THÈSE DE DOCTORAT

Opérée à

L'UNIVERSITÉ DE ROUEN ET L'UNIVERSITÉ

CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Spécialité : **Mathématiques appliquées**
Mention : **Contrôle géométrique**

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES SUR LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS ET RÉSOLUBLES

Présentée et soutenue publiquement par

Mouhamadou Rassouloulahi Dath

le 17 décembre 2015 à Dakar

Composition du Jury

Diaraf Seck	Professeur à l'université de Dakar	Président de jury
Jean Paul Gauthier	Professeur à l'université de Toulon	Rapporteur et examinateur
Yuri Sachkov	Professeur à l'Académie des Sciences de Russie	Rapporteur
Abdoulaye Sène	Professeur à l'université de Dakar	Examinateur
Moussa Baldé	MCF-HDR à l'université de Dakar	Codirecteur
Philippe Jouan	MCF-HDR à l'université de Rouen	Codirecteur

Remerciements

☞Je voudrais tout d'abord remercier très sincèrement et du fond du cœur Philippe Jouan, qui a bien voulu accepter de diriger ce travail et par ses conseils, ses critiques, ses suggestions et son apport personnel, m'a permis de réaliser ce travail. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance. Sans lui ce travail n'aurait jamais abouti. Mes séjours à Rouen m'ont fait découvrir d'autres facettes de Philippe, qu'en plus de ses qualités de chercheur, il a aussi un grand cœur et beaucoup de qualités humaines.

☞Je tiens aussi à exprimer ma vive reconnaissance à Moussa Baldé, co-encadreur de ce travail qui, par la pertinence de ses questions et de ses suggestions lors des exposés faits à Dakar m'ont fait grandement avancer.

☞ J'adresse aussi mes remerciements
à Jean Paul Gauthier et à Yuri Sachkov qui m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter sur ce mémoire ainsi qu'à Jaraf Seck et Abdoulaye Sène qui ont accepté d'en être respectivement président de jury et examinateur ;
à Hamidou Dath, Directeur de L'école doctorale Math-informatique de l'université Cheikh Anta Diop pour son soutien, ses orientations et ses conseils ;
à Pierre Calka pour m'avoir accueilli à deux reprises dans le laboratoire de Mathématiques Raphael Salem de L'université de Rouen, dont il est le Directeur ; à travers lui je remercie tous les membres du laboratoire ;
à toute l'équipe de mathématiques appliquées de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar de m'avoir soutenu pour un deuxième séjour à Rouen ;
☞ Ma reconnaissance va également à l'endroit de ma famille :
à mon père et ma mère pour leur encouragements, et leurs prières ;
à Cheikhou Oumar Dath, et à travers lui tous mes frères et sœurs pour leurs encouragements et leurs prières ;
à mes enfants Aminata, Alpha et Mouhamed pour leurs prières ;
à Aboubacry Ly pour tous ses encouragement et d'avoir facilité mes séjours à Rouen.

☞ Je tiens tout particulièrement à remercier ma chère épouse Mme Dath Penda Ndiaye, pour ses encouragements sa patience et son soutien indéfectible, de m'avoir incité à entreprendre cette thèse, à travers elle je remercie toute ma belle famille.

☞ Je remercie enfin tous ceux qui ont participé de près ou de loin à ce travail de recherche.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de la contrôlabilité des systèmes linéaires sur les groupes de Lie nilpotents et résolubles. Un système linéaire sur un groupe de Lie G est un système contrôlé

$$\frac{d}{dt}g = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j B_j(g),$$

où $\mathcal{X}$ est un champ de vecteurs linéaire et pour $j = 1, \ldots, m$ le champ de vecteurs B_j est invariant à droite. Par champ de vecteurs linéaire on entend un champ de vecteurs dont le flot est un groupe à un paramètre d'automorphismes de G. Ces champs de vecteurs sont souvent appelés automorphismes infinitésimaux dans la littérature sur les groupes de Lie, par exemple dans [Bourbaki2].

L'étude de ces systèmes relève d'une double motivation. D'un côté leur structure est fortement liée à la structure de groupe de Lie et leur étude est une étape naturelle après celle des systèmes invariants. De l'autre ils peuvent être étendus aux espaces homogènes et grâce au théorème d'équivalence (voir [JouanAX08]) ils apparaissent comme un modèle pour une large classe de systèmes. Cette équivalence a déjà été mise à profit dans [Jouan101] pour établir de nouveaux critères de contrôlabilité sur les variétés compactes.

Une classe de systèmes peut être étudiée de différents points de vue : contrôle optimal, poursuite de trajectoires, stabilisation, observabilité, etc ..., mais bien souvent la contrôlabilité du système, ou au moins l'existence d'ensembles de contrôle suffisamment grands, est un préalable à toute investigation plus poussée, et la contrôlabilité apparait ainsi comme l'une des premières propriétés à étudier lorsqu'on s'intéresse à une classe de systèmes.

Cette étude peut être menée en considérant des entrées bornées. Pour les systèmes linéaires sur les groupes de Lie c'est le cadre adopté par Adriano da Silva dans [Dasilva14] et [Dasilva15].

Nous étudions ici la contrôlabilité de ces systèmes pour des entrées non bornées. Parmi les propriétés générales de contrôlabilité qu'on peut trouver dans [Jouan102], l'une concerne directement les groupes nilpotents. A chaque champ linéaire $\mathcal{X}$ on peut associer la dérivation $D = -\mathrm{ad}(\mathcal{X})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe (voir chapitre 1). Cette dérivation est intérieure si il existe un champ de vecteurs invariant à droite X tel que $D = -\mathrm{ad}(X)$. Il est démontré dans [Jouan102] que si le groupe est nilpotent et la dérivation associée à $\mathcal{X}$ est intérieure, alors le système est contrôlable si et seulement si l'algèbre de Lie engendrée par $B_1, \ldots, B_m$ est égale à l'algèbre de Lie du groupe G.

Il faut noter qu'un résultat identique a été démontré dans [Ayala95] pour les systèmes invariants à droite sur les groupes de Lie nilpotents.
Ce résultat a une grande importance dans notre étude. En effet les champs de vecteurs linéaires sur les groupes de Lie nilpotents qui permettent d'obtenir des systèmes contrôlables ne sont pas associés à une dérivation intérieure, on ne peut pas leur associer un système invariant à droite et leur comportement est différent de celui de ces derniers (en dehors du cas où l'algèbre de Lie engendrée par $B_1, \dots, B_m$ est égale à l'algèbre de Lie du groupe G).
Ce comportement est opposé à celui des systèmes linéaires sur les groupes de Lie semi-simple. En effet toutes les dérivations y sont intérieures, à chaque système linéaire on peut associer un système invariant à droite, et le comportement des deux systèmes est assez proche (voir [Jouan102] et [Jouan16]).
Dans l'article [DathJouan14] nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité sur le groupe Heisenberg de dimension 3 et sur le groupe affine de dimension 2.
Ces résultats sont partiellement étendus aux groupes Heisenberg généralisés dans le chapitre 3. Nous y exhibons des conditions nécessaires d'une part et des conditions suffisantes d'autre part.
Nos démonstrations utilisent des critères tout à fait généraux, relatifs aux sous-groupes et aux quotients, qui se trouvent dans le chapitre 2.

Résumé du mémoire

Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres. Le chapitre 1 revient sur les notions basiques ; le chapitre 2 donne des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité d'un système linéaire défini dans le groupe affine de dimension 2 et dans le groupe Heisenberg de dimension 3 ; le chapitre 3 s'intéresse à la contrôlabilité des systèmes linéaires définis dans le groupe Heisenberg en dimension strictement plus grande que trois et enfin le chapitre 4 est le début de nos travaux en cours.

➼ **Le chapitre 1** a pour objet essentiel de rappeler les définitions, caractérisations et propriétés des groupes de Lie nilpotents et résolubles ; des champs de vecteurs linéaires et des systèmes linéaires.
On considère le système linéaire

$$(\Sigma) \quad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_j(g).$$

Le système vérifie la condition du rang si et seulement si l'idéal de l'accessibilité forte du système est égal à $\mathfrak{g}$ (proposition 6). Le système (Σ) est équivalent au sens du saturé de Lie au système

$$(\widetilde{\Sigma}) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j \widetilde{Y}_j(g),$$

où $\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_m$ est une base de l'algèbre de Lie engendrée par les champs $Y_1, \ldots, Y_m$. Le système (Σ) vérifie la condition du rang algébrique si le linéarisé de $(\widetilde{\Sigma})$ au point e est contrôlable, par conséquent quelque soit $t > 0$ l'ensemble des points atteignables de e noté $\mathcal{A}_t$ est un voisinage de e.
Par ailleurs il est démontré dans [Jouan102] le résultat (voir le théorème 3) qui suit.
Si le groupe G est nilpotent et la dérivation associée au champ de vecteur linéaire $\mathcal{X}$ est ***intérieure****, alors le système (Σ) est contrôlable si et seulement si l'algèbre de Lie engendrée par $Y_1, \cdots, Y_m$ est égale à $\mathfrak{g}$. Dans ce cas il est contrôlable en temps exactement T pour tout $T > 0$.*
Des contre-exemples dans le groupe Heisenberg et dans le groupe affine montrent que le théorème n'est pas vrai si la dérivation n'est pas intérieure, il n'est pas non plus vrai dans les groupes de Lie résolubles.

♣ **Le chapitre 2** est un résumé des principaux résultats contenus dans l'article *M.Dath P.Jouan controllability of linear systems on low dimensional nilpotent and solvable Lie groups* publié dans "Journal of Dynamical and

Control Systems".
Il faut noter que les propositions et théorèmes auquels on fait appel sont numérotés comme dans le chapitre 2 et non dans l'article qui est en annexe.
Dans cet article, nous sommes parvenus à trouver d'abord des résultats généraux de contrôlabilité d'un système linéaire défini sur un groupe de Lie connexe quelconque (voir la proposition 10 et la proposition 11). Dans la suite de nos travaux (même dans le chapitre 3) ces résultats sont fondamentaux, puisque ils sont utilisés presque dans toutes nos démonstrations de contrôlabilité.
La proposition 12 vise à transformer par automorphisme de groupe de Lie un système linéaire (Σ) en un système équivalent (Σ_N) ; le système (Σ_N) est appelé la forme normale de (Σ).
Ensuite nous tournons notre attention à la contrôlabilité des systèmes linéaires définis sur le groupe affine et sur le groupe Heisenberg de dimension 3. *Un système est appelé singulier si la restriction du champ linéaire sur le groupe dérivé $\mathcal{D}^1G$ est nul ; sinon le système est dit régulier.*
Dans le groupe affine le principal résultat de contrôlabilité que nous avons montré est le suivant.
Un système linéaire défini dans le groupe affine est contrôlable si et seulement si il est singulier et vérifie la condition du rang.(voir le théorème 4 et 5).
Sur le groupe Heisenberg de dimension 3, en considérant la restriction du système sur $G/\mathcal{D}^1G$ on obtient le principal résultat de contrôlabilité (voir théorème 7 et 8).
un système linéaire est contrôlable si et seulement si il vérifie la condition du rang et :

(i) dans le cas singulier : le système vérifie la condition du rang algébrique ou bien les valeurs propres de la matrice de contrôlabilité du système restreint à $G/\mathcal{D}^1G$ ne sont pas réelles

(ii) dans le cas régulier : les valeurs propres de la matrice de contrôlabilité du système restreint à $G/\mathcal{D}^1G$ ne sont pas réelles.

Par ailleurs dans [Jouan102] il est montré que dans les groupes de Lie semi-simples connexes de centre fini la contrôlabilité de e du système linéaire entraine la contrôlabilité du système. Ce résultat n'est pas vrai dans le groupe affine ni dans le groupe Heisenberg (voir le théorème 9 et la proposition 16).

➽ Le propos du **Chapitre 3**, est d'étendre les résultats de contrôlabilité d'un système linéaire dans le groupe Heisenberg de dimension $2n+1$, $n>1$, noté $\mathbb{H}^n$. Son algèbre de Lie est notée par $\mathfrak{h}^n$.
D'abord nous avons commencé dans ce chapitre par étendre à $\mathfrak{h}^n$ la notion de base symplectique. Nous avons également donné dans $\mathfrak{h}^n$ l'expression gé-

nérale des dérivations et des champs linéaires (voir définition 11, proposition 19 et 20).
Puis nous nous intéressons à la contrôlabilité d'un système linéaire à m entrées dans $\mathbb{H}^n$. Tous les résultats qui suivent sont donnés sous l'hypothèse que le système satisfait la condition du rang.
Dans le théorème 11 on montre que *si le centre de $\mathfrak{h}^n$ est contenu dans l'algèbre de Lie engendrée par les m champs de vecteurs contrôlés, alors le système est contrôlable en temps exact.* Dans le cas où le centre de $\mathfrak{h}^n$ n'est pas inclus dans l'espace vectoriel engendré par les champs contrôlés et $m \geqslant n+1$ alors le système est contrôlable en temps exact ; en d'autres termes $n+1$ champs de vecteurs linéairement indépendants assurent la contrôlabilité en temps exact d'un système linéaire défini dans $\mathbb{H}^n$ (voir corollaire 1).
Lorsque le système est singulier, alors la condition du rang algébrique est suffisante pour que le système soit contrôlable.
Ensuite notre attention se tourne vers les systèmes à m entrées avec les hypothèses $m \leqslant n$ et le centre de $\mathfrak{h}^n$ n'appartient pas à l'algèbre de Lie engendrée par les m champs de vecteurs contrôlés. Pour obtenir des résultats de contrôlabilité, nous avons défini le concept de *cellule* et de *cellule découplée.*
La jème cellule est l'idéal $\mathfrak{g}_j$ de $\mathfrak{h}^n$ engendrée par X_j, Y_j, Z qui sont des vecteurs d'une base symplectique de $\mathfrak{h}^n$. Cette cellule est dite découplée si l'espace vectoriel engendré par X_j, Y_j, Z est invariant par la dérivation associée au champ linéaire. Il faut remarquer que le groupe de Lie G_j dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_j$ est en fait le groupe Heisenberg de dimension 3. On a le résultat (théorème 12) *si la restriction du système sur la jème cellule découplée est contrôlable, alors le système est contrôlable.*
Dans le même ordre d'idée, sous l'hypothèse que *le système induit dans chacune des cellules n'est pas contrôlable* nous sommes arrivés à donner pour un système défini dans $\mathbb{H}^n$, une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où toutes les cellules sont découplées et une condition suffisante de contrôlabilité dans le cas où au moins deux cellules sont découplées (voir théorème 14) ; le théorème 13 en est un cas particulier et s'applique dans $\mathbb{H}^2$.
Enfin si le système est régulier et de plus le centre de $\mathfrak{h}^n$ n'est pas inclus dans l'algèbre de Lie engendrée par les champs contrôlés, les théorèmes 15 et 16 donnent des conditions suffisantes de non contrôlabilité du système qu'on a appelé "obstruction à la contrôlabilité". Une conjecture qui généralise les cas de non contrôlabilité rencontrés tout au long de nos travaux termine le chapitre.
➤ **Le chapitre 4** est une projection dans le futur de nos recherches, il commence par les formes normales d'un système linéaire à une entrée, et nous fait espérer obtenir d'autres résultats de contrôlabilité de systèmes linéaires à une seule entrée ou bien à deux entrées dans $\mathbb{H}^n$.

Chapitre 1

Rappels : Systèmes linéaires sur les groupes de Lie

Dans ce chapitre on rappelle ce que sont les groupes de Lie nilpotents, les groupes de Lie résolubles, les systèmes linéaires sur les groupes de Lie et leurs propriétés générales. Il est subdivisé en trois sections. La section 1.1 est réservée à la définition et propriétés des groupes de Lie nilpotents et résolubles. La section 1.2 est consacrée aux définitions, caractérisations et propriétés des champs linéaires. La section 1.3 est essentiellement consacrée aux propriétés et à la contrôlabilité des systèmes $\dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_j(g)$ où $\mathcal{X}$ est un champ de vecteurs linéaire et les Y_j des champs invariants à droite. Dans toute la suite G désigne un groupe de Lie connexe, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1.1 Groupes de Lie nilpotents et résolubles

Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition 1 *On appelle série centrale descendante de $\mathfrak{g}$, la série $(\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^{n})_{n\geqslant 0}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^{0} = \mathfrak{g}$ et $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^{n+1} = \left[\mathfrak{g}, \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^{n}\right]$.*
On dit que G est nilpotent si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^{p} = \{0\}$.

Définition 2 *On appelle série dérivée de $\mathfrak{g}$, la série $(\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{n})_{n\geqslant 0}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{0} = \mathfrak{g}$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{n+1} = \left[\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{n}, \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{n}\right]$.*
On dit que G est résoluble si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{p} = \{0\}$.

Remarque.
Les inclusions suivantes sont toujours vérifiées :
(1) $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^{i+1} \subset \mathcal{C}_{\mathfrak{g}}^{i}$.

(2) $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{i+1} \subset \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{i}$.

Définition 3 *(1) Le commutateur de deux éléments x et y de G noté $[x,y]$ est l'élément de G $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$.*

(2) Le groupe dérivé de G est le sous-groupe noté $\mathcal{D}^1 G$ de G engendré par tous les commutateurs de G.

(3) Le ième groupe dérivé de G noté $\mathcal{D}^i G$, $i \geq 2$ est le groupe dérivé de $\mathcal{D}^{i+1}G$.

(4) On définit aussi la série centrale descendante $\mathcal{C}^n G$ de sous-groupes de G par $\mathcal{C}^0 G = G$ et $\mathcal{C}^{i+1}G$ est le sous-groupe engendré par les commutateurs $[x,y]$ où $x \in G$ et $y \in \mathcal{C}^{i+1}G$.

Proposition 1 *Si G est un groupe de Lie simplement connexe, de dimension finie alors les sous-groupe dérivés $\mathcal{D}^i G$ (resp. centraux $\mathcal{C}^i G$) sont des sous-groupes de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{D}^i G$ (resp. $\mathcal{C}^i G$).*

La démonstration de cette proposition se trouve dans [Bourbaki2] page 232.

Définition 4 *1. On appelle dérivation de $\mathfrak{g}$, tout endomorphisme de $\mathfrak{g}$ qui vérifie*

$$D([x,y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

2. $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie telle que,

$$[h,g] \in \mathfrak{h}, \quad \forall h \in \mathfrak{h} \quad \textit{et} \quad \forall g \in \mathfrak{g}.$$

3. Un idéal de $\mathfrak{g}$ est dit caractéristique si il est stable par toute dérivation de $\mathfrak{g}$.

Remarque
Tout groupe de Lie nilpotent est résoluble, la réciproque est fausse. Par exemple le groupe $Aff_+(2)$ qui est défini dans la section 2.2 est résoluble mais n'est pas nilpotent.

Proposition 2 *1. Les sous-algèbres de Lie de la série centrale descendante et les sous-algèbres de Lie dérivées sont des idéaux caractéristiques.*

2. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est abélien si et seulement si $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ est inclus dans $\mathfrak{h}$.

3. Si G est simplement connexe, les sous-groupes de Lie correspondants aux sous-algèbres de Lie de la série descendante ou aux sous-algèbre dérivées sont fermés.

La démonstrations 1 et 2 sont immédiates et se trouvent par exemple dans [Bourbaki1] ; pour 3 voir [Bourbaki2] page 232.

1.2 Champs de vecteurs linéaires

Soit G un groupe de Lie connexe, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, identifiée à l'ensemble des champs de vecteurs invariants à droite. L'ensemble des champs de vecteurs analytiques sur G est noté $V^\omega(G)$, et le normalisateur de $\mathfrak{g}$ dans $V^\omega(G)$ est par définition

$$\mathfrak{N} = \mathrm{norm}_{V^\omega(G)}\mathfrak{g} = \{F \in V^\omega(G);\ \forall Y \in \mathfrak{g} \qquad [F,Y] \in \mathfrak{g}\}.$$

Definition 5 *Un champ de vecteurs F sur G est dit linéaire s'il appartient à $\mathfrak{N}$ et vérifie de plus $F(e) = 0$.*

En d'autres termes la restriction de $\mathrm{ad}(F)$ à $\mathfrak{g}$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$.
Il est bien connu que $\mathfrak{N}$ est une sous-algèbre de Lie de $V^\omega(G)$.
L'application $F \longmapsto \mathrm{ad}(F)$ est un morphisme d'algèbre de Lie de $V^\omega(G)$ dans l'algèbre $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ des dérivations de $\mathfrak{g}$.
Le théorème 1 permet de caractériser les champs linéaires de trois manières différentes, sa démonstration se trouve dans [Jouan11].

Théorème 1 *Soit $\mathcal{X}$ un champ de vecteurs sur un groupe de Lie connexe G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{X}$ est linéaire ;*
2. *le flot de $\mathcal{X}$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de G ;*
3. *$\mathcal{X}$ vérifie*
$$\forall x, x' \in G \qquad \mathcal{X}_{xx'} = TL_x.\mathcal{X}_{x'} + TR_{x'}.\mathcal{X}_x \tag{1.1}$$

La seconde condition implique qu'un champ de vecteurs linéaire sur un groupe de Lie connexe est complet.

Ce théorème montre qu'un champ linéaire n'est rien d'autre que ce qui est couramment appelé *automorphisme infinitésimal* dans la littérature par exemple dans [Bourbaki2].

