

Optique de Fourier des ondes de surface

Sommaire

2.1	Équation de Helmholtz pour les ondes de surface	19
2.1.1	Équation de Helmholtz pour les ondes de surface	19
2.1.2	Relation de dispersion des ondes de surface	23
2.1.2.1	Interface simple	24
2.1.2.2	Cas général	24
2.1.3	Développement angulaire du champ des ondes de surface	25
2.2	Principe d’Huygens-Fresnel	28
2.2.1	Rappels généraux	28
2.2.2	Principe d’Huygens-Fresnel pour les ondes de surface	30
2.3	Diffraction d’ondes de surface	35
2.3.1	Ouverture simple	35
2.3.2	Fentes d’Young	35
2.4	Focalisation d’ondes de surface	40
2.4.1	Lentille zonée de Fresnel	40
2.4.2	Focalisation sur une surface de carbure de silicium	41
2.4.2.1	Approximation de Kirchhoff	43
2.4.2.2	Champs obtenus	44
2.5	Optique géométrique des ondes de surface	46
2.5.1	Équation eikonale pour les ondes de surface	46
2.5.2	Équation des rayons d’ondes de surface en milieu inhomogène	48

L’optique géométrique traite le champ électromagnétique en termes de rayons lumineux, d’objets et d’images, éventuellement ponctuels. Dans le cadre plus général des équations de Maxwell, on montre que l’image d’un point, après avoir traversé un système optique, ne peut être rigoureusement ponctuelle.

Avec des ondes progressives, on ne peut concentrer l’énergie électromagnétique dans des volumes de dimensions inférieures à $\lambda/2$. Réciproquement, on ne peut observer *via* ces ondes progressives de détails de dimensions inférieures à $\lambda/2$. Cela a pour conséquence notamment de limiter la résolution de la microscopie classique avec de la lumière visible à quelques centaines de nanomètres (RIGNEAULT et al. 2005a). Comme nous l’avons vu au chapitre précédent, les ondes de surface ont la particularité de posséder des vecteurs d’ondes « hors du cône de lumière », et donc des longueurs d’ondes inférieures à celles des ondes progressives. Cette

propriété peut être exploitée afin de focaliser l'énergie électromagnétique dans des volumes dont au moins l'une des dimensions est plus faible que $\lambda/2$ – la limite est désormais $\lambda_{sp}/2$, où λ_{sp} est la longueur d'onde des ondes de surface. Il y a donc un grand intérêt à revisiter les principes de l'optique en exploitant cette propriété des ondes de surface. Ce chapitre se propose de donner un cadre théorique à l'optique de Fourier et l'optique géométrique des ondes de surface.

Ainsi, de nombreuses expériences ont démontré la possibilité de focaliser les ondes de surface à l'aide d'une lentille zonée de Fresnel pour les ondes de surface (FENG et al. 2007) ou à l'aide de diffuseurs à proximité d'une surface disposés en arc-de-cercle (EVLYUKHIN et al. 2007 ; HUBER et al. 2008). Plusieurs groupes ont démontré la possibilité de réaliser des composants optiques passifs pour les ondes de surface (tels que des lentilles ou des miroirs paraboliques (HOHENAU et al. 2005 ; FENG et al. 2007), ainsi que des composants plus originaux de l'optique transformationnelle tels que les lentilles de Lüneburg et de Eaton (ZENTGRAF et al. 2011)). ZAYATS et al. (2005) passent en revue de nombreux travaux portant notamment sur la réflexion et la diffusion d'ondes de surface.

Il est à noter que d'autres outils peuvent être utilisés pour concentrer l'énergie électromagnétique dans des volumes sub-longueur d'onde, notamment les plasmons et phonons de surface localisés (SCHULLER et al. 2010) ou encore le retournement temporel en milieu diffusant (LEROSEY et al. 2007 ; CARMINATI et al. 2007).

Afin de modéliser des résultats d'optique à l'aide d'ondes de surface plus simplement qu'en traitant le champ électromagnétique dans tout l'espace, certains groupes ont transposé le principe d'Huygens-Fresnel aux ondes de surface, en traitant ces dernières comme une onde scalaire (LALUET et al. 2007 ; KIM et al. 2008 ; ZIA et BRONGERSMA 2007 ; HUBER et al. 2008). D'autres groupes ont utilisé une expression approchée du champ vectoriel des ondes de surface (CHANG et al. 2005 ; YIN et al. 2005).

Il est à noter que la connaissance du champ électromagnétique complet des ondes de surface est également importante en microscopie de champ proche, où la grandeur cartographiée dépend de la sonde utilisée (VAN LABEKE et BARCHIESI 1993 ; PORTO et al. 2000).

Dans ce chapitre, partant des équations de Maxwell, nous allons établir rigoureusement plusieurs outils pour décrire la propagation des ondes de surface, tenant compte du caractère vectoriel de leur champ : nous allons montrer que le champ des ondes de surface satisfait une équation de Helmholtz « 2D », nous allons également établir un principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface (sous forme d'une équation intégrale de Helmholtz et Kirchhoff, voir BORN et WOLF 1999). Ceci permettra de jeter les bases rigoureuses d'une optique de Fourier des ondes de surface. Enfin, nous verrons ensuite comment écrire une équation eikonale pour les ondes de surface décrivant leur propagation dans une limite « géométrique », analogue à la limite de l'optique géométrique pour les ondes électromagnétiques usuelles.

Certains de ces résultats, concernant le propagateur de Fourier et le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface, ont été publiés dans (ARCHAMBAULT et al. 2009) et (TEPERIK et al. 2009) respectivement.

2.1 Équation de Helmholtz pour les ondes de surface

Dans cette section, nous allons établir une équation de Helmholtz pour les ondes de surface. Dans les sections suivantes, nous établirons un principe d'Huygens-Fresnel et une équation eikonale pour les ondes de surface. Ces résultats s'appliquent aux ondes de surface d'une hétérostructure quelconque. Il peut s'agir d'une interface simple entre de l'air ou un diélectrique et un métal (tel que l'or ou l'argent) ou un cristal polaire (tel que le carbure de silicium), ou d'un film constitué d'un métal ou d'un cristal polaire entouré d'air ou d'un diélectrique (figure 2.1), mais il peut s'agir de systèmes plus complexes, dont la forme générale est représentée



FIGURE 2.1 – Exemples de systèmes stratifiés considérés dans ce chapitre. Gauche : interface simple entre de l'air ou un diélectrique (haut), et un métal (tel que de l'argent ou de l'or) ou un cristal polaire (tel que le carbure de silicium), supportant des SPP (métal) ou des SPhP (cristal polaire). Droite : film constitué d'un métal ou d'un cristal polaire, entouré d'air ou d'un milieu diélectrique, supportant des SPP ou des SPhP symétriques (*short range*) et antisymétriques (*long range*). Il ne s'agit que d'exemples, les résultats établis dans ce chapitre s'appliquent à tout type d'hétérostructure supportant des ondes de surface.

sur la figure 2.2. Ses interfaces sont perpendiculaires à l'axe z et on note la constante diélectrique $\epsilon(z, \omega)$.

Nous nous plaçons en régime harmonique de pulsation ω réelle. Dans ce cas, à cause des pertes dans les matériaux présents, les relations de dispersion des ondes de surface présentent un repliement (*back-bending*), comme sur la figure 2.3.

Afin de rappeler les résultats correspondants de l'optique de Fourier usuelle, à trois dimensions, et de montrer l'analogie entre celle-ci et l'optique de Fourier des ondes de surface, nous considérerons également un milieu uniforme d'indice n . Nous noterons $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ le champ électrique des ondes de surface, et $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ le champ électrique du milieu uniforme d'indice n . Dans ce qui suit, nous rappellerons des résultats bien connus de l'optique de Fourier pour $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ puis établirons des résultats correspondants pour $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

2.1.1 Équation de Helmholtz pour les ondes de surface

Dans la géométrie étudiée, il est possible de séparer les champs de polarisation TE et de polarisation TM. Les champs construits avec des ondes de polarisation TE (ou s) sont caractérisés par un champ électrique E_z nul. Les champs construits avec des ondes de polarisation TM (ou p) sont caractérisés par un champ magnétique H_z nul. Dans ce qui suit, on cherche une solution de polarisation TM, de sorte que $H_z = 0$.

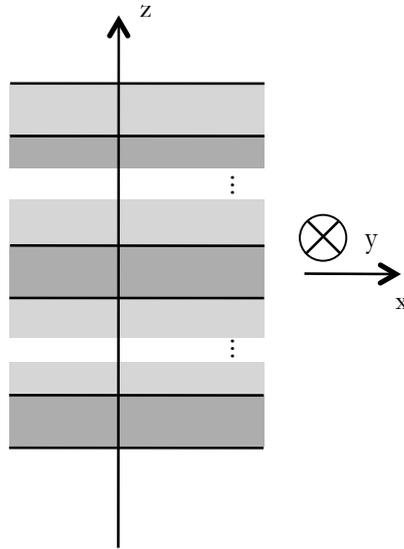


FIGURE 2.2 – Forme générale d'hétérostructure considérée dans ce chapitre. Le système est invariant par translation dans les directions x et y . Les différents milieux sont séparés par des interfaces planes perpendiculaires à l'axe z .

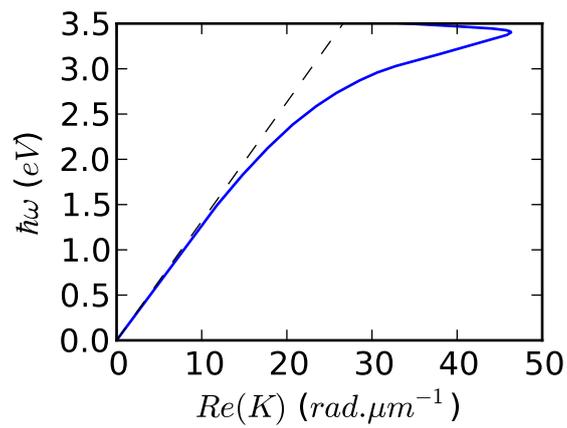


FIGURE 2.3 – Relation de dispersion des SPP d'une interface argent/air, avec une pulsation ω réelle.

Nous allons nous intéresser à la composante E_z du champ électrique des ondes de surface, car nous pourrions en déduire toutes les autres composantes de \mathbf{E} et \mathbf{H} . Nous allons supposer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(x, y)f(z). \quad (2.1)$$

Cette écriture de $E_z(\mathbf{r})$ se justifie par les rôles différents joués par les directions parallèles, x et y , et perpendiculaire, z , des hétérostructures des figures 2.1 et 2.2. Nous nous intéressons à E_z car il s'agit de la seule composante du champ électromagnétique des ondes de surface à être non-nulle (non-nulle sur toute la structure) quelle que soit la direction de propagation des ondes de surface. Les différents résultats concernant l'optique des ondes de surface porteront sur l'amplitude $\mathcal{E}(x, y)$. En multipliant les résultats obtenus par $f(z)$, ceux-ci s'appliqueront également à $E_z(\mathbf{r})$. De plus, la formule

$$\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r}) = \frac{1}{K_{sp}^2} \nabla_{//} \left[\frac{\partial E_z(\mathbf{r})}{\partial z} \right] = \frac{1}{K_{sp}^2} \nabla_{//} [\mathcal{E}(x, y)] \frac{df}{dz}, \quad (2.2)$$

que nous pourrions montrer (voir partie D.3.2), permet de déduire toutes les autres composantes de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. K_{sp} désigne le module du vecteur d'onde des ondes de surface, et $\nabla_{//} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y}$ désigne la partie « parallèle » (aux interfaces) de l'opérateur ∇ .

On retrouve dans l'écriture $\mathcal{E}(x, y)$ le caractère 2D de l'optique des ondes de surface, $\mathcal{E}(x, y)$ ne dépend que de x et de y , ainsi que le fait que les ondes de surface ne possèdent qu'une seule polarisation, et $\mathcal{E}(x, y)$ est scalaire mais permet de retrouver toutes les composantes du champ électrique des ondes de surface. Les équations de Maxwell donnent ensuite le champ magnétique.

