



Reconstruction d'images pour un imageur hyperspectral configurable

Ibrahim Ardi

► To cite this version:

Ibrahim Ardi. Reconstruction d'images pour un imageur hyperspectral configurable. Instrumentation et méthodes pour l'astrophysique [astro-ph.IM]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2020. Français. NNT : 2020TOU30302 . tel-03404224

HAL Id: tel-03404224

<https://theses.hal.science/tel-03404224>

Submitted on 26 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

**En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier**

**Présentée et soutenue par
Ibrahim ARDI**

Le 21 octobre 2020

**Reconstruction d'images pour un imageur hyperspectral
configurable**

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et
Télécommunications de Toulouse**

Spécialité : **Informatique et Télécommunications**

Unité de recherche :

IRAP - Institut de Recherche en Astrophysique et Planetologie

Thèse dirigée par

Hervé CARFANTAN et Antoine MONMAYRANT

Jury

Mme Anne SENTENAC, Rapporteure

M. Jean-François GIOVANNELLI, Rapporteur

M. Charles SOUSSEN, Examineur

M. Simon LACROIX, Examineur

M. Hervé CARFANTAN, Directeur de thèse

M. Antoine MONMAYRANT, Co-directeur de thèse

Résumé

Une image hyperspectrale (HS) d'une scène correspond à un cube de données avec deux dimensions spatiales et une dimension spectrale : elle peut être vue comme un grand nombre d'images de la scène dans différentes bandes spectrales ou comme un ensemble de spectres à chaque position spatiale. Un problème central de l'imagerie hyperspectrale est lié à la nature tridimensionnelle des données qui doivent être acquises avec des capteurs 2D. Bien que certains dispositifs optiques complexes ont cherché à imager l'ensemble du cube en une seule acquisition (imageurs dits « *snapshot* »), l'approche la plus classique consiste à effectuer un balayage, spatial, spectral ou autre de l'ensemble du cube. Plus récemment, des dispositifs effectuant des acquisitions de projections incomplètes du cube HS ont été proposés, associés à des méthodes de reconstruction pour obtenir le cube HS à partir d'un faible nombre de données (beaucoup moins de données que donnerait un balayage du cube). Les algorithmes associés à ces méthodes nécessitent des temps de calcul généralement longs.

Cette thèse se place dans ce cadre et vise à proposer des méthodes de reconstruction d'images HS pour un dispositif pilotable. Cet instrument est composé de deux lignes 4f (assemblage de deux lentilles et d'un réseau de diffraction) symétriques et séparées par une matrice de micro-miroirs (DMD pour *Digital Micromirror Device*) placée dans le plan de symétrie. L'ensemble agit comme un filtre spatio-spectral programmable. La configuration du DMD permet de faire l'acquisition de différentes projections du cube. Notons que l'image panchromatique de la scène est acquise simplement et avec le même échantillonnage que les données HS en positionnant tous les miroirs en réflexion. L'objectif est de reconstruire le cube HS avec un faible nombre d'acquisitions pour des configurations aléatoires du DMD et avec un coût de calcul limité.

Nous proposons deux méthodes de reconstruction qui prennent en compte les caractéristiques de l'imageur et exploitent la connaissance de l'image panchromatique. En particulier, nous nous sommes appuyés sur l'hypothèse que l'image HS est constituée de zones spatiales homogènes ayant des spectres similaires et que ces zones homogènes et les contours entre ces zones peuvent être détectés sur l'image panchromatique.

La première méthode définit la solution comme minimisant un terme quadratique de fidélité aux données pénalisé par un terme de régularisation de type Tikhonov, soit une pénalisation quadratique des gradients dans les trois directions spatiales et spectrale. Cette pénalisation des gradients spatiaux favorisant la présence de zones homogènes sur l'ensemble du cube HS, elle a tendance à lisser les contours de l'image. Pour remédier à cela, nous avons proposé de détecter les contours spatiaux de l'image HS à partir de l'image panchromatique et de ne pas pénaliser les gradients spatiaux de part et d'autre de ces contours. On aboutit ainsi à une méthode de reconstruction par régularisation quadratique permettant de préserver les contours de l'image HS. Pour calculer la solution de l'équation normale correspondant à ce problème, nous avons porté une attention particulière à l'implémentation d'un algorithme de type gradients conjugués et ceci de deux manières. D'une part, nous avons exploité les propriétés du dispositif instrumental pour implémenter de façon efficace le calcul du modèle direct et adjoint à faible coût de calcul. D'autre part, nous avons profité de l'aspect configurable du dispositif pour réduire le conditionnement de la matrice normale et accélérer la convergence de l'algorithme. Pour ce faire, nous avons proposé d'exploiter des configurations dites *orthogonales* du DMD.

Pour la deuxième méthode, nous nous sommes appuyés sur une hypothèse supplémentaire de séparabilité des régions homogènes, en supposant que l'on pouvait extraire de telles régions homogènes fermées à partir l'image panchromatique. Dans ce cadre, l'image HS sur ces régions est décrite comme un unique spectre multiplié par une carte d'intensité correspondant à l'image panchromatique. La reconstruction de l'image HS consiste alors simplement à estimer le spectre sur chacune des régions et nous avons proposé, là encore, d'utiliser une simple régularisation de

Tikhonov, uniquement spectrale cette fois ci. L'hypothèse de séparabilité est simple mais forte et requiert une identification minutieuse des zones homogènes. Pour ce faire, nous avons exploité une méthode de segmentation basée sur une approche de ligne de partage des eaux et sur le filtrage anisotrope adaptée aux besoins du modèle séparable.

Nous avons procédé à une analyse qualitative et quantitative de ces deux méthodes et une étude approfondie des différents paramètres entrant en jeux à partir de données simulées. Nous avons également pu tester la première méthode sur des données réelles et montrer l'intérêt des configurations orthogonales proposées.

Mots clés : Imagerie Hyperspectrale, Imageur configurable, Problèmes inverses, Reconstruction d'images, Régularisation quadratique préservant les contours, Homogénéité spatio-spectrale, Séparabilité spatio-spectrale.

Abstract

A hyperspectral (HS) image of a scene corresponds to a cube of data with two spatial and one spectral dimension: it can be seen as a large number of images of the scene in different spectral bands or as a set of spectra at each spatial position. A central problem with hyperspectral imaging is related to the three-dimensional nature of the data that must be acquired with 2D sensors. Some complex optical devices are able to image the entire cube in a single acquisition (so-called « *snapshot* » imagers), but the most conventional approach is to scan, spatially, spectrally or alternatively, the entire cube. More recently, devices performing acquisitions of incomplete projections of the HS cube have been proposed, combined with reconstruction methods to obtain the HS cube from a small amount of data (much less data than a scan of the whole cube). However, the associated algorithms generally require long computation times.

In this context, this thesis proposes HS images reconstruction methods for a re-configurable hyperspectral imager. This instrument is composed of two symmetrical 4f lines (assembly of two lenses and a diffraction grating) separated by a matrix of micro-mirrors (*Digital Micromirror Device*, DMD) placed in the symmetry plane. The DMD plays a role of programmable spatio-spectral filter and its configurations allow acquisitions of different projections of the cube. Note that the panchromatic image of the scene is easily acquired, with the same sampling as the HS data, by setting all the mirrors in reflection mode. The aim is to reconstruct the HS cube with a low number of acquisitions for random configurations of the DMD and with a limited computation cost.

We propose two reconstruction methods that take into account the characteristics of the imager and exploit the panchromatic image. In particular, we have assumed that the HS image consists of spatially homogeneous areas with similar spectra and that these homogeneous areas and the contours between these areas can be detected in the panchromatic image.

The first method defines the solution as the minimizer of a quadratic data fidelity term penalized by a Tikhonov regularization term, i.e. a quadratic penalization of gradients in the three directions. This spatial gradient penalization favors the presence of homogeneous areas over the entire HS cube and tends to smooth the image contours. To address this, we proposed to detect the spatial contours of the HS image from the panchromatic image and to relax the penalization of the spatial gradients on these contours. This leads to a quadratic regularization edge-preserving reconstruction method. To compute the solution of the corresponding normal equation, we paid particular attention to the implementation of a conjugated gradient algorithm in two ways. On the one hand, we have exploited the properties of the instrumental device to efficiently implement the computation of the direct and adjoint models at low computational cost. On the other hand, we took advantage of the configurable aspect of the device to reduce the condition number of the normal matrix and accelerate the convergence of the algorithm. To do so, we proposed to exploit so-called *orthogonal* configurations of the DMD.

The second method is based on an additional separability assumption on closed homogeneous regions, assuming that such regions could be extracted from the panchromatic image. In this framework, the HS image over these regions is described as a single spectrum multiplied by an intensity map corresponding to the panchromatic image. The reconstruction of the HS image then consists simply in estimating the spectrum on each of the regions and we proposed, once again, to use a simple Tikhonov spectral regularization. The separability assumption is simple but very strong and requires careful identification of homogeneous regions. To do this, we used a segmentation method based on a watershed approach and anisotropic filtering adapted to the needs of the separable model.

We conducted a qualitative and quantitative analysis of these two methods and an in-depth study of the various parameters involved using simulated data. We were also able to test the

first method on real data and show the interest of the proposed orthogonal configurations.

Keywords : Hyperspectral imaging, Reconfigurable imager, Inverse Problems, Image Reconstruction, Edge-preserving quadratic regularization, Spatio-spectral homogeneity, Spatio-spectral separability.

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	L'imagerie Hyperspectrale	12
1.1.1	Définition	12
1.1.2	Intérêt et applications	13
1.1.3	Contraintes	14
1.2	Imageurs hyperspectraux	14
1.2.1	Imageurs conventionnels à balayage	15
1.2.2	Imageurs non conventionnels snapshot figés	17
1.2.3	Imageurs non conventionnels configurables	21
1.2.4	Synthèse	23
1.3	Propriétés des scènes hyperspectrales	23
1.3.1	Présentation des corrélations	23
1.3.2	L'exploitation des corrélations spatio-spectrales	24
1.3.3	Diverses exploitations possibles	26
1.3.4	Prise en compte de la corrélation spatio-spectrale pour la reconstruction d'images hyperspectrales	28
1.4	Cadre de travail et contributions de cette thèse	30
1.4.1	Contexte de la thèse : projet ImHypAd	30
1.4.2	L'imageur hyperspectral pilotable considéré	30
1.4.3	Position du problème et enjeux	31
1.4.4	Une première approche régularisée : la méthode RA (<i>Regularization Approach</i>)	32
1.4.5	Une deuxième approche avec hypothèse de séparabilité : la méthode SA	34
1.4.6	Contributions et structure du manuscrit	35
2	Article EUSPICO 2018	37
I.	Introduction	40
II.	Device modeling	40
A.	Acquisition device	40
B.	Optical modeling	40
C.	Matrix modeling	41
III	Hyperspectral image reconstruction	42
A.	Reconstruction using a quadratic penalization	42
B.	Implementation	42
IV	Results and discussion	42
IV	Conclusion	43

3 Article sur l'étude des méthodes RA et SA	45
Abstract	48
1. Introduction	48
2. Programmable HyperSpectral Imager (PHSI)	51
2.1 Principle and key features	51
2.2 Discrete model	52
2.3 Matrix model	52
3 Reconstruction using a quadratic Regularization Approach (RA)	53
4 Reconstruction using a Separability Assumption (SA)	56
5 Parameters selection	58
5.1 Simulated data and reconstruction quality criteria	58
5.2 Ratio of open mirrors (ROM)	60
5.3 Parameters for the regularization approach (RA)	61
5.4 Parameters for the separability assumption (SA)	63
6 Results	65
6.1 Regularization approach (RA)	66
6.2 Separability Assumption (SA)	67
6.3 Comparison of SA and RA performances	68
7 Discussion and perspectives	72
8 Acknowledgement	73
References	73
4 Complément sur la reconstruction par régularisation quadratique (RA)	79
4.1 Implémentation de la méthode RA par gradients conjugués (CGNR)	80
4.1.1 Équation normale et algorithme CGNR	80
4.1.2 Étude du calcul de $\mathbf{A} \cdot$	81
4.1.3 Étude du calcul de $\mathbf{A}^t \cdot$	82
4.1.4 Coût de calcul de l'algorithme CGNR	82
4.2 Vitesse de convergence du <i>CGNR</i>	83
4.2.1 Majoration de $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$	84
4.2.2 Structure de la matrice $\mathbf{H}^t \mathbf{T}^{-1} \mathbf{H}$	86
4.2.3 Cas de configurations orthogonales normalisées du DMD	87
4.2.4 Cas d'un modèle de bruit blanc	89
4.2.5 Illustration du conditionnement et de la vitesse de convergence sur des simulations	90
5 Article sur la validation expérimentale de la méthode RA	93
1. Introduction	96
2. Ideal Model of Dual Disperser System	97
3. Reconstruction of the Hyperspectral Datacube via Edge Preserving Regularization	98
A. Properties of the Filtering Cube	99
4. Experimental System	100
A. Optical Setup	100
B. DMD Mask	103
C. Ground Truth Comparison	104
5. Testing Reconstruction Performance with Small Homogenous Scene	105
A. Scene and Variables	105
B. Results - SAM	105
C. Results - Number of Iterations	106
6. Reconstruction of a Large Multispectrum Scene	106

A. Scene A - Stacked Filters	106
B. Scene B - Checkerboard	110
7. Conclusion	115
References	115
6 Conclusion et perspectives	117
6.1 Conclusion	117
6.2 Perspectives	118
6.2.1 Amélioration des performances des méthodes de reconstruction proposées	119
6.2.2 Exploitations des images reconstruites	121
6.2.3 Vers une exploitation adaptative des scènes hyperspectrales.	121
Annexes	123
A Article GRETSI 2017	125
1. Introduction	128
2. Modélisation du dispositif	128
2.1 Dispositif d'acquisition	128
2.2 Modélisation optique	129
2.2 Modélisation matricielle	130
3. Reconstruction du cube hypertspectral	130
4. Premiers résultats	131

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 L'imagerie Hyperspectrale	12
1.1.1 Définition	12
1.1.2 Intérêt et applications	13
1.1.3 Contraintes	14
1.2 Imageurs hyperspectraux	14
1.2.1 Imageurs conventionnels à balayage	15
1.2.2 Imageurs non conventionnels snapshot figés	17
1.2.3 Imageurs non conventionnels configurables	21
1.2.4 Synthèse	23
1.3 Propriétés des scènes hyperspectrales	23
1.3.1 Présentation des corrélations	23
1.3.2 L'exploitation des corrélations spatio-spectrales	24
1.3.3 Diverses exploitations possibles	26
1.3.4 Prise en compte de la corrélation spatio-spectrale pour la reconstruction d'images hyperspectrales	28
1.4 Cadre de travail et contributions de cette thèse	30
1.4.1 Contexte de la thèse : projet ImHypAd	30
1.4.2 L'imageur hyperspectral pilotable considéré	30
1.4.3 Position du problème et enjeux	31
1.4.4 Une première approche régularisée : la méthode RA (<i>Regularization Approach</i>)	32
1.4.5 Une deuxième approche avec hypothèse de séparabilité : la méthode SA	34
1.4.6 Contributions et structure du manuscrit	35

La présente thèse s'intéresse au développement de méthodes de reconstruction d'images hyperspectrales (HS) pour un imageur non-conventionnel pilotable. Dans ce chapitre on introduit les notions, les problématiques et les travaux nécessaires à la compréhension du contexte général de la thèse. À cet effet, on présentera respectivement l'imagerie hyperspectrale, les imageurs hyperspectraux existants, les propriétés des images HS et leur exploitation et l'on conclura par le cadre de travail et les contributions de cette thèse.

Dans la section 1.1 on procédera à la définition de l'imagerie hyperspectrale et à la description des données hyperspectrales notamment leur caractère discret et l'origine de cette discrétisation. On présentera quelques applications de l'imagerie HS et on exposera le grand potentiel informatif de ces données. Enfin, on traitera des deux grandes contraintes inhérentes à l'imagerie hyperspectrale, qui font obstacle à son utilisation.

La section 1.2 propose un rapide état de l'art des imageurs hyperspectraux existants. Il existe dans la littérature 3 générations technologiques d'imageurs hyperspectraux, soit par ordre chronologique d'apparition : les imageurs à balayage spatial, spectral et spatio-spectral dits conventionnels; les imageurs non-conventionnels à configuration figée; et les imageurs non-conventionnels pilotables. Ces deux dernières générations d'imageurs nécessitent des méthodes de reconstructions que l'on décrira brièvement.

La section 1.3 est dédiée aux propriétés des images hyperspectrales et plus particulièrement des corrélations spatiales et spectrale et spatio-spectrale présentes dans les scènes HS, à leurs exploitations, notamment pour la reconstruction d'images hyperspectrales.

Le contexte de cette thèse sera présenté section 1.4, en insistant sur la problématique considérée et les contributions proposées. Le contexte comprendra la description du projet s'appuyant sur un imageur HS non conventionnel configurable. La problématique considérée est décrite en tenant compte des contraintes de l'imagerie HS et des particularités de l'imageur. Les contributions sont ensuite détaillées, cela comprendra les hypothèses utilisées, les formulations mathématiques des problèmes associés et les méthodes de résolution en résultant. Ces contributions seront développées dans les autres chapitres du manuscrit.

1.1 L'imagerie Hyperspectrale

1.1.1 Définition

L'imagerie hyperspectrale exhibe le contenu spectral des scènes et objets imagés. Pour chaque position spatiale imagée, elle encode la lumière sur une plage spectrale donnée en un grand nombre de bandes spectrales (d'où le terme "hyperspectrale"), comparable à celui d'un spectromètre. Puisqu'à chaque position spatiale est associé un contenu spectral, on représente naturellement les données Hyperspectrales par un cube, de 2 dimensions spatiales (axes x, y) et 1 dimension spectrale (axe λ , figure 1.1).

D'un point de vue pratique, l'accès au contenu spectral dans un cube de données hyperspectrales se fait de manière discrète suivant les 3 dimensions. Cet effet de discrétisation est en effet du, d'une part au processus d'acquisition qui passe nécessairement par l'utilisation d'une caméra ou autre capteur du même genre, et d'autre part à l'étape de diffraction ou de filtrage spectral que nécessite l'imagerie hyperspectrale. Le pas de discrétisation qui en résulte est le petit élément représentable sur le cube, appelé communément le *voxel*, et caractérise la finesse de représentation des données sur le cube, ses dimensions sont donc directement liées aux résolutions de l'imageur hyperspectral. Suite à cette discrétisation, on remplace les axes x, y et λ par leurs homologues discrets c, r et w respectivement. Ainsi sur un cube hyperspectral tel que montré sur la figure 1.2, l'accès à la donnée située à la position (r, c, w) se fait par le biais

1. Image extraite de <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1537511017302635>

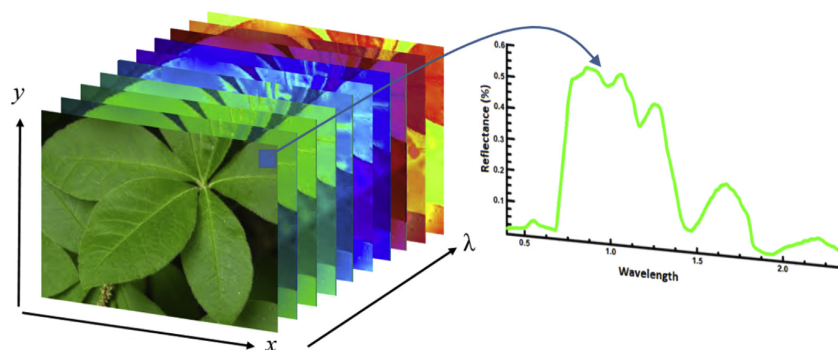


FIGURE 1.1 – Représentation d’un cube de données hyperspectrales ¹.

du *voxel* désigné par la notation $S_0(r, c, w)$ où S_0 représente le cube hyperspectral. Finalement on note la dimension d’un cube hyperspectral par $R \times C \times W$ pour désigner un cube ayant R lignes, C colonnes et W bandes spectrales. Dans toute la suite on appellera scène HS, objet HS ou simplement cube HS le cube hyperspectral discret S_0 correspondant à la scène imagée.

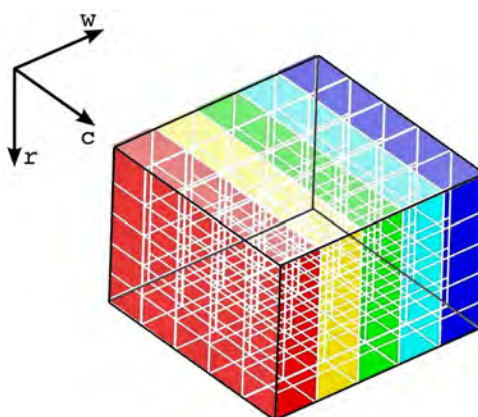


FIGURE 1.2 – Représentation d’un cube de données hyperspectrales discrétisé ².

1.1.2 Intérêt et applications

L’intérêt grandissant pour l’imagerie hyperspectrale est lié à la richesse des données qu’elle contient. Comparée aux images monochromatiques (en niveau de gris) et couleur (dites “RGB”) où les objets sont représentés sur respectivement 1 et 3 bandes spectrales, l’imagerie hyperspectrale donne accès pour chaque pixel au spectre de la zone qu’il image, discrétisé sur plusieurs dizaines voire centaines de valeurs. Cette finesse d’information spectrale confère à l’imagerie hyperspectrale une capacité d’analyse de scènes bien supérieure à l’imagerie noir & blanc ou couleur. En donnant accès au spectre des éléments imagés (le plus souvent réfléchi, mais dans certains cas émis), elle permet en effet d’identifier leur nature physique de manière très précise – le terme “signature spectrale” illustre bien cette capacité d’identification.

Les domaines d’exploitation de l’imagerie hyperspectrale sont l’ensemble des domaines de l’imagerie : ils vont de l’observation de l’espace à la microscopie, en passant par l’observation de

2. Image extraite de <http://en.wikipedia.org/wiki/File:AcquisitionTechniques.jpg>

la terre et l'analyse de scènes variées, et ce pour pour des applications très variées : détection de maladies sur des végétaux, identification du degré de maturité de cultures, tri de déchets... L'imagerie hyperspectrale apporte même des capacités tout à fait nouvelles par rapport à l'imagerie classique : ainsi la détection de gaz, aussi bien sur des scènes à échelle humaine que dans des situation d'observation de la terre.

C'est naturellement les progrès dans les technologies d'acquisition de données hyperspectrales qui permettent le développement d'applications nouvelles. Nous verrons en section 1.2 l'évolution de ces technologies, évolution dans laquelle s'inscrivent travaux de cette thèse.

1.1.3 Contraintes

C'est la structure tridimensionnelle intrinsèque des images hyperspectrales qui impose deux principales contraintes :

- une image hyperspectrale est volumineuse,
- les technologies d'imagerie reposent sur des capteurs bidimensionnels, qui ne peuvent donc percevoir qu'une projection (au sens large du terme) du cube hyperspectral.

La taille des images hyperspectrales peut atteindre plusieurs centaines de Mo pour des données bien résolues spatialement et spectralement. Cela soulève des difficultés de stockage, de transmission, et surtout de traitement, qui font par exemple qu'aujourd'hui peu de systèmes embarqués exploitent des données hyperspectrales en temps réel.

Le fait que la structure tridimensionnelle des images hyperspectrales ne puisse être acquise que via des projections planes sur un imageur impose une *séquence d'acquisitions* pour capturer un cube hyperspectral. Cela implique d'une part une certaine durée d'acquisition, mais surtout cela contraint l'évolution de la scène et de la position du capteur pendant l'acquisition : seules des scènes statiques peuvent être correctement imagées, et le mouvement du capteur doit être soit nul, soit parfaitement connu (et de préférence simple, translation ou rotation pure par exemple).

Ces contraintes constituent les principales motivations de la recherche et du développement de concepts d'imageurs hyperspectraux innovants, dont nous allons donner un aperçu dans la section suivante.

1.2 Imageurs hyperspectraux

Les premières techniques d'imagerie hyperspectrale réalisent l'acquisition des données par une séquence d'acquisitions de tranches du cube hyperspectral. Ce type d'imageurs ne nécessite aucun post-traitement des données acquises, le cube étant simplement construit en agrégeant les tranches.

Une autre génération d'imageurs a pour objectif de réduire autant que possible le nombre d'acquisitions nécessaires, et donc le temps d'acquisition et la taille des données acquises, permettant d'étendre l'imagerie hyperspectrale aux scènes dynamiques. Cette génération d'imageurs appelés *snapshot* ne nécessite qu'une seule acquisition pour *reconstruire* la totalité du cube hyperspectral. Ces imageurs ne sont pas contrôlables : leurs caractéristiques sont fixes, et la reconstruction des données implique des calculs longs et coûteux, qui exploitent des hypothèses sur la nature des scènes imagées.

Plus récemment, grâce à des systèmes optiques *configurables*, une nouvelle génération d'imageurs non conventionnels est apparue, avec l'objectif de minimiser le nombre d'acquisitions et d'employer des méthodes de reconstruction moins exigeantes en termes de ressources calculatoires et en hypothèses. Ces imageurs ouvrent la voie vers des systèmes capables de reconstruire en temps-réel le cube de données, et même d'adapter les configurations d'acquisitions aux contenus des scènes HS imagées.

Nous présentons dans cette partie quelques exemples d'imageurs de chacune de ces familles d'imageurs, conventionnels, non conventionnels figés et non conventionnels configurables, en décrivant brièvement leur système optique/physique ainsi que les méthodes de traitement de données associées.

1.2.1 Imageurs conventionnels à balayage

Les imageurs conventionnels ne nécessitent pas de traitement pour former le cube HS de la scène imagée. En effet l'acquisition du cube HS par cette famille d'imageurs s'opère dans un premier temps par acquisitions successives de "tranches" du cube HS, le cube étant formé par simple compilation des projections.

Balayage spatial "Push-broom"

Pour ce type d'imageur [Pet05] chaque acquisition est une coupe (w, r) du cube tel que montrée sur la figure 1.3, à une position donnée sur l'axe c qui varie au cours du processus d'acquisition pour permettre la collecte de l'ensemble des données du cube. Cette variation de la position spatiale (axe c) au cours de l'acquisition est à l'origine de l'appellation d'imageur à balayage spatial ou *push-broom*.

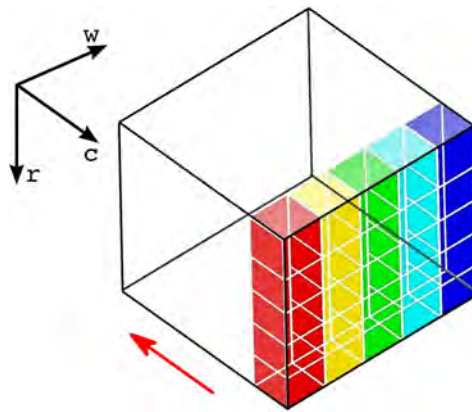


FIGURE 1.3 – Balayage spatial³(la flèche rouge indique la direction du balayage).

La réalisation de ce schéma d'acquisition est simple : afin de produire des coupes (w, r) , un obturateur (fente) est posé à l'entrée du système optique devant un élément dispersif tels qu'un prisme ou un réseau de diffraction. La lumière qui passe à travers l'obturateur est spectralement dispersée puis acquise par la caméra placée au bout du système optique, constituant une coupe (w, r) du cube.

L'avantage des imageurs *push-broom* est leur grande résolution spectrale. Leur principal inconvénient est le besoin d'effectuer (et mesurer) des mouvements précis par rapport à la scène. Leurs deux principales applications sont l'observation de la terre par un satellite ou un aéronef, et le contrôle qualité dans les chaînes de production où les mouvements des objets observés sont des translations de vitesse contrôlée.

Balayage spectral "roue à filtre"

Les imageurs à balayage spectral [EBF10] construisent le cube HS par acquisitions successives de coupes (r, c) . Chaque acquisition est une image de la scène prise à une longueur d'onde donnée,

3. Image extraite de <http://en.wikipedia.org/wiki/File:AcquisitionTechniques.jpg>

et la collecte de l'ensemble des données du cube HS se fait en déplaçant cette longueur d'onde sur tout le domaine spectral (figure 1.4).

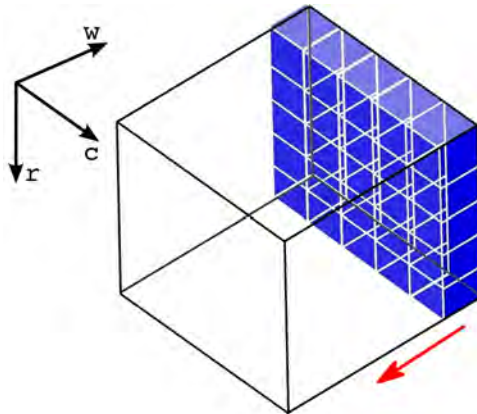


FIGURE 1.4 – Balayage spectral⁴(la flèche rouge indique la direction du balayage).

Comme pour les imageurs à balayage spatial, le principe de fonctionnement est simple : pour produire des images à différentes longueurs d'onde, on utilise un ensemble de filtres spectraux que l'on place successivement à l'entrée du système optique.

Ce type d'imageur bénéficie d'une très haute résolution spatiale, mais le nombre de filtres que l'on peut positionner devant la caméra est souvent limité, ce qui donne une faible résolution spectrale.

Balayage spatio-spectral

Les imageurs à balayage spatio-spectral acquièrent des coupes selon un plan oblique tel que montré figure 1.5. La bande spectrale mesurée sur la scène dépend donc de la position spatiale : de même que pour les imageurs à balayage spatial, il est nécessaire de déplacer l'imageur relativement à la scène afin de collecter l'ensemble des données.

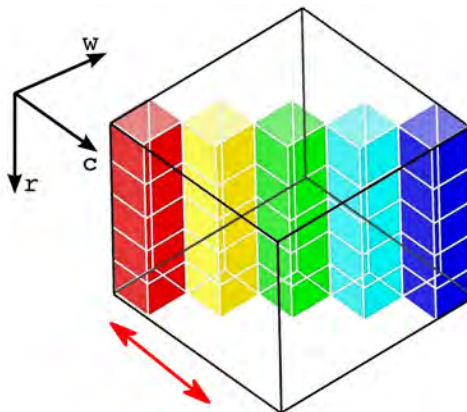


FIGURE 1.5 – Balayage spatio-spectral⁵.

La projection oblique du cube HS appelé filtre spatio-spectral (ou filtre à gradient) est relativement difficile à produire et passe souvent par l'utilisation d'interféromètres. De nos jours, notamment grâce aux avancées en micro et nano conception des solutions très compactes et

4. Image extraite de <http://en.wikipedia.org/wiki/File:AcquisitionTechniques.jpg>

5. Image extraite de <http://en.wikipedia.org/wiki/File:AcquisitionTechniques.jpg>

intégrées sur silicium ont été développées, ainsi l'imageur *CMOS* [LGG⁺14] à interféromètre *Fabry-Pérot*.

Les imageurs à balayage spatio-spectral ont une très bonne résolution spatio-spectrale. De plus l'intégration sur puces *CMOS* facilite grandement leur utilisation. Cependant l'inconvénient principal de ce type d'imageur à balayage est la sensibilité aux mouvements relatifs de la scène imagée.

Conclusion

Les imageurs à projection conventionnelle ou à balayage sont très simples d'utilisation car ils ne nécessitent pas d'algorithme pour construire le cube HS de la scène imagée. La complexité des systèmes optiques utilisés est peu à modérément complexe et facilite leur conception et calibration. Les résolutions spatiales et spectrales atteintes sont généralement bonnes surtout avec les imageurs à balayage spatio-spectral qui offrent un très bon compromis entre résolution spatiale et spectrale.

Bien qu'ils répondent aux besoins de l'imagerie hyperspectrale, la famille des imageurs à balayage souffre cependant de temps d'acquisition longs à cause du balayage. Ces contraintes d'utilisation les rendent inutilisables pour de nombreuses applications.

1.2.2 Imageurs non conventionnels snapshot figés

Pour ces imageurs, l'objectif en effet est de *reconstruire* le cube HS à partir d'une seule acquisition de l'imageur – d'où leur qualification de *snapshot*. Puisque la taille des données acquises est très inférieure à celle du cube HS, la construction parfaite du cube à partir de ces données est a priori impossible, aussi ces imageurs visent à définir une acquisition qui contient le plus d'informations possibles. Ensuite, le cube HS est reconstruit grâce à des algorithmes qui exploitent des hypothèses sur la nature et les caractéristiques de la scène imagée.

Il existe dans la littérature de nombreux imageurs non conventionnels *snapshot* figés, aussi nous n'en décrivons ici que quatre, de nature assez différente, classés ainsi :

- imageur à dispersion simple,
- imageur à dispersion multiple tomographique,
- imageur à dispersion avec masque spatial,
- imageur sans dispersion, avec multiplexage dans le domaine de Fourier.

Imageur à dispersion simple

Pour ce type d'imageurs le cube HS est dispersé une fois puis le résultat est directement acquis par une caméra.

L'architecture interne de ce type d'imageur comporte seulement un élément dispersif, tel que montré sur la figure 1.6 du prototype proposé dans [BKGG17]. Le principe est d'étaler la dimension spectrale du cube HS suivant une direction spatiale, ce qui crée un mélange spatio-spectral au niveau du détecteur. La reconstruction du cube HS est ici un problème très sous déterminé. Pour remédier à cela, [BKGG17] ont fait l'hypothèse que l'information spectrale sur les contours de l'image acquise correspond à des spectres purs de la scène. La reconstruction du cube HS se fait donc en deux étapes : reconstruction des spectres aux niveaux des contours par minimisation d'une fonction coût de type $\ell_2 - \ell_1$, puis, en utilisant les spectres ainsi reconstruits comme dictionnaire, reconstruction du reste du cube HS en exploitant un a priori de parcimonie.

Le principal avantage de ce type d'imageur est la simplicité du système optique, qui nécessite cependant un calibrage très précis. Mais le mélange spatio-spectral complique grandement l'étape de reconstruction, qui nécessite de lourds calculs (de l'ordre de plusieurs minutes).

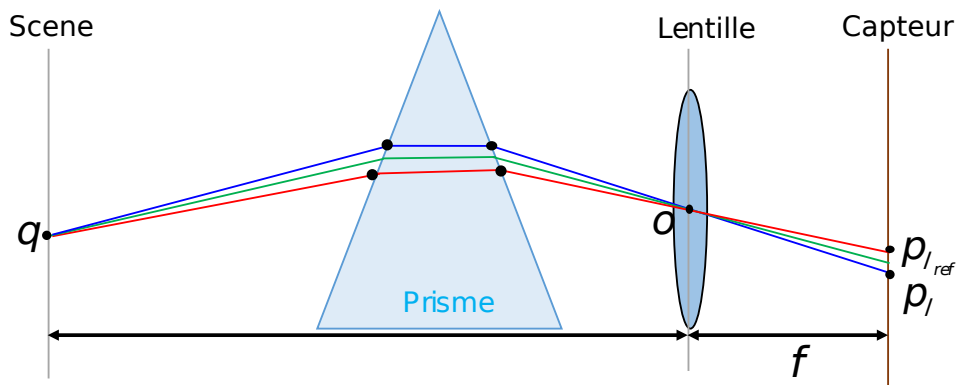


FIGURE 1.6 – Schéma du principe optique d'un imageur à dispersion simple [BKGK17]

Imageur à dispersion multiple

Contrairement aux imageurs à dispersion simple, les imageurs à dispersion multiple acquièrent plusieurs projections du cube HS sur la caméra. La figure 1.7 montre un exemple de ces projections, où la projection centrale correspond à l'image RGB de la scène. Grâce à ces multiples projections le problème de reconstruction est bien moins sous déterminé et [JWF⁺07] proposent de le résoudre par un algorithme EM (*Expectation Maximization*) classique pour la reconstruction tomographique.

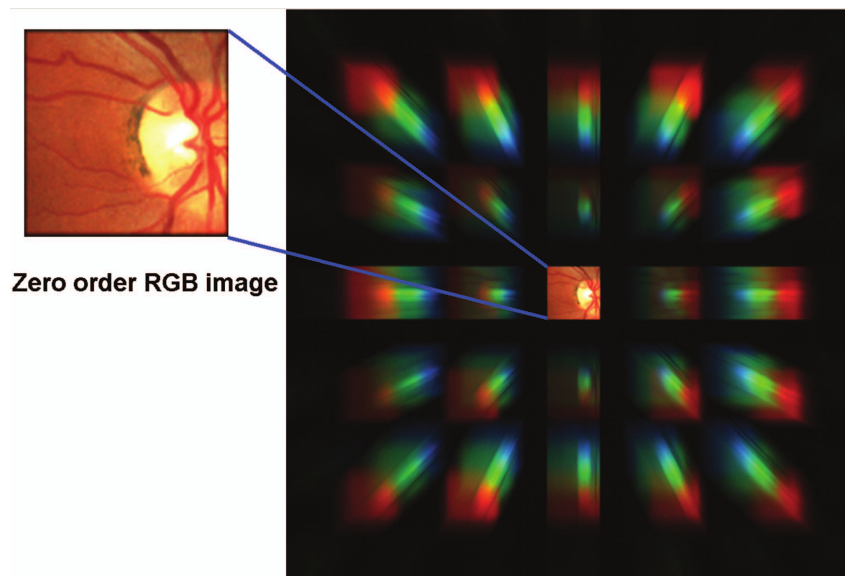


FIGURE 1.7 – Illustration de données obtenues par un imageur à dispersion multiple [JWF⁺07]

L'avantage de cet imageur est son temps de reconstruction très court (de l'ordre d'un dixième de seconde), mais au détriment d'une perte importante de résolution spatiale et spectrale.

Imageur à dispersion avec sélection spatiale

Ce type d'imageurs opère un filtrage spatial sur le cube HS avec des masques codés (*coded aperture*) placés le long de l'axe optique, tel que montré sur la figure 1.8 du prototype CASSI (pour *Coded Aperture Snapshot Spectral Imager*) proposé par [WJWB08]. Hormis la présence du masque codé, l'architecture interne du CASSI est la même que celle d'un imageur à dispersion

simple sans masque : le rôle du masque est réduire le mélange spatio-spectral. Le problème de reconstruction reste bien sûr sous déterminé, mais il nécessite moins d’hypothèses que pour un imageur à dispersion simple sans masque. La reconstruction proposée par [WJWB08] pour l’imageur CASSI repose sur une hypothèse de parcimonie de la représentation du cube HS dans une base d’ondelettes par minimisation d’une fonction de coût de type $\ell_2 - \ell_1$.

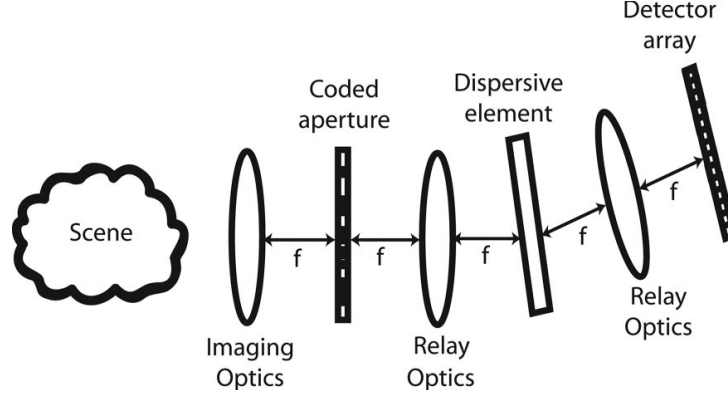


FIGURE 1.8 – Schéma du principe optique d’un imageur à dispersion avec sélection CASSI [WJWB08]

Notons qu’une variante intéressante de l’imageur CASSI proposée par les mêmes auteurs est le “Dual-Disperser CASSI” [GJB⁺07], illustré figure 1.9. Dans cette variante, le masque codé effectue une sélection spatio-spectrale après une première dispersion, puis une seconde dispersion redresse l’étalement spectral, aboutissant en fait à une sélection spectrale en chacun des pixels du détecteur. Les auteurs proposent un algorithme de reconstruction de type expectation-maximization, qui exploite une hypothèse de parcimonie exprimée dans une description multi-échelle.

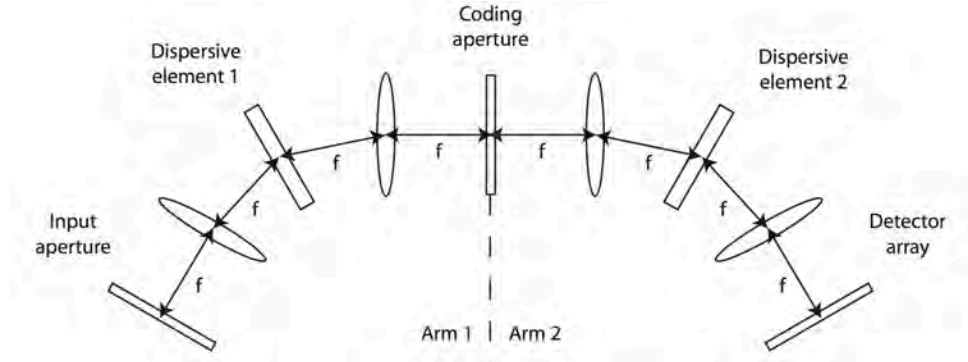


FIGURE 1.9 – Schéma du principe optique du concept Dual-Disperser CASSI (extrait de [GJB⁺07])

Ce type d’imageurs permet d’atteindre un bon compromis entre résolution spatiale et spectrale, qui dépend directement du masque codé, mais le temps de reconstruction reste cependant de l’ordre de plusieurs minutes.

Imageur avec modulation dans le domaine de Fourier

Cette classe d’imageurs n’utilise pas d’élément dispersif pour faire apparaître l’information spectrale du cube HS, la principale motivation étant que la dispersion crée un mélange spatio-

spectral difficile à traiter. Les imageurs sans dispersion modulent l'information spectrale dans un domaine symbolique de sorte qu'il n'y a pas de recouvrement entre les spectres modulés, la reconstruction s'opérant alors par simple démodulation.

Le modulation ou le multiplexage de l'information spectrale dans le domaine de Fourier est la technique la plus communément utilisée. Le principe de fonctionnement consiste à appliquer un motif en forme sinusoïdale de fréquence différente à chaque bande spectrale du cube HS, puis de sommer les résultats pour former une seule acquisition. Le prototype développé par [DHS⁺18] et montré figure 1.10 implémente exactement cette procédure où les images x_i correspondent aux bandes spectrales et s_i aux motifs sinusoïdaux. Après le calcul de transformée de Fourier pour l'acquisition (désignée par le symbole $F\{\cdot\}$ sur la figure), on retrouve les contenus spectraux à des positions différentes qui dépendent des fréquences des motifs et sans chevauchements. La reconstruction du cube HS se fait indépendamment pour chaque bande spectrale par calcul de transformée de Fourier inverse.

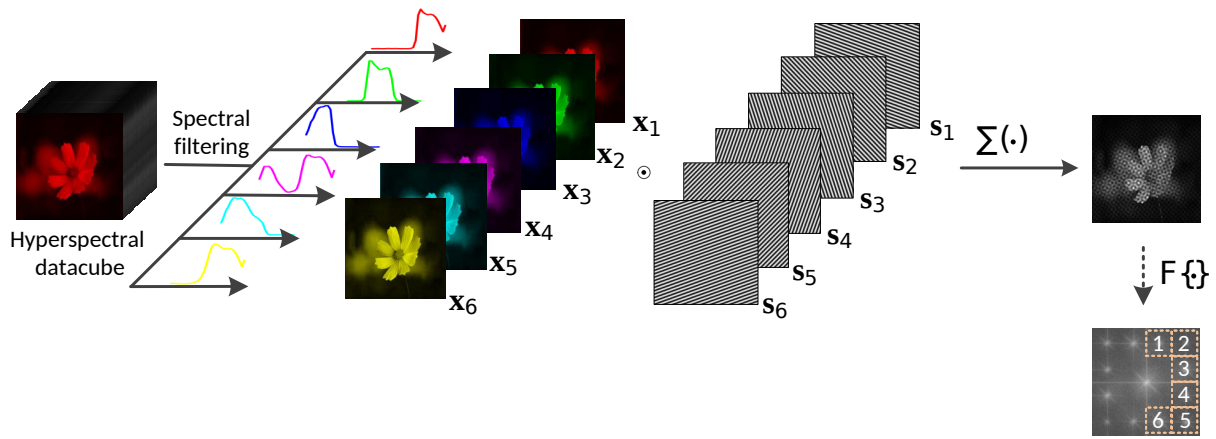


FIGURE 1.10 – Illustration du fonctionnement d'un imageur par modulation dans le domaine de Fourier [DHS⁺18]

Grâce aux implémentations efficaces de la transformée de Fourier, le temps de reconstruction pour ce type d'imageur est court, de l'ordre de quelques dizaines de ms. Cet avantage est cependant contrebalancé par le temps nécessaire à l'acquisition, qui est souvent assez long à cause de l'utilisation d'une roue à filtres pour le filtrage spectral⁶. De plus, l'étendue du domaine de Fourier est finie car la fréquence maximale de modulation limitée (à un pixel), ce qui implique une réduction de la résolution spatiale par rapport à la résolution effective de la caméra.

Conclusion

Les imageurs non conventionnels *Snapshot* pallient parfaitement le problème du volume des données acquises, en se restreignant à une seule acquisition. Néanmoins, cette réduction drastique des données impose de faire un compromis entre le temps de reconstruction, les résolutions spatiale et spectrale. Ainsi, d'une part pour les imageurs où les spectres se chevauchent et se mélangent au niveau de la caméra tel que CASSI, le temps d'acquisition est court et la résolution spectrale est correcte, en revanche le temps de reconstruction est grand à cause des fonctions de coût $\ell_2 - \ell_1$ à minimiser. Les imageurs à dispersion multiple évitent l'enchevêtrement des spectres au prix d'une réduction importante de la résolution spatiale, mais les temps de reconstruction

6. En effet, malgré le qualificatif "snapshot" du titre de [DHS⁺18], le système proposé nécessite une séquence d'acquisitions

et d'acquisition sont très courts. Finalement, pour atteindre un temps de reconstruction court et une résolution spatiale correcte, les imageurs à modulation sacrifient le temps d'acquisition qui est long.

La restriction à une seule acquisition a été un choix très ambitieux qui impose des compromis difficiles et peu pratiques entre le temps et la qualité de la reconstruction du cube HS. La génération d'imageurs qui succédera à celle-ci va permettre relâcher cette contrainte d'acquisition unique, avec l'objectif d'atteindre des compromis plus intéressants.

1.2.3 Imageurs non conventionnels configurables

Le développement des imageurs non conventionnels configurables a été fortement influencé par les imageurs *snapshot* figés à dispersion simple et ouverture codée de type CASSI. L'objectif est de profiter des avantages de l'architecture CASSI en termes de temps d'acquisition et de résolution spatiale, et d'accélérer l'étape de reconstruction par ajout de données (acquisitions supplémentaires) grâce à des algorithmes plus rapides et des hypothèses plus simples.

Sur CASSI, le cube HS est dans premier temps dispersé puis filtré par le masque codé avant d'atteindre la caméra et de former la projection souhaitée. Ainsi le modèle du masque codé définit entièrement la projection, et modifier le masque modifie la projection. L'origine de la conception de ces imageurs non conventionnels configurables est le développement de technologies de masques codés configurables : DMD (Digital micromirror device) ou LCOS (Liquid crystal on silicon), qui permettent de modifier très rapidement les projections opérées par le système.

Deux types de filtrage ont été adoptés : le filtrage spatial et le filtrage spatio-spectral. Nous décrivons ci-dessous deux imageurs correspondant à ces deux types de filtrage.

Imageur à filtrage spatial configurable de type CASSI

L'architecture de cet imageur correspond exactement à celle de CASSI, à la différence que le masque codé est remplacé par une matrice de micro-miroirs programmable DMD, tel que le montre la figure 1.11 du prototype proposé par [WMAPI1]. Le DMD joue le même rôle de sélection/filtrage que celui du masque codé et permet donc de définir un très grand nombre de projections en fonction de la configuration de ses micro-miroirs.

Grâce aux acquisitions multiples, le niveau de sous-détermination du problème de reconstruction est réduit par rapport au cas d'une seule acquisition, il est donc possible de relâcher quelques hypothèses. [WMAPI1] propose de conserver principalement l'hypothèse de parcimonie du cube HS pour les dimensions spatiales et de la relaxer pour la dimension spectrale. Cet a priori est implémenté grâce à une minimisation de la variation totale (TV) sur les gradients spatiaux. La reconstruction du cube HS nécessite alors la minimisation d'une fonction coût de type $\ell_2 - \ell_1$.

Les qualités de reconstruction obtenues sont assez satisfaisantes et marquent une nette amélioration par rapport à CASSI, augmentant par exemple le *PSNR* de $23dB$ à $30dB$. Mais la fonction de coût de la forme $\ell_2 - \ell_1$ impose un temps de reconstruction est assez long (plusieurs dizaines de secondes pour un cube de taille $256 \times 256 \times 21$ et à partir de 10 acquisitions). L'approche de [WMAPI1] privilégie la qualité de reconstruction sur le temps de reconstruction. Du point de vue de la conception, l'architecture proposée est peu complexe et très compacte, bien qu'elle nécessite une calibration précise.

Imageur à filtrage spatio-spectral

L'adjonction d'un filtrage configurable spatio-spectral offre une flexibilité supplémentaire quant aux choix des projections possibles du cube HS. Effectivement, grâce à ce type de filtres il

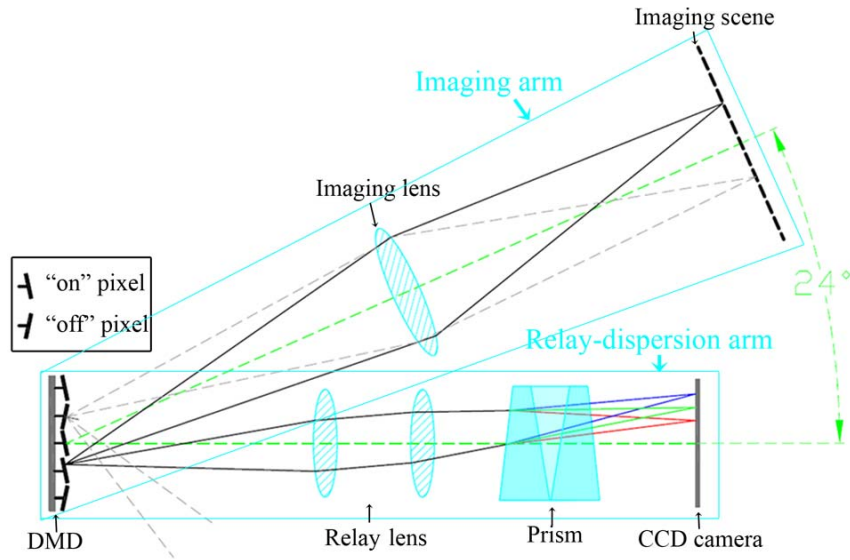


FIGURE 1.11 – Schéma du principe optique d’un imageur à filtrage spatial configurable de type CASSI [WMAF11]

est possible de choisir des projections qui privilégient la préservation de l’information spectrale, ou de l’information spatiale, avec de plus la possibilité de faire un compromis entre ces différentes informations. Le développement de ce type d’imageurs a été possible grâce aux filtres spectraux optiques tels que les filtres à cristaux liquides LCOS dont le temps de rafraîchissement est très court.

[LWLD14] propose un imageur simple et efficace, montré figure 1.12, qui reprend à l’identique l’architecture de l’imageur à filtrage spatial configurable décrit ci-dessus, en lui adjoignant un filtre LCOS entre la caméra et le réseau de diffraction. Pour la reconstruction, l’hypothèse de parcimonie est utilisée avec le choix d’un dictionnaire de représentation au lieu d’une base d’ondelettes et la minimisation d’une fonction coût de type $\ell_2 - \ell_1$.

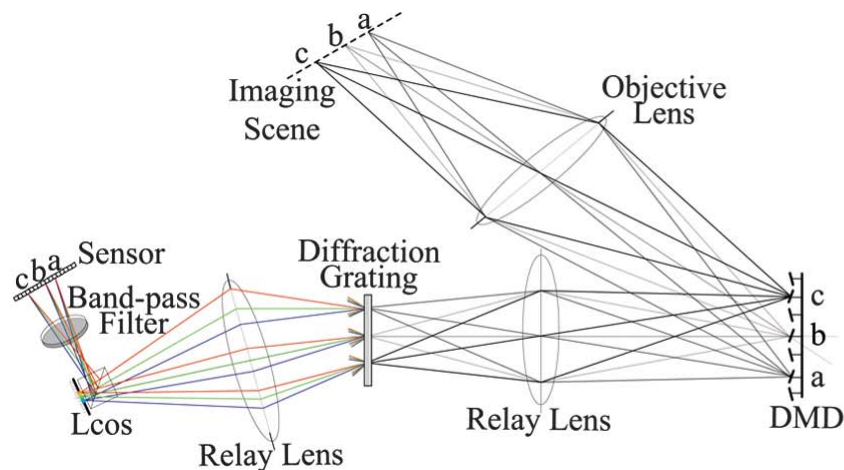


FIGURE 1.12 – Schéma du principe optique d’un imageur à filtrage spatio-spectral configurable de type CASSI [LWLD14]

Ainsi, de même que pour l’imageur à filtrage spatial configurable le temps de reconstruction est long, néanmoins la qualité de reconstruction est nettement meilleure avec un gain de 7dB

sur le *PSNR*. Les configurations du LCOS sont choisies de façon à améliorer le rapport signal sur bruit des acquisitions et la qualité du mélange spatio-spectral.

Conclusion

Le développement des imageurs configurables a été fortement influencé par l'architecture de l'imageur *snapshot* figé CASSI, qui a pu être transformé en système configurable grâce aux technologies telles que les DMD ou les LCOS. Les acquisitions multiples permettent de relaxer les fortes hypothèses nécessaires à CASSI, et ainsi accélérer l'étape de reconstruction. Néanmoins, la plupart des méthodes de reconstruction développées pour ces systèmes privilégient la qualité des données reconstruites sur le temps de reconstruction.

1.2.4 Synthèse

Ce rapide aperçu des technologies d'acquisition d'images hyperspectrales montre qu'entre les systèmes d'acquisition classiques qui collectent l'ensemble des données au prix de nombreuses acquisitions et les systèmes qui reconstruisent une estimée des données à partir d'une seule acquisition mais au prix de calculs lourds, ce sont les systèmes configurables qui permettent de contrôler le compromis entre la quantité de données acquises et le temps de reconstruction.

En ce qui concerne les techniques de reconstruction à partir de données incomplètes, nous avons vu qu'elles exploitent différentes hypothèses sur la nature des scènes observées. La section suivante étudie la nature des scènes hyperspectrales, qui va permettre de formuler de telles hypothèses et la façon dont ces hypothèses peuvent être prises en compte dans les applications et plus particulièrement pour la reconstruction.

