

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



ÉCOLE DOCTORALE : MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FACULTÉ (OU ÉCOLE) : SCIENCES ET TECHNIQUES

Année : 2014 - 2015 N° d'ordre :

THÈSE DE DOCTORAT

Mention : MATHÉMATIQUES
Spécialité : ANALYSE

Présentée par :

Moussa Barry

**Titre: Système de Cauchy pour opérateurs
Parabolique et Hyperbolique**

Soutenue le 15/05/2015 devant le jury composé de :

Président : Diaraf Seck Professeur UCAD

Rapporteurs : Benjamin MAMPASSI Professeur UCAD,

Gisèle Mophou LOUDJOUM Professeur Université des Antilles et de la Guyane

Somdouda SAWADOGO Maître de conférences Université de Ouagadougou

Examineurs :

Abdoulaye SÈNE Maître de Conférences UCAD

Directeurs de thèse : Gabriel Birame NDIAYE Maître de Conférences UCAD

Ousseynou NAKOULIMA Professeur émérite Université des Antilles et de la Guyane,
Professeur à l'université Ouaga 3S

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
ÉCOLE DOCTORALE: MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FACULTÉ (OU ÉCOLE) : SCIENCES ET TECHNIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Résumé

Nom et prénoms du Candidat : BARRY Moussa

Titre de la thèse: Système de Cauchy pour opérateurs Parabolique et Hyperbolique

Date et lieu de soutenance :.....

Jury : Président : Benjamin MAMPASSI Professeur UCAD
Membres :

Ousseynou NAKOULIMA Professeur émérite Université des Antilles et de la Guyane,
Professeur à Ouaga 3 S

Djaraf SECK Professeur UCAD

Gisèle Mophou LOUDJOUM Professeur Université des Antilles et de la Guyane

Gabriel Birame NDIAYE Maître de Conférences UCAD

Abdoulaye SÈNE Maître de Conférences UCAD

Somdouda SAWADOGO Maître de conférences Université de Ouagadougou

Résumé :

Dans cette thèse nous nous intéressons au problème de contrôle d'un système de Cauchy pour opérateur Parabolique puis pour opérateur Hyperbolique. Le système associé au deux cas est singulier ainsi, plutôt que d'utiliser la méthode classique du contrôle optimal qui consiste à considérer le contrôle v et l'état z séparément, nous considérerons alors le couple contrôle-état (v, z) . Après avoir établi l'existence et l'unicité du couple optimal, nous établissons les systèmes d'optimalités singuliers pour deux cas particuliers. Dans les deux systèmes d'optimalités nous sommes parvenus à découpler le contrôle et l'état grâce à la méthode de Pénalisation.

Mots clés : Opérateur Parabolique, Opérateur Hyperbolique, Système de Cauchy, couple contrôle état, Système d'optimalités singuliers forts, Système d'optimalités singuliers faibles, pénalisation, couples admissibles, Système d'optimalités approché.

SYSTÈME DE CAUCHY POUR OPÉRATEURS PARABOLIQUE ET HYPERBOLIQUE

12 avril 2015

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Contrôle de systèmes distribués non singuliers	5
1.2	Contrôle de systèmes distribués singuliers	9
2	Pré requis : Les fondamentaux	15
2.1	Espaces de Sobolev	15
2.2	Formule d'intégration par parties	19
2.3	Problèmes d'évolution de type parabolique	20
2.4	Problème d'évolution de type hyperbolique	21
3	Système de Cauchy pour opérateur parabolique	25
3.1	Introduction	25
3.2	Position du problème	25
3.3	Méthode de Pénalisation	33
3.3.1	Convergence de la méthode	38
3.3.2	Système d'optimalité approché	42
3.4	Système d'optimalité singulier fort	45
3.5	Système d'optimalité singulier faible	47
4	Système de Cauchy pour opérateur hyperbolique	53
4.1	Introduction	53
4.2	Position du problème	53
4.3	Méthode de Pénalisation	61
4.3.1	Système d'optimalité approché	64
4.3.2	Convergence de la méthode	67
4.4	Système d'optimalité singulier fort	72
4.5	Système d'optimalité singulier faible	74
5	Conclusion et perspectives	77

Chapitre 1

Introduction

Les systèmes distribués singuliers trouvent leurs applications dans plusieurs phénomènes tels que le contrôle des réactions enzymatiques (cf J. P. Kernevez [10] et la bibliographie de ce travail), le contrôle de la transmission de l'énergie électrique, le contrôle de la forme des plasmas... L'étude de tels systèmes et en particulier celui de leur contrôle est donc d'un intérêt réel.

Dans cette thèse nous nous intéressons au problème de contrôle de systèmes distribués singuliers pour des opérateurs de type parabolique et de type hyperbolique.

La difficulté de l'étude du problème de contrôle pour ce type de système réside dans le fait que, contrairement au cas classique les problèmes singuliers peuvent admettre ou non des solutions, et lorsqu'ils admettent des solutions ces dernières présentent des phénomènes d'instabilité.

Rappelons alors quelques notions de la théorie du contrôle.

1.1 Contrôle de systèmes distribués non singuliers

Les systèmes distribués sont les systèmes gouvernés par des *équations aux dérivées partielles (e.d.p)* (ou integro-différentielles) ou encore un système dont *l'équation d'état est une e.d.p.* c'est à dire une équation de la forme :

$$\mathcal{A}(y) = \mathcal{B}(v), \tag{1.1}$$

où

- y est l'état du système que l'on étudie
- $\mathcal{A}$ représente un opérateur aux dérivées partielles (ou integro-différentielles), linéaire ou non, stationnaire ou d'évolution (dépendant du temps).

Des conditions supplémentaires aux frontières doivent être ajoutées à l'équation (1.1) et si $\mathcal{A}$ est un opérateur d'évolution il est nécessaire d'ajouter des conditions initiales.

Exemple 1.1 (*Exemples d'opérateurs $\mathcal{A}$*).

- *Opérateur stationnaire linéaire du type elliptique :*

$$\mathcal{A} = \Delta \quad (\text{opérateur de Laplace})$$

- *Opérateur stationnaire non linéaire :*

$$\mathcal{A} = \Delta + (Id)^2$$

- *Opérateur d'évolution linéaire du type parabolique :*

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \quad (\text{opérateur de la chaleur})$$

- *Opérateur d'évolution non linéaire :*

$$\mathcal{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + (Id)^2 \quad \blacksquare$$

v est la variable de contrôle ; une variable qui peut-être "*distribuée*" dans le domaine où les phénomènes modélisés par (1.1) sont étudiés ; la variable v peut également apparaître de manière "*frontière*" à travers des conditions aux limites ; c'est ce qui est pris en compte par la forme (formelle) de (1.1) avec l'opérateur $\mathcal{B}$.

Exemple 1.2 (*Exemples de contrôles*)

Ω étant un ouvert de frontière Γ , $Q = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

- a) *On considère le système :*

$$\begin{cases} \Delta y = f + v & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

le contrôle v est "distribué".

- b) *Soit le système :*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q \\ y = v & \text{sur } \Sigma \\ y(0) = y^0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

le contrôle v est "frontière". $\blacksquare$

Dans la théorie classique du contrôle de systèmes distribués, il est supposé que :

$$(\mathcal{H}_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } v \text{ choisi dans un ensemble convenable, l'équation} \\ (1.1) \text{ a une unique solution dans un ensemble convenable.} \end{array} \right.$$

Désignons alors par $y(v)$ la solution de l'équation (1.1) ; *c'est l'état du système.*

On définit ainsi une application :

$$v \longrightarrow y(v) \tag{1.2}$$

contrôle état

On introduit ensuite la *fonction coût* qui à chaque v de l'ensemble des contrôles associe un nombre $J(v)$ donné par :

$$J(v) = \phi(y(v)) + \psi(v). \tag{1.3}$$

Dans (1.3) les fonctionnelles ϕ et ψ sont respectivement définies sur l'ensemble des états et sur l'ensemble des contrôles et sont à valeurs réelles. Dans la plupart des applications, la fonctionnelle ψ est une fonction d'une norme de v , elle définit donc un *espace de Banach* $\mathcal{U}$. Le choix de l'espace $\mathcal{U}$ où *prendre le contrôle* v est donc *imposé par la fonction coût*. Une fois $\mathcal{U}$ fixé, on sait où est $\mathcal{B}(v)$ pour v dans $\mathcal{U}$ ce qui fixe (à peu près) le cadre fonctionnel où résoudre l'équation (1.1) ; on introduit ainsi un espace $\mathcal{Y}$ de Banach où l'on cherche y . Dans ce contexte l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est précisée comme suit :

$$\text{Pour } v \in \mathcal{U}, \text{ l'équation (1.1) admet une unique solution } y(v) \in \mathcal{Y}. \tag{1.4}$$

Toujours dans la théorie classique, une hypothèse souvent faite est que :

$$(\mathcal{H}_2) : \text{ L'application } v \longrightarrow y(v) \text{ de } \mathcal{U} \text{ dans } \mathcal{Y} \text{ est différentiable.}$$

Cette hypothèse est complétée par :

$$(\mathcal{H}_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Les fonctionnelles } y \longrightarrow \phi(y) \text{ et } v \longrightarrow \psi(v) \text{ sont différentiables de} \\ \mathcal{Y} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et de } \mathcal{U} \text{ dans } \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Le problème de contrôle est alors de trouver :

$$\inf J(v) \tag{1.5}$$

lorsque v parcourt $\mathcal{U}$ ou un sous-ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ de $\mathcal{U}$ de contrôles dits admissibles ; l'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ exprime *les contraintes* sur v donc

$$v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{1.6}$$

Le cas où v parcourt $\mathcal{U}$ tout entier est dit "sans contraintes". Dans ce cas $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$.

Exemple 1.3 Reprenons le **b)** de l'exemple 1.2 qui peut modéliser la distribution de la température dans un milieu donné. On peut associer à l'état du système la fonction coût :

$$J(v) = |y - 25|^2 + N|v|^2$$

25° étant une température idéale, y l'état du système et v le contrôle qui peut représenter le coût. Trouver alors u qui réalise $\inf J(v)$ revient à trouver u qui amène l'état y le plus près possible de l'état idéal 25° tout en minimisant l'énergie, le coût ■

Cela étant, les objectifs visés en théorie classique du contrôle sont les suivants :

- i) étudier l'existence de $u \in \mathcal{U}_{ad}$ réalisant le minimum dans (1.5), on dit alors que u est un *contrôle optimal*,
- ii) donner des *conditions nécessaires* et, si possible, *suffisantes* exprimant que u est contrôle optimal ;
- iii) obtenir des propriétés du (ou des) contrôle(s) optimal(aux) à partir des conditions ii) ;
- iv) obtenir des algorithmes numériques.

A cette liste peuvent aussi s'ajouter les questions de *contrôlabilité* et *d'observabilité*.

Pour établir **i)** nous utiliserons systématiquement, pour le sujet qui nous concerne dans cette thèse, le résultat classique du contrôle optimal suivant :

Théorème 1.1 Soit $J : \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On suppose que :

1. $\mathcal{U}_{ad}$ est non vide, convexe et fermé (dans $\mathcal{U}$)
2. J est propre i.e $\exists v_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ telle que $J(v_0) \neq +\infty$
3. J est coercive au sens $\lim_{|v| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$
4. J s.c.i faible de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$
5. J est strictement convexe

alors il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ unique telle que $J(u) \leq J(v)$, $\forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.

Pour établir **ii)** nous utiliserons le résultat suivant :

Théorème 1.2 Soit $J : \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, G -differentiable.

Si J admet un minimum u sur $\mathcal{U}_{ad}$, convexe, fermé non vide de $\mathcal{U}$ alors :

$$J'(u)(v - u) \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Si de plus $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ (cas sans contrainte) et si u est un minimum, on a l'équation d'Euler :

$$J'(u) = 0.$$

Enfin et pour terminer cette brève présentation de la théorie classique, on décrit maintenant et toujours de manière formelle, la *structure* des conditions nécessaires pour le problème (1.5).

Soit donc u un contrôle optimal et soit $y(u) = y$ l'état optimal correspondant. Il existe alors un triplet (u, y, p) vérifiant le système d'optimalité (S.O) suivant :

$$(S.O) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(y) = \mathcal{B}(u) \\ \mathcal{A}'(y)^* p = \phi'(y) \\ (\mathcal{B}'(u)^* p + \psi'(u), v - u) \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases}$$

Dans (S.O), $\mathcal{A}'(y)^*$ (resp. $\mathcal{B}'(u)^*$) désigne l'adjoint de la dérivée, supposée exister, de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) au point y (resp. u). Grâce à $(\mathcal{H}_1)$, l'état adjoint p est défini de manière unique par l'équation $(S.O)_2$.

Il y'a lieu d'insister sur ce point car dans les cas singuliers, la situation sera différente puisque l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ ne sera pas satisfaite.

Dans $(S.O)_3$, on suppose généralement que $\mathcal{U}_{ad}$ est convexe ; l'inégalité $(S.O)_3$ est la traduction de la condition d'optimalité dans le théorème 1.2.

1.2 Contrôle de systèmes distribués singuliers

Les systèmes distribués singuliers sont les systèmes dont l'équation d'état présente des singularités telles que :

- des instabilités
- des phénomènes d'explosion
- des solutions multiples et des phénomènes de bifurcation.

Des séries d'applications (phénomènes à états multiples dans des réactions chimiques, contrôle de structures flexibles instables, problèmes périodiques (en temps) se posant dans le transport d'énergie électrique, etc.) nous poussent à abandonner l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$. Nous sommes ainsi amenés à considérer des situations où l'équation (1.1) n'a soit pas de solution, soit possède un nombre arbitrairement élevé et même infini de solutions, soit des solutions instables.

L'approche dans ce cas est le suivant : on se donne à partir de la fonction coût, les espaces de Banach $\mathcal{U}$ et $\mathcal{Y}$ et on considère l'ensemble des couples (v, z) qui vérifient :

$$v \in \mathcal{U}, z \in \mathcal{Y} \tag{1.7}$$

et

$$\mathcal{A}(z) = \mathcal{B}(v) \quad (1.8)$$

Tout couple (v, z) vérifiant (1.7)(1.8) est appelé couple "contrôle-état".

Il n'est pas indispensable que (1.8) admette une solution unique ou une infinité de solutions pour un v donné ; il peut arriver aussi que pour v donné (1.8) n'admette pas de solution dans $\mathcal{Y}$; il suffit seulement de veiller à ce que l'ensemble des couples (v, z) liés par (1.7)(1.8) *ne soit pas vide* !

Les contraintes s'expriment par :

$$v \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}, \quad z \in \mathcal{Y}_{ad} \subset \mathcal{Y}; \quad (1.9)$$

et il faut vérifier, dans chaque situation particulière, que l'ensemble des *couples contrôle-état* (v, z) *admissibles*, c'est-à-dire vérifiant (1.8)(1.9) *n'est pas vide*.

La fonction coût est dans ce cas une fonction du couple (v, z) :

$$J(v, z) = \phi(z) + \psi(v), \quad (1.10)$$

le problème de contrôle est alors le suivant :

$$\inf J(v, z), \quad (v, z) \text{ admissible} \quad (1.11)$$

Si (u, y) est une solution de (1.11), on dit que c'est un *couple optimal*.

Remarque 1.1 *Les problèmes posés de la sorte contiennent tous les cas étudiés auparavant. En effet, si l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée alors il suffit de remplacer dans (1.10), z par la solution $y(v)$ de (1.8) car c'est le seul choix possible ; on retrouve alors la situation classique rappelée à la section précédente.*

Comme dans le cas classique, les objectifs principaux sont :

- étudier l'existence de couples optimaux,
- donner des *conditions nécessaires* et, si possible, *suffisantes* pour qu'un couple (u, y) soit un couple optimal ;
- obtenir des propriétés des couples optimaux ;
- obtenir des algorithmes numériques d'approximation.

Nous verrons que les conditions nécessaires s'expriment par un "*système d'optimalité singulier*" en abrégé (S.O.S) qui a *formellement la même structure que le* (S.O).

En d'autres termes si (u, y) est un couple optimal, il existe un triplet (u, y, p) solution du système d'optimalité singulier :

$$(S.O.S) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(y) = \mathcal{B}(u) \\ \mathcal{A}'(y)^* p = \phi'(y) \\ (\mathcal{B}'(u)^* p + \psi'(u), v - u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \end{cases}$$

Il est formellement identique à (S.O) mais a une différente interprétation. L'équation " $\mathcal{A}(y) = \mathcal{B}(u)$ " dans (S.O.S) n'est pas "bien posée" au sens où l'opérateur $\mathcal{A}'(y)^*$ n'est pas inversible. Dans le (S.O.S) il faut donc considérer *globalement* le système en (u, y, p) .

Présentation de la thèse

La suite de ce travail est divisé en quatre chapitres.

Dans le chapitre 2 nous revenons sur quelques notions fondamentales telles que les problèmes elliptiques, les problèmes d'évolutions de types parabolique et hyperbolique. En effet, étant intéressés par des systèmes de Cauchy impliquant des opérateurs parabolique et hyperbolique, il nous a semblé nécessaire pour bien aborder le travail de revenir sur les solutions des problèmes d'évolution, leur existence, leur unicité. Les espaces de Sobolev étant par prédilection nos espaces naturels de travail, nous avons là aussi rappelé quelques résultats importants tels que les espaces $H^s(\Omega)$, ($s \in \mathbb{R}^*$) et la notion de trace.

