en œuvre une nouvelle approche basée sur une combinaison d'outils utilisés dans la pratique et de modèles de la théorie mathématique pour l'optimisation d'un portefeuille d'actifs financiers. En effet nous avons développé une technique de sélection basée sur une limitation du price-earnings-ratio (PER), permettant à partir du modèle classique de Markowitz, de dresser à chaque niveau de rendement, la sélection de sous-portefeuille optimal devant conduire, pour un risque minimal, au même rendement qu'un portefeuille initial d'une grande taille. Nous montrons que se basant sur le PER, nous pouvons identifier à chaque niveau de rendement objectif, les titres dont l'investissement devra forcément être nul pour s'acheminer vers une sélection optimale. Nous avons ainsi introduit les nouveaux concepts de convergence de frontières efficientes et d'équivalence de frontières efficientes dans le cadre d'une analyse espérance-variance.

Nous avons aussi, dans ce travail, marqué une innovation à travers une contribution aux efforts de développement de nos systèmes financiers africains, et particulièrement pour une meilleure visibilité de notre environnement boursier Ouest-africain. En effet, le pari que s'est fixé les autorités du marché de notre sous région est de hisser ce dernier à la cinquième place des bourses africaines à l'horizon 2020. Et cela devra passer inévitablement par l'amélioration de son attractivité et de sa qualité. C'est ainsi que nous avons choisi d'expérimenter les simulations numériques sur des données de sociétés cotées à la BRVM (Bourse Régionale des Valeurs Mobilières) commune aux pays de l'union économique et monétaire Ouest-africaine (UEMOA). Nous avons ainsi déterminé l'horizon maximal, à travers le PER, sur lequel les investisseurs peuvent se limiter pour constituer des portefeuilles à rendement optimal à moindre risque.