En reportant l'expression (2.1) dans l'équation de Helmholtz vérifiée par $E_z(\mathbf{r})$,

$$\Delta E_z(\mathbf{r}) + \epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} E_z(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.3)$$

on obtient après quelques manipulations algébriques simples,

$$\frac{\Delta_{//} \mathcal{E}(x, y)}{\mathcal{E}(x, y)} = - \frac{\frac{d^2 f}{dz^2} + \epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} f(z)}{f(z)}. \quad (2.4)$$

On a introduit ici l'opérateur laplacien parallèle $\Delta_{//} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Les membres de l'équation (2.4) dépendent de variables spatiales différentes (le membre de gauche dépend de x et y , le membre de droite de z), ils sont égaux à une même valeur, que l'on note $-K_{sp}^2$. On justifie ci-dessous que K_{sp} correspond au module, éventuellement complexe, du vecteur d'onde des ondes de surface à la pulsation ω considérée. On déduit du membre de gauche de (2.4) l'équation de Helmholtz pour les ondes de surface,

$$\Delta_{//} \mathcal{E}(x, y) + K_{sp}^2 \mathcal{E}(x, y) = 0. \quad (2.5)$$

Toute l'information sur le problème de la propagation de l'onde de surface dans le plan xy est contenu dans

l'équation (2.5). Une solution particulièrement simple de cette équation est $\mathcal{E}(x, y) = e^{i(K_x x + K_y y)}$ avec $K_x^2 + K_y^2 = K_{sp}^2$. K_{sp} peut ainsi être interprété comme le module du vecteur d'onde des ondes de surface. La variable z n'intervient pas dans (2.5). Toute l'information sur la géométrie de l'hétérostructure dans la direction z est comprise dans le module du vecteur d'onde K_{sp} .

De manière analogue, le champ électrique $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ des ondes progressives d'un milieu uniforme d'indice n vérifie l'équation de Helmholtz,

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + k^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

où $k = n \frac{\omega}{c}$ est le module du vecteur d'onde des ondes progressives du milieu d'indice n à la pulsation ω considérée. L'équation (2.6) porte sur $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$, qui est une grandeur vectorielle (le champ des ondes progressives possède 2 polarisations), alors que l'équation (2.5) porte sur la grandeur scalaire $\mathcal{E}(x, y)$. (2.6) contient le laplacien usuel à trois dimensions, Δ , alors que (2.5) contient un laplacien parallèle $\Delta_{//}$ n'agissant que sur les deux coordonnées parallèles, x et y .

On peut déduire du membre de droite de (2.4) une seconde équation,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2 \right] f(z) = 0. \quad (2.7)$$

Contrairement à (2.5), cette équation fait intervenir z .

Il reste à utiliser les relations de continuité de $\epsilon(z, \omega) E_z$ et $\mathbf{E}_{//}$. Il est commode de considérer que $\mathcal{E}(x, y)$ est continu¹. On adjoint alors à (2.7) la continuité de $\epsilon(z, \omega) f(z)$ et $\frac{df}{dz}$ à chaque interface. La continuité de $\epsilon(z, \omega) f(z)$ découle de celle de $D_z(\mathbf{r}) = \epsilon(z, \omega) E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(x, y) [\epsilon(z, \omega) f(z)]$ à la traversée de chaque interface, celle de $\frac{df}{dz}$ découle de la continuité de $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r})$, comme on le montre dans la partie D.3.1. L'équation (2.7), munie de ces deux conditions, conduit aux relations de dispersion des ondes de surface de l'hétérostructure, reliant K_{sp} à la pulsation ω . Nous développerons ces calculs dans la partie 2.1.2, et nous verrons que pour une valeur de ω , la relation de dispersion des ondes de surface fournit une valeur K_{sp} (éventuellement plusieurs dans le cas de plusieurs interfaces – les développements ultérieurs s'appliquent alors à chacune d'entre elles).

Pour résumer, on sépare les dépendances parallèles et perpendiculaire de la composante E_z du champ des ondes de surface (équation 2.1),

$$E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}(x, y) f(z).$$

La partie perpendiculaire $f(z)$ vérifie l'équation (2.7),

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[\epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2 \right] f(z) = 0,$$

qui, munie des relations de continuité aux interfaces, fixe le module K_{sp} du vecteur d'onde des ondes de surface, car (2.7) permet de retrouver la relation de dispersion des ondes de surface, voir partie 2.1.2. La

1. $\mathcal{E}(x, y)$ pourrait par exemple être discontinu aux interfaces, en restant uniforme dans chaque couche.

partie parallèle, $\mathcal{E}(x, y)$, vérifie l'équation de Helmholtz pour les ondes de surface,

$$\Delta_{//}\mathcal{E}(x, y) + K_{sp}^2\mathcal{E}(x, y) = 0.$$

On déduit $E_z(\mathbf{r})$ de $\mathcal{E}(x, y)$ à l'aide de l'équation (2.1), et $\mathbf{E}_{//}(\mathbf{r})$ avec (2.2).

2.1.2 Relation de dispersion des ondes de surface

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation (2.7), dont nous allons rechercher les solutions. Nous verrons que celles-ci n'existent que pour des valeurs précises de K_{sp} , ce qui fixera sa valeur. K_{sp} en fonction de la pulsation ω correspond à la relation de dispersion des ondes de surface de l'hétérostructure considérée. Cette hétérostructure peut consister en une interface simple entre deux milieux (dont les constantes diélectriques sont opposées, voir figure 2.1, gauche), en un film (dont la constante diélectrique est opposée à celle des milieux qui l'entourent, voir figure 2.1, droite), ou à une hétérostructure quelconque (figure 2.2 ou 2.4).

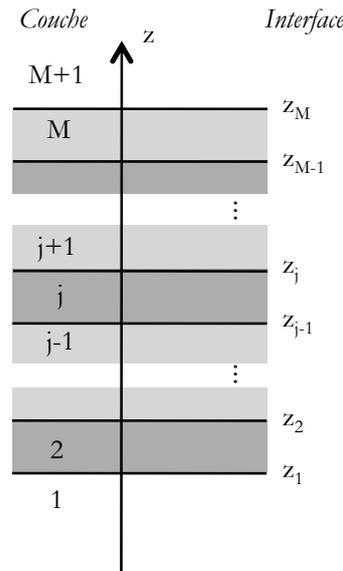


FIGURE 2.4 – Hétérostructure considérée dans ce chapitre. Il s'agit d'une hétérostructure, constituée de $M+1$ couches, indexées de $j = 0$ à $j = M$, séparées par M interfaces, de $z = z_1$ à $z = z_M$. Chaque couche est uniforme et constituée d'un milieu de constante diélectrique $\epsilon_j(\omega)$ (j est l'indice de la couche). On notera également $\epsilon(z, \omega) = \epsilon_j(\omega)$ avec $z_{j-1} < z < z_j$. Le système entier est supposé non magnétique ($\mu = 1$). La j -ième couche est comprise entre les interfaces $z = z_{j-1}$ et $z = z_j$, et son épaisseur est $d_j = z_j - z_{j-1}$. On notera $z_0 = -\infty$, $z_{M+1} = \infty$ et $d_1 = d_{M+1} = \infty$ pour les demi-espaces $j = 0$ et $j = M+1$.

Avant de résoudre cette équation pour une hétérostructure quelconque telle que représentée sur les figures 2.2 et 2.4, nous allons étudier le cas, plus simple, d'une seule interface séparant deux demi-espaces semi-infinis et uniformes.

2.1.2.1 Interface simple

On considère le cas le plus simple d'une interface unique séparant deux demi-espaces semi-infinis et uniformes, de constantes diélectriques $\epsilon_1(\omega)$ ($z < 0$) et $\epsilon_2(\omega)$ ($z > 0$). L'équation (2.7) devient alors

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \gamma_1^2 f(z) = 0 \quad z < 0, \quad (2.8a)$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \gamma_2^2 f(z) = 0 \quad z > 0, \quad (2.8b)$$

avec $\gamma_1 = \sqrt{\epsilon_1(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2}$ et $\gamma_2 = \sqrt{\epsilon_2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2}$. Les termes sous ces deux racines sont a priori complexes et ont deux racines opposées. Les conventions choisies pour les racines complexes, voir annexe A.3, entraînent $\gamma_1'' > 0$ ou $\gamma_1'' = 0$ et $\gamma_1' > 0$, de même pour γ_2 . Les solutions de (2.8) peuvent s'écrire sous la forme

$$f(z) = \begin{cases} \alpha_1 e^{i\gamma_1 z} + \beta_1 e^{-i\gamma_1 z} & \text{si } z < 0 \\ \alpha_2 e^{i\gamma_2 z} + \beta_2 e^{-i\gamma_2 z} & \text{si } z > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Si $\gamma_1'' > 0$, il faut $\alpha_1 = 0$ pour que $f(z)$ ne diverge pas en $-\infty$. Sinon, $\gamma_1'' = 0$ et $\gamma_1' > 0$, et on choisit $\alpha_1 = 0$ ce qui revient à imposer qu'il n'y ait pas d'onde incidente provenant de $z = -\infty$ sous le système. Dans tous les cas, on a donc $\alpha_1 = 0$. De la même manière, dans le milieu 2, il faut $\beta_2 = 0$. La continuité de $\epsilon(z, \omega)f(z)$ et $\frac{df}{dz}$ conduit alors au système d'équations

$$\epsilon_1(\omega)\beta_1 = \epsilon_2(\omega)\alpha_2, \quad -i\gamma_1\beta_1 = i\gamma_2\alpha_2, \quad (2.10)$$

qui n'a de solutions non nulles que si son déterminant est nul, soit

$$\epsilon_1(\omega)\gamma_2(K_{sp}, \omega) + \epsilon_2(\omega)\gamma_1(K_{sp}, \omega) = 0. \quad (2.11)$$

En multipliant le membre de gauche par son expression conjuguée $\epsilon_1(\omega)\gamma_2(K_{sp}, \omega) - \epsilon_2(\omega)\gamma_1(K_{sp}, \omega)$, on obtient la relation de dispersion bien connue des ondes de surface d'une interface simple,

$$K_{sp}^2 = \frac{\epsilon_1(\omega)\epsilon_2(\omega)}{\epsilon_1(\omega) + \epsilon_2(\omega)} \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.12)$$

2.1.2.2 Cas général

Le cas général est résolu dans l'annexe D.4. Là encore, l'équation (2.7) n'a de solutions que pour certaines valeurs de K_{sp} . K_{sp} en fonction de ω correspond à la relation de dispersion des ondes de surface du système considéré. On trouve que cette relation de dispersion correspond à l'annulation du déterminant du système

d'équations

$$\epsilon_j(\omega) \left[\alpha_j e^{i\gamma_j d_j} + \beta_j \right] = \epsilon_{j+1}(\omega) \left[\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} d_{j+1}} \right], \quad (2.13a)$$

$$i\gamma_j(K, \omega) \left[\alpha_j e^{i\gamma_j d_j} - \beta_j \right] = i\gamma_{j+1}(K, \omega) \left[\alpha_{j+1} - \beta_{j+1} e^{i\gamma_{j+1} d_{j+1}} \right]. \quad (2.13b)$$

avec $1 \leq j \leq M$, $\alpha_1 = \beta_{M+1} = 0$, et $\gamma_j = \sqrt{\epsilon_j(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - K_{sp}^2}$ (Les conventions pour les racines complexes sont précisées dans l'annexe A.3.) Les inconnues sont $(\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_M, \beta_M, \alpha_{M+1})$, soit $2M$ inconnues pour $2M$ équations. La relation de dispersion dépend de la constante diélectrique $\epsilon_j(\omega)$ et de l'épaisseur d_j de chaque couche j comme attendu.

L'annulation du déterminant de (2.13) donne une équation implicite reliant K_{sp}^2 à ω . En pratique, on résout ce système numériquement.

2.1.3 Développement angulaire du champ des ondes de surface

Dans le cas des ondes progressives en milieu homogène 3D, l'équation (2.6) a une solution générale qui est

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i(K_x x + K_y y + \gamma z)} \mathbf{E}(K_x, K_y, z = 0), \quad (2.14)$$

avec $\gamma = \sqrt{n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - K_x^2 - K_y^2}$ (voir annexe A.3 pour les conventions de signe des racines complexes). Cette solution met en évidence la présence d'ondes évanescentes pour $K_x^2 + K_y^2 > n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$. Ceci est l'origine physique de la limite de résolution. De surcroît, on peut interpréter le terme $e^{i\gamma z}$ comme un propagateur de Fourier donnant le spectre $\mathbf{E}(K_x, K_y, z) = \mathbf{E}(K_x, K_y, 0) e^{i\gamma z}$, où $\mathbf{E}(K_x, K_y, z) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} e^{i(K_x x + K_y y)} \mathbf{E}(x, y, z)$ est la transformée de Fourier par rapport à x et y du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dans le plan z constant. Nous allons voir dans cette section que l'on peut déduire de (2.5) un développement analogue pour le champ des ondes de surface.