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à l'étude de problème de contrôle pour un système de Cauchy pour opérateur parabolique d'une part et pour un système de Cauchy pour opérateur hyperbolique d'autre part.

Un système de Cauchy pour opérateur parabolique est un système du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = 0 & \text{dans } Q \\ z = v_0, \frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 & \text{sur } \Sigma_0 \\ z(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.12)$$

Les données de Cauchy pour l'opérateur parabolique sont les données en espace sur une partie de la frontière de Ω , et la donnée en temps $t = 0$.

Un système de Cauchy pour opérateur hyperbolique est un système du type :

$$\begin{cases} z'' - \Delta z = 0 & \text{dans } Q \\ z = v_0, \frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 & \text{sur } \Sigma_0 \\ z(x, 0) = \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.13)$$

Remarque 1.2 Cela étant et s'agissant des problèmes bien posés, rappelons d'abord que :

* pour des problèmes aux limites homogènes :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & \text{dans } Q \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.14)$$

où $f \in L^2(Q)$, on peut utiliser les techniques classiques suivantes pour établir l'existence et l'unicité de la solution :

- le théorème de Hille-Yoshida
- la théorie spectrale
- la méthode dite de variation des constantes
- la méthode de Galerkin

* pour des problèmes aux limites non homogènes :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y &= f & \text{dans } Q \\ y &= g & \text{sur } \Sigma \\ y(0) &= y_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.15)$$

nous avons alors deux cas :

- e) Si g est assez régulière, par relèvement on peut introduire $\tilde{g}$ appartenant à un ensemble adéquat telle que $\tilde{g}|_{\Sigma} = g$ et poser $\tilde{y} = y - \tilde{g}$ pour se ramener au (1.14).
- f) Si $g \in L^2(\Sigma)$, on pourra utiliser la méthode par transposition (se référer par exemple aux articles de J. L. Lions et E. Magenes dans [15])

* On notera que les problèmes (1.12) et (1.13) ne sont pas du type (1.14) et (1.15).

Le chapitre 5 conclue ce travail et propose quelques perspectives.

Chapitre 2

Pré requis : Les fondamentaux

Dans ce chapitre nous revenons sur quelques résultats classiques. Pour plus d'approfondissement et pour la justification des résultats on pourra consulter en particulier L.C.Evans [6] et Lions-Magenes [14].

2.1 Espaces de Sobolev

On note $C_c^\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble défini par :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \varphi \text{ infiniment différentiable} / \text{supp } \varphi \subset K, K \subset \Omega \text{ et } K \text{ compact} \}$$

Toute fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelée fonction test.

Définition 2.1 *Supposons $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$, et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. On dira que v est la dérivée partielle faible d'ordre α de u et on écrit :*

$$D^\alpha u = v$$

si :

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.1)$$

Une dérivée partielle faible d'ordre α de u , si elle existe, est définie de manière unique p.p.

On pose alors la définition suivante :

Définition 2.2 *L'espace de Sobolev, noté $W^{k,p}(\Omega)$, est l'ensemble des fonctions localement sommables $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que pour chaque multi-indice α avec $|\alpha| \leq k$ ($k \in \mathbb{N}$), $D^\alpha u$ existe au sens de la dérivée faible et appartient à $L^p(\Omega)$.*

Exemple 2.1

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \in L^2(\Omega) \text{ telle que}$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n.$$

Remarque 2.1 Si $p = 2$, on note usuellement :

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), \quad k = 0, 1, \dots$$

$H^k(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$ est un espace de Hilbert.

Définition 2.3 Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, on définit une norme usuelle par :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \inf\{c; |D^\alpha u| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $1 \leq p < \infty$, $\left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme équivalente.

Définition 2.4 Soit $(u_m)_{m \geq 1}, u \in W^{k,p}(\Omega)$. Nous dirons que u_m converge vers u dans $W^{k,p}(\Omega)$ et on écrit :

$$u_m \rightarrow u \text{ dans } W^{k,p}(\Omega)$$

si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Définition 2.5 Nous noterons $W_0^{k,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Ainsi $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si et seulement si il existe une suite de fonctions $(u_m) \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_m \rightarrow u$ dans $W^{k,p}(\Omega)$. Maintenant si Γ est régulière on montre que $W_0^{k,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $u \in W^{k,p}(\Omega)$ telles que :

$$D^\alpha u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ pour tout } |\alpha| \leq k - 1.$$

On note :

$$H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega).$$

Théorème 2.1 Pour chaque $k = 1, \dots$ et $1 \leq p \leq \infty$ l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Nous passons maintenant à la notion de trace.

Théorème 2.2 (*Théorème de trace*). *Supposons Ω borné et Γ de classe C^1 . Alors il existe un opérateur linéaire borné :*

$$\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Gamma)$$

telle que :

1. $\gamma_0 u = u|_{\Gamma}$ si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et
2. $\|\gamma_0 u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Pour chaque $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec la constante C dépendant uniquement de p et Ω .

$\gamma_0 u$ est appelée la trace de u sur Γ .

Théorème 2.3 (*Trace-zero de fonctions de $W^{1,p}$*). *Supposons Ω borné et Γ de classe C^1 , alors :*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p} / \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \quad (2.2)$$

L'espace H^{-1}

Comme nous le verrons dans l'étude des EDP elliptiques, paraboliques et hyperboliques, il est important d'avoir une caractérisation explicite du dual de l'espace H_0^1 .

Définition 2.6 *Nous noterons par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.*

En d'autres termes $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace des formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$.

L'espace H^s ($s \in \mathbb{R}$)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné. On peut définir une famille d'espaces intermédiaires entre $L^p(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$.

Pour $0 < s < 1$ et $1 \leq p < \infty$, on pose :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s + \frac{n}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{s,p}^2 = \|u\|_{L^p(\Omega)}^2 + \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2(s + \frac{n}{p})}} dx dy.$$

On note : $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$.

On définit enfin $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s > 1$ comme suit : on écrit $s = m + \sigma$ avec m = partie entière de s et on pose ;

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega), \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| = m\}.$$

On définit aussi $W^{s,p}(\Gamma)$ où Γ est une variété régulière (par exemple le bord d'un ouvert régulier).

Pour plus de détails concernant les espaces de Sobolev fractionnaire on pourra consulter Lions-Magenes [14]. ■

Nous aurons aussi besoin des espaces incluant le temps.

Plus précisément

soit X un espace de Banach réel, muni d'une norme $\| \cdot \|$.

Définition 2.7 *L'espace $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que :*

1.

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ pour } 1 \leq p < \infty \text{ et}$$

2.

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf \{C; \|u(t)\| \leq C \text{ p.p. sur } X, 0 \leq t \leq T\} \text{ pour } p = \infty.$$

Définition 2.8 *L'espace*

$$C([0, T]; X)$$

comprend toutes les fonctions continues $u : [0, T] \rightarrow X$ avec

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Définition 2.9 *Soit $u \in L^1(0, T; X)$. Nous dirons que $v \in L^1(0, T; X)$ est la dérivée faible de u et on écrit : $u' = v$ si :*

$$\int_0^T u(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^T v(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0, T]).$$

Définition 2.10 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $u \in L^p(0, T; X)$ telles que u' existe au sens faible et appartient à $L^p(0, T; X)$. De plus :*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T (\|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \inf \{C; \|u(t)\| + \|u'(t)\| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega, 0 \leq t \leq T\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Nous noterons : $H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$.

Théorème 2.4 *Supposons que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, avec $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Alors :*

1. $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(\Omega))$

2. La fonction

$$t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

est absolument continue, avec

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle \text{ p.p tout } 0 \leq t \leq T.$$

3. De plus, nous avons l'estimation :

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \right). \quad (2.3)$$

La constante C dépendant seulement de T .

2.2 Formule d'intégration par parties

Proposition 2.1 Ω désigne un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ , $n(x)$ est la normale unitaire extérieure au domaine Ω avec x décrivant le bord Γ de Ω . Soient u et v des fonctions de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ prolongeables continûment sur l'adhérence $\overline{\Omega}$ (donc sur le bord Γ) et dont les dérivées sont de carré intégrables.

On a la relation d'intégration par parties suivante :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} u v n^i \, d\tau. \quad (2.4)$$

On peut également déduire toute une série de formules de la relation (2.4) dont en particulier la suivante qui nous sera utile dans la suite de cette thèse :

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\tau - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} u \, d\tau \quad (2.5)$$

où Δu est le Laplacien :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (2.6)$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} n^i \quad \text{sur } \Gamma \text{ où } \vec{n} = (n^1, n^2, \dots, n^n). \quad (2.7)$$

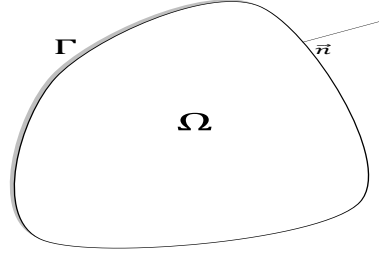


FIGURE 2.1 – Domaine ouvert borné régulier

2.3 Problèmes d'évolution de type parabolique

Les EDP paraboliques du second ordre sont des généralisations naturelles de l'équation de la chaleur.

• Equations paraboliques

Dans cette partie on suppose que Ω est un ouvert, borné de $\mathbb{R}^n$, et $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$ pour un temps $T > 0$ fixé.

Considérons le problème avec condition au bord et condition initiale :

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{dans } \Omega_T \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ u = g & \text{sur } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.8)$$

où $f : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont données et $u : \Omega_T \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, $u = u(x, t)$. La lettre L désigne pour chaque temps t un opérateur différentiel partiel du second ordre, ayant la forme :

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u \quad (2.9)$$

pour des coefficients donnés a^{ij}, b^i, c ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Définition 2.11 On dira que l'opérateur différentiel partiel $\frac{\partial}{\partial t} + L$ est (uniformément) parabolique s'il existe une constante $\theta > 0$ telle que :

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (2.10)$$

$$\forall (x, t) \in \Omega_T, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 2.2 *Il faut noter en particulier que pour chaque temps fixé $0 \leq t \leq T$, l'opérateur L est un opérateur uniformément elliptique en la variable spatiale x .*

Un exemple immédiat est le cas où $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$, $b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$ dans quel cas $L \equiv -\Delta$ et l'EDP $u_t + Lu = 0$ devient l'équation de la chaleur.

• **Solutions faibles**

Supposons toujours que $a^{ij} = a^{ji}$, ($i, j = 1, \dots, n$). et que L a la forme (2.9). On définit maintenant, par analogie avec la notation introduite dans la partie précédente, la forme bilinéaire fonction du temps :

$$B(u, v; t) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) uv \right) dx \quad (2.11)$$

pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ et p.p. tout $0 \leq t \leq T$.

Définition 2.12 *On dira qu'une fonction*

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ avec } u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

est une solution faible du problème parabolique avec condition initiale et condition au bord (2.8) si :

1.

$$\langle u', v \rangle + B(u, v; t) = \langle f, v \rangle$$

pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$ et p.p. tout $0 \leq t \leq T$ et

2.

$$u(0) = g.$$

Théorème 2.5 *(Existence et unicité d'une solution faible). Il existe une unique solution faible de (2.8).*

2.4 Problème d'évolution de type hyperbolique

Les équations hyperboliques du second degré sont des généralisations naturelles de l'équation des ondes.

• **Equations hyperboliques**

Comme dans la partie ci-dessus, notons $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, où $T > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, borné.

Considérons alors le problème avec condition initiale et condition au bord :

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu = f & \text{dans } \Omega_T \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times [0, T] \\ u = g, u_t = h & \text{sur } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.12)$$

où $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ et $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont données et $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue, $u = u(x, t)$. La lettre L désigne pour chaque temps t un opérateur différentiel partiel du second ordre, ayant la forme :

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x, t) u_{x_i} + c(x, t) u \quad (2.13)$$

pour des coefficients donnés a^{ij}, b^i, c ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Définition 2.13 *On dira que l'opérateur différentiel partiel $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$ est (uniformément) hyperbolique s'il existe une constante $\theta > 0$ telle que :*

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (2.14)$$

$\forall (x, t) \in \Omega_T, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Un exemple immédiat est le cas où $a^{ij} \equiv \delta_{ij}, b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$ dans quel cas $L \equiv -\Delta$ et l'EDP $u_{tt} + Lu = 0$ devient l'équation des ondes. Les EDP hyperboliques du second ordre générales modélisent la transmission des ondes dans des milieux hétérogènes non isotropes.

- **Solutions faibles**

Supposons d'abord que L a la forme (2.13). Nous supposons maintenant que :

$$a^{ij}, b^i, c \in C^1(\overline{\Omega_T}), \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.15)$$

$$f \in L^2(\Omega_T) \quad (2.16)$$

$$g \in H_0^1(\Omega), h \in L^2(\Omega). \quad (2.17)$$

Nous supposons toujours que $a^{ij} = a^{ji}$, ($i, j = 1, \dots, n$).

Introduisons la forme bilinéaire fonction du temps :

$$B(u, v; t) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) uv \right) dx \quad (2.18)$$

pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ et p.p. tout $0 \leq t \leq T$.

Définition 2.14 *On dira qu'une fonction*

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ avec } \mathbf{u}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \mathbf{u}'' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

est une solution faible du problème hyperbolique avec condition initiale et condition au bord (2.12) à condition que :

1.

$$\langle \mathbf{u}'', v \rangle + B(\mathbf{u}, v; t) = \langle \mathbf{f}, v \rangle$$

pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$ et p.p. tout $0 \leq t \leq T$ et

2.

$$\mathbf{u}(0) = g, \quad \mathbf{u}'(0) = g.$$

Théorème 2.6 (*Existence et unicité d'une solution faible*). *Il existe une solution faible unique de (2.12).*

Chapitre 3

Système de Cauchy pour opérateur parabolique

3.1 Introduction

Des auteurs tels que J.L. Lions [12], G.Mophou, O.Nakoulima [20] entre autres, se sont intéressés à ce genre de problèmes dans le cas elliptique. Dans [20], G.Mophou et O.Nakoulima proposent une approche assez intéressante en introduisant dans l'équation d'état et dans les conditions aux bords des termes supplémentaires, régularisant ainsi le système. Nous adopterons, quant à nous, la même démarche que J.L.Lions dans [12] pour étudier le cas parabolique et plus loin le cas hyperbolique. L'une des difficultés dans ce travail sera d'exhiber des cas pour lesquels l'ensemble des couples admissibles est non vide, ce qui passe par la justification de l'existence des traces et la précision des espaces dans lesquels elles "vivent".

3.2 Position du problème

Soit Ω un ouvert de frontière $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ tel qu'indiqué sur FIGURE 3.1. Soit $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ et $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$. Dans Q nous considérons l'état z d'un système soumis au contrôle $v = (v_0, v_1)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z & = & 0 \quad \text{dans } Q \\ z(x, 0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ z = v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 & \text{sur } \Sigma_0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Soient $\mathcal{U}_{ad}^0$ et $\mathcal{U}_{ad}^1$ deux sous ensembles convexes fermés, non vides de $L^2(\Sigma_0)$.

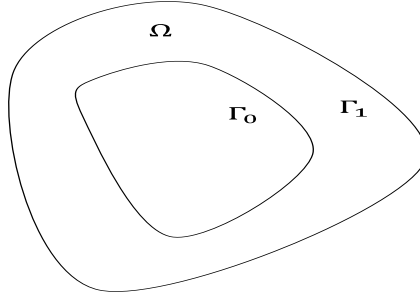


FIGURE 3.1 –

On dit qu'un couple (v, z) est admissible si

$$\begin{cases} v = (v_0, v_1) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1, & z \in L^2(Q) \\ (v, z) \text{ vérifie (3.1)} \end{cases} \quad (3.2)$$

et

$$z|_{\Sigma_1} \in L^2(\Sigma_1). \quad (3.3)$$

On pose $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1$ et on désigne par $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ l'ensemble des couples admissibles (v, z) .

Pour $(v, z) \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$, considérons alors la fonction coût :

$$J(v, z) = \frac{1}{2} |z - z_d|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{N_0}{2} |v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \frac{N_1}{2} |v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2. \quad (3.4)$$

Le problème auquel nous nous intéressons est alors :

$$\inf_{(v, z) \text{ admissible}} J(v, z). \quad (3.5)$$

Remarque 3.1 Les conditions aux frontières $(3.1)_3$, (3.3) et la condition initiale $(3.1)_2$ ont un sens. En effet, si $z \in L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = 0$, les traces $z|_{\Sigma}$ et $\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma}$ existent et sont respectivement éléments de $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)$ et $H^{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}}(\Sigma)$ (cf [15] vol II, thm 10.2 pp 49) ; les traces $z(0)$ et $z(T)$ existent et sont des éléments de $H^{-1}(\Omega)$ (cf [15] vol II, thm 10.4 pp 55).

Remarque 3.2 L'une des conditions aux limites $(3.1)_3$ combiné avec (3.3) entraîne nécessairement que $z \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(Q)$, en effet en écrivant $z = \chi_{\Sigma_0} \times v_0 + \chi_{\Sigma_1} \times z_{\Sigma_1}$ (où $\chi_{\Omega}(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et 0 sinon) on peut se ramener dans la même situation que l'exemple 1 de la page 81 de Lions-Magenes vol II.

Cela étant, voici maintenant des exemples où l'ensemble $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ des couples (v, z) admissibles est non vide.

