

Table des matières

Acronymes	viii
Glossaire	ix
Introduction	1
0.1 Introduction	1
0.2 État de lieu	6
1 Définitions et approche paramétrique de la VaR	15
1.1 Définitions	15
1.1.1 Définition du risque	15
1.1.2 Typologie des risques	16
1.1.3 La mesure du risque	20
1.1.4 Une définition simple de la VaR	21
1.1.5 Exemple illustratif (Bons du trésor) du calcul de la VaR d'un actif .	23
1.1.6 VaR et réserves	24
1.1.7 VaR et capital économique	24

1.2	Analyses du rendement	25
1.2.1	Rendement d'un actif	25
1.2.2	Rendement d'un portefeuille	25
1.2.3	La volatilité d'un portefeuille composé de n actions	27
1.3	L'estimation de la VaR pour un portefeuille	29
1.3.1	Exemple illustratif (Bons du trésor) du calcul de la VaR d'un portefeuille	32
1.4	La VaR pour le rendement à facteurs exogènes et APT	33
1.5	La VaR pour le rendement Auto Régressif	36
1.5.1	Présentation du modèle	36
1.5.2	Estimation d'un modèle VAR standard	38
1.5.3	Estimation du nombre de décalages p	40
2	L'analyse de la VaR par simulation	43
2.1	Simulation de crise	43
2.2	Dispositif prudentiel de contrôle ex post lié à l'utilisation des modèles internes	45
2.3	La VaR historique (ou non paramétrique)	47
2.3.1	La simulation historique VaR	48
2.3.2	Exemple illustratif de l'application de la simulation historique (utilisation du programme de l'annexe 2)	50
2.3.3	La simulation de Monte Carlo	51
2.3.4	Analyse de la VaR par un raisonnement risque neutre basée sur les modèles Stochastiques	53

2.3.5	Génération des variables aléatoires normales centrées et réduites	55
2.3.6	Méthode d'évaluation des instruments financiers par simulation de Monte Carlo	58
2.3.7	Exemple illustratif d'un call (Programme de l'annexe 3)	65
2.3.8	Exemple d'un action (utilisation du programme de l'annexe 4)	67
2.4	Pertinence des mesures de la VaR	68
2.5	Le problème du scaling	69
Conclusion		70
Annexes		a
2.6	Annexe 1 : L'algorithme pour le tri par insertion	a
2.6.1	Annexe 1.a : Explication du tri par insertion	a
2.6.2	Annexe 1.b : Algorithme d'insertion	a
2.6.3	Annexe 1.c : Algorithme de calcul	a
2.7	Annexe 2 : La simulation historique	b
2.7.1	Annexe 2.a : Algorithme de la simulation historique	b
2.7.2	Annexe 2.b : Le programme de la simulation historique	c
2.8	Annexe 3 : Pour une option	g
2.8.1	Annexe 3.a : L'algorithme pour une option	g
2.8.2	Annexe 3.b : Algorithme de calcul	h
2.8.3	Annexe 3.c : Le programme d'une option	j
2.9	Annexe 4 : Pour un action	m

2.9.1	Annexe 4.a : L'algorithme pour un action	m
2.9.2	Annexe 4.b : Algorithme de calcul	o
2.9.3	Annexe 4.c : Le programme action	p
2.9.4	Annexe 5 :Loi de poisson limite de la loi binomiale	t
2.9.5	Annexe 6 : Loi Normale limite de la loi binomiale	u

Bibliographie		w
----------------------	--	----------

Liste des tableaux

1.1	calcul de la VaR d'un actif	23
1.2	calcul de la VaR d'un portefeuille pour chaque maturité	32
2.1	calcul de la VaR historique	50
2.2	périmètre d'utilisation des mesures de la VaR	68

Table des figures

- 2.1 la fonction de répartition de la simulation historique 51
- 2.2 Exemple d'une option 66
- 2.3 Exemple d'un action 68

Acronymes

- **AIC** : Akaike Information Criterion ;
- **ATP** : Asset Pricing Theory ;
- **BCE** : Banque Centrale Européenne ;
- **BCEAO** : Banque Centrale des Etats de l’Afrique de l’Ouest ;
- **BNP** : Banque Nationale de Paris ;
- **CAC** : Cotisation Assistée en Continu ;
- **CPU** : Central Processing Unit ;
- **CTE** : Conditional Tail Scenario ;
- **CVaR** : Conditional Value at Risk ;
- **ES** : Expected Shortfall ;
- **FCFA** : Franc des Colonies Françaises d’Afrique ;
- **WCS** : Worst Case Scenario ;
- **FSRM** : Factor Switching Regime Model ;
- **MGRM** : MetallGesellshat and Marketing ;
- **MG** : Morgan Grenfell ;
- **MSRM** : Multivariate Switching Regime Models ;
- **TVaR** : Tail Value at Risk ;
- **RAROC** : Risk Adjusted Return On Capital ;
- **VaR** : Value at Risk ;
- **VAR** : Vector Auto Regressive ;

Glossaire

- **Actif dérivé** : actif conditionnel construit sur un autre actif préexistant appelé sous-jacent et dont les cash flows sont conditionnels à ce sous-jacent (les actifs dérivés sont des sortes de paris sur d'autres actifs ; ils n'ont donc de sens qu'en univers aléatoire).
- **Action** : titre financier représentatif d'un droit de propriété d'une part d'une entreprise donnant droit à des revenus réguliers liés aux résultats de l'entreprise appelés dividendes (il est caractérisé par le temps : action de titre sans maturité et par un risque : Action de Titre aléatoire par excellence ; pas de condition aux limites comme les obligations).
- **Actuaire** : spécialiste des probabilités, des statistiques et du calcul financier touchant le domaine de l'assurance et des finances.
- **Finance** : c'est une allocation de ressources rares au cours du temps. Elle est caractérisée par le temps et l'incertitude.
- **Le hedging (couverture)** : il s'agit de savoir comment l'intermédiaire financier qui émet le produit peut-il se couvrir face aux risques.
- **Le pricing (tarification)** : la valeur initiale d'un produit financier tenant compte à la fois de la répartition temporelle et de l'incertitude.
- **Obligation** : titre financier représentatif d'un droit de créance et donnant droit à la réception de différents flux financiers fixés à des dates d'échéances futures fixées (coupons : versements intermédiaires, remboursement au terme).
- **Option** : idem qu'un contrat à terme mais on remplace l'obligation d'achat ou l'obligation de vendre par le droit d'acheter (call) ou le droit de vendre (put).
- **Option américaine** : titre financier donnant le droit d'acheter (call) ou de vendre (put) tout au long d'un intervalle une valeur à un prix déterminé d'avance. Il y a deux parties contractantes : acheteur de l'option ou détenteur de l'option : celui qui peut exercer le droit et vendeur de l'option ou émetteur de l'option : celui qui s'engage.
- **Option européenne** : titre financier donnant le droit d'acheter (call) ou de vendre (put) à une date future fixée une valeur (égale au sous-jacent) à un prix déterminé d'avance (égale au prix d'exercice).

- **Produit Financier** : ensemble de cash flows futurs définis selon une règle établie à priori (les obligations, les actions, les produits dérivés : contrats à terme, options classiques options exotiques)
- **Sous-jacent** : valeur quelconque dont l'évolution future est incertaine

Introduction générale

0.1 Introduction

La maîtrise du risque financier est l'un des soucis clef pour la gestion du portefeuille. Le risque est lié à la survenue d'un événement qu'il n'est pas possible de prévoir et aux conséquences importantes sur le bilan d'une firme. Donc il revêt un caractère aléatoire et imprévisible. Maîtriser des risques, donc leur caractère aléatoire et imprévisible laisse des stresses dans le monde des placements. Ainsi, les gestionnaires divergent sur l'instrument le mieux approprié pour les mesurer. Pour disposer d'un outil efficace, à cet effet, Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999) ont défini la notion des mesures cohérentes¹, comme un montant de capital nécessaire pour accepter l'incertitude sur la valeur future de la position, une mesure est qualifiée cohérente, lorsqu'elle vérifie les propriétés mathématiques suivantes :

1. la monotonie : pour tout L_x, L_y , si $L_x(\omega) \geq L_y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\Gamma(L_x) \geq \Gamma(L_y)$;
2. l'invariance par translation : si c est une constante et r est le rendement sans risque (strictement positif) alors pour tout L_x , $\Gamma(cr + L_x) = \Gamma(L_x) - c$;
3. l'homogénéité positive : si $\lambda > 0$ alors pour tout L_x , $\Gamma(\lambda L_x) = \lambda \Gamma(L_x)$;
4. la Sous-additivité : pour tout L_x, L_y , $\Gamma(L_x + L_y) \leq \Gamma(L_x) + \Gamma(L_y)$.

où L_x et L_y sont deux fonctions de perte de deux portefeuilles différents, Ω est l'espace de probabilité, ω élément de Ω et Γ la mesure de risque. La première propriété garantit le fait que plus un portefeuille a de valeur autant sa mesure de risque devrait l'être également.

1. Florian Herzog, [2005] "Strategic Portfolio Management for Long-Term Investments : An Optimal Control Approach" PP-194

La deuxième montre qu'en ajoutant un montant de liquidité, c au portefeuille, alors sa mesure de risque diminue de c , la troisième montre aussi qu'en multipliant par λ , la valeur du portefeuille, alors sa mesure de risque est d'autant multipliée par λ et enfin la dernière décrit que la mesure de risque de la somme de deux portefeuilles ne doit pas être supérieure à la somme des mesures de risque des portefeuilles. La propriété 3 et 4 impliquent la convexité de la mesure de risque Γ .

Puisque les propriétés de mesure de risque dans le sens d'Artzner et al. semblent trop restrictives, Ziemba et Rockafellar (2000) en ont proposé d'autres propriétés. Elles remplacent la propriété 3 (homogénéité positive) et la 4 (sous-additivité) par :

1. la non-négativité : $L_x > 0$ alors $\Gamma(L_x) > 0$ et $\Gamma(0) = 0$;
2. la convexité : pour tout L_x, L_y , $\Gamma(\lambda_1 L_x + \lambda_2 L_y) \leq \lambda_1 \Gamma(L_x) + \lambda_2 \Gamma(L_y)$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

Avec ce changement, l'homogénéité positive implique :

$$\Gamma(\lambda L_x) \leq \lambda \Gamma(L_x) \quad \text{si } 0 < \lambda < 1 \quad (1)$$

$$\Gamma(\lambda L_x) \geq \lambda \Gamma(L_x) \quad \text{si } 1 \leq \lambda \leq \infty \quad (2)$$

La modification des mesures de risque ne calcule pas le risque monétaire de perte, mais elle met en évidence la convexité de la fonction de perte. Du point de vue informatique, ces deux concepts permettent de mettre en application efficacement les optimisations de portefeuille, puisque les deux définitions impliquent la convexité. Ces propriétés permettent aux agents confrontés à une alternative entre deux choix de risques de se positionner.

L'optimisation des risques par des instruments de mesure classiques se distingue de ceux des nouveaux instruments, notamment la VaR (Value at Risk) et ses extensions. La durée et la convexité sont au centre d'intérêt de la gestion des risques du rendement d'un portefeuille. Les mesures de dispersion de Fong et Vasicek (1984) et de Balbas et Ibanez (1998) font apparaître cette distinction. Les mesures classiques du risque de rendement ne considèrent pas le vrai comportement des rendements au moyen de données historiques ou simulées. Ceci impose une limitation dans l'optimisation du portefeuille que les mesures modernes essayent de résoudre. La VaR est une méthodologie de mesure de risque bien connue, qui a été employée comme base pour l'industrie du règlement, voir Jorion (1996),

Pritsker (1997) et Szego (2002). Dans cette ligne, le problème de "simple immunization" a été présenté par Fischer et Weil (1971). Après une analyse comparative,[44]², la VaR est l'instrument qui minimise le risque d'un portefeuille, en fonction du niveau de confiance et de l'horizon choisi.

Les détracteurs de la VaR trouvent, en cette métrique de risque deux, limites majeures. La première est liée au concept lui même. En effet, la VaR par définition ne fournit en prévision aucune indication sur l'ampleur des pertes éventuelles, pouvant résulter des variations adverses des facteurs de marché. C'est, d'ailleurs, pour cette raison que les autorités de régulation des marchés imposent aux institutions financières de mener des analyses de scénarios catastrophes (stress testing) en complément de la prévision de la VaR.

La deuxième critique et, de loin, la plus référencée dans la littérature, concerne la violation de la propriété de sous-additivité. Pour la VaR, cette propriété n'est pas toujours vérifiée, en particulier, dans le cas de distributions non elliptiques, ce qui est contraire au principe de diversification. La VaR ne satisfait donc pas aux critères de définition d'une mesure cohérente du risque (Artzner et al., 1999).