En ce qui concerne les ondes de surface, on peut aisément un développement analogue du champ des ondes de surface. On considère la transformée de Fourier par rapport à y de $\mathcal{E}(x, y)$, $\mathcal{E}(x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iK_y y} \mathcal{E}(x, y)$, qui vérifie

$$\mathcal{E}(x, y) = \int \frac{dK_y}{2\pi} e^{iK_y y} \mathcal{E}(x, K_y) \quad (2.15)$$

(transformée de Fourier inverse). De (2.5), on déduit l'équation vérifiée par $\mathcal{E}(x, K_y)$,

$$\frac{\partial^2 [\mathcal{E}(x, K_y)]}{\partial x^2} + K_{x,sp}^2 \mathcal{E}(x, K_y) = 0, \quad (2.16)$$

avec $K_{x,sp} = \sqrt{K_{sp}^2 - K_y^2}$. Les solutions de cette équation sont de la forme $\mathcal{E}(x, K_y) = \alpha(K_y) e^{iK_{x,sp} x} + \beta(K_y) e^{-iK_{x,sp} x}$. Le terme $\beta(K_y) e^{-iK_{x,sp} x}$ correspond à des ondes de surface se propageant vers les x négatifs. Si les ondes de surface considérées se propagent uniquement vers la droite (par exemple si toutes les sources d'ondes de surface se situent à gauche de l'aire d'observation), ce dernier terme est nul. On peut alors

écrire

$$\mathcal{E}(x, K_y) = \mathcal{E}(x = 0, K_y) e^{iK_{x,sp}x}, \quad (2.17)$$

et on obtient en insérant cette expression dans (2.15),

$$\mathcal{E}(x, y) = \int \frac{dK_y}{2\pi} e^{i(K_{x,sp}x + K_y y)} \mathcal{E}(x = 0, K_y). \quad (2.18)$$

Il est à noter qu'en présence d'absorption, on ne retrouve pas une distinction nette entre des ondes progressives et des ondes évanescentes. On a tracé sur la figure 2.5 les parties réelles et imaginaires de $K_{x,sp}$ en

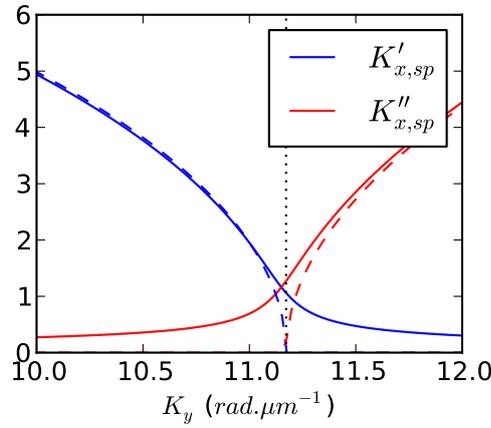


FIGURE 2.5 – $K'_{x,sp}$ et $K''_{x,sp}$ en fonction de K_y . Cas particulier d'une interface simple or/air à $\lambda_0 = 400$ nm. Unités en ordonnées : $\text{rad}.\mu\text{m}^{-1}$. Trait continu : avec pertes, tirets : sans pertes. Pointillés : $K_y = K'_{sp}$. La frontière entre les ondes de surface progressives ($K''_{x,sp}$ faible) et évanescentes ($K''_{x,sp}$ non négligeable) n'est pas nette en présence d'absorption.

fonction de K_y pour un cas particulier. On voit sur la figure que $K''_{x,sp}$ n'est jamais nulle à cause de l'absorption, puis augmente fortement pour $|K_y| > K'_{sp}$ alors que $K'_{x,sp}$ tend vers 0. K'_{sp} apparaît comme une fréquence spatiale de coupure dans la direction x . En régime monochromatique, (ω réel) et en présence de pertes, le repliement de la relation de dispersion limite les valeurs accessibles de K'_{sp} et impose une limite de résolution. On a tracé la relation de dispersion des SPP d'une interface verre/argent sur la figure 2.6 (gauche), ainsi que la longueur de propagation de ces SPP (droite). Sur cet exemple, pour des longueurs de propagation raisonnables (supérieures à quelques μm), les valeurs accessibles de K'_{sp} restent proches des valeurs de K permises avec les ondes progressives, situées à gauche du cône de lumière (tirets sur la figure 2.6).

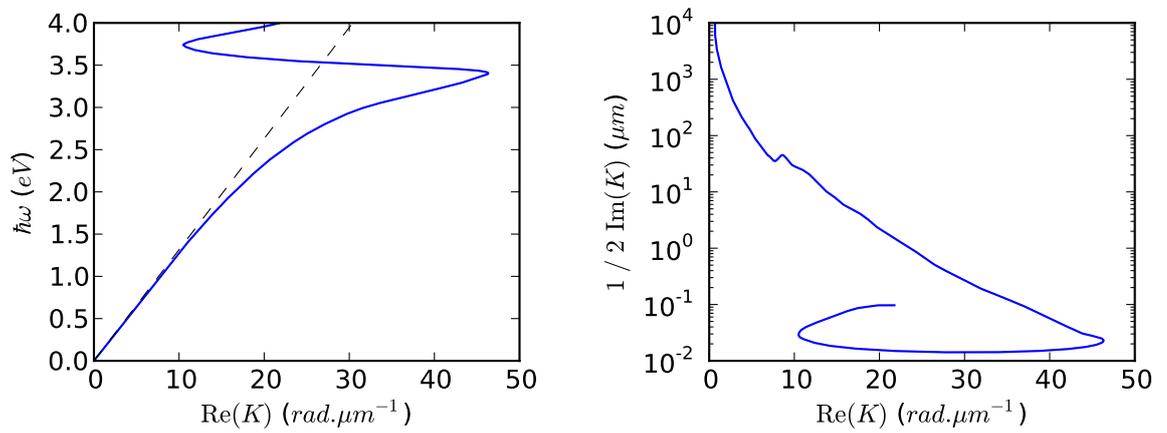


FIGURE 2.6 – Relation de dispersion et longueur de propagation des SPP d’une interface verre/argent. Gauche : relation de dispersion (trait bleu) et cône de lumière du verre $K = n \frac{\omega}{c}$ avec $n = 1,5$. Droite : longueur de propagation ($\frac{1}{2\text{Im}(K)}$).

2.2 Principe d'Huygens-Fresnel

2.2.1 Rappels généraux

Dans le cadre de l'électromagnétisme, il est possible de démontrer le principe d'Huygens-Fresnel. Nous commençons par rappeler la procédure habituelle du cas 3D avant d'établir le résultat correspondant pour les ondes de surface.

Le « principe » d'Huygens-Fresnel permet d'obtenir le champ électrique des ondes progressives en un point \mathbf{r} à l'intérieur d'un volume V délimité par une surface S en fonction du champ (et de ses dérivées) sur S (voir figure 2.7). Sa forme mathématique exacte se déduit de l'équation intégrale de Helmholtz et Kirchhoff (BORN

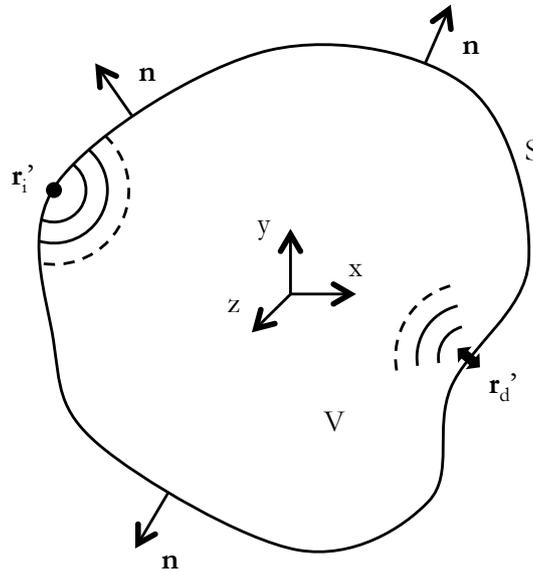


FIGURE 2.7 – Schéma illustrant le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes progressives. On calcule le champ à l'intérieur d'un volume V ayant pour frontière une surface S . Les points de S sont vus comme des sources secondaires isotropes (\mathbf{r}'_i) ou directionnelles (\mathbf{r}'_d). Le principe d'Huygens-Fresnel (équation 2.19) fait intervenir la dérivée du champ électrique sur S selon la normale sortante \mathbf{n} .

et WOLF 1999) qui peut s'écrire

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S dS \left\{ \underbrace{\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')]]}_{\tilde{\mathbf{E}}_{1,\mathbf{r}'(\mathbf{r})}} - \underbrace{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)}_{\tilde{\mathbf{E}}_{2,\mathbf{r}'(\mathbf{r})}} \right\} \quad (2.19)$$

où la frontière S du volume V est parcourue par \mathbf{r}' , $\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}$ désigne la dérivée (par rapport à \mathbf{r}') selon la normale sortante de S en \mathbf{r}' (voir figure 2.7), et \mathbf{r} est un point de V . Cette équation exprime le champ en un point \mathbf{r} de V en fonction du champ et de sa dérivée normale sur la frontière S . Les points \mathbf{r}' de la surface S peuvent être vus comme les sources (on parle de « sources secondaires ») de deux ondes, une première onde,

sphérique et proportionnelle à la dérivée normale du champ en \mathbf{r}' ,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{1,\mathbf{r}' }(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')], \quad (2.20)$$

et une seconde onde simplement proportionnelle au champ en \mathbf{r}' ,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{2,\mathbf{r}' }(\mathbf{r}) = -\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right). \quad (2.21)$$

Cette seconde onde a pour direction privilégiée la normale de S en \mathbf{r}' . En effet, on peut ré-écrire le terme dérivé dans l'équation précédente,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{2,\mathbf{r}' }(\mathbf{r}) = -\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right), \quad (2.22a)$$

$$= -\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \cos(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right). \quad (2.22b)$$

Le terme en $\cos(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{n})$ est de module maximal lorsque $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ est parallèle à \mathbf{n} .

La surface S de l'expression (2.19) peut être ouverte dans certains cas. Si au-delà d'une certaine distance $\sqrt{x^2 + y^2}$ à l'axe $(x, y) = (0, 0)$, S coïncide avec le plan $z = 0$ (voir figure 2.8), si toutes les sources à

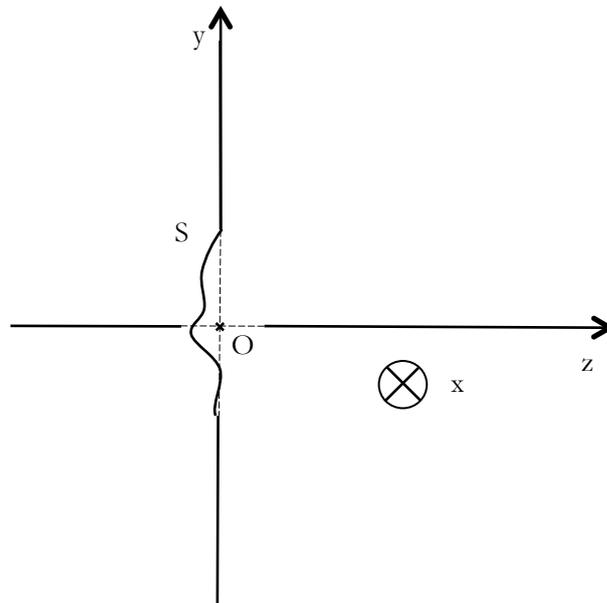


FIGURE 2.8 – Schéma illustrant le principe d'Huygens-Fresnel usuel avec une surface S ouverte. Vue en coupe d'une surface S ouverte, coïncidant avec le plan $z = 0$ loin de l'axe Oz .

l'origine du champ considéré se situent dans le demi-espace à gauche de S , et si la *condition de rayonnement*

de Sommerfeld

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ik\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial R} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad (2.23)$$

est satisfaite, alors l'expression (2.19) s'applique avec cette surface S ouverte.

Si cette surface ouverte S coïncide avec le plan $z = 0$ (figure 2.9), on a (GOODMAN 2005)

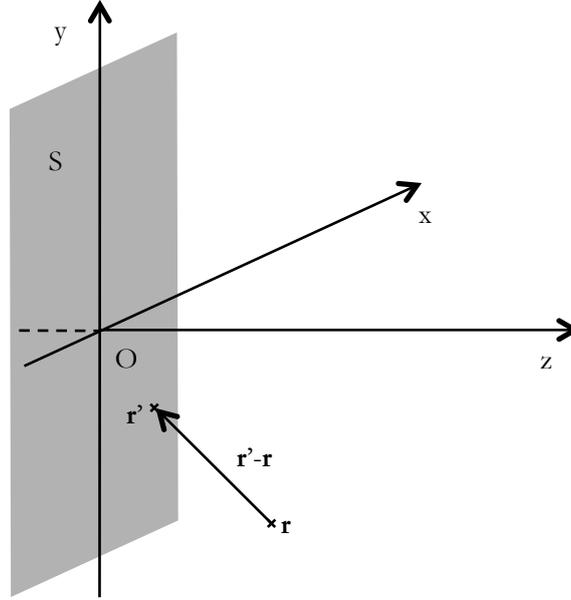


FIGURE 2.9 – Surface S coïncidant avec le plan $z = 0$.