Exemple 3.1 *Supposons que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = L^2(\Sigma_0) \times \mathcal{U}_{ad}^1, \\ \mathcal{U}_{ad}^1 = \text{ensemble convexe fermé de } L^2(\Sigma_0) \\ \text{contenant au moins un élément } v_1 \\ \text{de } H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma_0). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Considérons alors la solution ζ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} L\zeta &= 0 \quad \text{dans } Q \\ \zeta(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} &= v_1 \quad \text{sur } \Sigma_0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

où $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ (dorénavant on adoptera cette notation dans la suite).

Le système (3.7) définit un unique $\zeta \in H^{2,1}(Q)$ (cf [15] vol II, thm 6.2 pp 37 et thm 12.1, pp 60 ou voir résumé pp 65); par conséquent $\zeta|_{\Sigma} \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Sigma)$ (cf [5] vol II, thm 2.1 pp 9) et en particulier $\zeta|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$. Le couple

$$((\zeta|_{\Sigma_0}, v_1), \zeta)$$

est donc admissible, ce qui prouve que l'ensemble des couples admissibles est non vide.

Exemple 3.2 *Supposons que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_{ad}^0 \times L^2(\Sigma_0), \\ \mathcal{U}_{ad}^0 = \text{ensemble convexe fermé de } L^2(\Sigma_0) \\ \text{contenant au moins une fonction } v_0 \text{ de } H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Sigma_0). \end{array} \right. \quad (3.8)$$

On construit ζ par

$$\left\{ \begin{array}{ll} L\zeta &= 0 \quad \text{dans } Q \\ \zeta(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \zeta &= v_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ \zeta &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

alors $\zeta \in H^{2,1}(Q)$ (cf [15] vol II, thm 6.2 pp 37 et thm 12.1, pp 60 ou voir résumé pp 65); et donc $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}|_{\Sigma} \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)$ (cf [5] vol II, thm 2.1 pp 9) et en particulier $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$. Le couple

$$\left(\left(v_0, \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \right), \zeta \right)$$

est donc admissible.

On revient maintenant au cas général du problème (3.5) où l'on suppose que $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ est non vide.

Nous établissons alors le résultat suivant :

Proposition 3.1 *Le problème (3.5) admet une unique solution, le couple optimal (u, y) .*

Preuve. Montrons que $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ est un convexe, fermé.

– Montrons que $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ est convexe.

Soit (v, z) et (w, h) deux éléments de $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$, $\lambda \in [0, 1]$. On a alors :

$$\begin{cases} \lambda Lz &= 0 & \text{dans } Q \\ \lambda z(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \lambda z &= \lambda v_0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ \lambda \frac{\partial z}{\partial \nu} &= \lambda v_1 & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (1-\lambda)Lh &= 0 & \text{dans } Q \\ (1-\lambda)h(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ (1-\lambda)h &= (1-\lambda)w_0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ (1-\lambda)\frac{\partial h}{\partial \nu} &= (1-\lambda)w_1 & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

en additionnant les deux systèmes on obtient :

$$\begin{cases} \lambda Lz + (1-\lambda)Lh &= 0 & \text{dans } Q \\ \lambda z(0) + (1-\lambda)h(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \lambda z + (1-\lambda)h &= \lambda v_0 + (1-\lambda)w_0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ \lambda \frac{\partial z}{\partial \nu} + (1-\lambda)\frac{\partial h}{\partial \nu} &= \lambda v_1 + (1-\lambda)w_1 & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

puisque $\mathcal{U}_{ad}^0, \mathcal{U}_{ad}^1, L^2(Q)$ et $L^2(\Sigma_1)$ sont convexes, on a

$$\begin{cases} \lambda v_0 + (1-\lambda)w_0 \in \mathcal{U}_{ad}^0, \lambda v_1 + (1-\lambda)w_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1, \\ \lambda z + (1-\lambda)h \in L^2(Q) \end{cases}$$

et

$$\lambda z + (1 - \lambda)h \in L^2(\Sigma_1)$$

de plus la linéarité de l'opérateur L entraîne que

$$\left\{ \begin{array}{lll} L(\lambda z + (1 - \lambda)h) & = & 0 \quad \text{dans } Q \\ \lambda z(0) + (1 - \lambda)h(0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \lambda z + (1 - \lambda)h & = & \lambda v_0 + (1 - \lambda)w_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ \lambda \frac{\partial z}{\partial \nu} + (1 - \lambda) \frac{\partial h}{\partial \nu} & = & \lambda v_1 + (1 - \lambda)w_1 \quad \text{sur } \Sigma_0 \end{array} \right.$$

$$(\lambda v + (1 - \lambda)w; \lambda z + (1 - \lambda)h) \text{ vérifie donc (3.1)}$$

par conséquent $\lambda(v, z) + (1 - \lambda)(w, h) \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$ et $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ est convexe.

– Montrons maintenant que $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ est fermé.

On prend $\overline{\mathcal{U}}_{ad}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0) \times H$, avec

$$H = \{z \in L^2(Q), Lz \in L^2(Q), z|_{\Sigma_1} \in L^2(\Sigma_1)\}$$

muni de la norme

$$|z|_H^2 = |z|_{L^2(Q)}^2 + |Lz|_{L^2(Q)}^2 + |z|_{L^2(\Sigma_1)}^2$$

$\mathcal{H} = L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0) \times H$ est alors muni de la norme :

$$\|((v_0, v_1), z)\|^2 = |v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |z|_H^2.$$

Soit $(v_n, z_n) \in \overline{\mathcal{U}}_{ad}$ tel que $(v_n, z_n) \longrightarrow (v, z)$ dans $\mathcal{H}$.

On a donc :

$$\|(v_n, z_n) - (v, z)\|^2 = \|(v_n - v, z_n - z)\|^2 \rightarrow 0$$

or

$$\|(v_n - v, z_n - z)\|^2 = |v_{0n} - v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |v_{1n} - v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |z_n - z|_H^2$$

avec

$$|z_n - z|_H^2 = |z_n - z|_{L^2(Q)}^2 + |Lz_n - Lz|_{L^2(Q)}^2 + |z_n - z|_{L^2(\Sigma_1)}^2$$

donc

$$\begin{aligned} |v_{0n} - v_0|_{L^2(\Sigma_0)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \\ |v_{1n} - v_1|_{L^2(\Sigma_0)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \\ |z_n - z|_{L^2(Q)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \\ |Lz_n - Lz|_{L^2(Q)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \\ |z_n - z|_{L^2(\Sigma_1)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \end{aligned}$$

par passage à la limite, on obtient

$$\begin{array}{lll} v_{0n} \longrightarrow v_0 & \text{dans} & L^2(\Sigma_0) \\ v_{1n} \longrightarrow v_1 & \text{dans} & L^2(\Sigma_0) \\ z_n \longrightarrow z & \text{dans} & L^2(Q) \\ Lz_n \longrightarrow Lz & \text{dans} & L^2(Q) \\ z_n|_{\Sigma_1} \longrightarrow z|_{\Sigma_1} & \text{dans} & L^2(\Sigma_1). \end{array}$$

Comme

$$Lz_n = 0 \text{ dans } Q \quad (3.10)$$

alors

$$Lz = 0 \text{ dans } Q. \quad (3.11)$$

Multiplions (3.10) par $\varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ et faisons une intégration par parties après avoir pris l'intégrale sur Q . On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(T) z_n(T) dx - \int_{\Omega} \varphi(0) z_n(0) dx + \int_Q z_n L^* \varphi dx dt - \\ \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial z_n}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma} z_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0, \end{aligned}$$

où L^* désigne l'adjoint de l'opérateur L défini par $L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ et $z_n(0) = 0$.
Donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(T) z_n(T) dx + \int_Q z_n L^* \varphi dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_{1n} dx dt - \\ \int_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial z_n}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_0} v_{0n} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_1} z_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Choisissons φ telle que

$$\varphi(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_1$$

il vient

$$\int_Q z_n L^* \varphi dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_{1n} dx dt + \int_{\Sigma_0} v_{0n} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0$$

en passant à la limite (la convergence forte entraînant la convergence faible), on obtient

$$\int_Q z L^* \varphi dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_1 dx dt + \int_{\Sigma_0} v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0.$$

Intégrons encore par partie cette dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \varphi(T)z(T) dx + \int_{\Omega} \varphi(0)z(0) dx + \int_Q \varphi Lz dxdt - \\ & \int_{\Sigma_0} z \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt - \int_{\Sigma_1} z \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt + \int_{\Sigma_0} \varphi \frac{\partial z}{\partial \nu} dxdt + \\ & \int_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial z}{\partial \nu} dxdt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_1 dxdt + \int_{\Sigma_0} v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt = 0. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\int_{\Omega} \varphi(0)z(0)dx + \int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} - v_1 \right) dxdt - \int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt = 0. \quad (3.12)$$

Prenons cette fois ci dans (3.12),

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_0$$

ceci entraîne

$$\int_{\Omega} \varphi(0)z(0) dx = 0, \forall \varphi(0) \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

et par conséquent

$$z(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.13)$$

Remplaçons dans (3.12), on a donc

$$\int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} - v_1 \right) dxdt - \int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt = 0. \quad (3.14)$$

Choisissons $\varphi = 0$ sur Σ_0 dans (3.14), ceci conduit à

$$\int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt = 0$$

d'où on tire que

$$z = v_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (3.15)$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (3.16)$$

D'autre part comme $\mathcal{U}_{ad}^0$ et $\mathcal{U}_{ad}^1$ sont fermés, alors

$$\begin{array}{llll} v_{0n} \longrightarrow v_0 & \text{dans } L^2(\Sigma_0) & \text{entraîne que} & v_0 \in \mathcal{U}_{ad}^0 \\ v_{1n} \longrightarrow v_1 & \text{dans } L^2(\Sigma_0) & \text{entraîne que} & v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1 \\ z_n \longrightarrow z & \text{dans } L^2(Q) & \text{entraîne que} & z \in L^2(Q) \\ z_{n|\Sigma_1} \longrightarrow z_{|\Sigma_1} & \text{dans } L^2(\Sigma_1) & \text{entraîne que} & z_{|\Sigma_1} \in L^2(\Sigma_1). \end{array}$$

Le système (3.11)(3.13)(3.15)(3.16) et les conclusions ci-dessus entraînent que $(v, z) \in \bar{\mathcal{U}}_{ad}$. Donc $\bar{\mathcal{U}}_{ad}$ est fermé.

La fonctionnelle J est propre (les intégrales sont toutes définies), strictement convexe et s.c.i (la norme est strictement convexe et continue donc s.c.i). Il reste à prouver que J est coercive.

Rappelons que

$$J(v, z) = \frac{1}{2}|z - z_d|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{N_0}{2}|v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \frac{N_1}{2}|v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2$$

et

$$\|((v_0, v_1), z)\|^2 = |v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |z|_{L^2(Q)}^2 + |z|_{L^2(\Sigma_1)}^2.$$

($Lz = 0$ car (v, z) admissible)

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\|(v, z)\| \longrightarrow \infty \text{ et que } J(v, z) \text{ est bornée .}$$

$J(v, z) \leq C$ entraîne que $|z|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \leq C$, $|v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \leq C$ et $|v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \leq C$.

On a alors le système

$$\begin{cases} Lz &= 0 & \text{dans } Q \\ z(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ z &= v_0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ z|_{\Sigma_1} & \text{borné} \end{cases}$$

z est alors solution d'un problème de Cauchy-Dirichlet associé à l'équation de la chaleur avec toutes les données bornées, donc z est borné dans $L^2(Q)$.

Finalement $\|(v, z)\|^2$ est bornée ce qui est contradictoire. Alors $J(v, z)$ est coercive, d'où la proposition.

Déterminons maintenant les conditions d'optimalité.

Si (u, y) est le couple optimal alors les conditions d'Euler-Lagrange donnent

$$J'(u, y)(v - u, z - y) \geq 0 \quad \forall (v, z) \in \bar{\mathcal{U}}_{ad} \quad (3.17)$$

où $J'(u, y)(w, h)$ désigne la dérivée- Gateaux de J au point (u, y) dans la direction (w, h) .

On rappelle que par définition

$$J'(u, y)(w, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J((u, y) + t(w, h)) - J(u, y)}{t}$$

Faisons quelques calculs.

$$\begin{aligned}
J((u, y) + t(w, h)) - J(u, y) &= J(u + tw, y + th) - J(u, y) \\
&= \frac{1}{2}|y + th - z_d|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{N_0}{2}|u_0 + tw_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \frac{N_1}{2}|u_1 + tw_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 - \\
&\quad \frac{1}{2}|y - z_d|_{L^2(\Sigma_1)}^2 - \frac{N_0}{2}|u_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 - \frac{N_1}{2}|u_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \\
&= \frac{t^2}{2}|h|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + t(y - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + \frac{N_0}{2}t^2|w_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \\
&\quad N_0t(u_0, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{N_1}{2}t^2|w_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1t(u_1, w_1)_{L^2(\Sigma_0)}
\end{aligned}$$

divisons maintenant dans cette égalité partout par $t \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{J((u, y) + t(w, h)) - J(u, y)}{t} &= \frac{t}{2}|h|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + (y - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + \frac{N_0}{2}t|w_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \\
&\quad N_0(u_0, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{N_1}{2}t|w_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1(u_1, w_1)_{L^2(\Sigma_0)}
\end{aligned}$$

en passant à la limite, on a

$$J'(u, y)(w, h) = (y - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_0, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_1, w_1)_{L^2(\Sigma_0)}$$

d'où l'on tire

$$J'(u, y)(v - u, z - y) = (y - z_d, z - y)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_0, v_0 - u_0)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_1, v_1 - u_1)_{L^2(\Sigma_0)}.$$

Le couple optimal (u, y) est alors caractérisé par

$$(y - z_d, z - y)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_0, v_0 - u_0)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_1, v_1 - u_1)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0, \quad \forall (v, z) \in \bar{\mathcal{U}}_{ad}.$$

Nous pouvons noter que les variations de v et z restent couplées, il est donc important sinon intéressant d'avoir un système d'optimalité (S.O) où v et z sont découplés. On y arrive par la méthode de pénalisation.

3.3 Méthode de Pénalisation

Suivant l'objectif énoncé ci-dessus, introduisons la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(v, z) = J(v, z) + \frac{1}{2\varepsilon}|Lz|_{L^2(Q)}^2 \quad (3.18)$$

que nous prenons dans l'ensemble

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{l} v \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1, \quad z, \quad Lz \in L^2(Q), \quad z|_{\Sigma_1} \in L^2(\Sigma_1) \\ z = v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ z(x, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Remarque 3.3 Dans l'ensemble $\mathcal{K}$ nous avons découplé l'état z et le contrôle v dans l'équation d'état en demandant juste que $Lz \in L^2(Q)$. On aurait pu également découplé z et v_0 sur Σ_0 en ajoutant à notre fonctionnelle J_ε le terme $\frac{1}{2\varepsilon} |z - v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2$; pour découpler totalement il faudra ajouter de plus le terme $\frac{1}{2\varepsilon} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} - v_1 \right|_{L^2(\Sigma_0)}^2$ et dans ce cas la ligne (3.19)₂ sera remplacée par $z|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$ et $\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$.

On s'intéresse maintenant au problème

$$\inf_{(v, z) \in \mathcal{K}} J_\varepsilon(v, z). \quad (3.20)$$

Nous allons alors prouver le résultat suivant

Proposition 3.2 Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un unique couple $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ solution du problème (3.20).

Preuve.

- On a $\bar{\mathcal{U}}_{ad} \subset \mathcal{K}$ donc $\mathcal{K}$ est non vide.
- Montrons que $\mathcal{K}$ est convexe.

Soit (v, z) et (w, h) deux éléments de $\mathcal{K}$, $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda v + (1 - \lambda)w \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1, \\ \lambda z + (1 - \lambda)h, \lambda Lz + (1 - \lambda)Lh \in L^2(Q) \\ \lambda z + (1 - \lambda)h = \lambda v_0 + (1 - \lambda)w_0, \\ \frac{\partial(\lambda z + (1 - \lambda)h)}{\partial \nu} = \lambda v_1 + (1 - \lambda)w_1 \text{ sur } \Sigma_0 \\ (\lambda z + (1 - \lambda)h)(0) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \lambda z + (1 - \lambda)h \in L^2(\Sigma_1) \end{array} \right.$$

donc $\lambda(v, z) + (1 - \lambda)(w, h) \in \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ est convexe.

- Montrons maintenant que $\mathcal{K}$ est fermé.

On prend $\mathcal{K}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0) \times H$, avec

$$H = \{z \in L^2(Q), Lz \in L^2(Q), z|_{\Sigma_1} \in L^2(\Sigma_1)\}$$

muni de la norme

$$|z|_H^2 = |z|_{L^2(Q)}^2 + |Lz|_{L^2(Q)}^2 + |z|_{L^2(\Sigma_1)}^2$$

$\mathcal{H} = L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0) \times H$ est alors muni de la norme :

$$\|((v_0, v_1), z)\|^2 = |v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |z|_H^2.$$

Soit $(v_n, z_n) \in \mathcal{K}$ tel que $(v_n, z_n) \longrightarrow (v, z)$ dans $\mathcal{H}$.

