

Table des matières

Remerciements	iii
Notations	v
Introduction	vi
1 Préliminaires	1
Préliminaires	1
1.1 Rappels	1
1.2 Tenseurs canoniques sur TM	4
1.2.1 Le fibré $\pi^*(TM)$	4
1.2.2 L'endomorphisme vertical J et le champ canonique C	5
1.3 Dérivations algébriques	6
1.4 Formes semi-basiques et formes homogènes	14
1.5 Semi-gerbes et gerbes	17
2 Généralités sur les connexions	19
Généralités sur les connexions	19
2.1 Définitions et théorèmes	19
2.2 Projecteur vertical et Projecteur horizontal	21
2.3 Semi-gerbe associée à une connexion	23
2.4 Courbure et torsion d'une connexion	24

3 Variétés semi-finsleriennes et finsleriennes	30
Variétés semi-finsleriennes et finsleriennes	30
3.1 Variétés semi-finsleriennes	30
3.1.1 Semi-gerbe associée canoniquement à une structure semi-finslerienne	35
3.1.2 Connexions conservatives	37
3.2 Variétés finsleriennes	37
3.2.1 Existence d'une fonction énergie d'une connexion	40
3.2.2 Existence d'une structure finslerienne de dimension 2 à connexion donnée	45
Conclusion	50
Bibliographie	51

REMERCIEMENTS

Avant tout, j'aimerais remercier DIEU pour la foi, l'amour, la force, et le courage qu'il m'a donné tout au long de mes études.

Mes sincères remerciements vont également à :

- Monsieur Frédéric Manelo ANONA, Professeur Titulaire à la Faculté des Sciences de l'Université d'Antananarivo, pour le grand honneur qu'il me fait en acceptant de présider cette soutenance.
- Monsieur Princy RANDRIAMBOLOLONDRAntomalala, Maître de conférences à l'Université d'Antananarivo, mon rapporteur qui en dépit de ses multiples occupations n'a ménagé ni son temps ni sa force pour me guider à trouver ma voie. Les conseils qui ont été donnés constituent l'ossature de ce travail. Je suis très reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée et l'encadrement dont j'ai bénéficié.
- Monsieur Hanitriniaina Sammy Grégoire RAVELONIRINA, Maître de conférences à l'Université d'Antananarivo, qui malgré ses multiples responsabilités respectives a accepté de juger mon travail, en tant qu'examineur.
- Monsieur Armand RAMAMONJISOA, Chef de département de Mathématiques et Informatique, et à tous les personnels de ce département, qui m'ont aidé sur les tâches administratives.

Ma reconnaissance va aussi à Madame Ingrid DAUBECHIES, Professeur à Duke University USA, ancienne Présidente de «International Mathematical Union», pour son soutien financier. Ma reconnaissance s'adresse également à Monsieur Benjamin ANDRIAMIHAJA, Directeur de MICET, ainsi qu'à tous ses collaborateurs.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à tous les membres de ma famille et mes amis qui ont eu la gentillesse de me faire des commentaires, de m'aider et dont les conseils et suggestions contribuent à la qualité didactique de ce mémoire.

MERCI A TOUS.

Notations

Dans tout le travail, nous adoptons les notations suivantes :

- M : une variété différentiable paracompacte de classe C^∞ , de dimension n ;
- $T_x M$: l'espace vectoriel tangent en $x \in M$ sur M ;
- $TM = \cup_{x \in M} T_x M$: le fibré tangent sur M ;
- $\pi : TM \longrightarrow M$: le fibré tangent à M ;
- $P : TTM \longrightarrow TM$: le fibré tangent à TM ;
- $\mathfrak{F}(M)$: l'anneau des fonctions différentiables sur M ;
- $A^p(M)$: le $\mathfrak{F}(M)$ –module des p –formes scalaires sur M ;
- $\Phi^p(M)$: le $\mathfrak{F}(M)$ –module des p –formes vectorielles complètement antisymétriques sur M ;
- $\mathfrak{X}(M)$: le $\mathfrak{F}(M)$ –module des champs de vecteurs sur M ;
- $\Lambda(M)$: l'algèbre extérieure sur M ;
- $\Lambda^p(M)$: le $\mathfrak{F}(M)$ –module des p –formes différentielles sur M ;
- $\Psi^l(M)$: le $\mathfrak{F}(M)$ –module des l –formes complètement antisymétriques sur M à valeurs dans TM ;
- $V(TM) = (\pi^T)^{-1}(\{0\})$: le fibré des vecteurs verticaux tangents à TM ;
- $\pi_0 : \mathcal{T}M \longrightarrow M$ désigne le fibré des vecteurs non nuls tangents à M ;
- θ_X : la dérivée de Lie de formes scalaires par rapport à un champ de vecteurs X ;
- L_X : la dérivée de Lie de l –formes vectorielles, $l \geq 1$, par rapport à un champ de vecteurs X .

INTRODUCTION

En 1972, Kowalski a étudié dans [KOW72] l'existence d'une structure riemannienne pour une connexion linéaire, sans torsion, à courbure régulière. Il a trouvé à cet effet quelques résultats tels que la détermination d'une métrique riemannienne régulière par le tenseur de courbure et aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une connexion linéaire sans torsion sur une variété de dimension n , $n \geq 2$, soit une connexion de Levi-Civita. Dans cette même optique, J. Vey a étudié une connexion linéaire sans torsion pour qu'elle soit de Levi-Civita, dans un papier non publié.

Dans ce présent mémoire, nous adoptons un point de vue plus général : le cadre le plus approprié est la variété finslerienne et que les connexions ne sont pas forcément linéaires. En d'autres termes, nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une connexion sans torsion, à courbure régulière, provienne d'une structure finslerienne. Le formalisme de Grifone [GRI72] est en effet un outil de base dans ce travail.

Pour se faire, nous étudions en premier lieu les notions fondamentales telles que les formes vectorielles et leur crochet de Frölicher-Nijenhuis, la 1-forme vectorielle J appelée aussi structure tangente naturelle. En second lieu, nous nous approfondissons les concepts de connexions : ce sont des formes vectorielles d'ordre 1 sur l'espace fibré TM de M . Cette connexion définit une structure presque produit sur TM et permet la décomposition de l'espace TTM en deux sous-espaces : le sous-espace horizontal et le sous-espace vertical. Dans cette partie, nos connaissances vont s'élargir sur les notions de courbure et de torsion d'une connexion donnée. Enfin, la dernière partie de cet ouvrage se consacre sur les variétés finsleriennes notamment sur l'existence d'une structure finslerienne de dimension $n \geq 2$ à connexion donnée, en particulier pour $n = 2$. On remarque que cette hypothèse

$n = 2$ nous permet d'avoir une courbure nulle si l'espace de nullité horizontal de la courbure de la connexion est non nul, cf. [RRA15]. Chaque section est accompagnée par des exemples illustratifs. Dans certains exemples, nous utilisons le logiciel de calcul Mathématiques "Maple", version 13, pour effectuer les calculs assez longs et parfois complexes. La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement utilisée.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels

Définitions 1.1. [RRA10]

- Une variété topologique M de dimension n est un espace topologique séparé, localement homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .
- Une carte de la variété M de dimension n est un couple (U, φ) tel que U est un ouvert de M et φ un homéomorphisme de U sur un ouvert $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^n . Cette carte définit un système de coordonnées (locales) noté souvent $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$.
- Un atlas différentiable de classe C^∞ de la variété M est un recouvrement de M par des cartes (U_i, φ_i) telles que pour tous i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors

$$\varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

est un C^∞ -difféomorphisme. Cette variété est dite différentiable de classe C^∞ .

Définition 1.2. Une variété M est **paracompacte** si de tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de M , il existe un recouvrement ouvert \mathcal{V} de M qui est plus fin que \mathcal{U} et qui est localement fini.

Définition 1.3. [SZI03]

Une *variété fibrée* ou tout simplement un **fibré** est un triplet (E, π, M) où E et M sont

des variétés et $\pi : E \longrightarrow M$ est une submersion surjective.

La variété E est alors appelé espace total et que la variété M , espace de base, π la projection.

Pour chaque point p de M , le sous-espace $E_p = \pi^{-1}(p)$ de E est appelé la **fibres sur p** .

Exemple 1.4. Soient M et N deux variétés et soit $M \times N$ le produit cartésien. Si $(U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(V_\beta, y_\beta)_{\beta \in B}$ sont des atlas pour M et N respectivement, alors $(U_\alpha \times V_\beta, x_\alpha \times y_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$ est un atlas pour $M \times N$. La variété obtenue à ce passage est dite variété produit de M avec N . Il s'en suit qu'on peut définir naturellement les projections

$$pr_1 : M \times N \longrightarrow M, (p, q) \longmapsto p,$$

et

$$pr_2 : M \times N \longrightarrow N, (p, q) \longmapsto q.$$

Le triplet $(M \times N, pr_2, M)$ est un fibré appelé fibré trivial sur M ; ses fibres $(M \times N)_p = \{p\} \times N, p \in M$, sont diffeomorphes canoniquement à N .

Définition 1.5. Une variété fibrée (E, π, M) est appelée **fibré vectoriel** (réel) de rang $k, k \in \mathbb{N}$, si les conditions suivantes sont satisfaites :

FV1. pour tout $p \in M$, le fibre E_p est un espace vectoriel de dimension k ,

FV2. pour tout $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p et un diffeomorphisme

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k \text{ tels que :}$$

i. $pr_1 \circ \varphi = \pi |_{\pi^{-1}(U)}$, i.e le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^k \\
 \pi |_{\pi^{-1}(U)} \searrow & & \swarrow pr_1 \\
 & U &
 \end{array}$$

est commutatif ;

ii. $\forall q \in U$, la fonction $\varphi_2 = pr_2 \circ (\varphi | E_p) : E_q \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est un morphisme linéaire.

Le couple (U, φ) ayant les propriétés de *FV2*. est dite une **carte du fibré vectoriel** pour π . Une famille $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est appelée un **atlas du fibré vectoriel** de π si $(U_i)_{i \in I}$ recouvre M .

Proposition 1.6. [RAD86] Soit M une variété différentiable de dimension n , de classe C^k , $k \leq n$. Rappelons que $T_x M$ est l'ensemble de vecteurs tangents en x sur M ; c'est un espace vectoriel de dimension n .

Posons $TM = \cup_{x \in M} T_x M$. Alors TM peut être muni canoniquement d'une structure de variété différentiable de dimension $2n$ et de classe C^{k-1} . L'ensemble TM muni de cette structure s'appelle le **fibré tangent** de M .

Ainsi, chaque élément de TM peut être identifié à un couple (x, X_x) , où $x \in M$ et $X_x \in T_x M$.

Nous pouvons donc écrire

$$TM = \{(x, X_x) : x \in M \text{ et } X_x \in T_x M\}.$$

Démonstration. Se référer à [RAD86] pour plus de détails à la démonstration. \square

Exemple 1.7. 1. Les groupes classiques de matrices (inversibles, orthogonales, unitaires) ont une structure de variété, ce sont

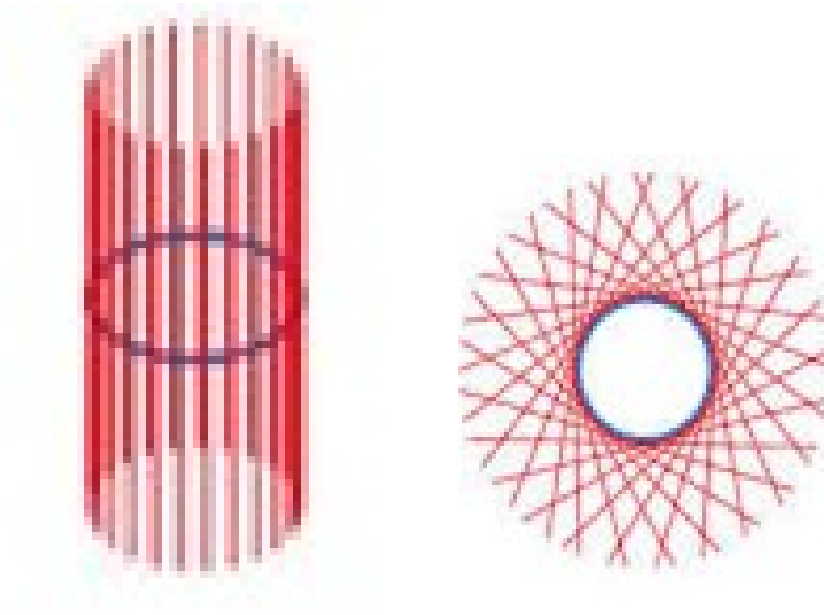
d'ailleurs des sous-variétés de \mathbb{R}^{n^2} ou \mathbb{C}^{n^2} . Les espaces tangents en l'identité sont alors respectivement toutes les matrices, les matrices antisymétriques et les matrices antihermitiennes. La structure de groupe permet d'identifier les espaces tangents en d'autres matrices avec ces espaces vectoriels de matrices.