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_S dS \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right), \quad (2.24a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_S dS \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}')]. \quad (2.24b)$$

Les équations (2.24) ont l'avantage de dépendre soit du champ sur S , soit de sa dérivée normale – seul l'un des deux champs a besoin d'être connu.

2.2.2 Principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface

Un principe d'Huygens-Fresnel, présentant des propriétés analogues à celui des s'appliquant aux ondes progressives (rappelé dans la partie 2.2.1), peut être obtenu pour les ondes de surface. On montre dans l'annexe D.2.1 que l'on peut écrire

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}) = -\frac{1}{4i} \int_L dL \left\{ \underbrace{H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|)}_{\mathcal{E}_{1,\vec{\rho}' }(\vec{\rho})} \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}') - \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[\underbrace{H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|)}_{\mathcal{E}_{2,\vec{\rho}' }(\vec{\rho})} \right] \right\}, \quad (2.25)$$

où $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$, $\vec{\rho}' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$, $|\vec{\rho} - \vec{\rho}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, L est un chemin fermé du plan xy (voir figure 2.10) parcouru par le vecteur $\vec{\rho}'$. Il faut que $\vec{\rho}$ soit dans la surface S délimitée par L . $H_0^{(1)}$

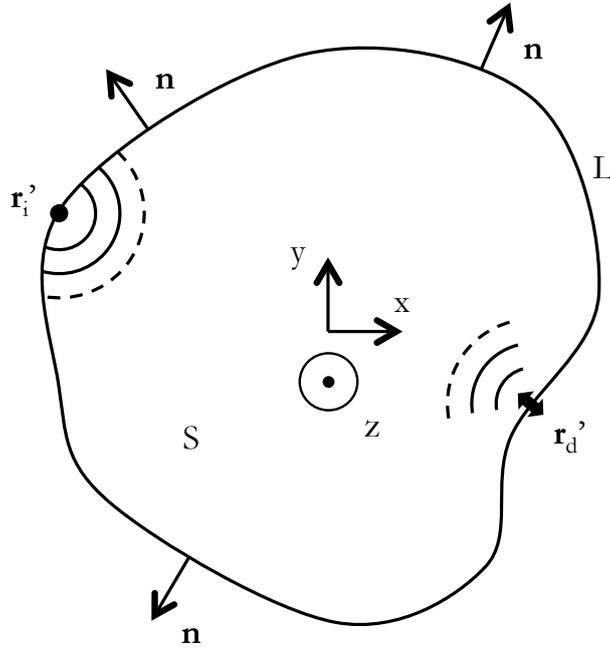


FIGURE 2.10 – Schéma illustrant le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface. On calcule le champ à l'intérieur de la surface S délimitée par le chemin L . Les points de L sont vus comme des sources secondaires isotropes (\mathbf{r}'_i) ou anisotropes (\mathbf{r}'_d).

est la fonction de Hankel d'ordre 0 du premier type – son argument $K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|$ est complexe, ses parties réelle et imaginaire sont tracées pour plusieurs valeurs du rapport entre les parties imaginaire et réelle de son argument sur la figure 2.11.

L'égalité (2.25) exprime le champ en un point $\vec{\rho}$ de la surface S en fonction du champ sur sa frontière, le chemin fermé L . Chaque point de L est vu comme la source de deux ondes, une première onde, isotrope et proportionnelle à la dérivée du champ $\mathcal{E}(\vec{\rho}')$ selon la normale sortante de L ,

$$\mathcal{E}_{1,\vec{\rho}'}(\vec{\rho}) = H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}'), \quad (2.26)$$

et une seconde onde, proportionnelle au champ en $\vec{\rho}'$,

$$\mathcal{E}_{2,\vec{\rho}'}(\vec{\rho}) = -\mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right]. \quad (2.27)$$

Cette seconde onde est anisotrope, et a pour direction privilégiée la normale de L en $\vec{\rho}'$. En effet, on peut

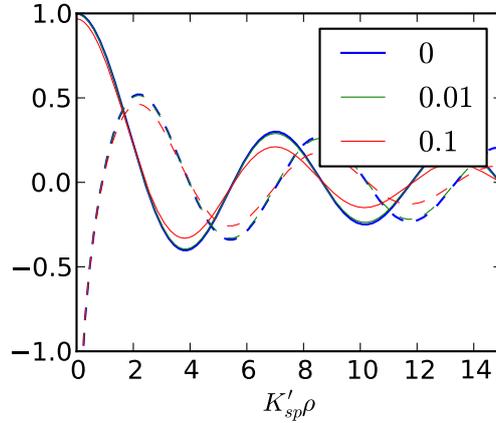


FIGURE 2.11 – Parties réelle et imaginaire de la fonction de Hankel d'ordre 0 de type 1, $H_0^{(1)}$. Trait continu : partie réelle. Tirets : partie imaginaire. On a représenté $H_0^{(1)}(K_{sp}'\rho)$ en fonction de $K_{sp}'\rho$, pour différentes valeurs du rapport $F = 2K_{sp}''/K_{sp}'$ (légende).

ré-écrire le terme dérivé dans l'équation précédente,

$$\mathcal{E}_{2,\vec{\rho}'}(\vec{\rho}) = -\mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right] \quad (2.28a)$$

$$= K_{sp} \mathcal{E}(\vec{\rho}') \cos(\vec{\rho} - \vec{\rho}', \mathbf{n}) H_1^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|). \quad (2.28b)$$

Le terme $\cos(\vec{\rho} - \vec{\rho}', \mathbf{n})$, dépendant de l'angle entre $\vec{\rho} - \vec{\rho}'$ et la normale sortante à L en $\vec{\rho}'$, \mathbf{n} , est fonction de la direction de $\vec{\rho} - \vec{\rho}'$ et est à l'origine de l'anisotropie de la source.

L'expression (2.25) a l'inconvénient de faire intervenir une somme le long d'un chemin *fermé*, mais celui-ci peut être ouvert dans certains cas. Si toutes les sources d'ondes de surface se situent à des abscisses $x < 0$, si les extrémités de L coïncident avec des portions de l'axe $x = 0$ (voir figure 2.12) et si $\mathcal{E}(x, y)$ remplit la *condition de rayonnement*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left[iK_{sp} \mathcal{E}(x, y) - \frac{\partial}{\partial R} \mathcal{E}(x, y) \right] = 0 \quad (R = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (2.29)$$

l'expression (2.25) s'applique toujours, avec un chemin L ouvert désormais.

Dans le cas où ce chemin L ouvert coïncide avec l'axe $x = 0$ (voir figure 2.13), les sommes sur L des deux contributions à $\mathcal{E}(x, y)$, $\mathcal{E}_{1,\vec{\rho}'}(\vec{\rho})$ et $\mathcal{E}_{2,\vec{\rho}'}(\vec{\rho})$, sont égales. On montre dans l'annexe D.2.3 que l'on peut alors écrire

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \frac{1}{2i} \int_L dL \mathcal{E}(\vec{\rho}') \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \right] \quad (2.30a)$$

$$= -\frac{1}{2i} \int_L dL H_0^{(1)}(K_{sp} |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{E}(\vec{\rho}'). \quad (2.30b)$$

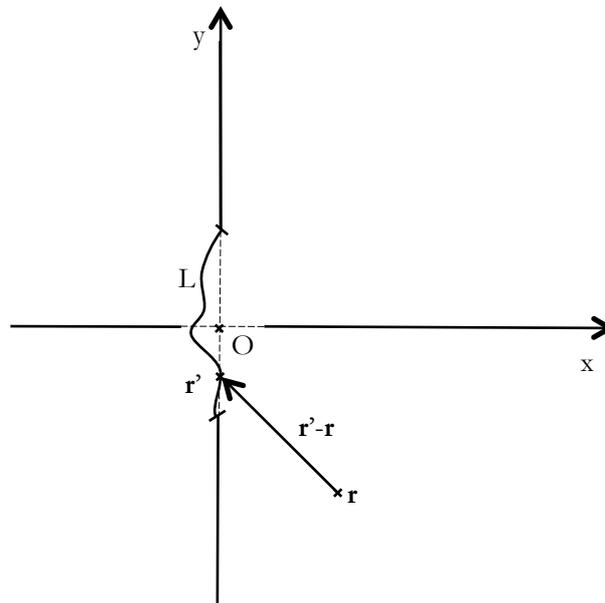


FIGURE 2.12 – Géométrie pour le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface avec un chemin L ouvert.

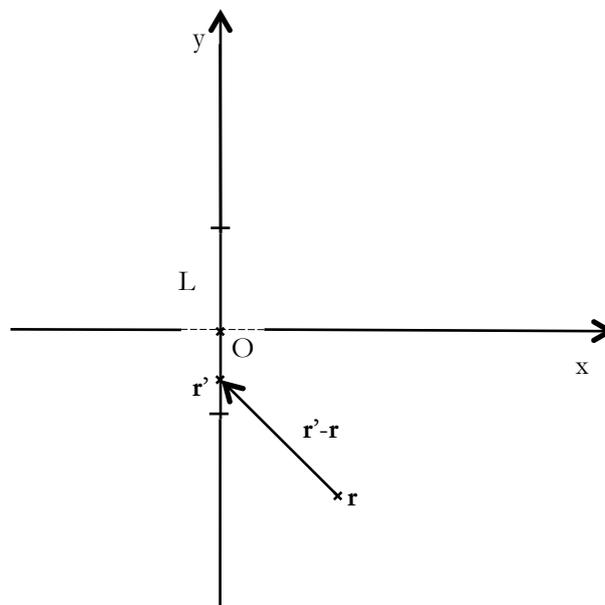


FIGURE 2.13 – Géométrie pour le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface avec un chemin L coïncidant avec l'axe $x = 0$ (équation 2.30).

Ces deux expressions correspondent soit à une somme d'ondes anisotropes (équation 2.30a), soit à une somme d'ondes isotropes (équation 2.30b). Elles font intervenir soit $\mathcal{E}(\vec{\rho}')$, soit $\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{E}(\vec{\rho}')$: il suffit de connaître un seul de ces deux champs sur L pour calculer $\mathcal{E}(\vec{\rho})$.

On retrouve là encore une analogie entre les ondes électromagnétiques usuelles et les ondes de surface. Le principe d'Huygens-Fresnel exprime le champ en un point à l'intérieur d'un volume (ondes électromagnétiques usuelles, équation 2.19) ou d'une surface (ondes de surface, équation 2.25) en fonction du champ à la frontière de ce volume ou cette surface. Chaque point de la frontière est vu comme une source « secondaire » de deux ondes, l'une isotrope (en $\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ pour les ondes électromagnétiques usuelles, en $H_0^{(1)}(K_{sp}|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)$ pour les ondes de surface), l'autre anisotrope (dérivée normale des termes précédents). L'onde isotrope est proportionnelle à la dérivée normale du champ à la frontière, l'onde anisotrope simplement au champ.

Dans les deux cas, sous certaines conditions, on peut exprimer le champ après une surface S (ondes progressives) ou un chemin L (ondes de surface) en fonction soit du champ sur cette surface ou ce chemin, soit de la dérivée normale du champ sur cette surface ou ce chemin (équations 2.24 pour les ondes progressives, 2.30 pour les ondes de surface). Les expressions rigoureuses établies ici diffèrent des expressions scalaires utilisées dans la littérature. La dérivée normale de $H_0^{(1)}$ introduit des termes de champ proche ainsi que des effets d'anisotropie à plus grande distance.

2.3 Diffraction d'ondes de surface

Afin d'illustrer le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface déterminé dans la partie précédente, nous allons maintenant nous intéresser à différents systèmes diffractant et focalisant les ondes de surface.