1.3 Propriétés des scènes hyperspectrales

1.3.1 Présentation des corrélations

Le terme de corrélation est employé pour décrire une relation ou dépendance (causale ou non-causale) entre deux objets, événements ou actions. On parle donc de corrélation temporelle entre deux événements A et B pour indiquer une relation causale (B est la conséquence de A) ou bien non-causale (A et B sont liés à un événement commun). En traitement d'image, pour des applications tels que la compression, le débruitage ou encore la restauration, on s'intéresse aux corrélations entre les pixels qui forment l'image. Pour ce faire et selon la nature de l'image traitée (panchromatique, RGB, multispectrales ou hyperspectrales), on définit trois types de corrélations :

- la corrélation spatiale s'intéresse aux pixels voisins spatialement ;
- la corrélation spectrale s'intéresse aux pixels voisins spectralement ;
- la corrélation spatio-spectrale s'intéresse aux pixels voisins **conjointement** suivant les dimensions spatiales et spectrale.

Les scènes naturelles sont fortement corrélées ce qui se manifeste visuellement par la présence d'objets, structures, textures et couleurs redondants [PL03]. Ce constat a d'abord été étudié pour son rôle dans la perception humaine par la communauté des sciences cognitives [SLD82, Bad97], il est ensuite devenu un axe majeur de recherche en traitement d'images. L'une des premières applications fut naturellement la compression d'image [DJL92] qui exploite directement la présence de corrélation pour réduire le poids de l'image (au sens quantité d'information stockée) sans en altérer le contenu. Le succès rapide de cette première application permet de découvrir le grand potentiel informatif des corrélations, et depuis la recherche dans ce domaine n'a cessé de se développer.

Cependant, si d'un côté la mise en évidence des corrélations est relativement facile grâce notamment à la covariance statistique, l'exploitation des corrélations quant à elle est complexe. Il a donc été nécessaire de développer de nouveaux outils à même de prendre en compte cette information.

L'analyse discriminante tels que l'ACP (analyse en composantes principales), l'ACI (analyse en composantes indépendantes), la LDA (Analyse discriminante linéaire) a notamment joué un rôle important dans la compréhension et la modélisation des corrélations [SLD82, HBS92, Bad97, LWS00]. Parallèlement et de manière indépendante, l'analyse harmonique en pleine émergence alors avec l'apparition des ondelettes [LM86, Dau88] et plus particulièrement de la transformée en ondelettes discrètes orthogonale DWT (discrete wavelet transform) [Dau92] a constitué une autre voie de recherche très prometteuse. Par la suite, ces deux approches, qui ont d'ailleurs permis d'arriver à des conclusions similaires [HBS92, CZ11], ont été utilisées conjointement pour atteindre des modélisations plus fines des corrélations [RB05, WF07].

Les outils et méthodes d'exploitation des corrélations sont en général spécifiques aux caractéristiques de la modalité d'acquisition (imageur), telles que la résolution spatiale et spectrale et la taille de l'acquisition. Ainsi, l'avènement de l'image hyperspectrale a nécessité le développement de nouveaux outils pour répondre à ces contraintes (volume de données) et particularités (résolutions spatiale et spectrale et forte corrélation spatio-spectrale). Cela fut premièrement en adaptant les méthodes existantes [CZ11] puis grâce à des outils propres à l'imagerie hyperspectrale [RBB08] capables de tirer avantage de la corrélation spatio-spectrale en particulier.

1.3.2 L'exploitation des corrélations spatio-spectrales

Dans cette partie, on présentera dans un premier temps une brève littérature dédiée à l'exploitation de la corrélation spatiale et spectrale pour les images en niveaux de gris, couleur (RGB) et multispectrale. Puis on exposera plus en détails les méthodes dédiées spécialement à l'imagerie hyperspectrale. Pour les besoins de cette partie on citera principalement la littérature liée à la compression d'images pour son besoin évident d'exploitation des corrélations.

Corrélation spatiale

Les corrélations spatiales présente dans les images (niveaux de gris, RGB, Mutlispectrales) en général ont été utilisées depuis des décennies et avant l'avènement de l'imagerie hyperspectrale. Chronologiquement, la corrélation spatiale a d'abord été étudiée et exploitée pour les images en niveaux de gris grâce au développement de la DCT (*discrete cosinus transform*) pour la compression JPEG [Int94]. L'objectif de la transformation DCT est de décomposer l'image dans un autre domaine de représentation où les corrélations spatiales sont plus concentrées. De ce fait, le nombre de coefficients nécessaire à la représentation est très inférieur aux nombres de pixels de l'image.

Néanmoins, pour JPEG, la DCT été appliqué par bloc (typiquement de 8×8 pixels), ce qui compromettait le potentiel de compression, révélant d'éventuels effets de blocs. Ce principe a alors été peu à peu délaissé pour l'utilisation des ondelettes (DWT) [LM86, Dau92] et de l'analyse multi-résolution qui offrent de bien meilleures performances [GKG99] même pour les images de très haute résolution [DJL92].

Corrélation spectrale

Avec l'avènement de l'image couleur (RGB) on commença à s'intéresser à la corrélation spectrale. L'approche adoptée été d'adapter les méthodes existantes pour les images en niveaux de gris avec notamment JPEG2000 [Int00] et la DWT [ROM15]. L'idée était d'exploiter principalement la corrélation spatiale qui est très prépondérante par rapport à la corrélation spectrale à

cause du faible nombre de bandes dans les images couleurs (3 bandes). La corrélation spectrale seule et en elle même n'était pas très intéressante. De plus, l'acquisition couleur se faisait avec des filtres en mosaïque tel que *Bayer* et non avec des filtres dédiés pour chaque couleur [CT04].

Ce n'est qu'avec l'image multispectrale puis hyperspectrale que l'on chercha à exploiter réellement la corrélation spectrale, premièrement de manière disjointe de la corrélation spatiale puis simultanément (spatio-spectrale).

Corrélation spatio-spectrale

Jusqu'alors, la résolution spatiale pour les images RGB était considérablement supérieure à la résolution spectrale, ainsi le principal de l'information nécessaire au traitement des images provenait de la dimension spatiale. Pour l'imagerie multispectrale et hyperspectrale les dimensions spatiale et spectrale sont du même ordre de grandeur, il a donc été nécessaire de revoir ces méthodes et outils pour prendre en compte **simultanément** des corrélations spatiale et spectrale par l'exploitation de la corrélation spatio-spectrale.

Les méthodes de compression basées sur la DWT ont été massivement utilisées et adaptées pour les images HS, et ce pour les excellentes performances en terme de qualité et taux de compression qu'elle permet d'atteindre avec les images en niveaux de gris. Ainsi, l'algorithme JPEG2000, initialement développé pour des images RGB (3 bandes) a été adapté pour supporter plusieurs dizaines de bandes spectrales [RFY05, PTMO06, KBM+06]. Typiquement, la stratégie était de coupler une méthode de compression spectrale à la DCT spatiale utilisée par JPEG au lieu de traiter indépendamment les bandes spectrales. La compression spectrale a été notamment implémentée par l'utilisation d'une DCT et DWT spectrale [AMH95, TP06, FR06]. En particulier, l'utilisation de la DWT spectrale a aboutit à la compression DWT-JPEG2000 [Int00, TP06].

Ces méthodes nécessitent cependant de traiter l'image HS par bloc souvent de petite taille (8×8 pixels pour JPEG2000 et DWT-JPEG2000) et se restreignent donc à l'exploitation des corrélations locales ce qui réduit considérablement l'efficacité de la compression. Ce découpage est effectivement indispensable pour obtenir une compression significative avec la DCT et la DWT et en général en analyse harmonique.

Afin de remédier à ce problème, l'analyse harmonique a été substituée par des méthodes d'analyse discriminante déterministes ACP (analyse en composantes principales) ou statistiques KLT (Karhunen-Loeve *Transform*). Cette substitution s'est avérée particulièrement intéressante vis-à-vis de la qualité et du taux de compression [DF07], ce qui favorisa le développement d'autres méthodes suivant ce schéma [ZFL08, DZYF09, CCTH11] et devint un important axe de recherche.

Cela marqua alors un grand tournant dans l'exploitation des corrélations qui jusque là étaient utilisées en analyse harmonique de manière disjointes, la corrélation spatiale d'une part et spectrale d'un autre ce qui compromettait considérablement l'efficacité de la compression [PR06]. Effectivement, les méthodes discriminantes et l'ACP entre autres permettent quant à elles de tenir compte simultanément des deux corrélations et donc de la corrélation spatio-spectrale. Ceci est d'ailleurs possible car les composantes principales produites ne sont pas nécessairement des bases harmoniques séparables telles que utilisés par la DCT et la DWT ou la FFT [CZ11].

Pour illustrer la capacité de compression qu'offrent les analyse harmonique et en composantes principales nous avons tracé l'évolution du *PSNR* (*Peak signal-to-noise ratio*)⁷ en fonction du taux de compression pour la 3D-FFT et l'ACP sur une image HS illustrée figure 1.13(a).

7. Le *PSNR* est défini par $PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{d^2}{EQM} \right)$, où *EQM* est l'erreur quadratique moyenne calculée sur l'ensemble de l'image et *d* est la dynamique du signal c'est-à-dire la valeur maximale d'un pixel de l'image.

Le constat est alors une nette supériorité de l'ACP tel que montré figure 1.13(b) et vérifiée par [LWLD14] sur un très grand nombre d'images HS. Afin d'évaluer la qualité de la compression obtenue avec l'ACP nous avons reconstruit l'image HS avec 2%, 5%, 10% et 40% de ses composantes principales. Pour ces reconstructions, nous avons généré l'image panchromatique pour évaluer la résolution spatiale et des cartes de SAM (*Spectral Angle Mapper*)⁸, une distance spectrale insensible à l'intensité des pixels, pour évaluer la qualité de reconstruction spectrale. Les résultats sont montrés sur la figure 1.14.

Finalement, compte tenu des gains de performances atteints grâce à la prise en compte de la corrélation spatio-spectrale, l'utilisation de méthodes multi-linéaires notamment l'analyse tensorielle a été adoptée [KB09]. Cette analyse permet en effet de décomposer le cube HS désormais considéré comme un tenseur 3D, en des bases 3D non-séparables et donc de révéler la corrélation spatio-spectrale [RB09, KYM12].

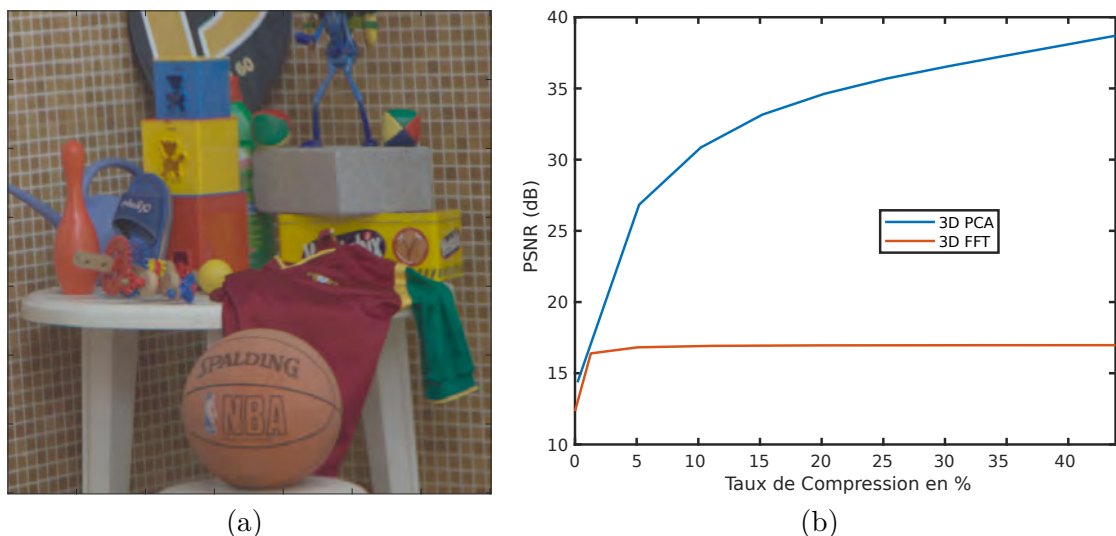


FIGURE 1.13 – a) Image RGB de la scène, b) évolution du $PSNR$ en fonction du taux de compression pour la $3D-FFT$ et l'ACP.

1.3.3 Diverses exploitations possibles

Il existe de nombreuses applications de la prise en compte des corrélations présentes dans les images HS. D'abord utilisées pour la compression, ces applications se sont diversifiées à la classification, au débruitage, à la segmentation... Dans la suite on présentera des applications parmi les plus connues de l'exploitation de ces corrélations.

Compression

L'objectif de la compression est de réduire autant que possible la taille de stockage de l'image HS sans en altérer le contenu (compression sans perte) ou en gardant l'essentiel de l'information présente dans le cube HS (compression avec perte). Cela consiste donc à éliminer la redondance

8. Le SAM est une distance angulaire (ici normalisée entre 0 et 1) entre deux spectres s_1 et s_2 définie par : $SAM(s_1, s_2) = \frac{2}{\pi} \left| \arccos \left(\frac{s_1^t \cdot s_2}{\|s_1\| \cdot \|s_2\|} \right) \right|$. Notons que les spectres étant positifs, leur produit scalaire est également positif, l'arc cosinus est alors à valeur entre 0 et $\pi/2$ et donc le SAM entre 0 et 1. Un SAM de 0 indique que les spectres sont proportionnels, un spectre de 1 que les spectres sont orthogonaux (au sens de l'algèbre linéaire $s_1^t \cdot s_2 = 0$)

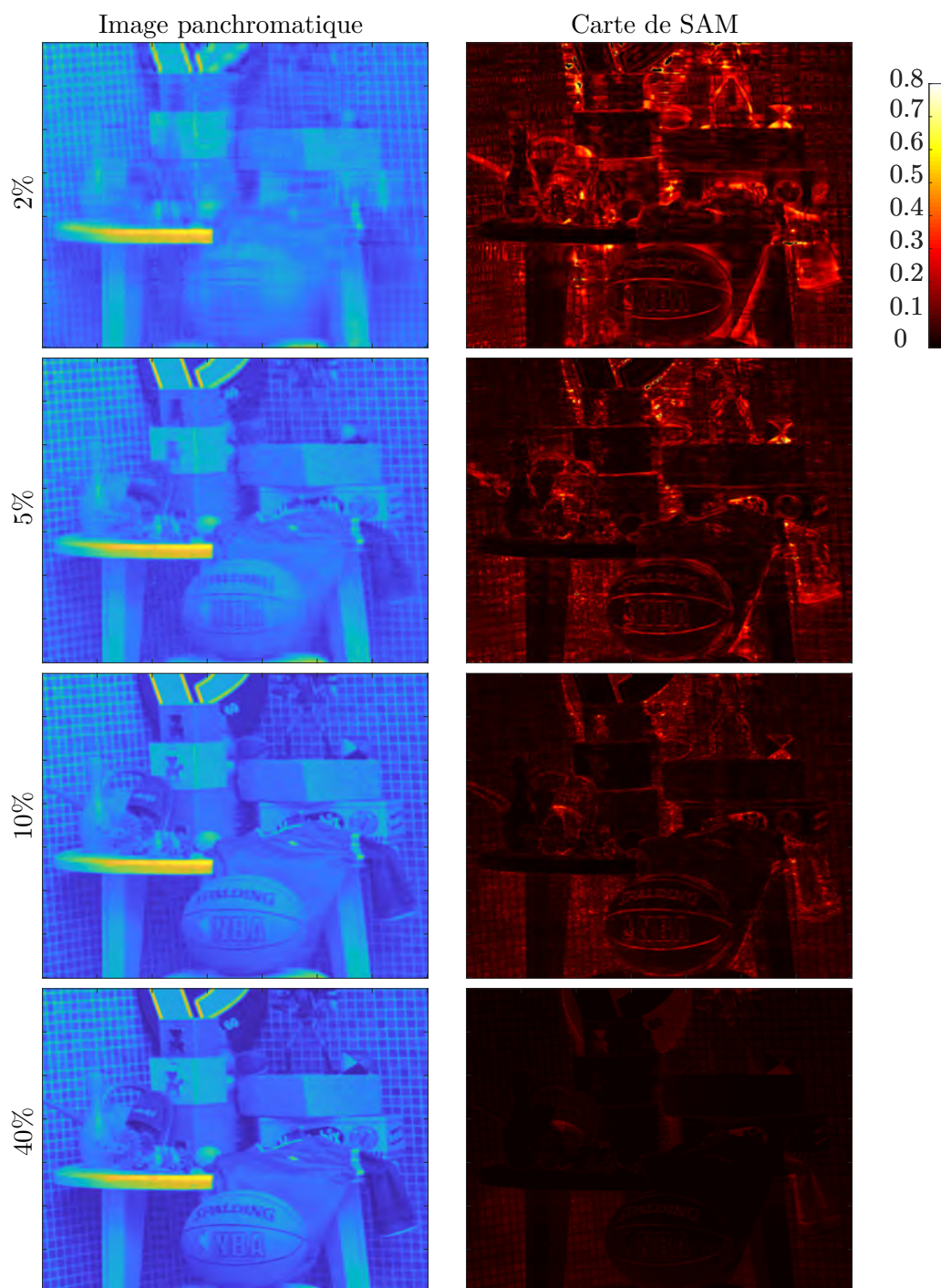


FIGURE 1.14 – Illustration de la qualité spatiale et spectrale de la reconstruction obtenue avec, de haut en bas 2%, 5%, 10% et 40% des composantes principales de l'ACP. Les figures de gauche représentent les images panchromatiques reconstruites et les figures de droite les cartes de SAM.

(information superflu) qui est caractérisée par la présence de fortes corrélations. La contrainte est donc de dé-corréler l'image HS au maximum tout en conservant l'information essentielle [KYM12, KBM⁺06, TP06].

Classification

Sur une image HS chaque position spatiale (pixel) possède une signature spectrale qui correspond simplement au spectre du matériau présent à cette position. Étant donné le grand nombre de bandes spectrales que comprend l'image HS, il est possible de différencier les matériaux entre eux bien qu'ils soient visuellement ressemblants. Pour la grande majorité des applications l'image HS ne comprend qu'un petit nombre de classes de spectres alors que le nombre de pixels est très grand. Il y a donc une forte corrélation spectrale entre les pixels appartenant à la même classe et l'objectif de la classification est de segmenter convenablement l'image HS pour associer à chaque groupe de pixels une seule classe de spectre [MB04, RB09, LMM⁺16].

Débruitage et *Inpainting*

Les images HS sont souvent entachées de bruit lors de l'acquisition, à cause du processus d'acquisition (bruit de photon et thermique) ou à cause de facteurs extérieurs tels que les perturbations atmosphériques. Le bruit a généralement pour effet de dé-corréler l'information HS et augmenter artificiellement la variabilité des spectres qui sont normalement et naturellement très corrélés. Le débruitage est typiquement implémenté en considérant que l'image débruitée est représentable par un petit nombre de composantes qui résident dans un sous-espace de l'image HS bruitée [RBB08, GZZF14, LLF⁺16].

L'*inpainting* (remplissage de parties manquantes dans une image) adresse le même problème que le débruitage à la différence que l'altération n'est pas nécessairement aléatoire et est due, par exemple, à des pixels morts ou à des problèmes de lecture sur le capteur. Les méthodes de débruitage servent parfois également pour l'*inpainting*, bien que certaines solutions existent pour tenir compte spécifiquement de certaines altérations [BSFG09, LRS⁺18].

Super-résolution et *pan-sharpening*

À cause, des contraintes inhérentes à l'imagerie hyperspectrale il n'est bien souvent pas possible de faire l'acquisition d'images HS simultanément à très hautes résolutions spatiales et spectrale. Les imageurs HS conventionnels dégradent généralement une de ces résolutions pour pouvoir imager des scènes HS. L'objectif de la super-résolution est donc d'augmenter la résolution des données par post-traitement en tirant avantage des corrélations. Cela s'apparente donc à une interpolation qui doit être menée correctement afin de ne pas créer d'artefact. Pour ce faire, des acquisitions de la même scène obtenues par d'autres voies sont utilisées pour guider cette interpolation. Notamment, l'approche la plus connue est le *pan-sharpening* où l'image panchromatique est utilisée (après recalage) pour augmenter la résolution spatiale de la scène multispectrale ou hyperspectrale [FHC⁺20, ABS07, LZGY16, HZCF19].

1.3.4 Prise en compte de la corrélation spatio-spectrale pour la reconstruction d'images hyperspectrales

Cette thèse portant sur la reconstruction d'images hyperspectrales à partir d'un faible nombre de projections du cube hyperspectral, nous nous focalisons ici sur les différentes approches utilisées pour prendre en compte la corrélation spatio-spectrale pour une telle reconstruction, associée à des imageurs non conventionnels. La particularité de cette reconstruction est qu'elle vise à estimer le cube HS complet à partir d'un faible nombre de données, typiquement beaucoup moins de

données que d'inconnues. La régularisation du problème via la prise en compte des corrélations spatio-spectrales est donc nécessaire car les problèmes de reconstruction sont sous-déterminés. On peut distinguer dans la littérature deux grandes classes de méthodes : celles s'appuyant sur des hypothèses de parcimonie et celles s'appuyant sur des hypothèses de type variation totale. Dans les deux cas, ces méthodes amènent à minimiser des critères, parfois non, convexes donc avec de possibles minima locaux, non lisses (non dérivables en certains points).

Depuis les travaux sur le *Compressed sensing* [CRT06, DET06, Don06], l'hypothèse de parcimonie a été souvent exploitée pour la régularisation de problèmes inverses. L'hypothèse de parcimonie suppose que l'objet à reconstruire peut se représenter comme une combinaison linéaire d'un faible nombre d'éléments (appelés atomes) pris dans une famille redondante (appelée dictionnaire). Une telle hypothèse a été exploitée sous diverses formes pour la reconstruction d'images HS, mais généralement en s'appuyant sur une base de représentation plutôt qu'une famille redondante, ce qui s'explique par la grande dimension des espaces entrant en jeu. Dans ce cadre, on peut trouver 3 déclinaisons de l'exploitation de la parcimonie, selon que cette base est une base fixée a priori, construite par apprentissage a priori sur un ensemble de données, ou construite par apprentissage simultanément à la reconstruction.

Un grand nombre de travaux ont exploité des bases classiques, fixées a priori, ayant déjà montré leur efficacité pour la compression d'images telles que les bases DCT et DWT, prises individuellement ou conjointement [WJWB08, WMAP11, RAA14, DRA15, AdH16, GLM⁺17, WZM⁺18, DHS⁺18]. En particulier, une restriction à une base séparable 1D-DCT (spectrale) et 2D-DWT (spatiale) est très souvent utilisée.

Certains auteurs ont proposé d'apprendre le dictionnaire à partir d'un certain nombre de cube HS pris comme exemple [LWLD14, LLWD14, WXG⁺15, CJN⁺17, XWL⁺17, TZS⁺20]. Notons que la plupart des travaux exploitent des dictionnaires de faible dimension en prenant des éléments (*patch*) petits spatialement (typiquement 8×8 pixels). Cette étape est généralement accomplie par décomposition en valeurs singulières [LWLD14], une alternative plus récente propose l'exploitation d'un réseau de neurones auto-encodeur *Auto-CNN* [CJN⁺17].

L'inconvénient majeur d'un tel apprentissage de dictionnaire est qu'il nécessite de disposer d'un grand nombre de cube HS, semblables aux types de scènes observées. Afin de remédier à ce problème, certains auteurs ont proposé d'apprendre le dictionnaire simultanément à la reconstruction (approche aveugle). Pour cela, des hypothèses générales peuvent être considérées, par exemple que le nombre de spectres présents dans le cube HS est faible [KMW⁺11]. De même des modèles de dictionnaire de type gaussiennes [YTZ⁺15] ou mélange de gaussiennes (*Gaussian Mixture Model*) [RKT⁺13] sont exploités. Un autre moyen de procéder sans modèle précis consiste à apprendre un dictionnaire de tenseur en appliquant une PCA avec noyau reproduisant (KPCA) au cube HS reconstruit à chaque itération [YWL⁺15].

La régularisation par pénalisation de la variation totale (TV) [ROF92] consiste en pratique à pénaliser le critère de fidélité aux données par un terme linéaire (de type valeur absolue) en les gradients de l'image. Une telle régularisation va forcer les images à prendre des valeurs proches dans les zones homogènes tout en autorisant des discontinuités au niveau des contours, sans connaître a priori la position des contours. Les zones homogènes étant principalement des zones spatiales, la TV a dans un premier temps été appliquée à chaque bande spectrale séparément [KCWB10, WXS⁺16], puis couplées à des propriétés supplémentaires liées à la corrélation spectrale, de type parcimonie sur la DCT-1D [AdH16] ou de type TV [BKGK17]. D'autres moyens de prendre en compte la présence de zones spatio-spectrales homogènes sans la TV ont été proposés, tel qu'un partitionnement dyadique de l'image [GJB⁺07] ou des hypothèses de dépendance linéaire entre spectres d'une zone homogène [FZSS16] (a priori de rang minimal) sur des zones de faibles dimensions (patches de 6×6 pixels spatiaux).

Dans la plupart de ces travaux, le calcul de la solution se fait par minimisation d'un critère

quadratique de fidélité aux données, pénalisé par un terme prenant en compte la corrélation spatio-spectrale (parcimonie, variation totale,...) Strictement parlant, l'hypothèse de parcimonie mène à un problème d'optimisation combinatoire qui est généralement relâché en une pénalisation ℓ_1 (en valeur absolue) [CJN⁺17, LLWD14, LWLD14, TZS⁺20] ou en exploitant des algorithmes gloutons (OMP, Orthogonal Matching Pursuit) [WXG⁺15, XWL⁺17]. Dans ce cas, de même que pour la variation totale, le problème d'optimisation est dit non lisse (critère non dérivable en certains points) et nécessite des algorithmes d'optimisation spécifiques, généralement lourds en coût de calcul. De plus, dans le cas de l'apprentissage du dictionnaire simultanément à la reconstruction, ou de l'utilisation de réseaux de neurones, les critères sont non convexes et les algorithmes d'optimisation utilisés peuvent rester bloqués dans des minima locaux.

1.4 Cadre de travail et contributions de cette thèse

1.4.1 Contexte de la thèse : projet ImHypAd

Cette thèse a été effectuée dans le cadre d'une collaboration entre le LAAS (Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes – CNRS), en particulier les équipes PHOTO (Photonique) et RIS (Robotique et InteractionS), et l'IRAP (Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie – UPS/CNRS/CNES), plus particulièrement son équipe SISU (Signal Images en Sciences de l'Univers). Cette collaboration sur le traitement et l'analyse d'images hyperspectrales a démarré en 2015 suite au développement par le LAAS d'un dispositif imageur hyperspectral pilotable par l'intermédiaire de matrices de micro-miroirs [MLM15]. L'objectif de cette collaboration est d'étudier les possibilités de traitement et analyse des images hyperspectrales offertes par ce dispositif et le rendre adaptatif en fonction de la scène observée.

Cette thèse a été financée par l'Université Fédérale de Toulouse Midi-Pyrénées et la région Occitanie dans le cadre de l'appel à projets de recherche 2016. **L'objectif de cette thèse était de se focaliser sur la reconstruction de l'image hyperspectrale à partir d'un faible nombre d'acquisitions pour des configurations aléatoires du DMD, avec un coût de calcul réduit.**

L'équipe de ce projet est financée depuis janvier 2019 par l'Agence Nationale de la Recherche (Appel à projet Astrid 2018) sur le projet ImHypAd (Imageur Hyperspectral Adaptatif, ANR-18-ASTR-0012-01). Grâce à ce financement, Elizabeth Hemsley, a été recrutée en tant que post-doctorante pour travailler sur les aspects instrumentaux de ce projet. Elizabeth a dans un premier temps travaillé sur la calibration de cet instrument, puis nous avons collaboré pour appliquer sur des données réelles les méthodes développées durant cette thèse. J'ai également eu l'occasion de co-encadrer un stagiaire (Tony Rouvier, stage de fin d'études INSA Toulouse) avec lequel nous avons démarré nos travaux exploitant une hypothèse de séparabilité.

1.4.2 L'imageur hyperspectral pilotable considéré

L'imageur hyperspectral pilotable développé au LAAS [MLM15] est composé de deux lignes $4f$ (assemblage de deux lentilles et d'un réseau de diffraction) symétriques et séparées par une matrice de micro-miroirs (DMD pour *Digital Micromirror Device*) placée dans le plan de symétrie. Chacun des micro-miroirs du DMD peut être configuré en position de transmission ou de réjection du signal lumineux, effectuant ainsi un filtrage spatial du signal. Ce dispositif est très similaire à l'imageur DD-CASSI (CASSI à double dispersion) [GJB⁺07], présenté Fig. 1.9 avec pour différence fondamentale le fait d'être pilotable par l'intermédiaire de la configuration du DMD, alors que DD-CASSI utilise un masque codé figé.

Nous n'entrerons pas ici en détail dans le fonctionnement de ce dispositif qui sera étudiée dans l'article du chapitre 3, mais nous insisterons sur certaines de ses caractéristiques qui seront

détaillées Chapitre 3, § 3 :

- Indépendance des lignes : la dispersion se faisant dans la direction des colonnes de l'image chaque ligne est obtenue indépendamment des autres lignes de l'image ;
- Colocalisation : les données acquises sur le pixel de coordonnées (r, c) du détecteurs contiennent uniquement de l'information pour ces mêmes coordonnées (r, c) de la scène hyperspectrale observée.
- Image panchromatique disponible : l'image panchromatique (c'est-à-dire intégrée sur l'ensemble des longueurs d'ondes considérées) peut être acquise à la même résolution spatiale, avec le même échantillonnage spatial et la même sensibilité spectrale que les données hyperspectrales en configurant tous les miroirs du DMD en mode transmission.

1.4.3 Position du problème et enjeux

Le modèle de formation des données par ce dispositif peut être considéré comme linéaire et l'on peut donc écrire formellement ce modèle direct sans bruit sous forme matricielle :

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{o} \quad (1.1)$$

où $\mathbf{m}$, contenant l'ensemble des données mesurées, est un vecteur de dimension RCN , où R et C sont les nombres de lignes et de colonnes de l'image et N le nombre d'acquisitions, et $\mathbf{o}$ est l'image hyperspectrale (l'objet) à reconstruire, soit un vecteur de dimension RCW , où W est le nombre de longueurs d'ondes considérées. La construction de ce modèle matriciel à partir des propriétés optiques du dispositif est détaillée § 3 de l'article du chapitre 3

La matrice $\mathbf{H}$ est de grandes dimensions $RCN \times RCW$ mais est très creuse grâce aux propriétés d'indépendance des lignes et de colocalisation du dispositif. La structure de cette matrice, qui dépend de la configuration de la matrice de micro-miroirs, est étudiée plus en détail § 4.2.2. Bien entendu, en pratique, du bruit vient perturber ce modèle idéal.

Notre objectif est de reconstruire l'image hyperspectrale avec moins d'acquisitions que nécessaire pour l'acquisition de l'ensemble du cube par balayage comme dans les instruments classiques. Dans ce cas, $N \ll W$ et nous sommes donc confrontés à un problème inverse linéaire sous-déterminé (moins de données que d'inconnues) dont la résolution nécessite une régularisation. La régularisation est bien souvent utilisée pour la résolution de problèmes inverses afin de réduire la forte sensibilité de la solution de tels problèmes au bruit sur les mesures [I⁺01], liée au mauvais conditionnement de la matrice $\mathbf{H}$. Ici, nous devons également, comme pour tous problèmes sous-déterminés, pallier le manque d'information contenu dans les données.

Un moyen bien souvent utilisé pour régulariser les problèmes inverses est de définir la solution comme minimisant un critère quadratique pénalisé, soit :

$$\hat{\mathbf{o}} = \arg \min_{\mathbf{o}} \|\mathbf{m} - \mathbf{H}\mathbf{o}\|_{\mathbf{\Gamma}^{-1}}^2 + \Omega(\mathbf{o}), \quad (1.2)$$

avec la norme quadratique pondérée définie par $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{\Gamma}^{-1}}^2 = \mathbf{u}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{u}$.

Le premier terme de ce critère correspond à un terme de fidélité de la solution, c'est-à-dire qu'il contraint la solution de l'équation (1.1) à être proche des observations (mesures) au sens d'une distance quadratique. D'un point de vue statistique, un tel terme peut inférer de la prise en compte d'un bruit additif gaussien centré de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ sur les données. La minimisation de ce terme quadratique seul correspond à l'estimation de l'objet au sens du maximum de vraisemblance. Le problème étant sous-déterminé, il existe une infinité de telles solutions, aussi l'ajout du second terme est indispensable. Notons que, vu le caractère Poissonien auquel obéissent les mesures (acquisitions de type comptage de photons), ce terme quadratique n'est pas totalement satisfaisant physiquement. Mais la prise en compte d'une vraisemblance Poissonienne ne modifierait pas le caractère sous-déterminé du problème. De plus, on peut

considérer ce terme quadratique comme une approximation gaussienne du modèle de bruit de Poisson, qui est valable dans le cas de grands flux de photons qui peuvent être obtenus par des choix convenables des temps d'exposition. On peut également effectuer une approximation de type bruit blanc en prenant $\mathbf{\Gamma} \propto \mathbf{I}$.

La pénalisation par le second terme $\Omega(\mathbf{o})$ vise à rendre la solution plus conforme à nos attentes et doit donc incorporer les informations a priori disponibles sur l'objet. Une autre façon de régulariser le problème est de considérer des contraintes sur l'objet à reconstruire, par exemple la positivité. Le problème devient alors un problème d'optimisation sous contraintes.

Un des objectifs de cette thèse était de reconstruire l'image hyperspectrale avec un coût de calcul réduit. Cela limite donc le choix de la fonction de pénalisation $\Omega(\mathbf{o})$. En effet, la plupart des méthodes vues § 1.3.4, prennent en compte la parcimonie de la solution sur un dictionnaire ou la variation totale de la solution, via des fonctions $\Omega(\mathbf{o})$ non différentiables. Le calcul de la solution nécessite alors la mise en œuvre d'algorithmes d'optimisation non lisse dont le coût de calcul est élevé. Pour contourner ce problème, certaines méthodes présentées § 1.3.4, reconstruisent la solution par bloc, ce qui est sous-optimal et peut rendre visible certains effets de blocs, comme cela est parfois constaté sur les images compressées au format JPEG. Les fonctions $\Omega(\mathbf{o})$ quadratiques sont celles pour lesquelles le coût de calcul de la solution est le plus limité, puisque cela revient à la résolution d'un système linéaire. Nous nous sommes donc focalisés durant cette thèse sur de telles régularisations quadratiques. Bien sûr, il est indispensable de bien étudier le modèle matriciel de l'équation (1.1) pour implémenter une telle solution afin d'exploiter de façon efficace les propriétés du dispositif instrumental.

Un des principaux problèmes lié à la régularisation quadratique, telle que la régularisation de Tikhonov [TA77], est qu'elle induit bien souvent une perte de résolution spatiale de l'image reconstruite. Pour pallier ce problème, nous proposons de tirer parti d'une propriété importante de notre dispositif : la possibilité d'obtenir l'image panchromatique de la scène. Une telle acquisition est en effet simple à obtenir en laissant ouvert l'ensemble des miroirs du DMD. Un des enjeux de cette thèse a donc été de prendre en compte l'information spatiale contenue dans l'image panchromatique pour la reconstruction de l'image hyperspectrale. Notons que l'on se rapproche alors de la problématique des méthodes de *pan-sharpening* mentionnées § 1.3.2 mais dans un cadre fondamentalement différent. L'objectif principal du *pan-sharpening* est d'améliorer la résolution spatiale de l'image hyperspectrale à partir de celle de l'image panchromatique, mais il est nécessaire au préalable de les recaler précisément spatialement (avec une précision inférieur au pixel de l'image hyperspectrale). Au contraire, on dispose ici de l'image panchromatique à la même résolution spatiale et avec la même réponse spectrale que les acquisitions et l'ensemble de ces données est co-réglé. Mais ces acquisitions correspondent à des observations incomplètes spectralement de l'image hyperspectrale.

Les deux méthodes développées durant cette thèse, qui sont introduites dans les sections suivantes, s'appuient donc sur l'exploitation de l'information spatiale apportée par l'image panchromatique pour une reconstruction de l'image hyperspectrale via une régularisation quadratique.

1.4.4 Une première approche régularisée : la méthode RA (*Regularization Approach*)

Le second terme $\Omega(\mathbf{o})$ correspond à la régularisation quadratique, qui peut prendre plusieurs formes et dont le choix est crucial pour le processus de régularisation. En effet, ce terme de régularisation doit renforcer des caractéristiques connues a priori sur la solution. Dans le cadre de cette thèse, l'existence de fortes corrélations spatio-spectrales au sein des scènes imagées (voir section 1.3.2) constitue le principal a priori à prendre en compte. Mais la régularisation quadratique limite fortement la prise en compte de telles corrélations.

Un choix classique de régularisation quadratique est une régularisation de type Tikhonov [TA77] afin de prendre en compte la forte similarité entre les pixels voisins. Dans notre cadre tri-dimensionnel, le terme de régularisation prend la forme $\Omega(\mathbf{o}) = \mu_x \|\mathbf{D}_x \mathbf{o}\|^2 + \mu_y \|\mathbf{D}_y \mathbf{o}\|^2 + \mu_\lambda \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{o}\|^2$ où $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ et $\mathbf{D}_\lambda$ représentent respectivement les dérivées suivant les dimensions spatiales x et y , et spectrale λ , avec μ_x , μ_y et μ_λ correspondant aux paramètres de régularisation. Cette régularisation revient ainsi à contraindre les variations au sein de l'objet à reconstruire. Notons que d'un point de vue statistique, une telle solution peut s'interpréter en terme d'estimateur du maximum *a posteriori* pour un *a priori* de type champs de Markov Gaussien [Dem89]. Avec ce terme de régularisation, la solution à l'équation (1.2) prend la forme analytique suivante :

$$\hat{\mathbf{o}} = (\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H} + \mu_x \mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x + \mu_y \mathbf{D}_y^t \mathbf{D}_y + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{m} \quad (1.3)$$

Ce type de régularisation est donc simple à exploiter puisque l'on obtient une expression analytique pour la solution, calculable avec un coût limité. Cependant, elle est connue pour provoquer des erreurs au niveau des frontières entre les différents objets présents dans la scène (contours), où de grandes variations peuvent être observées, mais qui se retrouvent lissés par la régularisation quadratique. Dans un cadre général, il n'est pas possible de localiser *a priori* les contours sur la scène à reconstruire. Aussi, de nombreux travaux ont proposé de remplacer une telle régularisation par des termes non-quadratiques permettant de préserver les contours. Cela peut se faire via des fonctions Ω dérivables (par ex. [GR92, GY95]) ou par des fonctions non dérivables telles que la variation totale [ROF92]. Mais ces approches n'ont pas de solution analytique, et leur mise en œuvre nécessite l'exploitation d'algorithmes itératifs plus coûteux que dans le cas quadratique – même si certains algorithmes exploitent à chaque itération la solution analytique d'un problème quadratique (par ex. [CBFAB97, Idi01]), le coût de calcul étant encore plus important dans le cas de la variation totale dû à la non-dérivabilité.

La solution que nous avons choisie permet de conserver la simplicité de la régularisation quadratique tout en préservant les contours, grâce à l'exploitation de l'image panchromatique, moyennant un hypothèse d'homogénéité du cube hyperspectral :

Hypothèse 1 : Hypothèse d'homogénéité

Deux pixels voisins appartenant à une zone spatialement homogène de l'image panchromatique ont des spectres proportionnels et les contours entre les zones homogènes peuvent être détectés sur l'image panchromatique.

Cette hypothèse revient à considérer, d'une part, que deux points spatiaux proches ayant des intensités panchromatiques similaires ont des spectres similaires ; d'autre part, que si deux points spatiaux proches ont des spectres différents, cela peut être détecté par une différence d'intensité sur l'image panchromatique. Finalement, prendre en compte cette hypothèse revient à ignorer les métamères spatialement adjacents (c'est à dire deux points côte à côte ayant une même intensité panchromatique mais des spectres différents) en considérant qu'ils sont rares.

Moyennant, cette hypothèse, nous pouvons exploiter l'image panchromatique, que l'on peut acquérir par notre dispositif avec le même échantillonnage spatial afin de détecter les contours entre zones homogènes. Une fois cette détection de contours effectuée sur l'image panchromatique, la préservation de contours consiste alors simplement à relaxer la pénalisation sur les contours, ou d'un point de vue matriciel à supprimer les lignes des opérateurs $\mathbf{D}_y$ et/ou $\mathbf{D}_x$ correspondant à des différences inter-pixels pour des pixels se trouvant de part et d'autre d'un contour. La solution s'écrit alors toujours sous la forme (1.3), avec des matrices $\mathbf{D}_x$ et $\mathbf{D}_y$ légèrement modifiées, ce qui n'implique aucun coût de calcul supplémentaire.

Malgré la simplicité de la solution de l'équation (1.3) son implémentation par inversion directe n'est pas possible dans la pratique à cause de la très grande dimension des matrices $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$, $\mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x$ et $\mathbf{D}_y^t \mathbf{D}_y$. Nous avons donc eu recours à un algorithme itératif.

1.4.5 Une deuxième approche avec hypothèse de séparabilité : la méthode SA

Une deuxième approche pour exploiter l'image panchromatique et une régularisation quadratique consiste à s'appuyer sur une hypothèse fondamentale sur la structure de la corrélation spatio-spectrale de l'image, en plus de l'hypothèse d'homogénéité déjà effectuée pour la méthode RA : l'hypothèse de séparabilité. Nous dénommerons par la suite la méthode qui en découle méthode SA (pour *Separability assumption*).

Hypothèse 2 : Hypothèse de séparabilité

L'image hyperspectrale peut être segmentée en régions homogènes fermées. Chaque région peut être décrite par un unique spectre et une carte d'intensité correspondant à l'intensité de l'image panchromatique dans la région.

Notons qu'une étude statistique d'images hyperspectrales [CZ11], a permis de justifier une hypothèse de séparabilité. Mais cette étude a été effectuée sur des petits blocs de 8×8 pixels spatiaux d'un grand nombre d'images hyperspectrales et ne s'appuyait pas des régions homogènes de l'image panchromatique correspondante. On se doute bien ici que l'étape de segmentation en régions homogènes de l'image panchromatique est importante pour l'exploitation de cette hypothèse.

Nous avons proposé une méthode de reconstruction très simple et à coût de calcul très limité qui s'appuie sur cette hypothèse de séparabilité et se fait en deux étapes :

1. Une étape de segmentation orientée région de l'image panchromatique en Q régions homogènes.
2. Une étape de reconstruction de chaque région indépendamment les unes des autres par une régularisation quadratique.

On peut aisément comprendre que l'étape de segmentation est cruciale puisqu'elle conditionne fortement le résultat de la reconstruction : on ne reconstruira qu'un unique spectre par région, pour toutes les pixels de la région considérée. On voit également que l'étape de reconstruction est largement simplifiée puisqu'elle consiste, pour chaque région $q \in \{1, \dots, Q\}$, à reconstruire un unique spectre $\mathbf{s}^q$ (donc W inconnues) à partir de l'ensemble des données $\mathbf{m}^q$ acquises pour cette région (NK_q données pour les N acquisitions sur les K_q pixels de la région).

Le modèle mathématique découlant de l'hypothèse de séparabilité est très simple. Si l'on note $\mathbf{o}_q^k$ le spectre du k ième pixel de la région q , la séparabilité implique $\mathbf{o}_q^k = P_q^k \mathbf{s}_q$, où P_q^k est l'intensité de l'image panchromatique pour ce pixel. Le contenu hyperspectral (de dimension $K_q W$) de toute la région q sous l'hypothèse de séparabilité s'écrit alors :

$$\mathbf{o}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_q^1 \\ \mathbf{o}_q^2 \\ \vdots \\ \mathbf{o}_q^{K_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_q^1 \mathbf{s}_q \\ P_q^2 \mathbf{s}_q \\ \vdots \\ P_q^{K_q} \mathbf{s}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_q^1 \mathbf{I} \\ P_q^2 \mathbf{I} \\ \vdots \\ P_q^{K_q} \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{s}_q, \quad (1.4)$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité de dimension W .

Le modèle direct s'écrit alors sous forme matricielle

$$\mathbf{m}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_q^{(1)} \\ \mathbf{m}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{m}_q^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q^{(1)} \\ \mathbf{H}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_q^{(N)} \end{bmatrix} \mathbf{o}_q \quad (1.5)$$

où $\mathbf{m}_q$ rassemble les N jeux de donnée $\mathbf{m}_q^{(n)}$ des K_q pixels de la région q pour chacune des N acquisition et la matrice $\mathbf{H}_q^{(n)}$, de dimension $K_q \times K_q W$, est la sous-matrice de la matrice $\mathbf{H}$ pour cette acquisition, dont on a extrait les lignes correspondant aux pixels de la région q et les colonnes correspondant aux spectres de ces pixels. En considérant l'équation (1.4), on trouve finalement la modélisation matricielle du problème sous l'hypothèse de séparabilité :

$$\mathbf{m}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q^{(1)} \\ \mathbf{H}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_q^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_q^1 \mathbf{I} \\ P_q^2 \mathbf{I} \\ \vdots \\ P_q^{K_q} \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{s}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_q^{(1)} \\ \mathbf{G}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_q^{(N)} \end{bmatrix} \mathbf{o}^q = \mathbf{G}_q \mathbf{s}_q, \quad (1.6)$$

avec $\mathbf{G}_q$ la matrice constituée des N matrices $\mathbf{G}_q^{(n)}$ de dimension $K_q \times W$.

L'étape de reconstruction consiste à estimer $\mathbf{s}_q$ à partir du modèle de l'équation (1.6). Le modèle est sous déterminé si $K_q N < W$, c'est-à-dire quand le nombre de pixels K_q contenus dans la région q , multiplié par le nombre d'acquisitions N est inférieur au nombre de longueurs d'onde W constituant le spectre à reconstruire. Pour les régions suffisamment grandes, le problème est alors sur-déterminé et l'on peut donc le résoudre par moindres carrés. Dans le cas sur-déterminé il faut apporter de l'information a priori supplémentaire sur le spectre recherché et nous avons considéré une certaine douceur spectrale, au prix d'une perte de résolution spectrale. La solution est définie comme minimisant un critère des moindres carrés pénalisé par une régularisation quadratique de Tikhonov sur le spectre :

$$\hat{\mathbf{s}}_q = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{m}_q - \mathbf{G}_q \mathbf{s}\|_{\Gamma_q^{-1}}^2 + \mu_\lambda \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{s}\|^2, \quad (1.7)$$

Le spectre solution se calcule alors aisément par :

$$\hat{\mathbf{s}}_q = (\mathbf{G}_q^t \Gamma_q^{-1} \mathbf{G}_q + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda)^{-1} \mathbf{G}_q^t \Gamma_q^{-1} \mathbf{m}_q. \quad (1.8)$$

Notons que contrairement à la méthode RA, cette solution peut se calculer par inversion directe sans recours à des méthodes itératives. En effet la matrice $\mathbf{G}_q^t \Gamma_q^{-1} \mathbf{G}_q + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda$ est toujours de dimension $W \times W$ indépendamment du nombre de pixels de la région K_q et du nombre d'acquisitions N .

1.4.6 Contributions et structure du manuscrit

Nous avons ici présenté le principe des méthodes RA et SA développées durant cette thèse, mais nous avons bien sûr étudié plus en détail ces méthodes.

Nous avons dans un premier temps étudié l'approche RA, par inversion directe, en profitant de l'indépendance des lignes. En effet, en supprimant la régularisation le long des lignes ($\mu_y = 0$), la solution de l'équation (1.3) fait intervenir l'inversion d'une matrice bloc-diagonale, ce qui revient à calculer la solution indépendamment sur chaque ligne par inversion d'une matrice de dimension réduite d'un facteur L . Ce travail nous a permis de vérifier sur des données simulées issues d'imageurs hyperspectraux à balayage (pour une trentaine de longueurs d'onde) l'intérêt de l'information apportée par la segmentation (le long des colonnes) de l'image panchromatique. Cette contribution, publié dans [ACLM17], est reportée en annexe de ce manuscrit.

Nous avons vérifié que cette approche RA était exploitable dans le cas d'une régularisation tri-dimensionnelle ($\mu_y \neq 0$), moyennant le calcul de la solution par un algorithme itératif. Ce travail montre l'intérêt de l'information apportée par la segmentation (bi-dimensionnelle) de l'image panchromatique. Cette contribution, publiée dans [ACLM18], constitue le chapitre 2 de ce manuscrit et présente, en plus de la méthode RA, le principe de fonctionnement du dispositif

instrumental et sa modélisation tant optique que matricielle et quelques résultats sur données simulées.

Nous avons approfondi notre étude de la méthode RA, dans sa version tridimensionnelle, en particulier sur le réglage de ses hyper-paramètres (taux moyen d'ouverture des miroirs, paramètres de la segmentation orienté contour et paramètres de régularisation). En parallèle, nous avons analysé l'hypothèse de séparabilité et étudié la méthode SA qui en découle ainsi que le réglage de ses hyper-paramètres (paramètres de la segmentation orientée région, paramètre de régularisation et largeur des contours). Nous avons alors confronté ces deux méthodes sur des simulations. Cette contribution, non encore publiée, constitue le chapitre 3 de ce manuscrit.

Concernant la méthode RA, nous avons proposé une implémentation efficace de l'algorithme itératif utilisé pour calculer la solution. Nous avons également étudié la convergence de cet algorithme qui dépend du conditionnement de la matrice à inverser dans l'équation (1.3). Enfin, nous avons montré que certaines configurations du DMD permettaient d'obtenir un meilleur conditionnement de cette matrice et donc une convergence plus rapide de l'algorithme. De telles configurations, appelées configurations orthogonales normalisées, permettent de plus d'obtenir l'image panchromatique sans effectuer une acquisition supplémentaire en configurant tous les miroirs en mode transmission. Cette contribution, non encore publiée, fait l'objet du chapitre 4 de ce manuscrit.

Elizabeth Hemsley, post-doctorante sur le projet ImHypAd a travaillé sur la calibration instrumentale et a obtenu des premières données exploitables [HLCM20]. Nous avons alors travaillé à adapter la méthode RA pour l'exploitation de ces données réelles (une centaine de longueurs d'onde) et étudié l'exploitation de plusieurs types de configuration du DMD, sur la base des propriétés démontrées pour les configurations orthogonales. Cette contribution, soumise à publication, fait l'objet du chapitre 5 de ce manuscrit.

Nous avons étudié plus en détail la segmentation orientée région utilisée pour la méthode RA. En particulier, nous avons constaté que les choix classiques de paramétrisation de cette méthode donnaient des résultats peu satisfaisants pour les images fortement contrastées. Aussi, nous avons proposé une méthodologie de réglage des paramètres de cette méthode prenant en compte le contraste local de l'image. Cette contribution, non encore publiée, n'est pas présente dans le manuscrit.

Enfin, des conclusions et perspectives de ces travaux seront présentées dans le chapitre 6.

Chapitre 2

Article EUSPICO 2018

Sommaire

I. Introduction	40
II. Device modeling	40
A. Acquisition device	40
B. Optical modeling	40
C. Matrix modeling	41
III Hyperspectral image reconstruction	42
A. Reconstruction using a quadratic penalization	42
B. Implementation	42
IV Results and discussion	42
IV Conclusion	43

Nous reprenons ici l'article [\[ACLM18\]](#) :

I. Ardi, H. Carfantan, S. Lacroix and A. Monmayrant, Fast hyperspectral cube reconstruction for a double dispersion imager, *European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2018)*, Rome, Italie, septembre 2018.

Fast hyperspectral cube reconstruction for a double disperser imager

Ibrahim Ardi^{*†}, Hervé Carfantan^{*}, Simon Lacroix[†], Antoine Monmayrant[†]

^{*}IRAP, Université de Toulouse, CNRS, CNES,
14 Avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France

[†]LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS,
Avenue de Colonel Roche, 31031 Toulouse, France

Abstract—We consider the problem of hyperspectral cube reconstruction with a new controllable imaging system. The reconstruction with a small number of images acquired with different configurations of the imager avoids a complete scanning of the hyperspectral cube. We focus here on a quadratic penalty reconstruction approach, which provides a fast resolution thanks to the high sparsity of the involved matrices. While such a regularization is known to smooth the restored images, we propose to exploit the system capability to acquire the panchromatic image of the scene, to introduce prior information on the sharp edges of the image, leading to a fast and edge-preserved reconstruction of the image.

I. INTRODUCTION

Hyperspectral (HS) Imaging, that is, acquisition of images with a large number of narrow spectral bands, has applications in numerous contexts. Conventional HS imaging technologies proceed by spatial or spectral scanning: they are not instantaneous and are restricted to the acquisition of static scenes, where the imager is either static or follows precisely controlled motions in the case of spatial scanning.

To circumvent this limitation various *snapshot* devices were proposed [1]. Some require complex optical systems, which include, for example, a series of imagers mounted behind a series of dichroic mirrors or spectral filters. Others exploit reconstruction algorithms using a spatio-spectral mixture of the HS cube obtained through an optical system defined once and for all, at the design phase. In the latter case, the acquisitions of the three-dimensional structure of the cube made by a two-dimensional matrix, necessarily induces a loss of spatial and/or spectral information. The reconstruction algorithms then require assumptions on the scene, and are expensive in computing resources. In addition, these systems require an accurate spatio-spectral calibration.

In this article we are interested in the reconstruction of hyperspectral cubes using a recently proposed device [2]. This imager has a dual disperser configuration analogous to the one presented in [3]. It does not suffer from any dependent wavelength shift effect thanks to co-location property: all the spectral components of a given spatial position (x,y) in the cube are imaged at the same point on the CCD. Besides, it is programmable via the control of a matrix of micro-mirrors (*Digital Micromirror Device*, DMD). This allows the definition of *adaptive acquisition schemes*, i.e. that sequentially adapt the DMD configurations to the spectral content of the

observed scene. For these acquisition schemes to be relevant, the reconstruction step at each iteration needs to be as fast as possible, ideally in real time. To implement such schemes, it is thus necessary to be able to reconstruct an HS cube from a small number of acquisitions in different configurations, at a reduced computation cost.

Section II presents the device and its optical and numerical modeling. In section 3, we address the reconstruction of an HS cube using quadratic regularization, fast and adapted to the system properties. Due to the size of the sparse matrices involved in the reconstruction process, typically $30.10^6 \times 30.10^6$ for a 1Mpixel-image with 30 spectral bands, a straightforward inverse is not feasible. In section 4 we expose the implementation of an alternative iterative algorithm CGNE (Conjugate Gradient for Normal Equations) and the speed up gained owing to the characteristics of the device. Finally, we present some reconstruction results obtained by simulating the device to acquire data from a HS cube.

II. DEVICE MODELING

A. Acquisition device

The device described in [2], is composed of two symmetrical $4f$ -lines (assembly of two lenses and a diffraction grating), separated by a DMD placed in the plane of symmetry as shown in Fig. 1. Each of the micro-mirrors of the DMD can be configured to transmit or block the incoming light, thus performing a spatial filtering of the signal. The first $4f$ -line behaves as a spectrometer with a completely open slit that outputs a diffracted image of the observed scene, which is then spatially filtered accordingly to the micro-mirrors configurations of the DMD. The joint effect of the first $4f$ -line and the micro-mirrors, is thus equivalent to a spatio-spectral filter completely characterized by the DMD configuration. Finally, the second $4f$ -line compensates the diffraction introduced by the first one: it cancels the wavelength-dependent shift and untangles the spatial and spectral components reaching the CCD. So, in the particular case where all the DMD mirrors are open, the CCD captures a panchromatic image of the observed scene.