2. Le fibré tangent au cercle $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ apparaît comme la sous-variété

$$\{(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 = 1, xx' + yy' = 0\}.$$

Il est difféomorphe au cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ comme le montre les figures suivantes, cf.

<http://commons.wikipedia.org/wiki/File:tangent>.



Représentations du fibré tangent de S^1

1.2 Tenseurs canoniques sur TM

1.2.1 Le fibré $\pi^*(TM)$

[DJE01] Le **fibré pull-back** (ou fibré rappelé) $\pi^*(TM) \longrightarrow \mathcal{T}M$, dont la base est le fibré tangent privé de la section nulle $\mathcal{T}M$, est décrit comme une collection d'espaces tangents $T_x M$ en chaque point (x, y) de la base $\mathcal{T}M$.

En effet, la collection de tous les points (x, y) avec $y \neq 0$, constituant le fibré tangent $\mathcal{T}M$, est considérée comme une variété où en chaque point (x, y) est dressé une copie de $T_x M$ sur lequel un produit scalaire peut être formé.

L'appellation "**fibré rappelé**" pour $\pi^*(TM)$, issue du langage de la théorie des fibrés, vient du fait qu'il est construit à partir du fibré tangent TM comme suit

$$\pi^*(TM) = \{(x, y, v) \in \mathcal{T}M \times TM : \pi(x, y) = \pi(v) = x\},$$

et on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^*TM & \xrightarrow{\tau} & TM \\
 \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\
 TM & \xrightarrow{\pi} & M
 \end{array}$$

Définition 1.8. [KLE87] Soit M une variété, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(M)$ l'anneau des fonctions C^∞ sur M , $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(M)$ le \mathfrak{F} -module des champs de vecteurs sur M et $\Lambda(M)$ l'algèbre extérieure sur M .

Une *l*-forme vectorielle L sur M , $0 \leq l \leq n$, est une application linéaire alternée $L : \mathfrak{X}^l \rightarrow \mathfrak{X}$, c'est-à-dire un tenseur de type $(1, l)$ complètement antisymétrique.

Pour $l = 0$, L est un champ de vecteurs sur M .

Pour $l = 1$, on a $L : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$, donc L est un endomorphisme de \mathfrak{X} , et on dit tout simplement une 1-forme vectorielle. Et pour $l = 2$, on a $L : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$, L est une application bilinéaire complètement antisymétrique, et ainsi de suite suivant la valeur de l .

En particulier, la transformation identique I dans \mathfrak{X} est une 1-forme vectorielle.

Exemple 1.9. Une matrice carrée d'ordre n sur un corps \mathbb{K} est une 1-forme vectorielle sur \mathbb{K} .

Dans toute la suite, le terme "forme" désignera une forme différentielle extérieure. Par contre, les "formes vectorielles" seront toujours précisées avec cette appellation.

1.2.2 L'endomorphisme vertical J et le champ canonique C

Considérons la suite exacte de fibrés vectoriels sur TM suivante

$$0 \longrightarrow \pi^*(TM) \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{j} \pi^*(TM) \longrightarrow 0$$

i étant l'injection naturelle et $j = (P, \pi^T)$.

Sur l'espace tangent TM de la variété M est défini :

- i. le champ canonique $C = i \circ \delta$, où $\delta : z \mapsto (z, z)$ est le champ canonique de $\pi^*(TM)$;
- ii. un endomorphisme (vertical) $J = i \circ j$ appelé la structure tangente naturelle. C'est une 1-forme vectorielle, vérifiant :

$$\forall z \in TM, \text{Im } J_z = \text{Ker } J_z = V_z,$$

le dernier ensemble est le sous-espace vertical de $T_z TM$, donc $J^2 = 0$.

En coordonnées locales (x^i, y^i) de TM , on écrit

$$\begin{aligned} C &= y^k \frac{\partial}{\partial y^k} \\ J &= dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} \end{aligned}$$

Définition 1.10. Un champ de vecteurs X sur TM est dit **vertical** si et seulement si $JX = 0$, ou de façon équivalente, s'il existe un champ Y sur TM tel que $X = JY$.

1.3 Dérivations algébriques

Définition 1.11. Soit $\Lambda(M)$ l'algèbre extérieure sur M , c'est-à-dire l'ensemble de toutes les formes différentielles de M .

Une dérivation D de degré r de l'algèbre $\Lambda(M)$ est un endomorphisme de $\Lambda(M)$ tel que :

- i) $Dk = 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}$
- ii) $D(\Lambda^p(M)) \subset \Lambda^{p+r}(M)$
- iii) $D(w_p \wedge w_q) = Dw_p \wedge w_q + (-1)^{pr} w_p \wedge Dw_q$,

où $w_p \in \Lambda^p(M)$, $w_q \in \Lambda^q(M)$ des formes différentielles de degré p et q respectivement.

Cette dérivation est une antidérivation de $\Lambda(M)$ si :

- a) elle est \mathbb{R} -linéaire
- b) pour tous $w_p \in \Lambda^p(M)$, $w_q \in \Lambda^q(M)$, on a

$$D(w_p \wedge w_q) = Dw_p \wedge w_q + (-1)^p w_p \wedge Dw_q.$$

Exemple 1.12. La dérivation extérieure d est une antidérivation de degré 1.

Définition 1.13. Une dérivation graduée D est dite algébrique si elle agit trivialement sur les fonctions différentiables, c'est-à-dire $D|_{\mathcal{C}^\infty(M)} = 0$.

Lemme 1.14. *Toute dérivation algébrique est déterminée par son action sur le module des 1-formes.*

Démonstration. Soit $D : \Lambda(M) \rightarrow \Lambda(M)$ une dérivation algébrique de degré r . On sait que D est $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire : pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et pour toute 1-forme α de $\Lambda(M)$, nous avons

$$\begin{aligned} D(f\alpha) &= D(f \wedge \alpha) \\ &= (Df) \wedge \alpha + (-1)^{0 \cdot r} f \wedge (D\alpha) \\ &= f \wedge (D\alpha) \\ &= f(D\alpha) \end{aligned}$$

Puisque toute forme différentiable peut être représentée localement comme une combinaison $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire de 1-formes et D est naturellement définie avec les restrictions, on en déduit immédiatement l'assertion. \square

Définition 1.15. Soit X un champ de vecteurs sur M . Si A est une k -forme différentielle ou vectorielle sur M et

$$i_X A(X_2, \dots, X_k) = A(X, X_2, \dots, X_k), \quad X_i \in \mathfrak{X}(M) \quad 2 \leq i \leq k,$$

alors $i_X A$ est une forme différentielle (resp. une forme vectorielle) de degré $k - 1$.

L'application $i_X : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ (resp. $\Phi(M) \longrightarrow \Phi(M)$) définie ci-dessus est appelée l'*opérateur de substitution* ou le *produit intérieur* induit par le champ de vecteurs X .

C'est une dérivation de degré -1 de l'algèbre graduée $\Lambda(M)$.

Par exemple, pour $k = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_X f = 0, \text{ si } f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Lambda^0(M), \\ \qquad \qquad \qquad \text{et} \\ i_X Y = 0, \text{ si } Y \in \mathfrak{X}(M) = \Phi^0(M) \end{array} \right.$$

Pour une 1-forme α sur la variété M , nous avons $i_X \alpha = \alpha(X)$. En particulier, pour la différentielle d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $i_X df = X(f)$.

Par conséquent

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X \beta ,$$

pour tout $\alpha \in \Lambda^k(M)$, $\beta \in \Lambda(M)$.

Comme pour le produit "wedge" \wedge d'une forme scalaire $\alpha \in \Lambda(M)$ et d'une forme vectorielle $L \in \Phi(M)$, nous avons

$$i_X(\alpha \wedge L) = i_X \alpha \wedge L + (-1)^k \alpha \wedge i_X L.$$

D'une manière plus générale,

Proposition 1.16. *Si $L \in \Phi^l(M)$ est une l -forme vectorielle sur M , alors l'application*

$$i_L : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M), \quad \alpha \longmapsto i_L \alpha = \alpha \bar{\wedge} L,$$

est une dérivation algébrique de degré $l - 1$ de $\Lambda(M)$, avec

$$\alpha \bar{\wedge} L(X^1, \dots, X^{k+l-1}) = \frac{1}{(k-1)!!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \alpha(L(X^{\sigma_1}, \dots, X^{\sigma_l}), \dots, X^{\sigma_{k+l-1}})$$

appelé le produit "wedge-bar" de k -forme α et de la l -forme vectorielle L , avec $X^1, \dots, X^{k+l-1} \in \Phi^0(M) = \mathfrak{X}(M)$; la sommation ci-dessus étant prise dans le groupe des permutations de $\{1, \dots, k+l-1\}$.

Inversement, si $D : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ est une dérivation algébrique de degré $l-1 \geq 1$, alors il existe une unique l -forme vectorielle L sur M telle que $D = i_L$. C'est une dérivation du type i_* .

Démonstration. En utilisant la définition du produit "wedge-bar", nous avons

$$i_L(\alpha \wedge \beta) = (\alpha \wedge \beta) \bar{\wedge} L = (\alpha \bar{\wedge} L) \wedge \beta + (-1)^{k(l-1)} \alpha \wedge (\beta \bar{\wedge} L)$$

pour tous $\alpha \in \Lambda^k(M), \beta \in \Lambda(M)$; donc i_L est une dérivation graduée de degré $l-1$ de $\Lambda(M)$.

Inversement, supposons que $D : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ est une dérivation algébrique de degré $l-1 \geq 1$. Définissons une application

$L : \Lambda^1(M) \times \mathfrak{X}^l(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ par la manière suivante

$$L(\alpha, X_1, \dots, X_l) = (D\alpha)(X_1, \dots, X_l),$$

$\alpha \in \Lambda^1(M), X_i \in \mathfrak{X}(M), 1 \leq i \leq l$.

Alors L est automatiquement $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinéaire et antisymétrique par rapport à ses variables champs de vecteurs. Puisque D est algébrique et donc linéaire, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, nous avons

$$\begin{aligned} L(f\alpha, X_1, \dots, X_l) &= (D(f\alpha))(X_1, \dots, X_l) \\ &= f(D\alpha)(X_1, \dots, X_l) \\ &= fL(\alpha, X_1, \dots, X_l) \end{aligned}$$

donc $L \in \Phi^l(M)$.

Maintenant, considérons une 1-forme $\alpha \in \Lambda^1(M)$ et X_1, \dots, X_l des champs de vecteurs

sur M , nous avons

$$\begin{aligned}
 i_L \alpha(X_1, \dots, X_l) &= \alpha \bar{\wedge} L(X_1, \dots, X_l) \\
 &= \alpha L[(X_1, \dots, X_l)] \\
 &= L(\alpha, X_1, \dots, X_l) \\
 &= (D\alpha)(X_1, \dots, X_l).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $i_L \alpha = D\alpha$.

L'unicité de la l -forme vectorielle L est immédiate. \square

Exemple 1.17. Soient L une 1-forme vectorielle sur la variété M et α une k -forme sur M . Nous avons

$$i_L \alpha(X_1, \dots, X_k) = \sum_{j=1}^k \alpha(X_1, \dots, LX_j, \dots, X_k), \quad X_i \in \mathfrak{X}(M), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Si de plus $L = I$ est la 1-forme vectorielle identité sur la variété M , alors

$$i_I \alpha = k\alpha.$$

Définition 1.18. Le commutateur de deux dérivations

$$d_L = [i_L, d] = i_L \circ d - (-1)^{l-1} d \circ i_L$$

définit une dérivation de degré l de $\Lambda(M)$. On l'appelle la dérivée de Lie suivant L ou la dérivation graduée de type d_* de $\Lambda(M)$. L'expression de $d_L \omega$, avec $\omega \in \Lambda(M)$, est donnée par

$$d_L \omega = [i_L, d]\omega = i_L \circ d\omega - (-1)^{l-1} d \circ i_L \omega.$$

En particulier, si $\omega = f \in \Lambda^0(M) = C^\infty(M)$, c'est-à-dire f est un scalaire, alors

$$d_L f = i_L df = df \bar{\wedge} L = df \circ L.$$

Remarque 1.19. Si I est la 1-forme vectorielle identité, alors d_I est égale à d .