On a donc :

$$\|(v_n, z_n) - (v, z)\|^2 = \|(v_n - v, z_n - z)\|^2 \rightarrow 0$$

or

$$\|(v_n - v, z_n - z)\|^2 = |v_{0n} - v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |v_{1n} - v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |z_n - z|_H^2$$

avec

$$|z_n - z|_H^2 = |z_n - z|_{L^2(Q)}^2 + |Lz_n - Lz|_{L^2(Q)}^2 + |z_n - z|_{L^2(\Sigma_1)}^2$$

donc

$$\begin{aligned} |v_{0n} - v_0|_{L^2(\Sigma_0)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \\ |v_{1n} - v_1|_{L^2(\Sigma_0)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \\ |z_n - z|_{L^2(Q)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \\ |Lz_n - Lz|_{L^2(Q)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \\ |z_n - z|_{L^2(\Sigma_1)} &\leq \|(v_n - v, z_n - z)\| \end{aligned}$$

par passage à la limite, on obtient

$$\begin{aligned} v_{0n} &\longrightarrow v_0 && \text{dans } L^2(\Sigma_0) \\ v_{1n} &\longrightarrow v_1 && \text{dans } L^2(\Sigma_0) \\ z_n &\longrightarrow z && \text{dans } L^2(Q) \\ Lz_n &\longrightarrow Lz && \text{dans } L^2(Q) \\ z_n|_{\Sigma_1} &\longrightarrow z|_{\Sigma_1} && \text{dans } L^2(\Sigma_1). \end{aligned}$$

Multiplions maintenant Lz_n par $\varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ et faisons une intégration par parties après avoir pris l'intégrale sur Q . On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_Q \varphi Lz_n \, dxdt &= \int_\Omega \varphi(T)z_n(T) \, dx - \int_\Omega \varphi(0)z_n(0) \, dx + \\ &\quad \int_Q z_n L^* \varphi \, dxdt - \int_\Sigma \varphi \frac{\partial z_n}{\partial \nu} \, dxdt + \int_\Sigma z_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dxdt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_Q \varphi Lz_n \, dxdt &= \int_\Omega \varphi(T)z_n(T) \, dx + \int_Q z_n L^* \varphi \, dxdt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_{1n} \, dxdt - \\ &\quad \int_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial z_n}{\partial \nu} \, dxdt + \int_{\Sigma_0} v_{0n} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dxdt + \int_{\Sigma_1} z_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, dxdt. \end{aligned}$$

Choisissons φ telle que

$$\varphi(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_1$$

il vient

$$\int_Q \varphi L z_n dx dt = \int_Q z_n L^* \varphi dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_{1n} dx dt + \int_{\Sigma_0} v_{0n} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt$$

en passant à la limite (la convergence forte entraînant la convergence faible), on obtient

$$\int_Q \varphi L z dx dt = \int_Q z L^* \varphi dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_1 dx dt + \int_{\Sigma_0} v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt.$$

Intégrons encore par partie cette dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned} \int_Q \varphi L z dx dt &= - \int_{\Omega} \varphi(T) z(T) dx + \int_{\Omega} \varphi(0) z(0) dx + \int_Q \varphi L z dx dt - \\ &\quad \int_{\Sigma_0} z \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt - \int_{\Sigma_1} z \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_0} \varphi \frac{\partial z}{\partial \nu} dx dt + \\ &\quad \int_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial z}{\partial \nu} dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_1 dx dt + \int_{\Sigma_0} v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\int_{\Omega} \varphi(0) z(0) dx + \int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} - v_1 \right) dx dt - \int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0. \quad (3.21)$$

Prenons cette fois ci dans (3.21),

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_0$$

ceci entraîne

$$\int_{\Omega} \varphi(0) z(0) dx = 0, \quad \forall \varphi(0) \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

et par conséquent

$$z(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.22)$$

Remplaçons dans (3.21), on a donc

$$\int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} - v_1 \right) dx dt - \int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0. \quad (3.23)$$

Choisissons $\varphi = 0$ sur Σ_0 dans (3.23), ceci conduit à

$$\int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0$$

d'où on tire que

$$z = v_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (3.24)$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 \quad \text{sur } \Sigma_0. \quad (3.25)$$

D'autre part comme $\mathcal{U}_{ad}^0$ et $\mathcal{U}_{ad}^1$ sont fermés, alors

$$\begin{array}{llll} v_{0n} \longrightarrow v_0 & \text{dans } L^2(\Sigma_0) & \text{entraîne que} & v_0 \in \mathcal{U}_{ad}^0 \\ v_{1n} \longrightarrow v_1 & \text{dans } L^2(\Sigma_0) & \text{entraîne que} & v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1 \\ z_n \longrightarrow z & \text{dans } L^2(Q) & \text{entraîne que} & z \in L^2(Q) \\ Lz_n \longrightarrow Lz & \text{dans } L^2(Q) & \text{entraîne que} & Lz \in L^2(Q) \\ z_n|_{\Sigma_1} \longrightarrow z|_{\Sigma_1} & \text{dans } L^2(\Sigma_1) & \text{entraîne que} & z|_{\Sigma_1} \in L^2(\Sigma_1). \end{array}$$

Le système (3.22)(3.24)(3.25) et les conclusions ci-dessus entraînent que $(v, z) \in \mathcal{K}$. Donc $\mathcal{K}$ est fermé.

La fonctionnelle J_ε est propre (les intégrales sont toutes définies), strictement convexe et s.c.i (la norme est strictement convexe et continue donc s.c.i). Il reste à prouver que J_ε est coercive.

Rappelons que

$$J_\varepsilon(v, z) = J(v, z) + \frac{1}{2\varepsilon} |Lz|_{L^2(Q)}^2$$

et

$$\|((v_0, v_1), z)\|^2 = |v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |z|_{L^2(Q)}^2 + |Lz|_{L^2(Q)}^2 + |z|_{L^2(\Sigma_1)}^2.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\|(v, z)\| \longrightarrow \infty \text{ et que } J_\varepsilon(v, z) \text{ est bornée.}$$

$J_\varepsilon(v, z) \leq C$ entraîne que $|z|_{L^2(\Sigma_1)}^2 \leq C$, $|v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \leq C$, $|v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \leq C$ et $|Lz|_{L^2(Q)}^2 \leq C\varepsilon$.

On a alors le système

$$\left\{ \begin{array}{lll} Lz & = & \sqrt{\varepsilon} f_\varepsilon \quad \text{dans } Q \\ z(0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ z & = & v_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ z|_{\Sigma_1} & & \text{borné} \end{array} \right.$$

Où $f_\varepsilon = \frac{Lz}{\sqrt{\varepsilon}}$ est une fonction bornée de $L^2(Q)$.

z est alors solution d'un problème de Cauchy-Dirichlet associé à l'équation de la chaleur avec toutes les données bornées, donc z est borné dans $L^2(Q)$.

Finalement $\|(v, z)\|^2$ est bornée ce qui est contradictoire. Alors $J_\varepsilon(v, z)$ est coercive, d'où la proposition.

Assurons nous maintenant avant d'aller plus loin que la solution $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ du problème pénalisé converge vers notre couple optimal. C'est l'objet de la section suivante.

3.3.1 Convergence de la méthode

Nous allons établir la proposition

Proposition 3.3 *Soit $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ la solution de (3.20). Nous avons alors pour ε tendant vers 0*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faible dans } L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0) \quad (3.26)$$

$$y_\varepsilon \rightharpoonup y \text{ faible dans } L^2(Q) \quad (3.27)$$

où (u, y) est le couple optimal du problème (3.5).

Preuve. Nous avons

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon(v, z) \leq J_\varepsilon(u, y) = J(u, y) \quad (3.28)$$

ceci entraîne, d'après la structure de J_ε que

$$|y_\varepsilon|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + |u_\varepsilon|_{L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0)}^2 \leq C \quad (3.29)$$

où les C sont des constantes indépendantes de ε . Nous pouvons alors extraire une sous suite encore notée u_ε , telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u} \text{ faible dans } L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0) \quad (3.30)$$

avec $\hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1)$.

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{lll} Ly_\varepsilon & = & \sqrt{\varepsilon} f_\varepsilon \\ y_\varepsilon(x, 0) & = & 0 \\ y_\varepsilon & = & u_{0\varepsilon} \\ y_\varepsilon & \text{borné dans} & L^2(\Sigma_1). \end{array} \right. \begin{array}{ll} \text{avec } |f_\varepsilon|_{L^2(Q)} \leq C & \text{dans } Q \\ & \text{dans } \Omega \\ & \text{sur } \Sigma_0 \end{array} \quad (3.31)$$

y_ε est solution d'un problème de Cauchy-Dirichlet associé à l'équation de la chaleur avec toutes les données bornées, donc $|y_\varepsilon|_{L^2(Q)} \leq C$. On peut alors extraire une sous suite encore notée y_ε telle que

$$y_\varepsilon \rightharpoonup \hat{y} \text{ faible dans } L^2(Q). \quad (3.32)$$

On en déduit que $y_\varepsilon \rightharpoonup \hat{y}$ faible dans $\mathcal{D}'(Q)$, par conséquent $Ly_\varepsilon \rightharpoonup L\hat{y}$ faible dans $\mathcal{D}'(Q)$.

Or $Ly_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}f_\varepsilon$ et donc pour ε tendant vers 0, on obtient

$$L\hat{y} = 0. \quad (3.33)$$

Multiplions l'égalité (3.31)₁ par $\varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ et faisons une intégration par parties après avoir pris l'intégrale sur Q . On obtient alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi(T)y_\varepsilon(T) dx - \int_{\Omega} \varphi(0)y_\varepsilon(0) dx + \int_Q y_\varepsilon L^* \varphi dxdt - \\ & \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} dxdt + \int_{\Sigma} y_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt = \sqrt{\varepsilon} \int_Q f_\varepsilon \varphi dxdt \end{aligned}$$

où $y_\varepsilon(0) = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi(T)y_\varepsilon(T) dx + \int_Q y_\varepsilon L^* \varphi dxdt - \int_{\Sigma_0} \varphi u_{1\varepsilon} dxdt - \int_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} dxdt + \\ & \int_{\Sigma_0} u_{0\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt + \int_{\Sigma_1} y_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt = \sqrt{\varepsilon} \int_Q f_\varepsilon \varphi dxdt \end{aligned}$$

choisissons φ telle que

$$\varphi(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_1$$

on a alors

$$\begin{aligned} & \int_Q y_\varepsilon L^* \varphi dxdt - \int_{\Sigma_0} \varphi u_{1\varepsilon} dxdt + \int_{\Sigma_0} u_{0\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt + \\ & \int_{\Sigma_1} y_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt = \sqrt{\varepsilon} \int_Q f_\varepsilon \varphi dxdt \end{aligned}$$

en passant à la limite, on obtient

$$\int_Q \hat{y} L^* \varphi dxdt - \int_{\Sigma_0} \varphi \hat{u}_1 dxdt + \int_{\Sigma_0} \hat{u}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt + \int_{\Sigma_1} w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dxdt = 0$$

avec w_1 la limite faible de $y_{\varepsilon|\Sigma_1}$ dans $L^2(\Sigma_1)$.

Intégrons encore par parties cette dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \varphi(T) \widehat{y}(T) dx + \int_{\Omega} \varphi(0) \widehat{y}(0) dx + \int_Q \varphi L \widehat{y} dx dt - \int_{\Sigma_0} \widehat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt - \\ & \int_{\Sigma_1} \widehat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_0} \varphi \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} dx dt - \\ & \int_{\Sigma_0} \varphi \widehat{u}_1 dx dt + \int_{\Sigma_0} \widehat{u}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_1} w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0 \end{aligned}$$

finalement on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi(0) \widehat{y}(0) dx + \int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} - \widehat{u}_1 \right) dx dt \\ & - \int_{\Sigma_0} (\widehat{y} - \widehat{u}_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt - \int_{\Sigma_1} (\widehat{y} - w_1) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

prenons cette fois-ci dans cette égalité,

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

ceci entraîne

$$\int_{\Omega} \varphi(0) \widehat{y}(0) dx = 0$$

et par conséquent

$$\widehat{y}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{3.35}$$

remplaçons dans (3.34), on obtient

$$\int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} - \widehat{u}_1 \right) dx dt - \int_{\Sigma_0} (\widehat{y} - \widehat{u}_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt - \int_{\Sigma_1} (\widehat{y} - w_1) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0$$

choisissons

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1$$

on obtient

$$\int_{\Sigma_0} (\widehat{y} - \widehat{u}_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0$$

d'où l'on tire :

$$\widehat{y} = \widehat{u}_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \tag{3.36}$$

finalement (3.34) se réduit à :

$$\int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} - \widehat{u}_1 \right) dx dt - \int_{\Sigma_1} (\widehat{y} - w_1) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0$$

on choisit cette fois-ci $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 , cela entraîne que

$$\int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} - \widehat{u}_1 \right) dx dt = 0$$

et donc

$$\frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} = \widehat{u}_1 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (3.37)$$

par conséquent

$$\int_{\Sigma_1} (\widehat{y} - w_1) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0$$

et

$$\widehat{y} = w_1 \quad \text{sur } \Sigma_1. \quad (3.38)$$

Le système (3.33)(3.35)(3.36)(3.37)(3.38) et (3.30) impliquent que le couple $(\widehat{u}, \widehat{y})$ est admissible.

Montrons maintenant que $(\widehat{u}, \widehat{y}) = (u, y)$.

Nous avons $(\widehat{u}, \widehat{y})$ admissible donc

$$J(u, y) \leq J(\widehat{u}, \widehat{y}) \quad (3.39)$$

de plus

$$J(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u, y) = J(u, y).$$

Les convergences faibles entraînent donc

$$J(\widehat{u}, \widehat{y}) \leq \liminf J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq J(u, y) \quad (3.40)$$

et par conséquent

$$J(\widehat{u}, \widehat{y}) = J(u, y)$$

puis par unicité, nous obtenons

$$(\widehat{u}, \widehat{y}) = (u, y).$$

3.3.2 Système d'optimalité approché

Nous pouvons maintenant donner les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour notre problème pénalisé.

On a

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon((u_\varepsilon, y_\varepsilon) + t(w, h)) - J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) &= J(u_\varepsilon + tw, y_\varepsilon + th) + \frac{1}{2\varepsilon} |L(y_\varepsilon + th)|_{L^2(Q)}^2 - \\
&\quad J(u_\varepsilon, y_\varepsilon) - \frac{1}{2\varepsilon} |Ly_\varepsilon|_{L^2(Q)}^2 \\
&= \frac{1}{2} |y_\varepsilon + th - z_d|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{N_0}{2} |u_{0\varepsilon} + tw_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \\
&\quad \frac{N_1}{2} |u_{1\varepsilon} + tw_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |Ly_\varepsilon + tLh|_{L^2(Q)}^2 - \\
&\quad \frac{1}{2} |y_\varepsilon - z_d|_{L^2(\Sigma_1)}^2 - \frac{N_0}{2} |u_{0\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 - \frac{N_1}{2} |u_{1\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 - \\
&\quad \frac{1}{2\varepsilon} |Ly_\varepsilon|_{L^2(Q)}^2 \\
&= \frac{t^2}{2} |h|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + t(y_\varepsilon - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + \frac{N_0}{2} t^2 |w_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \\
&\quad N_0 t(u_{0\varepsilon}, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{N_1}{2} t^2 |w_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1 t(u_{1\varepsilon}, w_1)_{L^2(\Sigma_0)} + \\
&\quad \frac{t}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon, Lh)_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\varepsilon} t^2 |Lh|_{L^2(Q)}^2.
\end{aligned}$$

Divisons dans cette égalité partout par t , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{J_\varepsilon((u_\varepsilon, y_\varepsilon) + t(w, h)) - J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)}{t} &= \frac{t}{2} |h|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + (y_\varepsilon - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + \frac{N_0}{2} t |w_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \\
&\quad N_0 (u_{0\varepsilon}, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{N_1}{2} t |w_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1 (u_{1\varepsilon}, w_1)_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{1}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon, Lh)_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\varepsilon} t |Lh|_{L^2(Q)}^2.
\end{aligned}$$

Passons à la limite, on a alors

$$\begin{aligned}
J'_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)(w, h) &= (y_\varepsilon - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0 (u_{0\varepsilon}, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + \\
&\quad N_1 (u_{1\varepsilon}, w_1)_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{1}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon, Lh)_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Les conditions d'ordre 1 d'Euler-Lagrange donnent

$$J'_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)(v - u_\varepsilon, z - y_\varepsilon) \geq 0, \quad \forall (v, z) \in \mathcal{K}$$

c'est à dire

$$(y_\varepsilon - z_d, z - y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} +$$

$$\frac{1}{\varepsilon}(Ly_\varepsilon, L(z - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} \geq 0, \quad \forall (v, z) \in \mathcal{K}.$$

Posons maintenant

$$p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}Ly_\varepsilon \quad (3.41)$$

on obtient

$$(p_\varepsilon, L(z - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, z - y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0, \quad (3.42)$$

$\forall (v, z) \in \mathcal{K}$.

Prenons dans (3.42) $z = y_\varepsilon \pm \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ et $v = u_\varepsilon$ on obtient

$$(p_\varepsilon, L\varphi)_{L^2(Q)} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q).$$

Une intégration par parties donne

$$(L^*p_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$$

par conséquent

$$L^*p_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } Q. \quad (3.43)$$

Comme dans la Remarque 3.1 on peut alors vérifier que les traces $p_\varepsilon|_\Sigma$ et $\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}|_\Sigma$ existent et sont respectivement éléments de $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)$ et $H^{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}}(\Sigma)$; les traces $p_\varepsilon(0)$ et $p_\varepsilon(T)$ existent et sont des éléments de $H^{-1}(\Omega)$.