B. Optical modeling

This section describes the different transformations that the image undergoes in the optical system, by modeling the

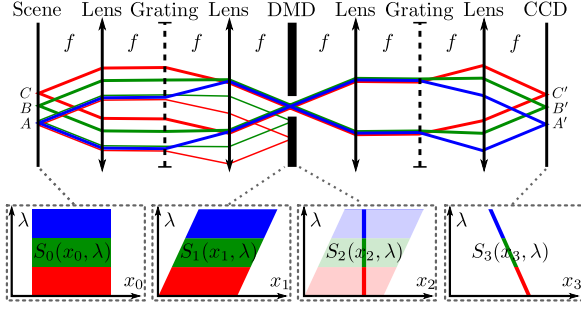


Figure 1. Principle of the device for one line (x, λ) of the HS cube. Lines are independent.

propagation along the instrument of the spectral density of the observed object $S_0(x_0, y_0, \lambda)$, where x_0 and y_0 represent the location of a pixel on the plane and λ is the wavelength.

We denote by $S_n(x_n, y_n, \lambda)$ the spectral density of the object at the n -th plane of the device. Owing to the device's geometry each (x, λ) line of the HS cube is independent of others. Therefore, in the following, the variable y will be omitted and the one-dimensional spectral density (along the x -axis) $S_n(x_n, \lambda)$ located at the n -th plane, as shown in Fig. 1, will be considered instead. We denote $T(x)$ the transmittance of the DMD:

$$T(x) \triangleq \sum_{k=1}^K t_k \mathbb{I}_{\Delta}(x - \tilde{x}_k)$$

where x is the position on the DMD's plane, $\tilde{x}_k$ and the boolean variable t_k represent respectively the location and the state of the k -th micro-mirror of the DMD, $\mathbb{I}_{\Delta}$ is a gate function of support $[-\Delta/2, \Delta/2]$, where Δ is the width of the micro-mirrors, and K is the number of micro-mirrors.

The spectral density S_1 of the scene before the DMD is:

$$\begin{aligned} S_1(x_1, \lambda) &= \int \delta(x_0 - [x_1 + \alpha(\lambda - \lambda_c)]) S_0(x_0, \lambda) dx_0 \\ &= S_0(x_1 + \alpha(\lambda - \lambda_c), \lambda), \end{aligned}$$

where the central wavelength λ_c represents the wavelength of the light propagating along the system's optical axis and the coefficient α represents the spectral dispersion of the system along the x -axis. After passing through the DMD of transmittance $T(x)$, the density becomes:

$$\begin{aligned} S_2(x_2, \lambda) &= T(x_2) S_1(x_2, \lambda) \\ &= \sum_{k=1}^K t_k \mathbb{I}_{\Delta}(x_2 - \tilde{x}_k) S_0(x_2 + \alpha(\lambda - \lambda_c), \lambda). \end{aligned}$$

As the second $4f$ -line undoes the wavelength dependent shift, the density S_3 at the CCD can be written as follows:

$$\begin{aligned} S_3(x_3, \lambda) &= \int \delta(x_2 - [x_3 - \alpha(\lambda - \lambda_c)]) S_2(x_2, \lambda) dx_2 \\ &= \sum_{k=1}^K t_k \mathbb{I}_{\Delta}(x_3 - \tilde{x}_k - \alpha(\lambda - \lambda_c)) S_0(x_3, \lambda). \end{aligned}$$

Finally, by integrating S_3 spatially over the width Δ_d of the CCD pixels, and over the spectral domain, we retrieve the intensity received by the pixels. The intensity $I(c)$ measured on the c -th pixels is therefore written, as a function to the observed object S_0 , in the form:

$$I_3(x_3) = \sum_{k=1}^K t_k \int \mathbb{I}_{\Delta}(x_3 - \tilde{x}_k - \alpha(\lambda - \lambda_c)) S_0(x_3, \lambda) d\lambda \quad (1)$$

$$I(c) = \int \mathbb{I}_{\Delta_d}(x_3 - c) I_3(x_3) dx_3 \quad (2)$$

Equation (1) reflects the co-location property of the instrument, since the intensity $I(x_3)$ depends exclusively on the contents of S_0 at the location x_3 . Note that when all micro-mirrors are transmissive ($t_k = 1, \forall k$), the data corresponds to the integration over all wavelengths of the observed object's spectral density, thus to its panchromatic image.

C. Matrix modeling

Considering the linear relationship between the acquisition $I(c)$ and the HS cube S_0 , a matrix representation can be established via discretization. Hence considering an approximation of $S_0(x_3, \lambda)$ by a staircase function of two variables, constant spectrally and spatially along intervals of width Δ and Δ_d respectively, one can write:

$$I(c) \approx \frac{\Delta \Delta_d}{\alpha} \sum_{k=1}^K t_k S_0(c, \tilde{\lambda}_k). \quad (3)$$

For the sake of simplicity Δ and Δ_d are considered to be equal in the following, without any loss of generality. For a given configuration of the DMD, relation 3 can be written in matrix form $\mathbf{I} = \mathbf{T}\mathbf{o}$, where $\mathbf{I}$ is a vector containing the value of all the C pixels of a CCD column, $\mathbf{o}$ is the discretized version of S_0 with the same spatial size as the CCD i.e. C positions, and W wavelengths. Due to the co-location property, $\mathbf{T}$ is highly sparse which will be shown to be valuable in the reconstruction process.

Our objective is to reconstruct the HS cube from N image acquisitions $\mathbf{I}^{(n)}$ each done with a different DMD configuration $\mathbf{T}^{(n)}$. Fortunately the matrix representation for multiple acquisitions can be readily drawn from the single acquisition model. To extend the first model, we concatenate all the N acquisitions $\mathbf{I}^{(n)}$ to form a vector $\mathbf{d}$ of dimension NC and likewise for the DMD configuration matrices $\mathbf{T}^{(n)}$ to form a matrix $\mathbf{H}$ of size $NC \times CW$:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{I}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{T}^{(N)} \end{bmatrix} \mathbf{o} = \mathbf{H}\mathbf{o}. \quad (4)$$

Finally, to consider the general reconstruction case, that is, for a multiple rows CCD, we simply reiterate the concatenation process to obtain the multi-acquisition model. Note that this extension is possible thanks to the line independence property of the device. Thus for a R rows CCD, the dimensions of $\mathbf{d}$, $\mathbf{H}$ and $\mathbf{o}$ are NRC , $NRC \times RCW$ and RCW respectively.

III. HYPERSPECTRAL IMAGE RECONSTRUCTION

A. Reconstruction using a quadratic penalization

The reconstruction problem is a linear inverse problem, which consists in recovering the ground truth object from the data. We seek to retrieve the HS cube $\mathbf{o}$ of the observed scene from the noisy data $\mathbf{d}$ with a small set of acquisitions N : $N < W$. As a consequence, the system (4) is under-determined, and additional hypotheses are necessary to solve it. Regularization have proved to yield efficient solutions to such inverse problems.

A classical approach to regularization is to minimize a penalized cost function of the form:

$$\hat{\mathbf{o}} = \arg \min_{\mathbf{o}} \|\mathbf{d} - \mathbf{H}\mathbf{o}\|^2 + \Omega(\mathbf{o}), \quad (5)$$

The first term of this cost function (which is related to the likelihood function in the case of additive white Gaussian noise) aims to reconstruct a solution compatible with the data, whereas the second term favors certain properties of the object.

The choice of the function Ω is a cornerstone of the regularization process: it should be based on prior information on the observed object. Classically, such information can be modelled with a stochastic model taken into account in a Bayesian framework (see e.g. [4]). In image restoration or reconstruction, the challenge is to model piecewise smooth images, to preserve the edges of the images. An alternative is based on assumptions of sparsity of the object in a certain representation space (see e.g. [5]). Recent works based on the sparsity of the object in a wavelet basis has shown its effectiveness for the reconstruction of hyperspectral cubes from devices close to ours [6]. Despite many research on efficient optimization algorithms specific to such problems, they always require more computational resources than using a simple quadratic function for Ω (historically known as Tikhonov regularization) which leads to a linear least-squares problem.

As we are interested in fast reconstruction algorithms, we focused on Tikhonov quadratic regularization. In the 3-dimension case of hyperspectral cubes this leads to penalize quadratically the spatial and spectral variations of the cube which results in the penalization function $\Omega(\mathbf{o}) = \mu_x \|\mathbf{D}_x \mathbf{o}\|^2 + \mu_y \|\mathbf{D}_y \mathbf{o}\|^2 + \mu_\lambda \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{o}\|^2$, where $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ and $\mathbf{D}_\lambda$ represent the finite differences along the spatial (x and y) and spectral (λ) dimensions respectively, and μ_x , μ_y and μ_λ their associated regularization coefficients. In this case solution (5) admits an analytic expression:

$$\hat{\mathbf{o}} = (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \mu_x \mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x + \mu_y \mathbf{D}_y^t \mathbf{D}_y + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{d} \quad (6)$$

However, this solution has a major flaw, related to the quadratic penalty: it smoothes the image at the edges, resulting in a loss of spatial and spectral resolutions. To overcome this defect, many works have proposed to replace quadratic regularization with edge-preserving non-quadratic regularization [4]. However, computing the associated solution requires more computation time. Some iterative algorithms designed to solve these problems, sometime called Majorize-Minimization

algorithms, are based on computation of solutions equivalent to (6) at each iteration (see e.g. [7]).

In our case, we can benefit from the properties of the imaging device to detect the edges on the panchromatic image of the observed scene, easy to acquire. A simple segmentation algorithm can locate the edges in this image, which can be accounted for in the quadratic regularization scheme. In practice, this is simply implemented by removing the rows of matrices $\mathbf{D}_x$ and $\mathbf{D}_y$ corresponding to actual spatial edges, thereby preserving the quadratic regularization only in homogeneous areas of the panchromatic image. Note that such a procedure amounts to relax the smoothness constraint near the edges and does not force edges for all spectral bands.

B. Implementation

Due to the very large dimensions of matrices, the direct matrix inversion involved in solution (6) is intractable, even with the highly sparse matrices $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$, and $\mathbf{D}_\lambda$. Consequently, we propose to use an iterative algorithm, re-writing equation (6) as the following normal equation:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \hat{\mathbf{o}} = \mathbf{A}^t \mathbf{d} \quad (7)$$

with $\mathbf{A} = [\mathbf{H}, \sqrt{\mu_x} \mathbf{D}_x, \sqrt{\mu_y} \mathbf{D}_y, \sqrt{\mu_\lambda} \mathbf{D}_\lambda]^t$. Thus the *CGNE* (Conjugate Gradient for Normal Equation) algorithm can be used to compute the solution with a very low computational cost. Each *CGNE* iteration require mainly to compute the image of vectors by $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}^t$ which boils down to compute the images by matrices $\mathbf{T}^{(n)}$, $\mathbf{D}_y$, $\mathbf{D}_x$ and $\mathbf{D}_\lambda$ and by their transposes. The images of the direct and transposed finite differences operators are straightforward to compute as simple spatial or spectral first order difference of pixels in the HS cube. Thanks to the co-location property of the imaging device, the image of operator $\mathbf{T}^{(n)}$, which corresponds to solving the forward model of eq. (3) for each spatial pixel, can be computed as a weighted projection of the object (with 0 or 1 weights): this requires less than $NWRC$ additions. The image of the adjoint operator $\mathbf{T}^{(n)t}$ is even easier to compute as it corresponds to a kind of retro-projection, without any addition or products. The *CGNE* algorithm is guaranteed to converge in at most WRC iterations but, in practice, it converges in less than 110 iterations for a precision of 10^{-6} .

IV. RESULTS AND DISCUSSION

In this section we present some reconstruction results from data simulated with a real data cube of dimensions $820 \times 820 \times 31$ excerpted from [8], illustrated Fig. 2. The CCD acquisitions $\mathbf{I}^{(n)}$ used for the reconstruction are simulated using equation (4). For the sake of simplicity, we considered the spectral sampling of the cube as constant and equal to Δ/α , and equal widths for the DMD and the CCD. Hence each unitary spectral displacement Δ/α corresponds to a spatial shift of one pixel on the CCD and the size of the acquired images $\mathbf{I}^{(n)}$ is 820×820 . We exploit acquisitions performed with random DMD patterns where each micro-mirror state (transmission or rejection) t_k follows a Bernoulli distribution of parameter $P(t_k = 1) = 10\%$, that is, on average 10% of

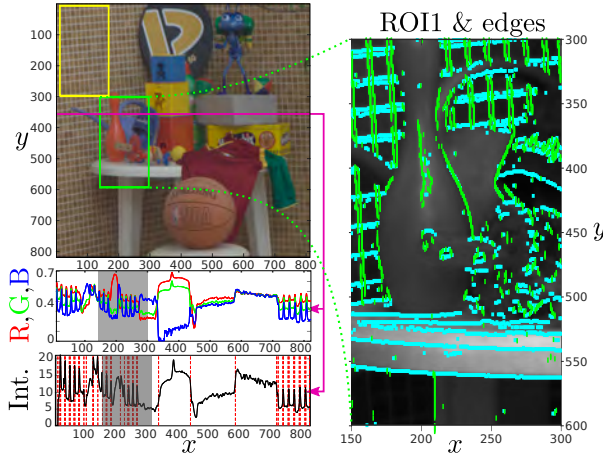


Figure 2. Illustration of the observed object. Up: RGB image with two regions of interest "ROI1" and "ROI2" denoted respectively by the green and yellow frames, and panchromatic image of the "ROI1" where the green and cyan segments represent respectively the vertical and horizontal edges. Down: RGB intensities along the pink line, and associated panchromatic intensities where the red dotted lines mark the positions of detected edges – the shaded region corresponds to the "ROI1".

mirrors are in a transmission state. A white Gaussian noise is added to the data, with a signal to noise ratio (SNR) of 20dB.

Some reconstruction results obtained using 5 acquisitions for random DMD patterns are shown Fig. 3. One example of such acquisition is shown in Fig. 3 (e). Note that this figure 3 only shows the reconstruction related to the "ROI1" of $300 \times 150 \times 31$ pixels (see Fig. 2), while the reconstruction has been performed on the whole image. The regularization parameters are set to $(\mu_x, \mu_y, \mu_\lambda) = (5, 5, 0.5)$ in order to favor the spectral resolution compared to the spatial one. The spatial resolution has been improved by accounting for the edges, as explained in § III-A. The edges have been detected from the panchromatic image using a simple spatial gradient thresholding method.

The images at a given wavelength of Figs (b), (c), and (d) as well as the spatial/spectral sections of Figs (f), (g), and (h), help to evaluate the quality of the reconstructions, with and without accounting for the edges detected on the panchromatic image. The improvement given by the edge preserving approach in terms of spatial resolution is obvious, in particular in the neighborhood of the edges, comparing the (x, y) cross-sections of Fig (d) to the one of Fig. (c) which is blurred. Such edge-preserving effect is also clearly visible on the (x, λ) cross-sections of Figs (h), and (g). However, the improvement in terms of spectral reconstruction quality is more difficult to appreciate from such figures. Nevertheless, such improvement is clearly visible Figs. (i) and (j), where the amplitude of the spectra is clearly better estimated in the neighborhood of the edges when the latter are taken into account. However, such a result inherently depend on the performance of the edge detection process since over uniform regions (far from the edges) the reconstruction is nearly the same for both methods.

As can be seen near $x = 275$ in Fig. (i) and near $x = 190$ in Fig. (j), where no edge have been detected, the edge-preserving method fails to improve the reconstruction result. Finally, the distribution of the reconstruction errors helps to compare the overall reconstruction results without or with taking into account the edges. Such a distribution computed on the entire scene (Fig.(k)) is slightly more peaky when the edges are taken into account. But the improvement is clearly more visible if these distributions are computed in a region with a lot of edges as "ROI2" (defined Fig. 2) as shown Fig. (l).

V. CONCLUSION

In this paper we have proposed a fast HS cube edge-preserving reconstruction method that takes advantage of the main characteristics of a double disperser hyperspectral imager controllable thanks to a DMD, namely the co-location property and the ability to acquire a panchromatic image. Using only a few acquisitions (compared to the number of wavelengths), for random configurations of the DMD, we obtained very satisfactory reconstruction results, in particular when the edges detected from the panchromatic images are taken into account. Indeed, the original and the reconstructed HS cubes are very similar despite the lack of information given by the data. Note that the degradation of the resolution due to quadratic regularization have been partially compensated by the edge preserving approach.

The influence of the acquisitions parameters (number of acquisition, ratio of transmission on the DMD, SNR) has to be studied before using such a method on real data. This requires the definition of metrics to evaluate the reconstruction quality in particular in terms of spatial and spectral resolution.

Our ultimate goal is to exploit the instrument in an adaptive way, in which the DMD configuration of each acquisition is controlled in order to improve the information on the observed object. Therefore, the ability to quickly reconstruct the HS cube is important to define adaptive acquisition schemes.

Acknowledgment: The authors thank the Toulouse University and Occitanie Région for funding the *Sir4Hyadim* Project.

REFERENCES

- [1] N. Hagen and M. W. Kudenov, "Review of snapshot spectral imaging technologies," *Optical Engineering*, vol. 52, no. 9, Sept. 2013.
- [2] S. McGregor, S. Lacroix, and A. Monmayrant, "Adaptive hyperspectral imager: design, modeling, and control," *J. of Optics*, vol. 17, no. 8, p. 085607, Aug. 2015.
- [3] M. E. Gehm, R. John, D. J. Brady, R. M. Willett, and T. J. Schulz, "Single-shot compressive spectral imaging with a dual-disperser architecture," *Optic Express*, vol. 15, no. 21, Oct. 2007.
- [4] J. Idier, Ed., *Bayesian Approach to Inverse Problems*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc, Apr. 2008.
- [5] J. A. Tropp and S. J. Wright, "Computational methods for sparse solution of linear inverse problems," *Proc. of the IEEE*, vol. 98, no. 6, Jun. 2010.
- [6] G. R. Arce, D. J. Brady, L. Carin, H. Arguello, and D. S. Kittle, "Compressive coded aperture spectral imaging: An introduction," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 31, no. 1, pp. 105–115, Jan. 2014.
- [7] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud, "Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 6, no. 2, Feb. 1997.
- [8] D. H. Foster, K. Amano, S. M. C. Nascimento, and M. J. Foster, "Frequency of metamerism in natural scenes," *J. Opt. Soc. Am. (A)*, vol. 23, no. 10, pp. 2359–2372, Oct. 2006.

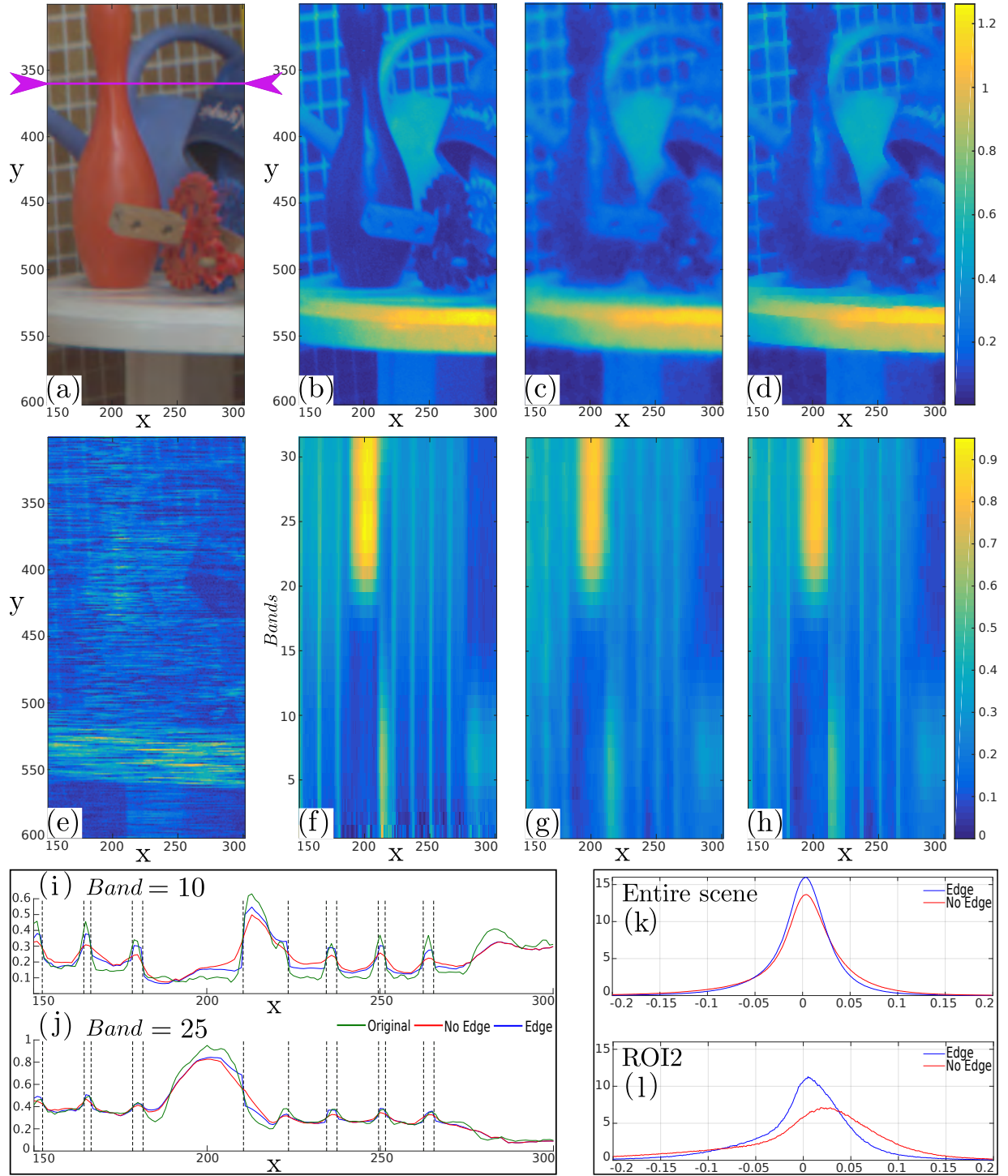


Figure 3. Simulation results. (a) RGB image of "ROI1". (b) (x, y) cross-section of "ROI1", for band = 10, and its reconstruction (c) without and (d) with accounting for edges. (e) One simulated CCD acquisition of "ROI1". (f) (x, λ) cross-section of "ROI1", for $y = 360$ (pink line of (a)), and its reconstruction (g) without and (h) with accounting for edges. (i) and (j) Cross-sections of the figures (f), (g) and (h), at band=10 and 25 respectively. (k) and (l) Distribution of the reconstruction error computed over the entire scene and restricted to "ROI2" respectively.

Chapitre 3

Article sur l'étude des méthodes RA et SA

Sommaire

Abstract	48
1. Introduction	48
2. Programmable HyperSpectral Imager (PHSI)	51
2.1 Principle and key features	51
2.2 Discrete model	52
2.3 Matrix model	52
3 Reconstruction using a quadratic Regularization Approach (RA)	53
4 Reconstruction using a Separability Assumption (SA)	56
5 Parameters selection	58
5.1 Simulated data and reconstruction quality criteria	58
5.2 Ratio of open mirrors (ROM)	60
5.3 Parameters for the regularization approach (RA)	61
5.4 Parameters for the separability assumption (SA)	63
6 Results	65
6.1 Regularization approach (RA)	66
6.2 Separability Assumption (SA)	67
6.3 Comparison of SA and RA performances	68
7 Discussion and perspectives	72
8 Acknowledgement	73
References	73

Nous reprenons ici l'article [[ARC⁺20](#)] en préparation :

I. Ardi, T. Rouvier, H. Carfantan, S. Lacroix and A. Monmayrant, Two fast reconstruction approaches leveraging the panchromatic image for a configurable dual-disperser imager, Rapport Technique IRAP–UPS/CNRS/CNES et LAAS–CNRS, juillet 2020.

Noname manuscript No. (will be inserted by the editor)

Two fast reconstruction approaches leveraging the panchromatic image for a configurable dual-disperser imager

Ibrahim Ardi · Tony Rouvier · Hervé Carfantan · Simon Lacroix · Antoine Monmayrant

Received: date / Accepted: date

Abstract We propose two computationally efficient methods to reconstruct an hyperspectral cube from a small number of images acquired with a programmable dual-disperser coded aperture imaging device. Taking advantage of the specific characteristics of the device, these methods do not require a systematic scan of all the hyperspectral cube. They are based on simple assumptions on the spatial-spectral correlation structure of the scene, using information deduced from the panchromatic image. The first method is a Thikonov quadratic regularization tailored to prevent smoothing at the spatial edges. The second method is a least square reconstruction taking advantage of the spatial and spectral separability of the hyperspectral cube over small homogeneous regions. Insights on the definition of the optimal sequence of acquisitions and parameter values of the two methods are given, through an extensive assessment of the reconstruction performance. A comparison highlights the respective advantages and drawbacks of both approaches.

Keywords Hyperspectral image reconstruction, quadratic regularization, spatio-spectral correlations

1 Introduction

By conveying precise spectral information, hyperspectral (HS) images benefit a wide range of applications, from microscopy to deep space observation, earth observation, scene and material analyses, gas detection... Classic HS imagers exploit a scanning process to recover the three dimensions, two spatial and one spectral,

Ibrahim Ardi · Tony Rouvier · Hervé Carfantan
IRAP, Université de Toulouse, Université Toulouse 3 - Paul Sabatier, CNRS, CNES,
14 Avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France
E-mail: herve.carfantan@irap.omp.eu

Ibrahim Ardi · S. Lacroix · A. Monmayrant
LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France
Avenue de Colonel Roche, 31031 Toulouse, France
E-mail: simon.lacroix@laas.fr

of the HS data, referred to as a “HS cube”. Typically, their spectral components are separated by a dispersive element such as a prism or a grating, and measured on a two dimensional detector. This scanning process is time consuming and imposes strong constraints on the acquisition, during which the imager and scene must be static (alternatively, the scanning can be achieved by a regular motion of a slit imager, as in airborne HS imagery). To alleviate such constraints, various alternative optical systems that allow “snapshot HS imaging” have been proposed, most relying on a complex optical design [1].

The design of non-scanning HS imagers has been significantly renewed by the advent of computational sensing approaches, in which only a single or a small number of acquisitions are processed to recover the whole HS cube or specific information defined by the task at hand. Computational sensing approaches rely on the tight integration of specific sensor designs and associated data processing algorithms. Depending on the optical design, tedious and precise spatio-spectral calibration are required [2,3]. The data processing algorithms palliate the lack of acquired information by resorting to hypotheses and priors, such as sparsity of the scene content in a given basis, and are most often computationally heavy. Noticeable work on computational HS imagers are [4,5,6,7].

The work presented here pertains to computational HS imaging, and proposes fast reconstruction techniques. It relies on a programmable dual-disperser coded aperture imager, whose key properties are exploited to develop efficient reconstruction algorithms, both in terms of computational cost and reconstruction quality.

Dual-disperser coded aperture imager. The principle of a dual disperser HS imager was originally introduced in [8], and this setup has been used in various acquisition configurations since (see e.g. [9,4,10,11,12]). Its main interest is that spectral and spatial information are not mixed on the imaging detector, thus avoiding cumbersome calibration issues, and yielding simpler reconstruction algorithms. We rely on such an imaging architecture, referred to as “programmable hyperspectral imager” (PHSI), in which the spatial filtering is achieved by a programmable digital mirror device (DMD) [11,13].

Leveraging panchromatic information. Analyses on the structural properties of colour images [14,15]) revealed a particular role of the panchromatic image (luminance), and have had a major impact on image processing, such as compression, de-noising and restoration algorithms [16,17,18]. Similarly, as it conveys precise spatial information on the scene, the panchromatic image is often used in HS imaging. For instance, it is exploited in pansharpening processes to improve the spatial resolution [19], or as a similarity metric that coerces structural resemblance on the HS cube regions [12]. For high-frame rate HS video, high-frame rate panchromatic video is used to interpolate in-between frames of a low-frame rate HS video [20]. In practice though, the discriminative information brought by the panchromatic image should be dealt with caution. Moreover, when the panchromatic image is recorded on a different imager, precise calibration and registration are required.

The advent of snapshot and near snapshot hyperspectral imagers has fostered research on the structure of HS images. The intrinsic spatio-spectral correlations properties of scenes, as analysed in [21], has driven the development of a variety of algorithms that process sparse HS data, to achieve *e.g.* reconstruction [22,23], de-noising [24,25], or compression [26].

In this work, our key assumption is that the panchromatic image is an accurate representation of the spatial structure of the HS scene, and preserves well the discriminative features of the spectra. In particular, two identical spectra always give the same panchromatic intensity, while different spectra usually give different intensities. Furthermore, true metamers are unlikely to be adjacent: in other words, adjacent regions with different spectral content are unlikely to share the same panchromatic intensity.

Contributions. In this paper, we focus on a HS cube reconstruction using a set of acquisitions significantly smaller than the number of spectral bands (the panchromatic image, and a small set of acquisitions obtained with random configurations of the DMD). We present two computationally efficient reconstruction processes that ensure good precision by taking full advantage of the PHSI imager features.

Our reconstruction methods exploit simple spatio-spectral assumptions of the HS cube. They are based on a *regularity assumption*, which assumes that the spectra are similar on spatially homogeneous regions of the HS scene, and that the spatial structure of the HS scene can be roughly extracted from the panchromatic image. In the first approach, we benefit from the edges detected on the panchromatic image to implement a simple and fast quadratic regularization method that preserves these edges, faithfully matching the spatial structure of the HS scene. A modified spatio-spectral quadratic Tikhonov regularization is applied across the HS cube, except on the detected spatial edges. In the second approach, we account for an additional *separability assumption* between spatial and spectral variations in spatially homogeneous regions of the HS scene. This leads the reconstruction of a unique spectrum and a spatial intensity map for each region. This reconstruction method consists first of segmenting the panchromatic image into small homogeneous regions, and then in reconstructing the spectrum of each region via a least-squares minimization, accounting for the intensity map obtained from the panchromatic image.

Outline. In section 2, the optical principle of the PHSI is presented, its key features are depicted, and its numerical model is defined. The regularity assumption and the first proposed reconstruction method are presented in section 3. The additional separability assumption and the second proposed reconstruction method are described in section 4. We address the problem of parameters selection for the two reconstruction methods and for the acquisition process in section 5, in which impact analyses are conducted on numerous simulations with real-world HS scenes. Section 6 analyses the reconstruction results. The performances of both reconstruction methods are assessed independently and a thorough comparison of the two methods is performed to highlight their respective advantages and drawbacks. A concluding section discusses the methods, and presents some perspectives and future work.

2 Programmable HyperSpectral Imager (PHSI)

2.1 Principle and key features

A dual-disperser hyperspectral imaging system is composed of two symmetrical $4f$ -lines, each being an assembly of two lenses and a diffraction grating (or a dispersive prism), separated by a spatial filter (SF), as shown in the one dimensional optical schematic of Figure 1.

The first $4f$ -line behaves as an imaging spectrometer with a wide-open input slit: it spreads the scene spectrally onto the plane of the spatial filter SF. The light not blocked by the SF then goes through the second $4f$ -line, which compensates the dispersion introduced by the first one. As a result, there is no spatio-spectral shift on the image formed on the camera (see [13,27] for more details).

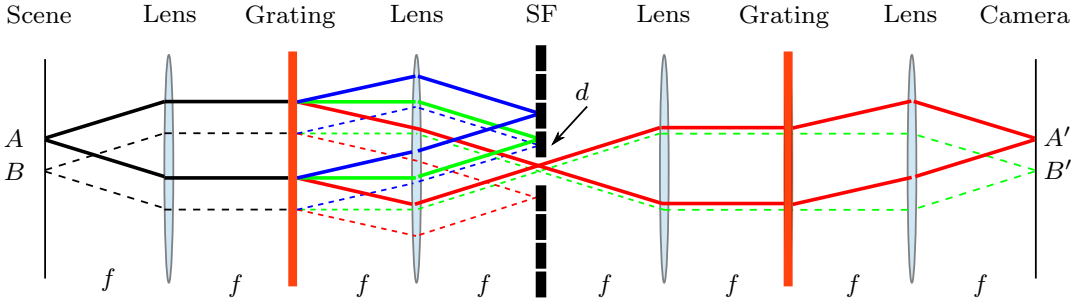


Fig. 1 Optical schematic of a dual-disperser hyperspectral imaging system. The imaging of two scene points with a single opening in the spatial filter is illustrated here – in such a configuration, the imager acts as a spectral gradient filter.

First dual disperser hyperspectral imagers used a fixed coded aperture mask as a spatial filter [4]. Our system exploits a DMD, as in [10], on which each micro-mirror can be configured to transmit or block the incoming light – hence the adjective “programmable”.

Dual disperser imagers benefit from an essential property, which we refer to as “co-registration”. Consider the pair of scene and camera locations denoted A and A' in Figure 1. The pair (A, A') is said to be co-registered because the spectral components collected at the position A' (denoted by red solid lines) all *exclusively* come from the position A , *no matter the configuration of the DMD*. The DMD configuration defines which spectral components from A are transmitted to A' and which are filtered out. For instance, if the DMD mirror denoted d in Figure 1 is also opened, then the green component of the scene point A will also reach the camera point A' (note also that the blue component of scene point B will then reach the camera point B').

A direct consequence of co-registration is the easy access to the panchromatic image: in a single acquisition with all the mirrors of the DMD opened, each pixel on the camera records the sum over all the spectral bands of the corresponding element in the scene. Another consequence is that each line is independent from the others and can be processed individually.

2.2 Discrete model

Let $O(r, c, w)$ be the 3D observed hyperspectral scene (“object”), where (r, c) and w are respectively the spatial and spectral dimensions row, column and wavelength. The size of $O(r, c, w)$ is RCW . Each spectral plane $\{O(r, c, w)\}_{r,c}$ of the object O is imaged onto the DMD with a lateral shift (column-wise) defined by the grating dispersion and the wavelength w . The DMD displays a binary spatial filter, represented by a pattern $D(r, c)$. The DMD thus acts as a set of binary spatial filters, each filter being a shifted version of the DMD pattern, the shift being defined by the wavelength w [13]. This is illustrated in Figure 2, which schematizes the two-dimensional optical system.

Consider a discrete coordinate system with a one to one ratio for the spatial coordinates (r, c) between the object O , the DMD D and the camera M (the latter is then of size RC), and a spectral discretization rate w such that adjacent spectral planes in O are shifted laterally on the DMD D by exactly one pixel¹. In this coordinate system, the dual-disperser imager can be represented by a *filtering cube* $FC(r, c, w)$ of size RCW , which is built by stacking the W shifted DMD patterns along the w dimension: $FC(r, c, w) = D(r, c - w + w_0)$, with a reference wavelength w_0 . This reference wavelength corresponds to the wavelength that is not laterally shifted on the DMD and thus imaged at its center, it is represented in green on figures 1 and 2. The measurement $M(r, c)$ at the camera pixel (r, c) is the sum of all spectral components of the object point $O(c, r)$ that passes through the binary mask defined by the line (r, c) of the filtering cube FC . This can be written as:

$$M(r, c) = \sum_{w=1}^W FC(r, c, w)O(r, c, w). \quad (1)$$

2.3 Matrix model

Equation (1) stands for one pixel $M(r, c)$ of the camera. As it is linear with respect to the object, the entire image acquisition process can be encoded in the matrix form $\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{o}$. In this form, $\mathbf{m}$ is a vector containing the value of all the $R \times C$ pixels of a camera measurement, $\mathbf{o}$ is the vectorized version of the HS scene O and $\mathbf{H}$ is a $RC \times RCW$ binary matrix that corresponds to the filtering cube (instrument transfer function).

This matrix equation models one single acquisition, but can be extended to represent a sequence of acquisitions with varying configuration of the DMD. Indeed, for a given set of N acquisitions $\{\mathbf{m}^{(n)}\}$, each made with a different DMD configuration $\mathbf{H}^{(n)}$, the matrix representation for the N acquisitions can be readily drawn from the single acquisition model by concatenating all the N acquisitions $\mathbf{m}^{(n)}$ to form a vector $\mathbf{m}$ of dimension NRC , and likewise concatenating all the N

¹ This particular discretization does not imply any loss of generality – see [13] for a general geometric model which accounts for different DMD and camera pixel sizes and [27] for a detailed experimental analysis.

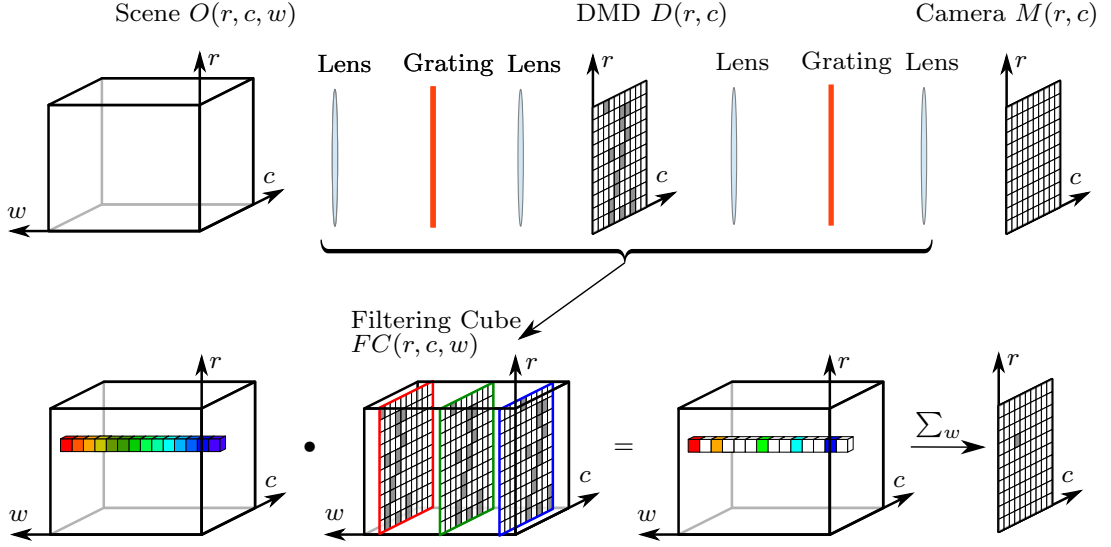


Fig. 2 Discrete model of the whole PHSI, in which each line r is an instance of figure 1. The whole optics system can be modeled as a binary “filtering cube” defined by the DMD configuration. The imaging process comes to filter the hyperspectral cube with this cube, and then integrate for each pixel the spectral components that went through the filter.

DMD configuration matrices $\mathbf{H}^{(n)}$ to form a matrix $\mathbf{H}$ of size $NRC \times RCW$:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{m}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(N)} \end{bmatrix} \mathbf{o} = \mathbf{H}\mathbf{o}. \quad (2)$$

The measured data $\mathbf{m}$ depends on the exposure time that is not necessarily fixed during a sequence of acquisitions. To take this into account, the matrices $\mathbf{H}^{(n)}$ are multiplied by the exposure time. $\mathbf{H}^{(n)}$ are thus no longer binary sparse matrices but sparse constant matrices (mainly 0’s and few constant values equal to the exposure time). This convention allows us to consider a normalized object $\mathbf{o}$ to be reconstructed that is independent from the exposure time.

Finally, to properly account for the intrinsic stochastic/probabilistic nature of the measurement of light occurring within each pixel (shot noise) and the dark noise, the acquisitions $\mathbf{m}$ are modelled as the realization of a Poisson noise of mean $\mathbf{H}\mathbf{o}$:

$$\mathbf{m} \sim \mathcal{P}(\mathbf{H}\mathbf{o}). \quad (3)$$

For the remainder of the paper all the acquisitions are considered to follow the model of equation (3).

3 Reconstruction using a quadratic Regularization Approach (RA)

The reconstruction problem is a linear inverse problem, which consists of recovering the ground truth object from the data. We seek to retrieve the HS cube $\mathbf{o}$ of the observed scene from N noisy measurements $\mathbf{m}$, where N is less than the number W of spectral bands: $N < W$. As a consequence, the problem is under-determined

(RCW unknown to estimate from RCN data), and additional hypotheses are necessary to solve it.

As discussed in the introduction, the spatio-spectral correlation characteristic of HS scenes [21] brings useful and reliable information about the HS scene. In this work, we propose to characterise such a correlation through the following assumption.

Assumption 1 Homogeneity: *Two neighbouring pixels in an homogeneous spatial region of the panchromatic image have similar spectra, and the edges between two homogeneous regions can be detected from the panchromatic image.*

To qualitatively assess the consistency of this assumption, let's consider a real-world scene from the HS database [28] shown in figure. 3. The intensity of the scene at two distinct spectral bands (Figs. 3(c) and 3(d)) is constant or varies smoothly over homogeneous regions such as the boxes or the tiles. Contrarily, on edges, abrupt variations can be observed. In addition, the presence of edges in the panchromatic image (Fig. 3(b)) often results in the presence of edges in each monochromatic image. Of course some exceptions occur, for example in the area delimited by the magenta rectangle in Fig. 3, where an edge in the panchromatic image does not result in an edge on each spectral band (see Fig. 3(c)). But the opposite case where edges in the spectral bands don't result in an edge in the panchromatic image are rare.

By nature, regularization aims to account for desirable properties of the solution of inverse problems [29]. A classical regularization framework is to minimize a penalized cost function of the form:

$$\hat{\mathbf{o}} = \arg \min_{\mathbf{o}} \|\mathbf{m} - \mathbf{H}\mathbf{o}\|_{\mathbf{F}^{-1}}^2 + \Omega(\mathbf{o}), \quad (4)$$

The first term of this cost function aims to reconstruct a solution compatible with the data whereas the second term favours specific properties of the object. Note that the first term can be related to the likelihood function in the case of additive centred Gaussian noise with covariance matrix $\mathbf{F}$. Therefore, it is not consistent with the fact that $\mathbf{m}$ is modelled as a Poisson distribution in equation (3). However the Gaussian approximation (with $\mathbf{F} = \text{diag}\{\mathbf{m}\}$) is valid for high fluxes (thanks to the central limit theorem), which is the case when the exposure time is appropriately set during the acquisition process. The choice of the function Ω is a cornerstone of the regularization process: it should be based on prior information on the observed object. Such information can be taken into account in a deterministic or a stochastic Bayesian framework (see e.g. [29]). The Tikhonov regularization quadratically penalizes the derivative of the object [30] so it can account for the similarity between neighbouring pixels values in an image [29]. In our case this amount to the function $\Omega(\mathbf{o}) = \mu_x \|\mathbf{D}_x \mathbf{o}\|^2 + \mu_y \|\mathbf{D}_y \mathbf{o}\|^2 + \mu_\lambda \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{o}\|^2$, where $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ and $\mathbf{D}_\lambda$ represent the finite differences along the spatial (x and y) and spectral (λ) dimensions respectively, and μ_x , μ_y and μ_λ are the associated regularization parameters. In this case solution of equation (4) has an analytical expression:

$$\hat{\mathbf{o}} = (\mathbf{H}^t \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} + \mu_x \mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x + \mu_y \mathbf{D}_y^t \mathbf{D}_y + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{F}^{-1} \mathbf{m} \quad (5)$$

However, such a quadratic regularization solution has a major flaw: it smooths the sharp edges in the HS cube. This mainly results in a loss of spatial resolution and of spectral resolution.

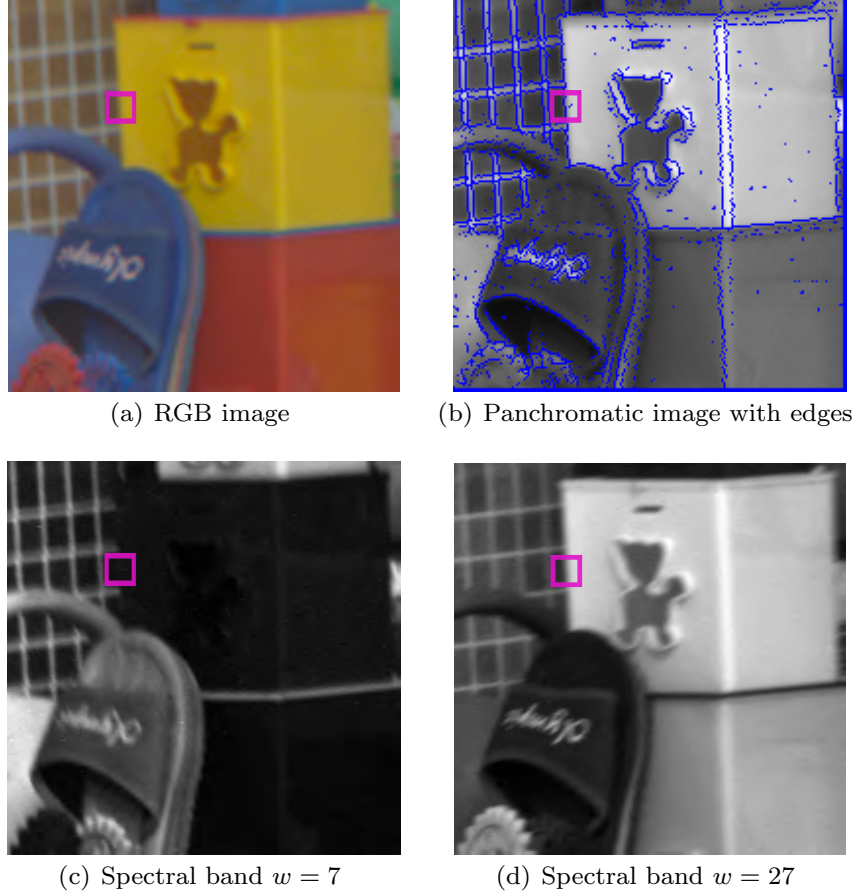


Fig. 3 Illustration of the homogeneity assumption: (a) RGB view of an HS scene; (b) panchromatic image with detected edges marked in blue; (c) and (d) HS image for two monochromatic spectral bands.

For more than 30 years, a challenge in image restoration and denoising was to define a regularization that preserves the resolution, in particular the edges, of the images. Various alternatives have been proposed, such as substituting the quadratic function with other functions (see e.g. [31,32]), or using assumptions of sparsity of the object in a certain representation space (see e.g. [33]). Recent work based on the sparsity of the object in a wavelet basis has been effective for the reconstruction of hyperspectral cubes with devices similar to ours [6]. Despite progresses on efficient dedicated optimization algorithms, such approaches always require more computational resources than using a simple quadratic function for Ω .

In our case, we propose an edge-preserving quadratic regularization reconstruction method exploiting the *homogeneity assumption*. One can indeed easily detect edges on the panchromatic image (see Fig. 3(b)), and preserve them from the regularization process by simply suppressing the rows of matrices $\mathbf{D}_x$ and $\mathbf{D}_y$ corresponding to the detected edges. The reconstruction can then be carried out by solving equation (5) with the modified matrices $\mathbf{D}_x$ and $\mathbf{D}_y$.

From a computational point of view, even if all the matrices $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$, $\mathbf{D}_\lambda$ and $\mathbf{\Gamma}$ are highly sparse, they are too big to solve equation (5) directly. So we use a *Conjugate Gradient for Normal Residual (CGNR)* iterative algorithm (see e.g. [34,

Chap. 8]). Indeed, rewriting equation (5) as the following normal equation:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \hat{\mathbf{o}} = \mathbf{A}^t \mathbf{F}^{-1/2} \mathbf{m} \quad (6)$$

with $\mathbf{A} = [\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1/2}, \sqrt{\mu_x}\mathbf{D}_x, \sqrt{\mu_y}\mathbf{D}_y, \sqrt{\mu_\lambda}\mathbf{D}_\lambda]^t$, the *CGNR* algorithm can be used to compute the solution.

Each *CGNR* iteration consists exclusively in calculating the image of vectors by $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}^t$ which boils down to computing the images of $\mathbf{H}^{(n)}$, $\mathbf{D}_y$, $\mathbf{D}_x$ and $\mathbf{D}_\lambda$ matrices and of their transposes. The images of the direct and transposed finite differences operators are straightforward to compute as simple spatial or spectral first order difference of pixels in the HS cube. Thanks to the co-registration property of the imaging device, the image of operator $\mathbf{H}^{(n)}$ can be computed as a weighted projection of the object: this requires less than *NWRC* additions. The image of the adjoint operator $\mathbf{H}^{(n)t}$ is even easier to compute as it corresponds to a kind of retro-projection, without any addition or products.

The choice of the regularization parameters μ_x , μ_y and μ_λ , and the choice of the edge detection method and its parameters are addressed in details in section 5.

4 Reconstruction using a Separability Assumption (SA)

The previous method is based on the detection of edges in the panchromatic image. In this section we propose an other method which uses a region-based segmentation of the panchromatic image and an additional separability assumption.

Assumption 2 *Separability*: *The hyperspectral image can be segmented in closed homogeneous regions. Each region can be accurately described by a separable product between one single spectrum and a spatial intensity map corresponding to the panchromatic intensity within the region.*

Accounting for such an assumption, the scene $O(r, c, w)$ can be written as $O(r, c, w) = P(r, c)S(w)$ for any pixel (r, c) in an homogeneous region, where $P(r, c)$ stands for the value of the panchromatic image at pixel (r, c) and $S(w)$ represents the spectrum of this region.

The separability assumption is stronger than the previous homogeneity assumption. Moreover, it may strongly depend on the chosen region segmentation method and its associated parameters. Fig. 4 shows two region-oriented segmentations of the panchromatic image of Fig. 3. The segmentation shown in Fig. 4(a) seems visually correct in terms of semantic contents while the segmentation shown in Fig. 4(b) appears over-segmented. To quantitatively assess the separability assumption on these segmentations, we propose to quantify the distance between the spectrum of each pixel and the median spectrum of all the pixels in the region. For that, we compute the maps of normalised spectral angle mapper (SAM) [35] for each pixel of the image (see section 5.1 for a definition of the normalised SAM). The lower the SAM map the more the separability assumption is valid. The SAM maps associated with segmentations (a) and (b) are shown Fig. 4(c) and 4(d) respectively. Two conclusions can readily be drawn from this illustration. First, the separability assumption is very sensitive to the segmentation, since the two SAM maps differ substantially. Second, better results (i.e. lower SAM values) are obtained with over-segmentation of the panchromatic image.

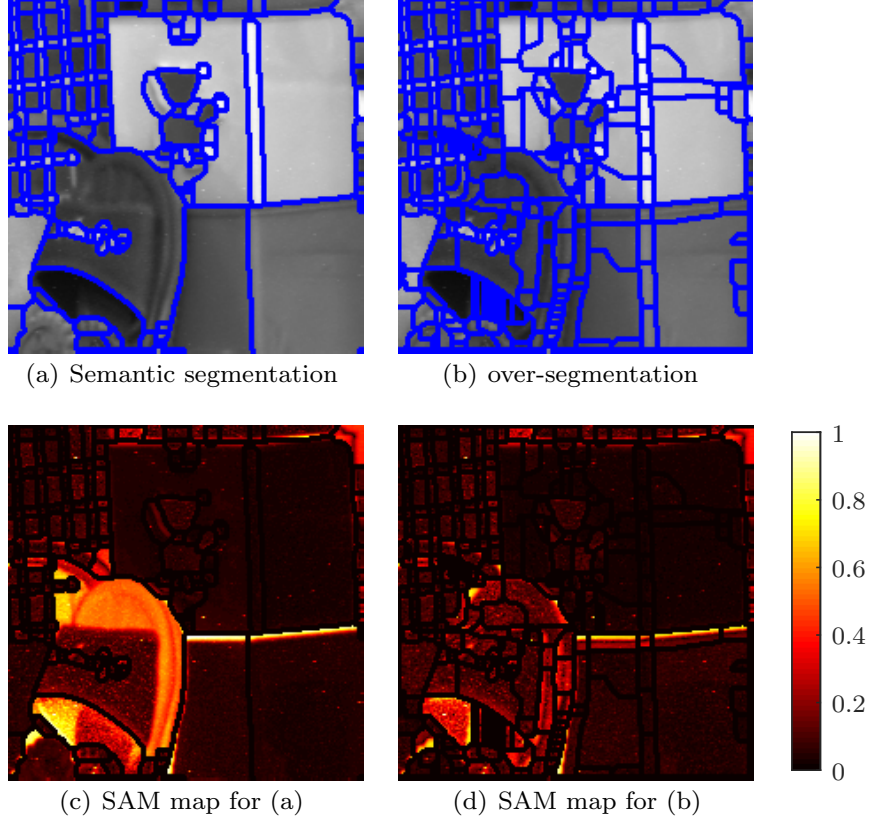


Fig. 4 Illustration of the separability assumption on two different segmentations of the panchromatic image ((a) and (b), the borders between regions are shown in blue). (c) and (d): SAM maps between the pixels spectra and the median spectra of each region.

The reconstruction process for the *separability assumption* is straightforward. Indeed, one single spectrum needs to be reconstructed for each region: pixels in a region are defined by the product of this unique spectrum with the spatial intensities coming from the panchromatic image. Moreover, the reconstruction process can be carried out separately on each region.

Let's consider a segmentation of the image in Q regions indexed by $q \in \{1 \dots Q\}$, where region q contains K_q pixels indexed by $k \in \{1 \dots K_q\}$. Using the separability assumption, the spectrum $\mathbf{o}_q^k$ of pixel k in region q can be written as the product of the intensity of the pixel P_q^k with the spectrum common to the whole region $\mathbf{s}_q$: $\mathbf{o}_q^k = P_q^k \mathbf{s}_q$. Thus, the hyperspectral information $\mathbf{o}_q$ of region q (i.e. the spectra $\mathbf{o}_q^k$ of the K_q pixels k in region q) can be written:

$$\mathbf{o}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{o}_q^1 \\ \mathbf{o}_q^2 \\ \vdots \\ \mathbf{o}_q^{K_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_q^1 \mathbf{s}_q \\ P_q^2 \mathbf{s}_q \\ \vdots \\ P_q^{K_q} \mathbf{s}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_q^1 \mathbf{I} \\ P_q^2 \mathbf{I} \\ \vdots \\ P_q^{K_q} \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{s}_q, \quad (7)$$

where $\mathbf{I}$ is the identity matrix of size W . Furthermore, thanks to the co-registration property of the instrument, the measurements $\mathbf{m}_q$ for the N acquisitions at the

pixels of region q *only depend on the hyperspectral information corresponding to this region q* . They can be written as:

$$\mathbf{m}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_q^{(1)} \\ \mathbf{m}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{m}_q^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q^{(1)} \\ \mathbf{H}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_q^{(N)} \end{bmatrix} \mathbf{o}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_q^{(1)} \\ \mathbf{H}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_q^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_q^1 \mathbf{I} \\ P_q^2 \mathbf{I} \\ \vdots \\ P_q^{K_q} \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{s}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_q^{(1)} \\ \mathbf{G}_q^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_q^{(N)} \end{bmatrix} \mathbf{s}_q = \mathbf{G}_q \mathbf{s}_q \quad (8)$$

where matrices $\mathbf{H}_q^{(n)}$ are submatrices of $\mathbf{H}^{(n)}$ extracted on the rows corresponding to pixels k in region q and matrices $\mathbf{G}_q^{(n)}$ and $\mathbf{G}_q$ are implicitly defined in this equation. Note that as the region is homogeneous, the values of $P_q^1, P_q^2, \dots, P_q^{K_q}$ are close, so matrix $\mathbf{G}_q$ is roughly equal to the equivalent matrix $\mathbf{H}_q$ multiplied by a constant.