En effet, pour toute k -forme α sur M , on a

$$d_I\alpha = [i_I, d]\alpha = i_I d\alpha - di_I\alpha = (k+1)d\alpha - kd\alpha = d\alpha.$$

Définition 1.20. [SZI03]

Pour toutes formes vectorielles $L \in \Phi^l(M)$ et $H \in \Phi^h(M)$, nous définissons le crochet de Frölicher-Nijenhuis de L par H , noté $[L, H]$, par

$$[d_L, d_H] = d_L d_H - (-1)^{lh} d_H d_L,$$

c'est une $(l+h)$ -forme vectorielle. C'est aussi une dérivation de type d_* de degré $l+h$. Il existe donc une $(l+h)$ -forme vectorielle, que nous désignerons par $[L, H]$, telle que

$$[d_L, d_H] = d_{[L, H]}.$$

Proposition 1.21. Soient $L \in \Phi^l(M)$, $H \in \Phi^h(M)$, $K \in \Phi^k(M)$, on a :

1. $[L, H] = (-1)^{lh+1} [H, L]$
2. $(-1)^{lk} [L, [H, K]] + (-1)^{hl} [H, [K, L]] + (-1)^{kh} [K, [L, H]] = 0$
3. $[I, H] = 0$

L'assertion 2. s'appelle l'identité de Jacobi généralisée.

Démonstration. Soient $L \in \Phi^l(M)$, $H \in \Phi^h$, $K \in \Phi^k(M)$,

1. D'abord, on a

$$\begin{aligned}
[d_L, d_H] &= d_L d_H - (-1)^{lh} d_H d_L \\
&= -((-1)^{lh} d_H d_L - d_L d_H) \\
&= -(-1)^{lh} (d_H d_L - d_L d_H) \\
&= (-1)^{lh+1} (d_H d_L - d_L d_H) \\
&= (-1)^{lh+1} [d_H, d_L],
\end{aligned}$$

$$\text{d'où } [L, H] = (-1)^{lh+1} [H, L].$$

2. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
[d_L, [d_H, d_K]] &= d_L d_H d_K - (-1)^{lh} d_L d_K d_H - \\
&\quad - (-1)^{h+k} d_H d_K d_L + (-1)^{(l+k)h} (-1)^{kl} d_K d_H d_L,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d_H, [d_K, d_L]] &= d_H d_K d_L - (-1)^{kl} d_H d_L d_K - (-1)^{(k+l)h} d_K d_L d_H + \\
&\quad + (-1)^{(k+l)h} (-1)^{kl} d_L d_K d_H,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[d_K, [d_L, d_H]] &= d_K d_L d_H - (-1)^{hl} d_K d_H d_L - (-1)^{(h+l)k} d_L d_H d_K + \\
&\quad + (-1)^{(h+l)k} (-1)^{hl} d_H d_L d_K.
\end{aligned}$$

d'où,

$$(-1)^{lk} [d_L, [d_H, d_K]] + (-1)^{hl} [d_H, [d_K, d_L]] + (-1)^{kh} [d_K, [d_L, d_H]] =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{lk}(d_L d_H d_K - (-1)^{lh} d_L d_K d_H - (-1)^{h+k} d_H d_K d_L + \\
&\quad (-1)^{(l+k)h} (-1)^{kl} d_K d_H d_L) + (-1)^{hl}(d_H d_K d_L - \\
&\quad (-1)^{kl} d_H d_L d_K - (-1)^{(k+l)h} d_K d_L d_H + \\
&\quad (-1)^{(k+l)h} (-1)^{kl} d_L d_K d_H) + (-1)^{kh}(d_K d_L d_H - \\
&\quad (-1)^{hl} d_K d_H d_L - (-1)^{(h+l)k} d_L d_H d_K + \\
&\quad (-1)^{(h+l)k} (-1)^{hl} d_H d_L d_K) \\
&= (-1)^{lk} d_L d_H d_K - (-1)^{(h+l)k} d_L d_K d_H - (-1)^{hl} d_H d_K d_L + \\
&\quad (-1)^{(l+k)h} d_K d_H d_L + (-1)^{hl} d_H d_K d_L - (-1)^{(h+k)l} d_H d_L d_K - \\
&\quad (-1)^{hk} d_K d_L d_H + (-1)^{(h+l)k} d_L d_K d_H + (-1)^{kh} d_K d_L d_H - \\
&\quad (-1)^{(l+k)h} d_K d_H d_L - (-1)^{lk} d_L d_H d_K + (-1)^{(h+k)l} d_H d_L d_K \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où l'identité de Jacobi

$$(-1)^{lk} [L, [H, K]] + (-1)^{hl} [H, [K, L]] + (-1)^{kh} [K, [L, H]] = 0.$$

3. Enfin, soit I la transformation identique,

$$\begin{aligned}
[d_I, d_H] &= d_I d_L + (-1)^{l+1} d_L d_I \\
&= dd_L + (-1)^{l+1} d_L d, \text{ car } d_I = d \\
&= dd_L + (-1)^{l+1} (-1)^l dd_L, \text{ puisque } d_L \text{ commute avec } d \\
&= dd_L - dd_L \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où, $[I, L] = 0$.

□

Pour $L, H \in \Phi^1(M)$ et $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a

$$\begin{aligned} [L, H](X, Y) &= [LX, HY] + [HX, LY] + LH[X, Y] + HL[X, Y] - \\ &\quad L[HX, Y] - L[X, HY] - H[LX, Y] - H[X, LY]. \end{aligned}$$

Exemple 1.22. La structure tangente J est plate, c'est-à-dire le tenseur de Nijenhuis de J est nulle, $N_J = [J, J] = 0$.

Théoreme 1.23. (*Frölicher-Nijenhuis*)

Toute dérivation algébrique est la somme de dérivation de type i_* et d_* .

Démonstration. Voir [SZI03]. □

1.4 Formes semi-basiques et formes homogènes

Définition 1.24. Une l -forme vectorielle L , $l \geq 1$, est dite semi-basique si les assertions suivantes sont vérifiées :

- $L(X_1, \dots, X_l)$ est vertical pour tous X_1, \dots, X_l des champs de vecteurs sur TM ;
- $L(X_1, \dots, X_l) = 0$ si l'un des champs X_1, \dots, X_l est vertical.

En d'autres termes, une l -forme vectorielle L sur TM , avec L antisymétrique et $l \geq 1$, est dite semi-basique si :

$$\begin{cases} JL = 0 \\ i_{JX}L = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(TM). \end{cases}$$

Une p -forme scalaire ω sur TM , $p \geq 1$, est dite semi-basique si :

$$i_{JX}\omega = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(TM),$$

avec J est la 1-forme vectorielle définissant la structure tangente de la variété M .

Exemple 1.25. La 1-forme vectorielle J est semi-basique, ceci vient du fait que $J^2 = 0$.

Sur une carte U de TM de coordonnées locales naturelles (x^α, y^α) , un champ de l -formes vectorielles semi-basiques L s'écrit

$$L = L_{\beta_1, \dots, \beta_l}^\alpha(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_l} \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Définition 1.26. Une fonction différentiable f , définie sur TM , est dite (positivement) homogène de degré r , et on écrit $f : h(r)$, si

$$\theta_C f = r f.$$

Une l -forme vectorielle L est dite homogène de degré r , notée $L : h(r)$ avec $r \in \mathbb{Z}$, si $[C, L] = (r - 1)L$ où C est le champ canonique sur TM .

Une p -forme scalaire ω est homogène de degré r , où $r \in \mathbb{Z}$, si $\theta_C \omega = r\omega$, avec θ_C est la dérivée de Lie par rapport à C .

Exemple 1.27. La structure tangente J , qui est une 1-forme vectorielle est $h(0)$, c'est-à-dire

$$[C, J] = -J$$

Il suffit de vérifier cette égalité en prenant en coordonnées locales naturelles, un champ $X = \frac{\partial}{\partial x^l}$ de TM d'une part. Et d'autre part, un champ $X = \frac{\partial}{\partial y^l}$. Car $\mathfrak{X}(TM)$ est localement engendré par les deux types de champs de vecteurs. Nous pouvons écrire, d'après la propriété sur les formes vectorielles

$$[C, J]X = [C, JX] - J[C, X],$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & [y^k \frac{\partial}{\partial y^k}, dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}] \frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= [y^k \frac{\partial}{\partial y^k}, (dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}) \frac{\partial}{\partial x^l}] - (dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}) [y^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}] \\ &= [y^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}] - (dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}) (y^k \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial y^k} - \frac{\partial}{\partial x^l} y^k \frac{\partial}{\partial y^k}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial y^l}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
& [y^k \frac{\partial}{\partial y^k}, dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}] \frac{\partial}{\partial y^l} \\
&= [y^k \frac{\partial}{\partial y^k}, (dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}) \frac{\partial}{\partial y^l}] - (dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}) [y^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l}] \\
&= [y^k \frac{\partial}{\partial y^k}, 0] + (dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}) \frac{\partial}{\partial y^l} \\
&= 0 \\
&= -JX \quad \text{cqfd.}
\end{aligned}$$

Considérons aussi l'action des dérivations sur les formes homogènes. Si Ω est une forme homogène de degré r , alors :

- $d\Omega, i_C\Omega$ sont $h(r)$
- $i_J\Omega, d_J\Omega$ sont $h(r-1)$.

Proposition 1.28. [YOU78]

Soit $L \in \Phi^l(M)$ et $K \in \Phi^k(M)$.

Si L est $h(r)$ et K est $h(s)$, alors $[L, K]$ est $h(r+s-1)$

En particulier, $[J, L]$ est $h(r-1)$.

Démonstration. En appliquant l'identité de Jacobi sur les formes vectorielles, on a

$$[C, [L, K]] + [L, [K, C]] + (-1)^{kl}[K, [C, L]] = 0$$

donc

$$[C, [L, K]] = [L, [C, K]] - (-1)^{kl}[K, [C, L]].$$

Comme :

L est $h(r)$ alors $[C, L] = (r-1)L$,

K est $h(s)$ alors $[C, K] = (s-1)K$,

d'où

$$\begin{aligned}
[C, [L, K]] &= (s-1)[L, K] - (-1)^{kl}(r-1)[K, L] \\
&= (s-1)[L, K] - (-1)^{kl}(r-1)(-1)^{lk+1}[L, K] \\
&= (s-1)[L, K] - (-1)^{2kl+1}(r-1)[L, K] \\
&= (s-1)[L, K] + (-1)^{2(kl+1)}(r-1)[L, K] \\
&= (s+r-2)[L, K]
\end{aligned}$$

d'où $[L, K]$ est $h(s+r-2)$. □

1.5 Semi-gerbes et gerbes

Définition 1.29. Une semi-gerbe sur une variété M est un champ S sur TM , \mathcal{C}^∞ sur TM , qui est une section du fibré vectoriel $\pi^T : TTM \rightarrow TM$.

La donnée d'une semi-gerbe équivaut à la donnée d'un système d'équations du second ordre.

Proposition 1.30. [GRI72]

Un champ de vecteurs S sur TM , \mathcal{C}^∞ sur TM est une semi-gerbe si, et seulement si, $JS = C$.

Démonstration. Soit S un champ de vecteurs sur TM . $JS = C$ équivaut à écrire que $i \circ j \circ S = i \circ \delta$. Comme i est un monomorphisme : $JS = C$ si et seulement si $j \circ S = \delta$. Or $j = (P, \pi^T)$, avec P le fibré tangent à TM , donc $JS = C$ si et seulement si S est une section des deux fibrés $P : TTM \rightarrow TM$ et $\pi^T : TTM \rightarrow TM$. □

L'expression de S en coordonnées locales naturelles s'écrit sous la forme
$$S = y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - 2G^\alpha(x^1 \dots x^n, y^1 \dots y^n) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$
 où les G^α sont des fonctions \mathcal{C}^∞ sur TM .