Par ailleurs, pour les tenants de la VaR, ces deux limites n'enlèvent rien au fait que la VaR est, conceptuellement, simple et facile à interpréter. De plus, elle présente au contraire l'avantage des mesures de risque traditionnelles, comme la variance d'être du type downside³. Elle est alors compatible avec une représentation cohérente du choix de projets d'investissements en contexte d'incertitude. La représentation correspond à celle du principe de Safety First initialement introduit par Roy (1952) et développé entre autres par Tesler (1955), Kataoka (1963) et Arzac et Bawa (1977). Pour Roy (1952), en effet, la rationalité face à l'incertitude consisterait, pour un individu averse au risque à limiter avant tout la probabilité du désastre de son portefeuille d'investissements, plutôt que de maximiser à la Von Neumann et Morgenstern (1944) une quelconque fonction d'utilité. Au travers de la réserve formulée par Roy (1952), une justification de la préférence de la VaR

2. Miguel Ángel Martin Mato "*Classic and Modern Measures of Risk in fixed Income Portfolio Optimization*"

3. On entend généralement par downside risk une estimation de la probabilité que la valeur d'un actif ou d'un investissement baisse en réaction à de mauvaises conditions de marché. Le terme est parfois associé au montant de la perte potentielle

à la variance comme outil réglementaire d'évaluation du risque de marché est entrevue. Enfin, Danielsson et al. (2005) montrent que la VaR est, généralement, sous-additive pour des portefeuilles caractérisés par des propriétés similaires aux faits stylisés repris dans la littérature (distributions leptokurtiques).

De plus, il est possible de s'interroger, d'une part sur le choix du niveau ϵ , et d'autre part, sur le niveau réel des pertes, lorsque la VaR est dépassée. Pour remédier aux défauts de la VaR, d'autres instruments y liés ont vu le jour qui sont des extensions de la VaR notamment la méthode WCS (Worst Case Scenario) [57]⁴ ou Maximum loss, la VaR Conditionnelle (CVaR), la Tail Value at Risk (TVaR), la Conditional Tail Expectation (CTE)⁵, l'Expected Shortfall (ES) et les mesures de Wang⁶ liées à la VaR.

Depuis le milieu des années 90, le pivot du processus de mesure du risque financier est, sans aucun doute, la Valeur en Risque dite la VaR, adoptée par le Comité de Bâle en tant que mesure de référence. L'utilisation de la VaR à des fins de contrôle de risque interne par les banques s'est surtout répandue, après les événements du mois de février 1994. Avant cette date, une banque exerçant des activités obligataires pouvait raisonnablement évaluer le risque de ses positions à quelques pourcents près et espérer compenser partiellement la perte dans une monnaie par un gain dans une autre.

La volatilité accrue des marchés financiers et le développement des instruments de couverture toujours plus complexes ont permis, à la VaR, depuis deux décennies, de devenir l'outil clé pour prévoir les pertes plausibles à brève échéance dans le monde du placement. Les avantages de cet outil sont alors clairs. Tout en permettant, outre une gestion optimisée des risques financiers, une grande transparence sur les risques pris par les clients.

Ces dernières années, après les faillites bien connues de certaines grandes banques, plusieurs institutions financières, dont les activités de finance internationale peuvent se chiffrer en milliards de dollars, commencèrent à adopter la VaR pour gérer, quantifier et établir des informations correctes sur les portefeuilles qu'elles détiennent. La mesure de

4. Thierry Roncalli, [2011] *"Introduction à la Gestion des Risques"*, PP-459

5. Jean-Christophe Bouetté and Jean-François Chassigneux, [2005] *"Mesures de risque et allocation optimale de capitale"* PP-66

6. Jean-Christophe Bouetté and Jean-François Chassigneux, [2005] *"Mesures de risque et allocation optimale de capitale"* PP-66

la VaR fut également promue par le Comité de Bâle, dans ses amendements de 1996 sur les modèles Internes de mesure du risque, et ses Directives sur la Charge de fonds propre.

Compte tenu de la volatilité des marchés et de la diversité des natures des actifs financiers qui existent, telles que les taux de change, les Swap, les Bonds, les taux de change spot, les taux de change futurs, les actions, les indices spot, les prix de matières premières, les options etc, plusieurs méthodologies de calcul de la VaR ont vu le jour, chacune plus appropriée à tel ou tel instrument financier. Parmi ces méthodologies, les institutions financières peuvent choisir entre les méthodes dites de " Variance covariance ", la méthode de " Simulation Historique ", et " la Simulation de Monte Carlo ".

Par la complexité des crises, la défaillance d'un seul établissement financier peut conduire à une contagion aux autres établissements financiers, comme la panique financière (Occidentale [2006]). La mise en place d'une réglementation en matière des risques vise donc, dans un premier temps, à limiter le risque systémique et, dans un deuxième temps, à éviter les défaillances individuelles des établissements financiers.

Sur ce, la corrélation et l'interdépendance des actifs financiers qui résultent de l'interaction des marchés méritent d'être prises en compte. Pour ce faire, la première partie de notre travail est consacré aux différents types de définitions de la VaR et à l'approche paramétrique de celle-ci, quant à la seconde partie, elle est axée sur ses simulations.

0.2 État de lieu

L'instabilité financière toujours croissante a poussé à une régulation plus ferme. Le 15 juillet 1988, les banques centrales du G-10⁷, plus le Luxembourg et la Suisse, signèrent les "Accords de Bâle" et, depuis, les banques sont sous le contrôle du comité de Bâle.

Cette entente a pour objet de fournir le champ d'actions des banques, en imposant la "Charge minimale de fonds propres", applicable à tous les membres du comité. L'accord de Bâle exige aux banques, un capital de fonds propre équivalant à 8% du poids total du risque. Il fixe l'exigence minimale de fonds propres "Minimal Capital Requirements" imposée aux multinationales bancaires, ces fonds propres servant à couvrir les risques de pertes financières.

L'accord de Bâle de 1988, connu sous le nom "Bâle I", souffre de plusieurs critiques, notamment de la description exacte du risque de marché, cependant, il a mis en place des propositions qui traitent sa mesure, lesquelles devant être incorporées aux amendements des accords sur le capital de 1963.

Ainsi, en Janvier 1996, le comité de Bâle suggéra deux approches de calcul des réserves de capital, pour le risque de marché : le modèle Standard⁸. Selon l'approche suivie, la charge des fonds propres ou "Capital Requirements", est calculée en multipliant la Valeur en Risque par un facteur compris entre 3 et 4, [57]⁹.

En Août 1996, les institutions régulatrices des banques américaines, approuvèrent les accords de Bâle II. La banque de réserve fédérale permit l'utilisation de deux années de données historiques, pour l'implémentation du modèle. Pour la première fois, les banques furent autorisées à utiliser leur propre modèle de gestion du risque et à calculer leur VaR et leur fond propre.

7. (Les membres du G-10 sont : la Belgique, le Canada, la France, l'Allemagne, l'Italie, le Japon, la Hollande, la Suède, la Grande Bretagne et les USA)

8. L'approche porte sur l'exigence minimale en fonds propres composée de trois éléments fondamentaux qui sont : une définition du capital réglementaire, une définition des actifs pondérés et un ratio minimal de capital pour ces actifs pondérés qui est le rapport entre le Capital de la banque et total des actifs risqués pondérés et il doit être supérieur ou égal à 8%

9. Thierry Roncalli, [2011] *"Introduction à la Gestion des Risques"*, PP-459

L'utilisation de la VaR fut rapidement répandue. Les institutions financières ayant des échanges commerciaux et des investissements importants en volume, commencèrent à recourir à la méthodologie de la VaR pour gérer risque " Risk Management ". En octobre 1994 la JP Morgan introduisit son système RiskMetrics. En janvier 1995, La Deutch Bank commençait à utiliser le système dbAnalyst. Bankers Trust introduisit en 1996, le système RAROC¹⁰ (Risk Adjusted Return On Capital) et Le Crédit Suisse développait PrimeRisk et Prime Clear en 1997.

Les prépositions de Bâle II devenaient effectives à partir de Janvier 1998. Le capital standard du risque de marché devient impératif pour toutes banques ayant un compte commercial (Actions et Obligations) supérieur à 1 milliard de dollars. De plus, le comité décide de fixer l'horizon de prévision " Holding period " à dix jours ouvrables (2 semaines) et le niveau de confiance à 99%, correspondant à une perte au delà de la VaR, toutes les 100 jours, en utilisant au moins une année de données historiques.

Ces réglementations successives vinrent en réponse aux scandales financiers des années 90. En effet, cette période fut marquée par les révélations de la presse sur des catastrophes financières conséquentes d'un management trop confiant. En février 1994, la hausse du taux d'escompte par la Réserve fédérale américaine crée une onde de choc qui se propageait dans l'ensemble des marchés financiers mondiaux. Les banques se trouvèrent devant une situation où leurs obligations perdaient jusqu'à 10% de leur valeur, et ce, dans toutes les monnaies en même temps et en quelques semaines. Ce mouvement sur les taux d'intérêt vint s'ajouter à un autre problème important que des banques devaient gérer, celui du contrôle interne sur les positions risquées tenues par leurs propres traders. A cet égard, il faut rappeler plusieurs exemples de faillites liées aux risques financiers.

Exemples de faillites dues aux risques financiers

1. Le cas Orange County¹¹

Bob Citron, le trésorier du fonds de retraite, eut la charge de gérer un portefeuille de 7,5 milliards de dollars. Pour améliorer la performance de ce fonds, il emprunta

10. La mesure RAROC correspond au rapport entre le revenu net et le capital économique de la firme

11. www.lesechos.fr/formation/risques/articles/article_4_1.htm ou www.lescinter.net

12,5 milliards de dollars via des prêts, pour lui permettre d'investir 20 milliards de dollars dans des obligations d'État dont la maturité moyenne était de quatre ans. A cause du mouvement des taux d'intérêt, cette stratégie fut anéantie. En février 1994, les pertes sur les instruments financiers prêtés conduisirent à des appels de marge, provoquant une difficulté de financement à court terme. En Décembre 1994, les fonds du comté d'Orange et le comté d'Orange lui-même furent déclarés en cessation de paiement. Le mois suivant, le solde des actifs du fond fut réalisé, conduisant à une perte de " 1,64 milliard de dollars ".

2. **Le cas de la Banque Barings**¹²

Nicolas Leeson, trader employé dans une succursale de Singapour, engagea des sommes importantes en spéculation sur l'indice Nikkei (position facilitée par le fait qu'il était à la fois responsable du back-office et du trading). Il paria sur la hausse de la Bourse japonaise en vendant à terme des contrats sur l'indice Nikkei 225. Mais le séisme de Kobe provoqua une chute brutale du Nikkei et ses pertes atteignirent "6 milliards de francs".

3. **Le cas Daiwa**¹³

Le 26 septembre 1995, la banque Daiwa annonça qu'elle avait accumulé des pertes estimées à " 1,1 milliard de dollars ". Elle réalisa plus de 30.000 transactions sur onze ans en bons du Trésor américain. A cause des mouvements des taux d'intérêt, les pertes croissaient, le gestionnaire avait excédé ses limites de position pour tenter de récupérer les pertes. Il commença par vendre, des obligations appartenant à ses clients et déposées dans la succursale new-yorkaise de la banque. Daiwa était la douzième banque du Japon à l'époque, mais à la suite des révélations de ces pertes, Daiwa ferma sa succursale de New York et la direction générale démissionna en octobre 1995 et les autorités de régulation américaines ordonnèrent à Daiwa l'arrêt de ses opérations aux États-Unis.

4. **Le cas MGRM**¹⁴

En 1992, MetallGesellschaft Refining and Marketing (MGRM) mit en oeuvre ce qu'elle crut être une stratégie profitable : la société accepta de vendre mensuel-

12. www.lesechos.fr/formation/risques/articles/article_4_1.htm

13. www.lesechos.fr/formation/risques/articles/article_4_1.htm

14. www.lesechos.fr/formation/risques/articles/article_4_1.htm

lement des montants déterminés de produits pétroliers, pendant une période de 10 ans, à un prix fixé au-dessus du marché. MGRM acheta donc des contrats futurs d'énergie à court terme pour couvrir les engagements à long terme. La stratégie de couverture omit de prendre en compte un détail : au cas où les prix du brut devaient chuter, les profits de la vente de produits pétroliers seraient réalisés sur le long terme, mais les pertes sur les contrats futurs d'énergie seraient réglées immédiatement. Tel fut le cas, donc la société connut une crise de trésorerie. En décembre 1993, Metallgesellschaft solda ses positions au pire moment, avec une perte de " 8,2 milliards de francs ".

5. **Le cas Morgan Grenfell** ¹⁵

Peter Young, gestionnaire des fonds chez Morgan Grenfell (MG), se servit de l'argent investi dans les trois plus gros fonds de placement de sa société, pour acheter des actions " spéculatives ". Cet investissement renferme une part de 30 millions de dollars dans une société au passé en dents de scie, dont Peter Young acheta les actions à 2 dollars au-dessus du cours. Quand les responsables de la réglementation londonienne commencèrent à enquêter sur la valorisation des actifs des trois plus gros fonds de Morgan Grenfell, la société cessa la commercialisation de ces fonds en trois jours. A la suite de cette annonce, 30% des investisseurs retirèrent leur argent. Cet échec coûta " 400 millions de dollars " à la société. Le préjudice causé à la réputation de Morgan Grenfell s'est révélé encore plus coûteux.