The spectra $\mathbf{s}_q$ of each region q have to be reconstructed from the measurements $\mathbf{m}_q$ acquired on the detector. We propose to use a reconstruction method similar to the one used for the RA method, with a Tikhonov regularization along the spectral dimension. One thus computes the estimated spectrum for region q as:

$$\hat{\mathbf{s}}_q = \arg \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{m}_q - \mathbf{G}_q \mathbf{s}\|_{\mathbf{I}_q^{-1}}^2 + \mu_\lambda \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{s}\|^2 \quad (9)$$

$$= (\mathbf{G}_q^t \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{G}_q + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda)^{-1} \mathbf{G}_q^t \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{m}_q, \quad (10)$$

where $\mathbf{I}_q$ is the submatrix of $\mathbf{I}$ extracted on the rows and columns corresponding to pixels in region q . Note that the regularization is not always necessary as equation (8) can be overdetermined when $K_q \times N > W$, that is when the number of pixels K_q in the region times the number of acquisition N is larger than the number of spectral bands W . In this case, if matrix $\mathbf{G}_q^t \mathbf{I}_q^{-1} \mathbf{G}_q$ is not ill-conditioned, the regularization parameter μ_λ can be set to zero. From a computational point of view, the solution can be directly computed using equation (10) as the linear system to solve only has W unknowns. The choice of the parameter μ_λ , the segmentation method and its parameters is addressed in the following section.

5 Parameters selection

The two proposed methods require to tune several parameters. To evaluate the sensitivity of the results with respect to these parameters, we have performed a thorough analysis using simulated acquisitions, which shows that the two methods are robust enough so that set their parameters can be set once and for all. This section summarizes this analysis.

5.1 Simulated data and reconstruction quality criteria

We have simulated acquisitions with a PHSI device using 11 real HS scenes excerpt from three databases, selected for their diversity [36, 28, 37] (figure 5). Each scene is of size $R \times C = 711 \times 711$ and has between $W = 28$ and $W = 33$ spectral bands. We have simulated N acquisitions. The first acquisition is the panchromatic image

required by both methods to extract spatial information (contours or region-oriented segmentation). This acquisition is made with all DMD mirrors open, the $N - 1$ other acquisitions have been simulated with an independent identically distributed random configuration of the DMD, with a probability to have an open mirror equal to ROM (“Ratio of Open Mirrors”). The tuning of this ROM parameter is discussed in § 5.2.



Fig. 5 RGB views of the selected 11 HS scenes.

The exposition time for each acquisition n has been set to guarantee no saturation. The data being encoded on 12 bits (values ranging from 0 to 4095), we set the exposition time $t^{(n)}$ for each acquisition to have a maximum value equal to 3800. Then, the acquisitions $\mathbf{m}^{(n)}$ are generated as the realization of a Poisson noise of mean $\mathbf{H}^{(n)}\mathbf{o}$, where $\mathbf{H}^{(n)}$ corresponds to the product of the binary matrix related to the filtering cube and the exposition time $t^{(n)}$.

It is not straightforward to quantify the reconstruction of an HS cube. The reconstruction error on the whole cube is quite a natural metric, but measures representative of the spectral reconstruction and the spatial quality of the images are also informative. We therefore consider three different metrics:

1. The relative Root mean square error (RMSE), defined as $\text{RMSE} = \sqrt{\|\mathbf{o}^{\text{rec}} - \mathbf{o}^{\text{orig}}\|_2^2 / \|\mathbf{o}^{\text{orig}}\|_2^2}$, gives a global value of the reconstruction error, *i.e.* the difference between the reconstructed HS cube $\mathbf{o}^{\text{rec}}$ and the original one $\mathbf{o}^{\text{orig}}$. One can also use an RMSE map computed locally for each pixel p : $\text{RMSE}(p) = \sqrt{\|\mathbf{o}^{\text{rec}}(p) - \mathbf{o}^{\text{orig}}(p)\|_2^2 / \|\mathbf{o}^{\text{orig}}(p)\|_2^2}$.
2. The normalised Spectral Angle Mapper (the classical SAM [35] normalized to a maximal value of 1) characterizes the similarity between two spectra $\mathbf{o}_1$ and $\mathbf{o}_2$ without accounting for their amplitude. To compare two spectra at a given pixel p it is defined as $\text{SAM}(\mathbf{o}_1(p), \mathbf{o}_2(p)) = \frac{2}{\pi} \left| \arccos \left(\frac{\mathbf{o}_1(p)^T \cdot \mathbf{o}_2(p)}{\|\mathbf{o}_1(p)\| \cdot \|\mathbf{o}_2(p)\|} \right) \right|$. For proportional spectra, the SAM is equal to zero while it is equal to one for orthogonal spectra: the lower the SAM the more the spectra are similar. To characterize spectrally the reconstruction error, one can use a SAM map $\text{SAM}(\mathbf{o}^{\text{rec}}(p), \mathbf{o}^{\text{orig}}(p))$ for each pixel p and compute the mean SAM over all the pixels.
3. The Structural SIMilarity index (SSIM) [38] between two images is based on a perception model to measure the structural spatial information of images. It is computed locally using a spatial window around each pixel. We propose to compute the SSIM map on the HS cubes, as the mean value along the spectral bands, and the global SSIM as the mean value of the SSIM map. A value of one is reached for identical images while zero indicates no similarity.

Good reconstruction results in low RMSE, low SAM values and high SSIM values.

5.2 Ratio of open mirrors (ROM)

It is important to properly adjust the ratio of open mirrors (ROM) to optimize the spectral reconstruction, as it directly influences the amount of spectral information encoded in an acquisition. For very small ROM values, the acquisitions contain almost no spectral information and it will be extremely hard to properly reconstruct the HS scene. Conversely, a very high value produces data close to the panchromatic image, and all the spectral information is encoded in small variations on top of a high background signal.

The value of the ROM directly controls the information contained in the measurements. As the measurements are noisy, one way to quantify this information is to compute the condition number of the matrix $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$. This matrix appears in the solution proposed in the regularization approach (equ. 5), and is directly related to the minimization of the first term of cost function (see equ. 4) which forces the solution to fit the data. The condition number of this matrix measures the sensitivity of the solution to the input noise. Therefore, it should be as low as possible to get as much information as possible from a measurement. Strictly speaking, the condition number of $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ is infinity, as this matrix is not full rank (less data than unknowns). Therefore, we consider here as condition number the ratio of the highest and the lowest nonzero eigenvalues of this matrix.

For the regularization approach RA, the computed solutions also accounts for the second part of the cost function (regularization) that we do not take into account here. However, the conditioning of $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ impacts the quality of the information used for the reconstruction. For the separability assumption (see equ. 10), $\mathbf{H}_q$ is also present, albeit indirectly as $\mathbf{G}_q$ is built with submatrices of $\mathbf{H}_q$.

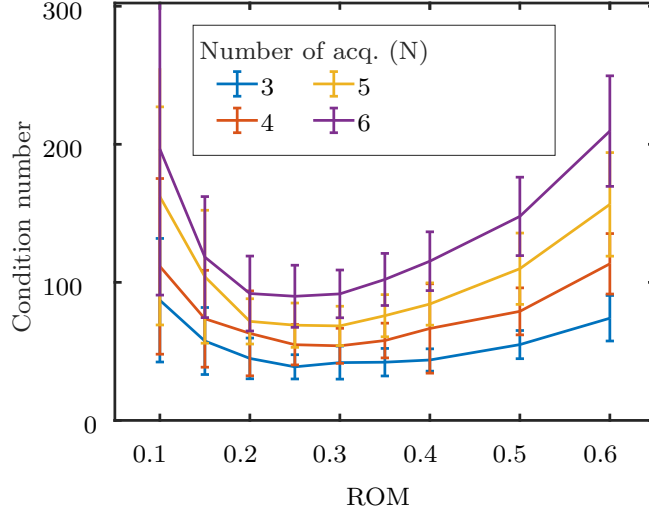


Fig. 6 Condition number of matrices $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ as a function of ROM for 100 random DMD configurations, various HS scenes and for $N = 3$ to $N = 6$ acquisitions.

Therefore, for both reconstruction methods, the condition number of $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ is a relevant indicator to quantify the information provided by the measurements. We have computed the condition number of matrix $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ for 100 random DMD configurations for sequences of $N = 3$ to $N = 6$ acquisitions on various HS scenes, for given values of the ROM. Fig. 6 shows the mean values and standard deviations of the condition number as a function of the ROM. It can be seen that both in terms of mean values and variations, the optimal value of the ROM is between 0.2 and 0.3, whatever the number of acquisitions. In the following, we fixed $\text{ROM} = 0.2$.

5.3 Parameters for the regularization approach (RA)

The reconstruction with RA is a two-step process: the edges are first detected on the panchromatic image, and then the actual reconstruction is carried out via a *CGNR* iterative algorithm to compute solution of equation (5).

We use a simple approach to detect the edges: gradients along the x and y axes are computed on the panchromatic image and then edges are set where the absolute gradients exceed a detection threshold T_{RA} .

The reconstruction process itself requires the definition of the regularization parameters μ_x , μ_y and μ_λ . As x and y axes play the same role in the spatial resolution, we set $\mu_{\text{RA}} = \mu_x = \mu_y$. The spectral resolution of the reconstructed HS cube is tuned by μ_λ . Contrarily to the spatial regularization, where the edges of the panchromatic image are detected and preserved, there is no a priori detection and preservation of large variations along the spectral dimension. It is then quite natural to set μ_λ to a low value, to avoid an excessive smoothing of the spectra. Yet, this spectral regularization is necessary due to the lack of information in the measurements. Note that the adequate value of μ_λ depends on the number of spectral bands considered.

In our tests, $\mu_z = \mu_{\text{RA}}/10$ was found to be a good compromise.

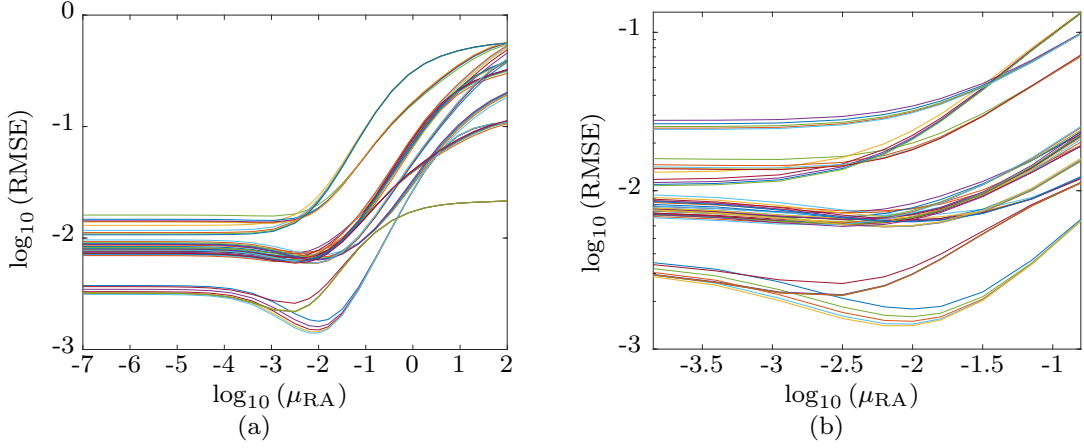


Fig. 7 RMSE of the reconstruction as a function of the regularization parameter μ_{RA} over the intervals $[10^{-7}, 10^2]$ (a) and $[10^{-4}, 10^{-1}]$ (b).

5.3.1 Regularization parameter : μ_{RA}

The role of parameter μ_{RA} is to tune the trade-off between the amplification of the noise (due to the ill-conditioned matrix $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ and the under-determination of the problem) and the smoothness of the solution in the reconstruction process. Some methods can be used to automatically set the value of this parameter from the data (e.g. Cross-validation or L-curve approaches [29]), but such unsupervised methods require a large amount of computations.

We resorted to a simple and pragmatic approach: we investigated the impact of μ_{RA} on the quality of the reconstructed HS cube for several scenes and other reconstruction parameters, aiming to set a reasonable value for μ_{RA} . To that end, using the HS from three databases[36,28,37], we generated 30 HS scenes of spatial size 200×200 and compared the reconstructed HS cube to the ground truth as a function of μ_{RA} , for various combinations of other reconstruction parameters (edge detection threshold, number of acquisitions used). The results are presented in figure 7 where $\log_{10}(\text{RMSE})$ of the reconstruction is plotted as a function of $\log_{10}(\mu_{RA})$. Scanning over a wide range of values for μ_{RA} (figure 7(a)), we see that the optimal value is nearly the same for every scene and combination of reconstruction parameters, around $\mu_{RA} = 10^{-2}$. A close-up around this value (figure 7(b)) reveals that the optimal values slightly depends on the scene and parameters combination, but all lie within a tight range of $[10^{-3}, 10^{-1.5}]$.

On the basis of these results, we set $\mu_{RA} = 10^{-2}$, which is reasonable given the relative smoothness of the RMSE around this value.

5.3.2 Edge detection threshold : T_{RA}

The threshold T_{RA} directly sets the edges preserved in the reconstruction process. For our RA method, we used a very rough edge detection scheme because it is not critical. Our aim is to be very conservative in terms of edge preservation: we prefer accounting for some isolated spurious edges in the regularization than forgetting actual ones.

Indeed, spurious edges only zero few coefficients in the $\mathbf{D}_x$ and $\mathbf{D}_y$ matrices, thus lowering slightly the strength of the regularization. On the contrary, not accounting for an actual edge in the panchromatic image would result in undesired smoothing in the reconstructed HS cube.

On this basis, our method is not very sensitive to the T_{RA} threshold, provided that its value is sufficiently low. Considering the intensities of the panchromatic image in the interval $[0, 3800]$, we set $T_{RA} = 50$ which is very low (an example of edge detection with this value of T_{RA} is shown in figure 3(b)). Of course, any more sophisticated edge detection method could be used and may improve the result if correctly tuned.

5.4 Parameters for the separability assumption (SA)

The HS scenes reconstruction under SA is also a two-step process. The panchromatic image is first segmented into homogeneous closed regions, and then the reconstruction is carried out independently for each region via a least-square minimization.

It is worth noting two key differences between the segmentation carried out here and the one used in RA. First, for RA, one only needs to detect edges, even isolated ones, while for SA we need to define closed regions. Moreover, while the edge detection in RA is not critical at all, the segmentation for SA is a key step.

For the region-oriented segmentation, we used the classical watershed algorithm [39], which only depends on one parameter: the segmentation threshold T_{SA} . An additional parameter is however introduced: the width w_{SA} of the contours. Indeed, because of the point spread function of the optical system, the spectra of the pixels near the contours between regions is a mixture of the spectral contents of adjacent regions and thus does not satisfy our separability assumption. Therefore, we propose to enlarge this contours, giving them a width w_{SA} .

Note that with the SA approach, pixels belonging to a contour are not part of any region and thus excluded from the reconstruction process, but more advanced methods could be implemented to reconstruct these pixels spectra.

Once the image is segmented, the reconstruction is carried out independently for each region by solving equation (10) for which the regularization parameter $\mu_{SA} = \mu_\lambda$ has to be tuned.

5.4.1 Segmentation threshold: T_{SA}

As the Separability Assumption in each region is strong, the segmentation process is a crucial stage of the SA approach: a particular attention has to be paid to the tuning of T_{SA} .

The choice of the segmentation threshold T_{SA} is the result of a compromise. A too low value yields over-segmentation, with small regions. This ensures that the separability assumption is satisfied, but small regions may not contains enough pixels, hence too little information on their spectral content, thus hindering the reconstruction of the spectrum. On the opposite, a too large value of T_{SA} yields large regions that surely contain enough redundant information for spectrum reconstruction, but in which the separability assumption might not be satisfied. As

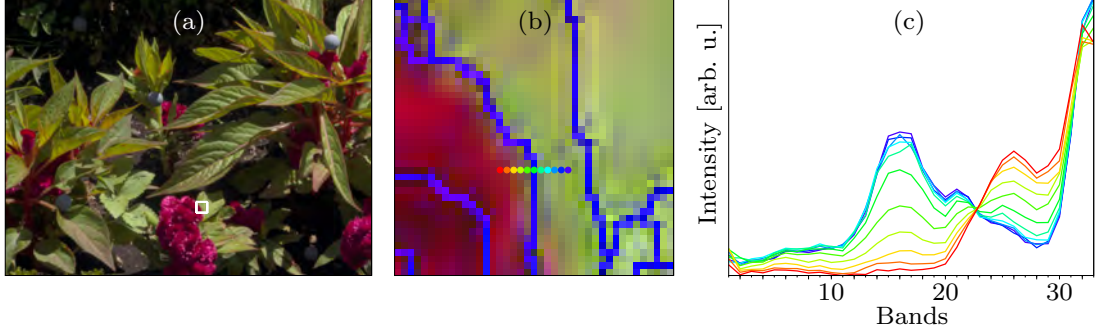


Fig. 8 Illustration of the mixing occurring along the contour of two adjacent regions due to the PSF: (a) view of the scene extracted from [28] with the region of interest (white square); (b) zoomed view on this region with contours (blue lines), and locations of the pixels which spectra is shown in (c) – the color of each spectral curve is the color of the corresponding dot.

seen in section 4 and in Fig. 4, the SA requires an over-segmentation as compared to usual semantic segmentation.

However, a low value of T_{SA} to obtain such an over-segmentation dramatically affects the textured regions, which are split in very small homogeneous regions, making their reconstruction impossible. As we want to keep the segmentation threshold very low and circumvent the over-segmentation of textured regions, we apply an edge preserving anisotropic diffusion [40] to smooth textured regions before the segmentation process.

For the considered images dynamic, a threshold of $T_{SA} = 8$ has shown to give the best segmentation and reconstruction results over a large variety of HS scenes.

5.4.2 Contours width: w_{SA}

The key assumption in SA is that all the pixels in a given region share the same spectrum multiplied by a scaling factor. Because of the point spread function (PSF) of the instrument (finite spatial resolution resulting in a blurring kernel), this assumption does not hold near the contour between two adjacent regions. Figure 8 illustrates this issue on a picture extracted from the database [28]. Figure 8 (a) shows the RGB scene with a region of interested indicated by a white square. Figure 8 (b) is a close-up of this region, which exhibits the detected contours, together with a series of pixel locations across the regions contour denoted as dots with colors varying from red to blue. Figure 8 (c) shows the spectrum for each of these pixels with corresponding colors.

The spectrum on the contour pixel (green dot in figure 8 (b)) is clearly a mixture of the two different spectra of the adjacent regions (blue and red curves in figure 8 (c)): it can not belong to any of the two regions without breaking the separability assumption. Moreover, pixels in the immediate vicinity of the contour are also affected by the neighbouring regions: one can clearly see the gradual change of the pixel spectrum across the contour in figure 8 (c).

It is thus necessary to enlarge the excluded contour pixels by a width w_{SA} so as to satisfy the separability assumption all across the reconstructed regions. This width is directly related to the PSF of the device used to acquire the HS cube.

For the HS cubes used in this study, a width $w_{SA} = 3$ pixels is enough to remove most of the pixels affected by the PSF.

5.4.3 Regularization parameter: μ_{SA}

Unlike for RA where the regularization parameter μ_{RA} plays a crucial role in the reconstruction process, for SA this parameter is not central as it solely affects the smoothness of the reconstructed spectra. Also, according to the separability assumption, the data in a given region corresponds to projections of the same spectrum, therefore once the number of data corresponding to a given region exceeds the number of spectral bands to be reconstructed, the spectrum reconstruction problem becomes over-determined and may be invertible without resorting to regularization.

Yet, since we use random projections (random configurations of the DMD), the data can be redundant. The matrix $\mathbf{G}_q^t \mathbf{\Gamma}_q^{-1} \mathbf{G}_q$ can therefore be ill-conditioned, even in the over-determined case. Moreover, as the acquired data are corrupted by noise, a regularization is necessary. Of course, for large regions, as we have more data, the regularization becomes less crucial. But such an effect is implicitly taken into account in the solution defined in equation (9) for SA: indeed, the number of terms in the quadratic error between the data $\mathbf{m}_q$ and the model $\mathbf{G}_q \mathbf{s}$ increases with the size of the region, naturally lowering the effect of the regularization.

From numerous tests on regions of various sizes and various HS scenes, we have found that for the considered number of wavelength and images dynamic, a fixed regularization parameter $\mu_{SA} = 10^{3.5}$ gives good reconstruction results.

6 Results

In this section, we evaluate the quality of the reconstruction for the two proposed methods on the 11 scenes shown figure 5 on page 12. All the reconstructions are performed with one panchromatic image and 4 random acquisitions ($N = 4$), with a $ROM = 0.2$. The panchromatic image is used for the segmentation of the scene, and the 4 random acquisitions are used for the HS cube reconstruction with both the RA and SA methods.

The quality evaluation is carried out following two approaches. First we assess the consistency of the chosen parameters (regularization, segmentation/edge detection threshold, contours width ...) by comparing the RMSE, SAM, and SSIM scores between the original and reconstructed HS cubes to the best achievable scores. These best scores are determined independently for each image, by selecting the parameters that minimises the RMSE through an exhaustive exploration of the parameters variation domain. Second, we compare the SA and RA methods with the RMSE and SAM scores and the distribution of the reconstruction errors. Also, throughout this section we illustrate the quantitative quality assessments by examples that qualitatively highlight some SA and RA behaviours. A series of typical reconstruction results are also provided in appendix A for the 11 considered images.

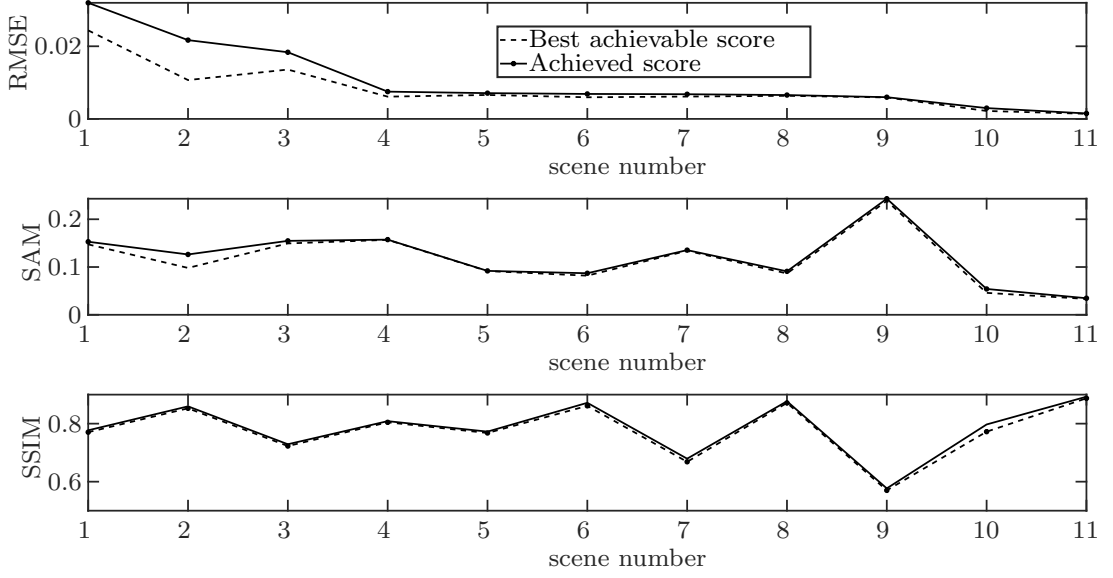


Fig. 9 Results of RA, with the parameters determined in section 5.3: scores obtained for RMSE, SAM & SSIM (solid lines) on 11 scenes, and best achievable scores (dashed lines).

6.1 Regularization approach (RA)

The scores obtained for each metric with the RA reconstruction for the 11 tested scenes are shown in Fig. 9. The scores achieved with the parameters set in section 5.3 (solid black line) are displayed together with the best score obtained when hand-picking an optimal parameter set for each scene (dashed black line). Note the 11 images have been ordered along decreasing RMSE scores obtained with the optimal parameter set.

A first observation is that for most of the scene, the three different metrics show a good reconstruction of the HS cube using the RA method (i.e. low RMSE and SAM values and high SSIM value). A second observation is that the scores are very close to the best achievable scores for most of the scenes, which confirms the validity of the parameters chosen in section 5.3. A last observation is that the three metrics are well correlated for most scenes.

There are however noticeable exceptions, like for scene 9, that shows a good RMSE score but below average scores for both SAM and SSIM.

This exception can be explained with figure 10 which shows the RGB view of scene 9, together with RGB views where pixels corresponding to bad SAM or SSIM scores are highlighted in cyan for SAM (fig. 10(b)) and for SSIM (fig. 10(c)). We arbitrarily set the threshold for bad scores as above half of the average score for SAM ($0.24/2=0.12$) and below half the average score for SSIM ($0.60/2=0.30$).

As can be observed, the bright foreground is well reconstructed and gives good scores for both metrics. The bad score regions are identical for both metrics and correspond to the out of focus and dark background. This area of low intensity has a low signal to noise ratio, which hinders both the SAM and SSIM metrics. However, for the RMSE metric, the contribution of this region to the overall score is low, because it has a lower intensity than the foreground, that has the major contribution to the RMSE.

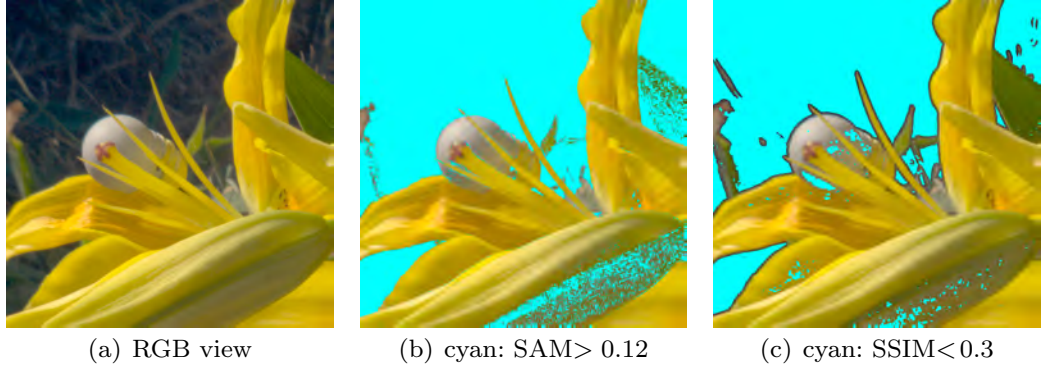


Fig. 10 Part of scene 9 which yields bad SAM and SSIM metrics. (a) RGB view of the scene 9; (b) in cyan, pixels where SAM > 0.12; (c) in cyan, pixels where SSIM < 0.3

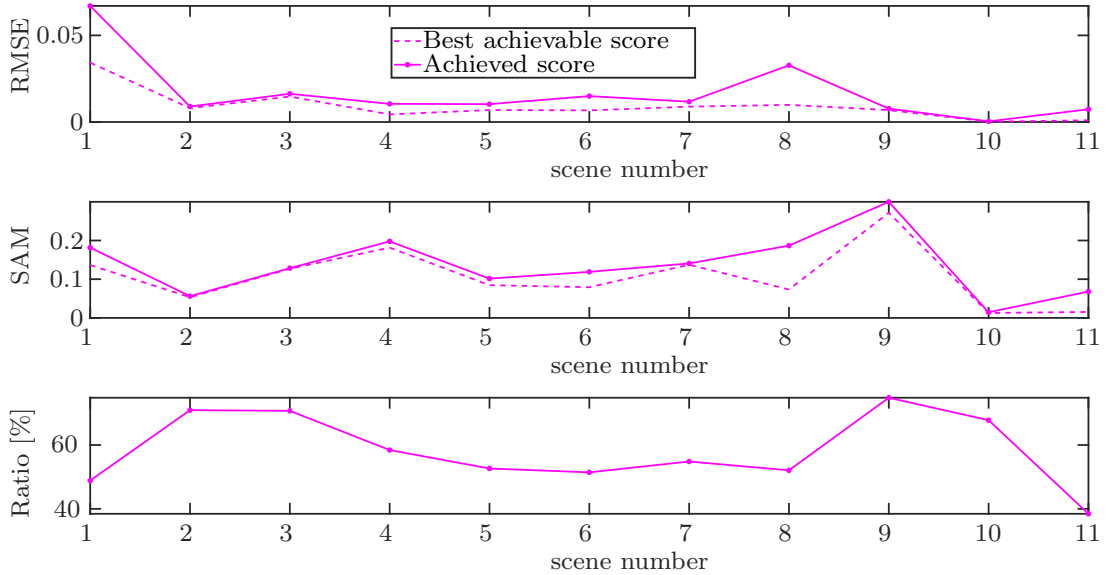


Fig. 11 Results of SA, with the parameters determined in section 5.4: scores obtained for RMSE & SAM (solid lines) on 11 scenes (same order than Fig. 9), and best achievable scores (dashed lines). The ratio corresponds to the percentage of reconstructed pixels (non-contour pixels).

6.2 Separability Assumption (SA)

The performance evaluation for the SA approach was carried out similarly to RA. However, recall that with the SA approach, the contour pixels (with a width $w_{SA} = 3$) are excluded from the reconstruction, so only a certain Ratio of pixels are reconstructed. Therefore, due to these missing pixels, the SSIM metric cannot be computed, and we can only evaluate the performance of this approach using the RMSE and SAM metrics. The obtained scores are shown in figure 11, as well as the Ratio of reconstructed pixels.

As for SA, the achieved scores are close to the best achievable ones for most of the 11 HS scenes used for the evaluation, which confirms the choice of parameters made in section 5.3. Still, two important points are worthwhile to mention. The

first is that similarly to RA, SA approach suffers from the low-contrast problem, as indicated by the high SAM score value achieved for the HS scene 9. The second point concerns the achieved scores both for RMSE and SAM metrics for the HS scene 8, which, unlike other HS scenes, are far below the optimal scores.

To investigate this particularly poor result, we have compared the SA reconstruction obtained for this scene with the default parameters with the one obtained with optimal set of parameters. This comparison is shown figure 12. The RGB image shows the scene is made of one single textured greyish stone material, contrary to the other scenes which exhibit various types of materials and colors. For the default parameter set defined in section 5.4, the scene is segmented in many small regions, as shown figure 12 (b), with the notable exception of two sizeable regions corresponding to dark areas. This high over-segmentation explains the poor performance of the SA reconstruction with default parameters, as can be seen in figure 12 (c), which shows the reconstructed RGB image, with the extracted contours in blue and pixels with high SAM score highlighted in cyan². We can observe that these high SAM score pixels belong either to the smallest regions or to one of the two large dark regions. For the small regions, the reconstruction with SA is sub-optimal because there are not enough data to achieve an accurate reconstruction of the spectrum. The low-contrast problem observed and discussed previously explains that the dark regions are not well reconstructed either.

The main difference between the default parameters and the optimum ones is the segmentation threshold T_{SA} , which value is respectively $T_{SA} = 8$ and $T_{SA} = 50$. The segmentation obtained with this optimal threshold is shown figure 12 (d): most of the scene is now considered as one single region. With such a segmentation, the SA reconstruction is overdetermined and the spectrum is accurately reconstructed in most of the pixels of the scene, as shown figure 12 (e). In this figure, the number of pixels with high SAM (in cyan) is considerably reduced with respect to reconstruction with $T_{SA} = 50$, and they mainly correspond to the darkest areas (low-contrast problem).

To sum up, the SA method shows a reasonable degree of robustness regarding the chosen set of parameters used for the reconstructions and its performances for the selected parameters are in average close to the best achievable ones. Concerning the scores, SA achieves in average, over the 11 HS scenes tested, a score of 0.19 for the SAM and reconstructs in average 55% of the scenes pixels. These performances are however sensitive to the scenes characteristics, such as the presence of fine texture as in scene 8, and similarly to RA, to the presence of broad low contrasted regions.

6.3 Comparison of SA and RA performances

In this section we compare the results and scores achieved by the two proposed methods. This comparison is delicate to perform, as the SA approach provides an incomplete reconstruction of the scenes (extracted contours are left unreconstructed), whereas the RA approach gives a complete reconstruction.

To address this limitation, we have at first focused exclusively on the comparison of the quality of the reconstruction restricted to reconstructed regions

² As in figure 10, high SAM scores are defined as over half of the average SAM score for reconstruction of this scene with default parameters: here as $SAM > 0.09$.

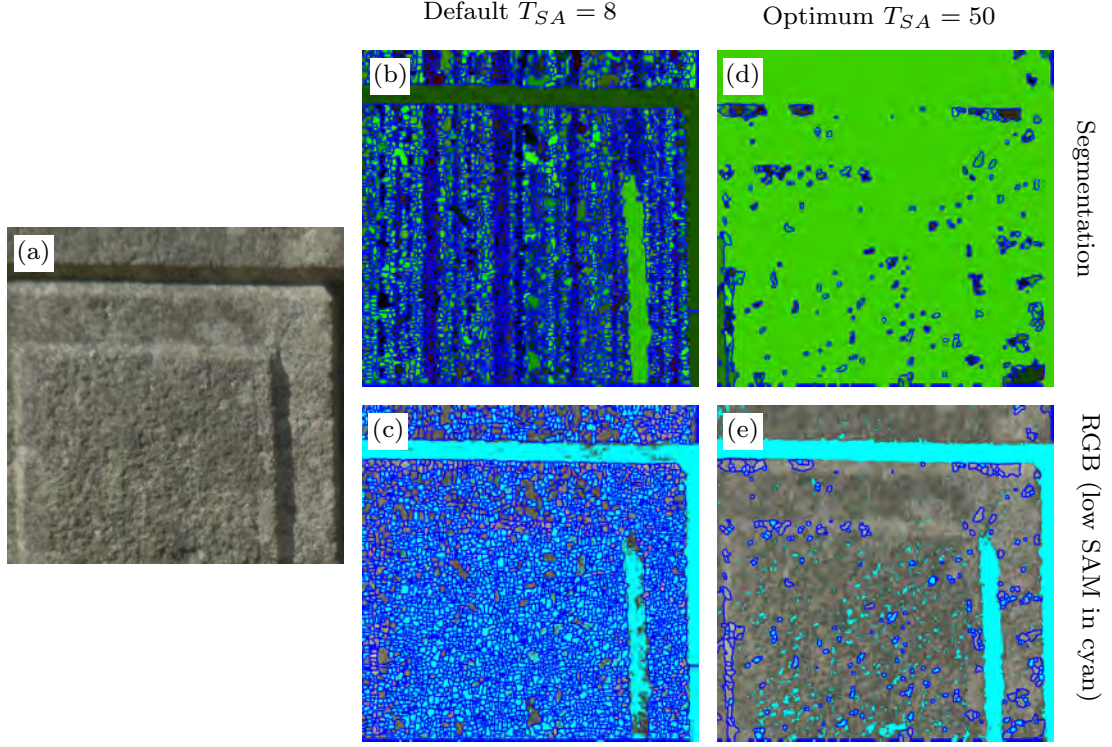


Fig. 12 SA reconstructions of scene 8 for the default threshold ($T_{SA} = 8$) and the optimum one ($T_{SA} = 50$): (a) RGB view of scene 8; (b) segmentation and (c) RGB view of reconstruction for default threshold; (d) segmentation and (e) RGB view of reconstruction for optimum threshold. Contours are shown in blue and pixel with high SAM values in cyan (SAM > 0.09).

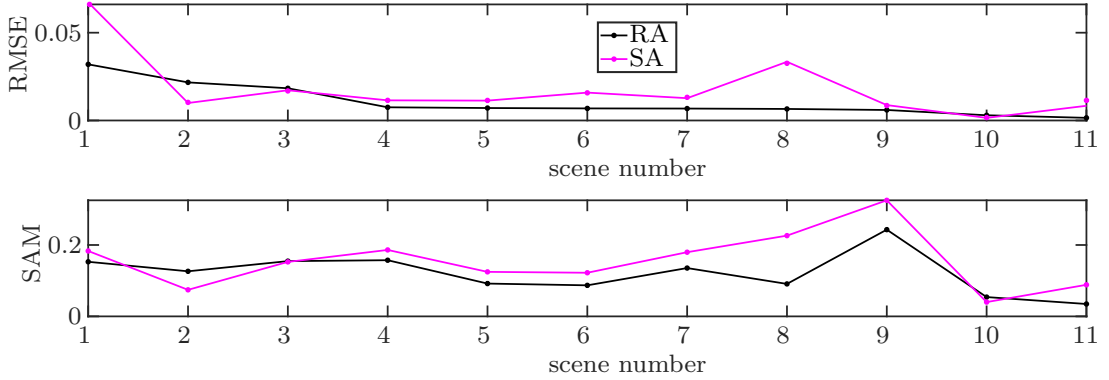


Fig. 13 Comparison of achieved RMSE and SAM scores for the regularization approach (RA) shown in black line, and for the separability assumption (SA) approach marked in purple line.

only. The purpose being to evaluate the reconstruction's reliability each approach achieves with respect to what it is capable to reconstruct.

As shown by Figure 13, which exhibits the RMSE and SAM scores achieved by both approaches, it is obvious that RA outperforms SA in most of the cases, beside some rare cases where SA is the best. In particular, for HS scene 8 for which SA suffers substantially from a over-segmentation flaw as demonstrated on the previous section, RA is considerably better than SA, thus showing a relative insensitivity of RA performances regarding the presence of textured regions.

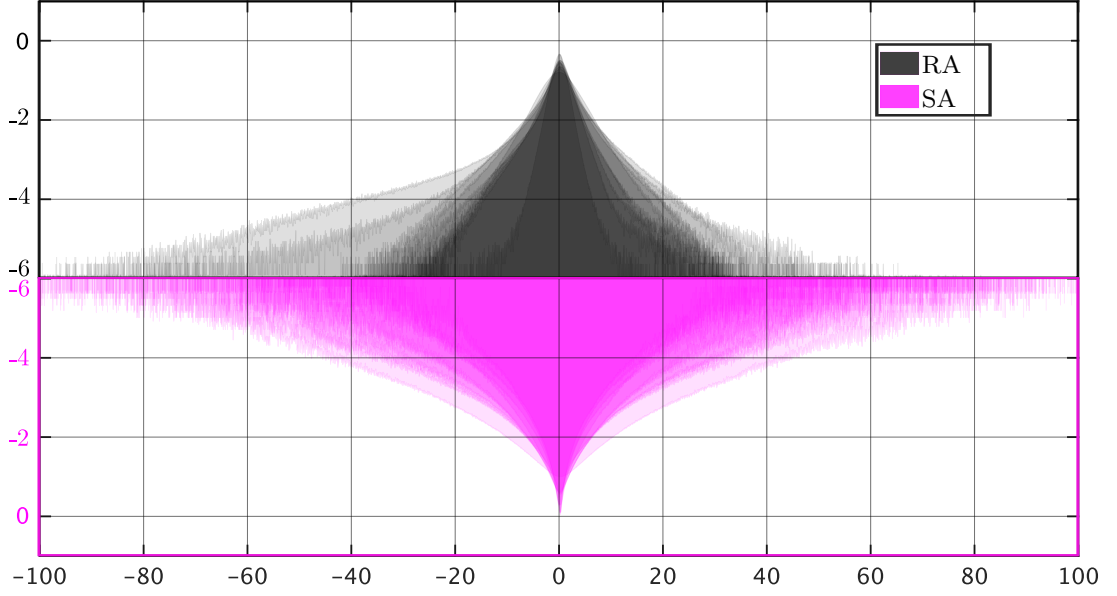


Fig. 14 Log-scaled reconstruction errors distributions of RA and SA, which are superposed, marked in a transparent black colour for RA and purple for SA, disposed bottom-to-bottom.

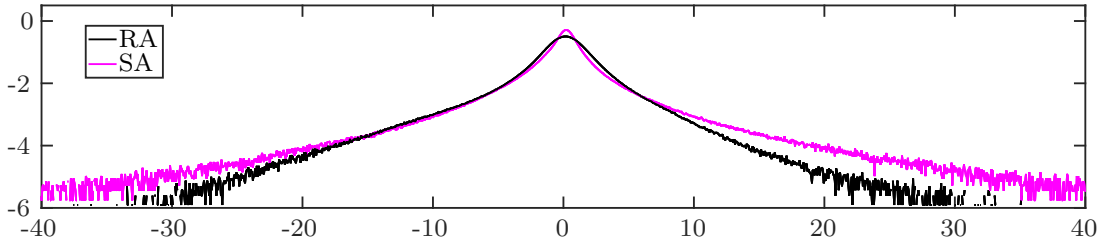


Fig. 15 Log-scaled reconstruction errors distribution for the scene 3 (average performance).

This comparison is based on global averaged metrics. In order to get a thorough overview we have studied the reconstruction errors distributions estimated from the histogram of the reconstruction errors (again, for SA the reconstruction errors are restricted to the reconstructed regions only). Figure 14 shows the log-scaled error distributions for the 11 HS scenes considered.

Two main differences can be seen comparing both distributions. First, the SA distribution has larger wings than the RA one. This means that high-error estimates are more frequent with SA than with RA. Second, the SA distribution exhibits a narrower and higher peak around 0: for some pixels, SA clearly outperforms RA by producing estimates with lower errors. This can be better seen in figure 15 where the error distributions for scene 3 are overlapped (this scene yields average metrics for both RA and SA reconstruction). These two characteristics of the SA distribution, once averaged over the whole scene, tends to produce worse average scores, as reported in figure 13.

Another way to compare both reconstructions is to see where each reconstruction fails to give an accurate estimate. For that purpose, let's focus on scene 3, that gives averaged performance for both RA and SA reconstruction. Figure 16 shows the reconstructed RGB images for the two methods, where the pixels with

highly inaccurate estimate are highlighted in cyan ($RMSE > 0.3$). Comparing figures 16 (a) & (c) (and (b) & (d)), we can see that inaccurate estimates correspond to the same areas. Another observation comparing figures 16 (b) & (d) is that many points that are inaccurately reconstructed by RA correspond to unreconstructed contour pixels in SA. Thus RA gives a full reconstruction of the HS scene, but tends to underperform on the contours, where SA is not providing any reconstruction.

Last, we can also see that many of the inaccurate estimates lie within small regions for SA. To better see this correlation between region size and reconstruction accuracy, figure 17 shows the RMSE error as a function of the region size for the SA reconstruction of scene 3. For small regions (size within [0-100] pixels), the error increases with decreasing region size, whereas it is fairly constant for average sizes ([200-400]). Note that region size above 400 are fairly rare, resulting in a poor statistic and a noisier curve.

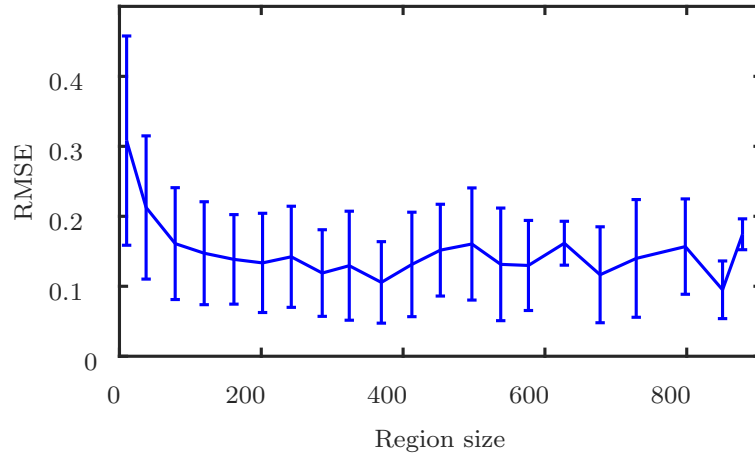


Fig. 17 Reconstruction of scene 3: variation of the RMSE as a function of the region size, for a reconstruction performed with SA.

In summary, on average RA tends to perform slightly better than SA, even if for some portions of the scene SA achieves better estimates. RA also provides a full reconstruction, while SA does not reconstruct the contours. However, SA presents three interesting features. First, the contours that are not reconstructed are usually not well estimated using RA. SA is thus avoiding the contour pixels that might require special care to be accurately estimated. Second, SA provides a qualitative indicator to gauge the accuracy of the estimated spectrum as small regions usually correlate with poor accuracy. Finally, the solution of SA is way simpler to compute: it comes to solve independently for each region linear systems of low dimensions, as the number of unknowns corresponds to the considered number of wavelength channels.

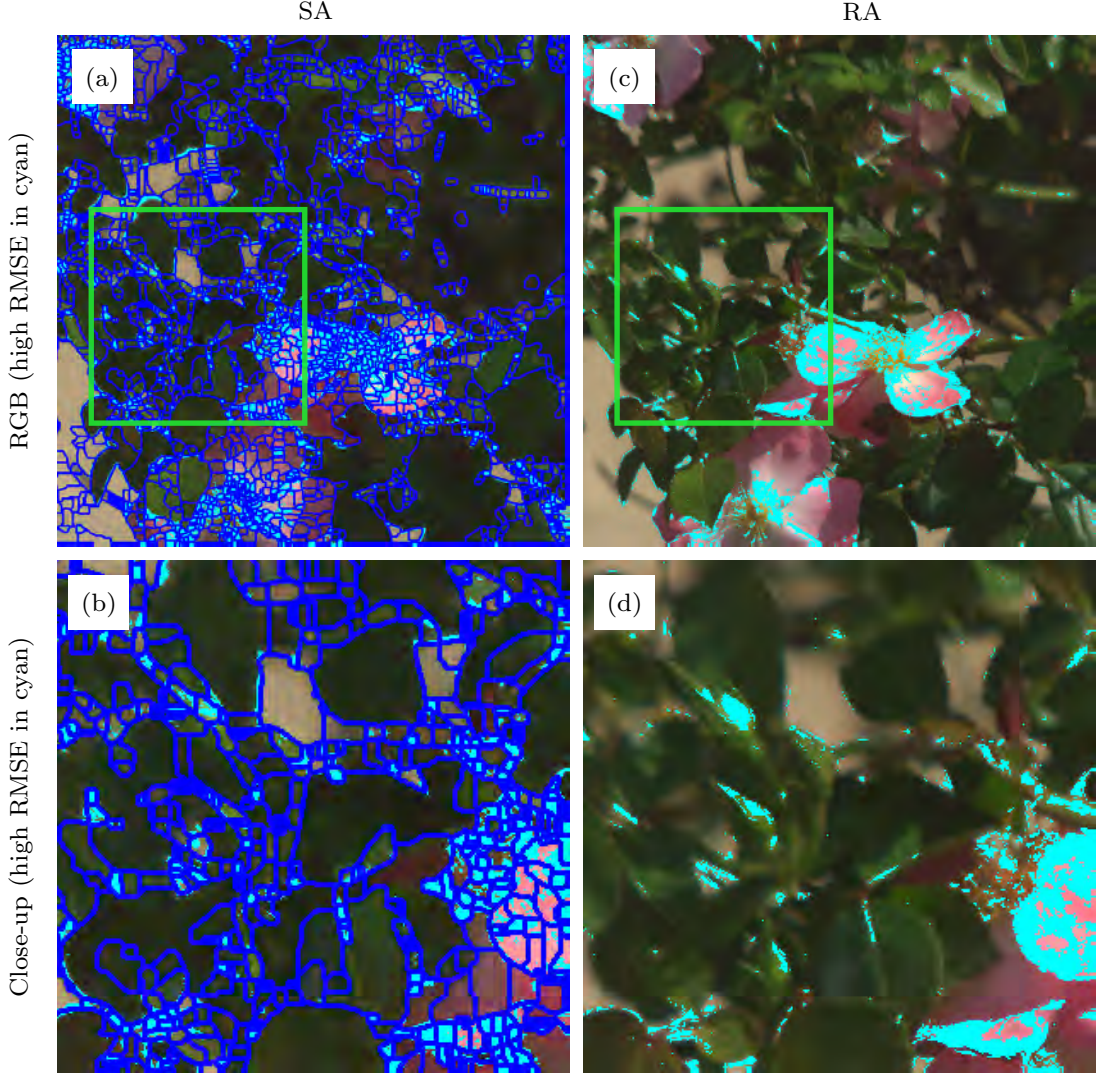


Fig. 16 Reconstruction of scene 3: (a) reconstructed RGB using SA, pixels where $RMSE > 0.3$ in cyan and contours in blue; (b) close-up on the green rectangle in (a); (c) reconstructed RGB using RA, pixels where $RMSE > 0.3$ being highlighted in cyan; (d) close-up on the green rectangle in (c).

7 Discussion and perspectives

The two methods we have proposed here are effective in reconstructing the hyperspectral scenes from a reduced set of measurements. They both take advantage of the specific optical properties of the adaptive hyperspectral imager demonstrated earlier [13, 27]: (1) an easy and overhead-free access to the panchromatic image that is co-registered with hyperspectral acquisitions; (2) a programmable spatio-spectral filter that can be changed between hyperspectral acquisitions. The presented results rely on a set of 5 acquisitions: 1 panchromatic and 4 randomly filtered hyperspectral images from which around 30 spectral bands are reconstructed, which corresponds to a 6-fold improvement in data acquisition, transfer and storage, paving the way towards faster hyperspectral imagers. An extensive analysis of the parameters for both methods allowed to determine a robust set of parameters

that compares well to cherry-picked parameter set for each of the 11 scenes used for this study. Both methods offer accurate reconstructions close to the ground truth for several metrics. The SA method is based on the additional separability assumptions, which precludes the reconstruction of the HS image nearby the contours, but its computation load is lower than RA. But neither RA nor SA method is a clear best approach for all the scenes.

Various straightforward improvements to the RA and SA methods could be easily considered:

- Both methods are currently based on fairly rough segmentation methods and could benefit from more advanced ones. For RA a simple gradient thresholding has been used, while various other classical edge detection methods can be applied. Using such a method, care should be taken to ensure some inter-pixel contour continuity in order to avoid leakage between homogeneous regions due to quadratic regularization. For SA, the region oriented segmentation method used is efficient, but we have noticed that the tuning of this method is not easy when the intensity of the panchromatic image has a high dynamic range. An intensity adaptive tuning should improve this.
- Both methods have been tested with a constant regularisation parameter, while an adaptative parameter can be considered, based on the panchromatic image and the signal to noise ratio.
- as the SA method does not reconstruct the HS image nearby contours, a posterior reconstruction can be considered, for example by explicitly taking into account the mixing effect of the neighboring regions spectra caused by the instrument's PSF.
- Finally, our implementation of the RA and SA methods is not optimized so far and can of course benefit from parallel computing. A first parallel implementation is easy defined from the structure of the SA method, which independently solves linear systems of small dimensions for each region, but a more efficient parallelisation might also be considered. For the RA method, whose solution is computed by a conjugate gradients algorithm, the direct model and the adjoint model of the problem have to be computed at each iteration, which could easily be parallelized. Of course a parallel implementation on a GPU, which seems possible, would greatly reduce the computation time.

Besides, there is room for further improvements in the definition of the DMD patterns. For instance, one could specify patterns so as to minimize the amount of redundant data in the acquired images, or to improve the speed of convergence of the CGNR reconstruction algorithm. Beyond the use of a set of predefined patterns, one could also design an approach that interleaves the reconstruction and acquisition steps, which would iteratively specify an optimal DMD pattern to apply to the next acquisition by analysing the data acquired data so far.

8 Acknowledgements

This work was partially supported by the Université Fédérale de Toulouse and the Région Occitanie through the funding of the Sir4Hyadim project. We acknowledge financial support from Agence Nationale de la Recherche under grant ANR-18-ASTR-0012-01.

References

1. N. Hagen and M. W. Kudenov. Review of snapshot spectral imaging technologies. *Optical Engineering*, 52(9):090901–090901, September 2013.
2. A. A. Wagadarikar, N. P. Pitsianis, X. Sun, and D. J. Brady. Video rate spectral imaging using a coded aperture snapshot spectral imager. *Optics Express*, 17(8):6368, April 2009.
3. M. J. Dunlop, P. K. Poon, D. R. Golish, E. M. Vera, and M. E. Gehm. Calibration challenges and initial experimental demonstration of an adaptive, feature-specific spectral imaging classifier. In *Imaging and Applied Optics*. OSA, 2013.
4. M. E. Gehm, R. John, D. J. Brady, R. M. Willett, and T. J. Schulz. Single-shot compressive spectral imaging with a dual-disperser architecture. *Optics Express*, 15(21), October 2007.
5. D. Kittle, K. Choi, A. Wagadarikar, and D. J. Brady. Multiframe image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers. *Applied Optics*, 49(36):6824–6833, December 2010.
6. G. R. Arce, D. J. Brady, L. Carin, H. Arguello, and D. S. Kittle. Compressive coded aperture spectral imaging: An introduction. *IEEE Signal Processing Magazine*, 31(1):105–115, January 2014.
7. I. Choi, D. S. Jeon, G. Nam, D. Gutierrez, and M. H. Kim. High-quality hyperspectral reconstruction using a spectral prior. *ACM Transactions on Graphics*, 36(6):218:1–218:13, November 2017.
8. J. A. Decker. Experimental realization of the multiplex advantage with a hadamard-transform spectrometer. *Applied Optics*, 10(3):510–514, March 1971.
9. C. M. Wehlburg, J. C. Wehlburg, S. M. Gentry, and J. L. Smith. Optimization and characterization of an imaging Hadamard spectrometer. In *Algorithms for Multispectral, Hyperspectral, and Ultraspectral Imagery VII*, volume 4381, 2001.
10. S. P. Love. Programmable matched filter and hadamard transform hyperspectral imagers based on micromirror arrays. In *Emerging Digital Micromirror Device Based Systems and Applications*, volume 7210, 2009.
11. J. Xu, Z. Zhu, C. Liu, and Z. Huang. The processing method of spectral data in hadamard transforms spectral imager based on DMD. *Optics Communications*, 325:122 – 128, August 2014.
12. L. Wang, Z. Xiong, G. Shi, F. Wu, and W. W. Zeng. Adaptive nonlocal sparse representation for dual-camera compressive hyperspectral imaging. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 39(10):2104–2111, October 2017.
13. S. McGregor, A. Monmayrant, and S. Lacroix. Adaptive, hyperspectral imager: Design, modeling, and control. *Journal of Optics*, 17(8), August 2015.
14. J. O. Limb and C.B. Rubinstein. Statistical dependence between components of a differentially quantized color signal. *IEEE Transactions on Communications*, 20:890–899, October 1971.
15. P. J. B. Hancock, R. J. Baddeley, and L. S. Smith. The principal components of natural images. *Network: Computation in Neural Systems*, 3(1):61–70, 1992.
16. L. Goffman-Vinopal and M. Porat. Color image compression using inter-color correlation. In *IEEE International Conference on Image Processing*, volume 2, pages II–II, September 2002.
17. J. Portilla, V. Strela, M. J. Wainwright, and E. P. Simoncelli. Image denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(11):1338–1351, November 2003.
18. J. Cai, H. Ji, C. Liu, and Z. Shen. Blind motion deblurring from a single image using sparse approximation. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 104–111, June 2009.
19. L. Loncan, L. B. de Almeida, J. M. Bioucas-Dias, X. Briottet, J. Chanussot, N. Dobigeon, S. Fabre, W. Liao, G. A. Licciardi, M. Simoes, J.-Y. Tourneret, M. A. Veganzones, G. Vivone, Q. Wei, and N. Yokoya. Hyperspectral pansharpening: A review. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*, 3(3):27–46, September 2015.
20. L. Wang, Z. Xiong, D. Gao, G. Shi, W. Zeng, and F. Wu. High-speed hyperspectral video acquisition with a dual-camera architecture. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 4942–4950, June 2015.
21. A. Chakrabarti and T. Zickler. Statistics of real-world hyperspectral images. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 193–200, June 2011.
22. Y. Fu, Y. Zheng, I. Sato, and Y. Sato. Exploiting spectral-spatial correlation for coded hyperspectral image restoration. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 3727–3736, June 2016.