2.3.1 Ouverture simple

Une ouverture simple permet de visualiser les différences d'intensité entre les différentes composantes du champ des ondes de surface. Une manière de réaliser ce système, analogue à celui de ZIA et BRONGERSMA (2007), est représentée sur la figure 2.14. Un ruban métallique guide les SPP jusqu'à un film métallique sur

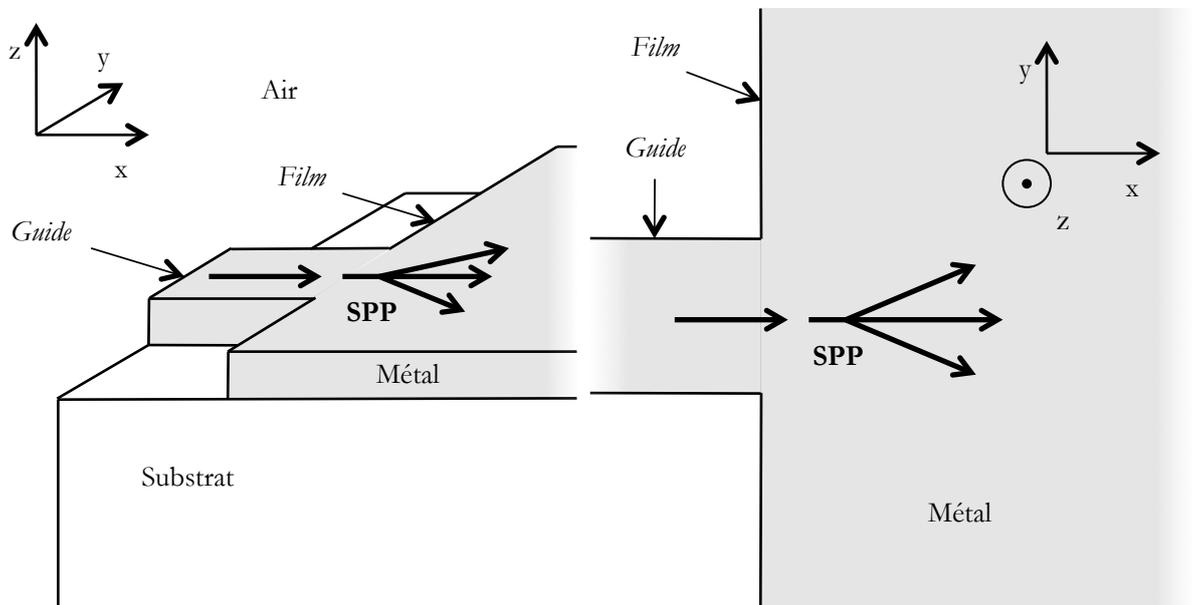


FIGURE 2.14 – Système diffractant les SPP incidents d'une ouverture simple. Gauche : vue en coupe de la jonction guide/film semi-infini. Droite : vue de dessus.

lequel ils peuvent se propager librement. Les SPP du guide ont été préalablement excités, via un réseau ou par éclairage direct par exemple). La jonction entre le ruban et le film constitue l'ouverture « source » de SPP. On a représenté sur les figures 2.15 et 2.16 les trois composantes du champ des SPP émis par deux ouvertures de tailles différentes, l'une sub-longueur d'onde (largeur w plus faible que la longueur d'onde des SPP λ_{sp}), l'autre non. La première ouverture sera ainsi peu directionnelle, la seconde le sera plus. On voit dans les deux cas que la composante E_y du champ diffère fortement de E_x et E_z : elle est notamment nulle sur l'axe Ox .

2.3.2 Fentes d'Young

Le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface permet également de tracer les composantes du champ des SPP de l'expérience des fentes d'Young plasmoniques réalisée par ZIA et BRONGERSMA (2007). Le

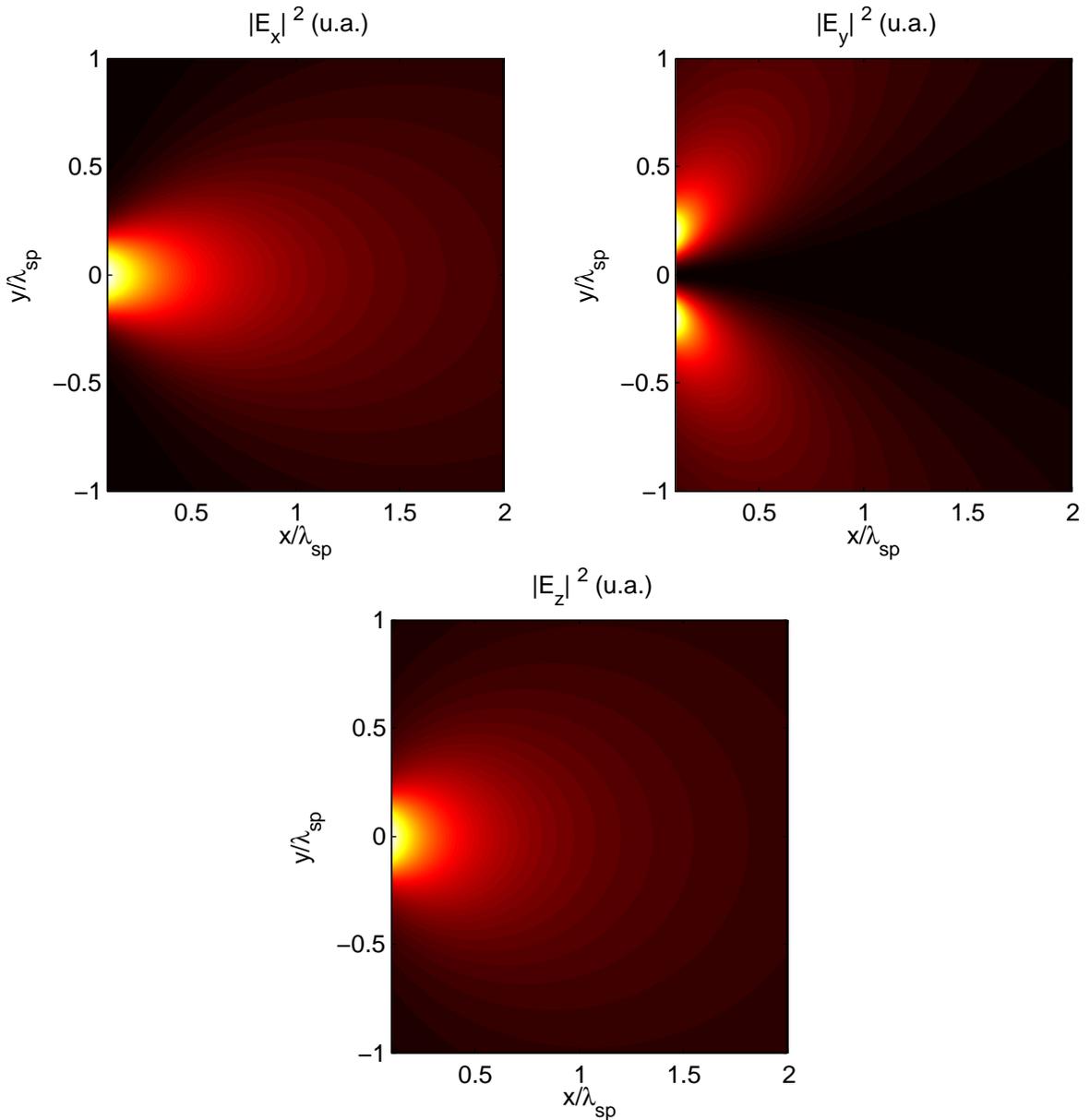


FIGURE 2.15 – Composantes du champ des plasmons-polaritons de surface (SPP) émis par une ouverture de largeur $w = 0,5 \lambda_{sp}$. $K_{sp} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \approx (1,6427 + i0,0128) rad.\mu m^{-1}$ calculé pour les SPP d’une interface or/air à $\lambda_0 = 657$ nm (longueur d’onde des SPP : $\lambda_{sp} = 400$ nm). Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,126 pour $|E_x|^2$, 0,057 pour $|E_y|^2$ et 1 pour $|E_z|^2$. Le champ « source » sur l’axe $x = 0$ vaut $\mathcal{E}(x = 0, y) = \cos(\pi \frac{y}{w})$ si $|y| \leq \frac{w}{2}$, et 0 sinon, forme s’approchant de celle indiquée graphiquement par ZIA et BRONGERSMA (2007).

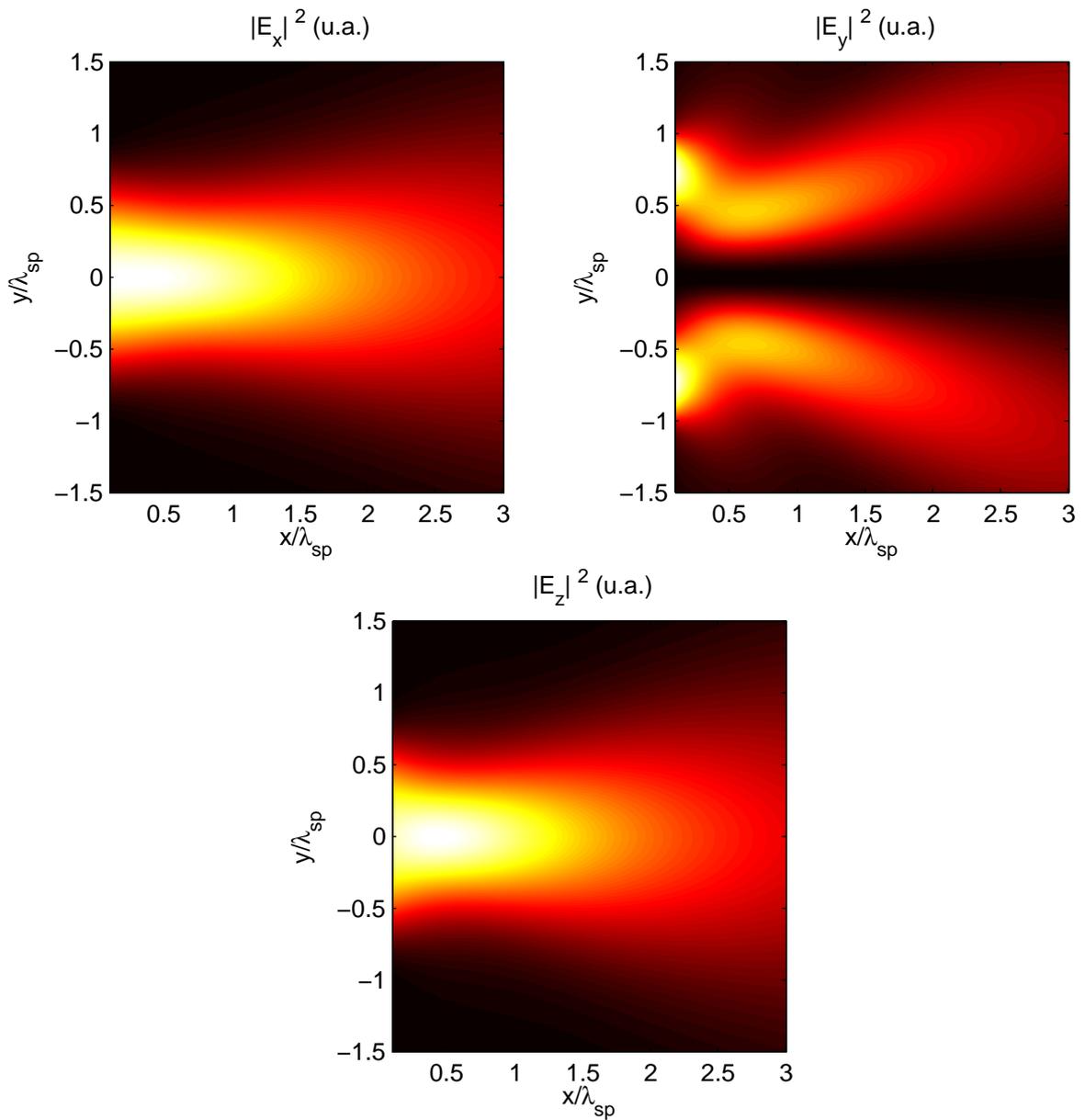


FIGURE 2.16 – Composantes du champ des SPP émis par une ouverture de largeur $w = 2 \lambda_{sp}$. Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,146 pour $|E_x|^2$, $8,90 \times 10^{-3}$ pour $|E_y|^2$ et 1 pour $|E_z|^2$. Voir également les commentaires de la figure 2.15 pour l'expression du champ « source » sur l'axe $x = 0$.

principe de cette expérience est rappelé sur la figure 2.17. Cette expérience consiste à observer la propagation