Choisissons cette fois ci dans (3.42) $z = y_\varepsilon \pm \varphi$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ et $v = u_\varepsilon$, on obtient

$$(p_\varepsilon, L\varphi)_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, \varphi)_{L^2(\Sigma_1)} = 0.$$

Une intégration par parties de cette dernière égalité (qui se justifie du fait que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$), entraîne que :

$$(L^*p_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi \right)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi \right)_{L^2(\Sigma_1)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_1)} + \int_\Omega \varphi(T)p_\varepsilon(T) dx - \int_\Omega \varphi(0)p_\varepsilon(0) dx + (y_\varepsilon - z_d, \varphi)_{L^2(\Sigma_1)} = 0$$

après simplification, on a

$$\left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi\right)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi\right)_{L^2(\Sigma_1)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_1)} = 0 \quad (3.44)$$

$$\left(p_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_1)} + \int_\Omega \varphi(T) p_\varepsilon(T) dx + (y_\varepsilon - z_d, \varphi)_{L^2(\Sigma_1)} = 0$$

et en choisissant dans (3.44), φ telle que $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ , on obtient

$$\int_\Omega \varphi(T) p_\varepsilon(T) dx = 0, \quad \forall \varphi(T) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

par conséquent

$$p_\varepsilon(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.45)$$

Choisissons cette fois ci dans (3.44), φ telle que $\varphi = 0$ sur Σ_0 , $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ , on a alors

$$\left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + y_\varepsilon - z_d, \varphi\right)_{L^2(\Sigma_1)} = 0$$

d'où

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} = z_d - y_\varepsilon \quad \text{sur } \Sigma_1. \quad (3.46)$$

Prenons dans (3.44) φ telle que $\varphi = 0$ sur Σ , $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 , on a alors

$$\left(p_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_1)} = 0$$

d'où on tire

$$p_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1. \quad (3.47)$$

Nous avons finalement le système d'optimalité approché suivant

$$\begin{cases} Ly_\varepsilon = \varepsilon p_\varepsilon, & L^* p_\varepsilon = 0 & \text{dans } Q \\ y_\varepsilon(x, 0) = 0 & p_\varepsilon(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y_\varepsilon = u_{0\varepsilon}, \quad \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} = u_{1\varepsilon} \text{ sur } \Sigma_0, & p_\varepsilon = 0, \quad \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} = z_d - y_\varepsilon \text{ sur } \Sigma_1 \end{cases} \quad (3.48)$$

$$(p_\varepsilon, L(z - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, z - y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_1)} + \quad (3.49)$$

$$N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0,$$

$$\forall (v, z) \in \mathcal{K}.$$

Nous pouvons maintenant établir le système d'optimalité singulier (S.O.S) pour notre couple optimal sous certaines conditions.

3.4 Système d'optimalité singulier fort

Nous allons prouver

Théorème 3.1 *Supposons que $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Sigma_0) \times \mathcal{U}_{ad}^1$ (Exemple 3.1).*

Le couple optimal (u, y) est alors caractérisé par le triplet (u, y, p) qui est une solution du système d'optimalité singulier (S.O.S).

$$\begin{cases} Ly = 0, & L^*p = 0 & \text{dans } Q \\ y(x, 0) = 0, & p(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y = u_0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = u_1 \text{ sur } \Sigma_0, & p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu} = z_d - y \text{ sur } \Sigma_1 \end{cases} \quad (3.50)$$

$$y \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(Q), \quad p \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(Q) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = N_0 u_0 \text{ sur } \Sigma_0 \quad (3.52)$$

et

$$(-p + N_1 u_1, v_1 - u_1)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0, \quad \forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1. \quad (3.53)$$

Preuve. Dans (3.49) prenons $z = y_\varepsilon \pm \xi$ avec $\xi \in C^\infty(\overline{Q})$, on a alors

$$z|_{\Sigma_0} = y_\varepsilon|_{\Sigma_0} \pm \xi|_{\Sigma_0} = v_0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \pm \frac{\partial \xi}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = v_1.$$

Les contraintes sur $\mathcal{U}_{ad}$ nous oblige à choisir ξ telle que $\frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 (en effet, nous devons nous assurer que $\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma_0}$ reste dans $\mathcal{U}_{ad}^1$), on obtient dans ce cas

$$z|_{\Sigma_0} = u_{0\varepsilon} \pm \xi|_{\Sigma_0} = v_0 \in L^2(\Sigma_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = u_{1\varepsilon} = v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1$$

et (3.49) devient

$$(p_\varepsilon, L\xi)_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, \xi)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, \xi)_{L^2(\Sigma_0)} = 0 \quad (3.54)$$

comme $\xi \in C^\infty(\overline{Q})$, on peut appliquer la formule de Green dans (3.54), ce qui donne

$$(L^*p_\varepsilon, \xi)_{L^2(Q)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \xi \right)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \xi \right)_{L^2(\Sigma_1)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_1)} + \int_{\Omega} \xi(T) p_\varepsilon(T) dx - \int_{\Omega} \xi(0) p_\varepsilon(0) dx + (y_\varepsilon - z_d, \xi)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, \xi)_{L^2(\Sigma_0)} = 0$$

ce qui entraîne après simplification

$$\left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, \xi \right)_{L^2(\Sigma_0)} = 0$$

d'où on tire

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} = -N_0 u_{0\varepsilon}, \quad \text{sur } \Sigma_0. \quad (3.55)$$

Finalement on a le système

$$\begin{cases} L^*p_\varepsilon &= 0 & \text{dans } Q \\ p_\varepsilon(x, T) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} &= z_d - y_\varepsilon & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} &= -N_0 u_{0\varepsilon} & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases} \quad (3.56)$$

donc

$$p_\varepsilon \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(Q) \text{ et } |p_\varepsilon|_{H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(Q)} \leq C \quad (3.57)$$

par conséquent $p_\varepsilon|_\Sigma$ et $\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}|_\Sigma$ appartiennent à $L^2(\Sigma)$ et on peut donc appliquer la formule de Green à (3.49), ce qui donne

$$\left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, z - y_\varepsilon \right)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, z - y_\varepsilon \right)_{L^2(\Sigma_1)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial(z - y_\varepsilon)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial(z - y_\varepsilon)}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_1)} + (y_\varepsilon - z_d, z - y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0$$

$\forall (v, z) \in \mathcal{K}$

après simplification on a

$$(-p_\varepsilon + N_1 u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon} \right)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0$$

en utilisant (3.55) dans cette dernière inégalité cela entraîne

$$(-p_\varepsilon + N_1 u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0 \quad (3.58)$$

d'après (3.57), p_ε est borné dans $H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(Q)$, on peut donc en extraire une sous suite encore notée p_ε telle que

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ dans } H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(Q)$$

pour ensuite passer à la limite dans (3.55), (3.48) et (3.58).

3.5 Système d'optimalité singulier faible

Dans cette partie nous allons prouver

Théorème 3.2 *Supposons que $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_{ad}^0 \times L^2(\Sigma_0)$ (Exemple 3.2).*

Le couple optimal (u, y) est alors caractérisé par le triplet (u, y, p) qui est une solution du (S.O.S).

$$\begin{cases} Ly = 0, & L^*p = 0 & \text{dans } Q \\ y(x, 0) = 0, & p(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ y = u_0, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = u_1 \text{ sur } \Sigma_0, & p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu} = z_d - y \text{ sur } \Sigma_1 \end{cases} \quad (3.59)$$

$$y \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(Q), \quad p \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(Q) \quad (3.60)$$

$$p = N_1 u_1, \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (3.61)$$

et

$$(p, L(z - y))_{L^2(Q)} + (y - z_d, z - y)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_0, v_0 - u_0)_{L^2(\Sigma_0)} + \quad (3.62)$$

$$N_1(u_1, v_1 - u_1)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0$$

$$\forall (v, z) \in \mathcal{K}.$$

Preuve. Reprenons (3.49) et posons encore $z = y_\varepsilon \pm \xi$ avec $\xi \in C^\infty(\overline{Q})$, on a alors

$$z|_{\Sigma_0} = y_\varepsilon|_{\Sigma_0} \pm \xi|_{\Sigma_0} = v_0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \pm \frac{\partial \xi}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = v_1.$$

Les contraintes sur $\mathcal{U}_{ad}$ nous oblige à choisir ξ telle qu'on ait de plus $\xi = 0$ sur Σ_0 , on obtient donc

$$z|_{\Sigma_0} = u_{0\varepsilon} = v_0 \in U_{ad}^0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = u_{1\varepsilon} \pm \frac{\partial \xi}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = v_1 \in L^2(\Sigma_0)$$

et (3.49) devient

$$(p_\varepsilon, L\xi)_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, \xi)_{L^2(\Sigma_1)} + N_1 \left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} = 0. \quad (3.63)$$

Maintenant comme $\xi \in C^\infty(\overline{Q})$, on peut appliquer la formule de Green dans (3.63), ce qui donne

$$(L^*p_\varepsilon, \xi)_{L^2(Q)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \xi \right)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \xi \right)_{L^2(\Sigma_1)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} - \left(p_\varepsilon, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_1)} +$$

$$\int_{\Omega} \xi(T) p_{\varepsilon}(T) dx - \int_{\Omega} \xi(0) p_{\varepsilon}(0) dx + (y_{\varepsilon} - z_d, \xi)_{L^2(\Sigma_1)} + N_1 \left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} = 0$$

ce qui entraîne après simplification

$$\left(-p_{\varepsilon} + N_1 u_{1\varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} = 0$$

d'où on tire

$$p_{\varepsilon} = N_1 u_{1\varepsilon}, \quad \text{sur } \Sigma_0. \quad (3.64)$$

On obtient finalement le système

$$\begin{cases} L^* p_{\varepsilon} &= 0 & \text{dans } Q \\ p_{\varepsilon}(x, T) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ p_{\varepsilon} &= 0 & \text{sur } \Sigma_1 \\ p_{\varepsilon} &= N_1 u_{1\varepsilon} & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases} \quad (3.65)$$

par conséquent

$$p_{\varepsilon} \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(Q) \text{ et } |p_{\varepsilon}|_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(Q)} \leq C \quad (3.66)$$

puisque p_{ε} est borné dans $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(Q)$, on peut en extraire une sous suite encore notée p_{ε} telle que

$$p_{\varepsilon} \rightharpoonup p \text{ faible dans } H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(Q)$$

et ensuite passer à la limite dans (3.64), (3.48) et (3.49).

On peut obtenir une estimation supplémentaire permettant de donner une formulation forte si :

$$\mathcal{U}_{ad}^0 \text{ est d'intérieur non vide dans } L^2(\Sigma_0). \quad (3.67)$$

On a alors

Théorème 3.3 *Reprenant les conditions du théorème 3.2 auxquelles on ajoute (3.67), on a alors*

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_0) \quad (3.68)$$

ainsi

$$p \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(Q) \quad (3.69)$$

et donc l'inégalité variationnelle (3.62) peut être remplacée dans l'énoncé du théorème 3.2 par

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \nu} + N_0 u_0, v_0 - u_0 \right)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0, \quad \forall v_0 \in U_{ad}^0. \quad (3.70)$$

Preuve. Choisissons v_0 régulière dans $\mathcal{U}_{ad}^0$ telle que

$$v_0 + h \in \mathcal{U}_{ad}^0 \quad \text{si} \quad |h|_{L^2(\Sigma_0)} \leq r \quad (3.71)$$

choisissons z_0 et ξ régulières (c'est le cas pour h régulière), telles que

$$\begin{cases} Lz_0 \text{ et } L\xi \in C^\infty(\overline{Q}) \\ z_0 = v_0, \xi = h & \text{sur } \Sigma_0 \\ z_0 = \xi = 0 & \text{sur } \Sigma_1 \\ z_0(0) = \xi(0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.72)$$

Posons

$$z = z_0 + \xi \text{ dans (3.49).}$$

Ce choix est légitime car

$$z \text{ et } Lz = L(z_0 + \xi) \in L^2(Q),$$

$$z|_{\Sigma_0} = z_0|_{\Sigma_0} + \xi|_{\Sigma_0} = v_0 + h \in \mathcal{U}_{ad}^0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = \frac{\partial z_0}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} + \frac{\partial \xi}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0),$$

$$z(0) = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } z|_{\Sigma_1} = 0 \in L^2(\Sigma_1).$$

On obtient donc après calcul

$$(p_\varepsilon, L(z_0 - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, z_0 - y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} +$$

$$N_1\left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial z_0}{\partial \nu} - u_{1\varepsilon}\right)_{L^2(\Sigma_0)} + (p_\varepsilon, L\xi)_{L^2(Q)} +$$

$$(y_\varepsilon - z_d, \xi)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, h)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1\left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0$$

or $(y_\varepsilon - z_d, z)_{L^2(\Sigma_1)} = 0$, on obtient alors

$$(p_\varepsilon, L(z_0 - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, -y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} +$$

$$N_1\left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial z_0}{\partial \nu} - u_{1\varepsilon}\right)_{L^2(\Sigma_0)} + \quad (3.73)$$

$$(p_\varepsilon, L\xi)_{L^2(Q)} + N_0(u_{0\varepsilon}, h)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1\left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0.$$

Donc

$$X_\varepsilon + Y_\varepsilon \geq 0 \quad (3.74)$$

avec

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= (p_\varepsilon, L(z_0 - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, -y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + \\ &\quad N_1 \left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial z_0}{\partial \nu} - u_{1\varepsilon} \right)_{L^2(\Sigma_0)} \\ Y_\varepsilon &= (p_\varepsilon, L\xi)_{L^2(Q)} + N_0(u_{0\varepsilon}, h)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1 \left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)}. \end{aligned}$$

Mais puisque $y_\varepsilon, u_\varepsilon$ sont bornées de même que p_ε d'après (3.66), on a

$$|X_\varepsilon| \leq C \quad (3.75)$$

d'autre part, ξ étant régulière, on peut appliquer la formule de Green à Y_ε , ce qui donne

$$Y_\varepsilon = \left(-p_\varepsilon, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \xi \right)_{L^2(\Sigma_0)} + N_0(u_{0\varepsilon}, h)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1 \left(u_{1\varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)}$$

(les autres termes s'annulant).

Finalement

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon &= \left(-p_\varepsilon + N_1 u_{1\varepsilon}, \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, h \right)_{L^2(\Sigma_0)} \\ &= \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, h \right)_{L^2(\Sigma_0)} \quad (\text{en utilisant 3.64}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

(3.74) et (3.75) entraînent que $Y_\varepsilon \geq -X_\varepsilon \geq -|X_\varepsilon| \geq -C$. Par conséquent

$$\left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, h \right)_{L^2(\Sigma_0)} \geq -C \quad (3.77)$$

$\forall h$ régulière sur Σ_0 avec $|h|_{L^2(\Sigma_0)} \leq r$.

En remplaçant h par $-h$ dans (3.77), on obtient

$$\left| \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, h \right) \right|_{L^2(\Sigma_0)} \leq C$$

$\forall h$ régulière sur Σ_0 avec $|h|_{L^2(\Sigma_0)} \leq r$.

Donc

$$\left| \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, \frac{h}{r} \right) \right|_{L^2(\Sigma_0)} \leq \frac{C}{r}$$

si $|h| \leq r$ alors $\left|\frac{h}{r}\right| \leq 1$ donc $\frac{h}{r} \in B(0, 1)$ et

$$\left| \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon} \right|_{L^2(\Sigma_0)} = \sup_{|h| \leq r} \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, \frac{h}{r} \right)_{L^2(\Sigma_0)} \leq \frac{C}{r}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} \right|_{L^2(\Sigma_0)} &= \left| \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon} - N_0 u_{0\varepsilon} \right|_{L^2(\Sigma_0)} \\ &\leq \left| \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon} \right|_{L^2(\Sigma_0)} + |N_0 u_{0\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)} \leq C \end{aligned}$$

donc $\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_0)$, ce qui combiné avec (3.43) et (3.46) entraîne que $p_\varepsilon \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(Q)$. On peut alors passer à la limite dans (3.49) ce qui conduit à (3.62) et enfin la formule de Green donne (3.70).

Chapitre 4

Système de Cauchy pour opérateur hyperbolique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous établissons des résultats similaires à ceux du cas parabolique avec, quand même, des différences dans la démonstration de certains résultats. Nous améliorons même notre résultat dans la proposition 4.4 en établissant la convergence forte. Comme pour le cas parabolique le problème des traces se pose encore.

4.2 Position du problème

Soit Ω un ouvert de frontière $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ tel qu'indiqué sur FIGURE 4.1. Soit $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, T[$ et $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, T[$.

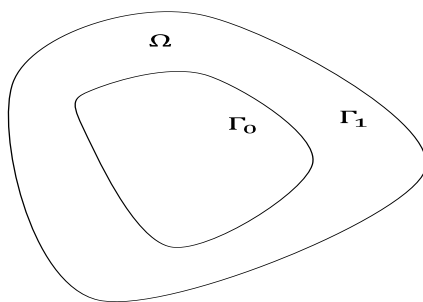


FIGURE 4.1 –

Dans Q nous considérons l'état z d'un système soumis au contrôle $v = (v_0, v_1)$ tels

que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z &= 0 & \text{dans } Q \\ z(x, 0) = \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ z = v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 & & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Soient $\mathcal{U}_{ad}^0$ et $\mathcal{U}_{ad}^1$ deux sous ensembles convexes et fermés de $L^2(\Sigma_0)$. Posons

$$\mathcal{A} = \left\{ (v_0, v_1, z) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1 \times L^2(Q) \text{ tel que (4.1) soit vérifié} \right\} \quad (4.2)$$

et nous supposons de plus que

$$\mathcal{A} \neq \emptyset. \quad (4.3)$$

Un triplet (v_0, v_1, z) sera dit admissible s'il appartient à $\mathcal{A}$.