6. **Le cas Bankers Trust** ¹⁶

Bankers Trust fut poursuivi en justice par quelques-uns de ses plus gros clients, qui se plaignaient avoir été induits en erreur par la banque concernant la prise de risque et la valeur des produits dérivés qu'ils lui avaient achetés. Procter & Gamble à l'époque engagèrent dans des transactions sur les produits dérivés, en pariant sur la stabilité ou la baisse des taux d'intérêts américains. La Réserve Fédérale ayant augmenté les taux d'intérêt de façon répétitive en 1994, Procter & Gamble poursuivit donc Bankers Trust pour "195 millions de dollars " de perte. A l'issue du procès, Bankers Trust fut condamné à payer 93 millions de dollars à ses clients, dont 78 millions à Procter & Gamble. Mais les plus gros dégâts concernèrent la réputation de Bankers

15. www.lesechos.fr/formation/risques/articles/article_4_1.htm

16. www.lesechos.fr/formation/risques/articles/article_4_1.htm

Trust.

7. Le cas du Lloyd's¹⁷

Le Lloyd's de Londres essaya de s'établir aux États-Unis, en pratiquant une politique de police d'assurance avec des remboursements illimités, cela lui donna un avantage compétitif. Malheureusement, à cette période, l'exposition à l'amiante et aux autres polluants causa de sérieux problèmes de santé qui donnèrent suite à des nombreuses plaintes et procès. Les pertes commencèrent à apparaître en 1991, " 509 millions de livres sterling ", cela constitua les plus grosses pertes annuelles de toute l'histoire de la société.

8. Le cas de Confederation Life¹⁸

Afin de s'assurer un rendement dans une industrie de plus en plus compétitive, Confederation Life investit massivement dans le marché immobilier au cours des années 80 et 90 (73% des actifs en 1993). Mais la performance du marché immobilier ne fut pas à la hauteur des attentes et les pertes commencèrent à être lourdes au début des années 90. Entre 1990 et 1993, la valeur moyenne du mètre carré passa de 208 dollars à 129 dollars. A terme, les autorités réglementaires, craignant la panique des investisseurs, intervinrent pour mettre fin à Confederation Life. Les liquidateurs estimèrent les pertes à "1,3 milliards de dollars".

9. Le cas de la crise Occidentale de 2006

Depuis 2006, [45]¹⁹ il y a eu retournement du marché immobilier ayant causé le premier craquement de l'actuelle crise Occidentale. En 2007, dans la deuxième semestre, les difficultés financières s'internationalisèrent et, en juin 2007, la banque d'investissement Bear Stearns annonça l'effondrement de la valeur des deux de ses fonds investis dans des subprimes. Quelques semaines plus tard, la banque allemande IKB tomba en difficulté et en août, de France que provinrent des nouvelles informations alarmantes : BNP Paribas et la société de gestion Oddo annoncèrent geler les souscriptions et les rachats sur des fonds exposés aux subprimes. Entre janvier et le 15 septembre 2008, la cascade de défaillances financières qui a atteint toutes les valorisations sur l'ensemble des marchés.

17. www.lesechos.fr/formation/risques/articles/article_4_1.htm

18. www.lesechos.fr/formation/risques/articles/article_4_1.htm

19. Mme Monique Bourven et M.Yves Zehr,[2009], "*La crise Bancaire et la Régulation Financière*" PP-90

Merrill Lynch ouvrit l'année 2008 par l'annonce des pertes de près de 10 milliards de dollars sur ses dérivés financiers. Et il s'en suivit celle de la nationalisation de Northern Rock, celle de la quasi faillite de Bear Stearns rachetée par JP Morgan avec l'aide du Trésor américain.

Le 15 septembre 2008, les autorités américaines décidèrent de ne pas secourir la banque Lehman Brothers jugée pourtant "too big to fail"²⁰. Ce signal très fort montre au marché que toute banque peut désormais disparaître. Cette faillite signifie le vrai début de la crise bancaire ; la défiance des banques envers tous leurs correspondants bancaires devient générale. Le manque de transparence accroît l'aversion contre le risque en période de stress, favorisant un assèchement complet de la liquidité bancaire.

Désormais, la crise bancaire s'étendit sur la planète et les problèmes passèrent de la sphère privée à celle publique. Les chefs des gouvernements, les parlements furent mobilisés, car la liquidité s'étant tarie entre établissements financiers et entre ceux-ci et leurs clients, l'ensemble des systèmes bancaires jalonnèrent au bord du gouffre. Jusque là et depuis fin 2006, les problèmes jugés individuels trouvaient des solutions individuelles nationales. En bourse, les valeurs financières étaient attaquées et affichaient des baisses historiques, suivies par le reste des valeurs. Entre le 2 septembre et la fin octobre 2009, les grands indices subirent des pertes énormes : 31 % pour le Standard and Poors 500, 25 % pour le CAC 40. Dans chacun des pays, les États apportèrent liquidités ou des fonds propres ou des quasi fonds propres aux établissements en difficulté dont les pertes, selon le FMI, s'élevèrent à la fin janvier 2009 à 2 200 Milliards de dollars, chiffre encore sous évalué aux yeux de certains. C'est dans ce contexte et sur demande de l'Europe que s'était réuni à Washington un G20, le début novembre 2009, pour définir les grands thèmes de reformes nécessaires au système bancaire et financier mondial que les États voulaient voir mis en place. Il semble loin, le libre jeu du marché !

A la lumière de ces exemples de catastrophes financières, il est constaté que certains facteurs internes à l'entreprise peuvent quelquefois générer les dégâts considérables que nous venons d'évoquer. En effet, souvent à la source des difficultés citées, il existe une

20. trop grosse pour être abandonnée à la faillite

mauvaise appréciation et un contrôle défaillant des risques encourus par l'activité de la société; la Barings en est l'exemple le plus significatif à travers ses investissements inconsidérés sur le Nikkei mais, également, la Metallgesellschaft en raison de son pari à long terme sur les produits pétroliers.

Ces entreprises n'accordèrent pas un contrôle suffisant à leur activité ou à leur organisation. Une autre erreur souvent commise, c'est la confiance absolue conférée aux professionnels dont personne ne remet en cause les compétences pourtant ils firent des choix dangereux à un moment de la vie de l'entreprise. Cela permet donc de conclure qu'une faiblesse du contrôle interne, une faible supervision des employés, des négligences à limiter le champ d'actions des collaborateurs, un manque de collégialité dans la prise de décision stratégique, sont autant de causes de catastrophes qui auraient pu être évitées. Avec un système de gestion de risque satisfaisant, les fraudes auraient dû être découvertes en quelques jours ou en quelques heures et non en quelques mois ou quelques années. C'est pourquoi un cadre de gestion de risque global de l'entreprise basé sur la VaR est un outil indispensable dans une entreprise.

Par ailleurs, la gestion des risques repose sur une infrastructure, des politiques et des méthodes qui permettent de gérer l'information, d'établir des limites de transactions, d'évaluer la performance et, enfin, de répondre aux exigences de la réglementation. Etant donné ces préoccupations des dirigeants financiers, la VaR mérite des recherches approfondies. Déjà en [1993] Van Norden et Schaller abordèrent la VaR via le modèle "Switching in stock Market", repris par Rochinger en [1994]. Cette approche est généralisée par Monica Billio et Pelizzon dans *Journal of Empirical Finance* en 2000, [46]²¹. Pour eux, le risque de profil d'une firme ou de l'économie, dans son ensemble, ne reste pas constant dans le temps. Une série d'évènements systématique peut changer l'entreprise et le risque financier des firmes significativement.

Il était soutenu que cela pourrait dériver de la présence des variations discontinues dans la volatilité des rendements. La volatilité ne devrait pas être considérée comme prévisible, mais un évènement aléatoire. Ces auteurs considèrent que le prix ou l'indice de prix est une chaîne de Markov par opposition à une spécification de Bernoulli pour le décalage

21. Monica Billio, Lioriana Pelizzon, [2000] "Value-at-Risk : a multivariate switching regime", *Journal of Empirical Finance* 7(2000)PP-531-554

aléatoire discontinu, car la chaîne de Markov permet à l'information conditionnelle d'être utilisée dans le processus de prévision. Cela permet d'expliquer la série et d'avoir toutes les connaissances effectives, en vertu desquelles une forte volatilité est suivie par d'autres plus fortes, pour générer des meilleures prévisions par rapport au mélange des modèles de distributions. Cette approche permet aussi de prendre en compte la corrélation entre les actifs.

Le problème du modèle MSRM (Multivariate Switching Regime Models) exige l'estimation d'un certain nombre de paramètres qui évolue exponentiellement avec celui des actifs. En fait, le nombre de régimes possibles générés dans ce modèle est de 2^{N+1} (N : nombre d'actifs).

Une solution possible au problème qui affecte le MSRM est de considérer la spécificité que le risque suit une loi $N(o, \sigma_i^2)$, et de caractériser le risque systématique avec plus d'une source de risques. Cette approche qui est le Factor Switching Regime Model (FSRM) est sur la même ligne que le modèle de la théorie d'arbitrage Pricing où les facteurs de risques sont caractérisés par un changement de régime. Le FSRM est parcimonieuse; en fait, l'introduction d'un atout supplémentaire signifie que $g+2$ paramètres seulement pour ($g + 2 < N$) doivent être estimés [46]²². Cette approche est valable quand le nombre d'actifs dans le portefeuille est élevé et le risque spécifique devient facilement éliminé par diversification.

Dans "Optimal Portfolio allocation Under Asset and Surplus VaR Constraints", A.Monfort suppose que le rendement évolue dans le temps, d'une manière quadratique [3]²³. Il a essayé de répondre aux vraies questions que rencontrent les gestionnaires dans la "Modélisation séquentielle de la VaR" notamment en abordant le problème de l'agrégation, de la diversification, de la contagion et de la corrélation instantanée à l'aide d'exemples, en évaluant la perte dans le cas de AR(1) et ARCH(1) et en mesurant la segmentation de la volatilité, l'hétéroscédasticité conditionnelle et la persistance des chocs de volatilité, [2]²⁴. Et puis, K. M. Bensafra dans "La gestion du Risque de Marché : Application de la

22. Monica Billio, Lioriana Pelizzon, [2000] "Value-at-Risk : a multivariate switching regime", Journal of Empirical Finance 7 PP-531-554

23. Alain Monfort, [2007] "Optimal Portfolio Allocation Under Asset and Surplus VaR Constraints"

24. Alain Monfort, [2006] "Multi-lag Term Structure Models with Stochastic Risk Premia", PP.69

Valeur en Risque”, a détaillé quelle variable est applicable à quel modèle, en faisant aussi la comparaison des trois méthodologies du calcul de la VaR, [41]²⁵.

Toutes ces approches, c’est la simulation numérique, plus précisément la simulation de Monte Carlo qui reste la meilleure. Ainsi dans ce travail, nous l’aborderons les processus stochastiques dans la deuxième partie.

25. K. M. Bensafte *”La gestion du Risque de Marché : Application de la Valeur-à-Risque”* PP-26

Chapitre 1

Définitions et approche paramétrique de la VaR

1.1 Définitions

La Valeur en Risque, plus connue sous le nom anglais "Value-at-Risk" ou VaR d'un portefeuille pour un risque donné et pour un horizon donné peut être définie ainsi :

en excluant les % des occurrences les plus catastrophes pour valoriser le portefeuille, la VaR correspond à la perte maximale (exprimée en %) que le portefeuille peut subir.

1.1.1 Définition du risque

Il est très difficile de définir, de façon générale la notion de risque. Le risque est lié à la survenance d'un événement non prévisible mais aux conséquences importantes sur le bilan d'une firme. Il faut donc cerner le caractère aléatoire et imprévisible (qui sont à l'origine du risque) de l'enjeu (conséquence finale).

1.1.2 Typologie des risques

Cette liste non exhaustive énumèrent différents risques que peut rencontrer un établissement financier :

- **risque de crédit** (risque de défaillance (default risk), risque de dégradation de la valeur de la créance (downgrading risk)) ;

L'activité bancaire demeure fortement réglementée du fait du rôle particulier assumé par les établissements financiers dans l'économie. Deux raisons principales sont à l'origine du contrôle de cette activité.

D'une part, les liens étroits qu'entretiennent les établissements financiers sont à l'origine d'un risque systémique : la faillite d'une banque peut entraîner, par effet de contamination, celle d'autres établissements.

D'autre part, l'État demeure le principal garant des dépôts bancaires . L'activité de contrôle permet de maintenir la confiance dans le système bancaire et d'en assurer la pérennité. Les premières dispositions réglementaires concernant l'activité de crédit des banques ont été émises par le Comité de Bâle. Elles répondent à une logique d'adéquation des capitaux propres des banques aux risques qu'elles prennent ; les fonds propres doivent être suffisants pour couvrir les pertes que les banques sont susceptibles d'enregistrer. L'Accord de Bâle (15 juillet 1988) fixe le cadre réglementaire de l'activité de crédit de l'ensemble des banques des pays signataires. Le ratio Cooke¹ impose, notamment, un niveau de fonds propres minimal ; à chaque actif détenu par la banque est associé un coefficient de pondération (0%, 20%, 50% ou 100%), en fonction du risque y afférent ; le capital total destiné à couvrir ce dernier doit atteindre au moins 8% de l'ensemble des actifs ainsi pondérés. La principale critique formulée à l'encontre des propositions du Comité de Bâle provient de l'absence du fondement économique des coefficients de pondération appliqués aux actifs ; ceux-ci sont fixés de façon arbitraire, si bien qu'ils ne reflètent pas correctement le risque de crédit réel encouru par les banques.