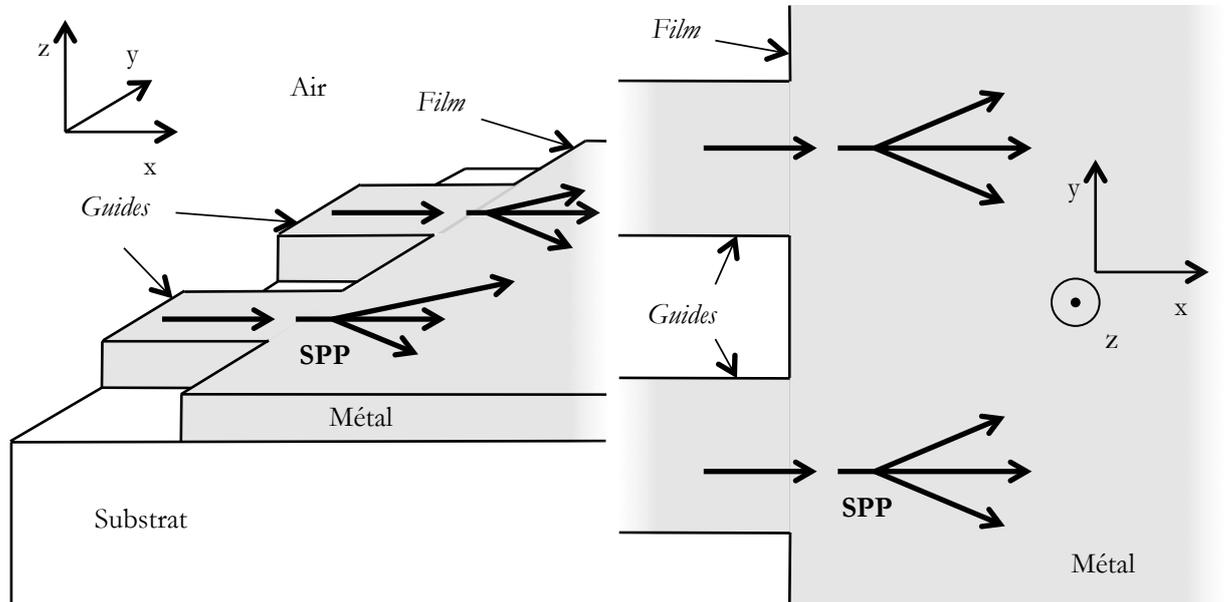


FIGURE 2.17 – Analogie plasmonique de l'expérience des fentes d'Young. Gauche : vue en coupe des jonctions guides/film semi-infini. Droite : vue de dessus.

des SPP émis par deux ouvertures placées en bordure d'un film métallique. Lors de leur propagation, les SPP émis interfèrent, et ces interférences sont observées en champ proche à l'aide d'un SNOM dont la pointe scanne la surface du film. On a représenté les trois composantes du champ calculées à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface, ainsi que la somme du carré de leurs modules, sur la figure 2.18.

La figure expérimentale obtenue par ZIA et BRONGERSMA (2007) est reproduite sur la figure 2.19 pour comparaison. On remarque qu'on obtient un bon accord (divergence des deux faisceaux, largeur et évolution le long de l'axe x des interférences constructives et destructives) entre la figure calculée pour $|\mathbf{E}|^2$ (figure 2.18, en bas à droite) et la figure obtenue par ZIA et BRONGERSMA (2007) (figure 2.19), aux franges d'interférences de cette dernière près (vraisemblablement dues au faisceau excitateur des modes des guides). Il est à noter que les auteurs ne donnent pas la forme exacte du champ utilisé dans les calculs qu'ils effectuent en s'appuyant sur une version scalaire du principe d'Huygens-Fresnel, et n'indiquent pas la fréquence à laquelle l'expérience est réalisée – on l'a ici supposée correspondant à $\lambda_0 = 780$ nm, longueur d'onde employée par ZIA et al. (2006) indiqués en référence par ZIA et BRONGERSMA (2007).

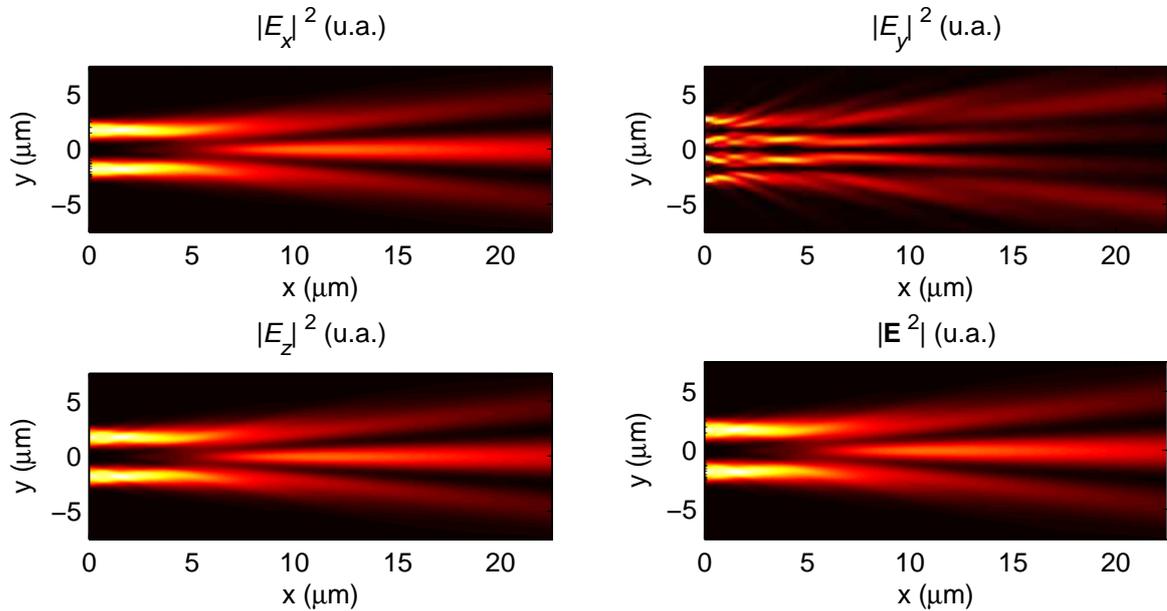


FIGURE 2.18 – Composantes du champ des SPP d'un analogue plasmonique des fentes d'Young (ZIA et BRONGERSMA 2007). Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,87 pour $|E_x|^2$, 0,025 pour $|E_y|^2$, 1 pour $|E_z|^2$ et 1,87 pour $|\mathbf{E}^2| = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$. La forme du champ de chaque faisceau incident est donné en note de la figure 2.15. Afin de reproduire au mieux la forme du champ incident de ZIA et BRONGERSMA (2007), la largeur des deux faisceaux utilisée est $w = 2,7 \mu\text{m}$ et la distance entre leurs centres est de $d = 3,5 \mu\text{m}$.

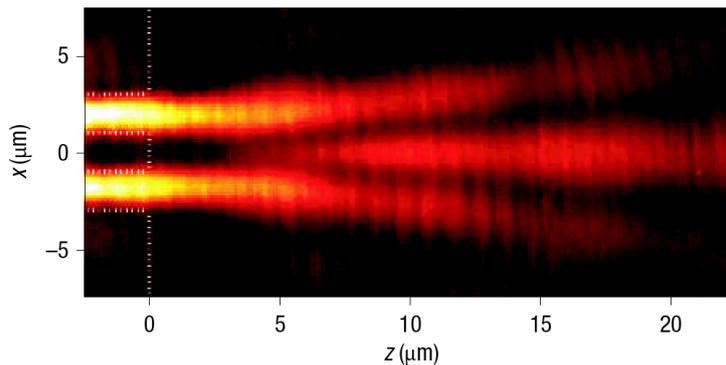


FIGURE 2.19 – Image du champ de l'expérience des fentes d'Young pour les SPP obtenue par ZIA et BRONGERSMA (2007). Les deux guides sont indiqués en pointillés blancs sur la gauche, la partie droite de la figure correspond au film sur lequel se propagent les SPP. La largeur des guides est de $2 \mu\text{m}$ et ils sont espacés de $2 \mu\text{m}$ également (distance entre leurs centres de $4 \mu\text{m}$). L'abscisse $x = 0$ des images de la figure 2.18 correspond à la terminaison des guides (ouvertures le long de la ligne verticale).

2.4 Focalisation d'ondes de surface

Le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface peut notamment être utilisé afin de modéliser des systèmes focalisant des ondes de surface. De nombreux groupes ont étudié de tels systèmes expérimentalement (voir introduction du chapitre). Afin d'illustrer les possibilités offertes par le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface, nous allons nous intéresser à deux systèmes particuliers : une « lentille zonée de Fresnel » (*Fresnel zone plate*) pour les ondes de surface, dont nous précisons le principe – un modèle simple permettra de la décrire, et un système focalisant des phonons-polaritons de surface (SPhP) d'une interface SiC/air, réalisé expérimentalement par HUBER et al. (2008).

2.4.1 Lentille zonée de Fresnel

Le principe de fonctionnement de la lentille zonée de Fresnel pour ondes de surface est schématisé sur la figure 2.20. Cette lentille est constituée d'un ensemble d'ouvertures, situées sur l'axe Oy , dont les centres sont

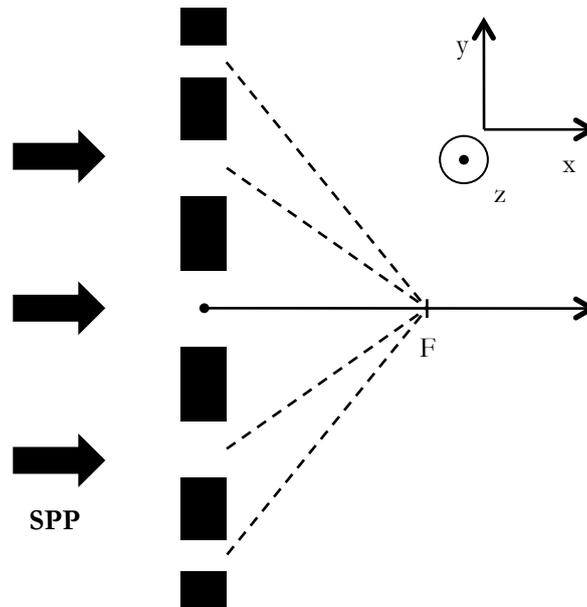


FIGURE 2.20 – Lentille zonée de Fresnel pour les ondes de surface. Un faisceau de SPP incident est mis en forme par des absorbeurs, de sorte que leur champ immédiatement après les absorbeurs puisse être calculé avec une approximation de Kirchhoff.

situés à une distance $|j|\lambda_{sp}$ du foyer F de la lentille (voir figure 2.20), et dont les extrémités sont à une distance de $(|j| \pm \frac{1}{6})\lambda_{sp}$ de F (j entier). Par analogie avec le principe de Kirchhoff pour les ondes progressives (NIETO-VESPERINAS 2006), qui consiste, lors d'expériences de diffraction, à déterminer un champ initial à l'aide de l'optique géométrique, on suppose $\mathcal{E}(x, y)$ égal à 1 au niveau des ouvertures sur l'axe Oy , et nul sur Oy hors des ouvertures.

Le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface permet alors de déterminer le champ des ondes de surface après la lentille. Les modules au carré des trois composantes de ce champ, ainsi que leur somme,

sont représentés sur les figures 2.21 et 2.22.

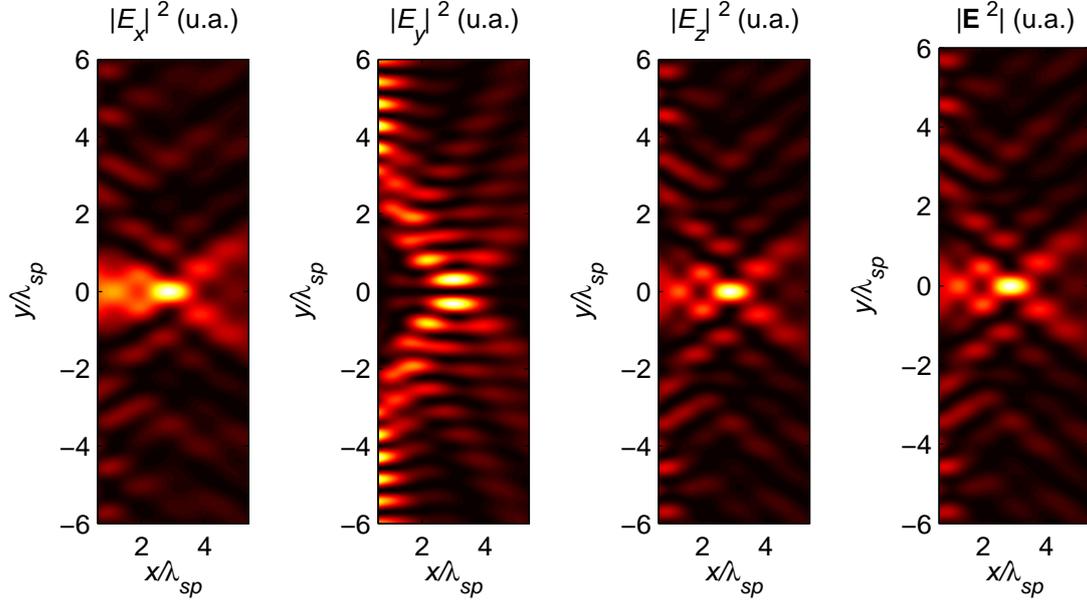


FIGURE 2.21 – Composantes du champ des SPP d'une lentille de Fresnel pour les ondes de surface. $f = 3\lambda_{sp}$. $K_{sp} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(1,643 + i0,0128)$ calculé pour les ondes de surface d'une interface or/air à $\lambda_0 = 400 \text{ nm}$. Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,099 pour $|E_x|^2$, 0,031 pour $|E_y|^2$, 1 pour $|E_z|^2$ et 1,099 pour $|\mathbf{E}^2| = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$.