1.2.1 La dérivation associée à un champ linéaire

Définition 6 *Soit $\mathcal{X}$ un champ linéaire.*
On peut associer à $\mathcal{X}$ la dérivation D de $\mathfrak{g}$ définie par :

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \qquad DY = -\left[\mathcal{X}, Y\right],$$

c'est à dire $D = -ad(\mathcal{X})$.

Remarque. Le signe"-" qui apparait dans cette définition vient de la formule $[Ax, b] = -Ab$ dans $\mathbb{R}^n$. Il permet aussi d'éviter un signe "-" dans les formules de la proposition suivante.

Proposition 3 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$T_e\varphi_t = e^{tD}$$

et, par conséquent,

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_t(\exp Y) = \exp(e^{tD}Y)$$

La démonstration de cette proposition se trouve dans [Jouan11] page 30-31.

1.2.2 Les dérivations intérieures

Définition 7 *Une dérivation D de $\mathfrak{g}$ est intérieure si il existe un élément $X \in \mathfrak{g}$ tel que $D = ad(X)$.*

Soit $X \in \mathfrak{g}$ un champ de vecteurs invariant à droite. On note par I le difféomorphisme de G défini par : $x \longrightarrow x^{-1}$.
Le champ de vecteurs I_*X est invariant à gauche ; il est égal à $-X_e$ au point e et le champ de vecteurs

$$\mathcal{X} = X + I_*X$$

est ainsi linéaire.
La dérivation $D = -\text{ad}(\mathcal{X}) = -\text{ad}(X)$ est intérieure et le flot de $\mathcal{X}$ est donné par :

$$\varphi_t(x) = \exp(tX)x\exp(-tX).$$

Remarques.

1. A toute dérivation intérieure dans un groupe de Lie quelconque, on peut associer un champ linéaire. Ceci n'est pas vrai lorsque la dérivation n'est pas intérieure et que le groupe n'est pas simplement connexe.
2. Si G est un groupe de Lie matriciel, donc un sous-groupe de $GL(n)$ pour un certain n, les champs de vecteurs invariants à droite sur G sont les champs $M \longrightarrow XM$ où X appartient à $\mathfrak{g}$.
   Le champ linéaire associé à $D = -\text{ad}(X)$ est par conséquent :

   $$\mathcal{X}(M) = XM - MX.$$

   Ce sont les premiers exemples de champs linéaires considérés en théorie du contrôle (Cf [Markus81]).
3. Si G est semi-simple toutes les dérivations de $\mathfrak{g}$ sont intérieures donc tous les champs de vecteurs linéaires sont du type précédent.

1.2.3 Champs linéaires sur les groupes simplement connexes

Théorème 2 *On suppose que le groupe G est connexe est simplement connexe, et soit D une dérivation de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors il existe un et un seul champ de vecteurs linéaire sur G dont la dérivation associée est D.*

La démonstration de ce théorème est contenue dans le lemme 4, page 250, de [Bourbaki2].

1.3 Les systèmes linéaires

Définition 8 *Un système linéaire sur un groupe de Lie connexe G est un système contrôlé*

$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_j(g)$$

où $\mathcal{X}$ est un champ de vecteurs linéaire et les Y_j des champs de vecteurs invariants à droite. Les contrôles u_j prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des entrées admissibles est un sous-espace de $L^{\infty}_{loc}([0, +\infty[\,, \mathbb{R}^m)$ qui contient les entrées constantes par morceaux et qui est stable par concaténation. Une entrée $t \longrightarrow u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ étant fixée on note par $g_u(t)$ (ou simplement $g(t)$ si il n'y a pas d'ambiguité) la trajectoire de (Σ) qui vérifie $g_u(0) = g$.

1.3.1 Propriétés des ensembles accessibles

Le résultat suivant dont la démonstration se trouve dans [CM05] est fondamental.

Proposition 4 *L'entrée $t \longmapsto u(t)$ étant fixée, on note par $e_u(t)$ la trajectoire issue de e. La trajectoire issue de g est alors*

$$g_u(t) = e_u(t)\varphi_t(g),$$

où $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ désigne le flot de $\mathcal{X}$.

Remarque.
Si les champs de vecteurs Y_j étaient invariants à gauche on aurait de la même manière $g_u(t) = \varphi_t(g)e_u(t)$.

Notations
On note par :

(i) $\mathcal{A}(g,t) = \{g_u(t); u \in L^\infty[0,t]\}$, l'ensemble des points accessibles du point g en temps t ;

(ii) $\mathcal{A}(g, \leq t) = \bigcup_{s\leq t} \mathcal{A}_s$, l'ensemble des points accessibles du point g en temps plus petit que t ;

(iii) $\mathcal{A}(g) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{A}_t$, l'ensemble des points accessibles du point g en temps quelconque.

En particulier les ensembles atteignables de l'identité e seront notés par

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(e,t) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}(e).$$

Ces différents ensembles sont liés par les relations suivantes :

Proposition 5 *1.* $\forall\, t \geq 0 \quad \mathcal{A}(e, \leq t) = \mathcal{A}(e,t) = \mathcal{A}_t$.

2. $\forall\, 0 \leq s \leq t \quad \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$.

3. $\forall\, g \in G \quad \mathcal{A}(g,t) = \mathcal{A}_t\varphi_t(g)$.

4. $\forall\, s,t \geq 0 \quad \mathcal{A}_{t+s} = \mathcal{A}_t\varphi_t(\mathcal{A}_s) = \mathcal{A}_s\varphi_s(\mathcal{A}_t)$.

La démonstration des deux premières assertions se trouvent dans [Sontag98]. Les deux dernières sont des conséquences immédiates de la proposition 3.
On note également par $\mathcal{A}^- = \{g \in G; e \in \mathcal{A}(g)\}$ l'ensemble des points à partir desquels l'identité peut être atteint. C'est l'ensemble des points atteignables de l'identité pour le système inverse :

$$(\Sigma^-) \qquad \dot{g} = -\mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} -u_j Y_j(g).$$

1.3.2 Algèbre de Lie du système

L'algèbre de Lie du système (Σ), notée $\mathcal{L}$ est l'algèbre de Lie engendrée par $\{\mathcal{X}, Y_1, \cdots, Y_m\}$ et (Σ) vérifie la condition du rang si $\mathcal{L} = \mathfrak{g}$.
L'idéal de l'accessibilité forte noté $\mathcal{L}_0$ est l'idéal de $\mathcal{L}$ engendré par $Y_1, \cdots, Y_m$.
Rappelons que $\mathcal{L}_0$ est la plus petite sous-algèbre de Lie qui contient $Y_1, \cdots, Y_m$ et qui est fermée pour le crochet de Lie avec $\mathcal{X}$, autrement dit :

$$X \in \mathcal{L}_0 \Longrightarrow DX \in \mathcal{L}_0.$$

Rappelons également que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathbb{R}\mathcal{X}$.

1.3.3 Condition du rang

On rappelle que la condition du rang est une condition nécessaire de contrôlabilité (voir [Sontag98]).
Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\{Y_1, \cdots, Y_m\}$, et notons $D\mathfrak{h}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{h}$ et stable par la dérivation D associée à $\mathcal{X}$:

$$D\mathfrak{h} = \text{Vect}\{D^k Y; Y \in \mathfrak{h} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}\}.$$

Notons enfin $\mathcal{LA}(D\mathfrak{h})$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par $D\mathfrak{h}$.

La proposition qui suit donne une condition nécessaire et suffisante pour que le système vérifie la condition du rang.

Proposition 6 *La sous-algèbre $\mathcal{LA}(D\mathfrak{h})$ est stable par D. Elle est par conséquent égale à l'idéal de l'accessibilité forte $\mathcal{L}_0$, et l'algèbre de Lie du système est égale à*

$$\mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{LA}(D\mathfrak{h}) = \mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{L}_0.$$

Le système vérifie la condition du rang si et seulement si $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$.

La démonstration de cette proposition repose sur le fait que $\mathcal{L}_0 \subset \mathfrak{g}$ et rang $(\mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{L}_0)(e) = \text{rang}(\mathcal{L}_0)(e)$; elle se trouve dans [Jouan11].

1.3.4 Extension du système

Le **Saturé de Lie** $\mathcal{LS}(\Sigma)$ du système (resp le **saturé de Lie fort** $\mathcal{LSS}(\Sigma)$ du système) est l'ensemble des champs de vecteurs f qui appartiennent à l'algèbre de Lie du système et dont le flot ϕ_t vérifie

$$\forall g \in G, \forall t \geq 0 \quad \phi_t(g) \in \overline{\mathcal{A}(g)} \quad (\text{resp.}\ \phi_t(g) \in \overline{\mathcal{A}(g, \leq t)}).$$

La notion de saturé de Lie se trouve dans [Jurdjevic97] (voir aussi [Gauthier84], [JK81]). L'intérêt de cette notion vient de la proposition suivante, (voir [Jurdjevic97]).

Proposition 7 *Si un système (Σ) est Lie déterminé alors*

$$Int(\overline{\mathcal{A}(g, \leqslant t)}) = Int(\mathcal{A}(g, \leqslant t)).$$

Par conséquent certains champs de vecteurs peuvent être ajoutés, on a la proposition suivante :

Proposition 8 *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *est contenue dans* $\mathcal{LSS}(\Sigma)$*, ainsi le système* (Σ) *peut être remplacé par le système*

$$(\widetilde{\Sigma}) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j \widetilde{Y}_j(g)$$

où $\widetilde{Y}_1, \cdots, \widetilde{Y}_m$ *est base de* $\mathfrak{h}$*, sans modifier* $\overline{\mathcal{A}(g, \leq t)})$ *et l'intérieur des ensembles* $\mathcal{A}(g, \leq t)$*.*

1.3.5 Contrôlabilité locale et condition du rang algébrique

Un système contrôlé est localement contrôlable au voisinage d'un point d'équilibre dès que son linéarisé est contrôlable (Cf [NvdS90]). Ici "localement contrôlable au voisinage d'un point g signifie que l'ensemble $\mathcal{A}(g, t)$ est un voisinage de g pour tout $t > 0$.

Définition 9 *On dit que le système* (Σ) *vérifie la condition du rang algébrique (ou ad-rank condition dans [AT99]) si* $D\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$*, en d'autres termes si le linéarisé au point* e *du système étendu* $(\widetilde{\Sigma})$ *est contrôlable.*

Puisque la condition du rang algébrique est équivalente à la condition du rang pour le linéarisé du système étendu au point e, on a la proposition suivante :

Proposition 9 *(Voir [AT99]) Si le système vérifie la condition du rang algébrique alors, alors pour tout* $t > 0$ *l'ensemble* $\mathcal{A}_t$ *est un voisinage de* e*.*

Le théorème qui suit, dont la démonstration est tirée de [Jouan102] donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité d'un système linéaire sur un groupe nilpotent lorsque la dérivation associée au champ linéaire est intérieure.

On note comme précédemment $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par les champs Y_j, $j = 1, \ldots, m$.

Théorème 3 *On suppose le groupe* G *nilpotent et la dérivation associée au champ de vecteurs linéaire* $\mathcal{X}$ *intérieure. Alors le système* (Σ) *est contrôlable si et seulement si* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$*. Dans ce cas il est contrôlable en temps exactement* T *pour tout* $T > 0$*.*

Démonstration.

La suffisance de la condition ainsi que la contrôlabilité en temps exact qui en découle sont évidents.

Pour la réciproque, supposons le système contrôlable, et notons $(\mathcal{C}^i\mathfrak{g})_{i\geq 0}$ la série centrale descendante de $\mathfrak{g}$.

Soit X un champ de vecteurs invariant à droite tel que $\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(\mathcal{X})$, et soit k le plus grand indice pour lequel $X \in \mathcal{C}^k\mathfrak{g}$; on a donc $\mathrm{ad}(X)\mathfrak{g} \subset \mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g}$. La condition du rang impose que la plus petite sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$ et stable par $\mathrm{ad}(X)$ soit égale à $\mathfrak{g}$.

Or $\mathfrak{h} + \mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ (car $\mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g}$ en est un idéal) qui est stable par $\mathrm{ad}(X)$, puisque $\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g}$. Ceci prouve que

$$\mathfrak{h} + \mathcal{C}^{k+1}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$$

Suposons maintenant que $\mathfrak{h} + \mathcal{C}^{k+r}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ pour un entier $r > 0$. On peut décomposer X en $X = X_h + X_r$ où $X_h \in \mathfrak{h}$ et $X_r \in \mathcal{C}^{k+r}\mathfrak{g}$. Par conséquent

$$\mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}) = \mathrm{ad}(X_h)(\mathfrak{h}) + \mathrm{ad}(X_r)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h} + \mathcal{C}^{k+r+1}\mathfrak{g}.$$

Ceci entraîne que $\mathfrak{h} + \mathcal{C}^{k+r+1}\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre stable par $\mathrm{ad}(X)$ qui contient $\mathfrak{h}$, donc égale à $\mathfrak{g}$.

Cette récurrence montre que

$$\forall r > 0 \qquad \mathfrak{h} + \mathcal{C}^{k+r}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}.$$

Comme $\mathcal{C}^{k+r}\mathfrak{g} = \{0\}$ pour r assez grand on en conclut $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$.

□

Contre-exemples

(1) Le théorème n'est plus vrai lorsque la dérivation associée au champ linéaire n'est pas intérieure, puisque par exemple le théorème 7, donne des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité d'un système linéaire à **une seule entrée** sur le groupe Heisenberg de dimension 3.

(2) Le théorème n'est pas non plus vrai sur les groupes de Lie résolubles, puisque le théorème 4, donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité d'un système linéaire (évidemment à **une entrée**) sur le groupe $Aff_+(2)$ et pourtant dans $\mathfrak{aff}_+(2)$ [1] toutes les dérivations sont intérieures.

1. $\mathfrak{aff}_+(2)$ est l'algèbre de Lie de $Aff_+(2)$.

Chapitre 2

Contrôlabilité des systèmes linéaires dans le groupe affine et le groupe Heisenberg

Ce chapitre est un résumé des principaux résultats contenus dans l'article : M.Dath P.Jouan *controllability of linear systems on low dimensional nilpotent and solvable Lie groups* publié dans " Journal of Dynamical and Control Systems", qui est en annexe dans le mémoire (il correspond dans la bibliographie à [DathJouan14]). Pour cela en ce qui concerne les démonstrations des propositions et théorèmes contenus dans ce chapitre, on pourra se référer à l'article.
Dans ce dernier, nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité d'un système linéaire défini sur le groupe affine de dimension 2 ou bien sur le groupe Heisenberg de dimension 3.
Les notations dans ce chapitre sont les mêmes que celles utilisées dans le chapitre 1 : $(\Sigma), \mathcal{X}, \varphi$ désignent respectivement un système linéaire, un champ linéaire et le flot de $\mathcal{X}$.
On note par $\mathcal{D}^1 G$ ou bien par $\mathcal{Z}(G)$ [1] le sous-groupe dérivé de G.

2.1 Résultats généraux de contrôlabilité

Il est à noter que les résultats contenus dans cette section s'appliquent à un groupe de Lie connexe G quelconque. Pour arriver à ces résultats, on relie la contrôlabilité de (Σ) sur G à la contrôlabilité induite par (Σ) sur G/H, où H est un sous-groupe fermé et globalement invariant par $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Puisque

1. Dans le groupe Heisenberg et dans le groupe affine le groupe dérivé coïncide avec le centre du groupe.

nous nous intéressons aux groupes de Lie nilpotents, résolubles et simplement connexes, on sait que les sous-algèbres dérivées et les sous-algèbres de la série centrale descendante sont des idéaux caractéristiques, et qu'elles sont invariantes par toutes les dérivations de $\mathfrak{g}$ (algèbre de Lie de G). Si G est simplement connexe les sous-groupes de Lie correspondants à ces sous-algèbres de Lie sont simplement connexes, normaux, fermés et invariants par le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de χ.
En particulier $G/\mathcal{D}^1G$ est abélien et simplement connexe, donc difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Par conséquent le système induit sur $G/\mathcal{D}^1G$ est linéaire au sens classique. Ainsi nous avons les trois propositions suivantes qui correspondent respectivement aux propositions 4, 5 et 6 de [DathJouan14].

Proposition 10 *Soit H un sous-groupe fermé de G, globalement invariant par le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de χ. On suppose que le système (Σ) vérifie la condition du rang. Alors (Σ) est contrôlable si et seulement si :*

1. *le système induit sur G/H est contrôlable.*
2. *le sous-groupe H est inclus dans $\overline{\mathcal{A}}$ et dans $\overline{\mathcal{A}^-}$, les clôtures respectives de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{A}^-$.*

Remarque.
Dans [DathJouan14] on avait supposé le sous-groupe H normal, ce qui n'est en fait pas indispensable, comme on peut le constater en relisant la démonstration de cette proposition.

Proposition 11 *Soit H un sous-groupe fermé et connexe de G. On suppose que la restriction de χ à H est nulle. Alors H est inclus dans $\mathcal{A}$ (resp. dans $\mathcal{A}^-$) si et seulement si $\mathcal{A}\cap H$ (resp. $\mathcal{A}^-\cap H$) est un voisinage de e.*

La proposition 11 est déterminante dans la démonstration de la contrôlabilité dans le cas où χ est nul sur H. Ceci nous amène à définir deux types de systèmes linéaires sur le groupe affine de dimension 2 et sur le groupe Heisenberg de dimension quelconque.

Définition 10 *Un système linéaire est dit* ***singulier*** *(resp.* ***régulier****) si la restriction du champ linéaire $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{D}^1G$ est nul (resp. si la restriction du champ linéaire $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{D}^1G$ est non nul).*

Remarque.

(i) Sur le groupe affine et sur le groupe Heisenberg le groupe dérivé coïncide avec le centre du groupe ; tout au long de nos travaux on utilisera les deux critères de contrôlabilités contenus dans la proposition 10 et on prendra H comme étant le sous-groupe dérivé de G. Mais la difficulté réside sur le fait de montrer que le sous-groupe $\mathcal{D}^1 G$ est inclus dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{A}^-$.

(ii) Dans le cas d'un système singulier, grâce à la proposition 11 la condition du rang algébrique est une condition suffisante de contrôlabilité d'un système parce dans ce cas les inclusions citées ci-dessus sont faciles à démontrer (voir par exemple la démonstration du théorème 10).

(iii) Dans le cas d'un système régulier à une seule entrée par contre, la démonstration de ces inclusions est tout à fait difficile comme on peut le constater en lisant la démonstration du théorème 7.

La proposition 12 montre comment un système linéaire se transforme par automorphisme sur un groupe de Lie connexe et simplement connexe.

Proposition 12 *Soit* $(\Sigma)\quad \dot{g} = \chi(g) + \Sigma_{j=1}^m u_j Y_j(g)$ *un système linéaire sur un groupe de Lie G connexe et simplement connexe, D la dérivation associée à* χ *et P un automorphisme de* $\mathfrak{g}$. *Alors* (Σ) *est équivalente par automorphisme de groupes de Lie à :*

$$(\widetilde{\Sigma})\quad \dot{g} = \widetilde{\chi}(g) + \Sigma_{j=1}^m u_j P Y_j(g)$$

où $\widetilde{\chi}$ *est le champ linéaire dont la dérivation associée est* $\widetilde{D} = PDP^{-1}$.

2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires sur $Aff_+(2)$

Le groupe $Aff_+(2)$ est la composante connexe du groupe affine de dimension 2 :

$$Aff_+(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{aff}(2)$ s'identifie à l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche, elle est résoluble et engendrée par

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $[X,Y] = XY - YX = Y$. Les matrices X et Y s'identifient respectivement aux champs de vecteurs invariants à gauche :

$$gX = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad gY = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons montré :

1. Les dérivations de $\mathfrak{aff}(2)$ sont les endomorphismes dont la matrice s'écrit dans la base (X, Y) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels.
2. Toute dérivation D sur $\mathfrak{aff}(2)$ est intérieure et s'écrit $D = -\mathrm{ad}(aY - bX)$.
3. Le champ linéaire associé à D s'écrit :
$$\mathcal{X}(g) = \begin{pmatrix} 0 & a(x-1)+by \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $B = \alpha X + \beta Y$ un élément de $\mathfrak{aff}(2)$ et (Σ) le système linéaire à une entrée dans $Aff_+(2)$, défini par :

$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + u(g)B.$$

En coordonnées (Σ) s'écrit :

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= u\alpha x \\ \dot{y} &= a(x-1) + by + u\beta x \end{cases}$$

La proposition qui suit (qui correspond à la proposition 7 de [DathJouan14]) donne une équivalence de (Σ) par automorphisme.

Proposition 13 *Si (Σ) vérifie la condition du rang alors il est équivalent par automorphisme à (Σ_N) :*

$$(\Sigma_N) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= u\alpha x \\ \dot{y} &= x - 1 + by \end{cases} \qquad \textit{avec} \quad \alpha \neq 0$$

(Σ_N) est appelé la forme normale de (Σ).

Les deux théorèmes suivants (qui correspondent aux théorèmes 3 et 4 dans [DathJouan14]) donnent des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité.