Face à cette situation réglementaire imparfaite, les établissements bancaires

1. En 1988, le Comité Bâle propose un ratio international de solvabilité qui doit permettre une meilleure adéquation des fonds propres par rapport aux risques, de renforcer la solvabilité et la stabilité du système bancaire et d'atténuer les inégalités concurrentielles entre les banques.

C'est le fameux ratio Cooke (du nom du président du Comité de Bâle de l'époque) qui correspond au rapport entre le montant des fonds propres et celui des encours

cherchent à mettre en place des outils de mesure du risque efficaces permettant de déterminer le capital économique nécessaire pour chacune de leurs activités. De tels outils doivent permettre, à terme, d'évaluer et de comparer les rentabilités économiques (et non plus comptables) des activités dans lesquelles les banques sont engagées. Le risque de crédit peut être défini comme le risque des pertes consécutives au défaut d'un emprunteur sur un engagement de remboursement des dettes qu'il a contractées. En général, trois composantes sont distinguées, à savoir :

1. Le risque de défaut correspond à l'incapacité du débiteur à faire face à ses obligations. L'agence Moody's Investors Service en retient la définition suivante : "tout manquement ou tout retard sur le paiement du principal ou des intérêts". Dans une telle situation, les créanciers sont susceptibles d'accuser une perte s'ils ne recouvrent qu'une partie du montant stipulé par le contrat de dette ;
2. La deuxième composante du risque de crédit provient de l'incertitude pesant sur le taux de recouvrement, dès que le défaut surgit ;
3. La dégradation de la qualité du crédit constitue la troisième source de risque portant sur une dette ;

Si la perception de la qualité de l'emprunteur se détériore, la prime de risque accordée par les marchés financiers s'accroît en conséquence. De plus, si l'emprunteur bénéficie d'une note de la part d'une agence de notation, celle-ci est susceptible de se dégrader à son tour, suite à la perception négative des marchés.

A noter que les risques de défaut et de dégradation sont fortement corrélés dans la mesure où la dégradation de la qualité de la contrepartie aurait précurseur d'un défaut. Néanmoins, ces deux risques sont bien distincts. Le risque de dégradation se traduit par une possible dévalorisation de la dette au cours de sa période de vie. Les pertes liées à la dégradation de la qualité de la contrepartie se réalisent donc, en cas de vente anticipée de la dette bien qu'aucun défaut, ne se soit pour autant produit ;

- **risque de marché** (risque de taux d'intérêt, risque de taux de change, risque lié aux marchés des actions, risque lié aux marchés des matières premières, risque lié aux produits dérivés, risque de modèle) ;

Le risque de marché fait partie intégrante des activités de prêt et de dépôts de la Banque, ainsi que de ses activités de financement, de négociation et de placement. Il désigne le risque de perte qui découle de l'évolution anormale ou désavantageuse des taux d'intérêt, des taux de change, le prix des actifs financiers dans les marchés des matières premières, le cours des actions ; c'est aussi une variation de la valeur d'un portefeuille d'actifs due aux mouvements de marché (prix, taux, volatilité)

1. le risque de taux d'intérêt :

Les activités de financement, de prêt et de placement de la Banque donnent lieu à un risque de taux d'intérêt. Pour celle-ci, l'impact des variations des taux d'intérêt se reflète dans le revenu d'intérêt net.

2. le risque de change :

Le risque de change de la Banque découle des activités de négociation, de celles de change et des investissements dans ses filiales étrangères. Dans ses activités de négociation, la Banque achète et vend des devises sur les marchés au comptant, les marchés à terme et les marchés des options, autant pour les besoins de ses clients que pour son propre compte.

3. le risque lié aux marchés des actions :

La Banque négocie des actions pour ses clients et pour son propre compte. Le risque lié aux actions découle des changements dans la valeur d'un placement dans un titre donné ou des fluctuations globales du marché boursier, dans le cas d'opération sur les indices boursiers.

4. le risque lié aux marchés des matières premières :

Les opérations sur les marchandises portent sur les métaux précieux et les produits énergétiques, de même que sur les contrats d'options et les contrats à terme qui s'y rattachent.

5. le risque lié aux produits dérivés :

Les produits dérivés constituent un important outil de gestion du risque, tant pour la Banque que pour ses clients. La Banque utilise des produits dérivés pour gérer le risque de marché lié à ses activités de financement et de placement. Pour gérer le risque de taux d'intérêt dans ses activités de prêt à taux fixe, la Banque fait appel à des swaps de taux d'intérêt, à des contrats à terme

normalisés, à des contrats de garantie de taux d'intérêt et à des options. Elle a recours aux swaps, aux contrats et aux options pour gérer le risque de change.

- **risque opérationnel** (risque de désastre, risque de fraude, risque de traitement, risque technologique, risque juridique) ;

A rappeler que, selon le document consultatif,[10]² du comité de Bâle, les risques opérationnels se définissent comme les risques de pertes directes ou indirectes résultant de l'inadaptation ou de la défaillance de procédures ou des personnes, ou des systèmes ou résultant d'événements extérieurs³. Cette définition a été critiquée, car il est relativement difficile de calculer certaines pertes indirectes. Le 28 septembre 2001, le Comité de Bâle a donc proposé une seconde définition :

"Les risques opérationnels se définissent comme les risques des pertes dues à une inadéquation ou à une défaillance des procédures, personnels, systèmes internes ou à des événements extérieurs". C'est une défaillance dans le traitement d'une opération (erreur humaine, problème informatique, fraude). Il est nécessaire de préciser les types de perte que comprend cette définition. Dans le document,[10]⁴, le Comité de Bâle avait retenu 6 types de pertes :

1. **write-downs** : la valeur de réduction des capitaux dus au vol, la fraude, l'activité ou le marché noir et les pertes de crédit surgissant en raison des événements opérationnels ; "direct reduction in value of assets due to theft, fraud, unauthorised activity or market and credit losses arising as a result of operational events"
2. **loss of recourse** : les paiements ou les déboursements qui sont incorrects ou non récupérés ; "payments or disbursements made to incorrect parties and not recovered".
3. **Restitution** : les paiements des principaux clients et/ou l'intérêt par la restitution, ou le coût de n'importe quelle autre forme de compensation à payer aux clients ; "payments to clients of principal and/or interest by way of restitution, or the cost of any other form of compensation paid to clients".

2. "Basel Committee on Banking Supervision, *Operationnal Risk-Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord*", January 2001,PP-139

3. "the risk of direct or indirect loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events"

4. "Basel Committee on Banking Supervision, *Operationnal Risk-Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord*", January 2001, PP-139

4. **legal liability** : le coût de toutes autres pénalités, telles que les révocations de permis ; "judgements, settlements and other legal costs".
 5. **Regulatory and Compliance** : la réduction directe en valeur des biens corporels, y compris des certifications dues à un certain genre d'accidents ; "fines, or the direct cost of any other penalties, such as license revocations".
 6. **loss of or damage to assets** : la réduction directe en valeur des biens corporels, y compris des certificats, en raison d'un certain genre d'accidents "direct reduction in value of physical assets, including certificates, due to some kind of accident (e.g. neglect, accident, fire, earthquake)".
- **risque de liquidité** : Le risque de liquidité résulte de l'incapacité d'une banque à faire face à une réduction de son passif ou à financer un accroissement de son actif (impossibilité d'échanger un titre sur les marchés). Donc, ce risque est lié à la structure du bilan et est très sensible aux possibles déséquilibres, c'est le cas des crédits à moyen terme qui sont financés par des dépôts à vue. La matérialisation du risque de liquidité peut être concrétisée par :
 - un retrait massif des dépôts de la clientèle,
 - une crise de confiance du marché à l'égard de l'établissement financier,
 - une crise de liquidité générale du marché ;
 - **risque stratégique** : En cherchant à le situer du point de vue de la stratégie d'entreprise, il est possible de considérer que "le risque est une fonction du degré d'inefficacité d'une stratégie si le mauvais scénario se réalise" selon Porter.

1.1.3 La mesure du risque

Le risque est lié à la volatilité du marché (ou valorisation au prix de marché) du portefeuille d'actifs. Pendant très longtemps, la mesure naturelle du risque a donc été la volatilité. Par exemple, dans le modèle de sélection de portefeuille de Markowitz, l'agent maximise son espérance de gain pour un niveau de risque donné, qui est mesuré par l'écart-type.

Cette vision du risque n'est cohérente que dans un monde gaussien sachant cependant depuis fort longtemps, que l'hypothèse de normalité des rendements des actifs financiers

n'est pas vérifiée. Actuellement, la mesure de risque la plus répandue est la valeur en risque. Statistiquement, ce n'est rien d'autre que le quantile ϵ de la perte potentielle pour un horizon donné.

1.1.4 Une définition simple de la VaR

La VaR est une mesure de la perte potentielle qui peut survenir à la suite des mouvements adverses des prix de marché. Elle permet de répondre à la question suivante : Combien l'établissement financier peut-il perdre avec une probabilité ϵ pour un horizon de temps T fixé ?

Deux éléments sont donc indispensables pour interpréter le chiffre VaR (qui permet de donner une vision globale du risque de marché d'un portefeuille) :

1. la période de détention T ou "holding period" qui correspond à la période sur laquelle la variation de valeur du portefeuille est mesurée ;
2. le seuil de confiance ϵ du chiffre VaR qui correspond à la probabilité de ne pas dépasser cette mesure du risque.

Si ces deux paramètres ne sont pas spécifiés, il ne sera pas possible d'interpréter le chiffre VaR, car un risque à 10 jours avec une probabilité de 99% est beaucoup plus important qu'un risque à 1 jour avec une probabilité de 90%. Le premier cas donne une chance sur 100 que la perte réalisée pour les 10 prochains jours ouvrés soit supérieure à celle estimée par la VaR. Tandis que le second cas permet une chance sur 10 que la perte réalisée demain soit plus grande que la VaR. Avec la mesure de la VaR, il est possible donc de passer d'une mesure de risque comme volatilité à une autre comme quantile.

En considérant un actif dont la valeur à un instant t est notée W_t . Définissons alors la perte subie sur cet actif durant une période $[s; t]$ par :

$$Per_{s,t} = W_s - W_t \tag{1.1}$$

Supposer, par ailleurs, que la valeur de cet actif et donc les pertes associées à cet actif évoluent de manière stationnaire. Ainsi, il est possible de remplacer l'intervalle $[0, t-s]$ et la variable Per n'aura plus pour indice que la seule durée de l'intervalle. La valeur en risque

de l'actif pour la durée t et de niveau de probabilité ϵ se définit comme la perte encourue maximale sur cet actif durant l'intervalle $[0, t]$ pour une probabilité $1 - \epsilon$.

$$Pr[Per_t > VaR] = 1 - \epsilon \iff Pr[Per_t \leq VaR] = \epsilon \quad (1.2)$$

Il existe donc deux paramètres dans la définition de la VaR : la durée t et la probabilité ϵ . En pratique, fixer une fois pour toutes la durée de calcul de la VaR (un jour, une semaine, ou un mois) et calculer la VaR en fonction de la probabilité ϵ .

Toutefois, cette définition pose un certain nombre de problèmes liés, notamment, à l'existence et à la caractérisation de la fonction de densité. Pour les variables discrètes, par exemple, la VaR ne peut pas être définie de façon précise et le cas où elle correspondrait à un saut de la fonction de répartition, aucune valeur de la perte n'aurait convenir.

Lorsque ϵ correspond à un palier de la fonction de répartition, une infinité de valeurs convient et nous choisissons, par sécurité, de prendre la valeur la plus défavorable, c'est-à-dire la plus grande. De ce fait, la définition rigoureuse de la VaR s'écrit alors sous la forme :

$$VaR_\epsilon = \max(W : Pr[Per_t \leq W] \leq \epsilon) \quad (1.3)$$

Si la variable aléatoire Per suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ , il est possible d'écrire : $Pr[\frac{Per_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaR_\epsilon - \mu}{\sigma}] = \epsilon$ et en notant Z_ϵ le quantile d'ordre ϵ de la distribution normale, une formule très simple de la VaR est obtenue :

$$VaR_\epsilon = \mu + Z_\epsilon \sigma \quad (1.4)$$

1.1.5 Exemple illustratif (Bons du trésor) du calcul de la VaR d'un actif

Le trésorier de la société Gamma dispose de 45 000 000 FCFA. Il décide de les placer en bons du Trésor négociables à une semaine (7 jours) du 21 Juin au 28 Juin 2008. Les émissions sont faites par adjudication à l'américaine. Chaque souscripteur fait ses propositions, quant au montant qu'il veut souscrire et au taux d'intérêt qu'il est prêt à verser par l'intermédiaire d'une banque en liaison avec un SVT (Un spécialiste en valeurs du Trésor). La banque centrale a fixé le montant global de l'émission à 1 milliard de FCFA divisibles en tranches de 1 million de FCFA. Le résultat de l'adjudication a été : Total des demandes : 43400000 FCFA au taux r_i et pour donner le tableau suivant. Ici nous calculons la VaR_i pour chaque actif i .