Comme dans le cas du champ après une ouverture simple (figures 2.15 et 2.16), la composante E_y diffère fortement de E_x et E_z . Dans tous les cas, on remarque que les modules au carré des composantes E_x et E_y sont plus faibles d'un à deux ordres de grandeur que celui de E_z . Dans le cas de la plus courte focale ($f = \lambda_{sp}$, figure 2.22), la composante E_x s'éloigne plus de E_z que pour la focale plus importante $f = 3\lambda_{sp}$, notamment à proximité immédiate de la lentille.

2.4.2 Focalisation sur une surface de carbure de silicium

Le principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface permet également de modéliser des systèmes plus complexes, dont le champ n'est a priori connu que sur un chemin courbe. C'est le cas du système étudié expérimentalement par HUBER et al. (2008). Le principe de cette expérience est représenté sur la figure 2.23. Une structure en or, réalisée à la surface d'un substrat en carbure de silicium (SiC), est éclairée par le faisceau émis par un laser CO_2 à une longueur d'onde de $\lambda = 10,85 \mu\text{m}$. Le laser incident conduit à l'apparition de courants induits dans la structure en or. Ces courants induits, proches de la surface de SiC, excitent des SPhP de celle-ci.

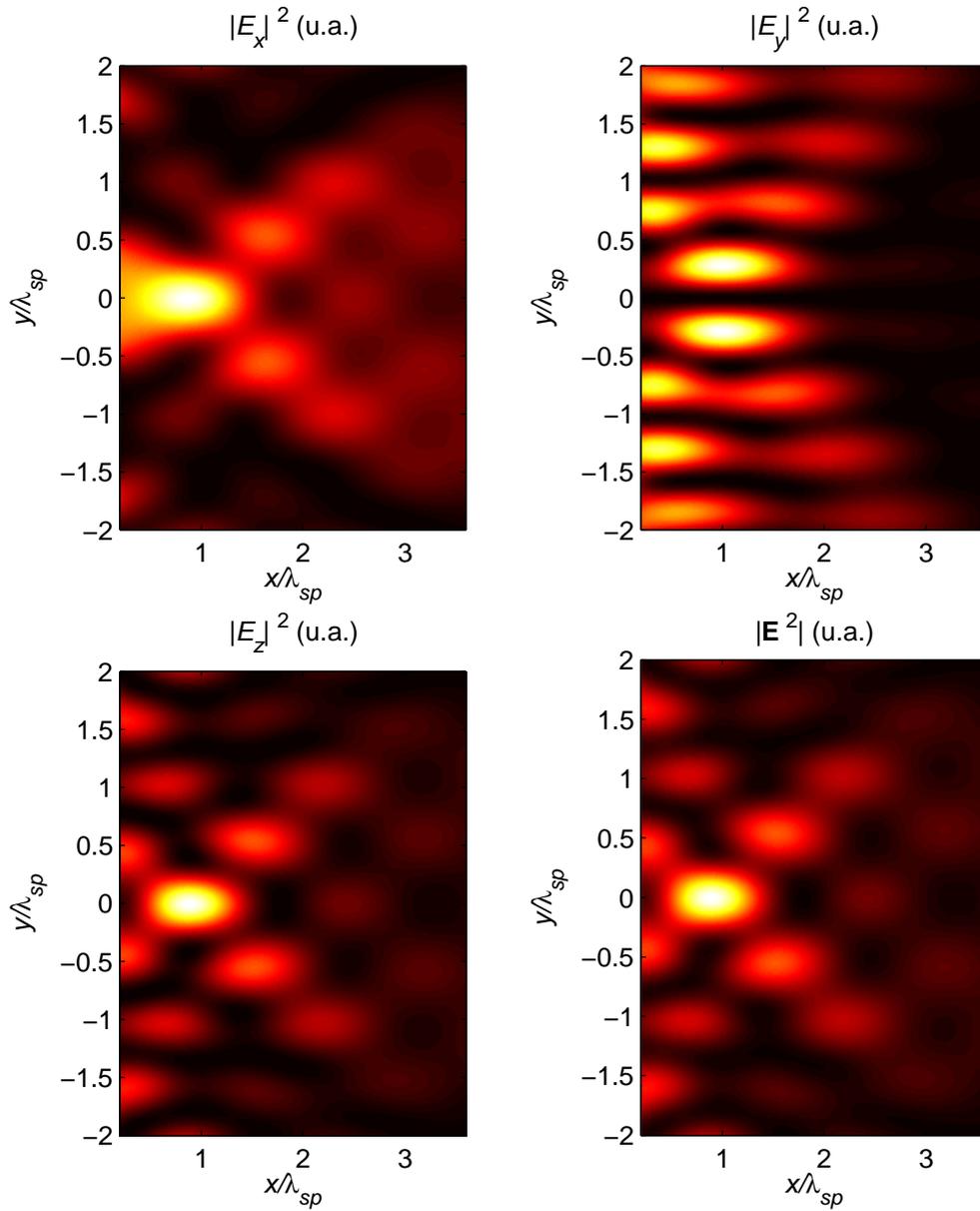


FIGURE 2.22 – Composantes du champ des SPP d’une lentille de Fresnel pour les ondes de surface. $f = \lambda_{sp}$. Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 0,069 pour $|E_x|^2$, 0,048 pour $|E_y|^2$, 1 pour $|E_z|^2$ et 1,07 pour $|\mathbf{E}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$.

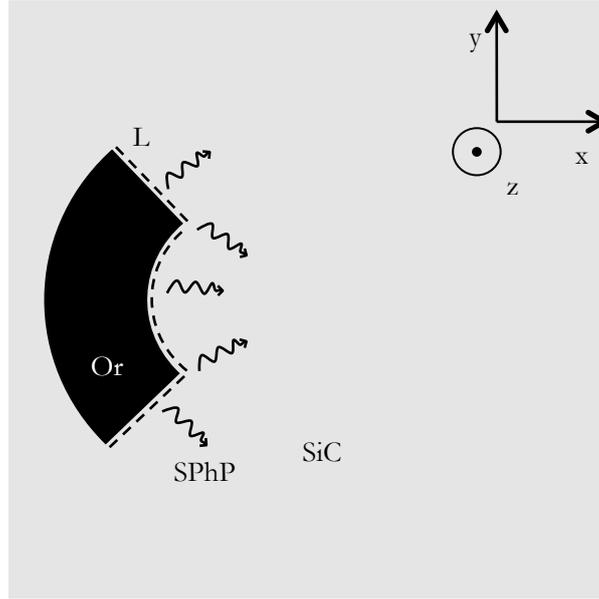


FIGURE 2.23 – Structure en or sur une surface de SiC focalisant ses SPhP. La structure en or est éclairée par un laser à $\lambda = 10,85 \mu\text{m}$. Les courants induits dans l'or excitent les SPhP de la surface de SiC. Le chemin L sur lequel sont disposées les sources secondaires est représenté en pointillés.

2.4.2.1 Approximation de Kirchhoff

Afin de déterminer à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel le champ des ondes de surface émis une telle structure, on suppose que l'on connaît le champ $\mathcal{E}(\vec{\rho})$ à proximité de la structure en or, sur le chemin L schématisé sur la figure 2.23. Toutefois, la connaissance de $\mathcal{E}(\vec{\rho})$ n'est pas suffisante ici. En effet, la frontière de la structure en or est courbe, et l'on ne peut plus utiliser la formule (2.30a) afin de calculer le champ des ondes de surface dans la structure. L'équation (2.25) doit être utilisée, et il faut, pour cela, connaître également la dérivée normale du champ, $\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{E}(\vec{\rho})$.

Afin de la déterminer, nous allons effectuer une approximation dans l'esprit de l'approximation de Kirchhoff (ou du plan tangent) dans le cadre de la diffusion par une surface rugueuse (NIETO-VESPERINAS 2006). Cette approximation consiste à supposer le rebord diffusant l'onde incidente comme localement plat. Le long de ce rebord plat, le champ des ondes de surface est supposé proportionnel au champ incident, $\mathcal{E}(\vec{\rho}_{reb}) \propto E_{z,inc} e^{i\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}}$ avec $\mathbf{r} = \vec{\rho}_{reb} + z\mathbf{z}$ et $\vec{\rho}_{reb}$ est la position d'un point du rebord (z peut correspondre à l'altitude approximative du rebord, mais est en fait arbitraire, seule la dépendance vis-à-vis de $\vec{\rho}$ nous intéresse ici). L'onde de surface émise correspondra alors à une onde plane de la forme $\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \mathcal{E}_0 e^{i\mathbf{K} \cdot \vec{\rho}}$, et la composante tangentielle de \mathbf{K} est fixée par le champ incident sur le rebord, $K_t = k_{inc,t}$. En effet, la phase de l'onde émise est égale à la phase de l'onde incidente le long du rebord. La composante normale de \mathbf{K} s'en déduit connaissant son carré K_{sp}^2 , $K_n = \sqrt{K_{sp}^2 - K_t^2}$. Ainsi la dérivée normale du champ sur le rebord vaut finalement $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n}(\vec{\rho}_{reb}) = iK_n \mathcal{E}_0 e^{i\mathbf{K} \cdot \vec{\rho}_{reb}} = i\sqrt{K_{sp}^2 - k_{inc,t}^2} \mathcal{E}(\vec{\rho}_{reb})$.

2.4.2.2 Champs obtenus

$|E_z|^2$ et $|\mathbf{E}|^2$ calculés à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface sont représentés sur les figures 2.24(a) à 2.24(d). 2.24(c) est à comparer aux résultats obtenus par HUBER et al. (2008), reproduits sur la figure 2.24(e). 2.24(f) reproduit le champ des SPhP uniquement tel que calculé par HUBER et al. (2008) à l'aide d'un principe d'Huygens-Fresnel scalaire, on peut la comparer à 2.24(a). Pour tracer les figures 2.24(a) à 2.24(d), on a supposé que les sources secondaires n'étaient disposées que sur l'arc de cercle intérieur du rebord en or ainsi que sur les segments inférieur et supérieur joignant les deux arcs. Le rayon de l'arc intérieur du rebord, qui n'est pas précisé explicitement par HUBER et al. (2008), a été fixé à $R = 26 \mu\text{m}$.

On constate que la théorie scalaire (figure 2.24(f)) reproduit convenablement le résultat de la théorie vectorielle que nous avons proposée (figure 2.24(a)). La figure du champ total (figure 2.24(c)) reproduit bien les principales caractéristiques de la figure obtenue expérimentalement (figure 2.24(e)).