Pour $(v = (v_0, v_1), z) \in \mathcal{A}$, nous considérons la fonction coût

$$J(v, z) = \frac{1}{2} \|z - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N_0}{2} \|v_0\|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \frac{N_1}{2} \|v_1\|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \quad (4.4)$$

avec $N_0, N_1 > 0$ et $z_d \in L^2(Q)$.

Nous nous intéressons alors au problème :

$$\inf_{(v, z) \in \mathcal{A}} J(v, z). \quad (4.5)$$

Remarque 4.1 Les conditions aux frontières $(4.1)_3$, et les conditions initiales $(4.1)_2$ ont un sens. En effet, puisque $z \in L^2(Q) = L^2(0, T; L^2(\Omega))$ nous avons alors $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \in H^{-2}(0, T; L^2(\Omega))$. Comme $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z \in L^2(Q)$, on en déduit que $\Delta z \in H^{-2}(0, T; L^2(\Omega))$. Ainsi $z(t) \in L^2(\Omega)$ et $\Delta z(t) \in L^2(\Omega)$. Par conséquent les traces $z|_{\Sigma}(t)$ et $\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma}(t)$ existent et appartiennent respectivement à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ (cf [13, p. 79]). D'autre part, puisque $z \in L^2(Q)$, nous avons alors $\Delta z \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$. Par conséquent $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$ et nous en déduisons que $\frac{\partial z}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ donc $(z(0), z(T)) \in [H^{-1}(\Omega)]^2$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial t}(0), \frac{\partial z}{\partial t}(T) \right) \in [H^{-2}(\Omega)]^2$ (voir [14, Theorem 9.2]).

Cela étant, voici maintenant des exemples où l'ensemble $\mathcal{A}$ des couples (v, z) admissibles est non vide.

Exemple 4.1 Supposons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = L^2(\Sigma_0) \times \mathcal{U}_{ad}^1, \\ \mathcal{U}_{ad}^1 \text{ est un convexe fermé de } L^2(\Sigma_0) \\ \text{contenant au moins une fonction } v_1 \\ \text{de } H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)) \cap H^{\frac{3}{2}}(0, T; H^0(\Gamma_0)). \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Considérons alors la solution ζ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} M\zeta & = 0 \quad \text{dans } Q \\ \zeta(0) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(0) & = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} & = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} & = v_1 \quad \text{sur } \Sigma_0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

où $M = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ (dorénavant on adoptera cette notation dans la suite).

Le système (4.7) définit un unique $\zeta \in H^{2;2}(Q)$ (cf [5]; theorem 3.1 pp 103); par conséquent $\zeta|_{\Sigma} \in H^{\frac{3}{2};\frac{3}{2}}(\Sigma)$ (cf [5]; theorem 2.1 pp 9) et en particulier $\zeta|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$. Le couple

$$((\zeta|_{\Sigma_0}, v_1), \zeta)$$

est donc admissible, ce qui prouve que l'ensemble des couples admissibles est non vide.

Exemple 4.2 Supposons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_{ad}^0 \times L^2(\Sigma_0), \\ \mathcal{U}_{ad}^0 \text{ est un convexe fermé de } L^2(\Sigma_0) \\ \text{contenant au moins une fonction de } v_0 \\ \text{de } H^1(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)) \cap H^{\frac{5}{2}}(0, T; H^0(\Gamma_0)). \end{array} \right. \quad (4.8)$$

On construit ζ par

$$\left\{ \begin{array}{ll} M\zeta & = 0 \quad \text{dans } Q \\ \zeta(0) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(0) & = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \zeta & = v_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ \zeta & = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

alors $\zeta \in H^{2;2}(Q)$ (cf [5]; theorem 3.1 pp 103); par conséquent $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}|_{\Sigma} \in H^{\frac{1}{2};\frac{1}{2}}(\Sigma)$ (cf [5]; theorem 2.1 pp 9) et en particulier $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$; Le couple

$$\left(\left(v_0, \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \right), \zeta \right)$$

est donc admissible. ■

On revient maintenant au cas général du problème (4.5) où $\mathcal{A}$ est un convexe fermé non vide. Nous avons alors :

Proposition 4.1 *Le problème (4.5) admet une unique solution, le couple optimal (u, y) .*

Preuve. Montrons que $\mathcal{A}$ est un convexe, fermé.

– Montrons que $\mathcal{A}$ est convexe.

Soit (v, z) et (w, h) deux éléments de $\mathcal{A}$, $\lambda \in [0, 1]$. On a alors :

$$\begin{cases} \lambda Mz = 0 & \text{dans } Q \\ \lambda z(0) = \lambda \frac{\partial z}{\partial t}(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \lambda z = \lambda v_0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ \lambda \frac{\partial z}{\partial \nu} = \lambda v_1 & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (1 - \lambda)Mh = 0 & \text{dans } Q \\ (1 - \lambda)h(0) = (1 - \lambda)\frac{\partial h}{\partial t}(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ (1 - \lambda)h = (1 - \lambda)w_0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ (1 - \lambda)\frac{\partial h}{\partial \nu} = (1 - \lambda)w_1 & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

en additionnant les deux systèmes on obtient :

$$\begin{cases} \lambda Mz + (1 - \lambda)Mh = 0 & \text{dans } Q \\ \lambda z(0) + (1 - \lambda)h(0) = \lambda \frac{\partial z}{\partial t}(0) + (1 - \lambda)\frac{\partial h}{\partial t}(0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \lambda z + (1 - \lambda)h = \lambda v_0 + (1 - \lambda)w_0 & \text{sur } \Sigma_0 \\ \lambda \frac{\partial z}{\partial \nu} + (1 - \lambda)\frac{\partial h}{\partial \nu} = \lambda v_1 + (1 - \lambda)w_1 & \text{sur } \Sigma_0 \end{cases}$$

puisque $\mathcal{U}_{ad}^0$, $\mathcal{U}_{ad}^1$, $L^2(Q)$ et $L^2(\Sigma_1)$ sont convexes, on a

$$\begin{cases} \lambda v_0 + (1 - \lambda)w_0 \in \mathcal{U}_{ad}^0, \lambda v_1 + (1 - \lambda)w_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1, \\ \lambda z + (1 - \lambda)h \in L^2(Q) \end{cases}$$

la linéarité de l'opérateur M entraîne que

$$(\lambda v + (1 - \lambda)w; \lambda z + (1 - \lambda)h) \text{ vérifie (4.1)}$$

donc $\lambda(v, z) + (1 - \lambda)(w, h) \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est convexe.

- Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est fermé.

On prend $\mathcal{A}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0) \times H$, avec

$$H = \{z \in L^2(Q), Mz \in L^2(Q)\}$$

muni de la norme

$$|z|_H^2 = |z|_{L^2(Q)}^2 + |Mz|_{L^2(Q)}^2$$

$\mathcal{H} = L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0) \times H$ est alors muni de la norme :

$$\|((v_0, v_1), z)\|^2 = |v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |z|_H^2.$$

Soit $(v_n, z_n) \in \mathcal{A}$ tel que $(v_n, z_n) \longrightarrow (v, z)$ dans $\mathcal{H}$.

On a alors

$$\begin{aligned} v_{0n} &\longrightarrow v_0 && \text{dans } L^2(\Sigma_0) \\ v_{1n} &\longrightarrow v_1 && \text{dans } L^2(\Sigma_0) \\ z_n &\longrightarrow z && \text{dans } L^2(Q) \\ Mz_n &\longrightarrow Mz && \text{dans } L^2(Q). \end{aligned}$$

Comme

$$Mz_n = 0 \text{ dans } Q \quad (4.10)$$

alors

$$Mz = 0 \text{ dans } Q. \quad (4.11)$$

Multiplions (4.10) par $\varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ et faisons une intégration par partie après avoir pris l'intégrale sur Q .

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \varphi(T) \frac{\partial z_n}{\partial t}(T) dx - \int_{\Omega} \varphi(0) \frac{\partial z_n}{\partial t}(0) dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) z_n(T) dx + \\ &\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) z_n(0) dx + \int_Q z_n M \varphi dx dt - \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial z_n}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma} z_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Puisque $z_n(0) = \frac{\partial z_n}{\partial t}(0) = 0$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \varphi(T) \frac{\partial z_n}{\partial t}(T) dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) z_n(T) dx + \int_Q z_n M \varphi dx dt - \\ &\int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial z_n}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma} z_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} \varphi(T) \frac{\partial z_n}{\partial t}(T) dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) z_n(T) dx + \int_Q z_n M \varphi dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_{1n} dx dt -$$

$$\int_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial z_n}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_0} v_{0n} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_1} z_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0.$$

Choisissons φ telle que

$$\varphi(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_1$$

il vient

$$\int_Q z_n M \varphi dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_{1n} dx dt + \int_{\Sigma_0} v_{0n} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0$$

en passant à la limite (la convergence forte entraînant la convergence faible), on obtient

$$\int_Q z M \varphi dx dt - \int_{\Sigma_0} \varphi v_1 dx dt + \int_{\Sigma_0} v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0.$$

Intégrons encore par partie cette dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi(T) \frac{\partial z}{\partial t}(T) dx - \int_{\Omega} \varphi(0) \frac{\partial z}{\partial t}(0) dx - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) z(T) dx + \\ & \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) z(0) dx + \int_Q \varphi M z dx dt - \int_{\Sigma_0} z \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt - \\ & \int_{\Sigma_1} z \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_0} \varphi \frac{\partial z}{\partial \nu} dx dt + \int_{\Sigma_1} \varphi \frac{\partial z}{\partial \nu} dx dt - \\ & \int_{\Sigma_0} \varphi v_1 dx dt + \int_{\Sigma_0} v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$- \int_{\Omega} \varphi(0) \frac{\partial z}{\partial t}(0) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) z(0) dx + \quad (4.12)$$

$$\int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} - v_1 \right) dx dt - \int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0.$$

Prenons cette fois ci dans (4.12),

$$\varphi(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma_0$$

ceci entraîne

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) z(0) dx = 0, \quad \forall \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

et donc

$$z(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.13)$$

Remplaçons dans (4.12), on a donc

$$- \int_{\Omega} \varphi(0) \frac{\partial z}{\partial t}(0) dx + \int_{\Sigma_0} \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial \nu} - v_1 \right) dx dt - \int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0. \quad (4.14)$$

Prenons cette fois ci dans (4.14),

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_0$$

ceci entraîne

$$\int_{\Omega} \varphi(0) \frac{\partial z}{\partial t}(0) dx = 0, \quad \forall \varphi(0) \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

par conséquent

$$\frac{\partial z}{\partial t}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.15)$$

Remplaçons dans (4.14) et choisissons $\varphi = 0$ sur Σ_0 , ceci conduit à

$$\int_{\Sigma_0} (z - v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dx dt = 0$$

d'où on tire que

$$z = v_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (4.16)$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 \quad \text{sur } \Sigma_0. \quad (4.17)$$

D'autre part comme $\mathcal{U}_{ad}^0$ et $\mathcal{U}_{ad}^1$ sont fermés, alors

$$\begin{array}{llll} v_{0n} \longrightarrow v_0 & \text{dans } L^2(\Sigma_0) & \text{entraîne que} & v_0 \in \mathcal{U}_{ad}^0 \\ v_{1n} \longrightarrow v_1 & \text{dans } L^2(\Sigma_0) & \text{entraîne que} & v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1 \\ z_n \longrightarrow z & \text{dans } L^2(Q) & \text{entraîne que} & z \in L^2(Q). \end{array}$$

Le système (4.11)(4.15)(4.16)(4.17) et les conclusions ci-dessus entraînent que $(v, z) \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est fermé.

La fonctionnelle J est propre (les intégrales sont toutes définies), strictement convexe et s.c.i (la norme est strictement convexe et continue donc s.c.i). Il reste à prouver que J est coercive.

Rappelons que

$$J(v, z) = \frac{1}{2} |z - z_d|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N_0}{2} |v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \frac{N_1}{2} |v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2$$

et

$$\|((v_0, v_1), z)\|^2 = |v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |v_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |z|_{L^2(Q)}^2.$$

($Mz = 0$ car (v, z) admissible)

Si

$$\|(v, z)\| \longrightarrow \infty \text{ alors nécessairement } J(v, z) \longrightarrow \infty.$$

$J(v, z)$ est alors coercive, d'où la proposition.

Déterminons maintenant les conditions d'optimalité.

Si (u, y) est le couple optimal alors les conditions d'Euler-Lagrange donnent

$$J'(u, y)(v - u, z - y) \geq 0 \quad \forall (v, z) \in \mathcal{A} \quad (4.18)$$

où $J'(u, y)(w, h)$ désigne la dérivée- Gateaux de J au point (u, y) dans la direction (w, h) .

On rappelle que par définition

$$J'(u, y)(w, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J((u, y) + t(w, h)) - J(u, y)}{t}$$

$$\begin{aligned} J((u, y) + t(w, h)) - J(u, y) &= J(u + tw, y + th) - J(u, y) \\ &= \frac{1}{2}|y + th - z_d|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + \frac{N_0}{2}|u_0 + tw_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \frac{N_1}{2}|u_1 + tw_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}|y - z_d|_{L^2(\Sigma_1)}^2 - \frac{N_0}{2}|u_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 - \frac{N_1}{2}|u_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \\ &= \frac{t^2}{2}|h|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + t(y - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + \frac{N_0}{2}t^2|w_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \\ &\quad N_0t(u_0, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{N_1}{2}t^2|w_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1t(u_1, w_1)_{L^2(\Sigma_0)} \end{aligned}$$

divisons maintenant dans cette égalité partout par $t \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{J((u, y) + t(w, h)) - J(u, y)}{t} &= \frac{t}{2}|h|_{L^2(\Sigma_1)}^2 + (y - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + \frac{N_0}{2}t|w_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + \\ &\quad N_0(u_0, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{N_1}{2}t|w_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1(u_1, w_1)_{L^2(\Sigma_0)} \end{aligned}$$

en passant à la limite, on a

$$J'(u, y)(w, h) = (y - z_d, h)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_0, w_0)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_1, w_1)_{L^2(\Sigma_0)}$$

d'où l'on tire

$$J'(u, y)(v - u, z - y) = (y - z_d, z - y)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_0, v_0 - u_0)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_1, v_1 - u_1)_{L^2(\Sigma_0)}.$$

Le couple optimal (u, y) est alors caractérisé par

$$(y - z_d, z - y)_{L^2(\Sigma_1)} + N_0(u_0, v_0 - u_0)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_1, v_1 - u_1)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0, \quad \forall (v, z) \in \mathcal{A}.$$

Nous pouvons noter que les variations de v et z restent couplées, il est donc important sinon intéressant d'avoir un système d'optimalité (S.O) où v et z sont découplés. On y arrive par la méthode de pénalisation.

4.3 Méthode de Pénalisation

Suivant l'objectif énoncé ci-dessus, introduisons

$$\mathcal{K} = \begin{cases} v = (v_0, v_1) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1, \\ z, Mz \in L^2(Q), \\ z = v_0, \frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 \text{ sur } \Sigma_0 \\ z(0) = 0, \frac{\partial z}{\partial t}(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.19)$$

Remarque 4.2 Dans l'ensemble $\mathcal{K}$ nous avons découplé l'état z et le contrôle v dans l'équation d'état en demandant juste que $Mz \in L^2(Q)$. On aurait pu également découpler z et v_0 sur Σ_0 en ajoutant à notre fonctionnelle J_ε le terme

$$\frac{1}{2\varepsilon} |z - v_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2; \text{ pour découpler totalement il faudra ajouter de plus le terme } \frac{1}{2\varepsilon} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} - v_1 \right|_{L^2(\Sigma_0)}^2$$

et dans ce cas la ligne (4.19)₃ sera remplacée par $z|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$ et $\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} \in L^2(\Sigma_0)$.

On a $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$, par conséquent $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(v, z) \in \mathcal{K}$, définissons

$$J_\varepsilon(v, z) = J(v, z) + \frac{1}{2\varepsilon} |Mz|_{L^2(Q)}^2. \quad (4.20)$$

Le problème de contrôle optimal est alors de trouver $(u_\varepsilon = (u_{0\varepsilon}, u_{1\varepsilon}), y_\varepsilon)$ tel que

$$J(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf_{(v, z) \in \mathcal{K}} J_\varepsilon(v, z). \quad (4.21)$$

Proposition 4.2 Supposons que (4.3) est vérifié. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ solution du problème (4.21).