Banque	O_i	r_i	a_i	$R_{i,t}$	R_p	W_t	VaR_i
A	5000	0.05	0.005576037	1.41906755	0.00817435	28.8018433	-0.19868
B	500	0.0525	0.00060484	1.4441198	0.00087346	0.30241935	-0.00208
C	2000	0.055	0.00253456	1.46961432	0.00372483	5.06912442	-0.03496
D	5000	0.06	0.00691244	1.52196156	0.01052047	34.562212	-0.23842
A	4000	0.06	0.00552995	1.52196156	0.00841638	22.1198157	-0.152587
D	10000	0.061	0.0140553	1.53265266	0.02154189	140.552995	-0.96956
E	2000	0.0625	0.00288018	1.5488303	0.00446092	5.76036866	-0.03974
A-Tiers	2000	0.065	0.00299539	1.57617338	0.00472126	5.99078341	-0.04133
B-Tiers	3000	0.065	0.00449309	1.57617338	0.00708189	13.4792627	-0.09298
E	1000	0.069	0.00158986	1.62092991	0.00257705	1.58986175	-0.01097
F-Tiers	3000	0.07	0.00483871	1.63231622	0.0078983	14.516129	-0.100136
G	4000	0.075	0.00691244	1.69045885	0.0116852	27.6497696	-0.19073
H	1000	0.075	0.00172811	1.69045885	0.0029213	1.7281106	-0.01192
I	900	0.08	0.00165899	1.7506725	0.00290434	1.49308756	-0.01030

source Document de procédures d'émission de Bons detrésor et Obligations BCEAO

où O_i est l'offre i (montant en millions de FCFA) de taux r_i . La pondération $a_i = \frac{r_i \times O_i}{O}$ et O est le montant total des offres retenues.

A remarquer que la somme des $VaR_i = -2,094408139$, ce qui est la VaR en considérant le portefeuille formé par ces actifs (voir tableau 3) donc ici la VaR est sous-additive. Le prix $P_{i,t}$ du bon du trésor par :

$$p_{i,t} = p_{0,i} e^{r_i t} \quad (1.5)$$

et le rendement $R_{i,t}$ est donné par :

$$R_{i,t} = e^{r_i t} \quad (1.6)$$

TABLE 1.1 – calcul de la VaR d'un actif

1.1.6 VaR et réserves

Un autre angle de vue de la VaR peut être utile,[4]⁵. En notant res_t les réserves en t (non rémunérées entre t et $t + 1$) permettant la survie en $t + 1$ de l'entité définie par les champs des sources de risques, avec la probabilité $1 - \epsilon$, nous avons :

$$Pr[W_{t+1} + res_t > 0] = 1 - \epsilon \text{ ou } Pr[W_t - Per_t + res_t > 0] = 1 - \epsilon$$

ou $Pr[Per_t > W_t + res_t] = 1 - \epsilon$ ce qui implique que

$$VaR_t(\epsilon) = W_t + res_t \tag{1.7}$$

1.1.7 VaR et capital économique

En supposant que la loi conditionnelle de Per_{t+1} à la date t soit celle de $\mu_t + \sigma_t U$, $\sigma_t > 0$, où U est une variable aléatoire de moyenne nulle, de variance 1 et de fonction de répartition F ; μ_t est alors l'espérance conditionnelle de Per_{t+1} , σ_t son écart type conditionnel et nous avons :

$$P_t[\mu_t + \sigma_t U < VaR_t(\epsilon)] = 1 - \epsilon \text{ ou } P_t[U < \frac{VaR_t(\epsilon) - \mu_t}{\sigma_t}] = 1 - \epsilon, \text{ alors}$$

$$VaR_t(\epsilon) = \mu_t + \sigma_t F^{-1}(1 - \epsilon) \tag{1.8}$$

Donc $VaR_t(\alpha)$ se décompose en une "perte attendue", [4]⁶, μ_t , c'est-à-dire la moyenne conditionnelle des pertes et une "perte inattendue" $\sigma_t F^{-1}(1 - \epsilon)$, aussi appelée "capital économique". Par ailleurs la mesure de risque constituée par $VaR_t(\epsilon)$ est une combinaison linéaire de μ_t et σ_t , le poids $F^{-1}(1 - \epsilon)$ affecté à la volatilité conditionnelle σ_t étant d'autant plus fort que le niveau de risque ϵ est petit et que la loi de fonction de répartition F a une queue droite épaisse. Ce qui fausse l'hypothèse de normalité de la volatilité.

5. Alain Monfort, [2008] "Une Modélisation Séquentielle de la VaR" PP-27

6. Alain Monfort, [2008] "Une Modélisation Séquentielle de la VaR" PP.27

1.2 Analyses du rendement

La méthode repose sur l'hypothèse que la distribution des variations des prix observés à partir de l'historique va se reproduire dans l'avenir. La mesure de risque peut prendre diverses formes, telles que la variation de prix absolue ou la variation de prix relative qui est le rendement. La dernière permet à un temps précis d'avoir facilement le pourcentage de variation qui est facile à interpréter.

1.2.1 Rendement d'un actif

Soient les actifs $i, i = 1, \dots, n$ à la date t , de prix $p_{i,t}$ et $p_{i,t+1}$ à la date $t + 1$.

Le rendement de l'actif i noté $R_{i,t}$ est défini par :

$$R_{i,t+1} = \frac{p_{i,t+1} - p_{i,t}}{p_{i,t}} = \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} - 1.$$

A la date t , le rendement brut de l'actif i est inconnu et aléatoire. En effet :

$$\frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} = 1 + R_{i,t+1}.$$

Pour les actifs sans risque, $i = 0$, $p_{0,t}$ est connu en t donc déterministe et nous avons :

$$R_{0,t+1} = \frac{p_{0,t+1}}{p_{0,t}} - 1.$$

Pour les actifs risqués, le rendement net de l'actif risqué i est :

$$R_{i,t+1}^N = R_{i,t+1} - R_{0,t+1}, i = 1, \dots, n.$$

1.2.2 Rendement d'un portefeuille

Un portefeuille est une pondération des actifs en volume (a_i est le nombre d'unités d'actifs i (quantité) dans le portefeuille qui est supérieur ou égal à 0 ou inférieur 0) ou en valeur ($\tilde{\alpha}_i$: est la somme consacrée à l'actif i (capitalisation) dans le portefeuille supérieur ou égal à 0 ou inférieur 0).

Pour la pondération en volume (allocation) de portefeuille $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, le prix en t est $\sum_{i=0}^n a_i p_{i,t}$ et en $t+1$ il est $\sum_{i=0}^n a_i p_{i,t+1}$

donc le rendement du portefeuille est :

$$R_{t+1}(a) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p_{i,t+1}}{\sum_{i=0}^n a_i p_{i,t}} - 1 \Leftrightarrow R_{t+1}(a) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i p_{i,t} \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}}}{\sum_{i=0}^n a_i p_{i,t}} - 1 \text{ avec}$$

$\alpha_{i,t} = \frac{a_i p_{i,t}}{\sum_{i=0}^n a_i p_{i,t}}$ Où $\sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} = 1 \Leftrightarrow R_{t+1}(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} R_{i,t+1}$

$\alpha_{i,t}$: part en valeur de i, (supérieur ou égale à 0 ou inférieur 0).

Pour la pondération en valeur de portefeuille $\alpha = (\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ alors

$$a_{i,t} = \frac{\tilde{\alpha}_{i,t}}{p_{i,t}} \quad (1.9)$$

$\tilde{\alpha}_{i,t} = a_{i,t} p_{i,t}$ alors $\alpha_{i,t} = \frac{a_{i,t} p_{i,t}}{\sum_{i=0}^n a_{i,t} p_{i,t}} \Leftrightarrow \alpha_{i,t} = \frac{\tilde{\alpha}_i}{\sum_{i=0}^n \tilde{\alpha}_i} = \alpha_i$ indépendant de t.

$R_{t+1}(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_i R_{i,t+1}$ alors un portefeuille fixé dans le temps en volume a un rendement moyen pondéré des $R_{i,t+1}$ avec des poids variables, $\alpha_{i,t}$. Un portefeuille fixé dans le temps en valeur, avec des parts α_i , $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, a un rendement moyen pondéré des $R_{i,t+1}$ avec des poids fixés α_i . Le rendement net est donc :

$$R_{i,t+1}^N(\alpha_t) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} R_{i,t+1} - R_{0,t+1} \Leftrightarrow R_{i,t+1}^N(\alpha_t) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} (R_{i,t+1} - R_{0,t+1})$$

$$R_p^N(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} R_{i,t+1}^N \quad (1.10)$$

$$E[R_p^N(\alpha)] = E[\sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} R_{i,t+1}^N] = \sum_{i=0}^n E[\alpha_{i,t} R_{i,t+1}^N]$$

$$E[R_p^N(\alpha)] = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} E[R_{i,t+1}^N] \quad (1.11)$$

La valeur du portefeuille en t est :

$$W_t = \sum_{i=0}^n a_{i,t} p_{i,t} = \tilde{\alpha}_{i,t} \text{ et}$$

$$W_{t+1} = \sum_{i=0}^n a_{i,t+1} p_{i,t+1} = \sum_{i=0}^n \tilde{\alpha}_i \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} \text{ or } \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} = 1 + R_{i,t+1} \text{ et } W_t = \sum_{i=0}^n \tilde{\alpha}_i$$

$$\text{Alors } W_{t+1} = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} W_t (1 + R_{i,t+1}) \text{ avec } \alpha_{i,t} = \frac{\tilde{\alpha}_{i,t}}{\sum_{i=0}^n \tilde{\alpha}_{i,t}}$$

$\alpha_{i,t}$ est la part de i en valeur dans le portefeuille et $\sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} = 1$

$$W_{t+1} = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} W_t (1 + R_{0,t+1} + R_{i,t+1}^N) \quad (R_{0,t+1} = 0)$$

$$W_{t+1} = W_t (1 + R_{0,t+1} + \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} R_{i,t+1}^N)$$

$$W_{t+1} = W_t (1 + R_{0,t+1} + R_p^N) \quad (1.12)$$

Exemple illustratif de rendement d'un portefeuille

Soient 100 actions de Michelin au prix unitaire de 60 euros et 200 actions de Carrefour au prix unitaire de 45 euros. Alors, la valeur totale du portefeuille est de 15000 euros

($60 \times 100 + 200 \times 45$). La pondération de chaque titre donne :

Pour les actions Michelin, $\alpha_{M,t} = \frac{100 \times 60}{15000} = 40\%$.

Pour les actions Carrefour, $\alpha_{C,t} = \frac{200 \times 45}{15000} = 60\%$.

Un mois plus tard, le prix de l'action Michelin est de 66 euros et celui de Carrefour de 42.75 euros. La valeur du portefeuille est cette fois-ci de 15150 euros

($66 \times 100 + 200 \times 42.75$).

Le rendement de chaque action est :

$R_1 = \frac{p_{1,t}}{p_{1,t+1}} - 1 = 0.1$ pour l'action Michelin et

$R_2 = \frac{p_{2,t}}{p_{2,t+1}} - 1 = -0.05$ pour l'action Carrefour.

Le rendement du portefeuille est donc :

$R_N(\alpha) = \alpha_{M,t}R_1 + \alpha_{C,t}R_2 = 0.0064$.