Théorème 4 *Le système (Σ_N) est contrôlable si et seulement si $b = 0$.*

La condition $b = 0$ est en fait équivalente à ce que le système soit singulier. Pour un système qui n'est pas en forme normale, le théorème devient ainsi :

Théorème 5 *Le système linéaire (Σ) : $\dot{g} = \mathcal{X}(g) + u(g)B$ où la dérivation associée à $\mathcal{X}$ dans la base (X, Y) est*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \alpha X + \beta Y$$

est contrôlable si et seulement si $b = 0$ et $a\alpha \neq 0$.
En d'autres termes, (Σ) est contrôlable si et seulement si il est singulier et vérifie la condition du rang.

2.2.1 Contrôlabilité du système invariant associé

Dans $\mathfrak{aff}(2)$, on sait d'une part que les dérivations sont intérieures et d'autre part qu'un champ linéaire $\mathcal{X}_g = g(aY - bX) - (aY - bX)g$ est la somme d'un champ invariant à gauche et d'un champ invariant à droite. Par conséquent on peut associer à (Σ) le système invariant à gauche

$$(I) \quad \dot{g} = g(aY - bX) + ugB.$$

La proposition suivante, qui correspond à la proposition 8 de [DathJouan14] montre que un système invariant à gauche dans le groupe $Aff_+(2)$ n'est jamais contrôlable. Ce résultat n'est pas vérifié par tous les groupes de Lie résolubles comme on peut le voir dans [Sachkov09].

Proposition 14 *Un système invariant à gauche à une entrée défini sur $Aff_+(2)$ n'est pas contrôlable.*

Remarque.
On sait que dans une algèbre de Lie semi-simple toutes les dérivations sont intérieures, par conséquent à un système linéaire on peut toujours associer un système invariant. Mais dans ce cas on a un résultat tout à fait différent que celui qu'on a dans $Aff_+(2)$ puisqu'il est montré (voir [SA01] ou bien [Jouan102]) que si un système linéaire défini sur un groupe de Lie semi-simple de centre fini est contrôlable alors le système invariant associé est contrôlable. De plus si le système linéaire satisfait la condition du rang algébrique, alors le système linéaire est contrôlable si et seulement si le système invariant associé est contrôlable (voir aussi [Jouan11] pages 77-78).

2.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires sur le groupe Heisenberg de dimension 3

2.3.1 Champs de vecteurs linéaires sur le groupe Heisenberg

Rappelons que le groupe Heisenberg est le sous-groupe de $GL(3, \mathbb{R})$ défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (x, y, z) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est engendrée par les champs de vecteurs invariants à droite

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui vérifient $[X,Y] = YX - XY = Z$, et s'écrivent en coordonnées canoniques

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Partant de l'égalité $DZ = D\,[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$, il est facile de voir que les dérivations de $\mathfrak{g}$ sont les endomorphismes dont la matrice s'écrit dans la base (X,Y,Z)

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & a+d \end{pmatrix}.$$

Le champ linéaire $\mathcal{X}$ associé à D s'écrit en coordonnées canoniques

$$\mathcal{X} = (ax+by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx+dy)\frac{\partial}{\partial y} + (ex + fy + (a+d)z + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}by^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

2.3.2 Contrôlabilité d'un système linéaire à deux entrées

Considérons le système linéaire à deux entrées

$$(\Sigma_2) \quad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + u_1 B_1(g) + u_2 B_2(g)$$

où B_1 et B_2 sont des champs de vecteurs invariants à droite et linéairement indépendants.
Le théorème suivant, qui correspond au théorème 5 de [DathJouan14] donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité en temps t pour tout $t > 0$.

Théorème 6 *(Σ_2) est contrôlable si et seulement si il vérifie la condition du rang. Dans ce cas (Σ_2) est contrôlable en temps t pour tout $t > 0$.*

2.3.3 Contrôlabilité d'un système linéaire à une entrée

Dans ce paragraphe nous nous intéressons aux systèmes linéaires de la forme

$$(\Sigma_1) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + uB(g).$$

La proposition 15 donne la forme normale de (Σ_1).

Proposition 15 *Si (Σ_1) vérifie la condition du rang alors il est équivalent par automorphisme à*

$$(\Sigma_N) \quad \dot{g} = \widetilde{\mathcal{X}}(g) + uX(g) \qquad \text{où} \quad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & d & 0 \\ 0 & f & d \end{pmatrix}$$

est la dérivation associée à $\widetilde{\mathcal{X}}$ dans la base (X, Y, Z). De plus :

1. *L'application $(x, y, z) \longrightarrow (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z)$ où $\lambda \neq 0$ est un automorphisme de groupe de Lie dont l'action sur la forme normale consiste à changer f en λf et X en λX.*
2. *Le système inverse*

$$(\Sigma_1^-) \quad \dot{g} = -\mathcal{X}(g) - uX(g)$$

est équivalent par automorphisme au système en forme normale dont la dérivation associée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & -d & 0 \\ 0 & f & -d \end{pmatrix}$.

Remarque.
Le système (Σ_N) s'écrit en coordonnées canoniques

$$(\Sigma_N) \quad \begin{cases} \dot{x} &= by + u \\ \dot{y} &= x + dy \\ \dot{z} &= fy + dz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by^2 \end{cases}$$

Le système induit sur $G/\mathcal{Z}(G)$ c'est à dire $\begin{cases} \dot{x} &= by + u \\ \dot{y} &= x + dy \end{cases}$ est un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ qui vérifie la condition de Kalman, donc il est contrôlable. D'après la proposition 10 pour prouver la contrôlabilité du système (Σ_N) il suffit de montrer que $\mathcal{Z}(G) \subset \overline{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{Z}(G) \subset \overline{\mathcal{A}^-}$.

Extension du système

Puisque vX appartient à $\mathcal{LS}(\Sigma_1)$ pour tout $v \in \mathbb{R}$, le champ de vecteur $\exp(v\mathrm{ad}(X))\mathcal{X}$ appartient aussi à $\mathcal{LS}(\Sigma_1)$ (voir [Jurdjevic97]). Or

$$\exp(v\mathrm{ad}(X))\mathcal{X} = \mathcal{X} + (v\mathrm{ad}(X))\mathcal{X} + \frac{1}{2}(v\mathrm{ad}(X))^2\mathcal{X} = \mathcal{X} + vY + \frac{v^2}{2}Z.$$

Par conséquent on peut considéré le système étendu

$$(\Sigma_E) \qquad \dot{g} = \mathcal{X} + uX(g) + vY(g) + \frac{1}{2}v^2 Z(g),$$

qui s'écrit en coordonnées canoniques

$$(\Sigma_E) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= by + u \\ \dot{y} &= x + dy + v \\ \dot{z} &= fy + dz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{2}v^2 \end{cases}$$

Le résultat principal de contrôlabilité est le théorème suivant (qui correspond au théorème 6 de [DathJouan14]) qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité d'un système linéaire à une entrée dans le groupe Heisenberg.

Théorème 7 *Un système linéaire dans sa forme normale est contrôlable si et seulement si l'une des conditions est satisfaite*
(i) $b < -\frac{d^2}{4}$

(ii) $d = 0$ *et* $f \neq 0$.

La démonstration de ce théorème est faite en trois Lemmes :

Lemme 1 *On suppose que* $d = 0$ *(cas singulier). Le système est contrôlable si et seulement si* $f \neq 0$*, ou bien* $f = 0$ *et* $b < 0$.

Lemme 2 *On suppose* $d \neq 0$. *Si* $b \geq -\frac{d^2}{4}$ *alors le système n'est pas contrôlable.*

Lemme 3 *On suppose* $d \neq 0$. *Si* $b < -\frac{d^2}{4}$ *alors le système est contrôlable.*

Remarques.

(i) La condition du rang algébrique est équivalente à $f \neq 0$.

(ii) Pour la démonstration du lemme 2, qui est un cas de non contrôlabilité que nous avons appelé au chapitre 3 "obstruction à la contrôlabilité", il a fallu opérer à une transformation de la variable z du type $\omega = z + P(x, y)$ où P est un polynôme de degré 2 sans terme constant. Ceci concorde bien avec la conjecture faite dans le chapitre précité.

(iii) On sait que le système induit sur le quotient $G/\mathcal{Z}(G)$ est linéaire au sens classique et sa matrice de contrôlabilité est

$$L = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

Un calcul simple prouve que les valeurs propres de cette matrice sont des nombres réels si et seulement si $b \geq -\frac{d^2}{4}$. Ces valeurs propres sont invariantes sous l'action des automorphismes de groupe parce que leur action sur $G/\mathcal{Z}(G)$ est linéaire au sens classique. Par conséquent sans tenir compte de la forme normale, le théorème 7 peut-être reformulé de la manière suivante.

Théorème 8 *Le système* (Σ_1) *est contrôlable si et seulement si il satisfait la condition du rang et*

(i) dans le cas régulier : les valeurs propres de (L) *ne sont pas réelles ;*

(ii) dans le cas singulier : les valeurs propres de (L) *ne sont pas réelles ou bien la condition du rang algébrique est satisfaite.*

Remarques.

(i) Un système linéaire à une entrée sur le groupe Heisenberg G de dimension 3 dans le cas régulier est contrôlable si et seulement si il satisfait la condition du rang et les valeurs propres du système induit sur $G/\mathcal{Z}(G)$ ne sont pas réelles.

(ii) Le théorème 8 est en phase avec les résultats de contrôlabilité trouvés dans $Aff_+(2)$ puisque en faisant le changement de variables $(x, y) \longmapsto (\zeta = \ln(x), y)$ le système linéaire défini dans $Aff_+(2)$ en forme normale (voir proposition 13) se transforme en :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \alpha u \\ \dot{y} &= e^{\zeta} - 1 + y \end{cases}$$

Il est clair que la seule valeur propre de la partie linéaire est 0 et on sait d'autre part que le système linéaire dans $Aff_+(2)$ n'est contrôlable que dans le cas singulier.

(iii) Le théorème 8 montre que la condition du rang algébrique n'intervient dans la contrôlabilité du système que dans le cas singulier puisque dans ce cas la contrôlabilité du linéarisé du système étendu permet de conclure (grâce à la proposition 11).
Dans le cas régulier, la satisfaction ou non de la condition du rang algébrique n'a aucun impact sur la contrôlabilité du système.

Enfin le théorème et la proposition qui suivent, et qui correspondent respectivement au théorème 8 et à la proposition 11 de [DathJouan14], montrent que la contrôlabilité de l'identité d'un système linéaire sur un groupe de Lie résoluble n'est pas une condition suffisante de contrôlabilité du système linéaire.

On considère un système linéaire à une entrée sous sa forme normale dans le groupe Heisenberg de dimension 3, on a :

Théorème 9 *Si $d > 0$, $-\frac{d^2}{4} < b < 0$, et $f \neq 0$, alors le système est contrôlable de e. (Le système n'est pas contrôlable puisque ne vérifie pas les critères du théorème 7).*

On considère un système linéaire à une entrée sous sa forme normale dans le groupe $Aff_+(2)$, on a

Proposition 16 *Si $b > 0$ le système est contrôlable de e. (Le système n'est pas contrôlable puisque ne vérifie pas les critères du théorème 4).*

Remarque. On a un résultat tout à fait différent pour un système linéaire défini sur un groupe de Lie semi-simple connexe et de centre fini. Pour un tel système, la contrôlabilité de e est une condition suffisante de contrôlabilité du système (voir [Jouan102]).

Chapitre 3

Contrôlabilité des systèmes linéaires dans le groupe Heisenberg de dimension $2n+1$

Notation. Le groupe Heisenberg de dimension $2n+1$, $n \geq 2$ sera noté par $\mathbb{H}^n$ et son algèbre de Lie par $\mathfrak{h}^n$. On note également par E_{ij} la matrice d'ordre $n+2$ définie par $E_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$.

3.1 Définition

$\mathbb{H}^n$ est le sous-groupe de $GL(n+2, \mathbb{R})$ défini par :

$$\mathbb{H}^n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 & ... & y_n & z \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 & x_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & x_n \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x_i, y_i, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}^n$ est engendrée par les champs de vecteurs invariants à droite $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n, Z$ (matrices d'ordre $n+2$) définies par :

$$\begin{cases} X_i & = E_{i+1,n+2} \qquad 1 \leq i \leq n \\ Y_i & = E_{1,i+1} + x_i E_{1,n+2} \qquad 1 \leq i \leq n \\ Z & = E_{1,n+2} \end{cases}$$

Ces champs de vecteurs vérifient $[X_i, Y_i] = Y_i X_i - X_i Y_i = Z$ pour $i = 1, \cdots, n$.

Les autres crochets sont nuls. En coordonnées canoniques ils s'écrivent :

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + x_i \frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

3.2 Base symplectique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux bases de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}^n$ du groupe Heisenberg $\mathbb{H}^n$ de dimension $2n+1$. La base canonique de $\mathfrak{h}^n$, qu'on note $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, Z)$ vérifie $[X_i, Y_i] = Z$ pour $i = 1, \ldots, n$, tous les autres crochets étant nuls. On cherche sous quelles conditions des vecteurs donnés peuvent faire partie d'une base possédant les mêmes propriétés.

Remarque.
Le vecteur Z doit appartenir à l'algèbre dérivée (qui est unidimensionnelle) mais on peut le multiplier par une constante non nulle au besoin.

Définition 11 *Un espace symplectique sur un corps K est un espace vectoriel V de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée ω. On le note (V, ω). Un tel espace est de dimension $2n$, et possède une base (qui n'est pas unique) $e_1, f_1, \cdots, e_n, f_n$ vérifiant :*

$$\begin{aligned} \omega(e_i, f_i) &= \delta_{ij} \\ \omega(e_i, e_j) &= 0 \\ \omega(f_i, f_j) &= 0. \end{aligned}$$

Définition 12 *L'orthogonal d'un sous-espace U d'un espace symplectique (V, ω) est défini par :*

$$U^\perp = \{v \in V \quad \textit{tels que} \quad \forall\ u \in U,\ \omega(u, v) = 0\}.$$

Propriétés 1
1. *Un sous-espace U d'un espace symplectique est lui-même un espace symplectique si $U \cap U^\perp = \{0\}$.*
2. *L'orthogonal d'un sous-espace symplectique est un sous-espace symplectique.*
3. *Si U est un sous-espace d'un espace symplectique V, alors*

$$dimU + dimU^\perp = dimV.$$

On définit une forme bilinéaire l sur $\mathfrak{h}^n$ de la manière suivante :

$$\forall\ X, Y \in \mathfrak{h}^n \qquad [X, Y] = l(X, Y)Z$$

c'est-à-dire que $l(X,Y)$ est l'unique nombre réel tel que cette égalité ait lieu (ce qui fait qu'à une constante multiplicative près la forme l dépend du choix de Z). Grâce aux propriétés du crochet de Lie, la forme l est bilinéaire et antisymétrique. De plus son noyau (l'ensemble des vecteurs N tels que $l(X,N) = 0$ pour tout X) est égal à $\mathbb{R}Z$. Elle induit une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée, c'est-à-dire une forme symplectique, sur le quotient $\mathfrak{h}^n/\mathbb{R}Z = \mathfrak{h}^n/\mathcal{D}^1\mathfrak{h}^n$.

Avec un abus de langage évident, nous étendons la notion de base symplectique à $\mathfrak{h}^n$.

Définition 13 *Une base $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, Z)$ de $\mathfrak{h}^n$ sera dite symplectique si $[X_i, Y_i] = Z$, $i = 1, \ldots, n$, et les autres crochets sont nuls, en d'autres termes si et seulement si les projections de $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$ forment une base symplectique de $\mathfrak{h}^n/\mathbb{R}Z = \mathfrak{h}^n/\mathcal{D}^1\mathfrak{h}^n$ pour la forme symplectique l.*

Grâce aux propriétés des bases symplectiques, on a les deux propositions suivantes qui seront très utilisées dans la suite.

Proposition 17
1. *Si $X \in \mathfrak{h}^n \backslash D^1\mathfrak{h}^n$ alors il existe une base symplectique $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, Z)$ de $\mathfrak{h}^n$ telle que $X = X_1$.*
2. *Si $X, Y \in \mathfrak{h}^n$ et $[X,Y] \neq 0$ alors il existe une base symplectique $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, Z)$ de $\mathfrak{h}^n$ telle que $X = X_1$ et $Y = Y_1$.*
3. *Si $B_1, \ldots, B_m$ sont linéairement indépendants dans $\mathfrak{h}^n/\mathcal{D}^1\mathfrak{h}^n$ et $[B_i, B_j] = 0\ \forall\, i,j = 1, \cdots, m$, alors il existe une base symplectique $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, Z)$ de h^n telle que $B_i = X_i, \quad i = 1, \cdots, m$.*

Démonstration.

1. Soit $X \in \mathfrak{h}^n$. Si X n'appartient pas à $\mathcal{D}^1\mathfrak{h}^n$, on peut trouver Y tel que $[X,Y] = Z$. On peut compléter ces deux vecteurs par une base symplectique dans l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs.
2. Soient X et Y deux vecteurs de $\mathfrak{h}^n$ tels que $[X,Y] \neq 0$. Puisque $l(X,Y) \neq 0$ la restriction de l au sous-espace vectoriel engendré par X et Y est non dégénérée et l'intersection de ce sous-espace vectoriel avec son orthogonal est réduite à $\{0\}$. Par conséquent, ces deux sous-espaces sont symplectiques et supplémentaires. Il suffit alors de remplacer Z par $l(X,Y)Z$.
3. Soient $B_1, \ldots, B_m$ des vecteurs dont tous les crochets sont nuls et sont linéairement indépendants sur $\mathfrak{h}^n/\mathcal{D}^1\mathfrak{h}^n$. Soit Y_1 un élément de l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par $B_2, \ldots, B_m$ dont le crochet

avec B_1 est non nul. Un tel Y_1 existe, sinon B_1 serait dans le noyau de l, et l'hypothèse $B_i \in \mathfrak{h}^n/\mathcal{D}^1\mathfrak{h}^n$ serait mise à défaut. En multipliant et Y_1 par une constante bien choisie, on obtient $[B_1, Y_1] = Z$. On prend ensuite Y_2 dans l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par $B_1, Y_1, B_3, \ldots, B_m$, etc....

$\square$

Proposition 18 *Un isomorphisme linéaire P de $\mathfrak{h}^n$ est un automorphisme d'algèbre de Lie si et seulement si l'image par P d'une base symplectique quelconque de $\mathfrak{h}^n$ est encore une base symplectique de $\mathfrak{h}^n$.*

Démonstration.
Si P est un automorphisme d'algèbre de Lie et
$X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n, Z$ une base symplectique de $\mathfrak{h}^n$, alors
$P(X_1), P(Y_1), \cdots, P(X_n), P(Y_n), P(Z)$ est une autre base symplectique de $\mathfrak{h}^n$ puisque $[P(X_i), P(Y_i)] = P[X_i, Y_i] = P(Z)$ et les autres crochets sont nuls.
Soit P un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{h}^n$ qui transforme la base symplectique $X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n, Z$ en une base symplectique
$P(X_1), P(Y_1), \cdots, P(X_n), P(Y_n), P(Z)$. Ceci signifie que P respecte les crochets des éléments de cette base. Par combinaison linéaire P respecte tous les crochets, c'est donc un automorphisme d'algèbre de Lie.

$\square$

3.3 Dérivation

Proposition 19 *Soit $(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \cdots, Z)$ une base symplectique de $\mathfrak{h}^n$. Un endomorphisme D de $\mathfrak{h}^n$ est une dérivation si et seulement si sa matrice dans cette base a la forme suivante :*

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & -\widetilde{A}_{21}^T & -\widetilde{A}_{31}^T & \ldots & -\widetilde{A}_{n1}^T & 0 \\ A_{21} & A_{22} & -\widetilde{A}_{32}^T & \ldots & -\widetilde{A}_{n2}^T & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \ldots. & -\widetilde{A}_{n3}^T & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \ldots & A_{nn} & 0 \\ a_{2n+1,1} & a_{2n+1,2} & a_{2n+1,3} & \ldots & a_{2n+1,2n} & d \end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont des matrices carrées d'ordre 2 et :

- *$\widetilde{A}_{ij}^T$ désigne la transposée de la comatrice de la matrice A_{ij};*
- *$tr(A_{ii}) = d$ pour $1 \leq i \leq n$.*

Démonstration.
D étant une dérivation de $\mathfrak{h}^n$, compte tenu de égalité
$DZ = [DX_i, Y_i] + [X_i, DY_i]$, DZ est de la forme $DZ = dZ$.
Ainsi dans la base $(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \cdots, X_n, Y_n, Z)$, D s'écrit sous la forme

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & a_{1,2n-1} & b_{1,2n} & 0 \\ a_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & a_{2,2n-1} & b_{2,2n} & 0 \\ a_{3,1} & b_{3,2} & \cdots & a_{3,2n-1} & b_{3,2n} & 0 \\ a_{4,1} & b_{4,2} & \cdots & a_{4,2n-1} & b_{4,2n} & 0 \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ a_{2n+1,1} & b_{2n+1,2} & \cdots & a_{2n+1,2n-1} & b_{2n+1,2n} & d \end{pmatrix}$$

On peut écrire

$$DX_i = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1,2i-1})X_k + (a_{2k,2i-1})Y_k + (a_{2n+1,2i-1})Z, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$DY_i = \sum_{k=1}^{n} (b_{2k-1,2i})X_k + (b_{2k,2i})Y_k + (b_{2n+1,2i})Z, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Lorsque $i \neq j$, on obtient les égalités suivantes :

$$D[X_i, Y_j] = [DX_i, Y_j] + [X_i, DY_i] = 0 \tag{3.1}$$
$$D[Y_i, Y_j] = [DY_i, Y_j] + [Y_i, DY_j] = 0 \tag{3.2}$$
$$D[X_i, X_j] = [DX_i, X_j] + [X_i, DX_j] = 0; \tag{3.3}$$
$$\text{et pour i = j,} \quad DZ = [DX_i, Y_i] + [X_i, DY_i] = dZ. \tag{3.4}$$

De (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) on tire

$$\begin{aligned} a_{2j-1,2i-1} &= -b_{2i,2j} \\ b_{2j-1,2i} &= b_{2i-1,2j} \\ a_{2i,2j-1} &= a_{2j,2i-1} \\ a_{2i-1,2i-1} + b_{2i,2i} &= d. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

□

Exemple.
En dimension 5, on a :

$$\begin{cases} a_{1,3} & = -b_{4,2} \\ b_{2,4} & = -a_{3,1} \\ a_{2,3} & = a_{4,1} \\ b_{3,2} & = b_{1,4} \\ a_{1,1} + b_{2,2} & = a_{3,3} + b_{4,4} = d \end{cases}$$

et donc D s'écrit :

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & b_{12} & -b_{42} & b_{32} & 0 \\ a_{21} & d-a_{11} & a_{41} & -a_{31} & 0 \\ \hline a_{31} & b_{32} & a_{33} & b_{43} & 0 \\ a_{41} & b_{42} & a_{43} & d-a_{33} & 0 \\ \hline a_{51} & b_{52} & a_{53} & b_{54} & d \end{array}\right)$$

3.4 Expressions des champs linéaires

L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}^n$ de $\mathbb{H}^n$ s'écrit :

$$\mathfrak{h}^n = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 & ... & y_n & z \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 & x_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & x_n \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix} / x_i, y_i, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Notation.
La matrice A est également notée $A = \begin{pmatrix} 0 & y_A & z_A \\ 0 & 0 & x_A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Dans toute la suite, on notera par $\langle , \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ (autrement dit $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$).