Preuve. Puisque $(u = (u_0, u_1), y) \in \mathcal{A}$ est la solution de (4.5), $(u, y) \in \mathcal{K}$ et $J_\varepsilon(v, z) \geq 0$ pour tout $(v, z) \in \mathcal{K}$, nous pouvons donc définir le réel

$$d_\varepsilon = \inf \{ J_\varepsilon(v, z), \quad (v, z) \in \mathcal{K} \}.$$

Soit $(v^n = (v_0^n, v_1^n), z^n) \in \mathcal{K}$ une suite minimisante telle que

$$d_\varepsilon \leq J_\varepsilon(v^n, z^n) < d_\varepsilon + \frac{1}{n} < d_\varepsilon + 1. \quad (4.22)$$

En particulier,

$$0 \leq d_\varepsilon \leq J_\varepsilon(u, y) = N_0 |u_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |u_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |y - z_d|_{L(Q)}^2. \quad (4.23)$$

Par conséquent, à partir de la forme de J_ε , nous obtenons

$$|Mz^n|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad (4.24a)$$

$$|v_0^n|_{L^2(\Sigma_0)} \leq C, \quad (4.24b)$$

$$|v_1^n|_{L^2(\Sigma_0)} \leq C, \quad (4.24c)$$

$$|z^n|_{L^2(Q)} \leq C \quad (4.24d)$$

avec $C = N_0 |u_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |u_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + |y - z_d|_{L(Q)}^2 + 1 > 0$.

Par Conséquent, il existe $y_\varepsilon, \beta \in L^2(Q)$, $u_\varepsilon = (u_{0\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) \in L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0)$ et une sous suite $(v^n = (v_0^n, v_1^n), z^n)$ (toujours notée $(v^n = (v_0^n, v_1^n), z^n)$ telle que

$$Mz^n \rightharpoonup \beta \quad \text{faible dans } L^2(Q), \quad (4.25a)$$

$$v_0^n \rightharpoonup u_{0\varepsilon} \quad \text{faible dans } L^2(\Sigma_0) \quad (4.25b)$$

$$v_1^n \rightharpoonup u_{1\varepsilon} \quad \text{faible dans } L^2(\Sigma_0) \quad (4.25c)$$

$$z^n \rightharpoonup y_\varepsilon \quad \text{faible dans } L^2(Q). \quad (4.25d)$$

Puisque que $(v_0^n, v_1^n) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1$ un sous espace fermé de $L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma)$, nous déduisons que

$$u = (u_{0\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1. \quad (4.26)$$

En utilisant (4.25d), nous avons

$$z^n \rightharpoonup y_\varepsilon \quad \text{faible dans } \mathcal{D}'(Q)$$

et par conséquent

$$Mz^n \rightharpoonup My_\varepsilon \quad \text{faible dans } \mathcal{D}'(Q). \quad (4.27)$$

En combinant alors (4.25a) et (4.27) nous obtenons

$$My_\varepsilon = \beta$$

on peut alors écrire

$$Mz^n \rightharpoonup My_\varepsilon \quad \text{faible dans } L^2(Q). \quad (4.28)$$

Puisque $y_\varepsilon \in L^2(Q)$, nous avons $\frac{\partial^2 y_\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2((0, T; H^{-2}(\Omega)))$. Ainsi, utilisant les mêmes argument que dans la Remarque 4.1 on obtient que les traces $\left(y_\varepsilon|_\Sigma, \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}|_\Sigma\right)$, $(y_\varepsilon(0), y_\varepsilon(T))$ et $\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(T)\right)$ existent et appartiennent respectivement à $\left(H^{-2}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)), H^{-2}(0, T; H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))\right)$, $[H^{-1}(\Omega)]^2$ et à $[H^{-2}(\Omega)]^2$.

Multiplions maintenant My^n par $\varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) = 0$ dans Ω , $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 et intégrons par parties sur Q , nous avons

$$(Mz^n, \varphi)_{L^2(Q)} = (z^n, M\varphi)_{L^2(Q)} - (\varphi, v_1^n)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(v_0^n, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)}$$

car $(v_0^n, v_1^n, z^n) \in \mathcal{K}$.

Passant à la limite dans cette dernière inégalité pour $n \rightarrow +\infty$ et en utilisant (4.25b), (4.25c), (4.25d) et (4.28), nous obtenons

$$(My_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)} = (y_\varepsilon, M\varphi)_{L^2(Q)} - (\varphi, u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + \left(u_{0\varepsilon}, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)}$$

ce qui donne après une intégration par parties

$$\begin{aligned} (My_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)} &= \left\langle \varphi(0), \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(0) \right\rangle_{H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega)} - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0), y_\varepsilon(0) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \\ &\quad + \left\langle \varphi, \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} \right\rangle_{H_0^2(0, T; H^{3/2}(\Gamma_0)), H^{-2}(0, T; H^{-3/2}(\Gamma_0))} - \\ &\quad \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, y_\varepsilon \right\rangle_{H_0^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_0)), H^{-2}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_0))} \\ &\quad + (My_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)} - (\varphi, u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + \left(u_{0\varepsilon}, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)} \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) = 0$ dans Ω , $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 .

Après simplification, cette dernière peut être écrite comme

$$0 = \left\langle \varphi(0), \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(0) \right\rangle_{H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega)} - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0), y_\varepsilon(0) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\langle \varphi, \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} - u_{1\varepsilon} \right\rangle_{H_0^2(0,T;H^{3/2}(\Gamma_0)), H^{-2}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma_0))} \\
& - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, y_\varepsilon - u_{0\varepsilon} \right\rangle_{H_0^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_0)), H^{-2}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_0))}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$\forall \varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) = 0$ dans Ω , $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 .

Prenons dans (4.29),

$$\varphi(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma$$

ceci entraîne

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0), y_\varepsilon(0) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} = 0$$

et

$$y_\varepsilon(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{4.30}$$

Utilisant la même technique, nous obtenons également

$$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad y_\varepsilon = u_{0\varepsilon} \text{ sur } \Sigma_0, \quad \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} = u_{1\varepsilon} \text{ sur } \Sigma_0. \tag{4.31}$$

A partir de (4.28), (4.25a) et de (4.31), nous obtenons que le couple $(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \mathcal{K}$.

Finalement, en combinant (4.28), (4.25b), (4.25c), (4.25d) et la semi-continuité faible de J_ε , on obtient

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon(v^n, z^n) = d_\varepsilon.$$

En d'autres termes, $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ est le couple contrôle optimale. Son unicité résulte de la stricte convexité de J_ε .

Nous pouvons maintenant donner les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour notre problème pénalisé.

4.3.1 Système d'optimalité approché

Proposition 4.3 *Supposons que (4.3) est vérifié. Alors $(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \mathcal{U}_{ad} \times L^2(Q)$ est la solution du problème (4.21) si et seulement si il existe $p_\varepsilon \in L^2(Q)$ tel que le*

triplet $(u_\varepsilon, y_\varepsilon, p_\varepsilon)$ soit solution du système d'optimalité suivant

$$\left\{ \begin{array}{llll} My_\varepsilon & = & \varepsilon p_\varepsilon & \text{dans } Q \\ y_\varepsilon(x, 0) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ y_\varepsilon & = & u_{0\varepsilon} & \text{sur } \Sigma_0, \\ \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu} & = & u_{1\varepsilon} & \text{sur } \Sigma_0, \end{array} \right. \quad (4.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} Mp_\varepsilon & = & z_d - y_\varepsilon & \text{dans } Q \\ p_\varepsilon(x, T) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(T) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ p_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} & = & 0 & \text{sur } \Sigma_1 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

et

$$\forall (v, z) \in \mathcal{K}, \quad (p_\varepsilon, M(z - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} - (Mp_\varepsilon, z - y_\varepsilon)_{L^2(Q)} \quad (4.34)$$

$$+ N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0.$$

Preuve. Les conditions d'ordre 1 d'Euler-Lagrange donnent

$$J'_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)(v - u_\varepsilon, z - y_\varepsilon) \geq 0, \quad \forall (v, z) \in \mathcal{K}$$

c'est à dire

$$\forall (v, z) \in \mathcal{K}, \quad (y_\varepsilon - z_d, z - y_\varepsilon)_{L^2(Q)} + N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \quad (4.35)$$

$$+ N_1(u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + \frac{1}{\varepsilon} (My_\varepsilon, M(z - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} \geq 0.$$

Posons

$$p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} My_\varepsilon. \quad (4.36)$$

Alors $p_\varepsilon \in L^2(Q)$ et (4.35) devient

$$\forall (v, z) \in \mathcal{K}, \quad (p_\varepsilon, M(z - y_\varepsilon))_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, z - y_\varepsilon)_{L^2(Q)} \quad (4.37)$$

$$+N_0(u_{0\varepsilon}, v_0 - u_{0\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0.$$

Prenons maintenant dans (4.37) $z = y_\varepsilon \pm \varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ et $v = u_\varepsilon$, nous avons

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q), \quad (p_\varepsilon, M\varphi)_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, \varphi)_{L^2(Q)} = 0,$$

qui donne, après une intégration par parties sur Q

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q), \quad (Mp_\varepsilon + y_\varepsilon - z_d, \varphi)_{L^2(Q)} = 0,$$

par conséquent

$$Mp_\varepsilon = z_d - y_\varepsilon \quad \text{dans } Q. \quad (4.38)$$

Usant des mêmes arguments que dans la Remarque 4.1 on montre que les traces $p_\varepsilon|_\Sigma, \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}|_\Sigma$ existent et appartiennent à $H^{-2}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ et $H^{-2}(0, T; H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$.

On peut également définir $(p_\varepsilon(0), p_\varepsilon(T)) \in [H^{-1}(\Omega)]^2$ et $\left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(0), \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(T)\right) \in [H^{-2}]^2(\Omega)$.

Choisissons maintenant dans (4.37) $z = y_\varepsilon \pm \varphi$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ et $(v_0, v_1) = (u_{0\varepsilon}, u_{1\varepsilon})$, nous obtenons

$$(p_\varepsilon, M\varphi)_{L^2(Q)} + (y_\varepsilon - z_d, \varphi)_{L^2(Q)} = 0,$$

pour tout φ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 , ce qui, après une intégration par parties, donne

$$\begin{aligned} & (y_\varepsilon - z_d, \varphi)_{L^2(Q)} + (Mp_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)} + \left\langle \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{H^{-2}(0, T; H^{-3/2}(\Gamma_1)), H_0^2(0, T; H^{3/2}(\Gamma_1))} \\ & - \left\langle p_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{H^{-2}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_1)), H_0^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_1))} \\ & + \left\langle \varphi(T), \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(T) \right\rangle_{H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega)} - \left\langle \varphi(0), \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(0) \right\rangle_{H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega)} \\ & - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T), p_\varepsilon(T) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0), p_\varepsilon(0) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

pour tout φ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 .

Utilisons (4.38) dans cette dernière identité, on en déduit

$$+ \left\langle \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{H^{-2}(0, T; H^{-3/2}(\Gamma_1)), H_0^2(0, T; H^{3/2}(\Gamma_1))}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\langle p_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{H^{-2}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)), H_0^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1))} \\
& + \left\langle \varphi(T), \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(T) \right\rangle_{H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega)} - \left\langle \varphi(0), \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(0) \right\rangle_{H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega)} \\
& - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T), p_\varepsilon(T) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0), p_\varepsilon(0) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} = 0,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

pour tout φ dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 .

En choisissant successivement dans (4.39), φ telle que $\varphi(T) = 0$ dans Ω , $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 ; $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 on en déduit successivement que

$$p_\varepsilon(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1 \tag{4.42}$$

et finalement

$$p_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1. \tag{4.43}$$

Donc, (4.38), (4.42), (4.40), (4.41) et (4.43) donne (4.33). De (4.36), (4.30) et (4.31), on obtient (4.32). Remplaçons $z_d - y_\varepsilon$ par Mp_ε dans (4.37), on obtient (4.34).

Assurons nous maintenant que la solution $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ du problème pénalisé converge vers notre couple optimal. C'est l'objet de la section suivante.

4.3.2 Convergence de la méthode

Nous allons établir la proposition

Proposition 4.4 *Soit $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ la solution de (4.21). Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, nous avons alors*

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0), \quad (4.44)$$

$$y_\varepsilon \rightarrow y \quad \text{fortement dans } L^2(Q), \quad (4.45)$$

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \rightarrow J(u, y). \quad (4.46)$$

avec (u, y) le couple optimal et J la fonctionnelle définie par (4.4) .

Preuve. Nous allons procéder en trois étapes.

Étape 1. Prouvons la convergence faible de $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ vers $(\hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1), \hat{y}) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1 \times L^2(Q)$.

Puisque (u, y) est la solution de (4.5), nous avons

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon(v, z) \leq J_\varepsilon(u, y) = J(u, y). \quad (4.47)$$

A partir de la structure de J_ε nous déduisons que

$$|y_\varepsilon|_{L^2(Q)}^2 \leq C, \quad (4.48)$$

$$|u_\varepsilon|_{L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0)}^2 \leq C, \quad (4.49)$$

$$|My_\varepsilon|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\varepsilon} \quad (4.50)$$

où les C sont différentes constantes indépendantes de ε . Il résulte donc de (4.50) et (4.36) que

$$|p_\varepsilon|_{L^2(Q)} \leq C. \quad (4.51)$$

Nous pouvons alors extraire de $((u_\varepsilon), (y_\varepsilon))$ une suite encore notée $((u_\varepsilon), (y_\varepsilon))$, telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1) \text{ faible dans } L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0), \quad (4.52)$$

$$y_\varepsilon \rightharpoonup \hat{y} \quad \text{faible dans } L^2(Q), \quad (4.53a)$$

$$My_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(Q). \quad (4.53b)$$

Puisque $u_\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1$ qui est sous espace fermé de $L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0)$, nous déduisons que

$$\hat{u} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1) \in \mathcal{U}_{ad}^0 \times \mathcal{U}_{ad}^1. \quad (4.54)$$

De (4.53a), nous avons

$$y_\varepsilon \rightharpoonup \hat{y} \quad \text{faible dans } \mathcal{D}'(Q).$$

Par conséquent

$$My_\varepsilon \rightharpoonup M\hat{y} \quad \text{faible dans } \mathcal{D}'(Q). \quad (4.55)$$

En combinant donc (4.53b) et (4.55) nous obtenons

$$M\hat{y} = 0. \quad (4.56)$$

Puisque $\hat{y} \in L^2(Q)$, nous avons $\frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial t^2} \in L^2((0, T; H^{-2}(\Omega)))$. Ainsi, en utilisant des mêmes arguments que dans la Remarque 4.1 nous obtenons que les traces $\left(\hat{y}|_{\Sigma}, \frac{\partial \hat{y}}{\partial \nu}|_{\Sigma}\right)$, $(\hat{y}(0), \hat{y}(T))$ et $\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(0), \frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(T)\right)$ existent et appartiennent respectivement à $\left(H^{-2}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)), H^{-2}(0, T; H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))\right)$, $[H^{-1}(\Omega)]^2$ et à $[H^{-2}(\Omega)]^2$.

Multiplions maintenant (4.32)₁ par φ dans $C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) = 0$ dans Ω , $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 et intégrons par parties après avoir pris l'intégrale sur Q , nous avons

$$(y_\varepsilon, M\varphi)_{L^2(Q)} - (\varphi, u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} + \left(u_{0\varepsilon}, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)} = \varepsilon (p_\varepsilon, \varphi)_{L^2(Q)}.$$

Passons à la limite dans cette dernière identité lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et utilisons (4.52) et (4.53a), nous obtenons

$$(\hat{y}, M\varphi)_{L^2(Q)} - (\varphi, \hat{u}_1)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\hat{u}_0, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)} = 0,$$

pour tout φ dans $C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) = 0$ dans Ω , $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 , ce qui donne après une intégration par parties

$$\begin{aligned} 0 = & -(\varphi, \hat{u}_1)_{L^2(\Sigma_0)} + \left(\hat{u}_0, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_{L^2(\Sigma_0)} - \\ & \left\langle \varphi(0), \frac{\partial \hat{y}}{\partial t}(0) \right\rangle_{H_0^2(\Omega), H^{-2}(\Omega)} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0), \hat{y}(0) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} - \\ & \left\langle \varphi, \frac{\partial \hat{y}}{\partial \nu} \right\rangle_{H_0^2(0, T; H^{3/2}(\Gamma_0)), H^{-2}(0, T; H^{-3/2}(\Gamma_0))} + \\ & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \hat{y} \right\rangle_{H_0^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma_0)), H^{-2}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_0))}, \end{aligned}$$

pour tout φ dans $C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(T) = 0$ dans Ω , $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_1 .

Prenons successivement dans cette dernière égalité, $\varphi(0) = 0$ dans Ω , $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 ; $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 et $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 ; nous obtenons successivement

$$\widehat{y}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.57a)$$

$$\frac{\partial \widehat{y}}{\partial t}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.57b)$$

$$\widehat{y} = \widehat{u}_0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \quad (4.57c)$$

$$\frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} = \widehat{u}_1 \quad \text{sur } \Sigma_0. \quad (4.57d)$$

De (4.56) et (4.57), on obtient que le couple $(\widehat{u}, \widehat{y}) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{K}$.

Étape 2. Nous allons prouver que $(\widehat{u}, \widehat{y}) = (u, y)$, où (u, y) est la solution de (4.5).

Puisque $(\widehat{u}, \widehat{y}) \in \mathcal{A}$, nous avons

$$J(u, y) \leq J((\widehat{u}, \widehat{y})). \quad (4.58)$$

D'autre part, nous avons

$$J(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u, y) = J(u, y).$$

Ainsi en utilisant (4.53a) et (4.52), nous obtenons

$$J(\widehat{u}, \widehat{y}) \leq \liminf J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq J(u, y) \quad (4.59)$$

ce qui combiné avec (4.58) donne

$$J(\widehat{u}, \widehat{y}) = J(u, y).$$

Par conséquent,

$$(\widehat{u}, \widehat{y}) = (u, y). \quad (4.60)$$

Il découle donc de (4.59) que

$$J(u, y) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq J(u, y).$$

C'est à dire (4.46), i.e. : $J_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \rightarrow J(u, y)$.