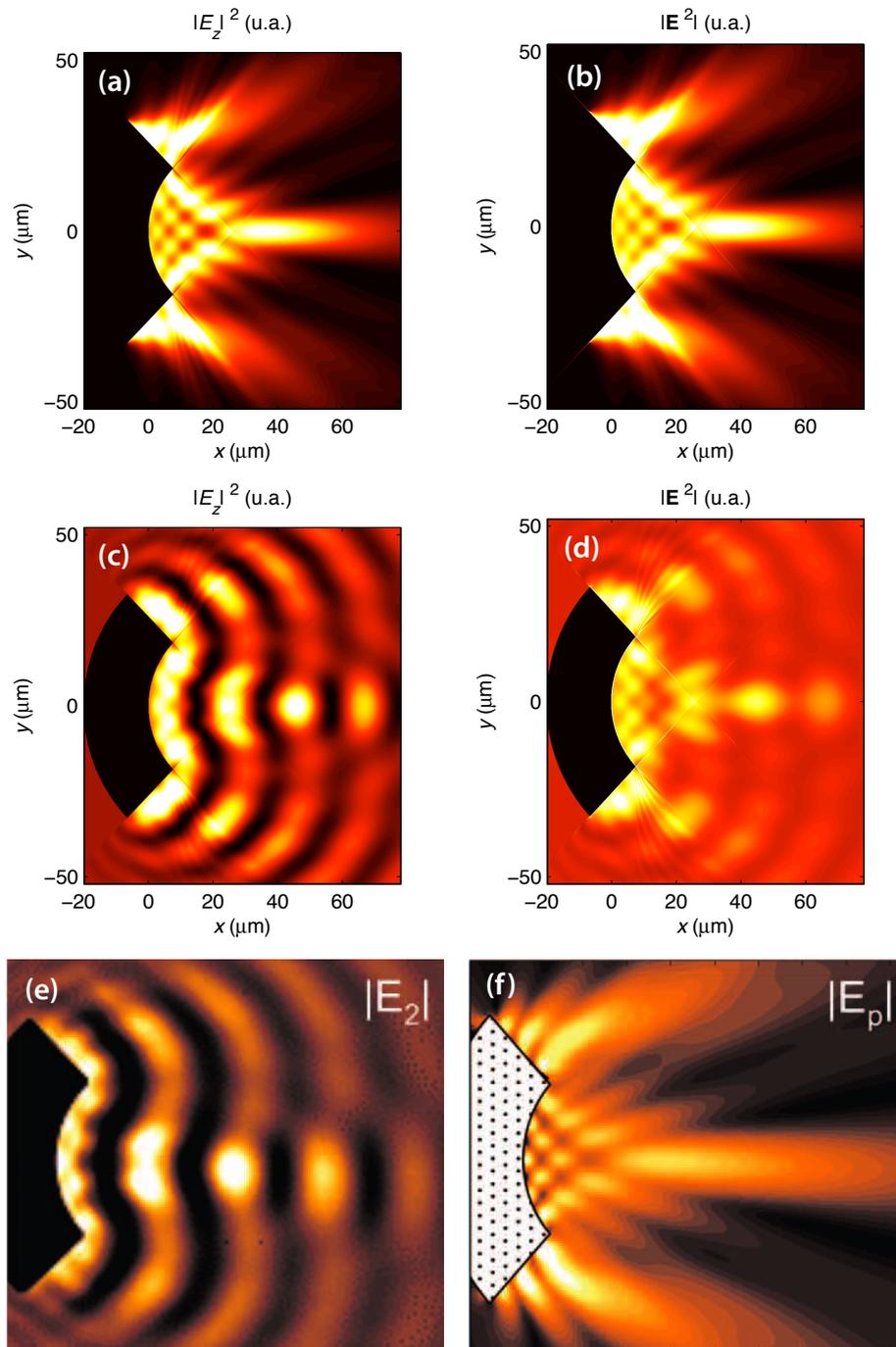


FIGURE 2.24 – Champ des SPhP excités par une structure en or sur une surface de SiC. (a) à (d) : champs calculés à l'aide du principe d'Huygens-Fresnel pour les ondes de surface. (a) et (b) : champ des SPhP uniquement, (c) et (d) : champ des phonons-polaritons de surface et champ incident superposés (des interférences se forment entre le champ incident et le champ des SPhP). Les échelles de couleur vont de 0 (noir) à 1 pour $|E_z|^2$ (gauche) et 1,33 pour $|\mathbf{E}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ (droite). (e) : champ mesuré (SPhP + champ incident), et (f) : et champ des SPhP seul déterminé numériquement, extraits de (HUBER et al. 2008).

2.5 Optique géométrique des ondes de surface

Nous abordons ici la possibilité d'utiliser la notion de limite de l'optique géométrique. Bien que l'atténuation des ondes de surface limite les distances mises en jeu, des observations expérimentales suggèrent que la notion de rayon peut être utile pour décrire la propagation des ondes de surface (HOHENAU et al. 2005 ; SMOLYANINOV et al. 2005 ; ZENTGRAF et al. 2011). L'objectif de cette section est d'établir les lois de la propagation en milieu inhomogène des rayons d'ondes de surface.

2.5.1 Équation eikonale pour les ondes de surface

Pour les ondes électromagnétiques en milieu 3D, l'équation eikonale permet de relier les équations de Maxwell à l'optique géométrique. Pour la retrouver, on cherche une solution de (2.6) sous la forme

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})e^{ik_0\tilde{S}(\mathbf{r})}, \quad (2.31)$$

avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. En utilisant l'équation de Helmholtz (équation 2.6) et en supposant la longueur d'onde dans le vide λ_0 faible devant les échelles de longueur des variations de l'amplitude $\tilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})$ et de la phase $\tilde{S}(\mathbf{r})$, on obtient l'équation eikonale

$$\left(\nabla\tilde{S}\right)^2 = n^2(\mathbf{r}). \quad (2.32)$$

Cette équation décrit l'évolution (spatiale) de la grandeur $\tilde{S}(\mathbf{r})$, directement reliée à la phase du champ électrique. Les iso- \tilde{S} correspondent aux fronts d'onde de l'onde considérée. Cette équation permet également de montrer que les « rayons » lumineux se propagent en ligne droite dans les milieux d'indice constant (BORN et WOLF 1999). On peut également obtenir une équation eikonale pour les ondes de surface. Pour cela, on cherche une solution de l'équation de Helmholtz pour les ondes de surface (équation 2.5) sous la forme

$$\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0(x, y)e^{ik_0S(x, y)}. \quad (2.33)$$

En reportant cette solution dans (2.5), on obtient

$$\Delta_{//}\mathcal{E}_0 + ik_0 [\nabla_{//}\mathcal{E}_0 \cdot \nabla_{//}S + \mathcal{E}_0(x, y)\Delta_{//}S] - k_0^2 [(\nabla_{//}S)^2 - n_{sp}^2] = 0, \quad (2.34)$$

où $n_{sp} = K_{sp}/k_0$ est l'indice effectif des ondes de surface. Comme pour les ondes électromagnétiques en milieu 3D, on suppose λ_0 petit devant l'échelle des variations de $\mathcal{E}_0(x, y)$ et $S(x, y)$. Le terme en $k_0^2 = (\frac{2\pi}{\lambda_0})^2$ domine alors dans l'expression ci-dessus, et on peut écrire l'équation eikonale pour les ondes de surface,

$$(\nabla_{//}S)^2 = n_{sp}^2. \quad (2.35)$$

Cette équation est très proche de l'équation eikonale pour les ondes électromagnétiques en milieu 3D (équation 2.32). Les ondes de surface ne se propagent que dans les directions x et y , la fonction phase S qui y figure ne dépend que de x et y , contrairement à celle de (2.32) qui dépend également de z . Pour les ondes de

surface, les cas où la partie imaginaire de l'indice n_{sp} est faible devant sa partie réelle sont moins fréquents que pour les ondes progressives. n_{sp} est le plus souvent complexe, S l'est également : les rayons d'ondes de surface sont absorbés au cours de leur propagation. On peut alors définir des « rayons » d'ondes de surface, en procédant par analogie avec les ondes électromagnétiques en milieu 3D. Nous allons supposer $|\nabla S''| \ll |\nabla S'|$ et $|n''_{sp}| \ll n'_{sp}$, c'est-à-dire que l'absorption est faible (la fonction $S(x, y)$ est complexe à cause de l'absorption des ondes de surface). L'équation (2.35) permet alors d'écrire $(\nabla S')^2 = n_{sp}'^2$. On calcule dans l'annexe D.5 le vecteur de Poynting associé aux ondes de surface (équation D.33). En intégrant ce vecteur dans la direction z , on définit un vecteur flux d'énergie 2D (équation D.34b),

$$\mathbf{P}(x, y) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} \text{Re} \left\{ \int dz \left[\epsilon(z, \omega) |f(z)|^2 \right] \frac{\nabla_{//} S'}{n_{sp}'^2} \right\}. \quad (2.36)$$

Avec les hypothèses précédentes sur $\nabla_{//} S$ et n_{sp} , on peut écrire

$$\mathbf{P}(x, y) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} \text{Re} \left\{ \frac{1}{n_{sp}'} \int dz \left[\epsilon(z, \omega) |f(z)|^2 \right] \right\} \frac{\nabla_{//} S'}{n_{sp}'}. \quad (2.37)$$

Ce vecteur flux d'énergie est ainsi colinéaire à $\nabla_{//} S'$, et on définit les rayons d'ondes de surface comme les courbes tangentes en tout point aux lignes $S'(x, y)$ constant. En notant s l'abscisse curviligne le long d'un de ces rayons et $\mathbf{r}(s)$ une fonction parcourant ce dernier, $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ est unitaire et tangent au rayon, donc égal à $\frac{\nabla_{//} S'}{|\nabla_{//} S'|}$, et on peut traduire la définition d'un rayon sous forme d'équation,

$$n_{sp}' \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla_{//} S'. \quad (2.38)$$

En différenciant cette équation par rapport à s , on peut obtenir l'équation d'évolution d'un rayon,

$$\frac{d}{ds} \left(n_{sp}' \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\nabla S') \quad (2.39a)$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla \right) \nabla S' \quad (2.39b)$$

$$= \frac{1}{n_{sp}'} (\nabla S' \cdot \nabla) \nabla S' \quad (2.39c)$$

$$= \frac{1}{2n_{sp}'} \nabla \left[(\nabla S')^2 \right], \quad (2.39d)$$

soit

$$\frac{d}{ds} \left(n_{sp}' \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

car $(\nabla_{//} S')^2 = n_{sp}'^2$ est uniforme, ce qui entraîne

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \mathbf{0}. \quad (2.41)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $\mathbf{r} = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$, où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont des vecteurs constants. Elles correspondent à des droites : les rayons d'ondes de surface se propagent en ligne droite sur une surface uniforme, comme attendu.

2.5.2 Équation des rayons d'ondes de surface en milieu inhomogène

On étend en annexe D.6 le formalisme précédent pour un système dont la géométrie varie lentement dans les directions x et y . On aboutit à une équation analogue à (2.5),

$$\Delta_{//}\mathcal{E}(x, y) + K_{sp}^2(x, y)\mathcal{E}(x, y) = 0, \quad (2.42)$$

où le carré du vecteur d'onde $K_{sp}^2(x, y)$ dépend désormais des coordonnées x et y : l'indice $n_{sp}(x, y) = K_{sp}(x, y)/k_0$ peut ainsi varier. On peut alors étendre facilement les calculs effectués dans la partie précédente. On définit un vecteur flux d'énergie 2D (voir équation 2.37) par

$$\mathbf{P}(x, y) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}_0(x, y)|^2 e^{-2k_0 S''(x, y)} \text{Re} \left\{ \frac{1}{n_{sp}(x, y)} \int dz \left[\epsilon_{x, y}(z, \omega) |f_{x, y}(z)|^2 \right] \right\} \frac{\nabla_{//} S'}{n'_{sp}(x, y)}. \quad (2.43)$$

On définit également les rayons d'ondes de surface comme les courbes perpendiculaires en tout point aux courbes $S'(x, y)$ constant (qui correspondent aux « fronts d'onde »), ce qui se traduit à nouveau sous forme d'équation,

$$n'_{sp}(x, y) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla_{//} S'. \quad (2.44)$$

Là encore, en différenciant cette équation par rapport à s , on peut obtenir l'équation d'évolution d'un rayon. Les calculs sont analogues aux équations (2.39a) à (2.40), au passage de (2.39d) à (2.40) près, qui permet d'écrire ici

$$\frac{d}{ds} \left[n'_{sp}(x, y) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n'_{sp}(x, y). \quad (2.45)$$

Cette équation permet de justifier les calculs effectués par ZENTGRAF et al. (2011) pour dimensionner les dispositifs d'optique transformationnelle pour SPP (lentilles de Lüneburg et Eaton). Dans cet article, les auteurs mettent en forme (la partie réelle de) l'indice n'_{sp} des SPP afin de dévier les « rayons » de SPP comme le prévoirait l'optique géométrique. Il est à noter que d'autres approches ont été étudiées afin de transposer des composants de l'optique transformationnelle aux ondes de surface, consistant à implémenter des éléments d'optique transformationnelle 3D dans des hétérostructures supportant des ondes de surface (KADIC et al. 2010). En tenant compte d'une éventuelle anisotropie du tenseur diélectrique ainsi que du tenseur magnétique, le modèle développé dans ce chapitre peut être étendu aux systèmes contenant ce type de matériaux, et ce modèle permettrait de modéliser des éléments étudiés par KADIC et al. (2010), choisis de sorte qu'ils varient lentement dans le plan de propagation des ondes de surface.