Remarque.
Si B est un autre élément de $\mathfrak{h}^n$, qu'on écrit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & y_B & z_B \\ 0 & 0 & x_B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{alors} \qquad AB = \langle y_A, x_B \rangle Z.$$

Proposition 20 *Soit D une dérivation de $\mathfrak{h}^n$. Dans $\mathbb{H}^n$, il existe un unique champ de vecteurs linéaire $\mathcal{X}$ associé à D. Au point $g = I_{n+2} + G$ de $\mathbb{H}^n$ il est égal à :*

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_g &= DG - \tfrac{1}{2} dG^2 + \tfrac{1}{2}(G(DG) + (DG)G) \\ &= DG + \tfrac{1}{2}(\langle y_G, x_{DG} \rangle + \langle x_G, y_{DG} \rangle - d\langle x_G, y_G \rangle) Z. \end{aligned}$$

où d est défini par $DZ = dZ$.

Démonstration.
Pour tout A appartenant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}^n$ de $\mathbb{H}^n$ on a $A^2 = \langle x, y\rangle Z$ et $\forall k > 2, A^k = 0$. Par conséquent l'application exponentielle de $\mathbb{H}^n$ est égal à :

$$\begin{aligned} \exp(A) &= I_{n+2} + A + \frac{1}{2}A^2 \\ &= I_{n+2} + A + \frac{1}{2}\langle x, y\rangle Z \end{aligned}$$

et sa differentielle au point A est

$$T_A \exp .H = H + \frac{1}{2}[AH + HA] \tag{3.5}$$

Puisque l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}^n$ dans $\mathbb{H}^n$, de $g = I_{n+2} + G \in \mathbb{H}^n$ on obtient :

$$\log(g) = G - \frac{1}{2}G^2. \tag{3.6}$$

Ainsi de la formule $\varphi_t(\exp Y) = \exp(e^{tD}Y)$ (voir proposition 3), on obtient

$$\mathcal{X}_{\exp Y} = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(e^{tD}Y) = T_Y \exp .DY$$

Pour $\exp Y = g$, on a :

$$\mathcal{X}_g = T_{\log(g)} \exp .D\log(g). \tag{3.7}$$

En appliquant (3.5) dans (3.7), on obtient

$$\mathcal{X}_g = D\log(g) + \frac{1}{2}(\log(g)(D\log(g)) + (D\log(g)).\log(g)). \tag{3.8}$$

On rappelle les égalités $DG^2 = dG^2$ (puisque $G^2 = \langle x, y\rangle Z$), et $G^2A = AG^2 = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{h}^n$. Pour ces raisons, on a :

$$D\log(g) = DG - \frac{1}{2}DG^2 = DG - \frac{1}{2}dG^2 \tag{3.9}$$

$$\log(g)(D\log(g)) = (G - \frac{1}{2}G^2)(DG - \frac{1}{2}dG^2) = G(DG) \tag{3.10}$$

$$(D\log(g))\log(g) = (DG - \frac{1}{2}dG^2)(G - \frac{1}{2}G^2) = (DG)G \tag{3.11}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_g &= DG - \tfrac{1}{2}dG^2 + \tfrac{1}{2}(G(DG) + (DG)G) \\ &= DG + \tfrac{1}{2}(\langle y_G, x_{DG}\rangle + \langle x_G, y_{DG}\rangle - d\langle x_G, y_G\rangle)Z. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque.
Le champ linéaire $\mathcal{X}$ est composé d'une partie linéaire DG et d'une partie quadratique qui affecte seulement $\mathcal{D}^1\mathbb{H}^n$.

Exemple
En dimension 5,

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & b_{12} & -b_{42} & b_{32} & 0 \\ a_{21} & d-a_{11} & a_{41} & -a_{31} & 0 \\ \hline a_{31} & b_{32} & a_{33} & b_{43} & 0 \\ a_{41} & b_{42} & a_{43} & d-a_{33} & 0 \\ \hline a_{51} & b_{52} & a_{53} & b_{54} & d \end{array}\right) \quad G = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Un calcul trivial donne les coordonnées de $\mathcal{X}_g$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{x_1} &= a_{11}x_1 + b_{12}y_1 - b_{42}x_2 + b_{32}y_2 \\
\mathcal{X}_{y_1} &= a_{21}x_1 + (d-a_{11})y_1 + a_{41}x_2 - a_{31}y_2 \\
\mathcal{X}_{x_2} &= a_{31}x_1 + b_{32}y_1 + a_{33}x_2 + b_{34}y_2 \\
\mathcal{X}_{y_2} &= a_{41}x_1 + b_{42}y_1 + a_{43}x_2 + (d-a_{33})y_2 \\
\mathcal{X}_{z} &= a_{51}x_1 + b_{52}y_1 + dz + a_{53}x_2 + b_{54}y_2 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left(a_{21}x_1^2 + b_{12}y_1^2 + a_{43}x_2^2 + b_{34}y_2^2\right) + a_{41}x_1x_2 + b_{32}y_1y_2.
\end{aligned}$$

3.5 Contrôlabilité

Dans ce paragraphe, on considère sur $\mathbb{H}^n$ le système linéaire à m entrées

$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j B_j(g),$$

où $\mathcal{X}$ est un champ de vecteurs linéaire et les B_j sont des champs de vecteurs invariants à droite et linéairement indépendants.

3.5.1 Résultat général

Proposition 21 *Soit $\mathfrak{g}$ un idéal de $\mathfrak{h}^n$ stable par D, et G le sous-groupe connexe engendré par $\mathfrak{g}$. C'est un sous-groupe de Lie (fermé) de $\mathbb{H}^n$ invariant* *par le flot de $\mathcal{X}$. Si le système (Σ) satisfait la condition du rang, alors le système induit sur $\mathbb{H}^n/G$ satisfait aussi la condition du rang. Il est donc contrôlable en temps T pour tout $T > 0$.*

Démonstration.
La condition du rang est équivalente à :

$$\dim \mathcal{LA}\{D^i B_j; \quad i = 0, \dots, 2n, \quad j = 1, \dots, m\} = 2n + 1.$$

En d'autres termes la condition du rang est équivalente à ce que les vecteurs $D^i B_j$ engendrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}^n$.
Notons Π la projection de $\mathfrak{h}^n$ sur $\mathfrak{h}^n/\mathfrak{g}$. C'est un morphisme d'algèbres de Lie. Comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}^n/\mathfrak{g}$ est commutative on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\{\Pi D^i B_j; \quad i = 0, \dots, 2n, \quad j = 1, \dots, m\} & \\
&= \mathcal{LA}\{\Pi D^i B_j; \quad i = 0, \dots, 2n, \quad j = 1, \dots, m\} \\
&= \Pi \mathcal{LA}\{D^i B_j; \quad i = 0, \dots, 2n, \quad j = 1, \dots, m\} \\
&= \Pi \mathfrak{h}^n = \mathfrak{h}^n/\mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

ce qui établit la condition du rang sur le quotient. Puisque le quotient $\mathbb{H}^n/G$ est simplement connexe et abélien, il est isomorphe à $\mathbb{R}^p$ pour un certain p. Par conséquent le système induit est un système linéaire au sens classique. Puisqu'il vérifie la condition du rang, il est contrôlable en temps T pour tout $T > 0$.

□

Cette proposition 21 est très utilisée dans la démonstration des théorèmes qui suivent.

Cas particulier
Si le système (Σ) vérifie la condition du rang, alors le système induit sur $\mathbb{H}^n/\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ est contrôlable en temps T pour tout $T > 0$.

3.5.2 Contrôlabilité dans le cas singulier

Théorème 10 *Si (Σ) satisfait la condition du rang algébrique et s'il est singulier[1] (i.e. $d = 0$) alors il est contrôlable. (d est le nombre réel tel que $DZ = dZ$).*

Démonstration.
Sous la condition du rang, le système réduit à $\mathbb{H}^n/\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ est contrôlable. Si $d = 0$, alors $\mathcal{X}$ est nul sur $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$. La condition du rang algébrique implique

1. le cas singulier est le cas où le champ linéaire est nul sur $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$.

que le linéarisé du système étendu (voir 1.3.5) est contrôlable, ce qui à nouveau implique que $\overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{A}^-}$ sont des voisinages de e.
Puisque $Int\overline{\mathcal{A}} = Int\mathcal{A}$ et $Int\overline{\mathcal{A}^-} = Int\mathcal{A}^-$ (voir proposition 7) alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^-$ sont des voisinages de e dans $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$. D'où $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ et $\mathcal{A}^- \cap \mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ sont des voisinages de e dans $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$. D'après la proposition 10

$$\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n) \subset \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}(\mathbb{H}^n) \subset \mathcal{A}^-.$$

Donc le système est contrôlable (d'après la proposition 9).

□

3.5.3 Contrôlabilité en temps exact

Théorème 11 *On suppose* (Σ) *satisfait la condition du rang. Si* Z *appartient à l'algèbre de Lie engendrée par* $B_1, \cdots, B_m$*, alors le système est contrôlable en temps* T*,* $\forall T > 0$*.*

Démonstration.
Le quotient $\mathbb{H}^n/\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ est le groupe de Lie abélien $\mathbb{R}^{2n}$. Le système induit sur le quotient satisfait la condition du rang parce que le système (Σ) la satisfait sur $\mathbb{H}^n$ (Proposition 21). De plus le système induit est un système linéaire classique, il est contrôlable en temps T, $\forall\, T > 0$.
Si le champ de vecteur Z appartient à $\mathcal{LA}\{B_1, \cdots, B_m\}$, il appartient au saturé de Lie fort du système et on peut considérer le système étendu

$$(\Sigma_E) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{m} u_j B_j(g) + u_{m+1} Z.$$

En prenant $u_j = x_i = y_i = 0$, pour $i \in \{1, ...n\}$ et $j \in \{1, ...m\}$ le système réduit à $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ s'écrit : $\dot{z} = dz + u_{m+1}$. Ce système est évidemment contrôlable sur $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$. Par conséquent, $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n) \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n) \subset \mathcal{A}^-$.
Donc le système est contrôlable sur $\mathbb{H}^n$ (d'après la proposition 9).
Soit $T > 0$. Notons par e les éléments neutres de $\mathbb{H}^n$ et de $\mathbb{H}^n/\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ et soit $g = (x_1, y_1, x_2, y_2, ...x_n, y_n, z_1)$ un point quelconque de $\mathbb{H}^n$.
Il existe des contrôles u_j, $j \in \{1, \cdots, m\}$ tels que du point e de $\mathbb{H}^n/\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ on peut atteindre le point $(x_1, y_1, x_2, y_2, ...x_n, y_n)$ de $\mathbb{H}^n/\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$ en temps $\frac{T}{2}$. Dans $\mathbb{H}^n$, pour un certain réel z_2 ces contrôles permettent de transférer le point $(0, 0, 0, , ...0, 0, z_2)$ au point $(x_1, y_1, x_2, y_2, ...x_n, y_n, z_1)$ en temps $\frac{T}{2}$. Dans $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^n)$, il existe un contrôle u_{m+1} qui permet d'atteindre le point $(0, 0, 0, , ...0, 0, z_2)$ à partir de e en temps $\frac{T}{2}$.
Par conséquent le point g peut être atteint de e en temps T. De la même

manière, e peut être atteint de g en temps T.
Donc le système est contrôlable en temps $T > 0$ quelque soit T.

□

Le corollaire 1 suivant donne le nombre minimum m de contrôles qui assure la contrôlabilité en temps T quel que soit $T > 0$.

Corollaire 1 *Si $m \geq n+1$, alors (Σ) est contrôlable sur $\mathbb{H}^n$ en temps T,* $\forall\, T > 0$.

Démonstration.
Il suffit de montrer le corollaire pour $m = n+1$.
Rappelons que l'on suppose les vecteurs $B_1, \cdots, B_m$ indépendants.

1. Si $Z \in \text{Vect}\,\{B_1, \cdots, B_{n+1}\}$, alors le système est contrôlable en temps T quelque soit $T > 0$.
2. Si $Z \notin \text{Vect}\,\{B_1, \cdots, B_{n+1}\}$, alors montrons qu'il existe au moins un crochet de deux champs contrôlés non nuls.
   Supposons que $[B_i, B_j] = 0\ \ \forall\, i, j = 1, ..., n$. Alors il existe des vecteurs $Y_1, \cdots, Y_n$ tels que $B_1, Y_1, B_2, Y_2, ...B_n, Y_n, Z$ soit une base symplectique de $\mathfrak{h}^n$.
   Dans cette base B_{n+1} s'écrit
   $$B_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j Y_j + \gamma Z,$$
   il existe au moins un $\beta_j \neq 0$ sinon γ serait non nul, auquel cas Z appartiendrait à Vect $\{B_1, \cdots, B_{n+1}\}$ et l'hypothèse $Z \notin \text{Vect}\,\{B_1, \cdots, B_{n+1}\}$ serait mise à défaut. D'où il existe un B_j tel que $[B_j, B_{n+1}] = \beta_j Z \neq 0$.
   Ce qui achève la démonstration.

□

Contre-exemple.

Dans $\mathbb{H}^2$ trois champs de vecteurs contrôlés linéairement indépendants assurent la contrôlabilité. Montrons que deux vecteurs peuvent être insuffisants.
Considérons le système linéaire à deux entrées dans $\mathbb{H}^2$
$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \chi(g) + u_1 X_1(g) + u_2 X_2(g),$$
où la dérivation D associée à χ est définie par :
$$\left\{\begin{array}{ll} DX_1 & = Y_1 \\ DY_1 & = Y_2 \\ DX_2 & = -X_1 \\ DY_2 & = X_2 \\ DZ & = 0 \end{array}\right. \qquad \text{i.e.} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système vérifie la condition du rang car :
$\mathcal{LA}\{X_1; X_2; DX_1; D^2X_1; [DX_1; DX_2]\} = \mathfrak{h}^2$.
Compte tenu de l'écriture du champ linéaire dans $\mathbb{H}^2$ (voir l'exemple de la section 3.4), le système s'écrit en coordonnées canoniques :

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -x_2 + u_1 \\ \dot{y_1} &= x_1 \\ \dot{x_2} &= y_2 + u_2 \\ \dot{y_2} &= y_1 \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_2^2) \end{cases}$$

Il est évident que le système n'est pas contrôlable, il n'est même pas contrôlable de l'identité, puisque $\dot{z} \geq 0$.

3.5.4 Contrôlabilité des systèmes découplés

On sait d'après le théorème 11 que si l'un des crochets $[B_i, B_j]$ est non nul, alors sous la condition du rang (Σ) est contrôlable en temps exact.
Dans cette section nous supposons que $m \leq n$ et que tous les crochets $[B_i, B_j]$ sont nuls. Il existe une base symplectique $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, Z)$ de h^n telle que $B_j = X_j, \quad j = 1, \cdots, m$ (voir proposition 17).
Dans la suite, nous donnerons d'abord la définition de cellule et de cellule découplée, puis une condition suffisante de contrôlabilité de (Σ) suivi d'un énoncé plus précis en dimension 5.

Définition 14 *On appelle jème cellule, le sous-espace bidimensionnel de* $\mathfrak{h}^n$ *engendré par* $B_j = X_j$ *et* Y_j*, pour* $j \leq m$.

Remarque. Le sous-espace vectoriel engendré par (B_j, Y_j, Z) est un idéal de $\mathfrak{h}^n$.

Définition 15 *On dit que la ième cellule est découplée si les vecteurs* DB_j *et* DY_j *appartiennent à l'idéal engendré par* (B_j, Y_j, Z)*, autrement dit si cet l'idéal est invariant par* D.

Notations et remarques.
Notons par G_j, le groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est engendrée par (B_j, Y_j, Z).
Notons également par (Σ_j), le système induit par (Σ) sur G_j.
On peut remarquer que G_j n'est rien d'autre que le groupe Heisenberg de dimension 3, par conséquent les critères de contrôlabilité de (Σ_j) sont connus (voir théorème 7).

Lemme 4 *Si* (Σ) *satisfait la condition du rang, et si la* j*ème cellule est découplée, alors le système* (Σ_j) *satisfait aussi la condition du rang.*

Démonstration.
Le système (Σ_j) satisfait la condition du rang si et seulement si les champs de vecteurs B_j et DB_j sont linéairement indépendants.
Supposons que $DB_j = \alpha B_j$ pour un certain α ; ceci entraine Y_j n'appartient pas à $\text{Vect}\{D^k B_j, k \geqslant 1\}$ et puisque la cellule est découplée Y_j n'appartient pas non plus à $\text{Vect}\{D^k B_i, i \neq j, k \geqslant 1\}$. Par conséquent le système (Σ) ne vérifie la condition du rang.

□

Théorème 12 *On suppose que le système satisfait la condition du rang sur* $\mathbb{H}^n$.
Si la jème cellule est découplée, et si le système induit sur G_j *est contrôlable, alors le système* (Σ) *est contrôlable sur* $\mathbb{H}^n$.

Démonstration.
Puisque G_j est stable par le flot de $\mathcal{X}$, on peut considérer le système linéaire sur le quotient $\mathbb{H}^n/G_j$. Ce quotient est le groupe de Lie abélien $\mathbb{R}^{2n-2}$, et le système satisfait la condition du rang parce que le système complet sur $\mathbb{H}^n$ la satisfait (Proposition 21). Par conséquent le système induit sur $\mathbb{H}^n/G_j$ est contrôlable. D'autre part le sous-groupe G_j est inclus dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{A}^-$. En effet considérons le système induit sur G_j qui est contrôlable par hypothèse. Pour tout point $g \in G_j$, il existe un contrôle $u_j(t)$ qui amène e en g. Si les autres contrôles sont nuls on obtient dans $\mathbb{H}^n$ une trajectoire qui amène e en g (en restant dans G_j), ce qui montre que G_j est inclus dans $\mathcal{A}$. De manière similaire, on montre que G_j est inclus dans $\mathcal{A}^-$. D'après la proposition 10 le système (Σ) est contrôlable sur $\mathbb{H}^n$.

□

Exemple.
Considérons le système linéaire à deux entrées dans $\mathbb{H}^2$

$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \chi(g) + u_1 X_1(g) + u_2 X_2(g),$$

où la dérivation D associée à χ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{ll} DX_1 & = Y_1 \\ DY_1 & = -X_1 + Y_1 \\ DX_2 & = Y_2 \\ DY_2 & = X_2 + Y_2 \\ DZ & = Z \end{array}\right. \qquad \text{i.e.} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La cellule 1 est découplée, de plus le système vérifie la condition du rang parce que $\mathcal{LA}\{X_1; X_2; DX_1; DX_2; [X_1; DX_1]\} = \mathfrak{h}^2$.
Considérons le système linéaire (Σ_1) induit sur le groupe de Lie G_1 dont l'algèbre de Lie est engendrée par $\{X_1, Y_1, Z\}$. La dérivation associée à (Σ_1) est $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le système (Σ_1) satisfait la condition du rang puisque (Σ) la satisfait (lemme 4). D'après le théorème 7 le système (Σ_1) est contrôlable (puisque $b < -\frac{d^2}{4}$). Donc le système (Σ) est contrôlable en vertu du théorème 12.