23. R. Arablouei and F. de Hoog. Hyperspectral image recovery via hybrid regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 25(12):5649–5663, December 2016.
24. Y. Fu, A. Lam, I. Sato, and Y. Sato. Adaptive spatial-spectral dictionary learning for hyperspectral image denoising. In *IEEE International Conference on Computer*, pages 343–351, December 2015.
25. J. Li, Q. Yuan, H. Shen, and L. Zhang. Noise removal from hyperspectral image with joint spectral-spatial distributed sparse representation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 54(9):5425–5439, September 2016.
26. A. Karami, M. Yazdi, and G. Mercier. Compression of hyperspectral images using discrete wavelet transform and tucker decomposition. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 5(2):444–450, April 2012.
27. E. Hemsley, S. Lacroix, H. Carfantan, and A. Monmayrant. Calibration of programmable spectral imager with dual disperser architecture. *Optics Communications*, 468:125767, August 2020.
28. S. M. C. Nascimento, K. Amano, and D. H. Foster. Spatial distributions of local illumination color in natural scenes. *Vision Research*, 120:39 – 44, March 2016. Vision and the Statistics of the Natural Environment.
29. J. Idier, editor. *Bayesian Approach to Inverse Problems*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc, April 2008.
30. A.N. Tikhonov and V.A.J. Arsenin, editors. *Solution of Ill-posed Problems*. Winston and Sons, Washington, 1977.
31. L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 60(1):259–268, April 1992.
32. P. Charbonnier, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2):298–311, February 1997.
33. J. A. Tropp and S. J. Wright. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of IEEE*, 98(6), June 2010.
34. Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, January 2003.
35. F. A. Kruse, A. B. Lefkoff, J. W. Boardman, K. B. Heidebrecht, A. T. Shapiro, P. J. Barloon, and A. F. H. Goetz. The spectral image processing system (SIPS)—interactive visualization and analysis of imaging spectrometer data. *Remote Sensing of Environment*, 44(2–3):145, May 1993.
36. S. M. C. Nascimento, F. P. Ferreira, and D. H. Foster. Statistics of spatial cone-excitation ratios in natural scenes. *Journal of the Optical Society of America A*, 19(8):1484, August 2002.
37. B. Arad and O. Ben-Shahar. Sparse recovery of hyperspectral signal from natural rgb images. In *European Conference on Computer Vision*, pages 19–34. Springer, 2016.
38. Z. Wang, A.C. Bovik, H.R. Sheikh, and E.P. Simoncelli. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4):600–612, April 2004.
39. J. B. T. M. Roerdink and A. Meijster. The watershed transform: Definitions, algorithms and parallelization strategies. *Fundamenta informaticae*, 41(1, 2):187–228, January 2000.
40. P. Perona, T. Shiota, and J. Malik. Anisotropic diffusion. *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, 1:73–92, January 1994.

A Reconstruction results

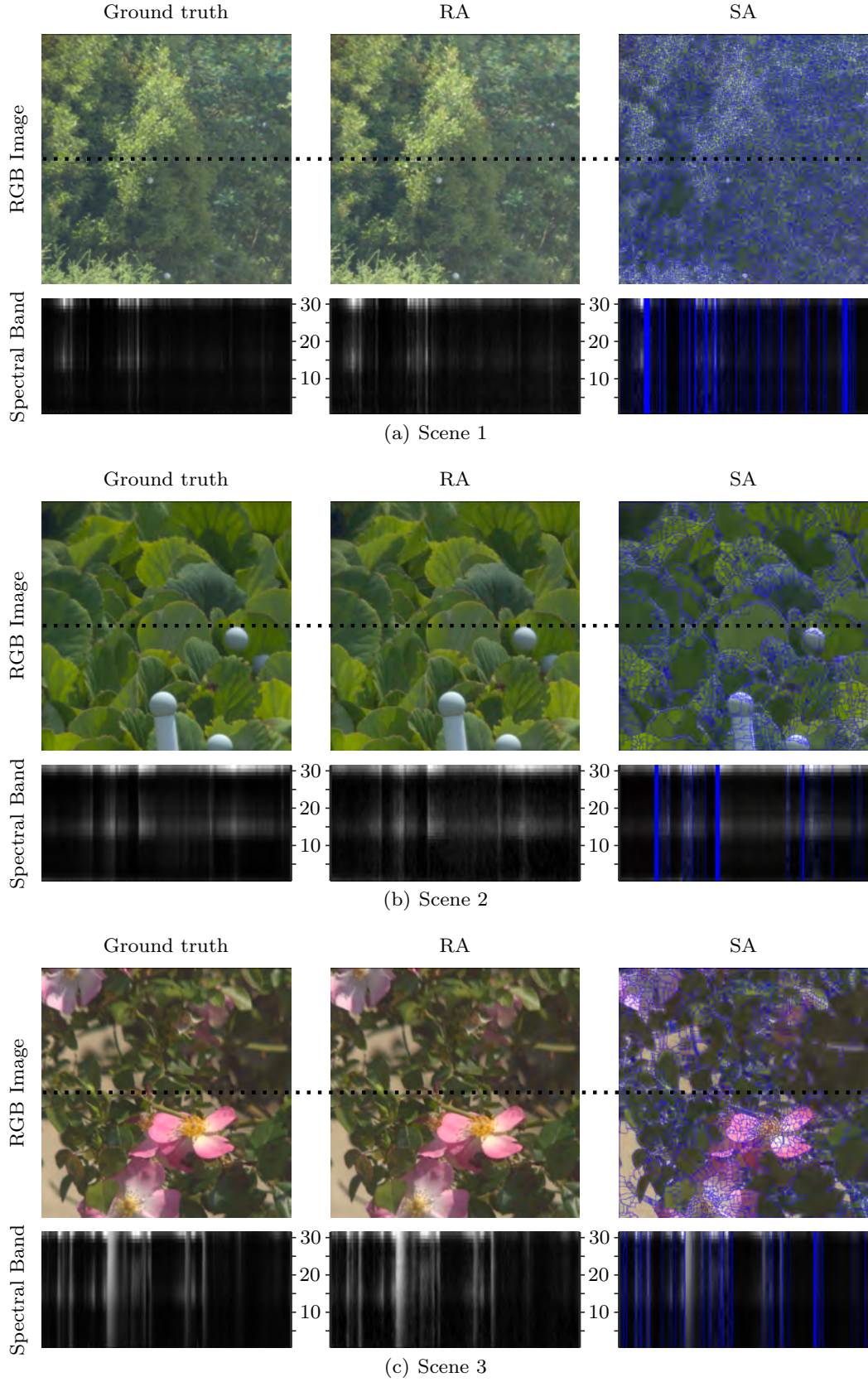


Fig. 18 Typical reconstructions for scenes 1 to 3: RGB images of the original HS cube, RA- and SA-reconstructed ones (blue lines in SA corresponds to contours where no data is reconstructed) together with the spectrum along the central horizontal line (dashed line in the RGB images).

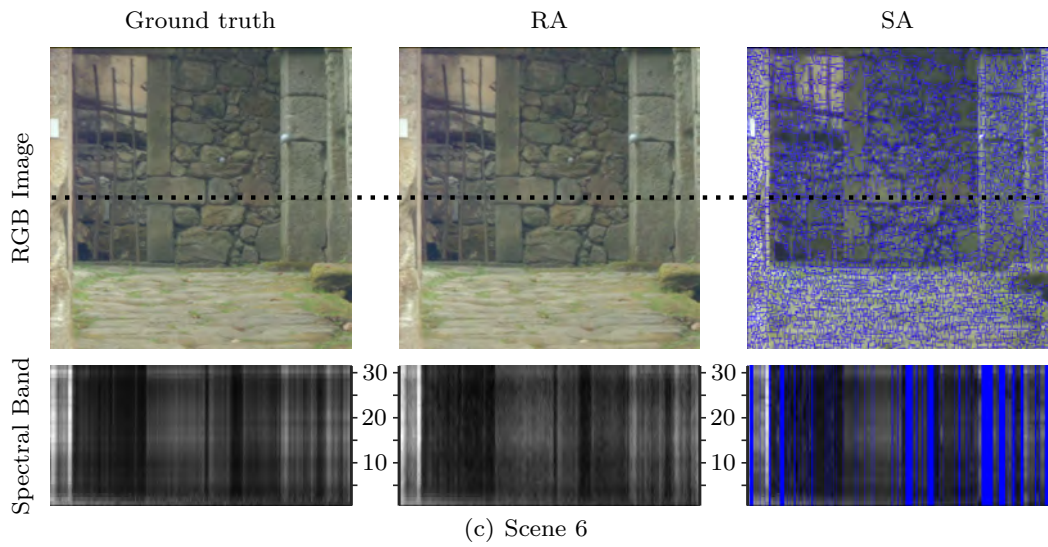
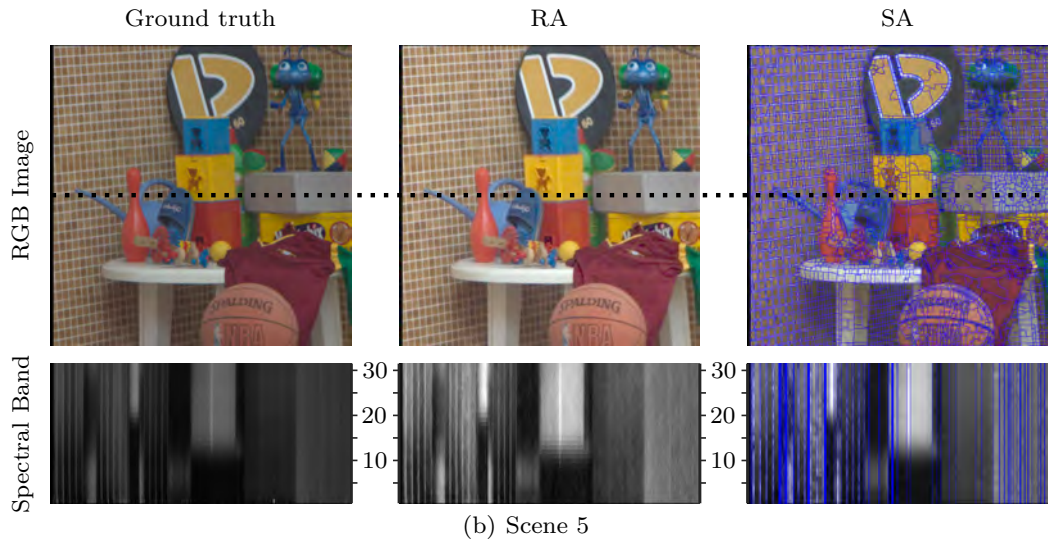
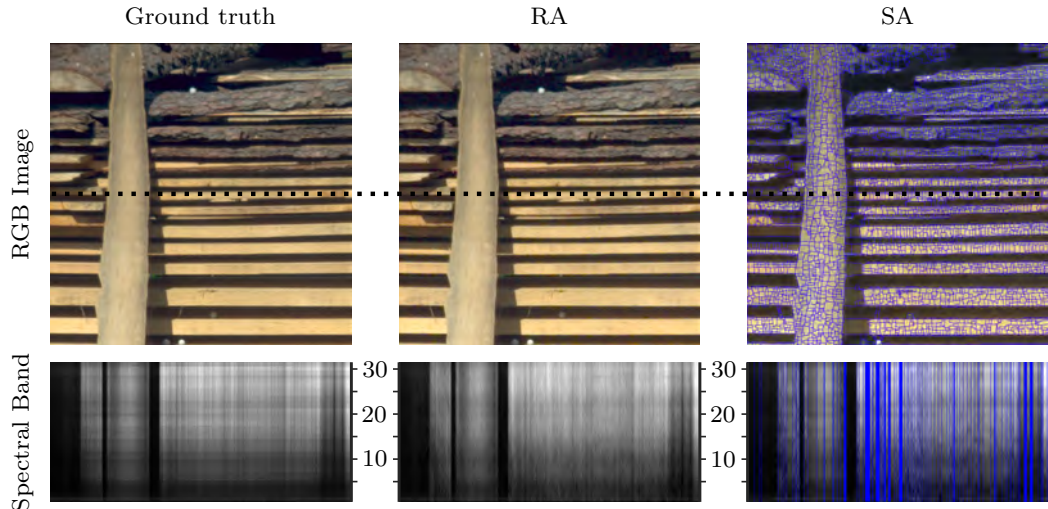


Fig. 19 Typical reconstructions for scenes 4 to 6: RGB images of the original HS cube, RA- and SA-reconstructed ones (blue lines in SA corresponds to contours where no data is reconstructed) together with the spectrum along the central horizontal line (dashed line in the RGB images).

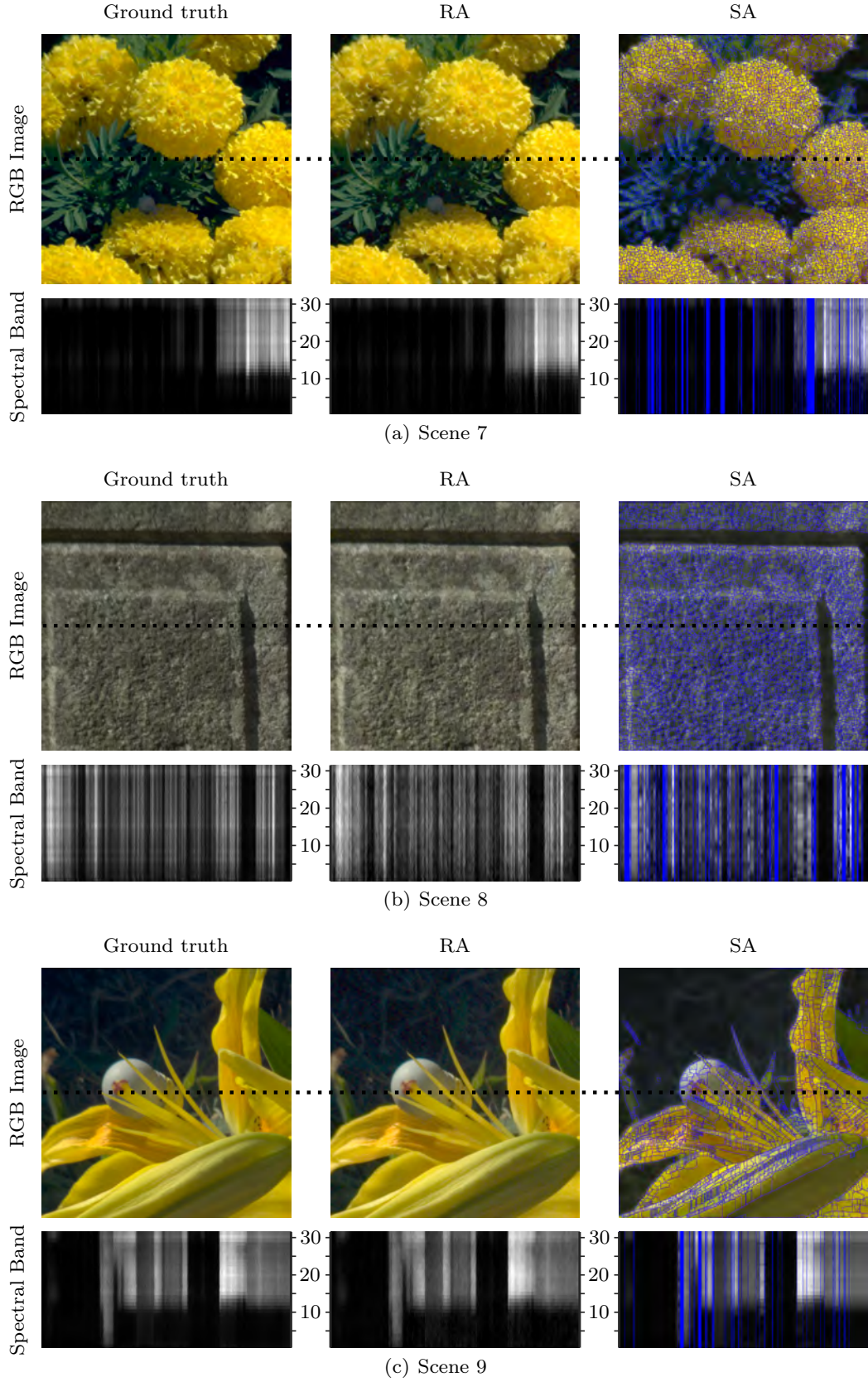


Fig. 20 Typical reconstructions for scenes 7 to 9: RGB images of the original HS cube, RA- and SA-reconstructed ones (blue lines in SA corresponds to contours where no data is reconstructed) together with the spectrum along the central horizontal line (dashed line in the RGB images).

Chapitre 4

Complément sur la reconstruction par régularisation quadratique (RA)

Sommaire

4.1 Implémentation de la méthode RA par gradients conjugués (CGNR)	80
4.1.1 Équation normale et algorithme CGNR	80
4.1.2 Étude du calcul de $\mathbf{A} \cdot$	81
4.1.3 Étude du calcul de $\mathbf{A}^t \cdot$	82
4.1.4 Coût de calcul de l'algorithme CGNR	82
4.2 Vitesse de convergence du CGNR	83
4.2.1 Majoration de $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$	84
4.2.2 Structure de la matrice $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$	86
4.2.3 Cas de configurations orthogonales normalisées du DMD	87
4.2.4 Cas d'un modèle de bruit blanc	89
4.2.5 Illustration du conditionnement et de la vitesse de convergence sur des simulations	90

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la reconstruction d'images hyperspectrales par une régularisation quadratique de type Thikonov [TA77] préservant les contours, comme présenté section 1.4 et étudiée en détail dans l'article du chapitre 3. La solution est donc définie par :

$$\hat{\mathbf{o}} = \arg \min_{\mathbf{o}} \|\mathbf{m} - \mathbf{H}\mathbf{o}\|_{\mathbf{\Gamma}^{-1}}^2 + \mu_x \|\mathbf{D}_x \mathbf{o}\|^2 + \mu_y \|\mathbf{D}_y \mathbf{o}\|^2 + \mu_\lambda \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{o}\|^2. \quad (4.1)$$

La solution de ce problème de minimisation d'un critère quadratique possède une expression analytique :

$$(\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H} + \mu_x \mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x + \mu_y \mathbf{D}_y^t \mathbf{D}_y + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda) \hat{\mathbf{o}} = \mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}. \quad (4.2)$$

Nous présentons § 4.1 une implémentation efficace du calcul de cette solution par un algorithme de type gradients conjugués, l'algorithme *CGNR*, dont chaque itération a un coût de calcul faible si l'on prend en compte les caractéristiques de l'instrument. Nous étudions ensuite § 4.2 la vitesse de convergence de l'algorithme pour le dispositif utilisé et nous proposons des solutions permettant d'accélérer la convergence de l'algorithme sans pour autant augmenter son coût de calcul. Nous proposons en particulier d'exploiter certaines configurations du DMD permettant d'améliorer le conditionnement des matrices entrant en jeu dans cet algorithme et ainsi accélérer la convergence de l'algorithme, en particulier dans le cas d'un modèle de bruit blanc : les configurations orthogonales normalisées.

4.1 Implémentation de la méthode RA par gradients conjugués (CGNR)

Bien que la reconstruction du cube HS par inversion directe de la matrice dans l'équation (4.2) soit envisageable, elle n'est cependant pas possible dans notre cas à cause des dimensions de la matrice à inverser. En effet, la taille de celle-ci pour un cube de $R \times C \times W$ est de $RCW \times RCW$, valeur supérieure à 10^{13} éléments pour un cube de dimension $200 \times 200 \times 100$, ce qui requiert plusieurs gigaoctets d'espace mémoire de stockage, et ce pour des cubes de faibles dimensions. L'inversion directe nécessite alors une quantité de mémoire et un temps de calcul prohibitifs.

Il est immédiat d'écrire cette solution comme solution d'une équation normale et exploiter des algorithmes itératifs spécifiques à ce type d'équations [Saa03]. Plus particulièrement, nous proposons de mettre en œuvre un algorithme itératif de type gradients conjugués pour la résolution des équations normales (en anglais *Conjugate Gradient for Normal Residual* ou *CGNR*) (voir par exemple [Saa03, Chap. 8]). Cet algorithme est particulièrement adapté à notre problème car on peut exploiter les caractéristiques du dispositif imageur pour une implémentation efficace.

4.1.1 Équation normale et algorithme CGNR

On notera dans la suite $\mathbf{L}$ la matrice $(\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H} + \mu_x \mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x + \mu_y \mathbf{D}_y^t \mathbf{D}_y + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda)$ et $\mathbf{b}$ le vecteur $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}$. Sous cette notation la solution de l'équation (4.2) est solution du système linéaire :

$$\mathbf{L} \hat{\mathbf{o}} = \mathbf{b} \quad (4.3)$$

Il est alors immédiat de noter que l'équation (4.3) est une équation normale. En effet, la matrice $\mathbf{L}$ peut s'écrire :

$$\mathbf{L} = \mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H} + \mu_x \mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x + \mu_y \mathbf{D}_y^t \mathbf{D}_y + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda = \mathbf{A}^t \mathbf{A} \quad (4.4)$$

avec $\mathbf{A}$ la matrice définie par blocs :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}} \quad \sqrt{\mu_x} \mathbf{D}_x^t \quad \sqrt{\mu_y} \mathbf{D}_y^t \quad \sqrt{\mu_\lambda} \mathbf{D}_\lambda^t]^t \quad (4.5)$$

Par ailleurs, on peut exprimer le vecteur $\mathbf{b}$ en fonction de la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{b} = \mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{m} = \mathbf{A}^t \tilde{\mathbf{b}} \quad (4.6)$$

avec le vecteur $\tilde{\mathbf{b}}$ construit par bloc : $\tilde{\mathbf{b}} = [\mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{m} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]$. Ainsi, la solution de l'équation (4.2) recherchée est solution de l'équation normale :

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \hat{\mathbf{o}} = \mathbf{A}^t \tilde{\mathbf{b}} \quad (4.7)$$

L'algorithme *CGNR* (voir Algorithme 1) est un algorithme itératif de type gradient conjugué spécialisé pour la résolution des équations normales telles que l'équation (4.7). D'un point de vue calculatoire, cet algorithme nécessite principalement le calcul de deux produits matriciels faisant intervenir la matrice $\mathbf{A}$, à savoir $\mathbf{A} \cdot$ et $\mathbf{A}^t \cdot$ où $\cdot$ dénote un vecteur quelconque de dimension appropriée. Les autres opérations correspondent à des calculs de normes et d'additions vectorielles.

Il est important de noter que pour mettre en œuvre cet algorithme, il n'est pas nécessaire de stocker en mémoire la matrice $\mathbf{A}$ mais qu'il suffit de pouvoir calculer les produits $\mathbf{A} \cdot$ et $\mathbf{A}^t \cdot$. On peut donc pour ces calculs, bénéficier des caractéristiques de notre modèle instrumental (matrice $\mathbf{H}$) et de la régularisation quadratique choisie (matrices $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ et $\mathbf{D}_\lambda$) pour effectuer ces calculs sans stocker en mémoire ces matrices, ce qui réduit considérablement le besoin en mémoire vive.

Algorithme 1 Algorithme de gradients conjugués pour les équations normales (*CGNR*)

```

 $\mathbf{x}_0$  : solution initiale
 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0)$  :
 $\mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0$ 
for  $j = 0, 1 \dots$  jusqu'à convergence do
     $\mathbf{z}_j = \mathbf{A}\mathbf{p}_j$ 
     $\alpha_j = \frac{\|\mathbf{q}_j\|_2^2}{\|\mathbf{z}_j\|_2^2}$ 
     $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j$ 
     $\mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{q}_j - \alpha_j \mathbf{A}^T \mathbf{z}_j$ 
     $\beta_j = \frac{\|\mathbf{q}_{j+1}\|_2^2}{\|\mathbf{q}_j\|_2^2}$ 
     $\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{q}_{j+1} + \beta_j \mathbf{p}_j$ 
end for

```

4.1.2 Étude du calcul de $\mathbf{A} \cdot$

Le calcul de $\mathbf{A}\mathbf{o}$ pour un vecteur quelconque $\mathbf{o}$ se ramène aux calculs de $\mathbf{H}^t \Gamma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{o}$, $\mathbf{D}_x^t \mathbf{o}$ et $\mathbf{D}_y^t \mathbf{o}$. Chaque ligne des trois derniers termes consiste en une simple différence de valeurs entre deux éléments de $\mathbf{o}$ (différence entre pixels voisins spatialement ou spectralement), donc se calcule sans aucun produit, mais avec respectivement $R(C-1)W$, $(R-1)CW$ et $RC(W-1)$ différences.

Nous avons vu au Chapitre 1, § 1.4 et dans l'article du chapitre 3 que les propriétés du dispositif d'acquisition, en particulier l'indépendance de l'acquisition ligne par ligne et la co-localisation, permettaient d'obtenir un modèle direct simple pour le dispositif. Le calcul de $\mathbf{H} \cdot$ correspond exactement au calcul de ce modèle direct.

Le schéma de la figure 4.1 illustre la façon dont on peut implémenter ce modèle direct à l'aide d'un cube de filtrage FC (*Filtering Cube*), correspondant, pour chaque longueur d'onde, à une version décalée de la configuration du DMD : $FC(r, c, w) = DMD(r, c - w + w_0, w)$, où r , c , et w sont respectivement les indices de lignes, de colonne et de longueur d'onde (w_0 étant une longueur d'onde arbitraire s'imaginant au centre du DMD). Ainsi, pour un objet observé $O(r, c, w)$ et une configuration donnée du DMD, on obtient les mesures $M(r, c) = \sum_w FC(r, c, w)O(r, c, w)$. Aussi, le calcul du modèle direct $\mathbf{H} \cdot$ peut se faire pour chaque acquisition $n \in \{1, \dots, N\}$ par τRCW additions, où τ est le taux de miroirs ouverts et R et C le nombre de lignes et de colonnes sur le détecteur.

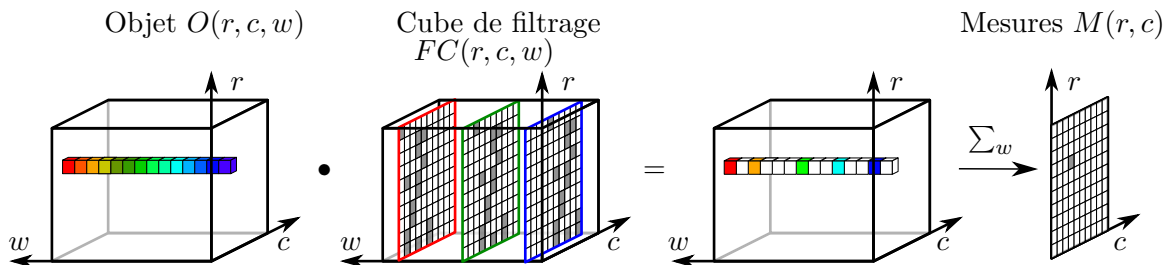


FIGURE 4.1 – Illustration de l'effet de l'opérateur $\mathbf{H} \cdot$ en une position (r, c) de l'image mesurée.

4.1.3 Étude du calcul de $\mathbf{A}^t \cdot$

Le calcul de $\mathbf{H}^t \cdot$ est encore plus simple puisqu'il ne nécessite que des affectations mémoires. Pour comprendre cela, il suffit de remarquer que $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}^t$ jouent deux rôles opposés, car si $\mathbf{H}$ permet de passer d'un cube HS à N images acquises sur le *CCD*, $\mathbf{H}^t$ fait l'inverse, tel qu'illustré sur la figure 4.2 pour une acquisition, où l'image *CCD* est sur la droite et le cube HS obtenu est sur la gauche. On remarque alors que le contenu du cube HS obtenu par application de $\mathbf{H}^t$ à une image *CCD*, correspond simplement pour chaque position spatiale de l'image, à affecter la valeur du pixel (son intensité) à toutes les bandes spectrales du cube HS correspondant aux éléments non-nuls du filtre hyperspectral. Cette propriété permet de mettre en œuvre l'opération $\mathbf{H}^t \cdot$ sans aucun calcul, mais avec de simples affectations en mémoire.

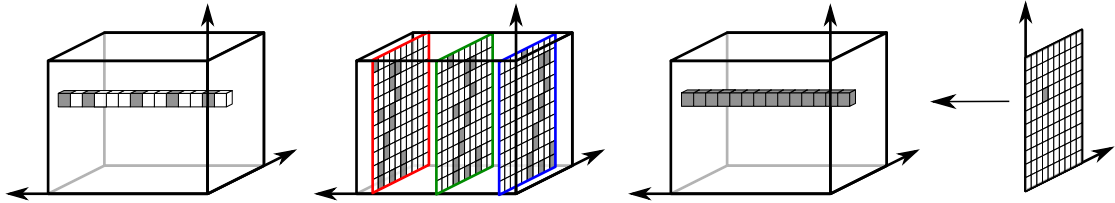


FIGURE 4.2 – Illustration de l'effet de l'opérateur adjoint $\mathbf{H}^t \cdot$ en une position (r, c) de l'image mesurée.

On peut faire une analyse similaire pour le calcul des termes de régularisation via les produits impliquant les matrices $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ et $\mathbf{D}_\lambda$ et leurs transposées, qui se calculent uniquement via des différences de valeurs entre pixels voisins.

4.1.4 Coût de calcul de l'algorithme CGNR

La charge calculatoire de l'algorithme *CGNR* est résumée dans le tableau 4.1 qui récapitule des principales opérations exécutées à chaque itération, pour la reconstruction d'un cube HS de taille $R \times C \times W$ à partir de N acquisitions de taille $R \times C$ pour un taux d'ouverture des miroirs τ et une matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ diagonale.

Étapes	Sous-Étapes	Opérations		
		+ ou -	× ou ÷	Affectation
$\mathbf{z}_j = \mathbf{A}\mathbf{p}_j$	$\mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{p}_j$	τNWRC	NRC	
	$\mathbf{D}_x\mathbf{p}_j$	WRC		
	$\mathbf{D}_y\mathbf{p}_j$	WRC		
	$\mathbf{D}_\lambda\mathbf{p}_j$	WRC		
$\alpha_j = \frac{\ \mathbf{q}_j\ _2^2}{\ \mathbf{z}_j\ _2^2}$		(3W+N)RC	(3W+N)RC	
$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \alpha_j\mathbf{p}_j$		WRC	WRC	
$\mathbf{A}^T\mathbf{z}_j$	$\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{z}_j$		NRC	τNWRC
	$\mathbf{D}_x^t\mathbf{z}_j$	WRC		
	$\mathbf{D}_y^t\mathbf{z}_j$	WRC		
	$\mathbf{D}_\lambda^t\mathbf{z}_j$	WRC		
$\mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{q}_j - \alpha_j\mathbf{A}^T\mathbf{z}_j$		WRC	WRC	
$\beta_j = \frac{\ \mathbf{q}_{j+1}\ _2^2}{\ \mathbf{q}_j\ _2^2}$		WRC	WRC	
$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{q}_j + \alpha_j\mathbf{p}_j$		WRC	WRC	

TABLE 4.1 – Nombres d'opérations requises pour une itération du *CGNR*

La charge de calcul totale est donc répartie comme suit (on néglige ici N devant W , étant donné que dans le cadre de cette étude $N \ll W$) :

- 7WRC produits et additions pour le calcul de α_j et β_j ainsi que la mise à jour de $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{q}_j$ et $\mathbf{p}_j$;
- 6WRC additions pour le calcul des termes de régularisation $\mathbf{D}_x\cdot$, $\mathbf{D}_y\cdot$ et $\mathbf{D}_\lambda\cdot$ directs et transposés.
- 2NRC produits et τNWRC additions pour le calcul de $\mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\cdot$ et transposé.

On peut ainsi constater que, pour une valeur typique de $\tau = \frac{1}{N}$ le coût de calcul du problème direct $\mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\cdot$ et adjoint $\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}\cdot$ est de l'ordre de 2NRC produits et WRC additions et n'est donc pas le principal responsable du coût de calcul de l'algorithme. Une telle répartition de la charge de calcul, due aux propriétés de l'imageur hyperspectral considéré dont nous avons su profiter, est peu commune pour la résolution de problèmes inverses.

4.2 Vitesse de convergence du *CGNR*

La vitesse de convergence d'une méthode itérative caractérise la diminution de la distance entre la solution itérative et la solution finale (c'est-à-dire la limite) en fonction du nombre d'itérations. Soit $\mathbf{x}^{(n)}$ la solution obtenue à la $n^{\text{ème}}$ itération et soit $\mathbf{x}^*$ la solution optimale, caractériser la vitesse de convergence revient donc à majorer le plus précisément possible le terme $\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|_M$ où $\|\cdot\|_M$ est une métrique quelconque équivalente à la distance quadratique. Le terme majorant doit dépendre de n et tendre nécessairement vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. On identifie donc cette vitesse de convergence vers 0 à celle de la convergence de la méthode itérative.

Pour la famille des méthodes basées sur l'espace de Krylov, dont fait partie la méthode *CGNR*, il existe une majoration générale vérifiée par celles-ci, dont l'expression est [DCMR95, page 7] :

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|_M \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\text{cond}\{\mathbf{L}\}} - 1}{\sqrt{\text{cond}\{\mathbf{L}\}} + 1} \right)^n \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 \quad (4.8)$$

où $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(0)}$ est le résidu initial et $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$ le conditionnement de la matrice $\mathbf{L}$, c'est-à-dire le rapport entre sa plus grande et sa plus petite valeur propre. L'équation (4.8) montre l'impact du conditionnement de $\mathbf{L}$ sur la vitesse de convergence de l'algorithme et la nécessité de garder cette valeur le plus proche possible de 1. Un des moyens les plus utilisés pour assurer une telle condition sur $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$, est de modifier $\mathbf{L}$ en la multipliant par une matrice $\mathbf{P}$ choisie judicieusement de sorte que le conditionnement $\text{cond}\{\mathbf{PL}\}$ de la matrice $\mathbf{PL}$ soit plus petit que $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$ et se rapproche donc de 1. Cette technique connue sous le nom de pré-conditionnement [BSvD99, DCMR95], permet de modifier l'équation (4.3) à résoudre en une équation équivalente, dont la résolution nécessite moins d'itérations et donc potentiellement moins de calcul. Néanmoins, le coût de calcul du pré-conditionneur s'ajoute au coût de calcul de l'algorithme. Remédier au problème de conditionnement passe donc par un compromis entre le coût calculatoire du pré-conditionneur et le gain en nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme.

Dans le cadre de cette thèse, on peut jouer sur un autre paramètre pour améliorer le conditionnement de la matrice $\mathbf{L}$. En effet, le dispositif imageur étant pilotable, par l'intermédiaire de sa matrice de micro-miroirs (DMD), il est possible de modifier la matrice $\mathbf{H}$ intervenant dans la matrice $\mathbf{L}$ et viser à améliorer le conditionnement de cette matrice sans avoir à faire appel à un pré-conditionneur... Il est donc important d'étudier ce conditionnement d'envisager des configurations du DMD permettant de l'améliorer.

La matrice $\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}$ correspond à la contribution de l'imageur que l'on peut modifier en pilotant le filtrage effectué par le DMD, afin d'améliorer le conditionnement de la matrice $\mathbf{L}$ et donc la vitesse de convergence de l'algorithme *CGNR*. L'idée est donc de déterminer les matrices $\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}$ qui soient réalisables par l'imageur hyperspectral tout en permettant de minimiser le conditionnement $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$.

Pour contrôler le conditionnement $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$ à l'aide du DMD, nous proposons dans un premier temps de le majorer par une fonction de $\text{cond}\{\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}\}$. Ensuite, nous verrons comme certaines configurations particulières du DMD permettent d'exprimer aisément $\text{cond}\{\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}\}$ et de le réduire à 1 dans le cas d'un modèle de bruit blanc.

Dans la suite, nous travaillerons uniquement avec des matrices symétriques à valeurs réelles, dont la décomposition en valeurs propres et vecteur propres est définie, avec des valeurs propres positives ou nulles (les matrices considérées s'écrivant sous la forme $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$ elles sont définies non-négatives). Pour une matrice symétrique $\mathbf{M}$ on notera $\mathbf{e}_n^{\mathbf{M}}$ ses vecteurs propres de norme unité associés aux valeurs propres $\lambda_n^{\mathbf{M}}$. On notera par ailleurs, par $\mathbf{e}_{\max}^{\mathbf{M}}$ et $\mathbf{e}_{\min}^{\mathbf{M}}$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres maximale $\lambda_{\max}^{\mathbf{M}}$ et minimale non nulle $\lambda_{\min}^{\mathbf{M}}$. Ainsi, par définition,

$$\text{cond}\{\mathbf{M}\} = \frac{\lambda_{\max}^{\mathbf{M}}}{\lambda_{\min}^{\mathbf{M}}}.$$

Afin d'alléger les notations, nous introduisons les matrices $\mathbf{J}$ et $\mathbf{R}$ telles que $\mathbf{L} = \mathbf{J} + \mathbf{R}$ avec $\mathbf{J} = \mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}$ et $\mathbf{R} = \mu_x\mathbf{D}_x^t\mathbf{D}_x + \mu_y\mathbf{D}_y^t\mathbf{D}_y + \mu_\lambda\mathbf{D}_\lambda^t\mathbf{D}_\lambda$

4.2.1 Majoration de $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$

Théorème 1 : D'après les notations précédentes, si l'on définit $\tau_{\max}^{\mathbf{R},\mathbf{J}} = \frac{\lambda_{\max}^{\mathbf{R}}}{\lambda_{\max}^{\mathbf{J}}}$, on a :

$$\text{cond}\{\mathbf{L}\} \leq \frac{(1 + \tau_{\max}^{\mathbf{R},\mathbf{J}})}{\sum_{n=1}^{rg(\mathbf{J})} < \mathbf{e}_{\min}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} >^2} \text{cond}\{\mathbf{J}\} \quad (4.9)$$

DÉMONSTRATION : Soit $\lambda_\ell^{\mathbf{L}}$ une valeur propre quelconque de $\mathbf{L}$ et $\mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}}$ son vecteur propre associé de norme unité, on a :

$$(\mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}})^t \mathbf{L} \mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}} = \lambda_\ell^{\mathbf{L}} (\mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}})^t \mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}} = \lambda_\ell^{\mathbf{L}}. \quad (4.10)$$

En remplaçant $\mathbf{L}$ par $\mathbf{J} + \mathbf{R}$ dans cette expression et en écrivant la décomposition en valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{L}$ sous la forme

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^{\text{rg}(\mathbf{J})} \lambda_n^{\mathbf{J}} \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} (\mathbf{e}_n^{\mathbf{J}})^t \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \sum_{k=1}^{\text{rg}(\mathbf{R})} \lambda_k^{\mathbf{R}} \mathbf{e}_k^{\mathbf{R}} (\mathbf{e}_k^{\mathbf{R}})^t \quad (4.11)$$

on obtient :

$$\lambda_\ell^{\mathbf{L}} = (\mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}})^t (\mathbf{J} + \mathbf{R}) \mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}} = \sum_{n=1}^{\text{rg}(\mathbf{J})} \lambda_n^{\mathbf{J}} \langle \mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} \rangle^2 + \sum_{k=1}^{\text{rg}(\mathbf{R})} \lambda_k^{\mathbf{R}} \langle \mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_k^{\mathbf{R}} \rangle^2. \quad (4.12)$$

Dans un premier temps on peut montrer que dans notre cas toutes les valeurs propres $\lambda_n^{\mathbf{L}}$ sont strictement positives, donc que la matrice $\mathbf{L}$ est inversible, hormis dans un cas extrêmement particulier mathématiquement. En effet, l'équation (4.12) nous dit que toute valeur propre s'écrit comme la somme de termes positifs ou nuls. Pour qu'une valeur propre soit nulle, il faut donc que tous les termes soient nuls. Les sommes se faisant uniquement sur les $\text{rg}(\mathbf{J})$ et $\text{rg}(\mathbf{R})$ valeurs propres non nulles des matrices $\mathbf{J}$ et $\mathbf{R}$, cela signifie donc que tous les produits scalaires doivent être nuls. Or, par construction, si les paramètres de régularisation μ_x , μ_y et μ_λ sont non nuls la matrice $\mathbf{R}$ est de rang $RCW - 1$ et le seul vecteur propre $\mathbf{e}_{RCW}^{\mathbf{R}}$ associé à la valeur propre nulle est le vecteur constant. En effet $\mathbf{u}^t \mathbf{R} \mathbf{u} = 0$ est nul uniquement pour les vecteurs $\mathbf{u}$ proportionnels à $\mathbf{e}_{RCW}^{\mathbf{R}}$ puisque cette quantité correspond à la somme (pondérée) du carré des différences inter-pixels le long des lignes, des colonnes et des longueurs d'ondes. Aussi, les termes $\langle \mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_k^{\mathbf{R}} \rangle^2$ ne peuvent être tous nuls (pour $k \in \{1, \dots, RCW - 1\}$) que si $\mathbf{e}_\ell^{\mathbf{L}} = \mathbf{e}_{RCW}^{\mathbf{R}}$. Pour que ce vecteur constant soit vecteur propre de la matrice $\mathbf{L}$ il faudrait, d'après la définition (4.5) de la matrice $\mathbf{A}$ que $\mathbf{A} \mathbf{e}_{RCW}^{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ et donc par construction, que $\mathbf{H} \mathbf{e}_{RCW}^{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$. Autrement dit, que pour les N configurations du DMD des différentes acquisitions, les mesures soient insensibles à l'ajout d'une grandeur constante à l'objet observé. Cela ne sera donc bien évidemment jamais le cas en pratique.

Dans un second temps, on peut trouver une borne supérieure à $\lambda_{\max}^{\mathbf{L}}$. Si l'on applique la propriété (4.12) à $\lambda_{\max}^{\mathbf{L}}$, en majorant $\lambda_n^{\mathbf{J}}$ par $\lambda_{\max}^{\mathbf{J}}$, et $\lambda_k^{\mathbf{R}}$ par $\lambda_{\max}^{\mathbf{R}}$, on obtient :

$$\lambda_{\max}^{\mathbf{L}} \leq \lambda_{\max}^{\mathbf{J}} \left(\sum_{n=1}^{\text{rg}(\mathbf{J})} \langle \mathbf{e}_{\max}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} \rangle^2 \right) + \lambda_{\max}^{\mathbf{R}} \left(\sum_{k=1}^{\text{rg}(\mathbf{R})} \langle \mathbf{e}_{\max}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_k^{\mathbf{R}} \rangle^2 \right) \quad (4.13)$$

Or, comme les matrices $\mathbf{J}$ et $\mathbf{R}$ ne sont pas de rang plein, on a $\sum_{n=1}^{\text{rg}(\mathbf{J})} \langle \mathbf{e}_{\max}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} \rangle^2 \leq \|\mathbf{e}_{\max}^{\mathbf{L}}\|^2 = 1$ et $\sum_{k=1}^{\text{rg}(\mathbf{R})} \langle \mathbf{e}_{\max}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_k^{\mathbf{R}} \rangle^2 \leq 1$, ainsi on obtient :

$$\lambda_{\max}^{\mathbf{L}} \leq \lambda_{\max}^{\mathbf{J}} + \lambda_{\max}^{\mathbf{R}} = \left(1 + \tau_{\max}^{\mathbf{R}, \mathbf{J}} \right) \lambda_{\max}^{\mathbf{J}}, \quad (4.14)$$

d'après la définition de $\tau_{\max}^{\mathbf{R}, \mathbf{J}}$.

Si maintenant on applique la propriété de l'Eq. (4.12) à $\lambda_{\min}^{\mathbf{L}}$ et étant donné que :

$$\sum_{k=1}^{\text{rg}(\mathbf{R})} \lambda_k^{\mathbf{R}} \langle \mathbf{e}_{\min}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_k^{\mathbf{R}} \rangle^2 > 0 \quad (4.15)$$

puisque $\mathbf{e}_{\min}^{\mathbf{L}} \neq \mathbf{e}_{RCW}^{\mathbf{R}}$ comme vu précédemment, on obtient :

$$\lambda_{\min}^{\mathbf{L}} > \sum_{n=1}^{\text{rg}(\mathbf{J})} \lambda_n^{\mathbf{J}} \langle \mathbf{e}_{\min}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} \rangle^2 \geq \lambda_{\min}^{\mathbf{J}} \sum_{n=1}^{\text{rg}(\mathbf{J})} \langle \mathbf{e}_{\min}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} \rangle^2 \quad (4.16)$$

Finalement, à partir des équations (4.16) et (4.14) et sachant que $\text{cond}\{\mathbf{L}\} = \frac{\lambda_{\max}^{\mathbf{L}}}{\lambda_{\min}^{\mathbf{L}}}$ et $\text{cond}\{\mathbf{J}\} = \frac{\lambda_{\max}^{\mathbf{J}}}{\lambda_{\min}^{\mathbf{J}}}$, on retrouve bien (4.9) :

$$\text{cond}\{\mathbf{L}\} \leq \frac{(1 + \tau_{\max}^{\mathbf{R},\mathbf{J}})}{\sum_{n=1}^{\text{rg}(\mathbf{J})} < \mathbf{e}_{\min}^{\mathbf{L}}, \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} >^2} \text{cond}\{\mathbf{J}\} \quad (4.17)$$

L'équation (4.9) montre l'impact que peut avoir la configuration du DMD, via la matrice $\mathbf{H}$, sur un majorant du conditionnement de la matrice $\mathbf{L}$ du problème. En cherchant des configurations du DMD permettant de réduire la valeur de ce majorant, on peut espérer diminuer $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$ et donc augmenter la vitesse de convergence de l'algorithme *CGNR*. La matrice $\mathbf{H}$, apparaît à la fois dans le terme $\text{cond}\{\mathbf{J}\} = \text{cond}\{\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}\}$ et dans le terme $(1 + \tau_{\max}^{\mathbf{R},\mathbf{J}}) \left(\sum_{n=1}^{\text{rg}(\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H})} < \mathbf{e}_{\lambda_{\min}^{\mathbf{L}}}, \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} >^2 \right)^{-1}$. Pour réduire le majorant sur $\text{cond}\{\mathbf{L}\}$ il faudrait veiller à ce que ces deux termes soient les plus faibles possible. Le lien entre le second terme et la configuration du dispositif instrumental n'étant pas simple, nous nous sommes focalisés, dans le cadre cette thèse sur la minimisation de $\text{cond}\{\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}\}$, car les propriétés de l'imageur hyperspectral permettent de traiter ce problème simplement, en choisissant convenablement les configurations du DMD.

Dans la suite de cette section, on étudiera le lien entre $\text{cond}\{\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}\}$, la structure de la matrice $\mathbf{H}$ et les configurations du DMD. Ensuite on proposera deux solutions pour réduire $\text{cond}\{\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}\}$ à la valeur de minimale de 1.

4.2.2 Structure de la matrice $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$

Le conditionnement de la matrice $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ dépend des matrices $\mathbf{H}$ et $\mathbf{\Gamma}^{-1}$, nous allons rappeler les caractéristiques principales de ces dernières, afin d'étudier la structure de la matrice $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$.

La matrice $\mathbf{H}$ correspond au modèle direct d'acquisition des mesures et modélise le processus de filtrage de l'imageur hyperspectral : $\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{o}$. Dans le cas d'une seule acquisition elle contient la configuration du DMD utilisée pour cette acquisition et est de dimension $RC \times RCW$ où R , C et W correspondent respectivement au nombre de lignes et de colonnes du capteur CCD et au nombre de bandes spectrales du cube hyperspectral imagé. Grace à la propriété de colocalisation, chaque ligne de la matrice correspond au filtre spectral appliqué à une position spatiale donnée, et contient donc au plus W éléments non-nuls, où chaque élément représente l'état d'un miroir du DMD (1 : état passant et 0 : état bloquant).

La structure de la matrice $\mathbf{H}$ dépend de l'ordre dans lequel sont arrangées les mesures dans le vecteur $\mathbf{m}$ et le cube hyperspectral dans le vecteur $\mathbf{o}$. Si l'on ordonne le cube en balayant l'ensemble des longueurs d'onde pour chaque position spatiale et que l'on ordonne les mesures selon les mêmes dimensions spatiales, on obtient une matrice $\mathbf{H}$ avec la structure suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^t & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_2^t & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{h}_{RC-1}^t & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{h}_{RC}^t \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

où $\mathbf{h}_i$ est un vecteur à W lignes contenant des un ou des zéros suivant les composantes spectrales acquises pour le pixel $i \in \{1, \dots, RC\}$ pour la configuration du DMD (propriété de colocalisation).

Dans un cadre statistique, la matrice de pondération $\mathbf{\Gamma}$ correspond à la matrice de covariance des mesures m_i . Nous considérons ici uniquement du bruit indépendant sur chaque détecteur : la

matrice $\mathbf{\Gamma}$ est une matrice diagonale de dimension RC avec sur la diagonale la variance γ_i du bruit de mesure sur chaque mesure m_i , $i \in \{1, \dots, RC\}$, soit, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma_i\}$ et donc $\mathbf{\Gamma}^{-1} = \text{diag}\{\gamma_i^{-1}\}$.

Finalement, à partir de l'expression de $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ et $\mathbf{H}$ on constate que la matrice $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ est bloc-diagonale, composée de RC matrices de dimension $W \times W$: $\mathbf{Z}_i = \frac{1}{\gamma_i} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^t$:

$$\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{Z}_{RC} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Dans le cas d'acquisitions multiples (N acquisitions), en ordonnant les mesures de chaque acquisition $\mathbf{m}^n, n = 1, \dots, N$, les unes au dessous des autres, il en va de même pour les matrices $\mathbf{H}^n$, la matrice $\mathbf{\Gamma}$ devenant bloc diagonale avec des blocs $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma^n\}$. La matrice $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ conserve alors sa forme bloc diagonale ci-dessus avec pour chaque bloc :

$$\mathbf{Z}_i = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\gamma_i^n} \mathbf{h}_i^n (\mathbf{h}_i^n)^t. \quad (4.20)$$

Dans la suite, pour évaluer le conditionnement de $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$, on exploitera cette structure bloc-diagonale afin de ramener l'analyse à celle des matrices de la diagonale $\mathbf{Z}_i$. En effet, cette structure implique que les valeurs propres de $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ correspondent simplement à l'ensemble des valeurs propres de ses sous-matrices $\mathbf{Z}_i$. L'étude des valeurs propres de $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ peut donc être ramenée à celle des valeurs propres λ^i des sous-matrices $\mathbf{Z}_i$.

Notons que le conditionnement d'une matrice de rang plein (inversible) est défini comme le rapport de la plus grande sur la plus petite valeur propre. Cependant, $\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}$ n'est pas de rang plein car dans notre contexte, le nombre d'acquisitions N est inférieur au nombre de bandes spectrales W : $\text{rg}(\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}) \leq NRC \ll WRC$. Par abus de langage, on appellera donc par la suite « conditionnement » pour une matrice non-inversible le rapport de la plus grande valeur propre sur la plus petite valeur propre non-nulle.

4.2.3 Cas de configurations orthogonales normalisées du DMD

On appelle ici configurations orthogonales du DMD, les situations pour lesquelles pour chaque pixel $i \in \{1, \dots, RC\}$ les vecteurs $\mathbf{h}_i^n$ pour $n = 1 \dots N$ sont orthogonaux :

$$\forall i \in 1, \dots, RC, \forall (n, k) \in \{1, \dots, N\}^2 < \mathbf{h}_i^n, \mathbf{h}_i^k > = \delta_{k,n} \|\mathbf{h}_i^k\|^2, \quad (4.21)$$

où $\delta_{k,n}$ est le symbole de Kronecker.

Un cas particulier des configurations orthogonales est le cas normalisé, où tous les vecteurs $\mathbf{h}_i^k$ ont la même norme : $\|\mathbf{h}_i^k\|^2 = \text{cte}$. Ce cas particulier est intéressant pour la raison suivante :

Théorème 2 : *Dans le cas de configurations orthogonales normalisées du DMD, on a :*

$$\text{cond}\{\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}\} = \frac{\max_{i,k} \gamma_i^k}{\min_{i,k} \gamma_i^k}. \quad (4.22)$$

DÉMONSTRATION : Dans le cas de configurations orthogonales, il est immédiat de montrer que les vecteurs $\mathbf{h}_i^k$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{Z}_i$ car :

$$\mathbf{Z}_i \mathbf{h}_i^k = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\gamma_i^n} \mathbf{h}_i^n (\mathbf{h}_i^n)^t \mathbf{h}_i^k = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\gamma_i^n} \mathbf{h}_i^n < \mathbf{h}_i^n, \mathbf{h}_i^k > = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\gamma_i^n} \mathbf{h}_i^n \delta_{k,n} \|\mathbf{h}_i^k\|^2 = \frac{1}{\gamma_i^k} \|\mathbf{h}_i^k\|^2 \mathbf{h}_i^k. \quad (4.23)$$

Les valeurs propres associées à ces vecteurs propres sont $\lambda_k^i = \frac{1}{\gamma_i^k} \|\mathbf{h}_i^k\|^2$.

Les valeurs propres de $\mathbf{H}^t \mathbf{T}^{-1} \mathbf{H}$ étant les valeurs propres des matrice $\mathbf{Z}^i$, On a donc :

$$\text{cond}\{\mathbf{H}^t \mathbf{T}^{-1} \mathbf{H}\} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{\max_{i,k} \frac{\|\mathbf{h}_i^k\|^2}{\gamma_i^k}}{\min_{i,k} \frac{\|\mathbf{h}_i^k\|^2}{\gamma_i^k}} \quad (4.24)$$

Si de plus les vecteurs $\mathbf{h}_i^k$ ont la même norme, alors :

$$\text{cond}\{\mathbf{H}^t \mathbf{T}^{-1} \mathbf{H}\} = \frac{\max_{i,k} \frac{1}{\gamma_i^k}}{\min_{i,k} \frac{1}{\gamma_i^k}} = \frac{\max_{i,k} \gamma_i^k}{\min_{i,k} \gamma_i^k}. \quad (4.25) \quad \blacksquare$$

Le cas des configurations orthogonales normalisées est donc intéressant pour leurs propriétés mathématiques, mais l'on peut se demander à quelle condition cela correspond en pratique pour la configuration du DMD et s'il est possible et simple de construire de telles configurations.