1.2.3 La volatilité d'un portefeuille composé de n actions

Soient R_i et R_j deux rendements quelconques, la covariance entre R_i et R_j est donnée par :

$Cov(R_i, R_j) = E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])]$ et l'estimation de cette covariance à partir du rendement historique est :

$$Cov(R_i, R_j) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j).$$

La corrélation entre R_i et R_j est alors :

$Corr(R_i, R_j) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma_{R_i} \sigma_{R_j}}$ où σ_{R_i} est l'écart type du rendement R_i . Donc, dans ce cas, la variance du portefeuille composé de deux titres est :

$$Var(R_p(\alpha)) = Cov(R_p, R_p) = Cov(\alpha_{1,t}R_1 + \alpha_{2,t}R_2, \alpha_{1,t}R_1 + \alpha_{2,t}R_2)$$

$$Var(R_p) = Cov(R_p, R_p) = \alpha_{1,t}^2 Cov(R_1, R_1) + \alpha_{1,t}\alpha_{2,t}Cov(R_1, R_2) + \alpha_{2,t}\alpha_{1,t}Cov(R_2, R_1) + \alpha_{2,t}^2 Cov(R_2, R_2)$$

or, $Cov(R_2, R_1) = Cov(R_1, R_2)$ et $Cov(R_1, R_1) = Var(R_1)$ donc :

$$Var(R_p(\alpha)) = Cov(R_p, R_p) = Cov(\alpha_{1,t}R_1 + \alpha_{2,t}R_2, \alpha_{1,t}R_1 + \alpha_{2,t}R_2).$$

$$Var(R_p(\alpha)) = \alpha_{1,t}^2 Var(R_1) + 2\alpha_{1,t}\alpha_{2,t}Cov(R_1, R_2) + \alpha_{2,t}^2 Var(R_2)$$

$$Var(R_p(\alpha)) = Cov(R_p, R_p) = Cov(\alpha_{1,t}R_1 + \alpha_{2,t}R_2, \alpha_{1,t}R_1 + \alpha_{2,t}R_2).$$

$$Var(R_p) = \alpha_{1,t}^2 Var(R_1) + \alpha_{2,t}^2 Var(R_2) + 2\alpha_{1,t}\alpha_{2,t}\sigma_{R_1}\sigma_{R_2}Corr(R_1, R_2).$$

Et si ces deux rendements ne sont pas corrélés, alors $Corr(R_1, R_2) = 0$, d'où :

$$Var(R_p(\alpha)) = \alpha_{1,t}^2 Var(R_1) + \alpha_{2,t}^2 Var(R_2).$$

La volatilité du portefeuille est : $\sigma_{R_p(\alpha)} = \sqrt{Var(R_p(\alpha))}$.

Nous déduisons facilement le cas du portefeuille à n actions comme suit :

$$Var(R_p^N(\alpha)) = Cov(R_p^N(\alpha), R_p^N(\alpha)) = Cov(\sum_{i=0}^n \alpha_{i,t}R_{i,t+1}^N, R_p^N)$$

$$Var(R_p^N(\alpha)) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t}Cov(R_{i,t+1}^N, R_p^N)$$

$$Var(R_p^N(\alpha)) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t}Cov(R_{i,t+1}^N, \sum_{j=0}^n \alpha_{j,t}R_{j,t+1}^N)$$

$$Var(R_p^N(\alpha)) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} \sum_{j=0}^n \alpha_{j,t}Cov(R_{i,t+1}^N, R_{j,t+1}^N)$$

$$Var(R_p^N(\alpha)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{i,t}\alpha_{j,t}Cov(R_{i,t+1}^N, R_{j,t+1}^N) \quad (1.13)$$

Dans le cas d'un portefeuille équipondérant composé de n actions, nous avons :

$$Var(R_p^N(\alpha)) = \frac{1}{n}(Variance\ moyenne\ des\ titres) + (1 - \frac{1}{n})(Covariance\ moyenne\ des\ titres) \quad (1.14)$$

La variance d'un portefeuille quelconque peut être donnée par :

$$Var(R_p^N(\alpha)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,t}Corr(R_{i,t+1}^N, R_p^N).$$

La volatilité dans ce cas est :

$$\sigma_{R_p(\alpha)} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,t}\sigma_{R_i}Corr(R_{i,t+1}^N, R_p^N) \quad (1.15)$$

où

$\alpha_{i,t}$ est le poids du titre i ;

σ_{R_i} est le risque total du titre i ;

$R_{i,t+1}^N$ est la part du risque du titre i commun au portefeuille p ;

$\alpha_{i,t}\sigma_{R_i}Corr(R_{i,t+1}^N, R_p^N)$ est la contribution du titre i à la volatilité du portefeuille. A noter

que : $\sigma_{R_p(\alpha)} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,t}\sigma_{R_i}Corr(R_{i,t+1}^N, R_p^N) < \sigma_{R_p(\alpha)} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,t}\sigma_{R_i}$

1.3 L'estimation de la VaR pour un portefeuille

Soit $(\tilde{\alpha}_{0t}, \tilde{\alpha}_{1t}, \dots, \tilde{\alpha}_{nt})$ un portefeuille pondéré en valeur ou $(a_{0t}, a_{1t}, \dots, a_{nt})$ un portefeuille pondéré en volume. La valeur du portefeuille en t est :

$$W_t = \sum_{i=0}^n \tilde{\alpha}_{i,t} = \sum_{i=0}^n a_{i,t} p_{i,t} \text{ et}$$

$$\text{en } t+1 : W_{t+1} = \sum_{i=0}^n a_{i,t} p_{i,t+1} = \sum_{i=0}^n \frac{\tilde{\alpha}_{i,t}}{p_{i,t}} p_{i,t+1}$$

$$W_{t+1} = \sum_{i=0}^n \tilde{\alpha}_{i,t} \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} = W_t \sum_{i=0}^n \alpha_{it} \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}}$$

$$(\sum_{i=0}^n \alpha_{it} = 1)$$

En t, nous voulons constituer une réserve Res_t telle que

$$Pr([W_{t+1} + Res_t(1 + R_{0,t+1})] < 0) = \epsilon \text{ petit ou de façon équivalente}$$

$$Pr[W_{t+1} - W_t(1 + R_{0,t+1}) < -Res_t(1 + R_{0,t+1}) - W_t(1 + R_{0,t+1})] = \epsilon$$

$$Pr([W_{t+1} - W_t(1 + R_{0,t+1}) < -(1 + R_{0,t+1})(Res_t + W_t)] < 0) = \epsilon$$

et on a $VaR_t = Res_t + W_t$

$$\implies Pr([W_{t+1} - W_t(1 + R_{0,t+1}) < -(1 + R_{0,t+1})VaR_t] < 0) = \epsilon$$

$$Pr(W_t - \frac{W_{t+1}}{1+R_{0,t+1}} > VaR_t) = \epsilon$$

Où

$$Per_t = W_t - \frac{W_{t+1}}{1 + R_{0,t+1}} \quad (1.16)$$

est la perte actualisée et nous avons $Pr[Per_t > VaR_t] = \epsilon$.

Nous pouvons exprimer cette perte actualisée en fonction de $R_{i,t+1}^N$ et nous avons :

$$W_{t+1} = W_t \sum_{i=0}^n \alpha_{it} \frac{p_{i,t+1}}{p_{i,t}} \Leftrightarrow W_{t+1} = W_t \sum_{i=0}^n \alpha_{it} (1 + R_{i,t+1}) \text{ d'après (1.12).}$$

$$W_{t+1} = W_t \sum_{i=0}^n \alpha_{it} (1 + R_{0,t+1} + R_{i,t+1}^N) \Leftrightarrow W_{t+1} = W_t (1 + R_{0,t+1}) + W_t \sum_{i=0}^n \alpha_{it} R_{i,t+1}^N$$

alors nous trouvons que :

$$Per_t = W_t - \frac{W_t(1+R_{0,t+1}) + W_t \sum_{i=0}^n \alpha_{it} R_{i,t+1}^N}{1+R_{0,t+1}} \text{ et donc :}$$

$$Per_t = -\frac{W_t}{1+R_{0,t+1}} \sum_{i=0}^n \alpha_{it} R_{i,t+1}^N \Leftrightarrow$$

$$Per_t = -\frac{W_t}{1 + R_{0,t+1}} R_p^N(\alpha) \quad \alpha = (\alpha_{1t}, \dots, \alpha_{nt}) \quad (1.17)$$

$R_p^N(\alpha) = (\sum_{i=0}^n \alpha_{it} R_{i,t+1}^N)$ et l'expression de la VaR_t est :

$$Pr[\frac{-W_t}{1+R_{0,t+1}} R_p^N(\alpha) > VaR_t] = \epsilon \Leftrightarrow Pr[\frac{W_t}{1+R_{0,t+1}} R_p^N(\alpha) < -VaR_t] = \epsilon$$

$Pr[R_p^N(\alpha) < -\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{W_t}] = \epsilon$ si $W_t > 0$, sinon nous prenons

$$\tilde{\alpha} = W_t \alpha \quad (1.18)$$

$Pr[\frac{R_p^N(\alpha) - E[R_p^N(\alpha)]}{\sigma_{R_p^N(\alpha)}} < \frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{W_t \sigma_{R_p^N(\alpha)}} - \frac{E[R_p^N(\alpha)]}{\sigma_{R_p^N(\alpha)}}] = \epsilon$ et d'après la définition (1.4) et nous avons :

$\implies \frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{W_t \sigma_{R_p^N(\alpha)}} - \frac{E[R_p^N(\alpha)]}{\sigma_{R_p^N(\alpha)}} = \Phi^{-1}(\epsilon) = -\Phi^{-1}(1 - \epsilon)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$VaR_t = \frac{W_t \sigma_{R_p^N(\alpha)}}{1+R_{0,t+1}} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - \frac{E[R_p^N(\alpha)] W_t}{1+R_{0,t+1}}$$

$$VaR_t = \frac{W_t}{1 + R_{0,t+1}} [\sigma_{R_p^N(\alpha)} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - E[R_p^N(\alpha)]] \quad (1.19)$$

Si $W_t < 0$ nous prenons $\tilde{\alpha} = W_t \alpha$ donc, nous avons : $R_p^N(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} R_{i,t+1}^N$ alors

$R_p^N(\tilde{\alpha}) = W_t \sum_{i=0}^n \alpha_{i,t} R_{i,t+1}^N$ implique que $R_p^N(\tilde{\alpha}) = W_t R_p^N(\alpha)$ et alors

$E[R_p^N(\tilde{\alpha})] = W_t E[R_p^N(\alpha)]$ et

$Var[R_p^N(\tilde{\alpha})] = W_t^2 Var[R_p^N(\alpha)]$ implique que $\sigma_{R_p^N(\tilde{\alpha})} = -W_t \sigma_{R_p^N(\alpha)}$

$VaR_t = \frac{1}{1+R_{0,t+1}} [\sigma_{R_p^N(\tilde{\alpha})} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - E[R_p^N(\tilde{\alpha})]]$

$VaR_t = \frac{1}{1+R_{0,t+1}} [(-W_t) \sigma_{R_p^N(\alpha)} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - W_t E[R_p^N(\alpha)]]$

Au total

$$VaR_t = \frac{W_t}{1 + R_{0,t+1}} [sign(W_t) \sigma_{R_p^N(\alpha)} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - E[R_p^N(\alpha)]] \quad (1.20)$$

Estimation de la VaR_t ($W_t > 0$) :

$VaR_t = \frac{W_t}{1+R_{0,t+1}} [\hat{\sigma}_{R_p^N(\alpha)} \Phi^{-1}(1 - \alpha) - E[R_p^N(\alpha)]]$

$$\hat{Va}R_t = \frac{W_t}{1 + R_{0,t+1}} [\hat{\sigma}_{R_p^N(\alpha)} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - E[R_p^N(\alpha)]] \quad (1.21)$$

Cette méthode d'estimation de la VaR présente ces avantages de rapidité d'obtention des résultats, la mise à jour possible des volatilités et des corrélations : c'est une méthode plus adaptée pour les portefeuilles d'investissements. Elle est développée par J.P.Morgan (Riskmetrics) par la VaR des banques et est reconnue par sa rapidité de calcul.

Le problème est basé sur l'hypothèse de normalité des variables de marché (dans l'approche simplifiée) et son inadaptation aux portefeuilles de marché delta-neutre non linéaires. L'es-

estimation de la matrice (volatilités et corrélations) est non stable. De plus, cette méthode ne traite que la partie "linéaire" du risque et est inadaptée aux produits connexes (options en particulier).

1.3.1 Exemple illustratif (Bons du trésor) du calcul de la VaR d'un portefeuille

Nous reprenons l'exemple du cas des bons de trésor en considérant le portefeuille par ses actifs et nous avons le tableau suivant qui nous permet de calculer la VaR.