3.5.4.1 Contrôlabilité de systèmes découplés dans $\mathbb{H}^2$

Proposition 22 *On considère un système découplé, à deux entrées, dans $\mathbb{H}^2$. Si il satisfait la condition du rang il existe une base symplectique dans laquelle la dérivation a pour matrice :*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' & d & 0 \\ 0 & f & 0 & f' & d \end{pmatrix} \qquad \textit{avec} \quad c' \neq 0.$$

Démonstration.
Puisque le système est découplé la matrice de la dérivation a la forme suivante (dans n'importe quelle base symplectique telle que $X_1 = B_1$ et $X_2 = B_2$) :

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' & d-a' & 0 \\ e & f & e' & f' & d \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que la condition du rang impose $c \neq 0$ et $c' \neq 0$.
Considérons la base $\mathcal{B} = (B_1; DB_1; B_2; cY_2; cZ)$, un calcul trivial montre que cette base est symplectique, D s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' & d-a' & 0 \\ 0 & f & e' & f' & d \end{pmatrix}$$

On considère la nouvelle base $\mathcal{B}' = (B_1; DB_1; B_2; \frac{1}{c'}DB_2; Z)$, elle est symplectique. Dans cette base D s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' & d & 0 \\ 0 & f & 0 & f' & d \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad c' \neq 0.$$

Donc (Σ) est équivalent à un système dans la base canonique dont les vecteurs d'entrée sont $B_1 = X_1$ et $B_2 = X_2$, et dont la dérivation est la matrice D cidessus.

□

Théorème 13 *On considère un système découplé, à deux entrées dans $\mathbb{H}^2$ dans la forme de la proposition 22. Si aucune des deux cellules n'est contrôlable alors le système est contrôlable si et seulement si c' est strictement négatif.*

Démonstration.
Le système est équivalent à un système dans la base canonique dont les vecteurs d'entrée sont $B_1 = X_1$ et $B_2 = X_2$, et dont la dérivation a pour matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' & d & 0 \\ 0 & f & 0 & f' & d \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad c' \neq 0.$$

Ce système s'écrit en coordonnées canoniques :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x_1} & = by_1 + u_1 \\ \dot{y_1} & = x_1 + dy_1 \\ \dot{x_2} & = b'y_2 + u_2 \\ \dot{y_2} & = c'x_2 + dy_2 \\ \dot{z} & = fy_1 + f'y_2 + dz + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}by_1^2 + \frac{1}{2}c'x_2^2 + \frac{1}{2}b'y_2^2 \end{cases}$$

• Supposons d'abord que $c' > 0$.
Puisque les cellules ne sont pas contrôlables, on a d'après les résultats de [DathJouan14] (voir le théorème 7)

$$b \geq -\frac{d^2}{4}, \qquad b' \geq -\frac{d^2}{4c'}, \quad \text{et} \quad d = 0 \Longrightarrow f = f' = 0. \tag{3.12}$$

En faisant le changement de variable $w = z + \frac{d}{4}y_1^2 + \frac{d}{4c'}y_2^2$, on obtient :

$$\dot{w} = fy_1 + f'y_2 + dw + \frac{1}{2}(x_1 + \frac{d}{2}y_1)^2 + \frac{1}{2}(b + \frac{d^2}{4})y_1^2 + \frac{c'}{2}(x_2 + \frac{d}{2c'}y_2)^2 + \frac{1}{2}(b' + \frac{d^2}{4c'})y_2^2$$

Il est clair que si $b > -\dfrac{d^2}{4}$ et $b' > -\dfrac{d^2}{4c'}$, la forme quadratique est définie positive et le système ne peut pas être contrôlable parce que le polynôme

$fy_1 + f'y_2 + \frac{1}{2}(x_1 + \frac{d}{2}y_1)^2 + \frac{1}{2}(b + \frac{d^2}{4})y_1^2 + \frac{c'}{2}(x_2 + \frac{d}{2c'}y_2)^2 + \frac{1}{2}(b' + \frac{d^2}{4c'})y_2^2$ admet un minimum.

• Si $b = -\dfrac{d^2}{4}$ et $b' = -\frac{d^2}{4c'}$ (bien sûr $d \neq 0$), on fait le changement de variable $\theta = w + 2\dfrac{f}{d}y_1 + 2\dfrac{f'}{d}y_2$. On obtient :

$\dot{\theta} = fy_1 + f'y_2 + 2\frac{f}{d}x_1 + 2\frac{f'}{d}c'x_2 + d\theta + \frac{1}{2}(x_1 + \frac{d}{2}y_1)^2 + \frac{c'}{2}(x_2 + \frac{d}{2c'}y_2)^2$

Le polynôme $g(x_1) = 2\frac{f}{d}x_1 + \frac{1}{2}(x_1 + \frac{d}{2}y_1)^2$ atteint son minimum au point $m_1 = -\frac{2f}{d} - \frac{1}{2}dy_1$.

Le polynôme $h(x_2) = 2\frac{f'}{d}c'x_2 + \frac{c'}{2}(x_2 + \frac{d}{2c'}y_2)^2$ atteint son minimum au point $m_2 = -\frac{2f'}{d} - \frac{1}{2c'}dy_2$.

Par conséquent $\dot{\theta} \geq d\theta + fy_1 + f'y_2 + g(m_1) + h(m_2)$. Puisque que $fy_1 + f'y_2 + g(m_1) + h(m_2) = -2\frac{f^2}{d^2} - 2\frac{f'^2}{d^2}c'$, alors $\dot{\theta} \geq d\theta - 2\frac{f^2}{d^2} - 2\frac{f'^2}{d^2}c'$.
Donc le système n'est pas contrôlable.

• Si il a une seule égalité par exemple $b = -\dfrac{d^2}{4}$, $b' > -\dfrac{d^2}{4c'}$ (resp. $b' = -\dfrac{d^2}{4c'}$, $b > -\dfrac{d^2}{4}$) et $d \neq 0$ alors on fait le changement de variable $\theta = w + 2\dfrac{f}{d}y_1$ (resp. $\theta = w + 2\dfrac{f'}{d}y_2$).
Un raisonnement similaire montre que le système n'est pas contrôlable.

• Dans le cas où $d = 0$, puisque $f = f' = 0$, on obtient

$$\dot{w} = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}by_1^2 + \frac{c'}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}b'y_1^2.$$

D'après 3.15, $b \geq 0$ et $b' \geq 0$. Par conséquent cette forme quadratique est positive pour $c' > 0$ donc le système n'est pas contrôlable.

• Montrons que pour $c' < 0$ (Σ) est contrôlable.
Pour $j = 1, 2$ le champ de vecteur vB_j appartient à $\mathcal{LS}(\Sigma)$ pour tout $v \in \mathbb{R}$, d'où le champ de vecteur $\exp(v\mathrm{ad}(B_j))\mathcal{X}$ appartient aussi à $\mathcal{LS}(\Sigma)$, voir [Jurdjevic97]. Mais

$$\begin{aligned}\exp(v\mathrm{ad}(B_j))\mathcal{X} &= \mathcal{X} + (v\mathrm{ad}(B_j))\mathcal{X} + \tfrac{1}{2}(v\mathrm{ad}(B_j))^2\mathcal{X} \\ &= \mathcal{X} + vDB_j + \tfrac{v^2}{2}[B_j, DB_j]\end{aligned}$$

Pour $j = 1$, $\mathcal{X} + vDB_1 + \frac{v^2}{2}[B_1, DB_1] = \mathcal{X} + vDB_1 + \frac{v^2}{2}Z$. Le saturé de Lie est un cône convexe et fermé, on peut donc multiplier ce vecteur par $\frac{2}{v^2}$ et faire tendre v à l'infini. D'où $Z \in \mathcal{LS}(\Sigma)$.

Pour $j = 2$, $\mathcal{X} + vDB_2 + \frac{v^2}{2}[B_2, DB_2] = \mathcal{X} + vDB_2 + \frac{v^2}{2}c'Z$, et le champ de vecteur $c'Z$ appartient au saturé de Lie de (Σ).
Puisque $c' < 0$, on obtient $\pm Z \in \mathcal{LS}(\Sigma)$, d'où $\mathcal{Z}(\mathbb{H}^2)$ est inclus dans $\overline{\mathcal{A}}$ et dans $\overline{\mathcal{A}^-}$.
D'autre part puisque le système (Σ) vérifie la condition du rang, il le vérifie sur $\mathbb{H}^2/\mathcal{Z}(\mathbb{H}^2)$, en vertu de la proposition 21.
En définitive, le système (Σ) est contrôlable sur $\mathbb{H}^2$ d'après la proposition 10.
□

3.5.5 Contrôlabilité de systèmes découplés dans $\mathbb{H}^n$

On considère dans $\mathbb{H}^n$ un système à m entrées dont m_1 (avec $2 \leqslant m_1 \leqslant m$) cellules sont découplées. On peut supposer que ce sont les m_1 premières cellules qui sont découplées et on peut choisir une base symplectique telle que $X_j = B_j$ pour $j = 1, \cdots, m_1$ et telle que la restriction de D à (B_j, Y_j, Z) est :

$$\begin{pmatrix} 0 & b_j & 0 \\ c_j & d & 0 \\ 0 & f_j & d \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad c_j \neq 0.$$

On peut supposer $c_1 = 1$.
Remarquons que si $m_1 < n$ alors $m_1 < m$. En effet si toutes les cellules de (Σ) sont découplées la condition du rang ne peut être satisfaite si $m < n$.

Définition 16 *Le système sera dit complètement découplé si toutes ces cellules sont découplées.*

Théorème 14 *On considère un système (Σ) à m entrées avec m_1 cellules découplées et qui satisfait la condition du rang.*
Si aucun des sous-systèmes (Σ_j) n'est contrôlable, mais si un des c_j est négatif

alors le système est contrôlable.
Si le système est complètement découplé et si aucun des sous-systèmes (Σ_j) *n'est contrôlable, alors* (Σ) *est contrôlable si et seulement si un des* c_j *est négatif.*

Démonstration.
On étudie le cas où le système n'est pas complètement découplé mais au moins deux cellules sont découplées (i.e. $2 \leqslant m_1 < m$)
En reprenant un raisonnement similaire à celui du théorème précédent, puisque $c_1 = 1$ alors le champ de vecteurs Z appartient au saturé de Lie de (Σ). Si un des c_j $(j = 2, \cdots, m_1)$ est négatif le champ de vecteurs $-Z$ appartient aussi au saturé de Lie et le système est donc contrôlable. Si tous les c_j sont positifs on ne peut pas conclure sur la contrôlabilité du système car on ne connait pas le comportement du système lorsque les contrôles u_j pour $j = m_1 + 1, \cdots, m$ sont appliqués. Il reste à étudier le cas où le système est complètement découplé (i.e. $m_1 = m = n$).
Si tous les c_j sont positifs, le même genre de changement de variable opéré dans le théorème 13 donne une forme quadratique définie positive. Par conséquent le système n'est pas contrôlable. Ceci achève la démonstration.

□

3.5.6 Obstruction à la Contrôlabilité

On a prouvé que le système, défini dans la section 3.5 est contrôlable dès que le générateur Z de $\mathcal{D}^1\mathfrak{h}^n$ appartient à $\mathrm{Vect}\{B_1, \cdots, B_m\}$. Le but de cette section est de donner des conditions de non contrôlabilité. On suppose que

$$Z \notin \mathrm{Vect}\{B_1, \cdots, B_m\}.$$

Grâce à cette condition, on peut choisir une base symplectique $(X_1, Y_1, \cdots, X_n, Y_n, Z)$ telle que les B_j appartiennent au sous-espace de $\mathfrak{h}^n$ engendré par les X_i et les Y_i. Dans les coordonnées associées à cette base, l'équation différentielle satisfaite par z est de la forme

$$\dot{z} = dz + l(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) + Q(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n),$$

où l est une forme linéaire et Q une forme quadratique, des $2n$ variables $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$.

Théorème 15 *On suppose que* $Z \notin \mathcal{LA}\{B_1, \ldots, B_m\}$ *et* $d \neq 0$*. Si la forme quadratique* Q *est positive et si* $\ker(Q) \subset \ker(l)$ *alors le système n'est pas contrôlable.*

Démonstration.
Les hypothèses sur l et Q impliquent que le polynôme $l(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) + Q(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ possède un minimum $\mu \in \mathbb{R}$. D'où

$$\dot{z} < 0 \Longleftrightarrow dz < -l(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) - Q(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \Longrightarrow dz \leq -\mu$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{lll} \text{Si } d < 0, & \text{alors } z \geq -\frac{\mu}{d} \Longrightarrow \dot{z} \geq 0 & \forall x_i, y_i \\ \text{Si } d > 0, & \text{alors } z \leq -\frac{\mu}{d} \Longrightarrow \dot{z} \geq 0 & \forall x_i, y_i \end{array}$$

Ceci montre que le système ne peut pas être contrôlable puisque l'hyperplan $\{z = -\dfrac{\mu}{d}\}$ ne peut être traversé que dans un seul sens.

$\square$

En réalité, on peut aller plus loin en opérant certaines transformations particulières de la variable z. *Un changement de variable sera dit admissible si il se met sous la forme $z \mapsto w$*

$$w = z + P(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n),$$

où P est un polynôme de degré 2 sans terme constant.
Il est clair que l'équation différentielle satisfaite par w est de la forme

$$\dot{w} = dw + l'(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) + Q'(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n),$$

où l' est une forme linéaire et Q' est une forme quadratique à $2n$ variables $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$.

Théorème 16 *On suppose que $Z \notin \mathcal{LA}\{B_1, \ldots, B_m\}$ et que $d \neq 0$. Si par un changement de variable admissible la forme quadratique Q' est positive, et $\ker(Q') \subset \ker(l')$, alors le système n'est pas contrôlable.*

Démonstration.
De même que sous les hypothèse du théorème 15, le polynôme $l'(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) + Q'(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ possède un minimum $\mu \in \mathbb{R}$.

$\square$

Dans l'article [DathJouan14], pour prouver la contrôlabilité sur $\mathbb{H}^1$ dans le cas régulier, c'est tout à fait le contraire du Théorème 16 qui a été démontré ($d \neq 0$). Autrement dit, *dans $\mathbb{H}^1$, sous la condition du rang un système est contrôlable dans le cas régulier si et seulement si pour aucun changement de variable admissible on ne peut obtenir Q' positive, et $\ker(Q') \subset \ker(l')$.*
Cela nous l'avons prouvé en effectuant les différents changements de variables admissibles possibles.

Par conséquent on peut faire la conjecture suivante.

Conjecture 1 *Soit* (Σ) *un système régulier (i.e.* $d \neq 0$*) dans* $\mathbb{H}^n$ *et supposons que* $Z \notin \mathcal{LA}\{B_1, \ldots, B_m\}$*. Alors* (Σ) *est contrôlable si et seulement si pour aucun changement de variable admissible on ne peut obtenir : la forme quadratique* Q' *est positive, et* $\ker(Q') \subset \ker(l')$*.*

Chapitre 4

Perspectives de recherches

Les résultats de contrôlabilité des chapitres précédents ne fournissent pas de conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité dans $\mathbb{H}^n$ similaires à celles qu'on a obtenues en dimension 3.
L'objectif de futures recherches est d'obtenir de telles conditions . Dans $\mathbb{H}^1$, en particulier pour les systèmes à une entrée, les conditions suffisantes ont été obtenues à partir de formes normales.
La première étape de nos futures recherches est d'établir des formes normales dans $\mathbb{H}^n$, c'est le propos de ce court chapitre

4.1 Forme normale d'un système linéaire à une entrée dans le groupe Heisenberg de dimension 2n+1

On considère le système linéaire à une entrée dans le groupe Heisenberg de dimension $2n+1$

$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}(g) + uB(g).$$

On note par D la dérivation associée à $\mathcal{X}$. On veut montrer que Σ est équivalent par automorphisme à $\widetilde{\Sigma} : \dot{g} = \widetilde{\mathcal{X}}(g) + uX_1(g)$.
Pour cela, on cherche un automorphisme P dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}^n$ de $\mathbb{H}^n$.
Puisque le groupe Heisenberg est simplement connexe, il existe un unique automorphisme ψ de $\mathbb{H}^n$ telle que $T_e\psi = P$.
Cet automorphisme ψ transforme (Σ) en $(\widetilde{\Sigma})$. Nous avons montré (voir proposition 8 de [DathJouan14]) que d'une part $\tilde{\mathcal{X}} = \psi_*\mathcal{X}$ est linéaire et que la dérivation associée est $\widetilde{D} = PDP^{-1}$ et d'autre part ψ_*B est un champ invariant à droite égale à $P(B)$.

4.1.1 Définition de l'automorphisme.

4.1.2 Base de l'automorphisme.

Proposition 23 *Si* (Σ) *vérifie la condition du rang si et seulement si* $B, DB, D^2B, ...D^{2n-1}B, Z$ *est une base de* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. la démonstration est évidente, il suffit d'appliquer la proposition 21.

4.1.3 Définition de l'automorphisme.

Dans les deux cas suivants on posera $DZ = dZ$ et $[D^iB, D^jB] = \alpha_{ij}Z$.
On note par $\Delta_{ij}X_kY_k$, le déterminant de X_k et Y_k dans le calcul du crochet $[D^iB, D^jB]$; par conséquent $[D^iB, D^jB] = \Sigma_{k=1}^{n}(\Delta_{ij}X_kY_k)Z$.
Premier cas
$\alpha_{01} \neq 0$.
Dans ce cas on définit l'automorphisme P de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} P(B) & = X_1 \\ P(DB) & = Y_1 \\ P(D^kB) & = -\frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{01}}X_1 + \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{01}}Y_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{kj}X_j + b_{kj}Y_j \\ P(Z) & = \frac{1}{\alpha_{01}}. \end{array}$$

où $k = 2, \cdots, 2n-1$; $j = 2, \cdots, n$ et a_{kj}, b_{kj} sont des nombres réels.
Il est clair que

$$[P(B), P(DB)] = P[B, DB] = Z \tag{4.1}$$

$$\left[P(B), P(D^kB)\right] = P\left[B, D^kB\right] = \alpha_{0k}Z \tag{4.2}$$

$$\left[P(DB), P(D^kB)\right] = P\left[DB, D^kB\right] = \alpha_{1k}Z \tag{4.3}$$

Les coefficients a_{kj}, b_{kj} s'obtiennent par calculs successifs des autres crochets, comme le montrent les exemples suivants en dimensions 5 et 7.

Exemple 1
En dimension 5 l'automorphisme P s'écrit :

$$\begin{array}{ll} P(B) & = X_1 \\ P(DB) & = Y_1 \\ P(D^2B) & = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{01}}X_1 + \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}Y_1 + X_2 \\ & \\ P(D^3B) & = -\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{01}}X_1 + \frac{\alpha_{03}}{\alpha_{01}}Y_1 + \beta_{23}Y_2 \\ & \\ P(Z) & = \frac{1}{\alpha_{01}}Z \end{array} .$$

Compte tenu des égalités 4.1, 4.2, 4.3, la seule égalité à vérifier pour que P soit un automorphisme est $[P(D^2B), P(D^3B)] = P[D^2B, D^3]$.
Pour cela on détermine $\beta_{2,3}$ de la façon suivante

$$[P(D^2B), P(D^3B)] = (\Delta_{23}X_1Y_1 + \beta_{23})Z \qquad \text{et} \qquad P[D^2B, D^3B] = P(\alpha_{23}Z) = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{01}}Z.$$

Ainsi $\beta_{23} = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{01}} - \Delta_{23}X_1Y_1$

Remarque

La constante $\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}$ est égal à d .
La constante β_{23} ne peut-être nul. En effet si $\beta_{23} = 0$ alors

$$\begin{aligned}
P(D^3B) &= -\tfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{01}}X_1 + \tfrac{\alpha_{03}}{\alpha_{01}}Y_1 \\
&= -\tfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{01}}P(B) + \tfrac{\alpha_{03}}{\alpha_{01}}P(DB) \\
&= P(-\tfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{01}}B + \tfrac{\alpha_{03}}{\alpha_{01}}DB) \qquad \text{par conséquent,} \\
D^3B &= -\tfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{01}}B + \tfrac{\alpha_{03}}{\alpha_{01}}DB.
\end{aligned}$$

Ainsi l'hypothèse B, DB, D^2B, D^3B linéairement indépendants est mise à défaut.