Rappelons que ces vecteurs $\mathbf{h}_i^n$ sont constitués soit de 0, soit de 1. En pratique, pour avoir des configurations orthogonales, il faut donc que tous les éléments des vecteurs $\mathbf{h}_i^n$ vérifient $\forall w, i, \sum_{n=1}^N [\mathbf{h}_i^n]_w \leq 1$. D'après la définition de la matrice $\mathbf{H}$ de l'équation (4.18) et le modèle $\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{o}$, le vecteur $\mathbf{h}_i$ correspond au cube de filtrage pour l'acquisition de la donnée m_i sur le pixel i pour une configuration du DMD. En effet, l'opération matricielle donne pour ce pixel : $m_i = (\mathbf{h}_i)^t \mathbf{o}_i$ où $\mathbf{o}_i$ contient le spectre de l'objet pour le pixel i ce qui correspond en terme de filtrage du cube pour une configuration du DMD à l'opération illustrée figure 4.1 : $M(r, c) = \sum_{w=1}^W FC(r, c, w) O(r, c, w)$, où (r, c) sont les indices de ligne et colonne du pixel i . Les vecteurs $\mathbf{h}_i^n$ correspondent aux vecteurs pour les N configurations du DMD (pour les N cubes de filtrage $FC^n(r, c, w)$) des N acquisitions. Pour que les configurations soient orthogonales, il faut donc que $\forall w, r, c, \sum_{n=1}^N FC^n(r, c, w) \leq 1$. Cela signifie en pratique qu'aucun des éléments du cube $O(r, c, w)$ ne participe à plus d'une des acquisitions.

Le cas particulier des configurations orthogonales normalisées correspond au cas où tous les vecteurs $\mathbf{h}_i^n$ ont la même norme : $\forall i, n, \|\mathbf{h}_i^n\|^2 = \text{cte}$. Cette constante, correspondant au nombre d'éléments à 1 de ces vecteurs, est liée au nombre d'éléments du cube $O(r, c, w)$ participant à chaque acquisition. Afin d'obtenir dans les données de l'information sur tous les éléments du cube, il faudrait avoir $\|\mathbf{h}_i^n\|^n = \frac{W}{N}$ (dans le cas où W est un multiple de N) et dans ce cas on a : $\forall i \in 1, \dots, RC, \sum_{n=1}^N \mathbf{h}_i^n = \mathbf{1}$ (où $\mathbf{1}$ est un vecteur ne contenant que des 1) ou, ce qui est équivalent, $\forall w, r, c, \sum_{n=1}^N FC^n(r, c, w) = 1$. Notons que dans ce cas, le taux de miroirs ouvert est $\tau = \frac{1}{N}$.

Comme le cube de filtrage est construit, aux différentes longueurs d'ondes, à partir de la configuration du DMD par un simple décalage le long des colonnes, il suffit donc, pour avoir des configurations orthogonales, que la propriété précédente soit vraie sur les différentes configurations du DMD, à savoir $\forall r, c, \sum_{n=1}^N DMD^n(r, c) = 1$, ce qui implique que chaque miroir doit être ouvert une fois et une seule sur l'ensemble des acquisitions. Il est donc aisé de générer N configurations des DMD correspondant à des configurations orthogonales normalisées. Une façon de procéder est, par exemple, pour chaque (r, c) de tirer aléatoirement un indice $n \in \{1, \dots, N\}$ correspondant à l'acquisition pour laquelle le miroir à la position (r, c) est ouvert.

Enfin, ces configurations orthogonales normalisées ont une autre propriété intéressante.

PROPRIÉTÉ 1 : Dans le cas de configurations orthogonales normalisées du DMD, on obtient l'image panchromatique par simple addition des données obtenues par toutes les acquisitions $\blacksquare$

DÉMONSTRATION : La démonstration est immédiate puisque les données correspondant à la n ème acquisition s'écrivent $M^n(r, c) = \sum_{w=1}^W FC^n(r, c, w)O(r, c, w)$. Si l'on fait la somme des N acquisitions, en exploitant la propriété des configurations orthogonales normalisées, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N M^n(r, c) &= \sum_{n=1}^N \sum_{w=1}^W FC^n(r, c, w)O(r, c, w) \\ &= \sum_{w=1}^W \left(\sum_{n=1}^N FC^n(r, c, w) \right) O(r, c, w) = \sum_{w=1}^W O(r, c, w), \end{aligned}$$

soit l'intégration de l'image hyperspectrale sur l'ensemble des longueurs d'onde ce qui correspond bien à la définition de l'image panchromatique. ■

Insistons sur le fait que cette propriété est intéressante pour les deux méthodes proposées durant cette thèse, puisque, grâce à de telles configurations, nous disposons, sans aucune acquisition supplémentaire, de l'image panchromatique nécessaire pour effectuer la segmentation orientée contours pour la méthode RA et orientée région pour la méthode SA. Bien entendu, en pratique cette image panchromatique sera bruitée, mais avec un rapport signal sur bruit plus élevé que celui de chacune des acquisitions, puisque cela revient à dire que le temps d'acquisition de l'image panchromatique est N fois plus élevé que celui de chacune des acquisitions.

4.2.4 Cas d'un modèle de bruit blanc

Dans une interprétation statistique de la solution de l'équation (4.2), la matrice $\mathbf{\Gamma}$ correspond à la matrice de covariance des données, issue d'un bruit additif Gaussien centré, soit un modèle d'acquisition : $\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{o} + \boldsymbol{\epsilon}$ avec $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma})$.

Pour un dispositif expérimental comme le notre, le modèle de bruit le plus cohérent est un modèle de bruit de Poisson $\mathbf{m} \sim \mathcal{P}(\mathbf{H}\mathbf{o})$ (« phénomène de comptage de photons »), auquel pourrait s'ajouter un bruit blanc gaussien centré (« bruit de lecture »). En négligeant ce dernier, généralement faible, la matrice de covariance des données est donc égale à $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\mathbf{H}\mathbf{o})$. Bien sûr, l'objet est inconnu et on peut en pratique approximer la matrice de covariance par $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\mathbf{m})$. Utiliser une telle matrice de covariance dans le critère (4.1) définissant la solution revient à approximer un modèle de bruit de Poisson par un modèle de bruit Gaussien. Une telle approximation est valable lorsque le flux est suffisamment grand (théorème de la limite centrale). Avec un tel modèle, l'égalité (4.22) nous donne $\text{cond}\{\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}\} = \frac{\max_{i,k} m_i^k}{\min_{i,k} m_i^k}$ et l'on constate ainsi que le conditionnement de la matrice $\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}$ est très sensible au contraste des données. En effet, si les données contiennent à la fois des pixels sombres et des pixels clairs, donc un contraste important, ce terme deviendra élevé.

Une autre approximation possible pour le modèle de bruit est de considérer un bruit additif blanc Gaussien centré, dans ce cas, $\mathbf{\Gamma} = \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}$, ce qui implique que $\forall k, i, \gamma_i^k = \text{cte}$ et donc $\max_{i,k} \gamma_i^k = \min_{i,k} \gamma_i^k$ d'où $\text{cond}\{\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}\} = 1$.

Si un tel modèle est moins satisfaisant statistiquement et physiquement, il est intéressant numériquement car il permet d'obtenir une borne plus faible pour le conditionnement de la matrice $\mathbf{H}^t\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{H}$ et potentiellement une convergence plus rapide de l'algorithme CGNR. Bien entendu, il faut vérifier que cette approximation grossière ne dégrade pas la qualité des images hyperspectrales ainsi reconstruite par rapport à un modèle plus réaliste.

4.2.5 Illustration du conditionnement et de la vitesse de convergence sur des simulations

Afin de vérifier en pratique les propriétés énoncées ci-dessus et l'intérêt d'utiliser des configurations orthogonales normalisées des DMD, nous avons effectué des simulations. Pour cela, nous avons travaillé sur des images hyperspectrales de dimension réduites (spatialement 100×100 pixels et spectralement de l'ordre de 30 longueurs d'ondes suivant les images) afin de pouvoir calculer le conditionnement de la matrice $\mathbf{L}$. Sur un grand nombre de telles images, nous avons calculé le paramètre $\mu_{\text{RA}} = \mu_x = \mu_y$ (en considérant $\mu_\lambda = \mu_{\text{RA}}/10$) donnant l'erreur quadratique moyenne de reconstruction la plus faible (un unique paramètre optimal en moyenne sur l'ensemble des données). Les configurations du DMD étaient générées aléatoirement pour différents taux d'ouverture des miroirs τ , sauf pour les configurations orthogonales normalisées pour lesquelles $\tau = \frac{1}{N}$.

Deux situations sont testées pour la matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ correspondant au modèle de bruit : soit $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\mathbf{m}\}$ ce qui correspond à approximer le bruit de Poisson par un bruit Gaussien dont on estime la variance par les données $\mathbf{m}$, soit $\mathbf{\Gamma} \propto \mathbf{I}$ ce qui correspond à un bruit blanc (indépendant et identiquement distribué). Dans le cas des configurations orthogonales, on prend en compte un bruit blanc.

Sur la figure 4.3, colonne de gauche, on affiche le conditionnement de la matrice $\mathbf{L}$ (en échelle logarithmique, moyenne +/- écart-type sur les différentes images) pour différents nombres d'acquisition $N \in \{3, 4, 5\}$. Sur la colonne de droite, on affiche le nombre d'itérations (en échelle logarithmique, moyenne +/- écart-type sur les différentes images) nécessaires à la convergence de l'algorithme CGNR. On considère ici que l'algorithme a convergé lorsque la solution $\mathbf{o}$, à deux itérations successives, vérifie $\sqrt{\|\mathbf{o}^{(i)} - \mathbf{o}^{(i-1)}\|^2 / \|\mathbf{o}^{(i-1)}\|^2} < \epsilon = 10^{-3}$ (on s'est assuré, en pratique que l'erreur relative de reconstruction était également inférieure à ϵ .)

On constate tout d'abord sur ces figures une forte similarité de la variation du conditionnement de $\mathbf{L}$ et de la convergence de l'algorithme. On s'attendait bien sûr à cela du point de vue théorique (au sens de la convergence vers la solution exacte) mais cela est vérifié en pratique pour la convergence définie précédemment (différence de la solution entre deux itérations successives inférieure à ϵ). Ensuite, on constate une faible variation du conditionnement et de la convergence en fonction du taux d'ouverture des miroirs τ tant que celui-ci reste entre 0,2 et 0,8, quel que soit le modèle pris en compte pour le bruit. Enfin, on constate que le conditionnement et la vitesse de convergence sont toujours meilleurs (moyennes et variances plus faibles) dans le cas d'un modèle de bruit blanc (courbes en bleu) que dans l'approximation d'un bruit de Poisson (courbes en rouge). Pour finir, ces courbes confirment nos résultats théoriques concernant le meilleur conditionnement des configurations orthogonales normalisées, quel que soit le nombre d'acquisition N . Rappelons que dans ce cas, le taux d'ouverture des miroirs est $\tau = \frac{1}{N}$

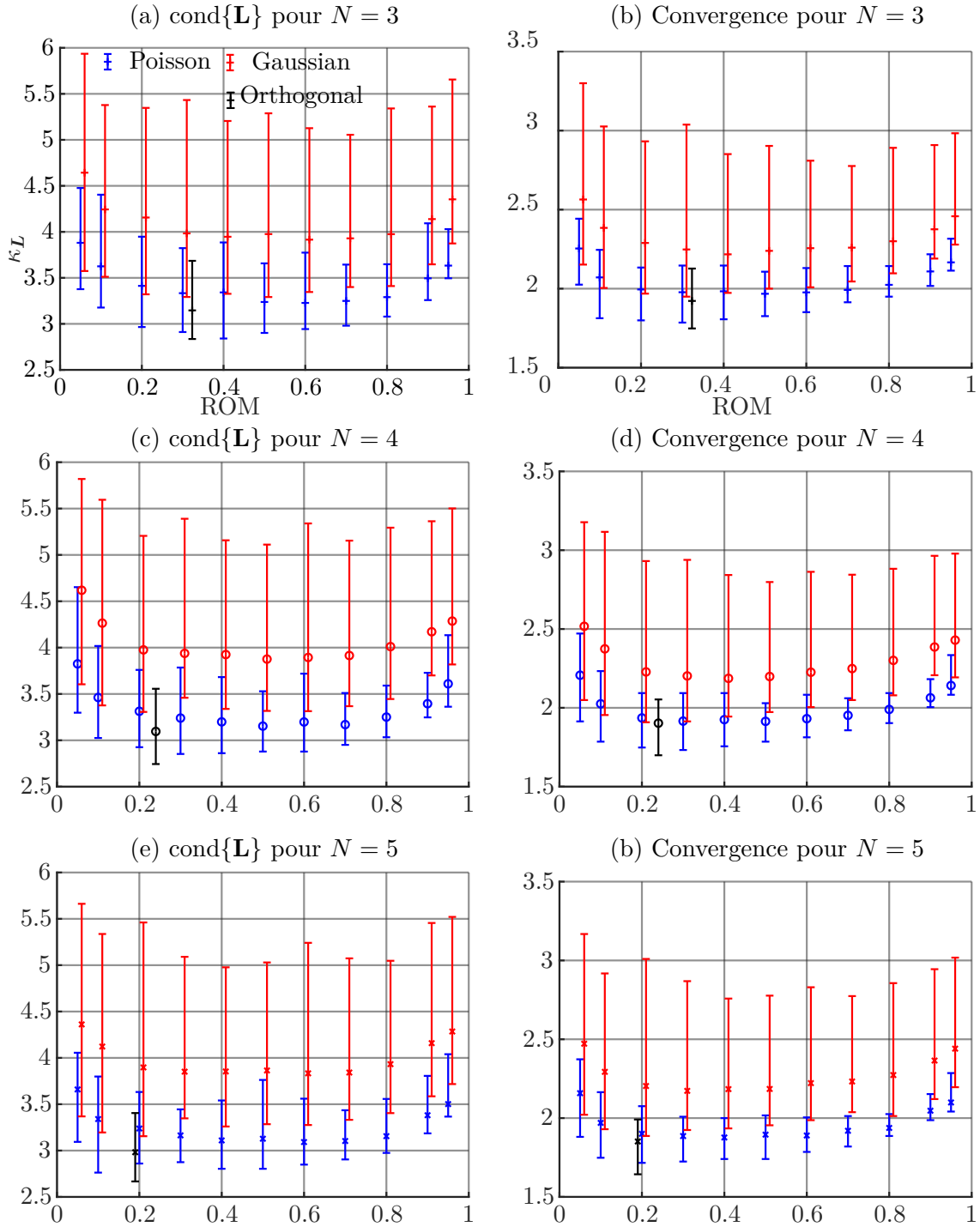


FIGURE 4.3 – Étude du conditionnement de la matrice $\mathbf{L}$ (à gauche, en échelle logarithmique) et du nombre d'itérations pour converger de l'algorithme CGNR (à droite, en échelle logarithmique) en fonction du taux d'ouverture des miroirs τ pour un nombre d'acquisitions $N = 3$ (en haut), $N = 4$ (au milieu) et $N = 5$ (en bas) pour des configurations aléatoires du DMD. On considère un bruit de variance m correspondant aux données pour approcher un bruit de Poisson (rouge), un bruit blanc (bleu) et un bruit blanc et des configurations orthogonales normalisées du DMD (noir).

Chapitre 5

Article sur la validation expérimentale de la méthode RA

Sommaire

1. Introduction	96
2. Ideal Model of Dual Disperser System	97
3. Reconstruction of the Hyperspectral Datacube via Edge Preserving Regularization	98
A. Properties of the Filtering Cube	99
4. Experimental System	100
A. Optical Setup	100
B. DMD Mask	103
C. Ground Truth Comparison	104
5. Testing Reconstruction Performance with Small Homogenous Scene	105
A. Scene and Variables	105
B. Results - SAM	105
C. Results - Number of Iterations	106
6. Reconstruction of a Large Multispectrum Scene	106
A. Scene A - Stacked Filters	106
B. Scene B - Checkerboard	110
7. Conclusion	115
References	115

Nous reprenons ici l'article [HAL⁺20] :

E. Hemsley, I. Ardi, S. Lacroix, H. Carfantan and A. Monmayrant, Optimized coded aperture for frugal hyperspectral image recovery using a dual-disperser system, Journal of the Optical Society of America A, soumis en juillet 2020.

Optimized coded aperture for frugal hyperspectral image recovery using a dual-disperser system

Elizabeth Hemsley^{1,*}, Ibrahim Ardi^{1,2}, Simon Lacroix¹, Hervé Carfantan², and Antoine Monmayrant¹

¹LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, 7 Avenue du Colonel Roche, 31400 Toulouse, France

²IRAP, Université de Toulouse, CNRS, CNES, 14 Avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France

*Corresponding author: ehemsley@laas.fr

Compiled July 27, 2020

We present a novel acquisition scheme based on a dual disperser architecture, which can reconstruct a hyperspectral data cube using many times fewer acquisitions than spectral bands. The reconstruction algorithm follows a quadratic regularization approach, based on the assumption that adjacent pixels in the scene share similar spectra, and if they do not, this corresponds to an edge which is detectable on the panchromatic image. A digital micro-mirror device (DMD) applies reconfigurable spectral-spatial filtering to the scene for each acquisition, and the filtering code is optimized considering the physical properties of the system. The algorithm is tested on simple multi-spectral scenes with 110 wavelength bands, and is able to accurately reconstruct the hyperspectral datacube using only 10 acquisitions.

1. INTRODUCTION

Hyperspectral imagers measure high resolution spectra for every pixel of a 2-D scene, generating a 3-D dataset with two spatial and one spectral dimensions. These hyperspectral cubes are useful for many applications, such as satellite imaging, remote sensing, medicine and food industry. Despite the large variety of scenes, hyperspectral cubes are often highly correlated and sparse in structure [1, 2], and this sparsity can be exploited in post processing to compress or de-noise the datacube [3–7].

With no prior information on the scene, hyperspectral imagers must measure the 3D data cube using multiple acquisitions of 2D sensor, which limits the frame rate of the system and generates a large volume of data, potentially problematic for limited bandwidth applications. However, by making certain assumptions on the sparse properties of the hyperspectral scene, one can reduce the number of acquisitions, obtaining the minimum volume of data necessary to reconstruct the datacube. Such assumptions on the spectral-spatial correlations of the hyperspectral cube have recently fostered the development of a variety of hyperspectral imaging systems that require few acquisitions [8–17]. Other schemes have generated similar benefits by assuming that the spectra must originate from a pre-defined library of classes [18–21].

The approach presented here, implemented for a dual disperser hyperspectral imager [14, 22, 23], also assumes a high degree of spectral-spatial correlations, *i.e.* that adjacent pixels are likely to share the same spectra. Moreover, as the dual disperser system provides easy access to the panchromatic image, it is possible to exploit an additional assumption: we consider that two regions of differing spectra also have differing panchromatic intensities, and hence that the boundary between the regions is visible as an edge on the panchromatic image. In short, we assume that, 1) pixels in a given spatial region have similar spectra, and 2) that the edges between these regions are visible on the panchromatic image. These are reasonable assumptions as the presence of spatially adjacent metamers is relatively rare in nature. The datacube itself is reconstructed by an algorithm which uses quadratic regularization to smooth spectral-spatial features, which obliges nearby pixels to have similar spectra [24]. To avoid smoothing of sharp spatial features and prevent mixing of the spectra between distinct regions, the quadratic regularization is modified to preserve the edges detected in the panchromatic image. In essence, we perform edge-preserving quadratic regularization.

In addition to assumptions on the scene, we also exploit the optical properties of the system to move beyond purely random coded apertures, and design an optimized mask which considers measurement correlations between horizontally adjacent pixels.

In section 2 we describe the dual disperser system, which uses a digital micro-mirror device (DMD) to apply a reconfigurable coded spectral-spatial mask to the scene, and in section 3 we outline the regularization algorithm, which reconstructs the hyperspectral cube from a small number of acquisitions. Section 4 presents the experimental system used to implement the scheme, and section 5 studies how the acquisition conditions influence reconstruction accuracy, using a small spectrally uniform scene. Section 6 uses optimized experimental settings to accurately reconstruct two multispectral scenes with 110 spectral bands, using only 10 acquisitions. Finally section 7 concludes the paper and suggests further improvements that could be added to the system.

2. IDEAL MODEL OF DUAL DISPERSER SYSTEM

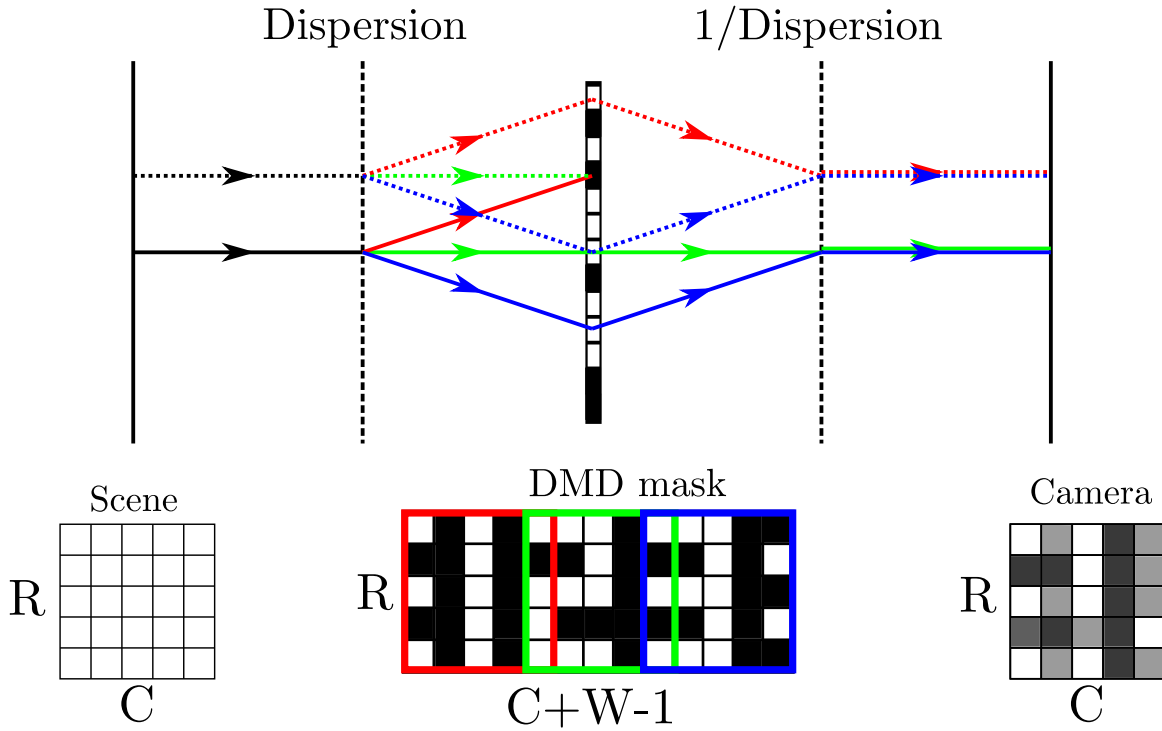


Fig. 1. Principle of dual-disperser hyperspectral imager.

The basic principle of the dual disperser hyperspectral imaging system is represented in Figure 1. A scene is spectrally dispersed, then imaged on a binary coded spatial filter, in this case a DMD, where each mirror can be individually turned on/off. The DMD is used to spatially filter the spectrally dispersed scene, so each wavelength band is filtered by a laterally shifted copy of the DMD mask. All wavelengths are then re-combined using an inverse dispersive operation, so that after subsequent re-imaging on the camera there is no spectral-spatial coupling in the measured image.

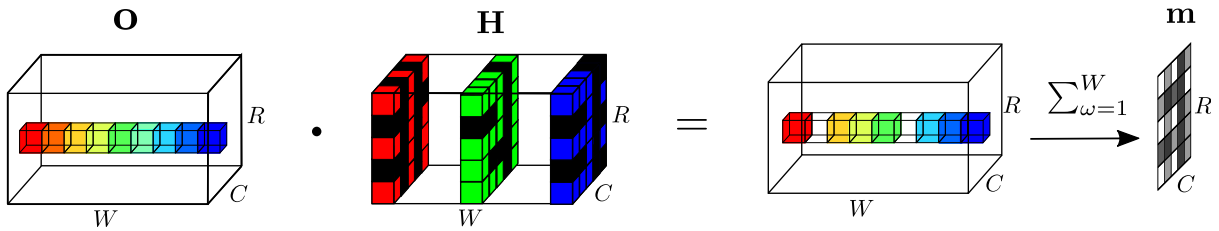


Fig. 2. Spectral-spatial filtering of the hyperspectral datacube by the DMD, and subsequent measurement at the camera, using the DMD mask shown in Figure 1

Figure 2 illustrates how the hyperspectral data cube $\mathbf{o}$ is filtered by the DMD and measured at the camera. The

hyperspectral data cube $\mathbf{o}$ has spatial dimensions R rows by C columns, with W wavelength bands. The DMD spectral-spatial filtering is implemented by element-wise multiplication of $\mathbf{o}$ with the filtering cube $\mathbf{H}$, which also has dimensions $R \times C \times W$. The wavelength bands are summed, and the measured camera image $\mathbf{m}$ has R rows by C columns.

By vectorization of the matrices, the measurement at the camera can be given by

$$\mathbf{m} = \mathbf{H}\mathbf{o} \quad (1)$$

Where $\mathbf{m}$ is now a vector of length RC containing the measurements of every pixel (r, c) on the camera, $\mathbf{o}$ is the vectorized hyperspectral datacube, of length RCW . The matrix $\mathbf{H}$ describes the spectral-spatial filter applied by the DMD mask, and is a 2D matrix of size $RC \times RCW$.

For N acquisitions, each with a different DMD mask, we can concatenate equation (1), giving

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}^N \end{bmatrix} = \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}^N \end{bmatrix} \mathbf{o} = \mathbf{H}\mathbf{o} \quad (2)$$

In which case, $\mathbf{m}$ is now a vector of length RCN and $\mathbf{H}$ a matrix of size $RCN \times RCW$.

Whilst these equations describe an ideal model of the dual disperser scheme, the following reconstruction algorithm is also applicable to the experimental system, accounting for certain complexities discussed further in section 4.

3. RECONSTRUCTION OF THE HYPERSPECTRAL DATACUBE VIA EDGE PRESERVING REGULARIZATION

The reconstruction algorithm seeks to retrieve the object $\mathbf{o}$ from the series of measurements $\mathbf{m}$. This is a linear inverse problem, and is under-determined when the number of measurements N is less than the number of wavelength bands W , independent of the DMD mask and its corresponding filtering cube $\mathbf{H}$. Therefore, to retrieve $\mathbf{o}$ when $N \ll W$, we must make some assumptions on the hyperspectral data.

Extensive analyses of real world hyperspectral cubes has shown that regions of homogenous panchromatic intensity are likely to be spectrally similar [1, 2], and thus we infer that the edges between spectrally dissimilar regions are typically visible on the panchromatic image [25]. We can utilize this knowledge to assist in our retrieval of $\mathbf{o}$ by assuming that neighboring pixels have similar spectra, unless they are separated by an edge, which we assume is visible on the panchromatic image. In other words, we assume the probability of two or more metamers being spatially adjacent is negligible. The panchromatic image is easily obtainable using the dual-disperser architecture, simply by turning all DMD mirrors to the ‘on’ position - the mirror position when light is reflected to the sensor..

By assuming a high degree of spectral-spatial correlation, it may be possible to reconstruct $\mathbf{o}$ even when $N \ll W$, using a regularization process, defined in our case using a penalized cost function of the form [26]

$$\hat{\mathbf{o}} = \underset{\mathbf{o}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{m} - \mathbf{H}\mathbf{o}\|_{\mathbf{\Gamma}^{-1}}^2 + \Omega(\mathbf{o}) \quad (3)$$

This function aims to find a solution $\hat{\mathbf{o}}$ which is compatible with the measured data $\mathbf{m}$. The noise on the measurements $\mathbf{m}$ is mitigated using a Gaussian noise model with covariance matrix $\mathbf{\Gamma}$, given by $\mathbf{\Gamma} = \operatorname{diag}\{\mathbf{m}\}$, valid for sufficiently high signal.

The term $\Omega(\mathbf{o})$ is key to the regularization process, and in this case enforces a user-defined level of similarity between adjacent pixels, given by [27]

$$\Omega(\mathbf{o}) = \mu_x \|\mathbf{D}_x \mathbf{o}\|^2 + \mu_y \|\mathbf{D}_y \mathbf{o}\|^2 + \mu_\lambda \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{o}\|^2 \quad (4)$$

The matrices $\mathbf{D}$ represent the finite differences along the two spatial and one spectral dimensions. Matrix $\mathbf{D}_x$ has dimension RCW by $R(C-1)W$, $\mathbf{D}_y$ has dimension RCW by $(R-1)CW$ and $\mathbf{D}_\lambda$ has dimension RCW by $RC(W-1)$. The regularization parameters $\mu_{(x,y)}$ control the smoothing of the data spatially between adjacent pixels. The parameter μ_λ controls the smoothing in the spectral dimension, and must be small to preserve sharp spectral features, but non-zero to reduce noise in the reconstructed spectrum.

To prevent smoothing across an edge, the components of the matrices $\mathbf{D}_x$ and $\mathbf{D}_y$ corresponding to an edge pixel are set to zero [24]. The edges are detected on the panchromatic image using a state-of-the-art edge finding procedure.

These functions allow the analytical expression

$$\hat{\mathbf{o}} = (\mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H} + \mu_x \mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x + \mu_y \mathbf{D}_y^t \mathbf{D}_y + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{m} \quad (5)$$

For a typical hyperspectral datacube, the matrices are too large for equation Eq. (5) to be solved directly. However, as the matrices $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$, $\mathbf{D}_\lambda$ and $\mathbf{\Gamma}$ are all highly sparse, the solution $\hat{\mathbf{o}}$ may be found iteratively using a Conjugate Gradient method (CGNR) algorithm [28] with a low computation cost.

The ideal regularization parameters $\mu_{(x,y,\lambda)}$, depend on the spatial resolution, number of bands and the data itself. Fixed parameters can be chosen to give a correct reconstruction for a large variety of hyperspectral scenes. In our case we empirically determined the optimum values for our system to be $\mu_x = \mu_y = 10^{-2}$, and $\mu_\lambda = 10^{-5}$.

A. Properties of the Filtering Cube

Despite the regularization approach, it is also important to consider the various properties of the filtering cube $\mathbf{H}$, which influence the reconstruction process. Clearly not all mask configurations can be used to reconstruct $\hat{\mathbf{o}}$ accurately and efficiently. There are a few properties of the filtering cube matrix which should be considered to maximize the likelihood of a successful reconstruction, for any given scene or spectra.

A.1. Randomness

Firstly, the filtering cubes must be sufficiently *random*. When $N \ll W$, each measurement needs to provide as much new information as possible, to allow efficient reconstruction. Consequently, each camera acquisition should avoid excessively redundant measurements by measuring a different combination of wavelength bands at every pixel. Utilizing a random DMD mask ensures that the spectral bands measured by a given pixel are uncorrelated to the bands measured by any other pixel, as much as is possible within the confines of the system. This will increase the chance that there is sufficient information to reconstruct $\hat{\mathbf{o}}$ accurately. Moreover, using random patterns can avoid sampling artifacts such as aliasing, and therefore we often see randomness commonly used in image processing as well as occurring in nature (for example the arrangement of cone cells in eyes [29]).

A.2. Orthogonality

In addition to utilizing a random pattern on the DMD, we can further maximize the information provided by each acquisition by using *orthogonal* masks on the DMD. A set of N orthogonal DMD masks are defined such that no mirror is opened more or less than once over the entire set of N acquisitions.

Figure 3 illustrates the difference between non-orthogonal and orthogonal random mask types, by observing the spectral filter applied to a single pixel over $N = 3$ acquisitions. The DMD masks implemented for Figure 3a are non-orthogonal, employing an independent random pattern of on/off mirrors for each acquisition. In this case some bands (2, 7 and 10) are measured more than once, whilst others (6 and 12) are not measured at all, and therefore some information is lost. Conversely, the spectral filters employed in Figure 3b are orthogonal, and therefore each wavelength band is measured once and only once. The property of orthogonality minimizes redundant data and loss of information; by using orthogonal DMD masks, no voxel from the hyperspectral datacube is measured more than once, and all voxels are measured at least once. The convergence of the CGNR code is related to the condition number of the problem, and as using orthogonal masks improves the conditioning [25], the reconstruction will take less time, and the results will be more accurate.

An additional advantage of orthogonal masks is that, assuming a constant exposure time, summing the camera acquisitions gives the panchromatic image, requiring one less acquisition in total.

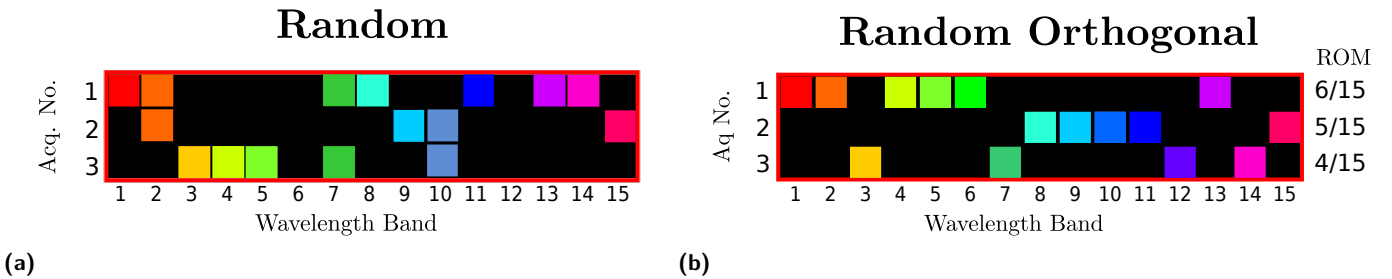


Fig. 3. Example of spectral filter where $N = 3$, and $W = 15$. DMD mask type is a) random b) random orthogonal.

A.3. Length- N Random Pattern

For a set of N acquisitions utilizing orthogonal masks, the amount of light reaching the camera is directly influenced by the ratio of open mirrors (ROM) of each acquisition. To avoid repeated optimization of camera exposure time, it is intuitive to use the same ROM for every acquisition, which for orthogonal masks, is equal to $1/N$.

However, consider also that the light reaching each camera pixel is spectrally filtered by a sub-section of the DMD mask, only W mirrors long, corresponding to the length of the dispersed spectrum on the DMD. Whilst the entire DMD

may have $\text{ROM} = 1/N$, the local ROM seen by a given pixel can still vary significantly from pixel to pixel, due to spatial non-uniformity in the DMD mask. The local variation in the ROM may cause under- or over-exposure, depending on the pixel location and acquisition number n . A simple example is shown in Figure 4a, which illustrates the spectral filter for a single pixel over $N = 3$ acquisitions, with $W = 15$ wavelength bands, and a random orthogonal mask applied to the entire DMD. Whilst the average ROM is $1/N = 1/3$, the first acquisition has a higher local ROM, and may be over-exposed, whilst the subsequent two acquisitions have locally a lower ROM, and could have low signal. Thus in both cases, loss of information can occur, and the reconstruction process will be degraded.

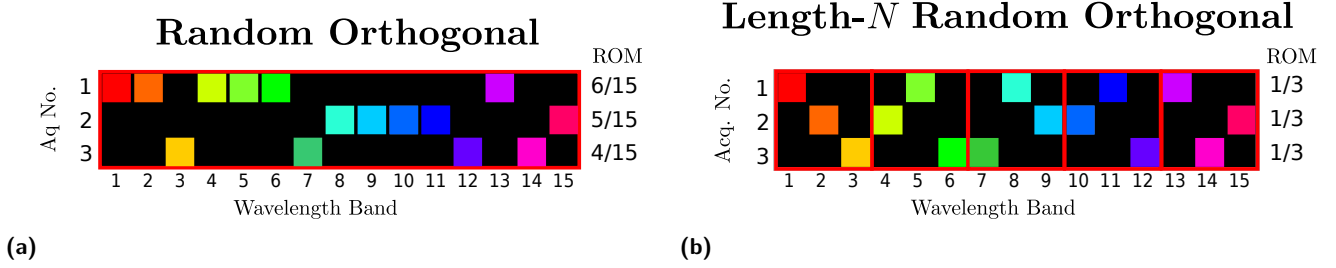


Fig. 4. Example of spectral filter and measured ROM, with $N = 3$ acquisitions and $W = 15$ wavelength bands. DMD mask type is a) random orthogonal b) length- N random orthogonal.

A preferable DMD mask maintains the ROM measured over small length scales. One method to build such a mask is to apply a random pattern with $\text{ROM} = 1/N$ to a small subsection of the DMD, and build the entire DMD mask section by section. The DMD mask is divided horizontally into sections of length N mirrors, and for each acquisition and for each section, only one of these mirrors is opened, which gives a ROM of exactly $1/N$ for that subsection. We term this mask a length- N random mask. Since $W \gg N$, the ROM measured over W mirrors is maintained close to $1/N$, and the mask is still sufficiently random to give a well conditioned problem. Figure 4b illustrates how an orthogonal length- N random mask spectrally filters a single pixel, and has the same ROM for all acquisitions. The length- N random mask favours high spatial frequency variation in the DMD mask, and reduces low spatial frequency components which are responsible for long sections of ‘on’ mirrors.

Modeling a system with $W=110$, $N=10$ and a scene with 400 by 400 pixels, Figure 5 gives the probability of measuring a local ROM, comparing the random and length- N random masks. The variation in the measured ROM for the random mask is large, whilst the length- N random has a highly spatially uniform ROM and will avoid therefore avoid loss of data due to under- or over-exposure.

The second benefit of the length- N random mask is that there are no long horizontal sections of ‘on’ mirrors, as the division of the DMD into length- N subsections ensures we can never have more than 2 adjacent mirrors turned to the ‘on’ position. This is important because the key component of the reconstruction algorithm is the process of regularization in the spatial dimension. This regularization compares information from neighboring pixels, and assumes that they have similar spectra. Due to the dispersion properties of the system, the spectral filters for horizontally adjacent pixels are very close, but laterally shifted by one band. Figure 6 shows a subsection of the spectral filters given in Figure 4, measured for horizontally adjacent pixels A, B, C . With the random orthogonal mask, these three pixels measure exactly the same information for wavelength bands 9 and 10, due to the long row of ‘on’ mirrors in the filter. Using the set of measurements from these pixels, it is impossible to differentiate between light coming from wavelength band 9 or 10, which could lead to a poor reconstruction. Conversely, for the length- N random mask, each pixel provides new information, in the form of a different combination of the wavelength bands, and a successful reconstruction is more likely. The transition between ‘on’ and ‘off’ mirrors allows horizontally adjacent pixels to measure different information, and is therefore vital to the regularization process.

4. EXPERIMENTAL SYSTEM

A. Optical Setup

The experimental layout of the dual disperser hyperspectral imager used to implement the regularization algorithm is shown in Figure 7. Further details on the design and calibration of the system can be found in [22]. In short, this architecture consists of two back-to-back 4-f imaging systems, with a spectrally dispersive element placed in the Fourier plane of each 4-f system. The layout of our system utilizes a double pass system, with a DMD placed in the intermediate image plane to reflect light back along the optical path. This necessitates the use of a beam-splitter to direct the light to the camera, resulting in 75% loss of the light. Whilst not optimal in terms of optical efficiency, the simplicity of the system is ideal for development and testing of novel acquisition schemes.

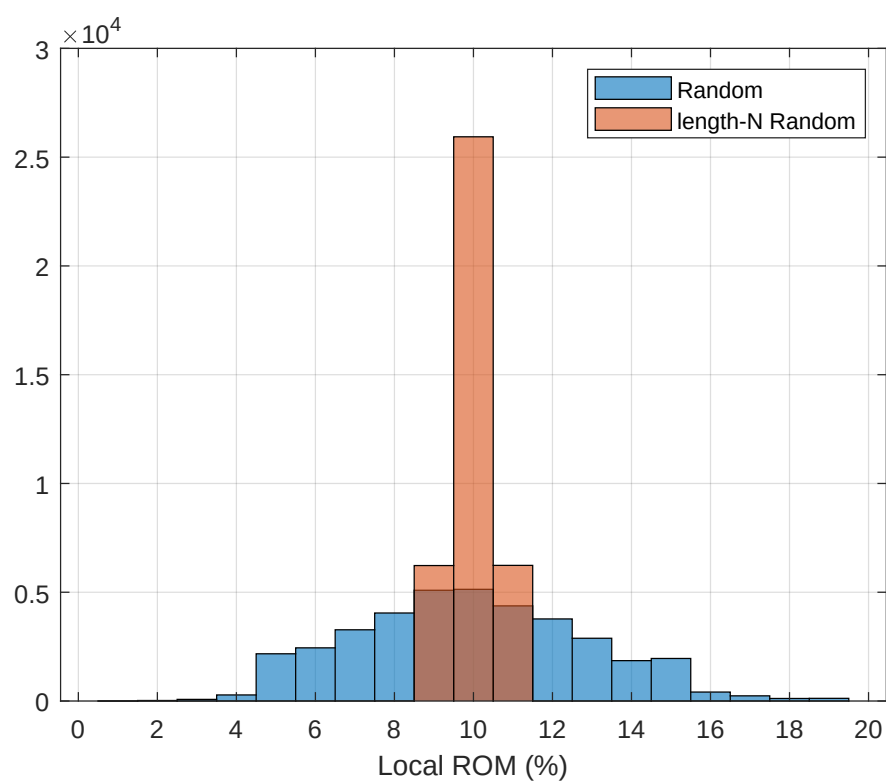


Fig. 5. Probability of measuring a local ROM for random mask (blue) and length- N random mask (red). Calculated with $N = 10$, $W = 110$ for a scene of 400×400 pixels.

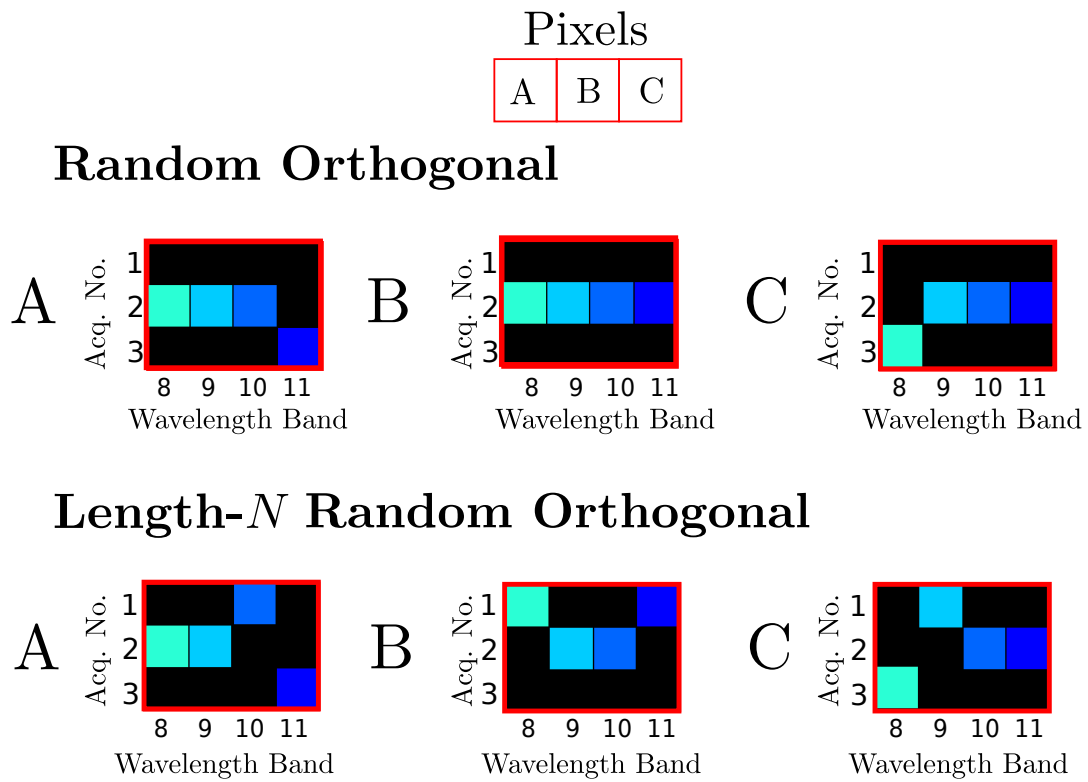


Fig. 6. Subsection of the spectral filters for wavelength bands 8-11, over three acquisitions, for horizontally adjacent pixels A , B and C . The full spectral filter for pixel B is given in Figure 4a for the random orthogonal pattern, and Figure 4b for the length- N random orthogonal pattern. Pixels A and C measure the same spectral filter as B , but shifted by one band to the left and right respectively.

The DMD in our system has 1920 by 1080 square mirrors of length $10.8\ \mu\text{m}$. The mirror hinge is orientated along the diagonal, and so the DMD is rotated by 45° . The mirrors thus have a diamond shape when viewed in the coordinate frame of the camera, and the light is deflected in the horizontal plane. The camera has 2048 by 2048 pixels of pitch $5.5\ \mu\text{m}$, and bit depth of 12 bits. Due to the orientation of the DMD we only use the central 1200 by 1200 pixels of the scene.

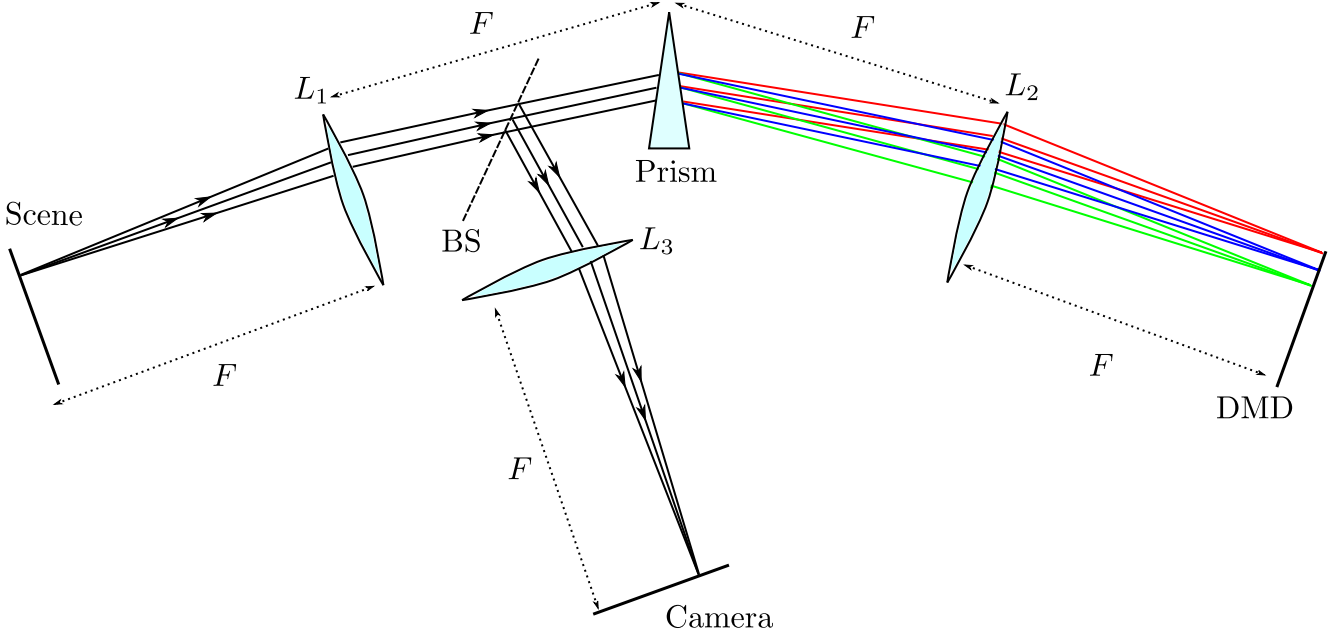


Fig. 7. Schematic of system layout. Lens focal length $F = 200\text{ mm}$, BS = beamsplitter. Prism is BK7 with apex angle 30° .

The spectral bands are defined by the DMD; each spectral band corresponds to the spectral width which covers a column of mirrors on the DMD. According to the system properties, there are a maximum of 220 bands in the range 425 to 675 nm. Due to the resolution of the system it is preferable to bin the spectral bands in groups of two - giving a total of 110 bands, and a variable spectral resolution of 1-5 nm. The camera pixels are similarly binned in groups of 3 by 3. An optical filter with bandpass 450-650 nm is placed at the system entrance, to eliminate background light, and provide some zero padding at either end of the spectrum.

B. DMD Mask

As discussed in the previous sections, a fast and accurate reconstruction requires adjacent pixels to simultaneously measure as different a combination of wavelength bands as possible. For an ideal system, and ideal mask would therefore be a fully 2-D random pattern, constructed with length- N randomness in the both directions.

However, in practice the system has several issues which make using such a 2-D mask problematic. The 45° orientation of the DMD causes each mirror to be viewed as a diamond shape when compared to the camera pixel, and combined with the pixel size difference and the PSF of the system, this means that opening a single mirror (with a monochromatic source) on the DMD does not illuminate a single pixel on the camera - but several with varying intensity, blurring the spectral information in two dimensions. Binning the camera pixels can partially resolve this problem, but as there is a non-integer size mismatch between the DMD mirror and the camera pixel, as well as the difference in orientation [22], pixel binning is not sufficient to allow a true one-to-one relationship between DMD mirror and camera pixel. Therefore, if we use a fully 2D random mask for the system, shown in Figure 8a, it is not possible to accurately reconstruct the hyperspectral datacube.

Whilst the system is not perfectly row-independent at the camera, it is still preferable for each camera row to measure a different combination of wavelength bands, requiring some 2-D variation in the mask. By experimenting with different mask types, it was found that utilizing a 1D barcode-like pattern of diagonal lines, shown in Figure 8b, gives a good compromise between measurement variation and blurring in the vertical direction. This mask ensures that vertically adjacent pixels measure a different combination of wavelength bands, but as there is only a small difference in the spectral filter between rows the mixing of information in the vertical direction is negligible. An example of a 1-D diagonal barcode mask is shown in Figure 8b, for $N = 10$, rotated to the plane of the camera.

To build the filtering cube $\mathbf{H}$, first we compensate for the 45° rotation of the DMD by adapting the binary mask to the

coordinate frame of the camera and resampling the mask on a 2D grid with periodicity equal to $2/\sqrt{2}$ times the DMD mirror width. Then, using the calibration functions, the pre-defined wavelength bands for each pixel are mapped onto the converted mask, and the binary spectral filter is approximated from the overlap between the bands and the mask. This method accounts for optical distortion, and generates a binary filtering cube.

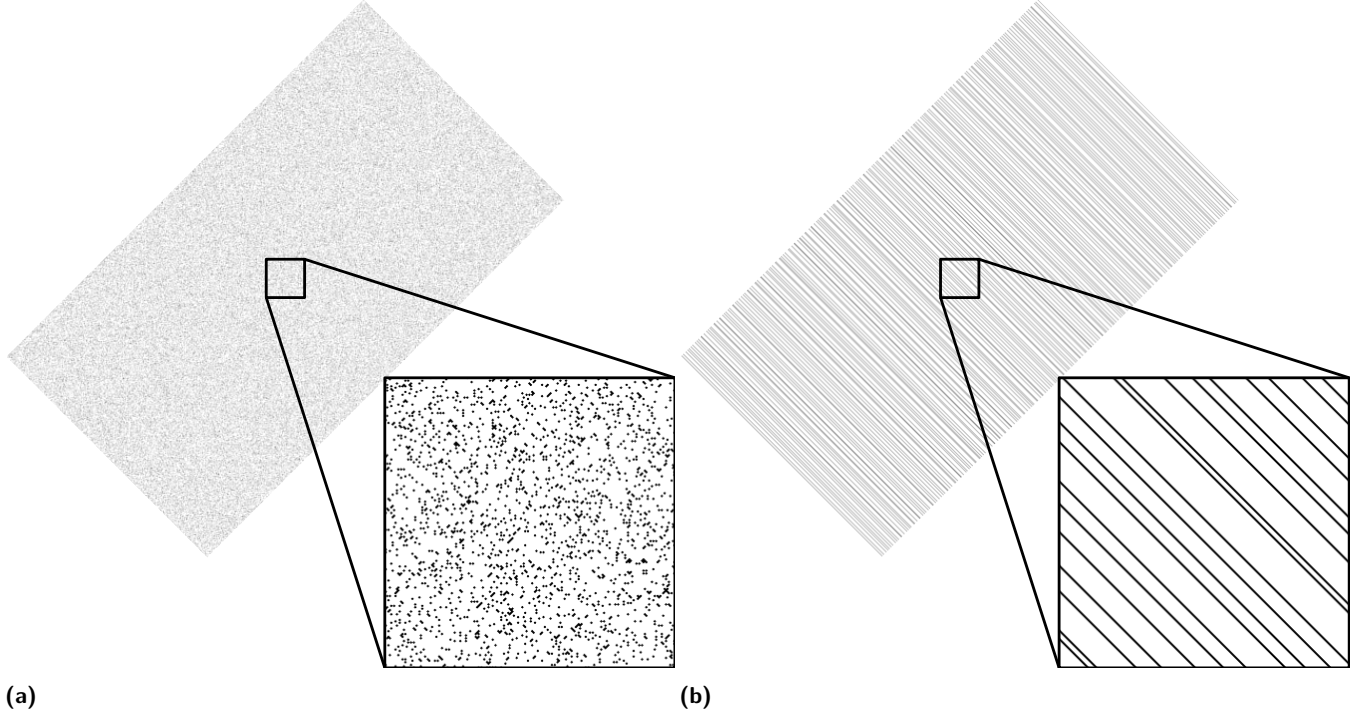


Fig. 8. Typical DMD masks for $N=10$: a) a fully 2D random pattern, b) a 1D diagonal length- N random pattern. DMD mask is rotated to the orientation of the camera.

C. Ground Truth Comparison

To assess the performance of the reconstruction algorithm, comparison of the reconstructed cube to the ground truth data is necessary. We define the ground truth of the scene using the hyperspectral datacube obtained via a slit-scanning acquisition scheme, which has been characterized in [22].

In our case we scan using a diagonal slit one mirror wide, matching the 1D barcode-like mask discussed in the previous section.

As less light falls on the sensor for the slit scanning acquisition scheme than the regularization approach, the signal to noise ratio is worse. To mitigate this effect, we take two data sets for the ground truth, at two different exposure times, to increase the dynamic range of the system. The first data-set is taken with a higher exposure time (200 ms) for which parts of the acquisition may be saturated at the camera. A second data set is taken at a lower exposure time (100 ms), and is used to find the values of the saturated pixels. Finally the data is rescaled and the background level is subtracted for comparison to the results of the reconstruction algorithm.

The success of the algorithm is quantified using the spectral angle mapper (SAM), comparing the ground truth data $\mathbf{o}$, measured via slit scanning, to the reconstructed cube $\hat{\mathbf{o}}$. This metric measures the similarity of two spectra, ignoring difference in amplitude. As the most common applications of hyperspectral cubes overwhelmingly require classification, the SAM is the best metric, compared to a global reconstruction error on the cube, such as the root mean squared error (RMSE) or a spatial reconstruction similarity metric such as the structural similarity (SSIM) index.