Exemple 1.31. Pour $n = 2$, en coordonnées locales $(x^\alpha, y^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 2}$, le champ S s'écrit

$$S = y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - 2G^\alpha(x^1, x^2, y^1, y^2) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \quad \text{et} \quad J = dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha};$$

nous avons

$$\begin{aligned} JS &= (dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha})(y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - 2G^\alpha(x^1, x^2, y^1, y^2) \frac{\partial}{\partial y^\alpha}) \\ &= y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - 0 \\ &= y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = C \end{aligned}$$

$$\text{d'où } JS = C.$$

Définitions 1.32. 1. Une gerbe est une semi-gerbe homogène de degré 2, qui est de plus de classe C^1 sur la section nulle. Les fonctions G^α sont donc homogènes de degré 2, c'est-à-dire que $[C, S] = S$.

2. Une gerbe quadratique est une semi-gerbe homogène de degré 2, qui est de classe C^2 sur la section nulle. Donc les fonctions G^α sont quadratiques en y .

Proposition 1.33. [GRI72]

Si S est une semi-gerbe sur M , alors pour tout $X \in \mathfrak{X}(TM)$, nous avons $J[JX, S] = JX$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'homogénéité et de l'intégralité de J . En effet

$$0 = \frac{1}{2} [J, J](S, X) = [C, JX] - J[C, X] - J[S, JX]$$

et d'autre part

$$-JX = [C, J]X = [C, JX] - J[C, X]$$

d'où $J[S, JX] = -JX$, c'est-à-dire $J[JX, S] = JX$. □

Chapitre 2

Généralités sur les connexions

En géométrie différentielle, la connexion est un outil pour réaliser un transport parallèle. Il existe plusieurs présentations qui dépendent de l'utilisation faite. Dans ce chapitre, nous allons travailler sur les connexions non homogènes, selon J. Grifone dans [GRI72].

2.1 Définitions et théorèmes

Définition 2.1. On appelle *connexion* non homogène sur M , ou simplement *connexion*, une 1-forme vectorielle Γ sur TM , C^∞ sur $\mathcal{T}M$ et telle que :

$$\begin{cases} J\Gamma = J \\ \Gamma J = -J. \end{cases}$$

Proposition 2.2. [GRI72]

Une 1-forme vectorielle Γ sur TM est une connexion sur M si, et seulement si, Γ définit une structure presque-produit sur TM , i.e $\Gamma^2 = I$, C^∞ sur $\mathcal{T}M$, telle que pour tout $z \in TM$, le sous-espace propre de Γ_z correspondant à la valeur propre -1 est le sous-espace $V_z(TM)$ des vecteurs verticaux tangents en z à TM .

Démonstration. Pour la **condition nécessaire**, considérons Γ , une connexion sur M . Alors $J\Gamma = J$ si et seulement si $J(\Gamma - I) = 0$, or $J = i \circ j$ et comme i est un monomorphisme alors :

$(i \circ j) \circ (\Gamma - I) = 0$ si et seulement si $j \circ (\Gamma - I) = 0$, donc $Im(\Gamma - I) \subset ker j = Im i$; d'autre part, $\Gamma J = -J$ si et seulement si $(\Gamma + I) J = 0$.

Comme j est un épimorphisme alors : $(\Gamma + I) \circ (i \circ j) = 0$ si, et seulement si $(\Gamma + I) \circ i = 0$, donc $Im i \subset ker(\Gamma + I)$. Alors $Im(\Gamma - I) \subset ker(\Gamma + I)$.

D'où finalement $(\Gamma + I)(\Gamma - I) = 0$, on a alors $\Gamma^2 - I = 0$, ce qui nous donne la structure presque-produit.

De plus, soit $z \in TM$. Si $X \in T_z TM$ est un vecteur propre de Γ_z associé à la valeur propre -1 , on a $X = -\Gamma X$, d'où $JX = -J(\Gamma X)$, donc $JX = 0$, ce qui vérifie que X est un vecteur vertical, par définition.

Réciproquement, si $X \in V_z(TM)$, il existe $Y \in T_z TM$ tel que $X = JY$. D'où

$$\begin{aligned} \Gamma X &= \Gamma JY \\ &= -JY \\ &= -X. \end{aligned}$$

Le champ X est donc le vecteur propre de Γ_z associé à la valeur propre -1 .

Pour la **condition suffisante**, soit $z \in TM$. On vérifie facilement que

$$V_z(TM) = JT_z TM.$$

Par hypothèse, comme $\Gamma^2 = I$ alors $\Gamma^2 - I = 0$, ce qui nous donne l'équation

$$(\Gamma - I)(\Gamma + I) = 0.$$

Soit $x \in T_z TM$ un vecteur propre associé à la valeur propre -1 , ainsi $X = -\Gamma X$. Comme X est vertical, il existe $Y \in T_z TM$ tel que $X = JY$, par suite $\Gamma JY = -JY$, $Y \in T_z TM$ d'où $\Gamma J = -J$. D'autre part, pour tout $X \in T_z TM$, on a

$$(\Gamma - I)(\Gamma + I)X = 0$$

alors

$$\begin{aligned} J(\Gamma - I)(\Gamma + I)X &= J.0 \\ (J\Gamma - J)(\Gamma + I)X &= 0 \\ (J\Gamma - J)(\Gamma X + IX) &= 0. \end{aligned}$$

Or $T_z TM = H_z(TM) \oplus V_z(TM)$, et pour $X \in H_z(TM)$, on obtient $\Gamma X = X$, donc $(J\Gamma - J)2X = 0$ et $J\Gamma X = JX$, $X \in H_z(TM)$, alors $J\Gamma = J$.

De plus, pour tout $Y \in V_z(TM)$, on a

$$\begin{aligned} J\Gamma Y &= J\Gamma JZ \\ &= -J^2Z \\ &= 0 \\ &= JY. \end{aligned}$$

Par conséquent $J\Gamma Y = JY$, $Y \in V_z(TM)$.

On voit alors que pour tout $X \in T_z TM$, $J\Gamma X = JX$; d'où $J\Gamma = J$. □

2.2 Projecteur vertical et Projecteur horizontal

Le projecteur horizontal h et le projecteur vertical v sont définis, respectivement, par :

$$h = \frac{1}{2}(I + \Gamma) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}(I - \Gamma).$$

Γ permet d'obtenir la décomposition

$$TTM = H(TM) \oplus V(TM)$$

où $H(TM) = \text{Im } h = \text{ker } v$ et $V(TM) = \text{Im } v = \text{ker } h$.

h et v vérifient les propriétés suivantes :

$$Jh = J, \quad hJ = 0, \quad Jv = 0, \quad \text{et} \quad vJ = J.$$

Nous avons maintenant les expressions en coordonnées locales de Γ , h et v respectivement sous les formes

$$\begin{aligned}\Gamma &= dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}, \\ h &= dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}, \\ v &= dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} + \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}.\end{aligned}$$

Remarque 2.3. Compte tenu de l'écriture en coordonnées locales précédente d'une connexion, prenons un champ de vecteurs X tel que $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$. Nous avons

$$\Gamma X = (dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} - dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i})(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}),$$

alors

$$\Gamma X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2X^i \Gamma_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} - Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

Ceci peut s'écrire en notation matricielle sous la forme suivante

$$\Gamma X = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -2\Gamma_i^j & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^i \\ Y^i \end{pmatrix}$$

dans la base $(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i})$, $i = 1, \dots, n$ où I (respectivement 0) est la matrice unité (respectivement nulle) d'ordre n , et

$$\Gamma_i^j = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 & \Gamma_2^1 & \dots & \Gamma_n^1 \\ \Gamma_1^2 & \Gamma_2^2 & \dots & \Gamma_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_1^n & \Gamma_2^n & \dots & \Gamma_n^n \end{pmatrix}$$

Nous avons donc une méthode de calcul pratique pour toute connexion donnée.

Exemple 2.4. Prenons la variété $M = \mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de M , et (x^i, y^i) les coor-

données locales définies dans $TU = U \times \mathbb{R}^3$. Considérons la connexion Γ définie par :

$$\Gamma_2^1 = \Gamma_3^1 = e^{x^1} \text{ et } \Gamma_j^i = 0 \text{ autrement.}$$

La forme matricielle de Γ est alors

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2e^{x^1} & -2e^{x^1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En vertu des formules

$$h = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} \quad \text{et} \quad v = dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} - \Gamma_i^j dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^j},$$

les projecteurs horizontal et vertical seront respectivement

$$h = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - e^{x^1} (dx^2 + dx^3) \otimes \frac{\partial}{\partial y^1} \quad \text{et} \quad v = dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} + e^{x^1} (dx^2 + dx^3) \otimes \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

2.3 Semi-gerbe associée à une connexion

Définition 2.5.

Une connexion Γ sur M est dite homogène si la forme vectorielle Γ est homogène de degré

1. Localement, les coefficients $\Gamma_j^i(x, y)$ sont $h(1)$ en y .

Une connexion homogène est dite linéaire si elle est de classe \mathcal{C}^1 sur la section nulle.

Localement, les $\Gamma_j^i(x, y)$ sont linéaires en y , et on peut donc poser $\Gamma_j^i(x, y) = y^j \Gamma_{ij}^l$.

A toute connexion Γ sur M est associée canoniquement une semi-gerbe S donnée par $S = hS'$, où S' est une semi-gerbe arbitraire.

Localement, les fonctions G^i de la semi-gerbe s'écrivent

$$G^i = \frac{1}{2}y^j\Gamma_j^i.$$

2.4 Courbure et torsion d'une connexion

Définition 2.6. On appelle *courbure* de la connexion Γ , la 2-forme vectorielle R , C^∞ sur $\mathcal{T}M$, définie par

$$R = -\frac{1}{2}[h, h]$$

c'est-à-dire $R = -N_h, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(TM)$.

Donc $R(X, Y) = h[hX, Y] + h[X, hY] - h[X, Y] - [hX, hY]$.

La courbure R peut être considérée comme une application linéaire

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(TM) &\longrightarrow \text{End}(\mathfrak{X}(TM)) \\ X &\longmapsto R_X \end{aligned}$$

où $R_X = i_X R$, c'est-à-dire $R_X(Y) = R(X, Y), \forall Y \in \mathfrak{X}(TM)$.

En coordonnées locales, nous pouvons écrire

$$R = \frac{1}{2}R_{jk}^i dx^j \wedge dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \text{où} \quad R_{jk}^i = \frac{\partial \Gamma_k^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_k^l \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial y^l} - \Gamma_j^l \frac{\partial \Gamma_k^i}{\partial y^l}.$$

Pour une connexion linéaire, on a $\Gamma_j^i = y^l \Gamma_{jl}^i$. Alors

$$R = \frac{1}{2}y^l R_{l,jk}^i dx^j \wedge dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{où} \quad R_{l,jk}^i = \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^m \Gamma_{jm}^i - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{km}^i.$$

Pour l'opérateur de courbure R_X , on a comme expression

$$R_X = X^j R_{jk}^i dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{où} \quad X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X'^j \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Exemple 2.7. Reprenons l'exemple 2.4. En vertu des formules

$$R = \frac{1}{2} R_{jk}^i dx^j \wedge dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{où} \quad R_{jk}^i = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{j^i}^k}{\partial x^k} + \Gamma_k^l \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial y^l} - \Gamma_j^l \frac{\partial \Gamma_k^i}{\partial y^l},$$

les composantes de la courbure sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11}^1 = \frac{\partial \Gamma_1^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_1^1}{\partial x^1} + \Gamma_k^l \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial y^l} - \Gamma_j^l \frac{\partial \Gamma_k^i}{\partial y^l} = 0, \text{ car } \Gamma_1^1 = 0, \\ R_{12}^1 = e^{x^1}, \\ R_{13}^1 = e^{x^1}, \\ R_{21}^1 = -e^{x^1} = -R_{12}^1, \\ R_{31}^1 = -e^{x^1} = -R_{13}^1, \\ \text{et les autres composantes sont toutes nulles.} \end{array} \right.$$

Ainsi l'expression de la courbure de Γ est de la forme

$$R = e^{x^1} dx^1 \wedge (dx^2 + dx^3) \otimes \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

Exemple 2.8. Soit la variété $M = \mathbb{R}^3$. Considérons la connexion Γ définie comme suit :

$$\Gamma_1^2 = x^2, \quad \Gamma_3^2 = x^2 y^2, \text{ et } \Gamma_j^i = 0 \text{ autrement.}$$

Alors la matrice de Γ est

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2x^2 & 0 & -2x^2 y^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les projecteurs horizontal et vertical sont respectivement

$$h = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - x^2(dx^1 + y^2 dx^3) \otimes \frac{\partial}{\partial y^2}, \quad \text{et} \quad v = dy^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} + x^2(dx^1 + y^2 dx^3) \otimes \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Les composantes de la courbure seront

$$\begin{aligned} R_{12}^2 &= \frac{\partial \Gamma_2^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_1^2}{\partial x^2} = -1 = -R_{21}^2, \\ R_{13}^2 &= \frac{\partial \Gamma_3^2}{\partial x^1} + \Gamma_k^l \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial y^l} - \Gamma_j^l \frac{\partial \Gamma_k^i}{\partial y^l} = 0 - 0 + x^2 y^2 \cdot 0 - x^2 x^2 = -(x^2)^2 = R_{31}^2, \\ R_{23}^2 &= y^2 = -R_{32}^2. \end{aligned}$$

Donc, la courbure de Γ s'écrit

$$R = (dx^1 \wedge dx^2) \otimes \frac{\partial}{\partial y^2} - (x^2)^2 (dx^1 \wedge dx^3) \otimes \frac{\partial}{\partial y^2} + y^2 (dx^2 \wedge dx^3) \otimes \frac{\partial}{\partial y^2}.$$

Propriétés 2.9. 1. R est bilinéaire et antisymétrique (par définition de R);

2. R est semi-basique;

3. $hR = 0$, $vR = R$, $\Gamma R = -R$, $JR = 0$;

4. Si Γ est homogène de degré 1, alors R l'est aussi;

5. $[h, R] = 0$.