Exemple 2

En dimension 7 l'automorphisme P s'écrit :

$$\begin{aligned}
P(B) &= X_1 \\
P(DB) &= Y_1 \\
P(D^2B) &= -\tfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{01}}X_1 + \tfrac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}Y_1 + X_2 \\
P(D^3B) &= -\tfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{01}}X_1 + \tfrac{\alpha_{03}}{\alpha_{01}}Y_1 + X_2 + \beta_{23}Y_2 \\
P(D^4B) &= -\tfrac{\alpha_{14}}{\alpha_{01}}X_1 + \tfrac{\alpha_{04}}{\alpha_{01}}Y_1 + a_{24}X_2 + \beta_{24}Y_2 + X_3 \\
P(D^5B) &= -\tfrac{\alpha_{15}}{\alpha_{01}}X_1 + \tfrac{\alpha_{05}}{\alpha_{01}}Y_1 + a_{25}X_2 + \beta_{25}Y_2 + \beta_{35}Y_3 \\
P(Z) &= \tfrac{1}{\alpha_{0,1}}.Z
\end{aligned}$$

Compte tenu des égalités 4.1, 4.2, 4.3, les égalités à vérifier pour que P soit un automorphisme sont

$$\begin{aligned}
[P(D^2B), P(D^jB)] &= P\,[D^2B, D^jB] \qquad \text{pour} \quad j = 3, 4, 5 \\
[P(D^2B), P(D^jB)] &= P\,[D^2B, D^jB] \qquad \text{pour} \quad j = 3, 4, 5.
\end{aligned}$$

la détermination des réels a_{kj}, b_{kj} se fait en trois étapes :

Etape 1

les coefficients $\beta_{2,j}$ pour $j = 3, 4, 5$ s'obtiennent en calculant les crochets $[P(D^2B), P(D^jB)]$ pour $j = 3, 4, 5$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} \beta_{23} &= \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{01}} - \Delta_{23}X_1Y_1 \\ \\ \beta_{24} &= \frac{\alpha_{24}}{\alpha_{01}} - \Delta_{24}X_1Y_1 \\ \\ \beta_{25} &= \frac{\alpha_{25}}{\alpha_{01}} - \Delta_{25}X_1Y_1. \end{cases}$$

Etape 2

les coefficients $a_{2,j}$ pour $j = 4, 5$ s'obtiennent en calculant les crochets $[P(D^3B), P(D^jB)]$ pour $j = 4, 5$.

On obtient les égalités suivantes vérifiées par les $a_{i,j}$:

$$\begin{cases} a_{24}.\beta_{23} = \Delta_{34}X_1Y_1 + \beta_{24} - \frac{\alpha_{34}}{\alpha_{01}} \\ \\ a_{25}.\beta_{23} = \Delta_{35}X_1Y_1 + \beta_{25} - \frac{\alpha_{35}}{\alpha_{01}} \end{cases}$$

Etape 3

le coefficient β_{35} s'obtient en calculant le crochet $[P(D^4B), P(D^5B)]$. Par conséquent on a :

$\beta_{35} = \frac{\alpha_{45}}{\alpha_{01}} - \Delta_{45}X_1Y_1 - \Delta_{45}X_2Y_2$

Remarque.

β_{23} et β_{35} sont non nuls sinon $B, DB, D^2B, D^3, BD^4, BD^5B$ seraient linéairement dépendants.

Deuxième cas

$\alpha_{12} \neq 0$.

Dans ce cas on définit l'automorphisme P de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} P(B) & = X_1 \\ P(DB) & = X_2 \\ P(D^kB) & = \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{1,2}}X_1 - \frac{\alpha_{2,k}}{\alpha_{1,2}}X_2 + \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,2}}Y_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{kj}X_j + b_{kj}Y_j \\ P(Z) & = \frac{1}{\alpha_{1,2}}. \end{array},$$

où $k = 3, \cdots, 2n-1$ et $j = 3, \cdots, n$.

Le principe de calcul des coefficients a_{kj}, b_{kj} est le même que dans le premier cas

4.1.4 Exemple de forme normale dans $\mathbb{H}^2$

On considère dans $\mathbb{H}^2$ le système linéaire à une entrée

$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}_g + uB(g) \qquad \text{où} \quad [B, DB] \neq 0,$$

On note par D la dérivation associée à $\mathcal{X}$.

Proposition 24 *Si* (Σ) *vérifie la condition du rang, il est équivalent par automorphisme à*

$$\Sigma_N \qquad \dot{g} = \widetilde{\mathcal{X}}_g + uX_1(g) \qquad \textit{où} \qquad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 1 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d & e & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{23} & 2d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & d \end{pmatrix}$$

est la dérivation associée à $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Démonstration.

En considérant L'automorphisme P de $\mathfrak{h}^2$ défini dans l'exemple 1, puis $\widetilde{D} = PDP^{-1}$, la démonstration est automatique. Par conséquent, le système s'écrit en coordonnées canoniques

$$\begin{cases} \dot{x_1} & = cy_1 + y_2 + u \\ \dot{y_1} & = x_1 + dy_1 \\ \dot{x_2} & = y_1 - dx_2 + ey_2 \\ \dot{y_2} & = \beta_{2,3}x_2 + 2dy_2 \\ \dot{z} & = fy_2 + dz + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}cy_1^2 + \frac{1}{2}\beta_{2,3}x_2^2 + \frac{1}{2}ey_2^2 + y_1y_2. \end{cases}$$

Controllability of Linear Systems on low dimensional Nilpotent and Solvable Lie Groups

Mouhamadou Dath [1] and Philippe Jouan [2]

abstract This paper is devoted to the study of controllability of linear systems on solvable and nilpotent Lie groups. Some general results are stated and used to completely characterize the controllable systems on the nilpotent Heisenberg group and the solvable 2-dimensional affine group.
Keywords : Nilpotent and solvable Lie groups ; Linear systems ; Controllability.

1.2 Introduction

In this paper we are interested in finding some necessary and sufficient controllability conditions for linear systems on nilpotent and solvable Lie groups, in particular on the Heisenberg group and the 2-dimensional affine group $Aff_+(2)$. By linear system is meant a controlled system

$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j$$

on a connected Lie group G where $\mathcal{X}$ is a linear vector field, that is a vector field whose flow is a one-parameter group of automorphisms, and the Y_j's are right-invariant.

Up to now the known controllability properties of these systems were either of local nature (see [AT99], [CM05]), or restricted to linear systems on compact or semisimple groups (see [SA01], [Jouan102]), but few results were known in the nilpotent and solvable cases, excepted the following particular one : ([Jouan102]) *if the derivation associated to the linear field is inner (see Section 1.3 for the definition) then System* (Σ) *is controllable if and only if the Lie algebra generated by the controllable vector fields* $Y^1, \dots, Y^m$ *is equal to the Lie algebra of* G (some controllability results on compact homogeneous spaces involve also solvable groups, see [Jouan101]).

This statement is analog to the known one about invariant systems on nilpotent Lie groups (see [AS93]), but the results we present here show that in the case where the derivation is not inner, the behaviour of linear systems

1. Université de Dakar Senegal E-mail : rassouldath@yahoo.fr

2. Lab. R. Salem, CNRS UMR 6085, Université de Rouen, avenue de l'université BP 12, 76801 Saint-Étienne-du-Rouvray France. E-mail : Philippe.Jouan@univ-rouen.fr

is completely different from the one of invariant systems. For instance on the Heisenberg group a one-input linear system can be controllable (see Theorem 7), which is impossible for an invariant one.

The present investigation makes use of subgroups and quotients. As a matter of fact the nilpotent and solvable groups have subgroups that are invariant under the flow of linear vector fields, that is the derived groups and the elements of the lower central series. If these subgroups are moreover closed, the linear system can be projected to the quotient group, and our approach is to rely the controllability properties of the system to the ones of the systems induced on the involved subgroup and on the related quotient group.

The paper is organized as follows.

Firstly the basic definitions and facts concerning linear systems on Lie groups are recalled in Section 1.3.

Then Section 1.4 is devoted to general results of two kinds. In Propositions 4 and 5 the relations between the controllability properties of the system and the ones of the systems induced on some subgroup and on the related quotient group are stated. The study of the action of group automorphisms on linear systems is done in Proposition 6.

These general results are used to completely characterize the one-input controllable systems on the 2-dimensional affine group in Section 1.5. The main result of that section is Theorem 4, it is preceded by Theorem 3 which deals with systems transformed by automorphism into what we call a normal form.

In Section 1.6 the same work is done on the Heisenberg group, first for two-input systems (Theorem 5) and then for one-input systems (Theorems 6 and 7). The characterization of the controllable one-input systems on the group Heisenberg is the main result of this paper. It enlights the kind of problems that one can encounter in the analysis of linear systems on general nilpotent groups.

The results are then discussed in Section 1.7 in order to try to identify controllability conditions that could hold on general nilpotent and solvable groups.

1.3 Basic definitions and notations

More details about linear vector fields and linear systems can be found in [JouanAX08] and [Jouan102].

1.3.1 Linear vector fields

Let G be a connected Lie group and $\mathfrak{g}$ its Lie algebra (the set of right-invariant vector fields, identified with the tangent space at the identity). A vector field on G is said to be *linear* if its flow is a one-parameter group of automorphisms. Actually the linear vector fields are nothing else than the so-called infinitesimal automorphisms in the Lie group litterature (see [Bourbaki2] for instance). The following characterization will be useful in the sequel.

A vector field $\mathcal{X}$ on a connected Lie group G is linear if and only if it belongs to the normalizer of $\mathfrak{g}$ in the algebra of analytic vector fields of G, that is

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \qquad [\mathcal{X}, Y] \in \mathfrak{g},$$

and verifies $\mathcal{X}(e) = 0$.

On account of this characterization, one can associate to a linear vector field $\mathcal{X}$ the derivation $D = -ad(\mathcal{X})$ of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G.

In the case where this derivation is inner, that is $D = -ad(X)$ for some right-invariant vector field X on G, the linear vector field splits into $\mathcal{X} = X + \mathcal{I}_*X$, where $\mathcal{I}$ stands for the diffeomorphism $g \in G \longmapsto \mathcal{I}(g) = g^{-1}$. Thus $\mathcal{X}$ is the sum of the right-invariant vector field X and the left-invariant one $\mathcal{I}_*X$.

About the existence of linear vector fields, we have :

Theorem 1 ([JouanAX08]) *The group G is assumed to be (connected and) simply connected. Let D be a derivation of its Lie algebra g. Then there exists one and only one linear vector field on G whose associated derivation is D.*

Throughout the paper the flow of a linear vector field $\mathcal{X}$ will be denoted by $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

1.3.2 Linear systems

Definition 1 *A* **linear system** *on a connected Lie group G is a controlled system*

$$(\Sigma) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^{m} u_j Y_g^j$$

where $\mathcal{X}$ is a linear vector field and the Y^j's are right-invariant ones. The control $u = (u_1, \ldots, u_m)$ takes its values in $\mathbb{R}^m$.

An input u being given (measurable and locally bounded), the corresponding trajectory of (Σ) starting from the identity e will be denoted by $e_u(t)$, and the one starting from the point g by $g_u(t)$. A straightforward computation shows that

$$g_u(t) = e_u(t)\varphi_t(g).$$

Remark. If the vector fields Y^j were left-invariant we would have $g_u(t) = \varphi_t(g)e_u(t)$.

Notations. We denote by $\mathcal{A}(g,t) = \{g_u(t);\ u \in L^\infty[0,t]\}$ (resp. $\mathcal{A}(g, \leq t)$) (resp. $\mathcal{A}(g)$) the reachable set from g in time t (resp. in time less than or equal to t) (resp. in any time). In particular the reachable sets from the identity e are denoted by

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(e,t) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}(e).$$

These sets are related by the following equalities :

Proposition 1 *1.* $\forall g \in G \quad \mathcal{A}(g,t) = \mathcal{A}_t\varphi_t(g)$.

2. $\forall\ s,t \geq 0 \quad \mathcal{A}_{t+s} = \mathcal{A}_t\varphi_t(\mathcal{A}_s) = \mathcal{A}_s\varphi_s(\mathcal{A}_t)$.

We also denote by $\mathcal{A}^- = \{g \in G;\ e \in \mathcal{A}(g)\}$ the set of points from which the identity can be reached. It is equal to the attainability set from the identity for the time-reversed system.

1.3.3 The system Lie algebra and the rank condition

Let $\mathfrak{h}$ be the subalgebra of $\mathfrak{g}$ generated by $\{Y^1, \ldots, Y^m\}$, let us denote by $D\mathfrak{h}$ the smallest D-invariant subspace of $\mathfrak{g}$ that contains $\mathfrak{h}$, i.e. $D\mathfrak{h} = \mathrm{Sp}\{D^kY;\ Y \in \mathfrak{h} \text{ and } k \in \mathbb{N}\}$, and let $\mathcal{LA}(D\mathfrak{h})$ be the $\mathfrak{g}$ subalgebra generated by $D\mathfrak{h}$ (as previously $D = -\mathrm{ad}(\mathcal{X})$).

Proposition 2 ([Jouan101]) *The subalgebra $\mathcal{LA}(D\mathfrak{h})$ is D-invariant. It is therefore equal to the zero-time ideal $\mathcal{L}_0$, and the system Lie algebra $\mathcal{L}$ is equal to*

$$\mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{LA}(D\mathfrak{h}) = \mathbb{R}\mathcal{X} \oplus \mathcal{L}_0.$$

The rank condition is satisfied by (Σ) if and only if $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$.

1.3.4 The Lie saturate

The Lie saturate $\mathcal{LS}(\Sigma)$ of (Σ) (resp. the strong Lie saturate $\mathcal{LSS}(\Sigma)$ of (Σ)) is the set of vector fields f belonging to the system Lie algebra $\mathcal{L}$ and whose flow $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ satisfies

$$\forall g \in G,\ \forall t \geq 0 \qquad \phi_t(g) \in \overline{\mathcal{A}(g)} \qquad (\text{resp. } \phi_t(g) \in \overline{\mathcal{A}(g, \leq t)})$$

as soon as $\phi_t(g)$ is defined (see [Jurdjevic97]). Here $\overline{\mathcal{A}(g)}$ stands for the closure of $\mathcal{A}(g)$.

As a first consequence of the enlargement technics, that consists to add to a system some vector fields of the (strong) Lie saturate, we have the following proposition :

Proposition 3 *The algebra* $\mathfrak{h}$ *is included in* $\mathcal{LSS}(\Sigma)$*, so that* (Σ) *can be enlarged to the system*

$$(\widetilde{\Sigma}) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^{p} u_j \widetilde{Y}_g^j,$$

where $\widetilde{Y}^1, \ldots, \widetilde{Y}^p$ *is a basis of* $\mathfrak{h}$*, without modifying the sets* $\overline{\mathcal{A}(g, \leq t)}$*.*

1.3.5 Local controllability and the ad-rank condition

It is well known that a system is locally controllable at an equilibrium point as soon as the linearized system is controllable (see [NvdS90] for instance). In this assertion "locally controllable" at a point g means that the set $\mathcal{A}(g, t)$ is a neighbourhood of g for all $t > 0$.

According to Proposition 3, we can consider the linearization of the extended system instead of the one of the system itself. This leads to the following definition :

Definition 2 *System* (Σ) *is said to satisfy the* **ad-rank condition** *if* $D\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$*, in other words if the linearized system of* $(\widetilde{\Sigma})$ *is controllable.*

As the rank condition is implied by the ad-rank one we obtain at once :

Proposition 2 *If the ad-rank condition is satisfied then for all* $t > 0$ *the reachable set* $\mathcal{A}_t$ *is a neighbourhood of* e*.*

This proposition was first stated in [AT99] with a different proof.

1.4 General results

In this section we state some general results that will be applied to the Heisenberg and affine groups. Proposition 6 deals with the action of group automorphisms on linear systems, but firstly we will rely the controllability of a linear system (Σ) on G to the controllability on some quotient group

G/H of the system induced by (Σ). Here the subgroup H of G is assumed to be normal and closed, but also globally invariant under the flow of $\mathcal{X}$, for the induced linear field to exist (see [JouanAX08]).

In the present paper we are interested in nilpotent and solvable Lie groups and it is a well known fact that the derived subalgebras, as well as the subalgebras of the lower central series, are characteristic ideals of $\mathfrak{g}$, hence invariant under all derivations. The corresponding connected subgroups are therefore normal and invariant under the flow of $\mathcal{X}$ (see [JouanAX08]). Moreover these subgroups are closed when G is simply connected (see [Bourbaki2]). Notice also that in the case when G is simply connected, the group $G/\mathcal{D}^1G$ is abelian and simply connected, hence diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$ for some n, and that the induced system on $G/\mathcal{D}^1G$ is linear in the classical sense. For these reasons the two forthcoming propositions are suitable to our study.

We will denote by $\mathcal{A}_{G/H}(gH)$ the reachable set from gH for the induced system. The condition $g'H \in \mathcal{A}_{G/H}(gH)$ means that there exists a time $t \geq 0$ and a control $u \in L^\infty[0,t]$ such that $g'H = g_u(t)H = e_u(t)\varphi_t(g)H$, and is equivalent to the existence of $h \in H$ such that $g' \in \mathcal{A}(gh)$. Indeed the above condition is equivalent to the existence of $h' \in H$ such that $g' = e_u(t)\varphi_t(g)h' = e_u(t)\varphi_t(g\varphi_{-t}(h')) = e_u(t)\varphi_t(gh)$, where $h = \varphi_{-t}(h') \in H$, thanks to the invariance of H under the flow of $\mathcal{X}$.

Proposition 4 *Let H be a normal and closed subgroup of G, globally invariant under the flow of $\mathcal{X}$.*

The linear system (Σ) on G, assumed to satisfy the rank condition, is controllable if and only if both conditions hold :

1. *the system induced on G/H is controllable ;*
2. *the subgroup H is included in the closures $\overline{\mathcal{A}}$ and $\overline{\mathcal{A}^-}$ of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$.*

Proof.

These conditions are clearly necessary. To prove that they are sufficient, we have to show that they imply $\mathcal{A} = \mathcal{A}^- = G$.

Let $g \in G$. By the first condition $gH \in \mathcal{A}_{G/H}(H)$, and consequently there exists h belonging to H such that g belongs to $\mathcal{A}(h)$. By the second one h belongs to $\overline{\mathcal{A}}$; together with $g \in \mathcal{A}(h)$ this implies $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Thus we obtain $\overline{\mathcal{A}} = G$, and consequently $\mathcal{A} = G$ because the rank condition holds (see [Jurdjevic97]).

In order to show that $\mathcal{A}^- = G$ we consider the time-reversed system (Σ^-). Obviously the first condition implies that the system induced by (Σ^-) on G/H is controllable. The second condition implies as above that $\mathcal{A}^- = G$.

In conclusion (Σ) is controllable.

□

Proposition 5 *Let us assume that H is a connected and closed subgroup of G and that the restriction of $\mathcal{X}$ to H vanishes. Then H is included in $\mathcal{A}$ (resp. in $\mathcal{A}^-$) if and only if $\mathcal{A} \cap H$ (resp. $\mathcal{A}^- \cap H$) is a neighbourhood of e in H.*

Proof.

Let us first show that $\mathcal{A} \cap H$ is a semigroup. If h, h' are two elements of $\mathcal{A} \cap H$, there exist non negative real numbers t and s such that $h \in \mathcal{A}_t$ and $h' \in \mathcal{A}_s$. As the restriction to H of the flow φ_t of $\mathcal{X}$ is the identity, we get $hh' = h\varphi_t(h') \in \mathcal{A}_t\varphi_t(\mathcal{A}_s) = \mathcal{A}_{t+s}$. Consequently $\mathcal{A} \cap H$ is a semigroup. If it contains a neighbourhood of e in H which is connected, then $H \subset \mathcal{A} \cap H$, and $H \subset \mathcal{A}$.

Similarly let us show that $\mathcal{A}^- \cap H$ is a semigroup. Notice first that for any $h \in H$ and $t \geq 0$, we have $\mathcal{A}_t(h) = \mathcal{A}_t\varphi_t(h) = \mathcal{A}_t h$. Let h, h' belonging to $\mathcal{A}^- \cap H$. From $e \in \mathcal{A}_t h$, we deduce $h' \in \mathcal{A}_t hh' = \mathcal{A}_t(hh')$. Together with $e \in \mathcal{A}(h')$, this shows $e \in \mathcal{A}(hh')$ and $hh' \in \mathcal{A}^- \cap H$. For the same reasons as above $\mathcal{A}^- \subset H$.

□

Singular and regular systems. The linear systems for which $\mathcal{X}$ vanishes on a connected, closed, normal and $\mathcal{X}$-invariant (non trivial) subgroup will be referred to as *singular systems*, the other ones being *regular*. The previous proposition 5 is crucial in the singular case.

Proposition 6 *Let $(\Sigma) : \dot{g} = \mathcal{X}_g + \sum_{j=1}^m u_j Y_g^j$ be a linear system on a connected and simply connected Lie group G, D the derivation associated to $\mathcal{X}$ and P an automorphism of $\mathfrak{g}$. Then (Σ) is equivalent by group automorphism to*

$$(\widetilde{\Sigma}) \qquad \dot{g} = \widetilde{\mathcal{X}}_g + \sum_{j=1}^m u_j P Y_g^j$$

where $\widetilde{\mathcal{X}}$ is the linear vector field whose associated derivation is $\widetilde{D} = PDP^{-1}$.

Proof.

1. Let us first show that PDP^{-1} is a derivation of $\mathfrak{g}$. Indeed for all $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} PDP^{-1}[X,Y] &= PD[P^{-1}X, P^{-1}Y] \\ &= P([DP^{-1}X, P^{-1}Y] + [P^{-1}X, DP^{-1}Y]) \\ &= [PDP^{-1}X, Y] + [X, PDP^{-1}]. \end{aligned}$$

2. Then the group G being simply connected there exists an automorphism ψ of G, unique, such that $T_e\psi = P$ (see [Bourbaki2]). Let us show that for any linear vector field $\mathcal{X}$ on G, the vector field $\psi_*\mathcal{X}$ is linear and the associated derivation is PDP^{-1}. If the flow of $\mathcal{X}$ is denoted by φ_t, the one of the vector field $\psi_*\mathcal{X}$ is $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$. It is a one-parameter group of automorphisms, hence the flow of a linear vector field.
   It remains to show that PDP^{-1} is the derivation $\widetilde{D}$ associated to $\psi_*\mathcal{X}$. According to the formula $T_e\varphi_t = e^{tD}$ (see [JouanAX08]) applied to $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$, we get
   $$e^{t\widetilde{D}} = T_e(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}) = PT_e\varphi_t P^{-1} = Pe^{tD}P^{-1} = e^{tPDP^{-1}},$$
   so that $\widetilde{D} = PDP^{-1}$.
3. Finally the vector field ψ_*Y^j is equal to PY^j. Indeed the mapping ψ being a group morphism, it is a basic fact that ψ_*Y^j is the right-invariant field $T_e\psi Y^j$.