For a single pixel at the position (r, c) on the camera

$$\text{SAM}(r, c) = \left| \arccos \left(\frac{\mathbf{o}(r, c)^T \cdot \hat{\mathbf{o}}(r, c)}{\|\mathbf{o}(r, c)\| \cdot \|\hat{\mathbf{o}}(r, c)\|} \right) \right| \quad (6)$$

We have $0 \leq \text{SAM} \leq \frac{\pi}{2}$, and when the spectra are identical $\text{SAM}=0$.

5. TESTING RECONSTRUCTION PERFORMANCE WITH SMALL HOMOGENOUS SCENE

A. Scene and Variables

To determine the optimum number of acquisitions N for the system, and examine how the camera signal influences the reconstruction speed and accuracy, we study the response of the algorithm when reconstructing a small, spectrally uniform scene.

The test scene has a roughly homogenous intensity and spectrum, resulting from uniform illumination with a white LED. From the scene of 400 by 400 pixels, sub-regions of 40 by 40 pixels across the image are selected, to efficiently test multiple mask configurations. Each sub-region is small enough to allow fast reconstruction, but large enough so that we have sufficient information to obtain an accurate reconstruction. The simplicity of the scene and spectrum should allow a good reconstruction under suitable measurement conditions.

The camera exposure time is kept constant at 100 ms, but by varying the grayscale level of the ‘on’ mirrors of the DMD between 1 and 255, we can observe how the measured pixel value influences the results, independent of any non-linearity present in the camera. The number of acquisitions N is also varied between 5 and 40, (with $ROM=1/N$).

For each DMD gray level and N , we take four data sets with the four different mask types; 1) a 1D completely random pattern (RAND), 2) a 1D orthogonal random pattern (O-RAND), 3) a 1D length- N random pattern (LN-RAND), and 4) a 1D length- N orthogonal random pattern (LNO-RAND). This allows us to verify how the properties of the DMD mask influence the reconstruction result, according to the principles exposed in section 3.

The CGNR algorithm is run for a total of 1000 iterations, which ensures convergence for all cases.

B. Results - SAM

The success of the reconstruction is strongly dependent on the mean camera value μ_{acq} of the scene during the data acquisition, as shown in Figure 9a, which compares the SAM for the four mask types when $N = 10$. If the signal is too low, or if there are large number of saturated pixels, the reconstruction is poor. The dashed lines on the plot show when the percentage of saturated pixels is less than 10%, which occurs at a lower μ_{acq} for the RAND and O-RAND masks, due to the larger variation in the local ROM. For both mask types, the optimum performance occurs between the limits $\mu_{acq} > 1500$, and $\mu_{sat\%} < 10\%$. However, the length- N random masks generate more accurate reconstructions, have smaller variation between results, and are more tolerant to a variation in the signal at the camera, indicated by the broad minimum with μ_{acq} . Essentially, the dynamic range of the system is improved by using length- N random masks.

Additionally, we see little difference between the orthogonal and non-orthogonal mask types; the homogeneity of the scene ensures that the regularization approach can accurately smooth data between nearby pixels, provided the CGNR algorithm is run for a sufficient number of iterations.

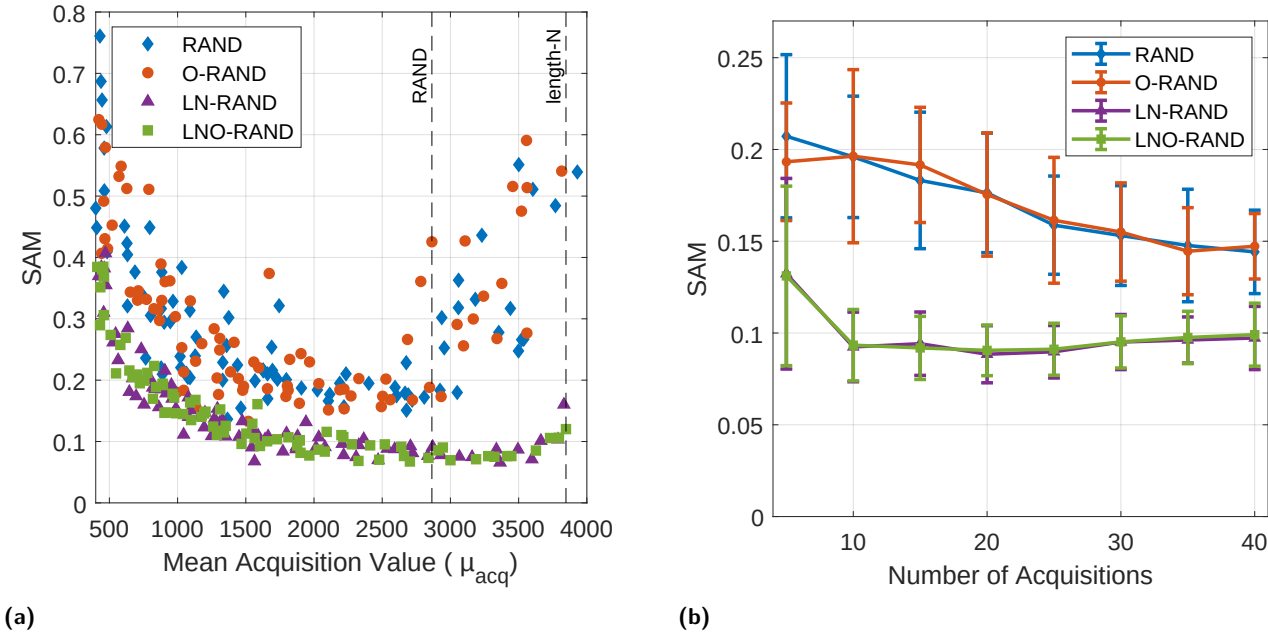


Fig. 9. Comparison of the four mask types; a) SAM versus mean acquisition value when $N = 10$. b) SAM versus N within limits $\mu_{acq} > 1500$ and $\mu_{sat\%} < 10\%$, showing variation in results.

Figure 9b shows how the number of acquisitions N influences the SAM for the different mask types. The data for this plot has been selected when the signal at the camera falls within the limits described by the previous plot ($\mu_{acq} > 1500$ and $\mu_{sat\%} < 10\%$). Compared to the RAND type masks, the length- N masks generate more accurate results (lower SAM), with optimum $N > 10$. This indicates that as long as $N > 10$, sufficient information is provided by the acquisition data to accurately reconstruct the hyperspectral datacube.

Conversely, for the RAND type masks, the variation in the local ROM leads to loss of data, and so for a given N the reconstruction of the hyperspectral datacube is less accurate. In this case, increasing N continues to improve the accuracy of the result, by providing more information to the solver, which outweighs the detrimental influence of noise. However, even with a high number of acquisitions the reconstruction is still less accurate than the length- N case, with a larger variation in the results.

C. Results - Number of Iterations

Another important metric is how many iterations the CGNR algorithm requires to reach convergence. The evolution of the SAM with CGNR iteration number is shown in Figure 10a. The orthogonal masks start with a lower SAM, but while the random type masks quickly converge to an inaccurate solution, the length- N random masks converge slowly but to a more accurate solution. Clearly, a fast reconstruction does not necessarily mean an accurate reconstruction, as with insufficient data the algorithm can converge quickly to a wrong solution.

Without access to the ground truth, the stopping point for the algorithm can be determined by measuring the evolution of the data using the first residual, given by the parameter η

$$\eta = \log \left(\frac{\|\hat{\mathbf{o}}_{i-1} - \hat{\mathbf{o}}_i\|_2}{\|\hat{\mathbf{o}}_i\|_2} \right) \quad (7)$$

The η corresponding to the data in Figure 10a is shown in Figure 10b. A suitable stopping condition for the CGNR algorithm in this case is $\eta < -3$. It is confirmed that the orthogonal mask types converge faster, especially for the first few iterations, shown in Figure 10c.

Figure 11 demonstrates how the number of iterations required to reach the stopping condition is influenced by N . As increasing the number of acquisitions N increases the amount of information available to the algorithm, fewer iterations are required to reach convergence. Additionally, orthogonal masks converge slightly faster as the condition number of the problem is smaller.

These initial tests confirm that the LNO-RAND mask performs the best, both in terms of reconstruction accuracy and speed.

6. RECONSTRUCTION OF A LARGE MULTISPECTRUM SCENE

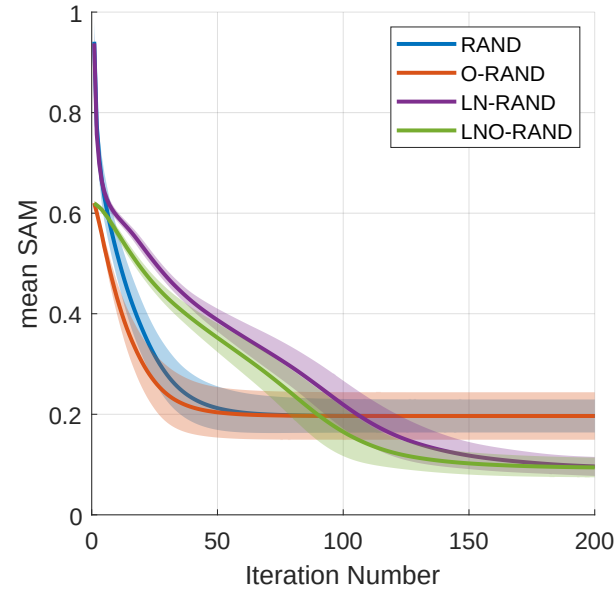
We now test the reconstruction algorithm on two scenes with simple multi-spectral structure, using a LNO-RAND mask. The number of acquisitions is chosen to be $N = 10$, the minimum number of acquisitions possible as determined in section 4. As the scene has 110 spectral bands, this gives over a ten-fold reduction in the amount of information needed to reconstruct the data cube, compared to standard acquisition schemes.

Both scenes have a large variation in panchromatic intensity, so DMD grey level is set as high as possible to obtain maximum signal, but without saturation on the acquisition image, for a camera exposure time of 100 ms. The scene is larger and more complex than the test scenes in the previous section, and in this case a suitable stopping condition was found to be when $\eta < -4$. Using non-optimized matlab code, each iteration of the CGNR algorithm takes around 6 s, which can be reduced to 0.6 s by implementing parallel computing techniques using a mid-range graphics card (NVIDIA GeForce GTX 1060).

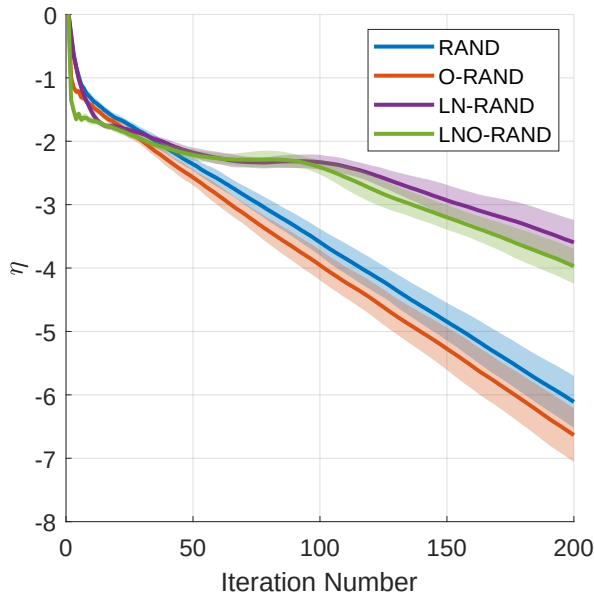
A. Scene A - Stacked Filters

Scene A consists of stacked red and green polyester filters, backlit by a white LED, shown in Figure 12a, giving regions with different spectra and intensity over the scene. The edges shown in Figure 12b are found using the panchromatic image, which is made by averaging the acquisition values for each pixel - shown in Figure 12c. The panchromatic intensity also gives the mean μ_{acq} for each pixel. A single acquisition image is shown in Figure 12d. The scene has large regions with uniform, smooth spectra, and well defined edges, so should be straightforward to reconstruct.

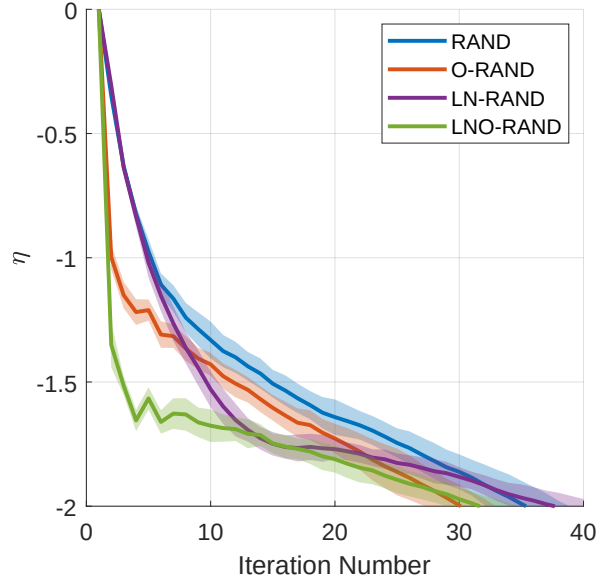
The CGNR algorithm reached the stopping condition after 626 iterations. A comparison between two monochromatic images for the ground truth and the reconstructed cube are shown in Figure 13a and 13b. There is a good correspondence to the ground truth, but in the dark regions where there is low signal the reconstructed cube has some faint diagonal artifacts. Figure 13c shows the resulting SAM map for the scene, where the SAM value of each pixel is found by comparison to the ground truth. A close-up of the region marked by the rectangle is shown in Figure 13d, with the edges superimposed. Over the scene, the mean and variation in the SAM is 0.16 ± 0.05 , with the highest values for the SAM in the darkest



(a)



(b)



(c)

Fig. 10. a) Mean and variation in the SAM with iteration number for $N = 10$, b) mean and variation in residual parameter η with iteration number and c) close-up on η for the first 50 iterations. Data shown here has been selected so the acquisition values fall within the limits $\mu_{acq} > 1500$ and $\mu_{sat\%} < 10\%$.

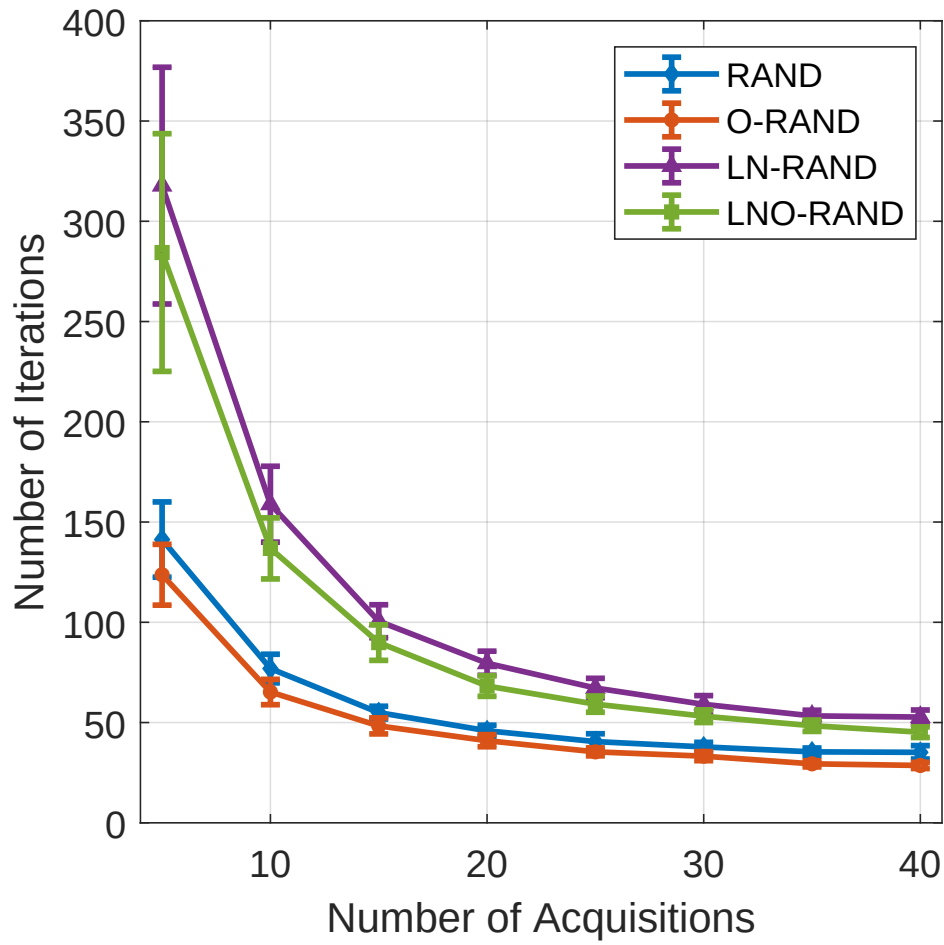


Fig. 11. Number of iterations required to reach the stopping condition $\eta < -3$, with number of acquisitions N .

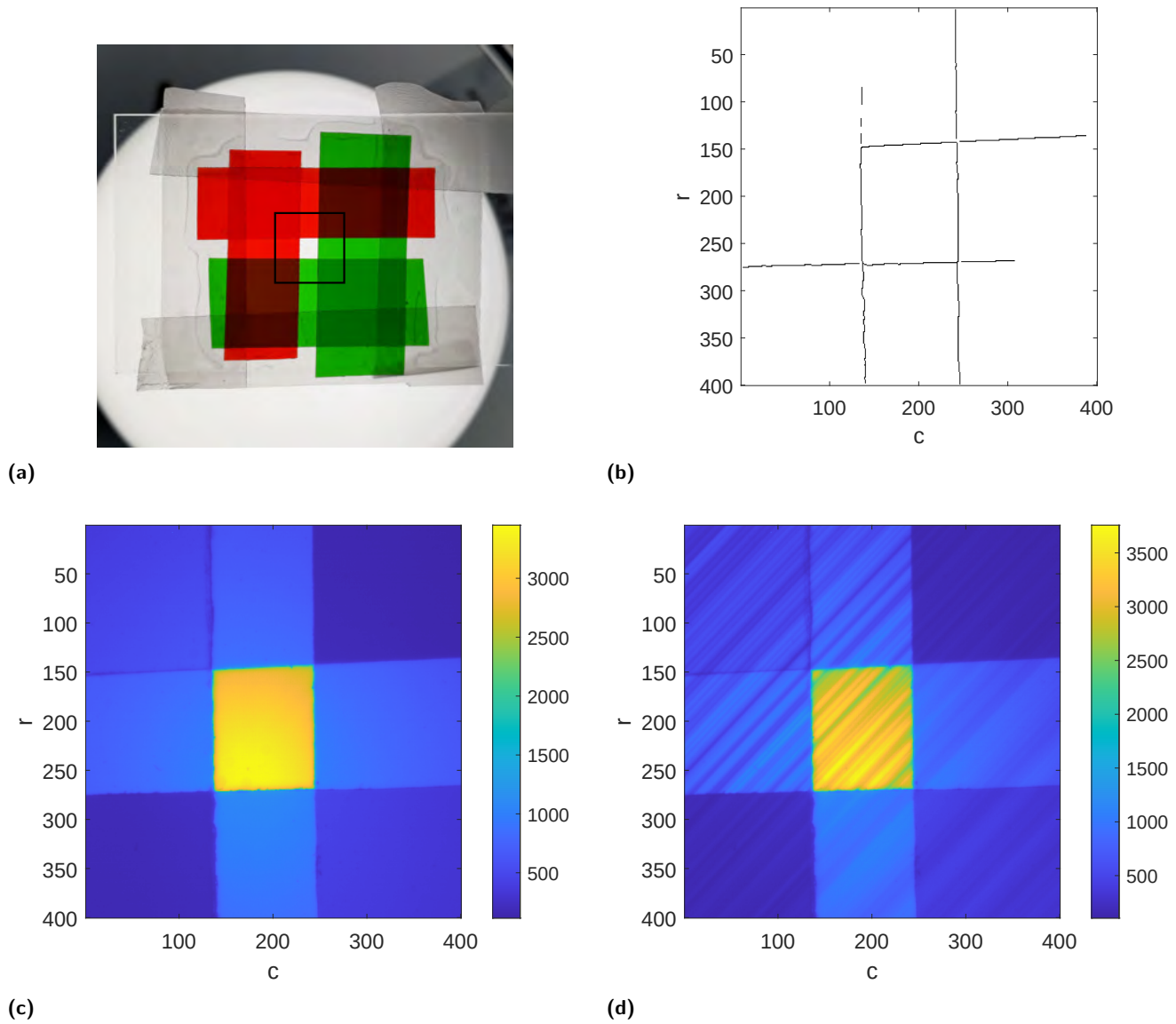


Fig. 12. a) Photo of the experiment target, scene A corresponds to the black square, b) edges found on scene, c) panchromatic image, and d) typical camera acquisition.

regions, when μ_{acq} is below the optimum threshold, and at the edges where there is no regularization. There is also some ‘leaking’ between spectrally distinct regions through small gaps in the edges, but this could be mitigated by making adjustments to the edge-finding code.

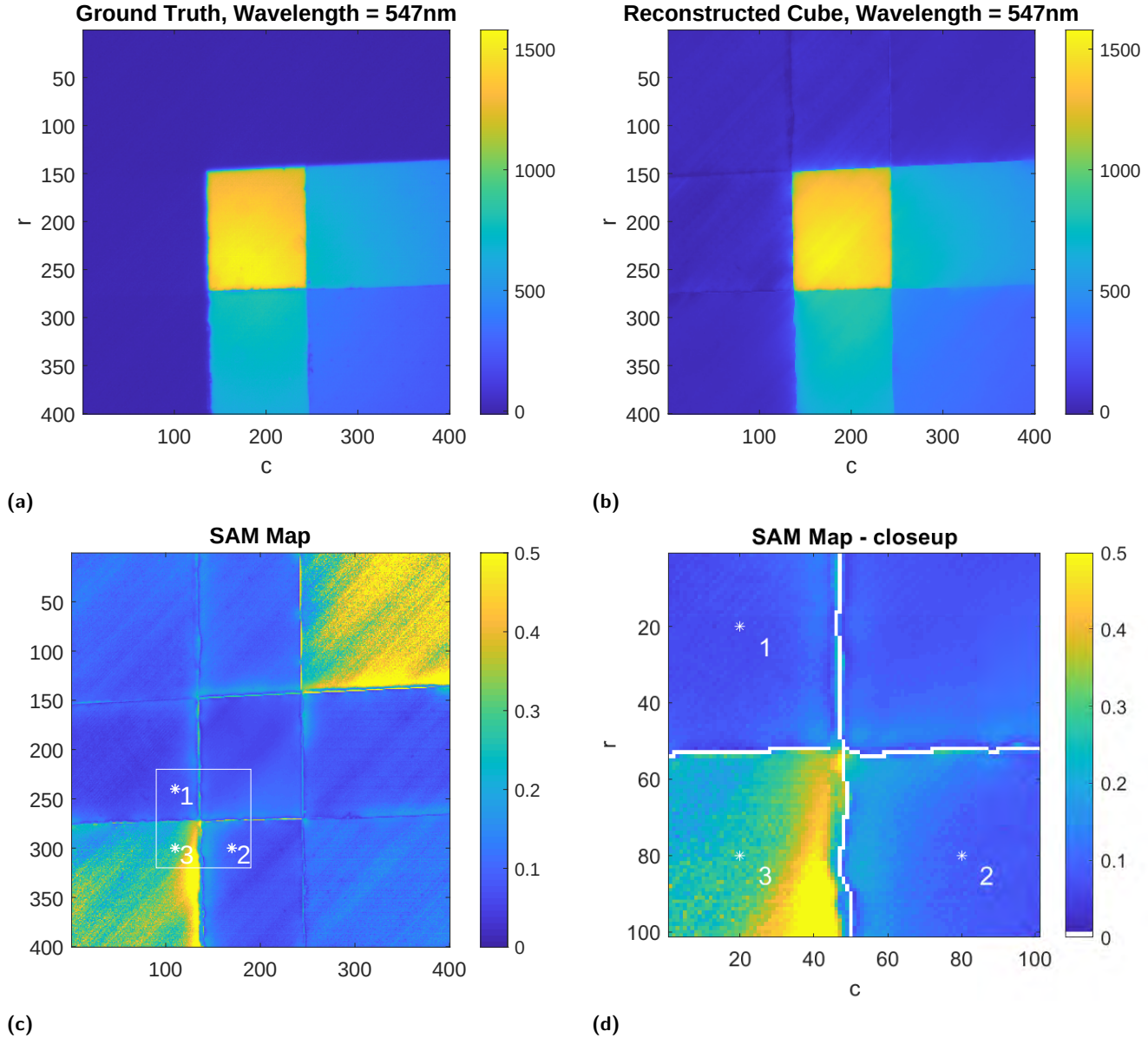


Fig. 13. a) Monochromatic image at 547nm for the ground truth, b) corresponding monochromatic image for the reconstructed cube, c) map of the SAM for the reconstructed data for scene A, d) close up of scene A SAM map with edges overlayed.

A direct comparison of the reconstructed spectra to the ground truth, for the three pixels marked in Figure 13c, are shown in Figure 14. Even when there is low signal, resulting in a higher SAM, the shape of the spectrum corresponds well to the ground truth.

B. Scene B - Checkerboard

Scene B consists of chrome on glass checkerboard mask back-lit by a white LED, and illuminated from the front with a fluorescent lamp, shown in Figure 15a. The spectrum of the fluorescent lamp has two sharp spectral features at 500 nm and 611 nm, and reflects most strongly from the chrome regions of the mask, with some weaker reflections from the surface of the glass. The edges shown in Figure 15b are found using the panchromatic image, which is made by averaging the

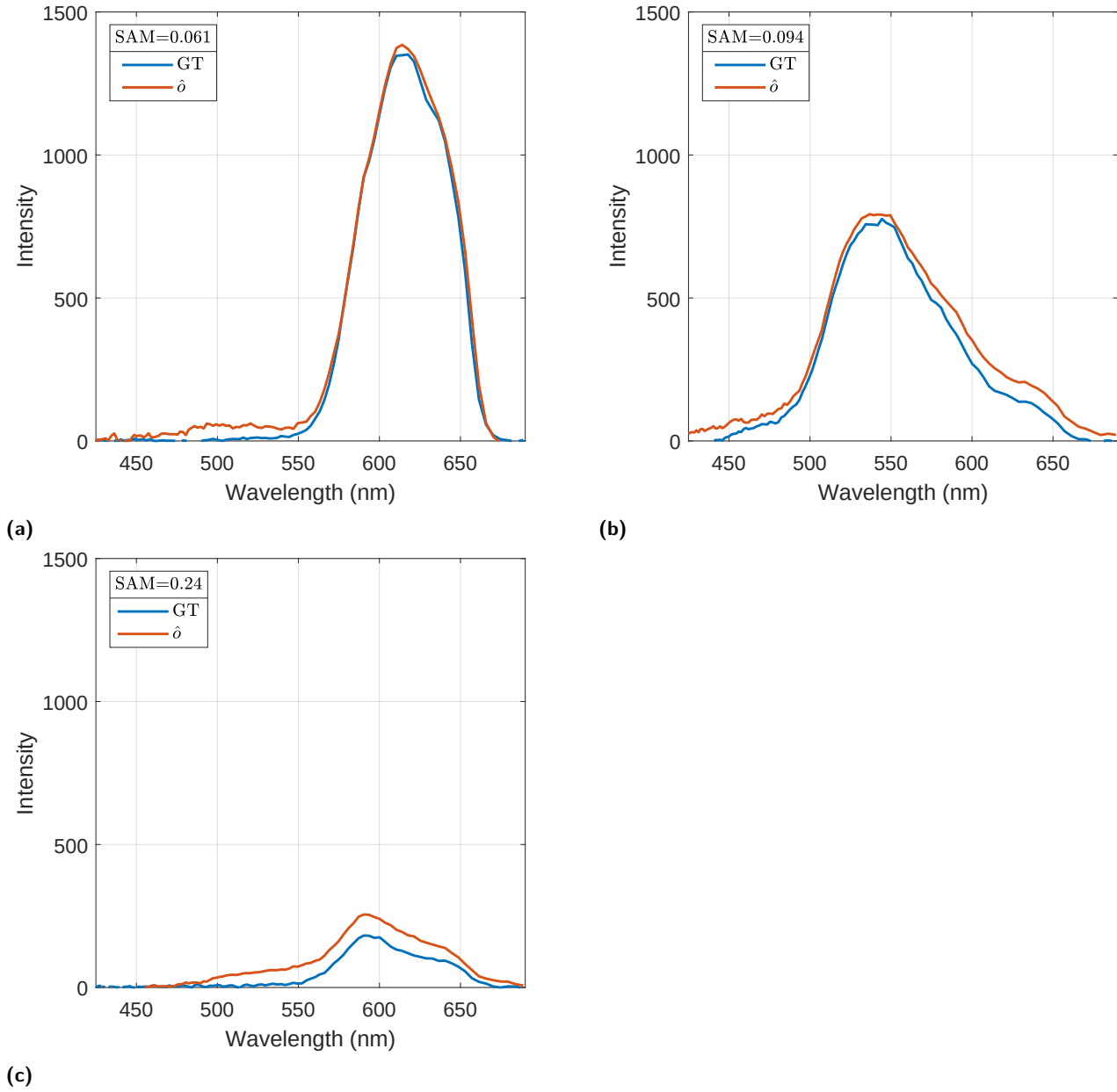


Fig. 14. Comparison of reconstructed spectrum for the ground truth for the three pixels selected in Figure 13c, a) pixel 1, b) pixel 2, c) pixel 3. The SAM for each pixel is shown in the legend.

acquisition values for each pixel - shown in Figure 15c. The panchromatic intensity also gives the mean μ_{acq} for each pixel. A single acquisition image is shown in Figure 15d.

In this case the scene is more challenging to reconstruct than scene A; the edges outline much smaller regions, and the spectrum from the fluorescent lamp is not smoothly varying but has sharp spectral peaks.

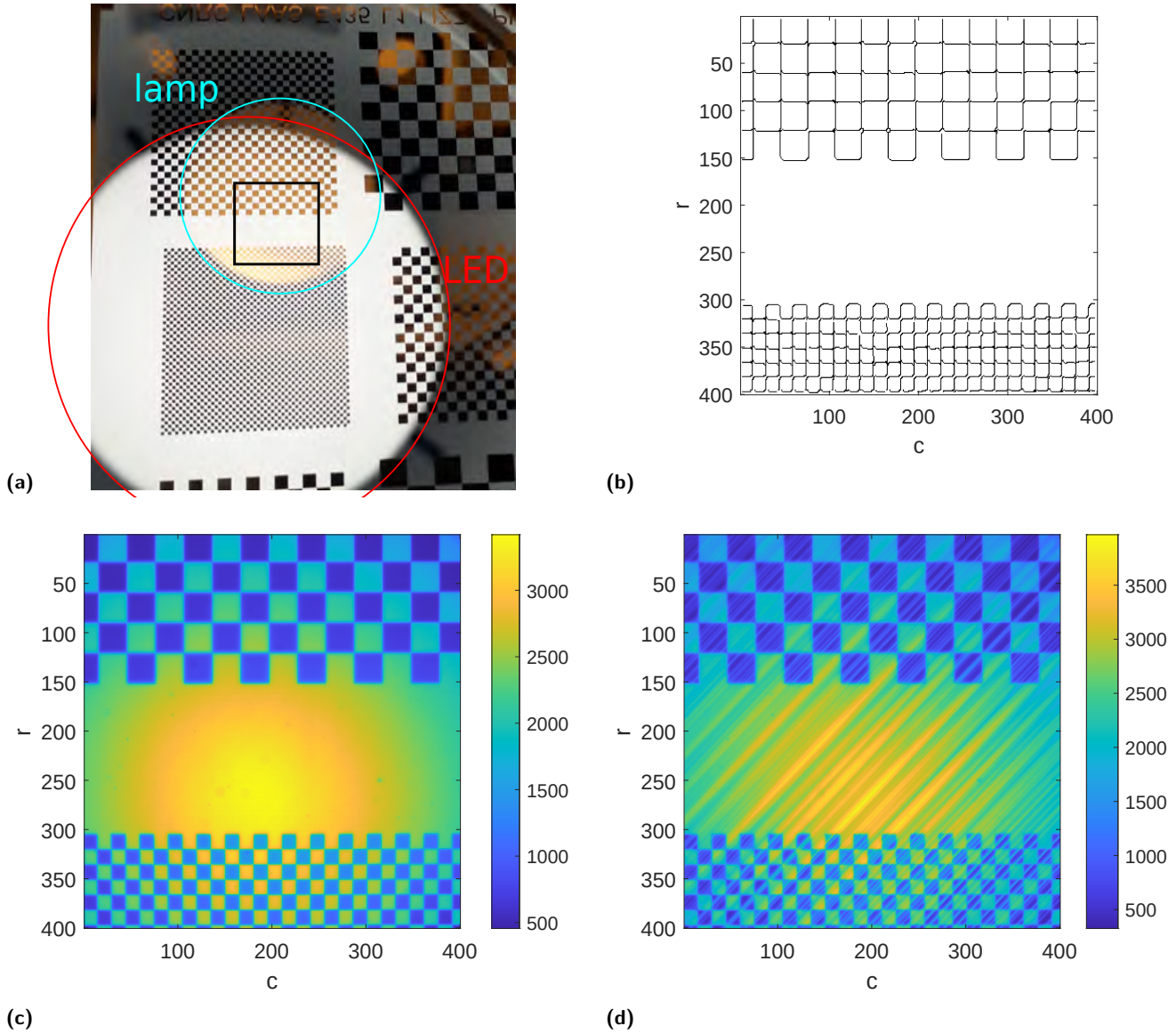


Fig. 15. a) Photo of the experiment target, scene B corresponds to the black square, b) edges found on scene, c) panchromatic image, and d) typical camera acquisition.

For scene B, the CGNR algorithm reached the stopping condition after 462 iterations. A comparison between two monochromatic images for the ground truth and the reconstructed cube are shown in Figure 16a and 16b, at the wavelength corresponding closely to one of the spectral peaks of the lamp. Figure 16c shows the resulting SAM map for the scene, where the SAM value of each pixel is found by comparison to the ground truth. A close-up of the region marked by the rectangle is shown in Figure 16d, with the edges superimposed. Over the scene, the mean and variation in the SAM is 0.13 ± 0.014 , again with the reconstruction performing worse in the darker regions. The checkerboard pattern is also well resolved, without much leaking between regions.

A direct comparison of the reconstructed spectra to the ground truth, for the three pixels marked in Figure 16c, are shown in Figure 17. Although the SAM for the pixel shown in Figure 17a is quite high, the two main spectral peaks are still clearly resolved and would be easily identified by a classification algorithm.

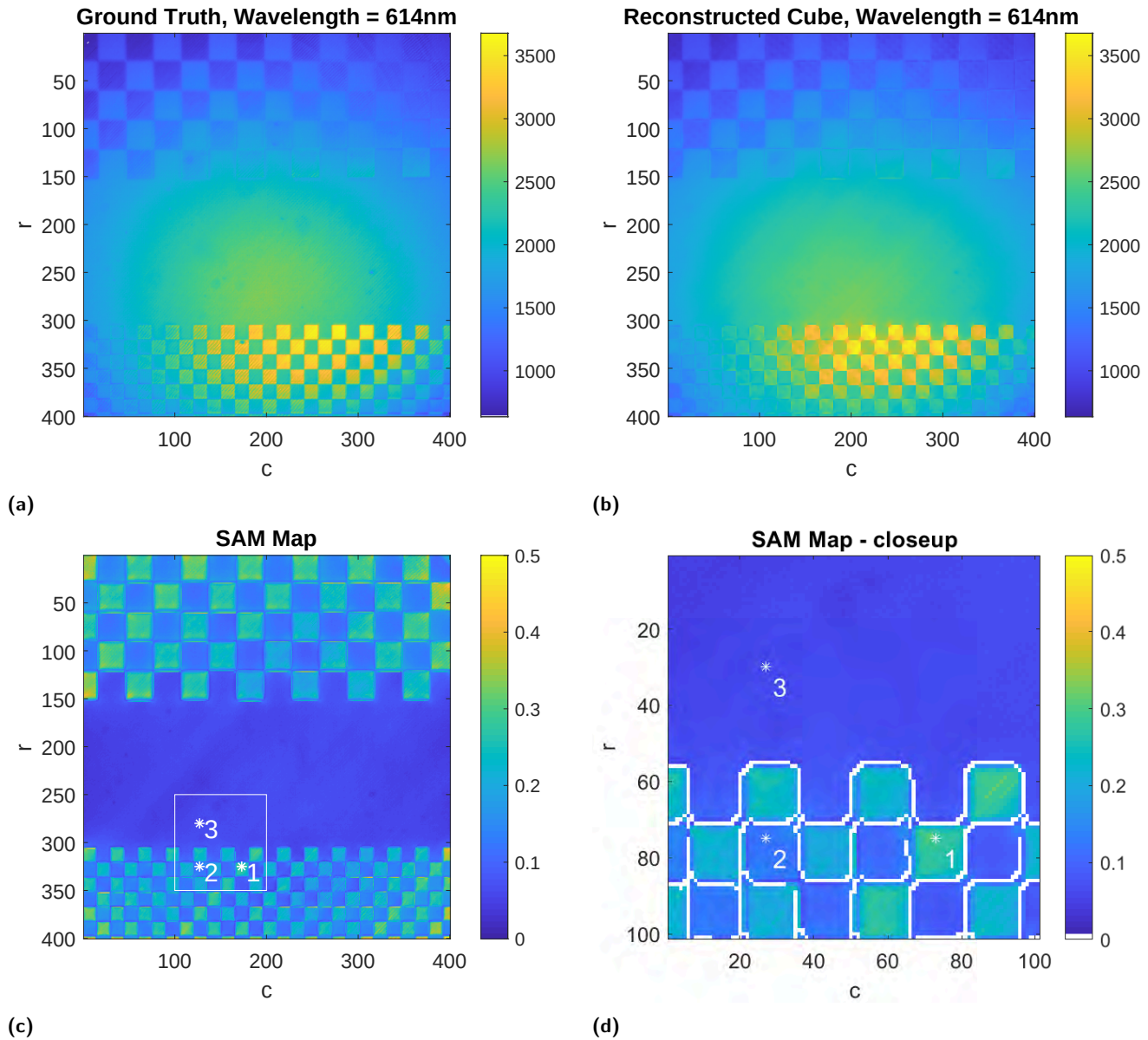
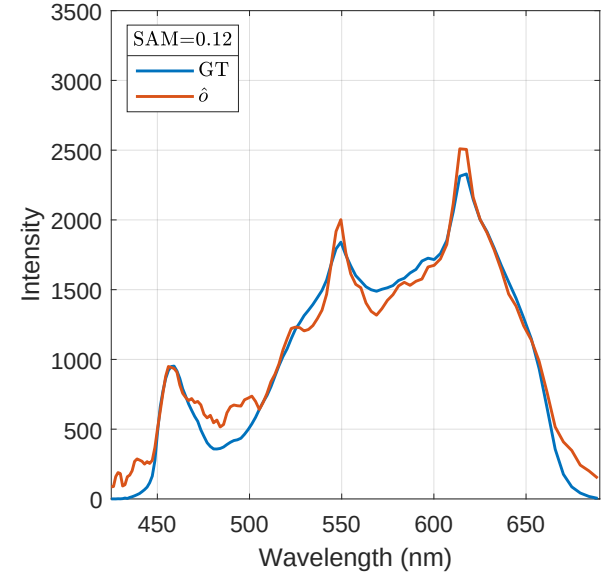
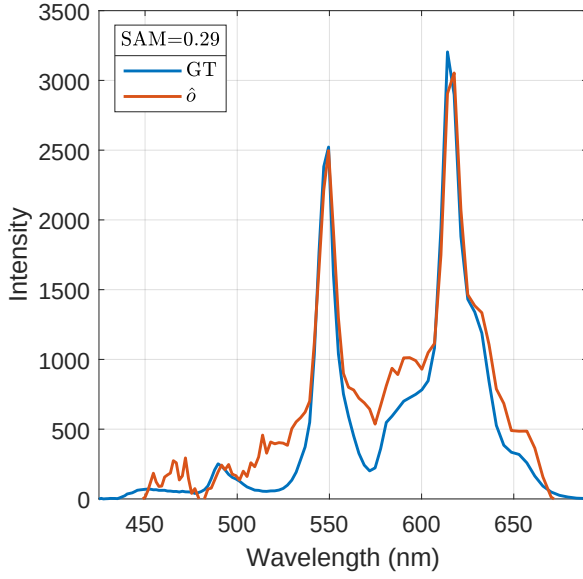
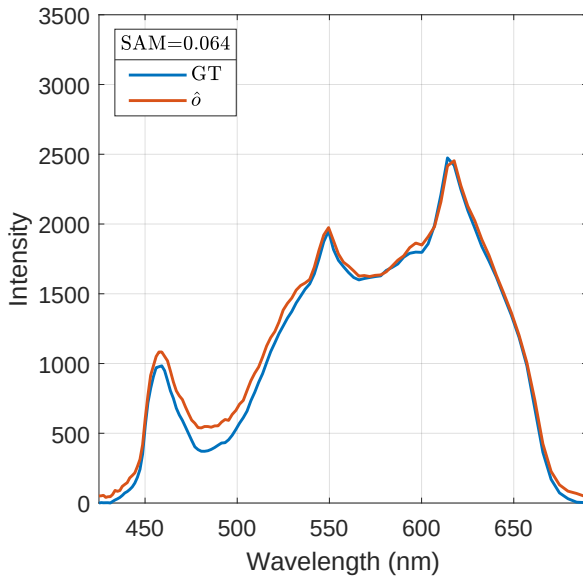


Fig. 16. a) Monochromatic image at 614nm for the ground truth, b) corresponding monochromatic image for the reconstructed cube, c) map of the SAM for the reconstructed data for scene B, d) close up the SAM map with edges overlaid.



(b)



(c)

Fig. 17. Comparison of reconstructed spectrum to the ground truth for the three pixels selected in Figure 16c, a) pixel 1, b) pixel 2, c) pixel 3. The SAM for the pixel is shown in the legend.

7. CONCLUSION

To conclude, this algorithm provides a method to reconstruct a hyperspectral data cube accurately from only a few acquisitions, using the key assumption of spatial-spectral correlations. We have demonstrated the accurate reconstruction of a hyperspectral data-cube with 110 wavelength bands and 400 by 400 spatial pixels, using only 10 acquisitions, thus providing a 11-fold reduction in data.

The reconstruction algorithm uses quadratic regularization, relying on the assumption of spectral-spatial correlations within the scene, and on the assumption that the boundary between two regions of different spectra is typically visible on the panchromatic image, i.e. there are no adjacent metamers.

Additionally, we use prior knowledge of the optical system, specifically the straightforward mapping between DMD mirror and camera pixel, to optimize the coded aperture implemented by the DMD. By utilizing a length- N mask we ensure there is only a small variation in signal strength pixel-to-pixel, leading to measurement data which is more likely to fall within the dynamic range of the camera. Similarly, the use of orthogonal masks reduces the convergence time, and ensures the panchromatic image is easily accessible by summing the acquisitions, reducing the total number of acquisitions needed. In this case we use a mask with 1-D variation along the diagonal direction, but it is expected that with adaptations to the system (such as changing the orientation of the DMD), the use of a fully 2-D LNO-RAND mask would further decrease the reconstruction times by providing more information in a single acquisition.

We have found that the success of the reconstruction depends on the signal at the camera for each acquisition, leading dark or over-saturated regions to be less accurately reconstructed. Information from the panchromatic image could be used to simultaneously tune the exposure time and the local gray level of the DMD mask, to enhance the signal in over or under-exposed regions, leading to an improved signal-to-noise ratio for the entire scene. This adaptive approach could increase the dynamic range of the system by 8 bits and improve the overall accuracy of the reconstruction. In this case, the CGNR algorithm needs to be adjusted to account for non-binary values in the filtering cube, which must be weighted by the DMD gray level.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was funded by the Agence Nationale de la Recherche (ANR-18-ASTR-0012-01 (ImHypAd project))

DISCLOSURES

The authors declare no conflicts of interest.

REFERENCES

1. A. Chakrabarti and T. Zickler, "Statistics of real-world hyperspectral images," in *CVPR 2011*, (IEEE, 2011), pp. 193–200.
2. S. M. Nascimento, K. Amano, and D. H. Foster, "Spatial distributions of local illumination color in natural scenes," *Vis. Res.* **120**, 39–44 (2016).
3. S. Andriani, G. Calvagno, and G. A. Mian, "A lossless image coding technique exploiting spectral correlation on the RGB space," in *2004 12th European Signal Processing Conference*, (IEEE, 2004), pp. 1305–1308.
4. U. Srinivas, Y. Chen, V. Monga, N. M. Nasrabadi, and T. D. Tran, "Exploiting sparsity in hyperspectral image classification via graphical models," *IEEE Geosci. Remote. Sens. Lett.* **10**, 505–509 (2012).
5. R. Arblouei and F. De Hoog, "Hyperspectral image recovery via hybrid regularization," *IEEE Transactions on Image Process.* **25**, 5649–5663 (2016).
6. J. Li, Q. Yuan, H. Shen, and L. Zhang, "Noise removal from hyperspectral image with joint spectral-spatial distributed sparse representation," *IEEE Transactions on Geosci. Remote. Sens.* **54**, 5425–5439 (2016).
7. A. Karami, M. Yazdi, and G. Mercier, "Compression of hyperspectral images using discrete wavelet transform and tucker decomposition," *IEEE journal selected topics applied earth observations remote sensing* **5**, 444–450 (2012).
8. H. Rueda, H. Arguello, and G. R. Arce, "Dmd-based implementation of patterned optical filter arrays for compressive spectral imaging," *JOSA A* **32**, 80–89 (2015).
9. X. Lin, G. Wetzstein, Y. Liu, and Q. Dai, "Dual-coded compressive hyperspectral imaging," *Opt. letters* **39**, 2044–2047 (2014).
10. X. Lin, Y. Liu, J. Wu, and Q. Dai, "Spatial-spectral encoded compressive hyperspectral imaging," *ACM Transactions on Graph.* **33**, 1–11 (2014).
11. A. A. Wagadarikar, N. P. Pitsianis, X. Sun, and D. J. Brady, "Video rate spectral imaging using a coded aperture snapshot spectral imager," *Opt. Express* **17**, 6368 (2009).
12. A. A. Wagadarikar, R. John, R. Willett, and D. J. Brady, "Single disperser design for compressive, single-snapshot spectral imaging," in *Adaptive Coded Aperture Imaging and Non-Imaging Sensors*, vol. 6714 (2007), p. 67140A.
13. C. Deng, X. Hu, J. Suo, Y. Zhang, Z. Zhang, and Q. Dai, "Snapshot hyperspectral imaging via spectral basis multiplexing in Fourier domain," *Opt. Express* **26**, 32509 (2018).
14. M. E. Gehm, R. John, D. J. Brady, R. M. Willett, and T. J. Schulz, "Single-shot compressive spectral imaging with a dual-disperser architecture," *Opt. express* **15**, 14013–14027 (2007).
15. Y. Fu, Y. Zheng, I. Sato, and Y. Sato, "Exploiting spectral-spatial correlation for coded hyperspectral image restoration," in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, (2016), pp. 3727–3736.
16. Y. Fu, A. Lam, I. Sato, and Y. Sato, "Adaptive spatial-spectral dictionary learning for hyperspectral image restoration," *Int. J. Comput. Vis.* **122**, 228–245 (2017).

17. X. Cao, T. Yue, X. Lin, S. Lin, X. Yuan, Q. Dai, L. Carin, and D. J. Brady, "Computational snapshot multispectral cameras: toward dynamic capture of the spectral world," *IEEE Signal Process. Mag.* **33**, 95–108 (2016).
18. D. L. Graff and S. P. Love, "Adaptive hyperspectral imaging with a MEMS-based full-frame programmable spectral filter," in *Next-Generation Spectroscopic Technologies VII*, vol. 9101 M. A. Druy and R. A. Crocombe, eds. (SPIE, 2014), p. 910111.
19. M. Dunlop-Gray, P. K. Poon, D. Golish, E. Vera, and M. E. Gehm, "Experimental demonstration of an adaptive architecture for direct spectral imaging classification," *Opt. Express* **24**, 18307 (2016).
20. D. L. Graff and S. P. Love, "Real-time matched-filter imaging for chemical detection using a DMD-based programmable filter," *Proc. SPIE 8618, Emerg. Digit. Micromirror Device Based Syst. Appl. V* **8618**, 86180F(1) – 86180F(10) (2013).
21. D. L. Graff and S. P. Love, "Real-time video imaging of gas plumes using a DMD-enabled full-frame programmable spectral filter," in *Emerging Digital Micromirror Device Based Systems and Applications VIII*, vol. 9761 (2016), p. 97610C.
22. E. Hemsley, S. Lacroix, H. Carfantan, and A. Monmayrant, "Calibration of programmable spectral imager with dual disperser architecture," *Opt. Commun.* p. 125767 (2020).
23. S. McGregor, S. Lacroix, and A. Monmayrant, "Adaptive hyperspectral imager: design, modeling, and control," *J. Opt.* **17**, 085607 (2015).
24. I. Ardi, H. Carfantan, S. Lacroix, and A. Monmayrant, "Fast hyperspectral cube reconstruction for a double disperser imager," in *2018 26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, (IEEE, 2018), pp. 2225–2229.
25. I. Ardi, "Reconstruction d'images hyperspectrales pour un imageur non conventionnel pilotable," Ph.D. thesis, Université de Toulouse (2020).
26. J. Idier, *Bayesian approach to inverse problems* (John Wiley & Sons, 2013).
27. A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, *Solutions of Ill-posed problems* (W.H. Winston, 1977).
28. R. Barrett, M. W. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. Van der Vorst, *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*, vol. 43 (Siam, 1994).
29. N. R. Council, *Advances in Photoreception: Proceedings of a Symposium on Frontiers of Visual Science* (The National Academies Press, Washington, DC, 1990).

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Conclusion

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la reconstruction d'images hyperspectrales à partir d'un faible nombre d'acquisitions obtenues par un imageur hyperspectral non-conventionnel configurable. La configuration de cet instrument est modifiable aisément via le pilotage d'une matrice de micro-miroirs (appelée DMD), que l'on peut placer en mode réflexion ou réjection. Ainsi, chaque acquisition correspond à une projection, parfaitement maîtrisée, du contenu spatio-spectral de la scène observé sur un détecteur dont le nombre de pixels correspond à celui de la dimension spatiale de la scène. Notons que lorsque l'on place tous les miroirs en mode réflexion, l'acquisition correspond exactement à l'image panchromatique de la scène (c'est-à-dire intégrée sur l'ensemble des longueurs d'onde), avec le même échantillonnage que les données hyperspectrales. La reconstruction avec un faible nombre d'acquisition signifie alors que l'on cherche à reconstruire un cube hyperspectral avec typiquement dix fois moins de projections que le nombre de longueurs d'ondes du cube, soit dix fois moins de données que d'inconnues. Nous avons proposé deux méthodes de reconstruction, pour des configurations aléatoires du DMD, qui exploitent les fortes corrélations spatio-spectrales présentes dans le cube par le biais de deux hypothèses : l'hypothèse d'homogénéité pour la méthode RA et l'hypothèse supplémentaire de séparabilité pour SA. Pour ce faire, nous avons utilisé l'information fournie par l'image panchromatique pour tenir compte convenablement des hypothèses pour chacune des méthodes. Ces deux méthodes nécessitent un faible coût de calcul car elles s'appuient sur une régularisation quadratique et le calcul de la solution se ramène à la résolution de systèmes linéaires.

Pour la méthode RA, l'hypothèse d'homogénéité stipule qu'il existe des régions spatiales sur lesquelles les spectres des différents pixels sont très corrélés. Pour tenir compte de cette hypothèse nous avons considéré une régularisation quadratique de type *Tikhonov* pour favoriser la présence de telles régions. Pour remédier au problème habituel de lissage au niveau des contours séparant les régions homogènes produit par une telle régularisation nous avons localisé ces contours sur l'image panchromatique puis relâché la régularisation aux niveaux de ces derniers. Grâce à cela nous avons conservé la forme quadratique du problème de reconstruction tout en préservant les contours. Pour une telle régularisation quadratique, le calcul de la solution nécessite la résolution d'un système linéaire de grande dimension, que nous avons résolu grâce à un algorithme de gradient conjugué (CGNR). Notons qu'une telle approche permet de s'affranchir de l'utilisation de régularisation non quadratique, telle que la variation totale, et d'algorithmes d'optimisation coûteux associés, tout en préservant les contours.

Pour cette méthode, nous avons étudié le problème du choix des paramètres de la régularisation et nous avons montré la présence d'un jeu de paramètres qui permet d'approcher les perfor-

mances des paramètres optimaux. Ceci a été démontré pour les données de simulation ou réelles et nous a permis de confirmer la robustesse et la cohérence et la robustesse de cette approche. Finalement nous avons étudié le problème de la vitesse de convergence CGNR et du temps de reconstruction en général. A cet effet, nous avons étudié la structure de la matrice de transfert de l'imageur et de sa relation avec la vitesse de convergence du CGNR. L'imageur étant pilotable, par l'intermédiaire de la matrice des micro-miroirs (DMD), nous avons proposé d'exploiter des configurations *orthogonales* du DMD qui améliorent le conditionnement du problème et accélèrent la convergence du CGNR. De plus, ces configurations permettent d'obtenir l'image panchromatique sans acquisitions supplémentaires. Nous avons ainsi pu atteindre des temps de reconstruction inférieurs à 1 seconde pour les données de simulations (30 longueurs d'ondes) et d'une dizaine de minutes pour des données réelles (une centaine de longueurs d'ondes).

Pour la méthode SA l'hypothèse supplémentaire de *séparabilité* suppose que la scène hyperspectrale est composée de régions spatiales fermées spectralement homogènes et que chacune de ces régions est modélisée par le produit d'un unique spectre par la carte d'intensité (issue de l'intensité de l'image panchromatique). Cette hypothèse est très forte et nécessite une segmentation correcte de la scène hyperspectrale en régions homogènes, que l'on effectue à partir de l'image panchromatique. L'implémentation de la segmentation s'est faite grâce à l'usage conjoint de l'algorithme *Watershed* et du filtrage anisotrope de *Perona-Malik*. La reconstruction du spectre de chaque région, quant à elle, s'effectue par simple régularisation quadratique de type *Tikhonov*, suivant la dimension spectrale.

Pour cette méthode SA le choix des paramètres de la segmentation est le plus crucial, le coefficient de régularisation l'est moins. En effet, l'hypothèse de séparabilité n'est généralement vérifiée que pour des régions de faibles dimensions, une sur-segmentation de l'image est requise. De plus, cette hypothèse étant généralement fautive de part et d'autre des contours (ne serait-ce à cause de la réponse impulsionnelle de l'instrument qui a tendance à lisser les contours), des contours de plusieurs pixels doivent être pris en compte et exclus de la reconstruction. Nous avons montré, pour des données simulées, qu'un jeu de paramètres permettait d'approcher les performances des paramètres optimaux, confirmant la robustesse et la cohérence de cette approche. Notons que pour cette méthode, la reconstruction de chaque région se fait de façon indépendante et à faible coût puisque seul un spectre par région est à estimer et une résolution directe du système linéaire peut-être utilisée. La reconstruction du cube est donc très rapide et aisément parallélisable, les temps de reconstruction totale sur les données simulées sont de l'ordre de quelques secondes.