Démonstration. La démonstration est facile. □

Proposition 2.10. [YOU78]

1. $R = -\frac{1}{2}[v, v] = \frac{1}{2}[h, v]$;

2. $R(hX, hY) = R(X, Y)$;

3. $R(X, Y) = -v[hX, hY]$;

4. si $X, Y \in H$ tels que $R(X, Y) = 0$, alors $[X, Y] \in H$.

Démonstration. 1. La relation (1.) est une conséquence immédiate de la formule

$$h + v = I.$$

2. Cette relation résulte du fait que R est semi-basique.

3. Si X et Y sont horizontaux, alors

$$R(X, Y) = h[X, Y] - [X, Y] = -v[X, Y] = -v[hX, hY].$$

Si l'un au moins des champs X et Y est vertical, on a $R(X, Y) = 0 = -v[hX, hY]$.

4. Soient $X, Y \in H$ tels que $R(X, Y) = 0$, alors

$$0 = R(X, Y) = -v[hX, hY] = -v[X, Y] \text{ et } [X, Y] \in H.$$

□

Définition 2.11. On appelle distribution \mathfrak{D} de rang $r \leq n = \dim M$ dans une variété M , une application $x \in M \mapsto \mathfrak{D}_x \subset T_x(M)$; c'est un sous-espace vectoriel de dimension r de $T_x(M)$.

Théoreme 2.12 (Fröbenius). Soit D le sous-module de $\mathfrak{X}(M)$ défini par une distribution \mathfrak{D} . La distribution \mathfrak{D} est intégrable si $\forall X, Y \in D, [X, Y] \in D$.

Démonstration. Voir [MAL72].

□

Remarque 2.13. La propriété (3.) de la proposition précédente établit une condition nécessaire et suffisante pour l'intégrabilité de la distribution horizontale. Ainsi, pour que la distribution $z \mapsto H_z(TM)$ soit intégrable, il faut et il suffit que la courbure R soit nulle.

Définition 2.14. On appelle torsion de la connexion Γ , la 2-forme vectorielle T, C^∞ sur TM , définie par

$$T = \frac{1}{2} [J, \Gamma];$$

ou encore $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(TM)$, on a $T(X, Y) = v[JX, hX] + v[hX, JY] - J[hX, hY]$

La torsion d'une connexion Γ peut être considérée comme une application linéaire

$$T : \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{X}(TM))$$

$$X \longmapsto T_X$$

où $T_X = i_X T$, c'est-à-dire $T_X(Y) = T(X, Y)$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(TM)$.

En coordonnées locales, l'expression de la torsion est de la forme

$$T = \frac{1}{2} T_{ij}^l dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^l}, \quad \text{où } T_{ij}^l = \frac{\partial \Gamma_i^l}{\partial y^j} - \frac{\partial \Gamma_j^l}{\partial y^i}.$$

Pour une connexion linéaire, on a $\Gamma_i^l = y^j \Gamma_{ij}^l(X)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(TM)$, alors l'expression de T est de la forme

$$T = \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ji}^l) dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^l}.$$

Et enfin, pour l'opérateur de torsion, on a

$$T_X = X^i T_{ij}^l dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^l} \quad \text{où } X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^{'j} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Les quatre résultats suivants sont immédiats.

Proposition 2.15. 1. T est bilinéaire et antisymétrique.

2. T est semi-basique.

3. $hT = 0$, $vT = T$, $\Gamma T = -T$, et $JT = 0$.

4. $[J, T] = 0$.

5. $T = [J, h] = -[J, v]$.

6. $T(hX, hY) = T(X, Y)$.

7. $[J, R] = [h, T]$.

Lemme 2.16. Si Γ est une connexion homogène, alors sa torsion est homogène de degré zéro.

Proposition 2.17. Si Γ est une connexion homogène, alors sa torsion s'écrit

$$T = \frac{1}{2} [J, i_S T]$$

où S est la gerbe associée à Γ .

Théoreme 2.18. [GRI72]

Soit S une semi-gerbe sur une variété M et T une 1-forme vectorielle semi-basique sur TM , en équilibre avec S , c'est-à-dire $T^0 + S^* = 0$ avec $T^0 = i_S T$ appelé le potentiel de T et $S^* = [C, S] - S$ appelé la déviation de S . Alors il existe une et une connexion admettant S comme semi-gerbe et T comme torsion. Elle est donnée par

$$\Gamma = [J, S] + T.$$

Démonstration. Voir [GRI72].

□

Chapitre 3

Variétés semi-finsleriennes et finsleriennes

3.1 Variétés semi-finsleriennes

Définition 3.1. On appelle variété semi-finslienne un triplet (M, E, π) , où :

- M est une variété différentiable,
- E est une application de TM dans \mathbb{R}^+ , avec $E(0) = 0$, C^∞ sur TM , C^0 sur la section nulle et telle que $dd_J E$ ait un rang maximum. L'application E est appelée fonction énergie,
- π est une 2-forme scalaire semi-basique anti-symétrique sur TM , C^∞ sur TM .
L'application π est dite tenseur force.

Remarques 3.2. Une variété riemannienne est caractérisée par : $(M, E, 0)$, avec $\theta_C E = 2E$ et E est de classe C^2 sur la section nulle.

Pour une variété finslienne : $(M, E, 0)$, avec $\theta_C E = 2E$ et E est de classe C^1 sur la section nulle.

Pour un système dynamique homogène : (M, E, π) , avec $\theta_C E = 2E$ et $\theta_C \pi = \pi$.

Dans la suite, on posera

$$\Omega = dd_J E + \pi.$$

Ω s'appelle forme fondamentale de la variété semi-finslienne.

On voit immédiatement que

$$i_J\Omega = 0.$$

Proposition 3.3. [GRI72] Ω ait un rang maximal.

Démonstration. Si X est un champ vertical, $i_X\Omega = 0$ équivaut à $i_X dd_J E = 0$ car π est semi-basique. Or, ceci est impossible car dd_J est de rang maximum. Si par contre $JX \neq 0$, c'est-à-dire si X n'est pas vertical, et si $i_X\Omega = 0$, on a aussi $i_{JX}\Omega = 0$ car $i_J i_X \Omega = i_X i_J \Omega - i_{JX} \Omega = -i_{JX} \Omega$ puisque $i_J \Omega = 0$. Donc si $i_X \Omega = 0$ alors $i_{JX} dd_J E = 0$, ce qui est impossible. \square

La 2-forme fondamentale $\Omega = dd_J E$, pour les variétés finsleriennes ou riemanniennes, est de rang maximal si, et seulement si,

$$\det \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \right) \neq 0$$

sur une carte U de coordonnées locales naturelles (x^α, y^α) , avec

$$1 \leq \alpha, \beta \leq n.$$

Exemple de variété semi-finslienne 3.4. Considérons la variété

$$M = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, x^1 > 0\}, \text{ et la fonction énergie } E = x^1 \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} + (y^1)^2 (y^2)^2.$$

La fonction E est C^∞ sur $\mathcal{T}M$, C^0 mais pas C^1 sur la section nulle. Ici, le tenseur force est nul.

Forme fondamentale $\Omega = dd_J E$: On a

$$d_J E(x, y) = dE(x, y) \circ J = \frac{\partial}{\partial y^i} E(x, y) dy^i \circ J.$$

Etudions maintenant la maximalité du rang de la forme fondamentale Ω . Nous avons successivement les dérivées partielles suivantes

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y^1} E(x, y) &= x^1 \frac{y^1}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}} + 2x^1 y^1 (y^2)^2, \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^1 \partial y^1} E(x, y) &= -\frac{x^1 (y^1)^2}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^1}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{1}{2}}} + 2x^1 (y^2)^2, \\
 \frac{\partial}{\partial y^2} E(x, y) &= x^1 \frac{y^2}{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}} + 2x^1 y^2 (y^1)^2, \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^2 \partial y^2} E(x, y) &= -\frac{x^1 (y^2)^2}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^1}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{1}{2}}} + 2x^1 (y^2)^2, \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^1 \partial y^2} E(x, y) &= -\frac{x^1 y^1 y^2}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} + 4x^1 y^1 y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2 \partial y^1} E(x, y).
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la matrice $\frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}$ par

$$\left(\begin{array}{cc}
 -\frac{x^1 (y^1)^2}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^1}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{1}{2}}} + 2x^1 (y^2)^2 & -\frac{x^1 y^1 y^2}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} + 4x^1 y^1 y^2 \\
 -\frac{x^1 y^1 y^2}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} + 4x^1 y^1 y^2 & -\frac{x^1 (y^2)^2}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^1}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{\frac{1}{2}}} + 2x^1 (y^2)^2
 \end{array} \right).$$

Le déterminant de cette matrice est non nul. Ceci nous informe que la forme fondamentale $dd_J E$ est de rang maximal.

Exemple 3.5. Considérons la variété Riemannienne (M, E) , où

$M = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^1 > 0\}$ et $E = \frac{1}{2}(x^1 y^1 y^2 + (y^2)^2)$. Le tenseur force π est nul.

Vérifions que la forme fondamentale Ω est de rang maximal. En effet

$$\begin{aligned}
 d_J E(x, y) &= \frac{\partial E(x, y)}{\partial y^i} d_J y^i \\
 &= \frac{\partial E(x, y)}{\partial y^i} dy^i \circ J, \text{ pour } i = 1, 2, 3 \\
 &= \left(\frac{1}{2} x^1 y^2 dy^1 + \frac{1}{2} x^1 y^1 dy^2 + y^3 dy^3 \right) \circ J.
 \end{aligned}$$

Or $J = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$

alors

$$\begin{aligned}
 d_J E(x, y) &= \frac{1}{2} x^1 y^2 dy^1 (dx^1 \otimes \frac{\partial}{\partial y^1}) + \frac{1}{2} x^1 y^1 dy^2 (dx^2 \otimes \frac{\partial}{\partial y^2}) + \\
 &+ y^3 dy^3 (dx^3 \otimes \frac{\partial}{\partial y^3}) \\
 &= \frac{1}{2} x^1 y^2 dx^1 + \frac{1}{2} x^1 y^1 dx^2 + y^3 dy^3
 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
 dd_J E(x, y) &= d(\frac{1}{2} x^1 y^2 dx^1 + \frac{1}{2} x^1 y^1 dx^2 + y^3 dy^3) \\
 &= \frac{1}{2} (-x^1 dx^1 \wedge dy^2 + y^1 dx^1 \wedge dx^2 - x^1 dx^2 \wedge dy^1) - \\
 &- \frac{1}{2} (2dx^3 \wedge dy^3).
 \end{aligned}$$

On obtient $\Omega = \frac{1}{2} y^1 dx^1 \wedge dx^2 - \frac{1}{2} x^1 dx^1 \wedge dy^2 - \frac{1}{2} x^1 dx^2 \wedge dy^1 - dx^3 \wedge dy^3$.