Étape 3. Dans cette partie nous allons prouver la forte convergence.

Comme (4.46) peut être réécrite

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(|y_\varepsilon - z_d|_{L^2(Q)}^2 + N_0 |u_{0\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1 |u_{1\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \right) \\ = |y - z_d|_{L^2(Q)}^2 + N_0 |u_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1 |u_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2, \end{aligned} \quad (4.61)$$

en utilisant (4.52), (4.53a) et (4.60), nous avons (voir H. Brezis [4] p. 35 Proposition III.5)

$$\begin{cases} |y - z_d|_{L^2(Q)}^2 & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |y_\varepsilon - z_d|_{L^2(Q)}^2 \\ |u_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |u_{0\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \\ |u_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |u_{1\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \end{cases}$$

qui, appliqué à (4.61), donne

$$\begin{cases} |y - z_d|_{L^2(Q)}^2 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |y_\varepsilon - z_d|_{L^2(Q)}^2 \\ |u_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u_{0\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \\ |u_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u_{1\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2. \end{cases} \quad (4.62)$$

De manière similaire, puisque

$$\begin{aligned} N_0 |u_0 - u_{0\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1 |u_1 - u_{1\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 &= N_0 |u_{0\varepsilon}|_{L^2(\Gamma_0)}^2 + N_1 |u_{1\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \\ &+ N_0 |u_0|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1 |u_1|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \\ &- 2 \langle N_0 u_{0\varepsilon}, u_0 \rangle_{L^2(\Sigma_0)} \\ &- 2 \langle N_1 u_{1\varepsilon}, u_1 \rangle_{L^2(\Sigma_0)}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

en passant à la limite dans (4.63) pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et en utilisant en même temps (4.52), (4.60), (4.62)₂ et (4.62)₃, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(N_0 |u_0 - u_{0\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 + N_1 |u_1 - u_{1\varepsilon}|_{L^2(\Sigma_0)}^2 \right) = 0$$

ce qui implique (4.44).

Il suffit de prouver que $y_\varepsilon \rightarrow y$ fortement dans $L^2(Q)$ pour compléter la proposition 4.4.

Puisque qu'on peut écrire

$$|y_\varepsilon - y|_{L^2(Q)}^2 = |y_\varepsilon - z_d|_{L^2(Q)}^2 + 2 \langle y_\varepsilon - z_d, z_d - y \rangle_{L^2(Q)} + |z_d - y|_{L^2(Q)}^2, \quad (4.64)$$

passons à la limite dans (4.64) en utilisant en même temps (4.62)₁, (4.53a) et (4.60), on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |y_\varepsilon - y|_{L^2(Q)} = 0.$$

C'est à dire (4.45).

Nous pouvons maintenant établir le système d'optimalité singulier (S.O.S) pour notre couple optimal.

4.4 Système d'optimalité singulier fort

Dans cette partie, nous prouvons le Théorème :

Théorème 4.1 *On suppose que (4.3) est vérifié. Soit $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Sigma_0) \times \mathcal{U}_{ad}^1$. Alors le contrôle optimal (u, y) est caractérisé par le triplet $(u, y, p) \in \mathcal{U}_{ad}^1 \times L^2(Q) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ solution du Système d'Optimalité Singulier (S.O.S.)*

$$\left\{ \begin{array}{ll} My = 0 & \text{dans } Q \\ y = u_0 & \text{sur } \Sigma_0, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = u_1 & \text{sur } \Sigma_0, \\ y(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} Mp = z_d - y & \text{dans } Q \\ p = 0 & \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_1, \\ p(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = N_0 u_0 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (4.67)$$

et

$$\forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1, \quad (-p + N_1 u_1, v_1 - u_1)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0. \quad (4.68)$$

De (4.56), (4.57) et (4.60), nous avons (4.65).

Preuve. Tenant compte de (4.51), il existe alors $p \in L^2(Q)$ telle que $p_\varepsilon \rightharpoonup p$ dans $L^2(Q)$. En utilisant donc (4.45) et le fait que p_ε est solution de (4.33), nous pouvons prouver en procédant de la même manière que pour y_ε dans les pages 69 et 70 que p vérifie (4.66).

Maintenant, prenons dans (4.34) $z = y_\varepsilon \pm \xi$ avec $\xi \in C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ_0 . Alors

$$\xi|_{\Sigma_0} = v_0 - u_{0\varepsilon}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = v_1 - u_{1\varepsilon} = 0 \text{ et } \xi(0) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.69)$$

Par conséquent, (4.34) devient

$$(p_\varepsilon, M\xi)_{L^2(Q)} - (Mp_\varepsilon, \xi)_{L^2(Q)} + N_0(u_{0\varepsilon}, \xi)_{L^2(\Sigma_0)} = 0,$$

pour tout ξ dans $C^\infty(\overline{Q})$ telle que (4.69) soit vérifié.

En intégrant par parties le premier terme de cette relation et en utilisant d'une part le fait que p_ε est solution du (4.33), avec les traces données à la page 66, et d'autre part le fait que ξ vérifie (4.69), nous obtenons

$$0 = \left\langle \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} + N_0 u_{0\varepsilon}, \xi \right\rangle_{H^{-2}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma_0)), H_0^2(0,T;H^{3/2}(\Gamma_0))} \quad (4.70)$$

d'où nous déduisons que

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} = -N_0 u_{0\varepsilon} \quad \text{sur } \Sigma_0. \quad (4.71)$$

Ainsi nous avons d'une part

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial \nu} = -N_0 u_0 \quad \text{faible dans } L^2(\Sigma_0) \quad (4.72)$$

puisque (4.44) est vérifié, et d'autre part que p_ε est tel que

$$\left\{ \begin{array}{lll} Mp_\varepsilon & = & z_d - y_\varepsilon \quad \text{dans } Q \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} & = & -N_0 u_{0\varepsilon} \quad \text{sur } \Sigma_0 \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu} & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma_1. \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t}(T) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ p_\varepsilon(x, T) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Donc, tenant compte de (4.48) et (4.49), nous obtenons qu'il existe $C > 0$ telle que $|p_\varepsilon|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C$ (voir [13, p. 347]). Ceci implique par continuité de la trace que

$$|p_\varepsilon|_{L^2(\Sigma_0)} \leq C. \quad (4.73)$$

D'où, nous obtenons que

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ faible dans } L^2(\Sigma_0). \quad (4.74)$$

Maintenant en intégrant par parties le premier terme dans (4.34), en utilisant en même temps, d'une part le fait que p_ε est solution de (4.33), et d'autre part le fait que $z - y_\varepsilon$ vérifie

$$z - y_\varepsilon|_{\Sigma_0} = v_0 - u_{0\varepsilon}, \quad \frac{\partial(z - y_\varepsilon)}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = v_1 - u_{1\varepsilon} \text{ et } (z - y_\varepsilon)(0) = \frac{\partial(z - y_\varepsilon)}{\partial t}(0) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \forall (v, z) \in \mathcal{K}, \quad & \left(\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial \nu}, v_0 - u_{0\varepsilon} \right)_{L^2(\Sigma_0)} - (p_\varepsilon, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \\ & + N_0(u_{0\varepsilon}, z - y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_{1\varepsilon}, z - y_\varepsilon)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui associé à (4.70) donne

$$\forall v_1 \in \mathcal{U}_{ad}^1, \quad (-p_\varepsilon + N_1 u_{1\varepsilon}, v_1 - u_{1\varepsilon})_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0. \quad (4.75)$$

Passons à la limite maintenant dans (4.75) en utilisant en même temps (4.44) et (4.74), nous en déduisons (4.68). La preuve du Théorème 4.1 est alors achevée.

4.5 Système d'optimalité singulier faible

Dans cette partie nous allons prouver le Théorème :

Théorème 4.2 *Supposons que (4.3) est vérifié. Soit $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_{ad}^0 \times L^2(\Sigma_0)$. Alors le contrôle optimal (u, y) est caractérisé par le triplet $(u, y, p) \in \mathcal{U}_{ad}^1 \times L^2(Q) \times L^2(Q)$ solution du Système d'Optimalité Singulier (S.O.S.)*

$$\left\{ \begin{array}{lll} My & = & 0 \quad \text{dans } Q \\ y & = & u_0 \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} & = & u_1 \quad \text{sur } \Sigma_0, \\ y(0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.76)$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} Mp & = & z_d - y \quad \text{dans } Q \\ p & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \\ p(T) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial t}(T) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.77)$$

$$p = N_1 u_1 \quad \text{sur } \Sigma_0 \quad (4.78)$$

et

$$\begin{aligned} & (p, Mz)_{L^2(Q)} + (y - z_d, z - y)_{L^2(Q)} + \\ & N_0(u_0, v_0 - u_0)_{L^2(\Sigma_0)} + N_1(u_1, v_1 - u_1)_{L^2(\Sigma_0)} \geq 0, \quad \forall (v, z) \in \mathcal{A}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

Preuve. Nous avons déjà établi dans le Théorème 4.1 que (4.76) et (4.77) sont vérifiées.

Prenons maintenant dans (4.34) $z = y_\varepsilon \pm \xi$ avec $\xi \in C^\infty(\overline{Q})$ avec $v_0 = u_{0\varepsilon}$. Alors ξ est telle que

$$\xi|_{\Sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu}|_{\Sigma_0} = v_1 - u_{1\varepsilon} \text{ et } \xi(0) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.80)$$

Par conséquent, (4.34) devient

$$(p_\varepsilon, M\xi)_{L^2(Q)} - (Mp_\varepsilon, \xi)_{L^2(Q)} + N_1(u_{1\varepsilon}, \xi)_{L^2(\Sigma_0)} = 0$$

pour tout ξ dans $C^\infty(\overline{Q})$ telle que (4.80) soit vérifié.

Maintenant en intégrant par parties le premier terme dans cette relation et en utilisant en même temps d'une part, le fait que p_ε est solution de (4.33), avec les traces données à la page 66, et d'autre part le fait que ξ vérifie (4.80), nous obtenons

$$0 = \langle p_\varepsilon - N_1 u_{1\varepsilon}, \xi \rangle_{H^{-2}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_0)), H_0^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_0))} \quad (4.81)$$

d'où nous déduisons que

$$p_\varepsilon = N_1 u_{1\varepsilon} \quad \text{sur } \Sigma_0. \quad (4.82)$$

Ainsi, nous avons

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p = N_1 u_1 \quad \text{faible dans } L^2(\Sigma_0) \quad (4.83)$$

puisque (4.44) est vérifié. Maintenant, de (4.51), on déduit l'existence de $p \in L^2(Q)$ telle que

$$p_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ faible dans } L^2(Q). \quad (4.84)$$

Finalement, en passant à la limite dans (4.34) et en utilisant en même temps (4.53b), (4.55), (4.56), (4.44), (4.45) et (4.84) nous obtenons (4.79). Ceci complète la démonstration du Théorème 4.2.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Dans ce travail nous sommes revenus, en guise de rappels, sur quelques notions de la théorie du contrôle et, en guise de pré requis, sur les opérateurs, parabolique et hyperbolique en passant au préalable par les espaces de Sobolev. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'étude du problème de contrôle optimal de systèmes distribués singuliers pour des opérateurs de type parabolique et hyperbolique. Après avoir justifié l'existence du couple optimal contrôle- état, nous avons établi pour le cas parabolique les systèmes d'optimalité singuliers faible et fort (au prix d'une condition supplémentaire) et pour le cas hyperbolique les systèmes d'optimalité singuliers faible. Dans les deux cas, nous sommes parvenus à ces résultats grâce à la méthode de pénalisation.

Comme perspectives, on peut noter que dans le cas parabolique comme dans le cas hyperbolique nous avons des systèmes dans lesquels le contrôle est frontière, il serait dès lors intéressant de regarder des problèmes pour lesquels cette fois ci le contrôle serait distribué.

Pour le cas hyperbolique on pourrait plutôt que de travailler avec les crochets dual, utiliser le produit scalaire et ainsi espérer améliorer nos résultats.

Nous avons vu dans le cas parabolique, que pour transformer le système d'optimalité singulier faible en un système d'optimalité singulier fort, il a fallu ajouter une condition supplémentaire, mais dans les applications cette condition n'est pas généralement vérifiée ; c'est pourquoi G.Mophou et O.Nakoulima dans [20] ont tenté de contourner cette difficulté en passant par la régularisation du système. Dans la même lancée qu'eux on pourrait régulariser nos systèmes et utiliser cette fois la notion de contrôle à moindres regrets.

Bibliographie

- [1] M. Barry, O. Nakoulima, G.B. Ndiaye *Cauchy System for Parabolic Operator*, International Journal of Evolution Equations Vol. 8, Number 4, 2013, pp. 277-290.
- [2] M. Barry, G.B. Ndiaye *Cauchy System for Hyperbolic Operator*, Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications Vol. 2014, Number 4, pp. 37-52 (December 2014).
- [3] L. Berrahmoune, *Stabilisation d'une classe de systèmes distribués hyperboliques*, Analysis and Optimization of Systems. Lecture notes in Control and Information Science Vol. 111, 1988, pp. 484-493.
- [4] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983
- [5] M. Bramanti, M. Cristina Cerutti, *Wp 1, 2 solvability for the cauchy-dirichlet problem for parabolic equations with vmo coefficients* Communications in Partial Differential Equations, Vol 18, issue 9-10, 1993, pages 1735-1763.
- [6] L.C.Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Vol 19, 1997.
- [7] V.M. Govorov, *Premier problème aux limites pour équations hyperboliques avec données frontières dans L^2* , Doklady Akad. Nauk. (1982); pp. 1044-1047.
- [8] T. Kato, *Blow up of solutions of some non linear hyperbolic equations*, C.P.A.M. XXXIII, 1980, pp. 501-505.
- [9] R.Z. Khas'minskii, *Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solution to the Cauchy problem for parabolic equations* Theory of Probability and Its Applications, 1960-SIAM.
- [10] J. P. Kernevez, *Enzyme mathematics*, North-Holland Publishing Company, 1980
- [11] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Hyperbolic equations with Dirichlet boundary feedback via position vector : regularity and almost periodic stabilization*, Part III A.M.O. 8.(3). 1982; pp. 199-221.
- [12] J. L. Lions, *Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers*, Gauthiers-Villars, 1983

- [13] J. L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par les équations aux dérivées partielles*. Gauthiers-Villars, 1968. Paris
- [14] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes Aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol 1. DUNOD, Paris, 1968
- [15] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes Aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol 2. DUNOD, Paris, 1968
- [16] J.L.Lions, *Controlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués*, Hors collection Masson 1988.
- [17] J.L.Lions, *Optimal control of unstable hyperbolic systems*, Colloque de Novosibirsk, Juin 1981.
- [18] J.L.Lions, *Function spaces and optimal control of distributed systems*, U.F.R.J. Lecture Notes. Rio de Janeiro (1980).
- [19] V.A. Litovchenko, *Cauchy Problem for Parabolic Systems with convolution operators in Periodic Spaces* Mat.Zametki, 2007, Vol 82, Issue 6, pages 850-872.
- [20] G. M. Mophou, O. Nakoulima, *Control of Cauchy System for an Elliptic Operator*, Acta Mathematica Sinica, English Series. Vol. 25, No. 11, pp. 1819-1834, Nov. 2009
- [21] O. Nakoulima, *Contrôle de Systèmes mal Posés de Type Elliptique*, J. Math. Pures et Appl., 73, 441-453 (1994)
- [22] VA Solonnikov, *On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form* Trudy Matema-ticheskogo Instituta im.VA steklova, 1965-mathnet.ru
- [23] H Yamahara, *Cauchy Problem for Hyperbolic systems in Gevrey Class. A note on Gevrey indices* Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2000-cat.inist.fr

Nom et prénoms : Barry Moussa

Titre de la thèse : Système de Cauchy pour opérateurs Parabolique et Hyperbolique

Résumé : Dans cette thèse nous nous intéressons au problème de contrôle d'un système de Cauchy pour opérateur Parabolique puis pour opérateur Hyperbolique. Le système associé au deux cas est singulier ainsi, plutôt que d'utiliser la méthode classique du contrôle optimal qui consiste à considérer le contrôle v et l'état z séparément, nous considérerons alors le couple contrôle-état (v, z) . Après avoir établi l'existence et l'unicité du couple optimal, nous établissons les systèmes d'optimalités singuliers pour deux cas particuliers. Dans ces systèmes d'optimalités nous sommes parvenus à découpler le contrôle et l'état grâce à la méthode de Pénalisation.

Mots clés : opérateur Parabolique, opérateur Hyperbolique, système de cauchy, couple contrôle - état, système d'optimalité singulier fort, système d'optimalité singulier faible, pénalisation, couple admissible, Système d'optimalités approché.

Name and first name: Barry Moussa

Thesis title : Cauchy System for Parabolic and Hyperbolic operator

Summary: In this thesis, we are interest in a control problem of a Cauchy system for parabolic operator and then for an hyperbolic one. The associated system in each case is singular so rather than using classical method of optimal control which consist of dealing with the control v and the state z separately, we will consider the pair control-state (v, z) . We will first establish the existence and uniqueness of the optimal pair and then the singulars optimality's systems for two particular cases. Thanks to Penalisation method, we have decoupled the control and the state in these optimality's systems.

Key words : parabolic operator, hyperbolic operator, cauchy System, pair control-state, strong singular optimality system, weak singular optimality system, penalization, admissible pair, approached optimality system.