The proof is complete.

□

1.5 Controllability of linear systems on $Aff_+(2)$

1.5.1 Linear vector fields and linear systems on $Aff_+(2)$

Let G be the connected component of e in the 2-dimensional affine group

$$G = Aff_+(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}.$$

Its Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(2)$ is identified with the set of left-invariant vector fields. Previously we had considered right-invariant vector fields only, but the left-invariant ones are more convenient on $Aff_+(2)$ and, of course, the theory is the same. This 2-dimensional algebra is solvable [3] and generated by the left-invariant vector fields whose value at the group identity is given by

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. A Lie algebra $\mathfrak{g}$ is solvable if its derived series terminates in the zero Lie algebra : define $\mathcal{D}^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ and by induction $\mathcal{D}^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathcal{D}^n\mathfrak{g}, \mathcal{D}^n\mathfrak{g}]$, then $\mathfrak{g}$ is solvable if $\mathcal{D}^n\mathfrak{g}$ vanishes for some integer n.

with $[X, Y] = XY - YX = Y$. The matrices X and Y are identified with the left-invariant vector fields :

$$gX = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad gY = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The three followings facts are straightforward :

1. In the basis (X, Y) all derivations D on $\mathfrak{aff}(2)$ are of the form $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ where a and b are real numbers.

   Indeed such an endomorphism of $\mathfrak{aff}(2)$ is clearly a derivation. Conversely the derived ideal $\mathcal{D}^1\mathfrak{g}$ is characteristic, hence invariant with respect to D, so that $DY = bY$ for some real number b. Derivating $Y = [X, Y]$ we get $bY = DY = [DX, Y] + [X, DY] = [DX, Y] + bY$, hence $[DX, Y] = 0$ and $DX = aY$ for some real number a.

2. All derivations on $Aff_+(2)$ are inner. Actually $D = ad(bX - aY) = -ad(aY - bX)$.

3. The linear vector field $\mathcal{X}$ associated to such a derivation is $\mathcal{X}(g) = \begin{pmatrix} 0 & a(x-1) + by \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Indeed $D = -ad(\mathcal{X}) = -ad(aY - bX)$ and following Section 1.3.1 :

   $$\mathcal{X}(g) = g(aY - bX) - (aY - bX)g = \begin{pmatrix} 0 & a(x-1) + by \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   at the point $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Let $B = \alpha X + \beta Y$ be a element of $\mathfrak{aff}(2)$, and (Σ) the one-input linear system defined by :

$$(\Sigma) : \dot{g} = \mathcal{X}(g) + ugB.$$

In coordinates, (Σ) writes :

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} = & u\alpha x \\ \dot{y} = & a(x-1) + by + u\beta x \end{array} \right.$$

and the induced system on $G/\mathcal{D}^1 G$ is equivalent to

$$\dot{x} = u\alpha x.$$

1.5.2 Necessary and sufficient controllability conditions

Before stating the main result of this section, that is Theorem 4, we have first to exhibit what we call the normal form of (Σ), and to analyze the controllability properties of that particular form (Theorem 3).

Proposition 7 *If* (Σ) *satisfies the rank condition then it is equivalent by group automorphism to* (Σ_N) *:*

$$(\Sigma_N) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} = & u\alpha x \\ \dot{y} = & x - 1 + by \end{array} \right. \qquad \textit{with} \qquad \alpha \neq 0.$$

(Σ_N) *is called* ***the normal form*** *of* (Σ)*.*

Proof.
We have :

$$DB = D(\alpha X + \beta Y) = \alpha DX + \beta DY = (a\alpha + b\beta)Y.$$

Therefore the 2×2-matrix whose first (resp. second) column contains the coefficients of B (resp. DB) in the basis (X, Y) is given by

$$(B\ DB) = \left(\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \beta & a\alpha + b\beta \end{array} \right),$$

and the rank condition is satisfied if and only if $\alpha(a\alpha + b\beta) \neq 0$. As a matter of fact if B and DB were linearly dependent then the system zero-time ideal would be the one-dimensional space $\mathbb{R}B$. Notice that here the rank condition is equivalent to the ad-rank one.

Since B and DB are linearly independent we can define an isomorphism P of the vector space $\mathfrak{g}$ by

$$P(B) = \alpha X \qquad \text{and} \qquad P(DB) = \alpha Y.$$

This isomorphism turns out to be an automorphism of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ because

$$[B, DB] = [\alpha X + \beta Y, (a\alpha + b\beta)Y] = \alpha(a\alpha + b\beta)Y = \alpha DB,$$

implies

$$P[B, DB] = P(\alpha DB) = \alpha^2 Y = \alpha^2 [X, Y] = [\alpha X, \alpha Y] = [PB, P(DB)].$$

By this automorphism, the derivation D is transformed into the derivation PDP^{-1} (see Proposition 6) which is characterized by :

$$PDP^{-1}X = Y \qquad \text{and} \qquad PDP^{-1}Y = bY.$$

Consequently we get in the basis (X, Y)

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{and} \qquad PB = \alpha X.$$

Finally (Σ) is equivalent to : (Σ_N) $\begin{cases} \dot{x} = & u\alpha x \\ \dot{y} = & x - 1 + by \end{cases}$, with $\alpha \neq 0$.

□

Theorem 3 *The system Σ_N is controllable if and only if $b = 0$.*

Proof.

For $b = 0$, the restriction of $\mathcal{X}$ to $\mathcal{D}^1G$ vanishes, and the system is singular. Since the ad-rank condition is satisfied, the sets $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$ are neighbourhoods of e, and $\mathcal{D}^1G \cap \mathcal{A}$ and $\mathcal{D}^1G \cap \mathcal{A}^-$ are neighbourhoods of e in $\mathcal{D}^1G$. According to Proposition 5, the derived group $\mathcal{D}^1G$ is included in $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$. The induced system on $G/\mathcal{D}^1G$, that is $\dot{x} = u\alpha x$, being clearly controllable whenever $\alpha \neq 0$ (which is guaranteed by the rank condition), we conclude that (Σ_N) is controllable by Proposition 4.

Let us now show that the system is not controllable as soon as $b \neq 0$, and let us first assume $b > 0$. Since $x > 0$, we have :

$$\begin{aligned} \dot{y} < 0 &\iff x - 1 + by < 0 \\ &\implies y < \frac{1-x}{b} < \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Consequently

$$y \geq \frac{1}{b} \implies \forall x > 0 \qquad \dot{y} > 0$$

and the system is not controllable to $e = (1, 0)$.
In the same way, if $b < 0$ we have

$$y \leq \frac{1}{b} \qquad \implies \qquad \forall x > 0 \qquad \dot{y} > 0,$$

and the system is not controllable from the identity.

□

We are now in a position to go back to the original system and to state the main result of this section.

Theorem 4 *The linear system* $(\Sigma) : \dot{g} = \mathcal{X}_g + ugB$ *on* $Aff_+(2)$*, where in the basis* (X, Y)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad B = \alpha X + \beta Y,$$

is controllable if and only if $b = 0$ *and* $a\alpha \neq 0$.

In other words (Σ) *is controllable if and only if it is singular and satisfies the rank condition.*

1.5.3 Controllability of the associated invariant system

Since the derivations of $\mathfrak{aff}(2)$ are inner, a linear vector field $\mathcal{X}(g) = g(aY - bX) - (aY - bX)g$ on the affine group is the sum of a left-invariant vector field and a right-invariant one. Consequently we can associate to (Σ) the left-invariant system

$$(I) \qquad \dot{g} = g(aY - bX) + ugB.$$

In the semisimple case all the derivations are inner, and an invariant system can always be associated to a linear one (see [Jouan102]). Moreover in that case no example of controllable linear system whose associated invariant system is not controllable is known, and we conjecture that on a semisimple Lie group (Σ) is controllable if and only if (I) is.

The next proposition states that a one-input left-invariant system on $Aff_+(2)$ is never controllable, showing that this conjecture is not true on solvable Lie groups. It can be proved using the hypersurface principle, see for instance [Sachkov09], but the proof given here is closer to the one of the linear case.

Proposition 8 *A one-input invariant system on* $Aff_+(2)$ *is not controllable.*

Proof.

The invariant system (I) satisfies the rank condition if and only if the vector fields $aY - bX$ and $B = \alpha X + \beta Y$ are linearly independent, that is if and only if $a\alpha + b\beta \neq 0$.

In particular (I) satisfies the rank condition when (Σ) does. We can in that case consider the normalized system, that is $a = 1$ and $\beta = 0$. Then (I) writes

$$(I) \qquad \left\{ \begin{array}{rl} \dot{x} = & -bx + u\alpha x \\ \dot{y} = & x \end{array} \right.$$

but this system is not controllable, because $\dot{y} > 0$.

For $\alpha = 0$ and $b\beta \neq 0$ the rank condition is still satisfied by (I), but controllability does not hold, because $\dot{x}$ does not depend neither on u nor on y.

$\square$

1.6 Controllability of linear systems on the Heisenberg group

1.6.1 Linear vector fields on the Heisenberg group

The Heisenberg group is the matrix group

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Its Lie algebra $\mathfrak{g}$ is generated by the right-invariant vector fields whose value at the group identity is given by

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

They verify [4] $[X, Y] = YX - XY = Z$, and can be written in natural coordinates

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

A straighforward computation using the equality $DZ = [DX, Y] + [X, DY]$ shows that the derivations of $\mathfrak{g}$ are the endomorphisms whose matrix in the basis (X, Y, Z) writes

$$D = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & a+d \end{pmatrix}.$$

Then the linear vector field $\mathcal{X}$ associated to this derivation is the unique vector field on G that vanishes at the identity and verifies $\mathrm{ad}(\mathcal{X}) = -D$. A computation making use of the equalities $[X, \mathcal{X}] = DX$ and so on, shows that $\mathcal{X}$ writes in natural coordinates

$$\mathcal{X} = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y} + (ex + fy + (a+d)z + \frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{2}cx^2)\frac{\partial}{\partial z}.$$

4. The Lie bracket of $\mathfrak{g}$ is choosen to be equal to the vector fields bracket. For this reason its sign for right-invariant vector fields is not the same as for left-invariant ones.

Notations. The center of the Heisenberg group, which is equal to the derived group $\mathcal{D}^1G$, will be denoted by $\mathcal{Z}(G)$. Similarly the center of its Lie algebra $\mathfrak{g}$ will be denoted by $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^1\mathfrak{g}$.

1.6.2 Controllability of two-input linear systems

In this section we consider the two-input linear system

$$(\Sigma_2) \quad \dot{g} = \mathcal{X}_g + u_1 B^1_g + u_2 B^2_g$$

where B^1 and B^2 are right-invariant vector fields assumed to be linearly independent.

Theorem 5 *The two-input linear system (Σ_2), where B^1 and B^2 are linearly independent, is controllable if and only if the rank condition is satisfied. In that case it is exact time controllable in time T for every $T > 0$.*

Proof.

We have only to prove that the system is controllable under the rank condition.

1. If the bracket of B^1 and B^2 does not not vanish, that is if $[B^1, B^2] = aZ$ with $a \neq 0$, then $\mathbb{R}Z$ is included in $\mathcal{LSS}(\Sigma_2)$ which therefore contains $\mathfrak{g}$, and (Σ_2) is controllable in exactly T unit of time for all $T > 0$.
2. If $[B^1, B^2]$ vanishes we can assume without loss of generality that one of the vector fields B^1 or B^2 belongs to $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, say $B^2 \in \mathcal{Z}(g)$ (to be more precise B^1 or B^2 can be replaced by a linear combination of B^1 and B^2 that belongs to $\mathcal{Z}(g)$). Then the rank condition implies that (B^1, DB^1, B^2) is a basis of $\mathfrak{g}$ (otherwise the system zero-time ideal would be contained in the 2-dimensional space $\mathbb{R}B^1 + \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$). As a consequence B^1 and DB^1 are independant on $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ and the induced system on $G/\mathcal{Z}(G)$, which is a classical linear system, is controllable since the Kalman rank condition is satisfied.

   As $B^2 = \alpha Z$, for some $\alpha \neq 0$, the dynamic on $\mathcal{Z}(G)$ is $\dot{z} = (a+d)z + \alpha u_2$ for $x = y = u_1 = 0$. This subsystem is clearly controllable, hence the center $\mathcal{Z}(G)$ of G is included in $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$, and (Σ_2) is controllable by Proposition 4.

   The system is actually exact time controllable in any time $T > 0$. Indeed let $p_1 = (x_1, y_1, z_1) \in G$. There exists a control that steers $(0, 0)$ to (x_1, y_1) in $G/\mathcal{Z}(G)$ in $T/2$ unit of time. In G this control steers $(0, 0, z_2)$ to (x_1, y_1, z_1) for some z_2. There exists as well a control that steers $(0,0,0)$ to $(0,0,z_2)$ in $T/2$ unit of time, hence p_1 can be reached from the identity at any time $T>0$. Clearly the identity can also be reached from p_1 at any time $T>0$.

$\square$

1.6.3 Controllability of single-input linear systems

We turn now our attention to the single-input case, which is the most pleasant one because it enlights in an interesting way the controllability problem on nilpotent groups. It is also the most difficult. The system under consideration will be

$$(\Sigma_1) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}_g + uB_g,$$

and as well as on the affine group we begin by exhibiting a normal form that will greatly simplify the forthcoming proofs.

1.6.3.1 Normal form

Proposition 9 *If (Σ_1) verifies the rank condition then it is equivalent by automorphism to*

$$(\Sigma_N) \qquad \dot{g} = \widetilde{\mathcal{X}}_g + uX_g \qquad \textit{where} \qquad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & d & 0 \\ 0 & f & d \end{pmatrix}$$

is the derivation associated to $\widetilde{\mathcal{X}}$ in the basis (X,Y,Z).

(Σ_N) will be referred to as a ***system in normal form****.*

Moreover :

1. *The application $(x,y,z) \longrightarrow (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z)$ where $\lambda \neq 0$ is a group automorphism whose action on a normal form is to change f into λf and X into λX.*
2. *The time-reversed system*

$$(\Sigma_1^-) \qquad \dot{g} = -\mathcal{X}_g - uX_g$$

is equivalent by automorphism to the system in normal form whose associated derivation is $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & -d & 0 \\ 0 & f & -d \end{pmatrix}$.

Proof.

1. Let us first show that the rank condition is satisfied if and only if $(B, DB, [B, DB])$ is a basis of $\mathfrak{g}$. This condition is clearly sufficient. For the necessity, we know by Proposition 2 that the rank condition is satisfied if and only if $\mathcal{L}_0 = \mathfrak{g}$, where $\mathcal{L}_0 = \mathcal{LA}\{D^k B, k \geq 0\}$.

   If B and DB are linearly dependent then $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathbb{R}B$. If $DB \in \mathcal{Z}(g)$, then $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathbb{R}B + \mathcal{Z}(g)$. In both cases the rank of $\mathcal{L}_0$ is not full. Consequently $(B, DB, [D, DB])$ must be a basis of $\mathfrak{g}$ for the rank condition to hold, and we can define an isomorphism P of the vector space $\mathfrak{g}$ by $P(B) = X$, $P(DB) = Y$, $P([B, DB]) = Z$. But $[P(B), P(DB)] = [X, Y] = Z = P[B, DB]$, the other brackets vanish, and P is actually a Lie algebra automorphism.

   According to Proposition 6 there exists a group automorphism that transforms (Σ_1) into (Σ_N) : $\quad \dot{g} = \widetilde{\mathcal{X}}_g + uX_g$. The derivation $\widetilde{D} = PDP^{-1}$ associated to $\widetilde{\mathcal{X}}$ verifies $\widetilde{D}X = PDP^{-1}X = PDB = Y$, hence its matrix in the basis (X, Y, Z) has the form $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & d & 0 \\ 0 & f & d \end{pmatrix}$.

2. The transformations $\phi : (x, y, z) \longrightarrow (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z)$, where $\lambda \neq 0$, and $\psi : (x, y, z) \longrightarrow (-x, y, -z)$ are automorphisms of the group G, whose law is $(x, y, z).(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + yx')$ in the natural coordinates. An easy computation gives :

   $$T_e\phi = P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \text{ hence } P\widetilde{D}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & d & 0 \\ 0 & \lambda f & d \end{pmatrix}, \text{ and}$$

   $$T_e\psi = P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ hence } P'(-\widetilde{D})P'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & -d & 0 \\ 0 & f & -d \end{pmatrix}.$$

□

In the forthcoming proof of Theorem 6 we will assume that the system under consideration is in normal form (hence satisfies the rank condition), that is $B = X$ and $D = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 1 & d & 0 \\ 0 & f & d \end{pmatrix}$.

Remarks

1. In the previous proof the coefficients b, d, f of the derivation $\widetilde{D} = PDP^{-1}$ are not the same as the coefficients b, d, f of the original derivation $D = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & a+d \end{pmatrix}$. They can of course be related by some

formulas, but we do not need them herein.

2. The controllability matrix of the linear part of (Σ_N) is

$$[X, \widetilde{D}X, \widetilde{D}^2X] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

and the ad-rank condition is equivalent to $f \neq 0$.

3. A system in normal form writes in natural coordinates

$$(\Sigma_N) \quad \begin{cases} \dot{x} = & by + u \\ \dot{y} = & x + dy \\ \dot{z} = & fy + dz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by^2 \end{cases}$$

The induced system on $G/\mathcal{Z}(G)$, that is $\begin{cases} \dot{x} = & by + u \\ \dot{y} = & x + dy \end{cases}$, is always controllable.

1.6.3.2 The Lie saturate

Proposition 10 *System (Σ_1) can be enlarged to the system*

$$(\Sigma_E) \qquad \dot{g} = \mathcal{X}_g + uX_g + vY_g + \frac{v^2}{2}Z_g$$

without modifying the closures of the attainable sets. In particular the right-invariant vector field Z belongs to the Lie saturate $\mathcal{LS}(\Sigma_1)$.

Proof.

As the vector field vX belongs to $\mathcal{LS}(\Sigma_1)$ for all $v \in \mathbb{R}$, the vector field $\exp(v\mathrm{ad}(X))\mathcal{X}$ belongs also to $\mathcal{LS}(\Sigma_1)$ (see [Jurdjevic97]). But

$$\begin{aligned} \exp(v\mathrm{ad}(X))\mathcal{X} &= \mathcal{X} + (v\mathrm{ad}(X))\mathcal{X} + \tfrac{1}{2}(v\mathrm{ad}(X))^2\mathcal{X} \\ &= \mathcal{X} + vDX + \frac{v^2}{2}[X, DX] \\ &= \mathcal{X} + vY + \frac{v^2}{2}Z \end{aligned}$$

The Lie saturate $\mathcal{LS}(\Sigma_1)$ being a closed convex cone we can multiply that vector field by $\frac{2}{v^2}$ and then let v go to infinity. We obtain $Z \in \mathcal{LS}(\Sigma_1)$.

□

Remarks

1. System (Σ_E) will be referred to as the *extended system*. Assume (Σ_1) to be in normal form, then (Σ_E) writes in coordinates :

$$(\Sigma_E) \qquad \begin{cases} \dot{x} = & by + u \\ \dot{y} = & x + dy + v \\ \dot{z} = & fy + dz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{2}v^2 \end{cases}$$

2. In the forthcoming controllability proof we will have to show $\mathcal{Z}(G) \subset \overline{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{Z}(G) \subset \overline{\mathcal{A}^-}$ (here $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$ refer to (Σ_N)). For this purpose we will set $x = 0$ and $u(t) = -by(t)$. Eliminating the variable x, we obtain in the (y, z)-plane the system

$$(\Sigma_{RE}) \quad \begin{cases} \dot{y} = dy + v \\ \dot{z} = fy + dz + \frac{1}{2}by^2 + \frac{1}{2}v^2 \end{cases}$$

   It will be referred to as the *reduced-extended system* in the sequel.

3. More accurately we will show that for all $z_0 \in \mathbb{R}$, the center $\mathcal{Z}(G)$ of G is contained in the attainable set from $(0, 0, z_0)$ for the extended system (Σ_E) by means of piecewise smooth controls. However the attainable sets of (Σ_E) from an initial point p_0 for piecewise constant inputs and for measurable locally bounded ones have the same closures, which is also the closure of the attainable set from p_0 for (Σ_N). This will therefore prove the inclusions $\mathcal{Z}(G) \subset \overline{\mathcal{A}}$ and $\mathcal{Z}(G) \subset \overline{\mathcal{A}^-}$ (About the attainable sets for different classes of inputs see for instance [GS90] or [Sontag98]).

1.6.3.3 Main result

Theorem 6 *A system in normal form is controllable if and only if one of the conditions*

(i) $b < -\dfrac{d^2}{4}$,

(ii) $d = 0$ *and* $f \neq 0$,

holds.