On en déduit alors la matrice carrée associée à Ω écrite comme suit

$$A_\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & x^1 & 0 \\ -x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On voit directement que $\det A_\Omega = -(x^1)^2 \neq 0$, et ceci nous prouve que $\Omega = dd_J E$ est de rang maximal.

Exemple 3.6. Considérons la variété finslerienne définie par

$M = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x^1 > 0\}$ et $E(x, y) = x^1 \sqrt{(y^1)^4 + (y^2)^4}$, où le tenseur force $\pi = 0$.

On vérifie immédiatement que E est de classe $C^\infty(\mathcal{T}M)$ et C^1 mais non C^2 sur la section nulle.

De plus

$$\begin{aligned}
 \theta_C E &= C \circ E(x, y) \\
 &= (y^i \frac{\partial}{\partial y^i})(x^1 \sqrt{(y^1)^4 + (y^2)^4}) \\
 &= y^1 x^1 \frac{2(y^1)^3}{\sqrt{(y^1)^4 + (y^2)^4}} + y^2 x^1 \frac{2(y^2)^3}{\sqrt{(y^1)^4 + (y^2)^4}} \\
 &= 2E(x, y).
 \end{aligned}$$

Donc E est homogène de degré 2.

Etudions maintenant la maximalité du rang de la forme fondamentale Ω . Nous avons successivement les dérivées partielles suivantes

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y^1} E(x, y) &= \frac{2x^1(y^1)^3}{\sqrt{(y^1)^4 + (y^2)^4}}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^1 \partial y^1} E(x, y) &= -\frac{4x^1(y^1)^6}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6x^1(y^1)^2}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{1}{2}}}, \\
 \frac{\partial}{\partial y^2} E(x, y) &= \frac{2x^1(y^2)^3}{\sqrt{(y^1)^4 + (y^2)^4}}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^2 \partial y^2} E(x, y) &= -\frac{4x^1(y^2)^6}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6x^1(y^2)^2}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{1}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial y^1 \partial y^2} E(x, y) &= -\frac{4x^1(y^1)^3(y^2)^3}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial^2}{\partial y^2 \partial y^1} E(x, y).
 \end{aligned}$$

On obtient alors la matrice $\frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix}
 -\frac{4x^1(y^1)^6}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6x^1(y^1)^2}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{1}{2}}} & -\frac{4x^1(y^1)^3(y^2)^3}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{3}{2}}} \\
 -\frac{4x^1(y^1)^3(y^2)^3}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{4x^1(y^2)^6}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6x^1(y^2)^2}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{1}{2}}}
 \end{pmatrix}$$

et de déterminant égal à

$$\det\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\right) = \frac{12(x^1)^2(y^1)^2(y^2)^2}{(y^1)^4 + (y^2)^4}.$$

Donc la forme fondamentale Ω est de rang maximal pour tous $y^1 \neq 0$ et $y^2 \neq 0$.

3.1.1 Semi-gerbe associée canoniquement à une structure semi-finslienne

Soit (M, E, π) une variété semi-finslienne sur M . On posera dans la suite :

$$q = \theta_C E - 2E \quad \text{et} \quad q^* = \theta_C q - q.$$

Proposition 3.7. [GRI72]

On a $d_J(E + q) \neq 0$, et en particulier $d(E + q) \neq 0$.

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} i_C dd_J E &= -i_C d_J dE \\ &= d_J i_C dE - i_J dE \\ &= d_J \theta_C E - d_J E \\ &= d_J (2E + q) - d_J E \\ &= d_J E (E + q), \end{aligned}$$

or $i_C dd_J E \neq 0$, car $dd_J E$ est de rang maximal. Donc $d_J(E + q)$ est non nul. □

Définition 3.8. La fonction $\varepsilon = E + q$ est appelée *énergie principale*.

Proposition 3.9. [GRI72]

Le champ S défini par $i_S \Omega = -d(E + q)$ est une semi-gerbe sur M .

Démonstration. Tout d'abord, cette relation définit bien un champ de vecteurs sur TM car Ω est de rang maximal et $d(E + q) \neq 0$.

D'autre part, S est une semi-gerbe. En effet, S est C^∞ sur TM , car Ω , E et q le sont. En

autre :

$$\begin{aligned}
i_{JS}\Omega &= i_S i_J \Omega - i_J i_S \Omega \\
&= -i_J i_S \Omega \\
&= i_J d(E + q) \\
&= d_J(E + q) \\
&= d_J \theta_C E - d_J E \\
&= \theta_C d_J E \\
&= i_C d d_J E \\
&= i_C \Omega.
\end{aligned}$$

Comme Ω a un rang maximal, on en déduit que $JS = C$. □

L'expression en coordonnées locales de la semi-gerbe canonique s'écrit

$$S = y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - 2G^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

On a

$$\begin{aligned}
i_S \Omega &= i_S d d_J E + i_S \pi \\
&= y^\alpha \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} - \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial x^\beta} \right) dx^\beta + y^\alpha \pi_{\alpha\beta} dx^\beta - 2G^\beta \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} dx^\alpha \\
&\quad - y^\alpha \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} dx^\beta.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
-d(E + q) &= dE - \theta_C dE \\
&= \left(\frac{\partial E}{\partial x^\alpha} - y^\gamma \frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\gamma} \right) dx^\alpha - y^\gamma \frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\gamma} dy^\alpha.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $i_S \Omega = -d(E + q)$ si, et seulement si,

$$y^\alpha \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^\beta \partial y^\alpha} \right) - 2G^\alpha g_{\alpha\bar{\beta}} + y^\alpha \pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial E}{\partial x^\beta} - y^\alpha \frac{\partial^2 E}{\partial x^\beta \partial y^\alpha}.$$

3.1.2 Connexions conservatives

Définition 3.10. Soit (M, E, π) une variété semi-finslienne et Ω la forme fondamentale.

On dit que Γ est une *connexion simple* associée à (M, E, π) si $i_\Gamma \Omega = 0$.

Définition 3.11. On appelle *connexion conservative* une connexion sur une variété semi-finslienne (M, E, π) telle que $d_h(E + q) = 0$, où h est le projecteur horizontal de la connexion donnée.

Remarque 3.12. Cette définition exprime le fait que l'énergie principale se conserve par transport parallèle. Et si E est poly-homogène, c'est-à-dire $\theta_C q^* = 0$ avec $q^* = \theta_C q - q$, alors

$$d_h(E + q) = \frac{1}{2} d_h \bar{g}(C, C).$$

Admettons cette propriété suivante, qui sera utilisée dans la section suivante.

Proposition 3.13. *Une connexion simple est conservative si, et seulement si, sa semi-gerbe est la semi-gerbe canonique.*

Voir [GRI72] pour les détails de la démonstration.

3.2 Variétés finsleriennes

Soient M une variété différentiable paracompacte de dimension n et de classe C^∞ , J la structure tangente naturelle du fibré tangent $TM \rightarrow M$.

Rappelons que la donnée d'une application E de $TM - \{0\}$ dans \mathbb{R}^+ avec $E(0) = 0$, C^∞ sur TM , C^1 sur la section nulle et homogène de degré 2 telle que $dd_J E$ ait un rang maximal, définit une *structure finslienne*.

Dans ce cas l'application E est appelée *fonction énergie*. Si E est de classe \mathcal{C}^2 sur la section nulle, la variété est riemannienne.

Théoreme 3.14. [GRI72]

Sur une variété finslerienne, il existe une et une seule connexion conservative à torsion forte nulle.

C'est un résultat très utilisé dans la suite, d'où son appellation "**théorème fondamental de la géométrie finslerienne**".

Démonstration. Il suffira de démontrer que $d_h E = 0$ et $T = 0$ entraînent que Γ est simple. En effet, d'après la Proposition 3.13, ceci implique que la semi-gerbe de Γ est la semi-gerbe canonique, ce qui détermine la connexion en vertu du théorème de décomposition où $\Gamma = [J, S] + T$, on a

$$\begin{aligned} i_h \Omega &= i_h dd_J E \\ &= -i_h d_J dE \\ &= -d_h i_h dE - d_J dE \\ &= dd_J E \\ &= \Omega \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} i_\Gamma &= \frac{1}{2} i_{(2h-I)} \Omega \\ &= i_h \Omega - \Omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que Γ est simple. □

Définition 3.15. On appelle *connexion canonique* la connexion conservative à torsion nulle définie sur une variété finslerienne.

Si S est la semi-gerbe canonique, elle est donnée par la relation

$$\Gamma = [J, S],$$

où J est la structure tangente naturelle.

Si S est une gerbe canonique, alors elle vérifie la relation $i_S dd_J E = -dE$. La connexion sera donc sans torsion et conservative. La forme fondamentale $\Omega = dd_J E$ permet de définir une métrique g sur le fibré tangent par

$$g(X, Y) = \Omega(X, FY)$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs sur $\mathcal{T}M$ avec l'application F associée à Γ vérifiant $(FJ = h$ et $Fh = -J)$ qui est appelée la structure presque-complexe, cf. [GRI72].

Proposition 3.16. [SZI03]

La 2-forme fondamentale $\Omega = dd_J E$ et la 1-forme canonique $\omega = d_J E$ d'une variété finslerienne sont homogènes de degré 1, c'est-à-dire

$$\theta_C \Omega = \Omega \text{ et } \theta_C \omega = \omega.$$

De plus

$$i_C \Omega = \omega \text{ et } i_J \Omega = 0.$$

Démonstration. On a : $\theta_C \omega = \theta_C d_J E = d_J d_C E - d_J E = 2d_J E - d_J E = d_J E = \omega$.

Et $\theta_C \Omega = \theta_C d\omega = d\theta_C \omega = d\omega = \Omega$.

D'autre part : $i_C \Omega = i_C d\omega = d_C \omega - di_C \omega = \omega - di_C d_J E = \omega$, ceci vient du fait que $d_X = i_X \circ d + d \circ i_X$, pour tout champ de vecteurs X et $d_C = \theta_C$ est la dérivée de Lie suivant le champ canonique C . \square

Définition 3.17. Une connexion Γ est dite de courbure régulière si l'espace vectoriel engendré par l'image de la courbure R est de dimension $n - 1$, $n \geq 2$.

3.2.1 Existence d'une fonction énergie d'une connexion

D'après le théorème fondamental de la géométrie finslerienne, la connexion sans torsion associée à une gerbe S est

$$\Gamma = [J, S] = L_S J.$$

Exemple 3.18. Considérons la variété $M = \mathbb{R}^2$, $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq 2}$ le système de coordonnées dans $T\mathbb{R}^2$. Soit S la gerbe définie, dans ces coordonnées locales, par

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{avec} \quad G^1(x, y) = x^1 \sqrt[4]{((y^1)^8 + (y^2)^8)} \quad \text{et} \quad G^2(x, y) = 0.$$

Les fonctions G^i sont biens de classe C^∞ sur $\mathcal{T}M$, C^1 mais non C^2 sur la section nulle et homogènes de degré 2. Les composantes de la connexion canonique Γ sont données par

$$\Gamma_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}, \text{ donc}$$

$$\Gamma_1^1 = \frac{2x^1(y^1)^7}{((y^1)^8 + (y^2)^8)^{\frac{3}{4}}}, \quad \Gamma_2^1 = \frac{2x^1(y^2)^7}{((y^1)^4 + (y^2)^4)^{\frac{3}{4}}}, \quad \text{et} \quad \Gamma_j^i = 0 \text{ autrement.}$$

Pour une gerbe S , considérons la 1-forme vectorielle $\Phi = -v[v, S] = v[h, S]$, Φ est appelé l'**endomorphisme de Jacobi**, cf. [SZI03] page 205. Cet endomorphisme sera lié avec la courbure de la connexion Γ par la proposition suivante.

Proposition 3.19. [MUT91]

Si Γ est une connexion homogène à torsion nulle, alors sa courbure vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = i_S R \\ \text{et} \\ R = \frac{1}{3}[J, i_S R] \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où S est la gerbe associée à Γ , J la structure tangente naturelle.