6.2 Perspectives

Les perspectives de ce travail se placent dans le cadre général du projet ImHypAd (ANR ASTRID 2019-2021, ANR-18-ASTR-0012-01), associé à la conception de l'imageur hyperspectral et visent, à long terme, à rendre cet imageur adaptatif. Nous nous sommes focalisés durant cette thèse sur une première étape de reconstruction rapide des scènes hyperspectrales à partir d'un faible nombre d'acquisitions.

Les perspectives envisageables des travaux menés pendant cette thèse sont variées : nous en présentons trois :

- amélioration des performances des méthodes de reconstruction proposées, notamment accélération du temps de calcul et de la qualité des images reconstruites ;
- Utilisation et exploitation des images reconstruites par ces méthodes ;
- Et enfin une reconstruction adaptative des scènes hyperspectrales.

6.2.1 Amélioration des performances des méthodes de reconstruction proposées

Pour la méthode RA, 3 pistes peuvent être explorées pour améliorer significativement la méthode :

- L'étape de détection des contours n'est pas cruciale pour la méthode, mais nous l'avons traitée de façon relativement fruste, par seuillage de gradients. Elle fournit des contours non-fermés, ce qui n'est pas en soi un problème, mais peut provoquer des « fuites » d'une région homogène vers une autre alors que l'on constate visuellement, sur l'image panchromatique, que les régions sont aisément séparables par des contours. Sans aller vers une segmentation en contours fermés, comme cela est nécessaire dans la méthode SA, on peut aisément imaginer améliorer cette détection de contours. Dans un premier temps on pense bien sûr à l'utilisation de méthodes existantes plus performantes que de simples seuillages de gradients. Mais on peut également tenter d'améliorer la continuité des contours horizontaux et verticaux, qui sont pour l'instant détectés indépendamment. Ce problème est à notre connaissance peu traité dans la littérature, car nous exploitons ici la notion de contours inter-pixels alors que les contours exploités le plus souvent en traitement d'images sont sur les pixels et qu'il est plus simple dans ce cas d'obtenir la continuité de tels contours par simple 4 ou 8-connexité. Un stage s'est déroulé dans l'équipe ces derniers mois¹ et a permis de premières avancées dans ce sens.
- Une deuxième amélioration possible au niveau méthodologique porte sur la régularisation dans le voisinage des contours. En effet, la détection des contours est exploitée pour l'instant de façon binaire dans la reconstruction, en supprimant la régularisation de part et d'autre des contours. Cependant, les contours ne sont pas nets entre les régions homogènes, notamment à cause de l'étalement induit par la réponse impulsionnelle de l'optique du système. Une autre façon de procéder serait de prendre en compte des paramètres de régularisation variables dans l'image en fonction de la proximité des contours. Cela changerait très peu la méthode et la modification de son implémentation est immédiate. Le plus délicat est donc le choix du mode de variation des paramètres de régularisation.
- L'implémentation de la méthode RA peut également être améliorée. En particulier, il paraît intéressant d'exploiter le calcul parallèle. Nous disposons actuellement de deux implémentations de cette méthode : une première, en Matlab, exploitant pour les problèmes directs et adjoint des produits par le cube de filtrage, codé en *sparse* ; une seconde, développée par un stagiaire² en langage C à l'aide de boucles, évitant de tels produits, en prenant soin d'exploiter la proximité des données dans la mémoire cache du processeur. Bien que Matlab exploite automatiquement plusieurs cœurs nous avons pu réduire d'un facteur 10 le temps de calcul avec le code en C. Il est donc aisé d'imaginer que la parallélisation du code en C permettrait de réduire encore le temps de calcul. Enfin, on peut également envisager d'exploiter le calcul sur GPU. De premiers tests à l'aide de Matlab exploitant le calcul sur GPU (en demandant à Matlab d'exécuter la version produit par le cube de filtrage sur GPU) ont permis de réduire le temps de calcul d'un facteur 10. Une mise en œuvre sur GPU, en évitant les produits par le cube de filtrage devrait permettre de réduire encore le temps de calcul.

Un autre moyen de réduire le coût de calcul pour la méthode RA serait d'effectuer une reconstruction sous-optimale en calculant la solution par sous-cubes découpés suivant la dimension spatiale. Typiquement une taille de sous-cubes de 200×200 pixels serait idéale, car ces dimensions spatiales sont assez grandes pour permettre l'exploitation des corrélations

1. Stage de césure de Yvan Gary, étudiant en deuxième année de l'ISAE-Supaéro, février à juillet 2020.

2. Stage de Julien Bidan étudiant en master 1 SIA-AMS de l'Université Toulouse 3 – Paul Sabatier, juin-juillet 2019.

lations et le temps de reconstruction serait significativement réduit. La parallélisation serait alors immédiate en effectuant la reconstruction des blocs en parallèle. Bien sûr il faudrait gérer la fusion des blocs ainsi reconstruits.

Enfin, si l'on effectue une segmentation en régions fermées, avec des régions de grandes dimension (contrairement à RA), on pourrait également appliquer la méthode RA indépendamment sur chaque région, ce qui permettrait également de réduire le temps de calcul en calculant les solutions sur les différentes régions en parallèle. . .

Concernant la méthode SA, nous envisageons cinq axes d'amélioration :

- Le premier concerne la segmentation qui est cruciale pour la reconstruction sous l'hypothèse de séparabilité. Ce problème a été en partie traité durant de cette thèse mais n'a pas pu être présenté dans ce manuscrit par manque de temps. Typiquement, nous avons observé que les seuils optimaux de segmentation sont généralement petit, afin de segmenter correctement les régions de faible intensité, ce qui produit des zones sur-segmentées. D'une part, cet effet est bénéfique car il permet d'assurer l'hypothèse de séparabilité. Cependant la taille moyenne des zones segmentées est petite ce qui affecte considérablement la qualité des spectres reconstruits. Pour remédier à cela, nous avons développé une méthode de segmentation avec seuil adaptatif en modifiant judicieusement le filtrage de *Perona-Malik*. En pratique, l'idée est de tenir compte de la puissance du bruit (bruit de photon, lié à l'intensité) en chaque pixel lors du filtrage grâce au coefficient de diffusion κ du filtrage de *Perona-Malik*.
- A l'opposé de la méthode RA, la régularisation n'est pas très importante pour la méthode SA et une simple régularisation de *Tikhonov* avec un paramètre de régularisation fixé pour toutes les régions nous a permis d'obtenir de bons résultats. On peut envisager de régler différemment le coefficient de régularisation, en prenant en compte la quantité d'information disponible dans les données et le rapport signal sur bruit, lié à la dynamique des données dans les différentes régions.
De même, le calcul de la solution par la méthode RA se faisant indépendamment sur chaque région, on peut envisager des méthodes de reconstruction plus élaborées que la régularisation de *Tikhonov*. On peut évidemment penser à des hypothèses de parcimonie sur des dictionnaires. Mais, il est possible de rester avec un critère quadratique et de prendre des contraintes supplémentaires, telles que la positivité (si la solution non contrainte n'est pas positive), ou la prise en compte des pixels saturés, ce qui donne lieu à la résolution d'un problème de programmation quadratique (QP- Quadratic Programming). Bien sûr, cela augmentera le coût de calcul, mais la dimension du problème étant très réduite (seulement un spectre à reconstruire par région), cette augmentation sera raisonnable.
- La méthode SA ne reconstruit que partiellement le cube hyperspectral, sur des régions homogènes et non sur les contours. On peut alors envisager une reconstruction a posteriori de ces contours, en bénéficiant de la reconstruction sur les régions homogènes voisines, par exemple par une méthode de type démixage. En effet, on peut sans doute considérer que le spectre du contour est un mélange des spectres des régions voisines et il faut alors estimer les coefficients de ce mélange. Nos premiers tests rapides sur une telle approche ne sont pas très concluants et il faudrait donc approfondir cette étude. Notons que la méthode RA a également des difficultés à reconstruire les images HS au niveau des contours, ce qui est effectivement un problème difficile vu le manque d'information (10 fois moins de données que d'inconnues).
- Enfin, on sait que l'on possède plus d'informations pour reconstruire les spectres dans les grandes régions, mais que l'hypothèse de séparabilité est sans doute plus souvent satisfaite sur des petites régions. Aussi, il serait intéressant d'arriver à quantifier la qualité

de la reconstruction de la méthode SA en particulier afin de vérifier l'hypothèse de séparabilité (surtout aux bords des régions). On peut sans doute pour cela s'appuyer sur les erreurs entre les données disponibles et les données simulées qui seraient produites par l'instrument pour l'image HS reconstruite (résidus de reconstruction).

- Notons que la parallélisation de la méthode SA, est immédiate si l'on exécute en parallèle la reconstruction sur chaque région, plutôt que comme actuellement, de façon séquentielle. Cela impliquera de fait une réduction du coût de calcul de l'ordre du nombre de cœurs utilisés. Une telle réduction est cependant à modérer légèrement par le fait que les calculs sont actuellement effectués sous Matlab, qui exploite automatiquement plusieurs cœurs pour la reconstruction de chaque région. Le calcul sur GPU pourrait également être envisagé. Néanmoins la méthode SA est déjà actuellement très rapide et ce n'est pas celle qui nécessite le plus d'améliorations en termes de temps de calcul.

6.2.2 Exploitations des images reconstruites

Compte tenu de la qualité satisfaisante de la reconstruction obtenue avec les méthodes proposées, les données reconstruites se prêtent sans effort supplémentaire à leur exploitation, par exemple pour le démixage spectral et la classification, comme cela est fait classiquement sur des images hyperspectrales acquises par balayage.

Pour la méthode RA, les résultats montrent une bonne qualité de reconstruction sur les grandes régions homogènes. Sur les bords et dans les régions texturés, RA a cependant tendance à mélanger les spectres, ce qui est dû à l'étalement lié à la réponse impulsionnelle de l'optique du système. Ainsi, les données produites par RA se prêtent naturellement à des applications de démixage spectral qui pourraient utiliser les spectres des grandes régions homogènes comme *a priori* (*end-members*), au moins dans une phase d'initialisation. Bien sûr, un tel démixage spectral peut également être effectué sur l'ensemble de l'image pour la reconstruction effectuée par la méthode SA, en plus du démixage visant à combler les pixels non reconstruits au niveau des contours. Cela permettrait d'ailleurs peut-être de corriger (ou au moins détecter) quelques défauts pour les pixels ne satisfaisant pas l'hypothèse de séparabilité.

Les données obtenues avec la méthode SA sont particulièrement adaptées à la classification (même partielle) des scènes imagées puisque l'image est déjà découpée en régions homogènes, donc constituées de pixels appartenant à une même classe. Nous nous sommes d'ailleurs intéressés à cette application et les premiers résultats sont concluants et encourageants. En effet, nous avons réussi à obtenir des classifications avec les données reconstruites à partir de 10% du cube HS original comparables à celles obtenues avec les cubes HS originaux complets. De plus, on sait que les spectres reconstruits sont de qualités différentes, suivant la taille des régions et la satisfaction de l'hypothèse de séparabilité. Exploiter un tel indice de qualité pour la classification des spectres reconstruits paraît alors une piste intéressante. Les premiers travaux menés en ce sens lors d'un stage³ nous ont confirmé dans l'idée que cette piste était à approfondir...

6.2.3 Vers une exploitation adaptative des scènes hyperspectrales...

Concevoir un imageur hyperspectral adaptatif est ambitieux puisqu'il vise à adapter la configuration du dispositif, dans notre cas la configuration de la matrice de micro-miroirs (DMD), à la scène hyperspectrale observée pour une meilleure analyse, toujours avec pour objectif d'optimiser le nombre d'acquisitions. Le grand obstacle à l'approche adaptative est bien sûr le manque d'information *a priori* sur la scène imagée, avant l'acquisition. Une idée naturelle est donc de commencer par collecter quelques données sur la scène afin de piloter les acquisitions suivantes. La contrainte de temps de calcul court pour exploiter ces premières données est dans ce cadre

3. Stage de césure de Yvan Gary, étudiant en deuxième année de l'ISAE-Supaéro, février à juillet 2020.

primordiale, ce que l'on a pris en compte, dans une certaine mesure, pour les deux méthodes RA et SA proposées dans cette thèse.

On peut illustrer par quelques exemples comment les zones segmentées sur l'image panchromatique et les reconstructions obtenues pourrait servir à configurer le DMD pour des acquisitions supplémentaires.

- L'acquisition de l'image panchromatique permet de connaître l'intensité locale de la scène. Si cette scène est très contrastée, on peut exploiter cette connaissance a priori pour augmenter la dynamique des acquisitions. En effet, le DMD n'est pas seulement pilotable en mode binaire mais en niveau de gris : on peut donc prévoir des masques en niveaux de gris avec des valeurs faibles pour les zones sombres et des valeurs élevées pour les zones lumineuses. Cela revient à faire des acquisitions avec des temps d'acquisition différents suivant la zone de l'image et donc améliorer le rapport signal sur bruit, sans pour autant subir les saturations du détecteur ...
- En pilotant le DMD en niveau de gris conjointement à la lecture sur le détecteur (mode *rolling-shutter*) on peut obtenir une image de corrélation entre un spectre donné et l'image hyperspectrale. On peut imaginer utiliser une telle technique pour effectuer de façon instrumentale un démélange d'images hyperspectrales à partir de quelques images de corrélations pour des spectres prédéterminés obtenus par reconstruction RA ou SA ou après classification de ces spectres.
- On pourrait également utiliser de nouvelles acquisitions pour tester (avec un test d'hypothèse de type *Fisher*) la validité des hypothèses considérées lors de la reconstruction (typiquement la séparabilité). Des méthodes avec des hypothèses moins fortes, ou du moins différentes telle que la parcimonie, pourraient alors être utilisées localement au niveau des régions concernées. Dans ce cas l'utilisation de telles approches bien que gourmandes en ressources calculatoires serait justifiée par le fait que, d'une part, les régions sont de petites tailles et d'autre part parce que l'hypothèse simple exploitée n'est pas satisfaite et la reconstruction de ces régions n'est pas satisfaisante.

Annexes

Annexe A

Article GRETSI 2017

Nous reprenons ici l'article [\[ACLM17\]](#) :

I. Ardi, H. Carfantan, S. Lacroix and A. Monmayrant, Reconstruction d'images hyperspectrales à faible coût pour un imageur pilotable à double dispersion, *Colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images (GRETSI 2017)*, Juan les Pins, France, septembre 2017

Reconstruction d'images hyperspectrales à faible coût pour un imageur pilotable à double dispersion

Ibrahim ARDI^{1,2}, Hervé CARFANTAN¹, Simon LACROIX², Antoine MONMAYRANT²

¹Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (IRAP) – Université de Toulouse/CNRS,
14 avenue Edouard Belin, 31 400 Toulouse, France

²LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France
ibrahim.ardi@irap.omp.eu, herve.carfantan@irap.omp.eu,
antoine.monmayrant@laas.fr, simon.lacroix@laas.fr

Résumé – Nous nous intéressons à la reconstruction d'images hyperspectrales (HS) à partir d'un nouveau dispositif d'imagerie pilotable. La reconstruction de l'image à partir d'un faible nombre d'acquisitions pour des configurations différentes de l'imageur permet d'éviter l'acquisition de toute l'image HS par balayage. Notre objectif à terme est de rendre ce dispositif adaptatif en fonction de l'objet observé, ce qui nécessite de disposer de méthodes de reconstruction à faible coût calculatoire. Nous nous focalisons ici sur la reconstruction à l'aide de méthodes de pénalisation quadratique, permettant une résolution directe à faible coût, grâce au caractère très creux des matrices.

Abstract – We consider the problem of hyperspectral image reconstruction with a new controllable imaging system. The reconstruction with a small number of images acquired with different configurations of the imager avoids a complete scanning of the hyperspectral cube. Our objective is to exploit this imager along an adaptive scheme, which requires the ability to reconstruct images in near real-time. We focus here on a quadratic penalty reconstruction approach, which provides a fast direct resolution thanks to the high sparsity of the involved matrices.

1 Introduction

L'imagerie hyperspectrale (HS), c'est-à-dire l'acquisition d'une image avec un très grand nombre de bandes spectrales (typiquement plusieurs centaines), a des applications dans des domaines variés. Les procédés technologiques classiques d'imagerie HS procèdent par balayage spatial ou spectral, ils ne sont donc pas instantanés et sont restreints à l'acquisition de scènes statiques, où l'imageur est soit lui-même statique, soit en mouvement précisément contrôlé dans le cas du balayage spatial.

Pour remédier à ce problème, de nombreux dispositifs dits « instantanés » (*snapshot*) ont été proposés [1]. Certains nécessitent des systèmes optiques complexes, qui comprennent par exemple une série d'imageurs montés derrière une série de miroirs dichroïques ou de filtres spectraux. D'autres exploitent des algorithmes de reconstruction utilisant un mélange spatio-spectral du cube obtenu grâce à un système optique défini une fois pour toutes à la conception. Dans ce dernier cas, l'acquisition par une matrice bidimensionnelle de la structure tridimensionnelle du cube induit nécessairement une perte d'information spatiale et/ou spectrale. Les algorithmes de reconstruction nécessitent alors des hypothèses sur la scène, et sont coûteux en ressources de calcul. De plus, ces systèmes nécessitent une calibration spatio-spectrale précise.

Dans cet article nous nous intéressons à la reconstruction

d'images hyperspectrales à partir d'un dispositif proposé récemment [3]. Ce dispositif, de configuration analogue au système *snapshot* proposé dans [2], possède deux particularités : *i*) il est pilotable, via le contrôle d'une matrice de micro-miroirs (*Digital Micromirror Device*, DMD); *ii*) il possède une propriété de co-localisation, qui signifie une séparation claire entre les composantes spatiales et spectrales acquises. À terme notre projet vise à rendre ce dispositif adaptatif, c'est-à-dire capable d'adapter sa configuration au cours des acquisitions au contenu hyperspectral de la scène observée. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir reconstruire une image HS à partir d'un faible nombre d'acquisitions dans des configurations différentes, pour un coût de calcul restreint. Dans cette première étude, nous présentons le dispositif ainsi que sa modélisation optique et numérique en section 2. Dans la section 3, nous nous focalisons sur la reconstruction de l'image dans le cadre de la régularisation quadratique, extrêmement rapide pour le modèle considéré, tout en permettant de bénéficier de l'aspect pilotable du dispositif. Enfin, nous présentons dans la section 4 quelques résultats de simulation.

2 Modélisation du dispositif

2.1 Dispositif d'acquisition

Le dispositif décrit dans [3], schématisé Fig. 1, est composé de deux lignes $4f$ (assemblage de deux lentilles et d'un réseau

Les auteurs remercient l'Université Fédérale de Toulouse et la région Occitanie pour le financement de ce projet.

de diffraction) symétriques et séparées par un DMD placé dans le plan de symétrie. Chacun des micro-miroirs du DMD peut être configuré en position de transmission¹ ou de réjection du signal lumineux, effectuant ainsi un filtrage spatial du signal. La première ligne $4f$ réalise sur le DMD une image diffractée de l'objet observé. Cette ligne $4f$ agit comme un spectromètre imageur dont la fente serait entièrement ouverte et le détecteur placé au niveau du DMD. Cette image est ainsi filtrée spatialement par le DMD. Cette combinaison optique produit un filtre spatio-spectral défini par la configuration du DMD. La deuxième ligne $4f$ introduit une diffraction opposée, assurant le démélange des composantes spectrales et spatiales sur le détecteur (CCD). Ainsi, dans le cas où tous les miroirs du DMD sont ouverts, le détecteur mesure l'image panchromatique de la scène.

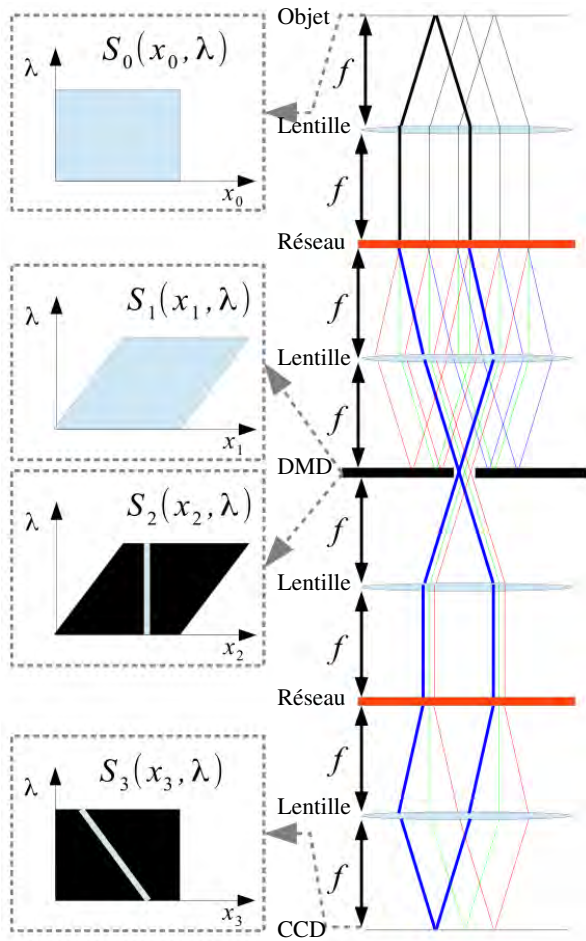


FIG. 1 – Schéma de principe du dispositif pour une ligne (x, λ) du cube HS. Chaque ligne est indépendante des autres.

¹La transmission est en fait assurée par la réflexion sur un miroir – le terme “transmission” est cependant préféré

2.2 Modélisation optique

La reconstruction hyperspectrale nécessite une modélisation fidèle du système d'acquisition [3]. Cette section décrit les différentes transformations que subit l'image dans le système optique, en modélisant la propagation le long de l'instrument de la densité spectrale de l'objet observé $S_0(x_0, y_0, \lambda)$, où x_0 et y_0 représentent la position dans le plan et λ la longueur d'onde.

On note $S_n(x_n, y_n, \lambda)$ la densité spectrale de l'objet dans le n -ième plan du dispositif. Chaque ligne (x, λ) du cube HS étant indépendante des autres, la variable y est omise : on ne considère dans la suite que $S_n(x_n, \lambda)$, la densité spectrale monodimensionnelle (suivant l'axe x) située au n -ième plan, tel qu'illustré Fig. 1. On note $T(x)$ la transmittance du DMD :

$$T(x) \triangleq \sum_{k=1}^K t_k \mathbb{I}_{\Delta}(x - \tilde{x}_k)$$

où x est la variable de position dans le plan du DMD, $\tilde{x}_k$ et la variable booléenne t_k représentant respectivement la position et l'état du k -ième micro-miroir du DMD, $\mathbb{I}_{\Delta}$ étant la fonction indicatrice sur l'intervalle $[-\Delta/2, \Delta/2]$, où Δ correspond à la largeur des miroirs, et K est le nombre de micro-miroirs.

La densité S_1 de l'image diffractée par le premier réseau s'écrit :

$$\begin{aligned} S_1(x_1, \lambda) &= \int \delta(x_0 - [x_1 + \alpha(\lambda - \lambda_0)]) S_0(x_0, \lambda) dx_0 \\ &= S_0(x_1 + \alpha(\lambda - \lambda_0), \lambda), \end{aligned}$$

où la longueur d'onde centrale λ_0 représente la longueur d'onde de la lumière se propageant le long de l'axe optique du système et le coefficient α représente la dispersion spectrale du système le long de l'axe x . Après le passage dans le DMD de transmittance $T(x)$, la densité de l'image diffractée devient :

$$\begin{aligned} S_2(x_2, \lambda) &= T(x_2) S_1(x_2, \lambda) \\ &= \sum_{k=1}^K t_k \mathbb{I}_{\Delta}(x_2 - \tilde{x}_k) S_0(x_2 + \alpha(\lambda - \lambda_0), \lambda). \end{aligned}$$

Le passage dans la deuxième ligne $4f$ inverse l'effet de la première ligne $4f$, la densité S_3 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} S_3(x_3, \lambda) &= \int \delta(x_2 - [x_3 - \alpha(\lambda - \lambda_0)]) S_2(x_2, \lambda) dx_2 \\ &= \sum_{k=1}^K t_k \mathbb{I}_{\Delta}(x_3 - \tilde{x}_k - \alpha(\lambda - \lambda_0)) S_0(x_3, \lambda). \end{aligned}$$

Finalement, on retrouve l'intensité reçue par le détecteur par intégration spectrale, puis par intégration spatiale sur la surface du détecteur de largeur Δ_d . L'intensité $I(c)$ mesurée sur la colonne c du détecteur, pour la ligne considérée, s'écrit donc en fonction de l'objet observé S_0 sous la forme :

$$\begin{aligned} I_3(x_3) &= \sum_{k=1}^K t_k \int \mathbb{I}_{\Delta}(x_3 - \tilde{x}_k - \alpha(\lambda - \lambda_c)) S_0(x_3, \lambda) d\lambda \\ I(c) &= \int \mathbb{I}_{\Delta_d}(x_3 - c) I_3(x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (1)$$

On voit apparaître ici la propriété de co-localisation : l'intensité $I(c)$ est liée à la densité spectrale initiale $S_0(x_3, \lambda)$ pour une position $x_3 \in [c - \Delta_d/2, c + \Delta_d/2]$ uniquement. Des exemples de telles données sont représentés Fig. 3 pour différentes configurations de la ligne correspondante du DMD.

2.3 Modélisation matricielle

Le modèle analytique de l'équation (1) ne peut être exploité tel quel pour la reconstruction de l'image HS à partir des acquisitions et l'on va procéder à sa discrétisation. Ce modèle étant linéaire vis-à-vis de l'objet S_0 , on peut obtenir par discrétisation une relation matricielle entre les données (la ligne $I(c)$ de l'image acquise sur le détecteur) et l'objet S_0 . En première approximation, en considérant l'objet $S_0(x_3, \lambda)$ constant sur des intervalles de longueur d'onde Δ (centrées en $\tilde{\lambda}_{c,k}$) et de positions Δ_d (correspondant à la largeur du pixel c sur le CCD), on peut écrire simplement :

$$I(c) \approx \frac{\Delta \Delta_d}{\alpha} \sum_{k=1}^K t_k S_0(c, \tilde{\lambda}_{c,k}),$$

ce qui s'écrit pour une configuration donnée des micro-miroirs sous forme matricielle $\mathbf{I} = \mathbf{T}\mathbf{o}$, avec $\mathbf{I}$ le vecteur contenant les valeurs des C pixels de la colonne du détecteur, $\mathbf{o}$ le vecteur contenant la valeur de la densité spectrale de l'objet S_0 pour les C positions spatiales et L longueurs d'ondes.

Grâce à la propriété de co-localisation ($\mathbf{I}(c)$ ne dépend pas de l'objet $S_0(c', \lambda)$ pour $c' \neq c$), la matrice $\mathbf{T}$ est très creuse, ce qui est un avantage pour la reconstruction de l'image HS à partir des données. Notons que lorsque tous les micro-miroirs sont en position de transmission ($t_k = 1, \forall k$), les données correspondent à la somme pour toutes les longueurs d'ondes de la densité spectrale de l'objet, soit à l'image panchromatique.

Dans la suite, on cherchera à reconstruire l'objet hyperspectral $\mathbf{o}$ à partir de N acquisitions $\mathbf{I}^{(n)}$ effectuées pour plusieurs configurations des micro-miroirs $t_k^{(n)}$, et donc pour des matrices différentes $\mathbf{T}^{(n)}$, ce qui peut encore s'écrire sous forme matricielle en rassemblant l'ensemble des données dans un même vecteur $\mathbf{d}$ de dimension NC et l'ensemble des matrices dans une même matrice $\mathbf{H}$ de dimension $NC \times CL$:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{I}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{T}^{(N)} \end{bmatrix} \mathbf{o} = \mathbf{H}\mathbf{o}. \quad (2)$$

3 Reconstruction du cube hyperspectral

L'objectif de la reconstruction de l'image HS $\mathbf{o}$ de l'objet observé consiste à estimer $\mathbf{o}$ à partir de données $\mathbf{d}$ bruitées. Le principal défi est de reconstruire l'objet à partir d'un faible nombre d'acquisitions ($N < L$). Ce problème inverse ne peut être résolu par inversion directe du fait de la sous-détermination du système (2), et nécessite donc d'être régularisé. De nombreux travaux ont été effectués sur la régularisation des problèmes inverses (voir par exemple [4]) visant à intégrer de façon pertinente et efficace de l'information *a priori* sur les objets observés.

Une approche classique de la régularisation consiste à minimiser un critère pénalisé de la forme :

$$\hat{\mathbf{o}} = \arg \min_{\mathbf{o}} (\|\mathbf{d} - \mathbf{H}\mathbf{o}\|^2 + \Omega(\mathbf{o})), \quad (3)$$

le premier terme de ce critère vise à reconstruire une solution compatible avec les données, le second terme de régularisation vise à favoriser certaines propriétés de l'objet. Ainsi, récemment, des travaux s'appuyant sur la parcimonie de l'objet dans une base d'ondelettes ont montré son efficacité pour la reconstruction de cubes hyperspectraux à partir de dispositifs proches du nôtre [5]. Cependant, les algorithmes d'optimisation utilisés pour une telle approche sont coûteux en temps de calcul.

Nous nous intéressons ici à des algorithmes de reconstructions rapides, en vue d'une utilisation adaptative du dispositif, mais permettant néanmoins de prendre en compte des caractéristiques des objets observés. Aussi, nous nous focalisons dans cette étude sur une régularisation de type Tikhonov, avec un terme de régularisation $\Omega(\mathbf{o})$ quadratique, permettant le calcul de la solution via la simple résolution d'un système linéaire.

Une simple régularisation quadratique sur la norme de l'objet $\Omega(\mathbf{o}) = \|\mathbf{o}\|^2$ n'étant pas pertinente (solution de norme minimale), nous privilégions une régularisation de douceur, de la forme $\Omega(\mathbf{o}) = \mu_x \|\mathbf{D}_x \mathbf{o}\|^2 + \mu_\lambda \|\mathbf{D}_\lambda \mathbf{o}\|^2$, $\mathbf{D}_x$ et $\mathbf{D}_\lambda$ représentant l'approximation de l'opérateur de dérivation suivant x et λ respectivement et μ_x et μ_λ les coefficients de régularisation associés. Dans ce cas, l'équation (3) dispose d'une solution analytique :

$$\hat{\mathbf{o}} = (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \mu_x \mathbf{D}_x^t \mathbf{D}_x + \mu_\lambda \mathbf{D}_\lambda^t \mathbf{D}_\lambda)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{d}. \quad (4)$$

Notons que dans notre cas, les matrices $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}_x$ et $\mathbf{D}_\lambda$ étant très creuses, le coût de calcul de cette solution est très faible au regard des dimensions du problème.

Toutefois, cette solution comporte un défaut majeur lié à la pénalisation quadratique : la douceur imposée entraîne un lissage de l'image au niveau des contours, entraînant une perte de résolution (ici à la fois spatiale et spectrale). Pour pallier ce défaut de nombreux travaux ont proposé de remplacer la régularisation quadratique par une régularisation (non quadratique) préservant les contours [4]. Notons que certains algorithmes d'optimisation associés s'appuient sur le calcul, à chaque itération, de solutions similaires à (4), via des approximations majorantes quadratiques du critère, donc leur coût de calcul est donc largement supérieur à une telle solution.

Nous avons choisi ici de profiter du caractère pilotable du dispositif : celui-ci permet, en configurant tous les micro-miroirs en transmission, d'obtenir directement une image panchromatique de l'objet observé. On peut alors envisager d'effectuer une segmentation de cette image afin de détecter les zones homogènes de l'image, et d'appliquer le terme de régularisation quadratique uniquement au sein de ces zones. D'un point de vue pratique, cela consiste simplement à supprimer les lignes de la matrice $\mathbf{D}_x$ correspondant à la différence entre des pixels situés de part et d'autre d'un contour. Cela permet donc de préserver les contours spatiaux tout en conservant une régularisation quadratique, et donc une solution analytique de la forme de (4) avec une matrice $\mathbf{D}_x$ légèrement modifiée.

4 Premiers résultats

Nous présentons ici quelques résultats de simulations pour illustrer la méthode de reconstruction. Nous exploitons l'image HS d'une scène réelle², extraite de l'étude [6]. L'image est illustrée Fig. 2, la ligne utilisée pour nos simulations est indiquée en blanc. La figure montre la coupe du cube HS au niveau de cette ligne, de dimension $C \times L$, avec $C = 200$ pixels dans la dimension spatiale et $L = 49$ dans la dimension spectrale λ . Il s'agit des données que l'on cherche à reconstruire. Les intensités RGB et panchromatique de cette ligne sont représentées, ainsi que le résultat de la détection de contours.

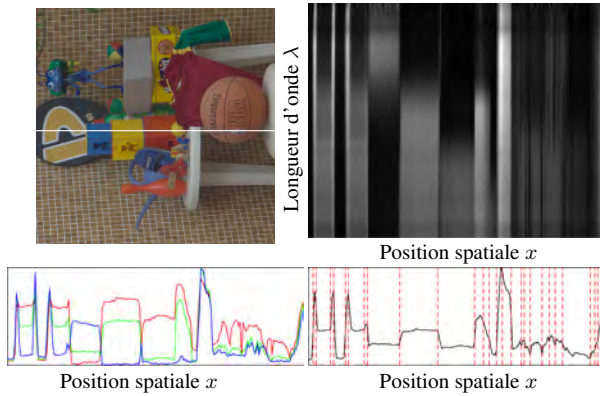


FIG. 2 – En haut : vue RGB de l'image test, et coupe dans le plan (x, λ) de la ligne exhibée en blanc. En bas : intensités RGB et panchromatique le long de cette ligne, avec contours détectés.

Les Intensités $I^{(n)}$, de dimension C , sont simulées suivant le modèle direct de l'équation (1) en prenant un pas d'échantillonnage en longueur d'onde $\frac{\Delta}{\alpha}$ afin qu'un décalage d'un pixel en λ corresponde à un décalage d'un pixel de l'image HS et à un pixel sur le détecteur (soit $\Delta_d = \Delta$). Les données correspondent à ces intensités pour $N = 10$ configurations différentes du DMD, générées aléatoirement suivant une variable de Bernoulli avec $P(t_k = 1) = 40\%$ (40% des micro-miroirs en transmission), auxquelles ont été ajouté un bruit blanc Gaussien, pour un rapport signal à bruit de 20dB. Quatre de ces jeux de données sont illustrés Fig. 3 avec les configurations des micro-miroirs associées.

Les résultats de la reconstruction par régularisation sont illustrés Fig. 4 : avec la régularisation classique (gauche), puis avec la régularisation exploitant la détection de contours sur l'image panchromatique (droite).

Les paramètres de régularisation μ_x et μ_λ ont été déterminés de manière à minimiser la puissance de l'erreur relative de reconstruction. En l'absence d'extraction de contours une erreur de 6.45% a été obtenue pour des valeurs $(\mu_x, \mu_\lambda) = (50, 200)$, tandis qu'avec l'extraction de contours on obtient une erreur de 4.02% pour des valeurs $(\mu_x, \mu_\lambda) = (50, 70)$. La détection

²L'image est ré-orientée de 90° pour obtenir une ligne avec un spectre varié.

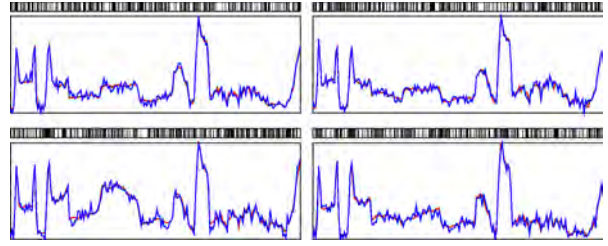


FIG. 3 – Exemple de données : 4 jeux de données (lignes $I(c)$) avec et sans bruit, et configuration des micro-miroirs associées.

de contours permet donc tout d'abord une reconstruction plus fidèle. De plus, elle se fait avec un coefficient de régularisation spectrale moins fort, limitant la perte de résolution spectrale.

En conclusion, on constate que l'on peut bien reconstruire, par simple régularisation quadratique, des images HS à partir d'un faible nombre d'acquisitions (5 fois moins de données que d'inconnues). On constate également qu'une modification minimale de la régularisation, en prenant en compte la détection de contours sur l'image panchromatique, permet d'améliorer la reconstruction, tant au niveau des contours spatiaux que des zones homogènes.

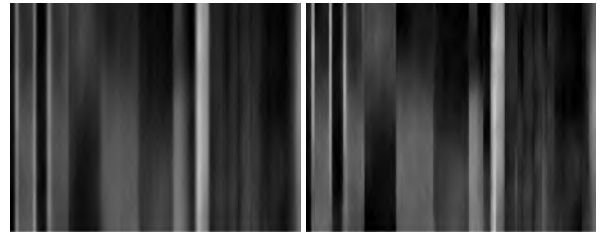


FIG. 4 – Exemple de reconstruction sans détection de contours (gauche) et avec (droite.)

Références

- [1] N. Hagen and M.W. Kudenov, *Review of snapshot spectral imaging technologies*, Optical Engineering, 52(9), sep. 2013.
- [2] ME Gehm, R John, DJ Brady, RM Willett, and TJ Schulz, *Single-shot compressive spectral imaging with a dual-disperser architecture*. Optics Express, 15(21), 2007.
- [3] S. McGregor, S. Lacroix and A. Monmayrant, *Adaptive hyper-spectral imager : design, modeling, and control*. Journal of Optics, 17(8), aug. 2015.
- [4] J. Idier, *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Hermès, nov. 2001.
- [5] G.R. Arce, D.J. Brady, L. Carin, H. Arguello and D.S. Kittle, *Compressive Coded Aperture Spectral Imaging : An Introduction*, IEEE Signal Processing Magazine, 31(1), jan. 2015.
- [6] D.H. Foster, K. Amano, S.M.C. Nascimento, and M.J. Foster, *Frequency of metamerism in natural scenes*, J. Opt. Soc. Am. A, (23)10, oct. 2006.

Bibliographie

- [ABS07] B. Aiazzi, S. Baronti, and M. Selva. Improving component substitution pansharpening through multivariate regression of MS +Pan data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(10) :3230–3239, October 2007.
- [ACLM17] I. Ardi, H. Carfantan, S. Lacroix, and A. Monmayrant. Reconstruction d’images hyperspectrales à faible coût pour un imageur pilotable à double dispersion. In *Colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images (GRETSI 2017)*, Juan les Pins, France, September 2017.
- [ACLM18] I. Ardi, H. Carfantan, S. Lacroix, and A. Monmayrant. Fast hyperspectral cube reconstruction for a double disperser imager. In *26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2018)*, Roma, Italy, September 2018.
- [AdH16] R. Arablouei and F. de Hoog. Hyperspectral image recovery via hybrid regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 25(12) :5649–5663, December 2016.
- [AMH95] G. P. Abousleman, M. W. Marcellin, and B. R. Hunt. Compression of hyperspectral imagery using the 3-D DCT and hybrid DPCM/DCT. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 33(1) :26–34, January 1995.
- [ARC⁺20] I. Ardi, T. Rouvier, H. Carfantan, S. Lacroix, and A. Monmayrant. Two fast reconstruction approaches leveraging the panchromatic image for a configurable dual-disperser imager. Technical report, IRAP–UPS/CNRS/CNES et LAAS–CNRS, France, July 2020.
- [Bad97] R. Baddeley. The correlational structure of natural images and the calibration of spatial representations. *Cognitive Science*, 21(3) :351 – 371, July 1997.
- [BKGK17] S.-H. Baek, I. Kim, D. Gutierrez, and M. H. Kim. Compact single-shot hyperspectral imaging using a prism. *ACM Transactions on Graphics*, 36(6), November 2017.
- [BSFG09] C. Barnes, E. Shechtman, A. Finkelstein, and D. B Goldman. Patchmatch : A randomized correspondence algorithm for structural image editing. *ACM Transactions on Graphics*, 28(3), July 2009.
- [BSvD99] M. Benzi, D. B. Szyld, and A. van Duin. Orderings for incomplete factorization preconditioning of nonsymmetric problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(5) :1652–1670, July 1999.
- [CBFAB97] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, IP-6(2) :298–311, February 1997.
- [CCTH11] L. Chang, Y. Chang, Z. S. Tang, and B. Huang. Group and region based parallel compression method using signal subspace projection and band clustering for hyperspectral imagery. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 4(3) :565–578, September 2011.

- [CJN⁺17] I. Choi, D. S. Jeon, G. Nam, D. Gutiérrez, and M. H. Kim. High-quality hyperspectral reconstruction using a spectral prior. *ACM Transactions on Graphics*, 36(6) :1–13, November 2017.
- [CRT06] E. J. Candes, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(2) :489–509, February 2006.
- [CT04] L. Chang and Y. P. Tan. Effective use of spatial and spectral correlations for color filter array demosaicking. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 50(1) :355–365, February 2004.
- [CZ11] A. Chakrabarti and T. Zickler. Statistics of real-world hyperspectral images. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2011)*, pages 193–200, June 2011.
- [Dau88] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(7) :909–996, 1988.
- [Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, USA, 1992.
- [DCMR95] G. M. Del Corso, O. Menchi, and F. Romani. Krylov subspace methods for solving linear systems. Technical report, Università di Pisa, Dipartimento di Informatica, 1995.
- [Dem89] G. Demoment. Image reconstruction and restoration : Overview of common estimation structure and problems. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-37(12) :2024–2036, December 1989.
- [DET06] D. L. Donoho, M. Elad, and V. N. Temlyakov. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(1) :6–18, January 2006.
- [DF07] Q. Du and J. E. Fowler. Hyperspectral image compression using JPEG2000 and principal component analysis. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 4(2) :201–205, October 2007.
- [DHS⁺18] C. Deng, X. Hu, J. Suo, Y. Zhang, Z. Zhang, and Q. Dai. Snapshot hyperspectral imaging via spectral basis multiplexing in Fourier domain. *Optic Express*, 26(25) :32509–32521, December 2018.
- [DJL92] R. A. DeVore, B. Jawerth, and B. J. Lucier. Image compression through wavelet transform coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2) :719–746, March 1992.
- [Don06] D. L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(4) :1289–1306, April 2006.
- [DRA15] N. Diaz, H. Rueda, and H. Arguello. High-dynamic range compressive spectral imaging by adaptive filtering. In *International Workshop on Compressed Sensing Theory and its Applications to Radar, Sonar and Remote Sensing (CoSeRa 2015)*, pages 89–93, 2015.
- [DZYF09] Q. Du, W. Zhu, H. Yang, and J. E. Fowler. Segmented principal component analysis for parallel compression of hyperspectral imagery. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 6(4) :713–717, October 2009.
- [EBF10] J. M. Eichenholz, N. Barnett, and D. Fish. Sequential filter wheel multispectral imaging systems. In *Imaging and Applied Optics Congress*. Optical Society of America, June 2010.

-
- [FHC⁺20] X. Feng, L. He, Q. Cheng, X. Long, and Y. Yuan. Hyperspectral and multispectral remote sensing image fusion based on endmember spatial information. *Remote Sensing*, 12 :1009, March 2020.
 - [FR06] J.E. Fowler and J. T. Rucker. *Three-Dimensional Wavelet-Based Compression of Hyperspectral Imagery*, chapter 14, pages 379–407. John Wiley & Sons, Ltd, September 2006.
 - [FZSS16] Y. Fu, Y. Zheng, I. Sato, and Y. Sato. Exploiting spectral-spatial correlation for coded hyperspectral image restoration. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2016)*, pages 3727–3736, 2016.
 - [GJB⁺07] M. E. Gehm, R. John, D. J. Brady, R. M. Willett, and T. J. Schulz. Single-shot compressive spectral imaging with a dual-disperser architecture. *Optic Express*, 15(21), October 2007.
 - [GKG99] S. Grgic, K. Kers, and M. Grgic. Image compression using wavelets. In *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE 1999)*, volume 1, pages 99–104 vol.1, 1999.
 - [GLM⁺17] L. Galvis, D. Lau, X. Ma, H. Arguello, and G. R. Arce. Coded aperture design in compressive spectral imaging based on side information. *Applied Optics*, 56(22) :6332–6340, August 2017.
 - [GR92] D. Geman and G. Reynolds. Constrained restoration and recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-14(3) :367–383, March 1992.
 - [GY95] D. Geman and C. Yang. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, IP-4(7) :932–946, July 1995.
 - [GZZF14] S. Gu, L. Zhang, W. Zuo, and X. Feng. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2014)*, pages 2862–2869, 2014.
 - [HAL⁺20] E. Hemsley, I. Ardi, S. Lacroix, H. Carfantan, and A. Monmayrant. Optimized coded aperture for frugal hyperspectral image recovery using a dual-disperser system. *submitted to the Journal of the Optical Society of America A*, July 2020.
 - [HBS92] P. J. B. Hancock, R. J. Baddeley, and L. S. Smith. The principal components of natural images. *Network : Computation in Neural Systems*, 3(1) :61–70, July 1992.
 - [HLCM20] E. Hemsley, S. Lacroix, H. Carfantan, and A. Monmayrant. Calibration of programmable spectral imager with dual disperser architecture. *Optics Communications*, 468 :125767, August 2020.
 - [HZCF19] L. He, Y. Zhu, X. Chang, and X. Feng. Image fusion for high-resolution optical satellites based on panchromatic spectral decomposition. *Sensors*, 19 :2619, June 2019.
 - [I⁺01] J. Idier et al. Approche bayésienne pour les problèmes inverses. *Hermès, Paris*, 2001.
 - [Idi01] J. Idier. Convex half-quadratic criteria and interacting auxiliary variables for image restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(7) :1001–1009, July 2001.
 - [Int94] International Organization for Standardization. *ISO/IEC 10918-1 :1994 : Information technology — Digital compression and coding of continuous-tone still images : Requirements and guidelines*. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 1994.

- [Int00] International Organization for Standardization. *ISO/IEC 15444-1 :2000 : Information technology — JPEG 2000 image coding system — Part 1 : Core coding system*, volume 226. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2000.
- [JWF⁺07] W. R. Johnson, D. W. Wilson, W. Fink, M. S. Humayun, and G. H. Bearman. Snapshot hyperspectral imaging in ophthalmology. *Journal of Biomedical Optics*, 12(1) :1 – 7, January 2007.
- [KB09] T. G. Kolda and B. W. Bader. Tensor decompositions and applications. *SIAM Review*, 51(3) :455–500, August 2009.
- [KBM⁺06] P. Kulkarni, A. Bilgin, M. W. Marcellin, J. Dagher, J. H. Kasner, T. J. Flohr, and J. C. Rountree. *Compression of Earth Science Data with JPEG2000*, pages 347–378. Springer US, Boston, MA, June 2006.
- [KCWB10] D. Kittle, K. Choi, A. Wagadarikar, and D. J. Brady. Multiframe image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers. *Applied Optics*, 49(36) :6824–6833, December 2010.
- [KMW⁺11] R. Kawakami, Y. Matsushita, J. Wright, M. Ben-Ezra, Y. Tai, and K. Ikeuchi. High-resolution hyperspectral imaging via matrix factorization. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2011)*, pages 2329–2336, 2011.
- [KYM12] A. Karami, M. Yazdi, and G. Mercier. Compression of hyperspectral images using discrete wavelet transform and Tucker decomposition. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 5(2) :444–450, April 2012.
- [LGG⁺14] A. Lambrechts, P. Gonzalez, B. Geelen, P. Soussan, K. Tack, and M. Jayapala. A CMOS-compatible, integrated approach to hyper- and multispectral imaging. In *IEEE International Electron Devices Meeting*, pages 10.5.1–10.5.4, 2014.
- [LLF⁺16] T. Lu, S. Li, L. Fang, Y. Ma, and J. A. Benediktsson. Spectral-spatial adaptive sparse representation for hyperspectral image denoising. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 54(1) :373–385, January 2016.
- [LLWD14] X. Lin, Y. Liu, J. Wu, and Q. Dai. Spatial-spectral encoded compressive hyperspectral imaging. *ACM Transactions on Graphics*, 33(6), November 2014.
- [LM86] P. G. Lemarié and Yves Meyer. Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2(1-2) :1–18, 1986.
- [LMM⁺16] C. Li, Y. Ma, X. Mei, C. Liu, and J. Ma. Hyperspectral image classification with robust sparse representation. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 13(5) :641–645, May 2016.
- [LRS⁺18] G. Liu, F. A. Reda, K. J. Shih, T.-C. Wang, A. Tao, and B. Catanzaro. Image inpainting for irregular holes using partial convolutions. In *European Conference on Computer Vision (ECCV 2018)*, pages 85–100, September 2018.
- [LWLD14] X. Lin, G. Wetzstein, Y. Liu, and Q. Dai. Dual-coded compressive hyperspectral imaging. *Optics Letters*, 39(7) :2044–2047, April 2014.
- [LWS00] T.-W. Lee, T. Wachtler, and T. J. Sejnowski. The spectral independent components of natural scenes. In S.-W. Lee, H. H. Bülthoff, and T. Poggio, editors, *Biologically Motivated Computer Vision*, pages 527–534. Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [LZGY16] X. Li, Y. Zhang, Y. Gao, and S. Yue. Using guided filtering to improve Gram-Schmidt based pansharpening method for GeoEye-1 satellite images. In *Proceedings of the 4th International Conference on Information Systems and Computing Technology*, December 2016.

-
- [MB04] F. Melgani and L. Bruzzone. Classification of hyperspectral remote sensing images with support vector machines. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42(8) :1778–1790, August 2004.
 - [MLM15] S. McGregor, S. Lacroix, and A. Monmayrant. Adaptive hyperspectral imager : design, modeling, and control. *Journal of Optics*, 17(8) :085607, August 2015.
 - [Pet05] G. Petrie. Airborne pushbroom line scanners : An alternative to digital frame cameras. *GeoInformatics*, 8 :50–57, January 2005.
 - [PL03] B. Potetz and T. S. Lee. Statistical correlations between two-dimensional images and three-dimensional structures in natural scenes. *Journal of the Optical Society of America A*, 20(7) :1292–1303, July 2003.
 - [PR06] M. R. Pickering and M. J. Ryan. *An Architecture for the Compression of Hyperspectral Imagery*, pages 1–34. Springer US, Boston, MA, 2006.
 - [PTMO06] B. Penna, T. Tillo, E. Magli, and G. Olmo. Progressive 3-D coding of hyperspectral images based on JPEG 2000. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 3(1) :125–129, January 2006.
 - [RAA14] H. Rueda, H. Arguello, and G. R. Arce. Compressive spectral imaging based on colored coded apertures. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2014)*, pages 7799–7803, 2014.
 - [RB05] S. Roth and M. J. Black. Fields of experts : a framework for learning image priors. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2005)*, volume 2, pages 860–867 vol. 2, 2005.
 - [RB09] N. Renard and S. Bourennane. Dimensionality reduction based on tensor modeling for classification methods. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 47(4) :1123–1131, April 2009.
 - [RBB08] N. Renard, S. Bourennane, and J. Blanc-Talon. Denoising and dimensionality reduction using multilinear tools for hyperspectral images. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 5(2) :138–142, April 2008.
 - [RFY05] J.T. Rucker, J. Fowler, and N.H. Younan. JPEG2000 coding strategies for hyperspectral data. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS 2005)*, volume 1, August 2005.
 - [RKT⁺13] A. Rajwade, D. Kittle, T.-H. Tsai, D. Brady, and L. Carin. Coded hyperspectral imaging and blind compressive sensing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(2) :782–812, April 2013.
 - [ROF92] L. Rudin, S. Osher, and C. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithm. *Physica D*, 60 :259–268, November 1992.
 - [ROM15] N. R. Rema, B. A. Oommen, and P. Mythili. Image compression using SPIHT with modified spatial orientation trees. *Procedia Computer Science*, 46 :1732–1738, December 2015. Proceedings of the International Conference on Information and Communication Technologies (ICICT 2014).
 - [Saa03] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, January 2003.
 - [SLD82] M. V. Srinivasan, S. B. Laughlin, and A. Dubs. Predictive coding : a fresh view of inhibition in the retina. *Cognitive Science*, 21(3) :351–371, November 1982.
 - [TA77] A.N. Tikhonov and V.A.J. Arsenin, editors. *Solution of Ill-posed Problems*. Winston and Sons, Washington, 1977.
 - [TP06] X. Tang and W. A. Pearlman. *Three-Dimensional Wavelet-Based Compression of Hyperspectral Images*, pages 273–308. Springer US, Boston, MA, 2006.

- [TZS⁺20] C. Tao, H. Zhu, P. Sun, R. Wu, and Z. Zheng. Hyperspectral image recovery based on fusion of coded aperture snapshot spectral imaging and RGB images by guided filtering. *Optics Communications*, 458, October 2020.
- [WF07] Y. Weiss and W. T. Freeman. What makes a good model of natural images? In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2007)*, pages 1–8, 2007.
- [WJWB08] A. Wagadarikar, R. John, R. Willett, and D. Brady. Single disperser design for coded aperture snapshot spectral imaging. *Applied Optics*, 47(10) :B44–B51, April 2008.
- [WMA11] Y. Wu, I. O. Mirza, G. R. Arce, and D. W. Prather. Development of a digital-micromirror-device-based multishot snapshot spectral imaging system. *Optics Letters*, 36(14) :2692–2694, July 2011.
- [WXG⁺15] L. Wang, Z. Xiong, D. Gao, G. Shi, W. Zeng, and F. Wu. High-speed hyperspectral video acquisition with a dual-camera architecture. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2015)*, pages 4942–4950, 2015.
- [WXS⁺16] L. Wang, Z. Xiong, G. Shi, W. Zeng, and F. Wu. Compressive hyperspectral imaging with complementary RGB measurements. In *2016 Visual Communications and Image Processing (VCIP)*, pages 1–4, 2016.
- [WZM⁺18] X. Wang, Y. Zhang, X. Ma, T. Xu, and G. R. Arce. Compressive spectral imaging system based on liquid crystal tunable filter. *Optic Express*, 26(19) :25226–25243, September 2018.
- [XWL⁺17] Z. Xiong, L. Wang, H. Li, D. Liu, and F. Wu. Snapshot hyperspectral light field imaging. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2017)*, pages 6873–6881, 2017.
- [YTZ⁺15] X. Yuan, T. Tsai, R. Zhu, P. Llull, D. Brady, and L. Carin. Compressive hyperspectral imaging with side information. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 9(6) :964–976, September 2015.
- [YWL⁺15] S. Yang, M. Wang, P. Li, L. Jin, v Wu, and L. Jiao. Compressive hyperspectral imaging via sparse tensor and nonlinear compressed sensing. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 53(11) :5943–5957, November 2015.
- [ZFL08] J. Zhang, J. E. Fowler, and G. Liu. Lossy-to-lossless compression of hyperspectral imagery using three-dimensional TCE and an integer KLT. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 5(4) :814–818, October 2008.