Proof. The proof of this theorem is divided into three lemmas.

Lemma 1 *Let us assume that* $d = 0$*. The system is controllable if and only if* $f \neq 0$*, or* $f = 0$ *and* $b < 0$*.*

Proof. For $d = 0$ the linear vector field $\mathcal{X}$ vanishes on $\mathcal{Z}(G)$: it is the singular case. As the induced system on $G/\mathcal{Z}(G)$ is controllable, and according to Proposition 4, we have only to show that $\mathcal{Z}(G) = \{(0, 0, z);\ z \in \mathbb{R}\}$ is contained in the closures of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$.

1. If $f \neq 0$ the ad-rank condition is satisfied, the linearized system is controllable, and $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$ are neighbourhoods of the identity $e = (0, 0, 0)$. According to Propositions 5 and 4 the system is controllable.
2. If $f = 0$ and $b \geq 0$ then $\dot{z} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by^2 \geq 0$, therefore the system is not controllable.
3. Let us show that (Σ_N) is controllable if $f = 0$ and $b < 0$. As the right-invariant vector field Z belongs to the Lie saturate, starting from a point $(0, 0, z_0)$, any point $(0, 0, z_1)$ with $z_1 > z_0$ can be reached by the extended system.

   Since $b < 0$ we can set $b = -\beta^2$ so that the reduced-extended system writes
   $$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{z} = \frac{1}{2}(v^2 - \beta^2 y^2) \end{cases}$$
   Let us start from a point $(0, z_0)$. By applying the control $v = 1$, and then the control $v = 0$, the reduced-extended system reaches a point (y_1, z_1) where $y_1 > 0$ and $z_1 < z_0$ with $z_0 - z_1$ arbitrary. To finish the trajectory obtained for the control $v = -\beta y$ tends to the point $(0, z_1)$.

   This shows that $\mathcal{Z}(G)$ is included in the closures of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$, hence that the system is controllable.

□

Lemma 2 *Let us assume that $d \neq 0$. If $b \geq -\dfrac{d^2}{4}$ then the system is not controllable.*

Proof.

To prove this lemma two changes of variable will be applied to z.

Let us first set $w = z + \dfrac{d}{4}y^2$. Using the expression of (Σ_N) in coordinates we obtain

$$\dot{w} = fy + dw + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}dy)^2 + \frac{1}{2}y^2(\frac{d^2}{4} + b)$$

(the value $\alpha = \dfrac{d}{4}$ corresponds to the worst case in the change of variable $w = z + \alpha y^2$).

If $b > -\dfrac{d^2}{4}$ then the polynomial $fy + \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{1}{2}dy)^2 + \dfrac{1}{2}y^2(\dfrac{d^2}{4} + b)$ has a minimum m, because $\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{2}dy)^2+\dfrac{1}{2}y^2(\dfrac{d^2}{4}+b)$ is a positive definite quadratic form. We get $\dot{w} > 0$ for all x, y as soon as $dw > -m$. Consequently if $d > 0$ then $w > -d^{-1}m$ implies $\dot{w} > 0$ (if $d < 0$ then $w < -d^{-1}m$ implies $\dot{w} > 0$), and the system is not controllable.

It remains to prove the non controllability in the case $b = \frac{-d^2}{4}$. For that purpose we make the second change of variable $\Theta = w + 2\dfrac{f}{d}y$ (the value $\gamma = 2\dfrac{f}{d}$ corresponds to the worst case in the change of variable $\Theta = w + \gamma y$). We obtain

$$\dot{\Theta} \; = fy + d\Theta + 2\tfrac{f}{d}x + \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{2}dy)^2.$$

The minimum of the expression $2\dfrac{f}{d}x+\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{2}dy)^2$ is reached for $x = -2\dfrac{f}{d} - \dfrac{1}{2}dy$, and is equal to $-fy - 2\dfrac{f^2}{d^2}$. Therefore the inequality $\dot{\Theta} \geq d\Theta - 2\frac{f^2}{d^2}$ holds for all $x, y \in \mathbb{R}$, and for the same reasons as above the system is not controllable.

$\square$

Lemma 3 *Let us assume that* $d \neq 0$. *If* $b < -\dfrac{d^2}{4}$ *then the system is controllable.*

Proof.

According to Proposition 9 we can assume $d > 0$. Indeed if $d < 0$ then the time-reversed system satisfies $d > 0$ and $b < -\dfrac{d^2}{4}$, it is controllable by the forthcoming proof and so is (Σ_N). Moreover f is defined up to a nonvanishing constant and we can also assume $f \leq 0$ (in order to keep the system in normal form the feedback transformation $u \longmapsto \lambda^{-1}u$ is necessary, but of course it does not change anything to controllability).

The system induced on $G/\mathcal{Z}(G)$ being controllable we have only to show that $\mathcal{Z}(G)$ is included in the closures of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^-$, or that for any pair z_0, z_1 of real numbers, the point $(0, 0, z_1)$ can be reached from $(0, 0, z_0)$ by a trajectory of the extended system.

Since the vector field Z belongs to the Lie saturate this can be achieved as soon as $z_1 \geq z_0$. Moreover the trajectory starting from $(0, 0, z_0)$ for the control $u = 0$ being $t \longmapsto (0, 0, z_0e^{dt})$ with $d > 0$, any point $(0, 0, z_1)$ can be reached from the point $(0, 0, z_0)$ whenever $z_0 < 0$.

Consequently it remains to show that starting from a given point $(0,0,z_0)$ with $z_0 \geq 0$ we can reach at least one point $(0,0,z)$ with $z<0$.

For this purpose we set $b=-\beta^2$ with $\beta > \frac{d}{2}$, and we consider the reduced-extended system

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{y} & = dy + v \\ \dot{z} & = fy + dz - \frac{1}{2}\beta^2 y^2 + \frac{1}{2}v^2 \end{array} \right.$$

up to the end of this proof.

To begin with we define two areas $\mathcal{Z}_1$ and $\mathcal{Z}_2$. The first one $\mathcal{Z}_1$ is the set of points $(y,z)\in\mathbb{R}^2$ for which there exists at least one value of the control v such that $\dot{z}<0$, that is

$$\mathcal{Z}_1 = \{(y,z)\in\mathbb{R}^2;\ dz + fy - \frac{1}{2}\beta^2 y^2 < 0\}.$$

Since $f\leq 0$ the set $\{(y,z)\in\mathbb{R}^2;\ y\geq 0 \text{ and } dz - \frac{1}{2}\beta^2y^2<0\}$ is included in $\mathcal{Z}_1$.

The second area denoted by $\mathcal{Z}_2$ is the set of points $(y,z)\in\mathbb{R}^2$ for which there exists at least one value of the control v such that $\dot{z}<0$ and $y\dot{y}<0$.

The second condition entails $v^2>d^2y^2$, hence $\dot{z} > fy+dz-\dfrac{1}{2}\beta^2y^2+\dfrac{1}{2}d^2y^2$. Consequently $\dot{z}\leq 0$ implies $fy+dz+\dfrac{1}{2}(d^2-\beta^2)y^2<0$, and one obtains

$$\mathcal{Z}_2 = \{fy+dz+\frac{1}{2}(d^2-\beta^2)y^2<0\}.$$

Starting from $(0,z_0)$, with $z_0>0$, we will successively reach $\mathcal{Z}_1$ and $\mathcal{Z}_2$, and finally a point $(0,z)$ with $z<0$ in five steps.

1. The constant control $v>0$ on an arbitrary small time steers $(0,z_0)$ to a point (y_1,z_1) with $y_1>0, z_1>0$.
2. The control $v=\beta y$ allows to enter $\mathcal{Z}_1$. Indeed for $v=\beta y$ the system is

   $$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{y} = (d+\beta)y & \\ \dot{z} = fy+dz \leq dz & \qquad \text{(since } f\leq 0) \end{array} \right.$$

   and we get $y(t)=y_1\exp((d+\beta)t)$, $z(t)\leq z_1\exp(dt)$. An easy computation shows that

   $$z(t) - \frac{\beta^2}{2d}y^2(t) \longrightarrow_{t\to+\infty} -\infty$$

   and that the trajectory reaches a point (y_2,z_2) with $y_2>0$ and $z_2 < \frac{\beta^2}{2d}y_2^2$, hence belonging to $\mathcal{Z}_1$, for some t large enough.

3. If $z_2 \geq 0$ by applying the control $v = 0$ we get

$$\begin{cases} \dot{y} = dy \\ \dot{z} = fy + dz - \frac{1}{2}\beta^2 y^2 \end{cases}$$

It is clear that $\dot{z} < 0$, because on the one hand it is true at $t = 0$, and on the other hand $y(t)$ is increasing. Consequently we get a trajectory inside the area $\mathcal{Z}_1$ that reaches a point $(y_3, z_3) \in \mathcal{Z}_1$ with $y_3 > 0$ and $z_3 < 0$.

4. We must now reach $\mathcal{Z}_2$. Whenever $\beta^2 \geq d^2$ the point (y_3, z_3) is already in $\mathcal{Z}_2$. If not, that is if $\frac{d^2}{4} < \beta^2 < d^2$, we apply the control $v = -ay$ with $\frac{d}{2} < a \leq \beta$. We have $y(t) = y_3 \exp(d-a)t$ and

$$\begin{aligned} \dot{z} &= dz + fy - \tfrac{1}{2}\beta^2 y^2 + \tfrac{1}{2}a^2 y^2 \\ &\leq dz - \tfrac{1}{2}(\beta^2 - a^2)y^2 \\ &\leq dz \qquad \text{because} \qquad \beta^2 - a^2 \geq 0 \end{aligned}$$

consequently $z(t) \leq z_3 \exp(dt)$ and

$$\begin{aligned} fy + dz + \frac{1}{2}(d^2 - \beta^2)y^2 &\leq dz + \tfrac{1}{2}(d^2 - \beta^2)y^2 \\ &\leq dz_3 \exp(dt) + \tfrac{1}{2}(d^2 - \beta^2)y_3^2 \exp(2(d-a)t) \\ &\longrightarrow_{t \to +\infty} -\infty \end{aligned}$$

because $2(d-a) < 2(d - \dfrac{d}{2}) = d$. Thus the trajectory enters $\mathcal{Z}_2$ and reaches a point $(y_4, z_4) \in \mathcal{Z}_2$ with $y_4 > 0$ and $z_4 < 0$.

5. We are now in a position to reach a point $(0, z)$ with $z < 0$. Firstly we apply the control $v = -dy$, for which $\dot{y} = 0$ and $\dot{z} < 0$, and that steers (y_4, z_4) to (y_5, z_5) with $y_5 = y_4$ and $z_5 \leq \frac{-1}{2d}(dy_5 + y_5)^2$.
To finish the control $v = -dy - y_5$ steers at the time $t = 1$ the point (y_5, z_5) to the point $(0, z_6)$ where $z_6 < 0$ because

$$\begin{aligned} \dot{z} &= dz + fy - \tfrac{1}{2}\beta^2 y^2 + \tfrac{1}{2}(dy + y_5)^2 \\ &\leq dz + \tfrac{1}{2}(dy + y_5)^2 \\ &\leq dz + \tfrac{1}{2}(dy_5 + y_5)^2 \qquad \text{because } y > 0 \text{ decreases} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

The proof is complete.

□

Let us go back to the system induced on the quotient group $G/\mathcal{Z}(G)$. This classical linear system writes

$$\begin{cases} \dot{x} = & by + u \\ \dot{y} = & x + dy \end{cases}$$

and we will denote it by (L). A standard computation shows that the eigenvalues of the matrix $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ are real if and only if $b \geq -\dfrac{d^2}{4}$. These eigenvalues are invariant under the group automorphisms, because their action on $G/\mathcal{Z}(G)$ is linear in the classical meaning. Consequently we can forget the normal form and state :

Theorem 7 *The one-input system (Σ_1) on the Heisenberg group is controllable if and only if it satisfies the rank condition and*

(i) in the regular case : the eigenvalues of (L) are not real;

(ii) in the singular case : the eigenvalues of (L) are not real or the ad-rank condition is satisfied.

1.7 Discussion of the results

1.7.1 Eigenvalues

On the Heisenberg group, and in the non-singular case, we have found that a one-input system that verifies the rank condition is controllable if and only if the eigenvalues of the system induced on $G/\mathcal{Z}(G)$ are not real.

This condition is coherent with the results obtained on $G = Aff_+(2)$. Indeed the change of variables $(x, y) \longmapsto (\zeta = \ln(x), y)$ transforms the system into :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dot{\zeta} = & \alpha u \\ \dot{y} = & e^{\zeta} - 1 + y \end{array} \right.$$

The linear part of the system induced on $G/\mathcal{D}^1 G$ vanishes, and its only eigenvalue, that is 0, is real. On the other hand the system is controllable only in the singular case.

1.7.2 The ad-rank condition

The results obtained herein, in particular Theorem 7, show also that the ad-rank condition arises only in the singular case, because then the controllability of the linearized system allows to conclude to the controllability of the system. In the regular case it does not matter if the ad-rank condition is satisfied or not.

1.7.3 Controllability from the identity and controllability

Theorem 7 allows also to answer to the following open question : *Is it true that a system controllable from the identity is controllable ?* In other words : *is the condition $\mathcal{A} = G$ sufficient for controllability ?*

In [Jouan102] it is proved that the answer is positive for linear systems on semisimple groups with finite center. On the other hand it is no longer positive in the general case. As a matter of fact consider on the Heisenberg group a system in normal form

$$(\Sigma_N) \quad \left\{ \begin{array}{rl} \dot{x} = & by + u \\ \dot{y} = & x + dy \\ \dot{z} = & fy + dz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}by^2 \end{array} \right.$$

with $d > 0$ and $-\frac{d^2}{4} < b < 0$. The system is not controllable since it is regular with $b \geq -\frac{d^2}{4}$. However it is controllable from e if $f \neq 0$. To see that consider the eigenvalues of $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$. There are equal to

$$\frac{d \pm \sqrt{d^2 + 4b}}{2}$$

hence positive, so that the three eigenvalues of the linearized system are positive, the third one being d.

According to $f \neq 0$, the linearized system is controllable and the attainable set $\mathcal{A}$ from the identity contains a neighbourhood W of the identity. But for a simply connected nilpotent group the exponential mapping is a diffeomorphism and W is the image by exp of some neighbourhood V of 0 in $\mathfrak{g}$. For the control $u = 0$ the flow of the system is φ_t, the one of $\mathcal{X}$, and for all $t \geq 0$ the set

$$\varphi_t(W) = \varphi_t(\exp(V)) = \exp(e^{tD}V)$$

is included in $\mathcal{A}$. But the eigenvalues of D being positive the set $\cup_{t\geq 0} e^{tD}V$ is equal to $\mathfrak{g}$ and $\mathcal{A}$ is equal to G (see [AK13] for this idea).

In conclusion :

Theorem 8 *For $d > 0$, $-\dfrac{d^2}{4} < b < 0$, and $f \neq 0$, the system is controllable from e but not controllable.*

One could think that the difference between the behaviour of linear systems on semisimple Lie groups and the Heisenberg group is due to the fact that the derivations are inner on semisimple Lie algebras, while on the Heisenberg group the derivation associated to a one-input linear system that verifies the rank condition cannot be (see [Jouan102]).

But actually the same phenomenon appears on the 2-dimensional affine group, though all derivations are inner. Consider on $Aff_+(2)$ the system in normal form

$$(\Sigma_N) \qquad \left\{ \begin{array}{rl} \dot{x} = & u\alpha x \\ \dot{y} = & x - 1 + by \end{array} \right. \qquad \text{with} \qquad \alpha \neq 0,$$

and assume $b > 0$. As the ad-rank condition holds, the set $\mathcal{A}$ is a neighbourhood of the identity $e = (1, 0)$ and it is easy to see that $\mathcal{D}^1 G$ is included in $\mathcal{A}$. Following the same lines as in the proof of Proposition 4, we get $\mathcal{A} = Aff_+(2)$, so that (Σ_N) is controllable from e, but not controllable since $b > 0$.

Proposition 11 *For $b > 0$ the linear system in normal form (Σ_N) on $Aff_+(2)$ is controllable from the identity but not controllable.*

Acknowledgments. The authors wish to express their thanks to Saïd Naciri for pointing an error in the proof of Theorem 5.

Bibliographie

[AK13] V. Ayala and E. Kizil *Null controllability on Lie groups*, Proyecciones (Antofagasta) vol.32 no.1 Antofagasta mar. 2013.

[AS93] V. Ayala and L. San Martin *Controllability of nilpotent systems*, Report IC/93/30, ICTP, Trieste, 1993.

[AT99] V. Ayala and J. Tirao *Linear control systems on Lie groups and Controllability*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol 64, AMS, 1999, 47-64.

[Ayala95] V. Ayala *Controllability of nilpotent systems*, Geometry in nonlinear control and differential inclusions (Warsaw, 1993), 35-46, Banach Center Publ., 32, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995.

[Boothby] W.M. Boothby *An Introduction to Differentiable manifolds and Riemannian Geometry* Academic Press, 1986.

[Bourbaki1] N. Bourbaki *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 1*, CCLS, 1972.

[Bourbaki2] N. Bourbaki *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 2 et 3, CCLS, 1972.

[Brockett72] R.W. Brockett *System Theory on Group Manifolds and Coset Spaces*, SIAM J. Control, Vol.10, No 2, 265-284 (1972).

[CM05] F. Cardetti et D. Mittenhuber *Local controllability for linear control systems on Lie groups*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol.11, N0. 3, July 2005, 353-373.

[Dasilva14] A. Da Silva *Control sets of restricted linear systems on Lie groups*, arXiv :1412.3179

[Dasilva15] A. Da Silva *Controllability of linear systems on solvable Lie groups*, arXiv :1411.5979

[DathJouan14] M.Dath and Ph. Jouan *Controllability of linear systems on low dimensional Nilpotent and solvable Lie groups*, journal of Dynamical and Control Systems, 2014, DOI : 10.1007/s10883-014-9258-z.

[Gauthier84] J.P.Gauthier *Structure des systèmes non linéaires*, édition du CNRS, Paris, 1984.

[GS90] K.A. Grasse and H.J. Sussmann *Global controllability by nice controls*, Nonlinear controllability and optimal control, 33-79, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 133, Dekker, New York, 1990.

[JK81] V. Jurdjevic and I. Kukpa *Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces* Ann. Inst. Fourier,31,4(1981), 151-179.

[J.Lafontaine] Jacques Lafontaine *Introduction aux variétés différentielles.*

[Jouan11] Ph.Jouan *Mémoire HDR* .

[JouanAX08] Ph. Jouan *Equivalence of Control Systems with Linear Systems on Lie Groups and Homogeneous Spaces* ESAIM : Control Optimization and Calculus of Variations, 16 (2010) 956-973.

[Jouan10] Ph. Jouan *Finite Time and Exact Time Controllability on Compact Manifolds,* Journal of Mathematical Sciences, Vol.17, N0 4 (2011) 591-616.

[Jouan101] Ph. Jouan *Invariant measures and controllability of finite systems on compact manifolds*, ESAIM : Control Optimization and calculus of variation, 18 (2012) 643-655.

[Jouan102] Ph. Jouan *Controllability of Linear Systems on Lie Groups*, Journal of Dynamical and control systems, Vol. 17, N0 4 (2011) 591-616.

[Jouan16] P. Jouan *Controllability of linear systems on semi-simple Lie groups*, en préparation.

[Jurdjevic97] V. Jurdjevic *Geometric control theory* , Cambridge university press, 1997.

[Markus81] L. Markus *Controllability of multitrajectories on Lie groups*, Dynamical systems and turbulence, warwick 1980, PP. 250-265, LN in Math.,898, Springer, Berlin-New York, 1981.

[NvdS90] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer 1990.

[R.Godement] Roger Godement *Introduction à la théorie des groupes de Lie.*

[SA01] L. San Martin and V. Ayala *Controllability properties of a class of control systems on Lie Groups* Nonlinear control in the year 2000, Vol. 1 (Paris), 83–92, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 258, Springer, London, 2001.

[Sachkov97] Yu.L. Sachkov *Controllability of right-invariant systems on solvable Lie groups*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 3, No. 4, 1997, 531-564.

[Sachkov00] Yu.L. Sachkov *Controllability of Invariant Systems on Lie Groups and Homogeneous Spaces*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 100, No. 4, 2000.

[Sachkov96] Yu.L. Sachkov *Controllability of hypersurface and solvable invariant system*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol.2, N0 1, 55-67.

[Sachkov09] Yu.L. Sachkov *Control Theory on Lie groups*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 156, No. 3, 2009.

[SanMartin92] L. San Martin *Nonreversibility of Subsemigoups of Semi-Simple Lie Groups* Semigroup Forum Vol. 44 (1992) 376-387.

[Sontag98] E.D.Sontag *Mathematical Control Theory*, second edition, Springer, New-York, 1998.

[ST95] L. San Martin and P. Tonelli *Semigroup actions on homogeneous spaces*, Semigroup Forum Vol. 50 (1995) 59-88.

[Sussmann73] H.J. Sussmann *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180, 1973, 171-188.

[Sussmann76] H.J. Sussmann *Some properties of vector field systems that are not altered by small perturbations*, J. Differential equations, 20 (1976), 292-315.