Démonstration. En effet, la première égalité est une conséquence de l'homogénéité de R , ainsi pour tout champ de vecteurs X sur TM

$$(i_S R)X = R(S, X) = -v[S, hX] = -v[S, h]X,$$

c'est-à-dire $i_S R = v[h, S] = \Phi$. Par la suite, la seconde égalité est obtenue en appliquant à R la formule $[h, F] = -i_F R - T$, voir [YOU78] sur les propriétés liant la courbure à la torsion (3), ainsi

$$R = \frac{1}{3}\{i_S[J, R] + [J, i_S R]\},$$

car R est homogène de degré 1. Comme $[J, R] = [h, T]$ et $T = 0$, $[J, R] = 0$, d'où le résultat. \square

Définition 3.20. Une gerbe S est dite isotropique si son endomorphisme de Jacobi a la forme

$$\Phi = \lambda J + \eta \otimes C \quad (3.2)$$

où $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}M)$ et η une 1-forme semi-basique sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}M)$.

De la formule (3.1), nous avons $i_S \Phi = 0$ et donc $\lambda = -i_S \eta$.

Proposition 3.21. [MUT91]

Une gerbe S est isotropique si, et seulement si, le tenseur de courbure R a la forme

$$R = \alpha \wedge J + \beta \otimes C \quad (3.3)$$

où α est une 1-forme semi-basique et β une 2-forme semi-basique sur $\mathcal{T}M$.

Démonstration. Nous allons prouver que les formules (3.2) et (3.3) sont équivalentes. Supposons que la gerbe S est isotropique. Alors, l'endomorphisme de Jacobi Φ satisfait la formule (3.2). En utilisant la formule (3.1), le crochet de Frölicher-Nijenhuis de 2 formes vectorielles et $[J, C] = J$, nous avons

$$3R = [J, \Phi] = [J, \lambda J + \eta \otimes C] = (d_J \lambda - \eta) \wedge J + d_J \eta \otimes C \quad (3.4)$$

d'où la courbure a la forme (3.3).

Réciproquement, supposons que la courbure a la forme (3.3). En utilisant la formule (3.1) et le fait que le produit intérieur i_S est une dérivation de degré -1 , nous avons la forme

de l'endomorphisme de Jacobi comme suit

$$\Phi = i_S R = i_S \alpha J + (i_S \beta - \alpha) \otimes C.$$

D'où la gerbe S est isotropique. □

Lemme 3.22. *Si E est une fonction homogène de degré 2 telle que $dd_J E$ soit de rang $2n$, alors, pour toute fonction ψ constante sur les fibres, $e^{2\psi} E$ est aussi homogène de degré 2 et $dd_J(e^{2\psi} E)$ est de rang $2n$.*

Démonstration. Avec les propriétés de la fonction exponentielle, la démonstration est immédiate. □

Définition 3.23. Soient \mathfrak{D} une distribution sur une variété différentiable M et $I(\mathfrak{D})$ l'idéal gradué de l'algèbre graduée $\Lambda(M)$ des formes différentielles sur M constitué par les formes ω vérifiant : pour toute q -forme ω et tous champs de vecteurs $X_1, \dots, X_q \in \mathfrak{D}$, $\langle \omega, X_1 \wedge \dots \wedge X_q \rangle = 0$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur les formes différentielles. La distribution \mathfrak{D} est complètement intégrable si $d(I(\mathfrak{D})) \subset I(\mathfrak{D})$, avec $d(I(\mathfrak{D}))$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel des $d\omega$, $\omega \in I(\mathfrak{D})$.

Proposition 3.24. *Sur une variété M différentiable simplement connexe, soient H la distribution horizontale de Γ , $Im R$ la distribution définie par l'image de la courbure. Une connexion Γ sans torsion, à courbure régulière, provient d'une fonction énergie si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $H \oplus Im R$ est complètement intégrable ;
- (ii) il existe une fonction énergie E_0 telle que $d_R E_0 = 0$.

Alors il existe une fonction ψ constante sur les fibres telle que $e^{2\psi} E_0$ soit la fonction énergie de Γ .

Démonstration. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion provienne d'une fonction énergie E est [GRI72]

$$d_h E = 0, \tag{3.5}$$

ce qui équivaut à $dE \circ h = 0$, c'est-à-dire

$$Im\ h = H \subset Ker\ dE. \quad (3.6)$$

Ensuite $d_h d_h E = 0$, ce qui implique $-2d_R E = 0$, c'est-à-dire $dE \circ R = 0$ donc

$$Im\ R \subset Ker\ dE \quad (3.7)$$

(3.6) et (3.7) entraînent $Im\ h \cap Im\ R \subset Ker\ dE$ et donc $Im\ h \cap Im\ R = \{0\}$.

Ceci montre que $H \oplus Im\ R$ est le noyau de dE . Comme $Ker\ dE$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions C^∞ de la variété M , c'est une distribution, alors on peut l'associer à un module de champ de vecteurs sur des fonctions C^∞ sur M . Par la suite, $H \oplus Im\ R$ est complètement intégrable.

Réciproquement, soit E_0 une fonction énergie telle que $d_R E_0 = 0$. Montrons qu'avec l'hypothèse (i), il existe une fonction ψ constante sur les fibres telle que

$$d_h(e^{2\psi} E) = 0. \quad (3.8)$$

S'il existe une telle fonction, d'après le Lemme 3.22 et la relation (3.5), $e^{2\psi} E_0$ est la fonction énergie cherchée.

On va résoudre l'équation (3.8). Elle équivaut à $d\psi = -\frac{1}{2E_0} d_h E_0$. La condition d'intégrabilité d'une telle équation est $dd_h E_0 = \frac{dE_0}{E_0} \wedge d_h E_0$.

En effet, soit $v = I - h$ le projecteur vertical, $d_v E_0$ a pour noyau $H \oplus Im\ R$, qui est complètement intégrable, donc la forme $d_v E_0$ est complètement intégrable. On a

$$dd_v E_0 \wedge d_v E_0 = 0.$$

En appliquant le produit intérieur i_C à l'égalité précédente, nous obtenons

$$dd_v E_0 = \frac{dE_0}{E_0} \wedge d_v E_0,$$

c'est-à-dire

$$dd_h E_0 = \frac{dE_0}{E_0} \wedge d_h E_0.$$

C'est la condition d'intégrabilité cherchée. \square

Définition 3.25. Un point x de la variété M est un point régulier de la courbure R s'il existe un voisinage de x tel que la restriction de R sur ce voisinage est régulière (ou de rang maximal).

Proposition 3.26. Soient M une variété différentiable, simplement connexe, E et E' deux fonctions sur M dont les connexions canoniques respectives ont le même tenseur de courbure R . Alors leurs structures finsleriennes sont analogues sur la fermeture des points réguliers de R .

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 3.24. On remarque ensuite que l'ensemble des points réguliers de R est un ouvert dense sur M . Par continuité, on obtient le résultat. \square

Définition 3.27. Une partition de l'unité $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sur la variété différentiable M , subordonnée à un atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, est la donnée d'une famille de fonctions différentielles ρ_α , $\alpha \in I$, telles que :

- $\rho_\alpha(p) \geq 0$, pour tout $p \in M$;
- le support de ρ_α est compact et contenu dans U_α , donc ρ_α est nulle en dehors de U_α , $\forall \alpha \in I$;
- $\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha(p) = 1$, c'est-à-dire que chaque point de M doit posséder un voisinage dans lequel notre somme est une somme finie de termes.

Un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ est **subordonné** à un autre recouvrement $\mathcal{V} = \{V_j, j \in J\}$ si, pour tout i de I , il existe un j de J tel que $U_i \subset V_j$.

L'existence d'une partition de l'unité pour une variété différentiable permet, dans de nombreux cas, de passer des résultats locaux, c'est-à-dire valables dans une carte, aux résultats globaux, valables dans toute la variété.

Théoreme 3.28. *Soient M une variété différentiable, paracompacte, connexe, de dimension $n \geq 2$, Γ une connexion sans torsion sur M telle que la courbure R soit régulière sur un sous-ensemble dense de $\mathcal{T}M$. Alors Γ est une connexion canonique d'une structure finslerienne si, et seulement si, au voisinage d'un point régulier :*

- (i) $H \oplus \text{Im } R$ est complètement intégrable,
- (ii) il existe une fonction énergie E_0 telle que $d_R E_0 = 0$.

Démonstration. La démonstration découle de la Proposition 3.24 et de la remarque sur la démonstration précédente. Puis à l'aide d'une partition de l'unité, on reconsidère les métriques locales pour avoir une métrique globale. \square

3.2.2 Existence d'une structure finslerienne de dimension 2 à connexion donnée

Rappelons, voir [RRA15], que si $n = 1$, compte tenu de l'antisymétrie de la courbure, la connexion est trivialement plate. De même, si $n = 2$ et si on suppose que l'espace de nullité horizontal de la courbure soit $\eta_R^h \neq \{0\}$, la connexion est plate ; avec

$$\eta_R^h = \eta_R \cap h(\mathfrak{X}(\mathcal{T}M))$$

et

$$\eta_R = \{X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M) \mid R(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)\}$$

Alors dans cette section, considérons une variété différentielle M , paracompacte, connexe, de dimension 2, et Γ une connexion sans torsion à courbure non nulle sur un sous-ensemble dense de $\mathcal{T}M$, avec $\eta_R^h = \{0\}$. De cette manière, tous les champs dans l'espace de nullité de la courbure sont donc verticaux. En coordonnées locales, si $R_{12}^1 = 0$ et $R_{12}^2 \neq 0$ ou $R_{12}^2 = 0$ et $R_{12}^1 \neq 0$.

Exemple 3.29. Soient $M = \mathbb{R}^2$, $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq 2}$ le système de coordonnées dans $T\mathbb{R}^2$ et Γ une connexion telle que $\Gamma_2^1 = x^1$ et $\Gamma_j^i = 0$ autrement. Les coefficients de la courbure R

sont $R_{12}^1 = 1 = -R_{21}^1$ et $R_{12}^2 = 0 = R_{21}^2$. L'espace de nullité horizontal de la courbure de Γ est $\eta_R^h = \{0\}$, et l'image de cette courbure, $Im R = V(TM)$, est de dimension 1. Ce qui nous permet de dire que la courbure de Γ est régulière.

Remarque 3.30. Pour une connexion Γ donnée, en vertu de la relation (3.3) de la Proposition 3.19, sa courbure R peut s'écrire sous la forme

$$R = \frac{\tilde{R} + d_J \tilde{R}^0}{3} \wedge J - \frac{d_J \tilde{R}}{3} \otimes C,$$

où \tilde{R} désigne le contracté de la courbure R et $\tilde{R}^0 = i_S \tilde{R}$ appelé le potentiel de \tilde{R} .

Par ailleurs, la relation $d_R E_0 = 0$ implique

$$dE_0 \circ \left(\frac{\tilde{R} + d_J \tilde{R}^0}{3} \wedge J - \frac{d_J \tilde{R}}{3} \otimes C \right) = 0$$

ce qui nous donne

$$\tilde{R} + d_J \tilde{R}^0 \wedge d_J E_0 - 2E_0 d_J \tilde{R} = 0. \quad (3.9)$$

En dérivant cette relation par i_S , avec S est la gerbe associée à Γ , on a

$$\tilde{R} d_J E_0 = 2E_0 \tilde{R}.$$

Remarquons ainsi que s'il existait E_0 non trivial tel que $d_R E_0 = 0$, $\tilde{R}^0 = 0$ est équivalent à $R = 0$. Supposons alors que $\tilde{R}^0 \neq 0$. L'égalité précédente devient

$$\frac{d_J E_0}{E_0} = \frac{2\tilde{R}}{\tilde{R}^0}. \quad (3.10)$$

La condition d'intégrabilité de l'équation (3.10) est que la 1-forme semi-basique $\frac{2\tilde{R}}{\tilde{R}^0}$ soit d_J -fermée, c'est-à-dire

$$d_J \tilde{R} = \frac{d_J \tilde{R}^0}{\tilde{R}^0} \wedge \tilde{R}. \quad (3.11)$$

En dimension 2, cette égalité est toujours vraie ; en effet, une 3-forme semi-basique étant

toujours nulle dans une telle dimension, et on arrive à avoir

$$d_J \tilde{R} \wedge \tilde{R} = 0. \quad (3.12)$$

En appliquant i_S à la relation (3.12) et compte tenu de la formule $i_S d_J + d_J i_S = \theta_C + i_\Gamma$ (voir [SZI03]), on obtient

$$-d_J \tilde{R}^0 \wedge \tilde{R} + \tilde{R}^0 d_J \tilde{R} = 0$$

c'est la condition d'intégrabilité de (3.11).