Investisseurs	O_i	r_i	a_i	$R_{i,t}$	R_p	W_t
Banque A	5000	0.05	0.005576037	1.41906755	0.00817435	28.8018433
Banque B	500	0.0525	0.00060484	1.4441198	0.00087346	0.30241935
Banque C	2000	0.055	0.00253456	1.46961432	0.00372483	5.06912442
Banque D	5000	0.06	0.00691244	1.52196156	0.01052047	34.562212
Banque A	4000	0.06	0.00552995	1.52196156	0.00841638	22.1198157
Banque D	10000	0.061	0.0140553	1.53265266	0.02154189	140.552995
Banque E	2000	0.0625	0.00288018	1.5488303	0.00446092	5.76036866
Banque A-Tiers	2000	0.065	0.00299539	1.57617338	0.00472126	5.99078341
Banque B-Tiers	3000	0.065	0.00449309	1.57617338	0.00708189	13.4792627
Banque E	1000	0.069	0.00158986	1.62092991	0.00257705	1.58986175
Banque F-Tiers	3000	0.07	0.00483871	1.63231622	0.0078983	14.516129
Banque G	4000	0.075	0.00691244	1.69045885	0.0116852	27.6497696
Banque H	1000	0.075	0.00172811	1.69045885	0.0029213	1.7281106
Banque I	900	0.08	0.00165899	1.7506725	0.00290434	1.49308756

source Document de procédures d'émission de Bons de trésor et Obligations BCEAO

Dans le présent cas, $E(R_p) = 0.0069644$, $\sigma(R_p) = 0.00509107$, l'échéance $T=7$, la valeur $W_t = 303.615783$ $\epsilon = 0.01$ donc $\Phi(0.99) = 0.013$ et en la formule 1.21, la VaR est : $VaR = -2.09440814$. Soit une perte de 2.09 millions FCFA. Au niveau de la BCEAO pour assurer une meilleure lisibilité du marché de titres de la dette publique, notamment la formation d'une courbe de taux, six maturités ont été retenues pour les bons du trésor. Il s'agit des maturités en nombre de jours (Le nombre de jours se calcule avec dates de valeur et d'échéance incluses.) ci-après : 7, 28, 91, 182, 364, 728 correspondant respectivement à une (1) semaine, un (1) mois, trois (3) mois, six (6) mois, un an (1) et deux (2) ans. Et après calcul de la VaR (en millions FCFA) aux différentes maturités, nous obtenons le tableau suivant :

Maturités T (en jour)	7	28	91	182	364	728
VaR	-2.09	-8.087	-540.28	-339285.619	$-3.625 \cdot 10^{11}$	$-7.7228 \cdot 10^{23}$

TABLE 1.2 – calcul de la VaR d'un portefeuille pour chaque maturité

1.4 La VaR pour le rendement à facteurs exogènes et APT

A supposer que le rendement est lié à d'autres facteurs tels que

$$R_{i,t}^N = C_i + \sum_{j=1}^k \beta_{i,j} X_{j,t} + u_{i,t}$$

$\begin{pmatrix} R_{i,t}^N \\ X_t \end{pmatrix}$ est indépendant et identiquement distribué tel que $R_t/X_t \approx N(C + BX_t, \Sigma)$

$\iff u_t/X_t$ suit la loi normale $N(0, \Sigma)$,

u_t et X_t sont indépendantes avec $Cov(u_{i,t}, v_{l,t}) = \Sigma_{i,l}$.

$X_{j,t} : j = 1, \dots, k$ facteurs ;

β_{ij} : béta de l'actif i vis à vis du facteur j , ou sensibilité ("factor loading") ;

$u_{i,t}$: erreur idiosyncratique.

Il est possible d'avoir deux grands types de modèles à facteurs observables ; pour faciliter les calculs, il faut les hypothèses suivantes :

F_1 : Σ diagonale de termes diagonaux $\sigma_i^2 > 0$;

F_2 : Σ scalaire de termes diagonaux $\sigma^2 > 0$;

F_3 : Σ nulle.

En absence d'opportunité d'arbitrage, le rendement est nul.

Démonstration :

Le principe d'AOA est que, il n'est pas possible de constituer, en t , un portefeuille de coût nul tel que, en $t+1$, sa valeur soit positive ou nulle et strictement positive avec une probabilité non nulle c'est-à-dire si deux actifs sont sans risque, ils ont le même rendement ;

sinon, supposer $R_{0,t+1}^1 > R_{0,t+1}^2$ et les prix $p_{0,t}^1 = p_{0,t}^2$,

Considère le portefeuille (1,-1) ; de coût nul, la valeur en $t+1$ est

$$R_{0,t+1}^1 - R_{0,t+1}^2 > 0 \text{ qui est impossible.}$$

En considérant alors un modèle à facteurs F_3 c'est-à-dire $R_{i,t+1}^N = C + BX_{t+1}$.

A Supposer que $E(X_{t+1}) = 0$ (et même $Var(X_{t+1}) = Id_k$, non nécessaire ici)

$$R_{i,t+1}^N = C + BX_{t+1} \text{ avec } B : (n \times k), \quad k < n.$$

Soit (α) un portefeuille d'actifs risqués, supposer que $\alpha'B = 0$ alors

$$\alpha'R_{i,t+1}^N = \alpha'C \text{ et } \alpha'C = 0 \text{ car } (\alpha) \text{ est sans risque, donc de même}$$

rendement net que le sans risque de référence, d'où de rendement net nul.

Donc, si $\alpha'B = 0 \implies \alpha'C = 0$ ou de façon équivalente :

si $\alpha \in (Ker B')$ alors $C \perp \alpha$ ou encore :

$$C \in (Ker B')^\perp = Im B$$

Pour conclure que C s'écrit de la façon suivante :

$$C = B\lambda \text{ et } E(R_{i,t+1}^N) = B\lambda$$

$$E(R_{t+1}) = R_{0,t+1}e + B\lambda \Leftrightarrow$$

$$E(R_{i,t+1}) = R_{0,t+1} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \beta_{ij}$$

où $E(R_{i,t+1})$ est le rendement sans risque ;

$R_{0,t+1}$ est le prix du risque associé au facteur j ;

$\sum_{j=1}^k \lambda_j \beta_{ij}$ est le risque i lié au facteur j.

Sans certaines hypothèses, ce résultat se généralise asymptotiquement ($n \rightarrow \infty$)

au modèle F_1 (avec des facteurs observables ou non) et a fortiori F_2 .

Le modèle APT (Asset Pricing Théory) est :

$$R_{i,t+1}^N = B\lambda + BX_{t+1} + u_{t+1} \text{ avec } Var(u_{t+1}) \text{ diagonale.}$$

Il est possible de généraliser le CAPM (Capital Asset Pricing Model) qui est un modèle à un facteur par :

$$R_{i,t+1}^N = \beta R_{M,t+1}^N + u_{t+1} \text{ où } R_{M,t+1}^N \text{ est le rendement net du portefeuille du marché.}$$

En notant $\mu_M = E(R_{M,t}^N)$ le rendement net moyen du portefeuille du marché, il donne :

$$R_{t+1}^N = \mu_M \beta + \beta(R_{M,t+1}^N - \mu_M) + u_{t+1} \text{ ici}$$

$$X_{t+1} = R_{M,t+1}^N - \mu_M, B = \beta \text{ et } \lambda = \mu_M$$

Pour le cas des modèles à facteur observables, nous obtenons :

$$R_{i,t+1}^N = C + BX_{t+1} + u_{t+1} \text{ où } u_{t+1} \text{ suit la loi normale } N(0, \Sigma) \text{ avec}$$

$B = [b_1, \dots, b_n]'$. C'est un modèle linéaire multivarié avec les mêmes variables explicatives

dans toutes les équations :

$$R_{i,t+1}^N = C_i + X_{t+1}' b_i + u_{i,t+1}$$

R_{t+1}^N suit la loi normale $N(C + BX_{t+1}, \Sigma)$ et cela donne :

$$Pr[\alpha'R_{t+1}^N < -\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{W_t}] = \epsilon$$

$$Pr[\alpha'(C + BX_{t+1} + u_{t+1}) < -\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{W_t}] = \epsilon$$

$$Pr[\alpha' u_{t+1} < -\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{W_t} - \alpha'(C + BX_{t+1})] = \epsilon \text{ et}$$

$\alpha' u_{t+1}$ suit la loi normale $N(0, \alpha' \Sigma \alpha)$

$$Pr[\frac{\alpha' u_{t+1}}{(\alpha' \Sigma \alpha)^{1/2}} < -\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{(\alpha' \Sigma \alpha)^{1/2} W_t} - \frac{\alpha'(C + BX_{t+1})}{(\alpha' \Sigma \alpha)^{1/2}}] = \alpha \text{ d'après la définition (1.4)}$$

$$\iff -\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{(\alpha' \Sigma \alpha)^{1/2} W_t} - \frac{\alpha'(C + BX_{t+1})}{(\alpha' \Sigma \alpha)^{1/2}} = \Phi^{-1}(\epsilon) = -\Phi^{-1}(1 - \epsilon) \text{ alors}$$

$$VaR_t = \frac{(\alpha' \Sigma \alpha)^{1/2} W_t}{1 + R_{0,t+1}} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - \frac{\alpha'(C + BX_{t+1})}{1 + R_{0,t+1}} \quad (1.22)$$

Pour le cas des modèles inobservables, nous avons :

$$R_{t+1}^N = C + BF_{t+1} + u_{t+1}$$

$\begin{pmatrix} R_{t+1}^N \\ F_{t+1} \end{pmatrix}$ est i.i.d et $E(u_{t+1}) = 0$ et $Cov(F_{t+1}, u_{t+1}) = 0$, F_{t+1} est de taille k ,

$Var(u_{t+1}) = D$ diagonale, covariance captée par les facteurs.

Supposer que $E(F_{t+1}) = 0$ car si $E(F_{t+1}) = m$, remplacer F_{t+1} par $F_{t+1} - m$ et C par $C + Bm$ et $Var(F_{t+1}) = Id_k$, car si $Var(F_{t+1}) = Q$, remplacer F_{t+1} par $Q^{-1/2} F_{t+1}$ et B par $BQ^{1/2}$.

R_{t+1}^N suit $N(C, BB' + D) \implies \alpha' R_{t+1}^N$ suit la loi normale $N(\alpha' C, \alpha'(BB' + D)\alpha)$

Donc

$$Pr[\alpha' R_{t+1}^N < -\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{W_t}] = \epsilon$$

$$Pr[\frac{\alpha' R_{t+1}^N - \alpha' C}{(\alpha'(BB' + D)\alpha)^{1/2}} < -\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{(\alpha'(BB' + D)\alpha)^{1/2} W_t} - \frac{\alpha' C}{(\alpha'(BB' + D)\alpha)^{1/2}}] = \alpha \text{ la définition (1.4) nous}$$

donne :

$$-\frac{(1+R_{0,t+1})VaR_t}{(\alpha'(BB' + D)\alpha)^{1/2} W_t} - \frac{\alpha' C}{(\alpha'(BB' + D)\alpha)^{1/2}} = \Phi^{-1}(1 - \epsilon)$$

$$VaR_t = \frac{(\alpha'(BB' + D)\alpha)^{1/2}}{1 + R_{0,t+1}} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - \frac{\alpha' C}{1 + R_{0,t+1}} \quad (1.23)$$

1.5 La VaR pour le rendement Auto Régressif

Supposer maintenant que le rendement est auto-régressif, c'est-à-dire, il existe au sein du portefeuille des liaisons dynamiques à l'intérieur des rendements qui forment un groupe de variables interdépendantes. Dans ce cas, notre modèle est celui de la VAR (Vector Auto Regressive). Un modèle VAR est un outil économétrique particulièrement adapté pour mesurer et utilisé en simulation, l'ensemble des liaisons dynamiques à l'intérieur d'un groupe de variables données.

Toutes les variables sont initialement considérées comme étant potentiellement endogènes. En règle générale, la modélisation VAR stationnaire "Standard" consiste à modéliser un vecteur de variables stationnaires, à partir de sa propre histoire et chaque variable est donc expliquée par le passé de l'ensemble des variables.

La forme Standard de ce type de modèle est caractérisée par les points suivants :

- les variables à modéliser sont toutes stationnaires ;
- les variables à modéliser sont toutes potentiellement endogènes ;
- le nombre de décalages associés à chaque variable dans chaque équation est identique.

1.5.1 Présentation du modèle

Enoncer d'abord la théorie du modèle VAR,[48]⁷, par la suite, nous établissons un modèle VAR dont le rendement fait partie des variables et qui nous permettra d'avoir un modèle spécifique pour le rendement pour revenir illustrer nos modèles précédents. Notre modèle est un vecteur sous forme d'un processus VAR(p) qui s'écrit :

$$R_t^N = C + \Phi_1 R_{t-1}^N + \Phi_2 R_{t-2}^N + \dots + \Phi_p R_{t-p}^N + u_t, t = 1, \dots, T$$

$R_t^N = (R_{1,t}^N, R_{2,t}^N, \dots, R_{n,t}^N)'$ un vecteur stationnaire de dimension $(n \times n)$.

$u_t = (u_{1,t}, \dots, u_{n,t})'$, $u_t \approx iidN(0, \Sigma)$ où Σ est une matrice diagonale, C matrice de dimension $(n \times 1)$ et Φ_i matrice de dimension $(n \times n)$ pour $i = 1, \dots, p$.

L'hypothèse que Σ est une matrice diagonale est cruciale dans la modélisation VAR et dans l'utilisation du modèle VAR en simulation (calcul des fonctions de réponse et décomposition de la variance de l'erreur de prévision).

7. Regis Bourbonnais "Économétrie " 4^e édition, pp-257-298

Une autre écriture fréquemment rencontrée de ce modèle VAR est la suivante :

$$\Phi(L)R_t^N = C + u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (1.24)$$

où $\Phi(L) = (I - \Phi L - \dots - \Phi L^p)$ est un polynôme en L caractérisé par $L^k R_t^N = R_{t-k}^N$.

Enfin, dans le cas où toutes les variables sont centrées, l'écriture du modèle VAR se ramène à

$$\Phi(L)R_t^N = u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (1.25)$$

Le terme de la droite de ce modèle représente le mécanisme supposé avoir engendré le vecteur R_t^N . Ce mécanisme est purement dynamique. Or, les éléments du vecteur R_t^N étant stationnaires, il est nécessaire que les mécanismes dynamiques définis par ce terme de droite génèrent effectivement une dynamique stationnaire.