Lemme 3.31. *La fonction E_0 ainsi définie précédemment est homogène de degré 2.*

Démonstration. Dans la relation (3.10), posons

$$d_J F = \frac{2\tilde{R}}{\tilde{R}^0}.$$

On voit immédiatement que $\theta_C F = 2$, et en prenant $E_0 = e^F$, (voir le Lemme 3.22), on obtient

$$\theta_C E_0 = 2E_0.$$

Ce qui montre que E_0 est homogène de degré 2 et on obtient une solution de l'équation (3.10). \square

Théoreme 3.32. *Soit Γ une connexion sans torsion à courbure non nulle. Il existe une fonction énergie E_0 telle que $d_R E_0 = 0$ si, et seulement si, le contracté \tilde{R} de la courbure R est tel que $d\tilde{R}$ soit de rang maximal et la fonction $i_S \tilde{R}$ est positive, où S la gerbe associée à Γ .*

Démonstration. L'existence et l'homogénéité d'une telle fonction sont confirmées par la remarque et le lemme précédents. Il nous reste donc à montrer que la forme fondamentale $dd_J E_0$ est maximal, et celle-ci étant le cas si, et seulement si, $d\tilde{R}$ est de rang maximal.

Ainsi, remarquons tout d'abord que la relation (3.10) peut s'écrire

$$d_J E_0 = \frac{2E_0}{\tilde{R}^0} \tilde{R}.$$

En dérivant cette dernière relation, nous obtenons

$$dd_J E_0 = d\left(\frac{2E_0}{\tilde{R}^0} \tilde{R}\right) = 2d\left(\frac{E_0}{\tilde{R}^0}\right) \wedge \tilde{R} + \frac{2E_0}{\tilde{R}^0} d\tilde{R}.$$

Soit X un champ de vecteurs horizontal non nul tel que $i_X d_J E_0 = 0$, d'après l'équation (3.10), $i_X \tilde{R} = 0$. Nous constatons que X et S engendrent l'espace horizontal, et on a

$$\begin{cases} i_X i_{JX} dd_J E_0 = \frac{2E_0}{\tilde{R}^0} i_X i_{JX} d\tilde{R}, \\ \text{et} \\ i_S i_C dd_J E_0 = \frac{2E_0}{\tilde{R}^0} i_S i_C d\tilde{R}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Ainsi pour tous champs de vecteurs JY et JZ , on obtient

$$i_{JY} i_{JZ} dd_J E_0 = 0 = i_{JY} i_{JZ} d\tilde{R}$$

puisque les 2-formes semi-basiques qui apparaissent dans les composantes de $dd_J E_0$ et $d\tilde{R}$ n'influencent pas leurs rangs respectifs.

Supposons maintenant que $dd_J E_0$ est de rang maximal, alors $i_{JX} d\tilde{R} = 0$ implique $i_X i_{JX} d\tilde{R} = 0$, c'est-à-dire, d'après (3.13), $i_X i_{JX} dd_J E_0 = 0$: impossible car $i_S i_{JX} dd_J E_0 = 0$. Par la suite si $i_X d\tilde{R} = 0$, alors $i_{JX} i_X d\tilde{R} = -i_X i_{JX} d\tilde{R} = 0$, et on revient au cas précédent. L'expression $i_C d\tilde{R}$ non plus ne peut pas être nulle, sinon la courbure serait nulle ; de même $i_S d\tilde{R} \neq 0$ puisque $i_C i_S d\tilde{R} = -i_S i_C d\tilde{R} = -\frac{\tilde{R}^0}{2E_0} i_S i_C dd_J E_0 = -\tilde{R}^0 \neq 0$. Enfin, si $d\tilde{R}$ est de rang maximal, $i_{JX} dd_J E_0 = 0$, implique, $i_X i_{JX} dd_J E_0 = 0 = i_X i_{JX} d\tilde{R}$, ce qui ne peut pas être possible. De même $i_X dd_J E_0 \neq 0$, $i_C dd_J E_0 \neq 0$ et $i_S dd_J E_0 \neq 0$.

On en déduit alors que le rang de $dd_J E_0$ est maximal si, et seulement si, le rang de $d\tilde{R}$ est maximal. \square

Exemple 3.33. Soient $M = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, x^1 > 0\}$, $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq 2}$ le système de coordonnées dans $T\mathbb{R}^2$ et Γ une connexion telle que $\Gamma_2^1 = -x^1(y^1)^3 + 1$, $\Gamma_1^2 = x^1(y^2)^3 - 1$ et $\Gamma_j^i = 0$

autrement. La courbure R de Γ s'écrit

$$R = (y^1)^3 dx^1 \wedge dx^2 \otimes \frac{\partial}{\partial y^2} - (y^2)^3 dx^1 \wedge dx^2 \otimes \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

La dimension de $Im R$ est égale à 1 sauf à la section nulle puisque $Im R$ est engendré par $(y^1)^3 \frac{\partial}{\partial y^2} - (y^2)^3 \frac{\partial}{\partial y^1}$. De plus $d_R E = 0$ équivaut à $dE \circ R = 0$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial E}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial E}{\partial y^2} dy^2 \right) \left((y^1)^3 dx^1 \wedge dx^2 \otimes \frac{\partial}{\partial y^2} - (y^2)^3 dx^1 \wedge dx^2 \otimes \frac{\partial}{\partial y^1} \right) = 0$$

et alors

$$(y^2)^3 \frac{\partial E}{\partial y^1} dx^1 \wedge dx^2 - (y^1)^3 \frac{\partial E}{\partial y^2} dx^1 \wedge dx^2 = 0$$

donc

$$(y^2)^3 \frac{\partial E}{\partial y^1} = (y^1)^3 \frac{\partial E}{\partial y^2}$$

Par conséquent, une solution à cette équation aux dérivées partielles est la fonction $E(x, y) = x^1 \sqrt{(y^1)^4 + (y^2)^4}$. Nous nous référons à l'Exemple 3.6 toutes les conditions pour que la variété (M, E) soit finslerienne (et qui ne soit pas riemannienne).

Remarque 3.34. On pourra reprendre l'Exemple 3.29. Dans ce cas, la courbure de la connexion Γ s'écrira

$$R = dx^1 \wedge dx^2 \otimes \frac{\partial}{\partial y^1},$$

avec $Im R$ est de dimension 1. Il est évident que $H \oplus Im R$ est complètement intégrable et une solution de $d_R E = 0$ nous conduit à une structure riemannienne d'énergie de la forme $E = e^{x^1} (y^2)^2$.

CONCLUSION

Ce présent mémoire a pour but l'étude des variétés finsleriennes du point de vue de la connexion de Grifone à courbure non nulle. Nous avons défini une connexion à l'aide de sa gerbe. Cette connexion est à torsion nulle et a la forme $\Gamma = [J, S]$, où S est la gerbe associée à la connexion et J la structure tangente naturelle sur la variété M . Grâce à l'isotropie de la gerbe, la courbure d'une connexion donnée peut se mettre sous la forme $3R = (d_J\lambda - \eta) \wedge J + d_J\eta \otimes C$, où $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}M)$ et η une 1-forme semi-basique sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}M)$. Cette relation nous permet de simplifier certains calculs dans ce présent travail. Particulièrement en dimension 2, la courbure d'une connexion donnée s'écrit $R = \left(\frac{\tilde{R} + d_J\tilde{R}^0}{3}\right) \wedge J - \frac{d_J\tilde{R}}{3} \otimes C$, avec \tilde{R} désigne le contracté de la courbure R et $\tilde{R}^0 = i_S\tilde{R}$ étant le potentiel de \tilde{R} . En combinant cette dernière formule avec des résultats jugés indispensables, nous arrivons à prouver l'existence d'une structure finslerienne de dimension 2 à connexion donnée; toute courbure étant bien sûr régulière, d'après M. Matsumoto dans [MAT95]. L'existence d'une fonction énergie E homogène de degré 2, non triviale telle que $d_RE = 0$ peut aussi être prouvée directement à l'aide du théorème de Fröbenius, puisque l'image de la courbure est de dimension 1.

Bref, la théorie des connexions finsleriennes a été abordée par plusieurs auteurs suivant des points de vue différents. L'étude qui peut s'étendre à partir de ce travail est de déterminer les notions ainsi que les résultats similaires dans une dimension supérieure stricte à 2, surtout un des théorèmes que nous avons démontré nous le garantit. Le point de vue algébrique sera à cet effet plus maniable et donc passionnant pourquoi pas?

Bibliographie

- [COQ02] R. COQUEREAUX, Espaces fibrés et connexions. Centre de Physique Théorique, Luminy-Marseille, 1 mai 2002.
- [DJE01] R. DJELID, Déformations conformes des variétés de Finsler-Ehresmann, *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*. Thèse n° 5032 (2011).
- [GRI72] J. GRIFONE, Sur les structures presque-tangentes et connexion I. *Ann. Inst. Fourier. Grenoble*. **22** Num. 1 (1972), 287-334.
- [GMU99] J. GRIFONE et Z. MUZSNAY, Sur le problème inverse calcul des variations : existence de lagrangiens associés à un spray dans le cas isotrope. *Ann. Inst. Fourier. Grenoble*. **49** 4 (1999), 1387-1421.
- [KLE87] J. KLEIN, On Lie algebras of vector fields defined by vector forms. *University Grenoble I, France*. 1987.
- [KOW72] O. KOWALSKI, On regular curvature structures. *Math. Z.* 125 (1972), 129-138. (Reviewer : M. do Carmo) 53C20.
- [MAL72] P. MALLIAVIN, Géométrie différentielle intrinsèque. **14** in Enseignement des sciences. Hermann , 1972.
- [MAT95] M. MATSUMOTO, Every path space of dimension two is projectively related to a Finsler space, *Open Syst. Inf. Dyn.* 3 (1995), 291-303.
- [MUT91] Z. MUZSNAY and G. THOMPSON, Inverse problem of the calculus of variations on Lie groups. *Differential Geom. Appl.* 23 (2005), no 3, 257-281.
- [RAD86] J. RADOFILAO, Initiation à la géométrie différentielle (Maîtrise de Mathématiques). Imprimerie du FTM, dépôt légal N° 26 (1986).

- [RRA10] P. RANDRIAMBOLOLONDRANTOMALALA, H.S.G RAVELONIRINA, M. ANONA, Sur les algèbres de Lie d'une distribution et d'un feuilletage généralisé, *African Diaspora Journal of Mathematics*, Vol. 10 Number 2 (2010), 135-144.
- [RRA15] P. RANDRIAMBOLOLONDRANTOMALALA, H.S.G RAVELONIRINA, M. ANONA, Sur les algèbres de Lie associées à une connexion, *Canadian Mathematical Bulletin*, (2015).
- [SZI03] J. SZILASI, A setting for Spray and Finsler Geometry, in "*Handbook of Finsler Geometry*" (ed. P.L. Antonelli) Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2 (2003), 1183-1426.
- [YOU78] N. L. YOUSSEF, Distribution de nullité du tenseur de courbure d'une connexion. *Université Scientifique et Médicale de Grenoble*. Dec 1978.

Nom : FAHAD

Prénoms : Ben Abdou

Adresse : Lot Bloc 14 Porte 3b CUR Ankatso II Antananarivo

Contacts : +261343844382, +261334920784, farouch19164@yahoo.fr

Titre : Les formes vectorielles et connexions de Grifone appliquées aux variétés finsleriennes à courbure régulière

Résumé

Soit une connexion au sens de Grifone, sans torsion sur une variété différentiable paracompacte, de classe C^∞ , de dimension $n \geq 2$. Nous étudions la régularité de la courbure de cette connexion. Cette étude nous permet de tirer une fonction énergie définissant une structure de variété finslerienne dont une intention particulière en dimension 2.

Mots-clés : connexion de Grifone, torsion nulle, courbure régulière, fonction énergie, variété finslerienne, formes vectorielles.

Abstract

Let be a torsion free Grifone's connection on a smooth paracompact $n(\geq 2)$ - dimensional manifold. We discuss the curvature regularity of this connection. This study allows us to deduce an energy function which defines a finslerian manifold, particularly in two dimensional.

Key-words : Grifone's connections, torsion free, regular curvature, energy functions, Finsler manifolds, vector forms.

Encadreur : Princy RANDRIAMBOLOLONDRAANTOMALALA,

Maître de conférences à l'Université d'Antananarivo.

Le numero 1 mondial du memoires

www.rapport-gratuit.com

clubmemoire@gmail.com