Pour que cela soit assuré, les racines en L du polynôme caractéristique $(I - \Phi L - \dots - \Phi L^p)$ doivent être de module supérieur à l'unité (hors du cercle unité dans le jargon consacré).

Le vecteur u_t de taille $(n \times 1)$ est appelé vecteur des innovations de R_t . Le concept d'innovation joue un rôle clef dans le modèle et en simulation.

Pour saisir facilement ce concept, il suffit de réécrire tout d'abord le modèle précédent sous la forme suivante :

$R_t^N - \Phi_1 R_{t-1}^N + \Phi_2 R_{t-2}^N + \dots + \Phi_p R_{t-p}^N = u_t, t = 1, \dots, T$. Or, d'après l'équation (1.25), la meilleure prévision linéaire du vecteur R_t^N qu'il est possible de réaliser en (t-1) est donnée par :

$$R_{t,t-1}^{prvu} = E(\Phi_1 R_{t-1}^N + \Phi_2 R_{t-2}^N + \dots + \Phi_p R_{t-p}^N / inf_{t-1}) \quad R_{t,t-1}^{prvu} = \Phi_1 R_{t-1}^N + \Phi_2 R_{t-2}^N + \dots + \Phi_p R_{t-p}^N$$

où $E(. / inf_{t-1})$ représente l'opérateur "espérance conditionnelle à l'information disponible à la date (t-1)". Pour l'économiste, ce concept de prévision est à rapprocher du concept d'anticipations rationnelles.

Le vecteur u_t peut donc être finalement réécrit sous la forme :

$$u_t = R_t^N - R_{t,t-1}^{prvu} \quad (1.26)$$

soit encore au niveau de chacun des éléments de u_t :

$$u_t^j = R_{j,t}^N - E(R_{j,t}^N / \text{inf}_{t-1}), j = 1, \dots, n.$$

Pour apercevoir ainsi que si le modèle (1.26) est un "vrai modèle" ayant engendré le vecteur R_t^N (cette hypothèse est faite lors de toute modélisation et n'est pas spécifique aux VAR), le vecteur u_t représente la part de R_t^N qui n'était pas prévisible à la date précédente (t-1). En considérant que l'économie (autrement dit ici R_t^N) subit à chaque date des chocs aléatoires ou des "innovations" imprévisibles qui font dévier la valeur que prend effectivement le vecteur de R_t^N qui était prévisible en (t-1) pour la date t, cela permet d'apercevoir immédiatement sur l'écriture (1.26) que les chocs aléatoires survenant à la date t sont donnés par u_t . Donc u_t sera appelé le vecteur des innovations du vecteur R_t^N à la date t ou bien encore le vecteur des chocs d'innovations affectant R_t^N à la date t (ou affectant R_t^N plus simplement).

Ces innovations représentent donc les chocs affectant l'économie à chaque date. Nous verrons par la suite qu'elles sont "considérées" comme des variables exogènes du modèle VAR et seront utilisées comme telles en simulation.

1.5.2 Estimation d'un modèle VAR standard

Dans le cas d'un vecteur R_t^N stationnaire et d'un modèle VAR(p) usuel où chaque variable intervient dans chaque équation avec le même nombre de décalages, l'inférence classique s'applique et le modèle peut être convenablement estimé à l'aide des Moindres Carrés Ordinaires sur chaque équation séparément.

Le modèle est tout d'abord réécrit sous une forme plus proche de celle généralement retenue en économétrie classique :

Soit Y_t le vecteur de dimension $(np \times 1)$ et Π' la matrice de dimension $(n \times np)$ définie par :

$$Y_t = (R_{t-1}^N, \dots, R_{t-p}^N)' \text{ et } \Pi' = (\Phi_1, \dots, \Phi_p).$$

Le modèle (1.25) peut alors être réécrit selon :

$$R_t^N = \Pi' Y_t + u_t$$

où la matrice Π' contient l'ensemble des matrices $\Phi_i, i = 1, \dots, p$. Sous l'hypothèse $u_t \approx i.i.dN(0, \Sigma)$, la distribution du vecteur R_t conditionnel à son histoire (R_{t-k}^N pour $i = 1, 2, \dots$

) est donnée par :

$$(R_t^N / R_{t-1}^N, R_{t-2}^N, \dots) \approx N(\Pi' Y_t, \Sigma).$$

La densité conditionnelle de l'observation de la période t (pour t quelconque) est alors :

$$f(R_t^N / R_{t-1}^N, R_{t-2}^N, \dots) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma^{-1}|^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (R_t^N - \Pi' Y_t)' \Sigma^{-1} (R_t^N - \Pi' Y_t) \right\}.$$

Pour donc en déduire la vraisemblance de l'échantillon suivante :

$$f(R_1^N, R_2^N, \dots, R_T^N / R_0, \dots, R_{-p+1}^N) = \prod_{t=1}^T f(R_t^N / R_{t-1}^N, \dots)$$

Il vient en suite pour la Log-vraisemblance de l'échantillon :

$$L(\theta) = -\frac{nT}{2} \text{Log}(2\pi) + \frac{T}{2} \text{Log}(|\Sigma^{-1}|) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [(R_t^N - \Pi' Y_t)' \Sigma^{-1} (R_t^N - \Pi' Y_t)]$$

où $\theta = (\Pi', \Sigma)$ représente l'ensemble des paramètres du modèle.

L'estimateur du maximum de vraisemblance de Π' qui est obtenu par application des MCO aboutit alors à :

$$\hat{\Pi}' = [\sum_{t=1}^T R_t^N Y_t'] [\sum_{t=1}^T R_t^N Y_t']^{-1}$$

Notons que les estimateurs des éléments de la j^{me} ligne de la matrice Π' sont obtenus en régressant $R_{j,t}^N$ sur Y_t .

$$\hat{\pi}'_j = [\sum_{t=1}^T R_{j,t}^N Y_t'] [\sum_{t=1}^T R_t^N Y_t']^{-1}$$

L'utilisation de l'estimateur $\hat{\Pi}'$ de la matrice Π' permet ensuite d'obtenir l'estimateur de la matrice de variance-covariance Σ . En effet, la valeur estimée du vecteur des innovations est donnée par :

$$u_t = R_t^N - \hat{\Pi}' Y_t.$$

par définition, la matrice $\hat{\Sigma}$ correspond à la variance estimée de l'innovation de la variable $R_{j,t}^N$:

$$\hat{\sigma}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{u}_{t,i})^2$$

alors, l'élément (i,j) de la matrice $\hat{\Sigma}$ correspond à la covariance estimée des innovations des variables $R_{i,t}^N$ et $R_{j,t}^N$:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_{t,i} \hat{u}_{t,j}$$

D'après (1.22), la VaR est donnée par :

$$VaR_t = \frac{\Sigma^{1/2} W_t}{1 + R_{0,t+1}} \Phi^{-1}(1 - \epsilon) - \frac{\Pi' Y_t}{1 + R_{0,t+1}} \quad (1.27)$$

D'un point de vue théorique, la présentation de la modélisation VAR standard ne présente donc aucune difficulté particulière pour l'économètre classique une fois que le nombre de décalage p à utiliser est connu.

1.5.3 Estimation du nombre de décalages p

La théorie économique ne donne que peu d'informations sur le nombre de décalages p à retenir dans la modélisation d'un vecteur R_t^N sous forme VAR(p). De plus, il n'existe aucune procédure établie pour déterminer le nombre de décalages adéquats.

Tout au plus, le nombre de décalages à retenir est celui qui permet de modéliser "convenablement" le vecteur R_t^N et d'aboutir à un vecteur d'innovations (qui est en partie non modélisée de R_t^N) de type bruit blanc.

Si cette remarque de bon sens semble déjà suggérée une méthode pour déterminer le nombre de décalages, il faut également remarquer que le nombre de paramètres à estimer pour un modèle VAR est égal à pn^2 (ou (pn^2+n) , en prenant en compte les termes constants contenus dans le vecteur C) et augmenté de n^2 à chaque nouveau décalage.

Un nombre trop élevé de décalages risque donc d'épuiser rapidement les degrés de liberté.

A partir de ces deux remarques, trois méthodes sont plus particulièrement retenues pour estimer le nombre de décalages p dans la pratique des modèles VAR :

- une méthode basée sur l'examen des propriétés statistiques des innovations du modèle ;
- une méthode basée sur l'utilisation du critère d'informations ;
- une méthode basée sur des tests de nullité, emboîtés sur les paramètres associés au dernier décalage du modèle.

Nous allons considérer la méthode d'estimation du nombre de décalages à partir du critère d'informations AIC (Akaike Information Criterion).

Cette méthode consiste à déterminer le nombre de décalages utilisant un critère d'informations. Les critères d'informations sont basés sur l'idée selon laquelle l'ajout d'une variable explicative (ou d'un ensemble de variables explicatives) à un modèle existant aboutit, d'un côté, à une amélioration plus ou moins importante de la part expliquée par des variables modélisées (apport informatif) et d'un autre côté à une réduction des degrés de liberté pour l'estimation. Cette réduction des degrés de liberté est considérée comme une pénalité liée à l'incorporation d'une variable explicative additionnelle.

La valeur du critère d'informations peut être calculée pour chaque modèle estimé. Dans le cas des modèles VAR, la procédure pour déterminer le nombre de décalages consiste

donc à estimer un modèle d'ordre minimal ($p=1$) à en calculer la valeur prise par le critère d'information.

En estimant le modèle VAR d'ordre immédiatement supérieur ($p=2$) et en recalculant la valeur correspondante du critère d'information, nous décidons de conserver le décalage $p=2$, si l'apport informatif de second décalage est supérieur au coût qu'il occasionne en termes de réduction des degrés de liberté.

Au cas où le décalage $p=2$ serait conservé, la procédure est prolongée en estimant le modèle VAR(3) et en comparant le critère d'information obtenu pour ce modèle avec le précédent VAR(2). Le nombre de décalages est ainsi systématiquement augmenté, tant que son apport informatif est supérieur au coût qu'il occasionne. Lorsque ce dernier est supérieur au gain informatif, la procédure s'arrête et le décalage précédent qui apparaît est "optimal".

En pratique, il suffit donc de déterminer "à priori" un nombre de décalages maximal P_{max} et d'estimer successivement les modèles VAR(p) pour $p = 1, \dots, P_{max}$. Pour chacun d'eux, la valeur du critère d'information correspondante est calculée et est notée CRIT(p) pour $p = 1, \dots, P_{max}$.

Le nombre de décalages optimal \hat{p} est choisi en tant que valeur maximale du critère d'information (ou minimale selon la forme du critère retenu). $\hat{p} = \underbrace{\max}_{p=1, \dots, P_{max}}$ ou $\underbrace{\min}_{p=1, \dots, P_{max}}$ CRIT(p)

L'expression correspondant à ce critère est la suivante : $Log[det\Sigma(p)] + \frac{2pn^2}{T}$.

La simulation d'un modèle VAR fait immédiatement surgir une première difficulté pour l'économètre classique. En effet, celle d'un modèle structurel repose généralement sur l'analyse des effets statiques et dynamiques d'une variation d'une ou de plusieurs variables exogènes sur les variables endogènes du modèle. Or, un modèle VAR standard ne contient pas de variable exogène.

Pour simuler un modèle VAR, il est nécessaire de considérer les innovations comme des variables exogènes et d'analyser les effets des variations d'une ou de plusieurs innovations (c'est un "choc d'innovation") sur les variables du modèle.

Simuler le modèle revient, en fait, à tracer les effets dynamiques des chocs d'innovations de chacune des variables (ou de certaines d'entre elles uniquement) sur elles du vecteur R_t (ou sur certaines d'entre elles). Ces effets multiplicateurs dynamiques sont les fonctions

de réponse du modèle VAR,[48]⁸.

Les fonctions de réponse sont, généralement, présentées sous la forme d'un tracé permettant de visualiser simplement les effets instantanés et dynamiques associées aux chocs d'innovations sur les variables du vecteur R_t^N .

Décomposition de la variance des erreurs de prévision du modèle

Soit $R_{i,t}^N$ la valeur de l'élément i de R_t^N et soit $E_t(R_{i,t+k}^N)$ l'espérance conditionnelle de la valeur de $R_{i,t+k}^N$ réalisée à la date t . En d'autres termes, $E_t(R_{i,t+k}^N)$ représente la prévision linéaire de $R_{i,t+k}^N$ réalisé à la date t .

Soit $Var(R_{i,t+k}^N - E_t(R_{i,t+k}^N))$ la variance de l'erreur de prévision à k périodes en avant. Il est possible de calculer la part de $Var(R_{i,t+k}^N - E_t(R_{i,t+k}^N))$ qui est due au j^{me} choc du modèle VAR (soit $u_{j,t}$). Ce calcul correspond à la décomposition de la variance de l'erreur de prévision du modèle.

Pour faire ce calcul simplement, nous rappelons rapidement un résultat de calcul matriciel,[48]⁹.

Soit $\Sigma = (\sigma_{ij})$ avec $i, j = 1, \dots, n$, une matrice diagonale de dimension (n,n) (nous avons donc $\sigma_{ij} \neq 0$ pour $i=j$ et $\sigma_{ij} = 0$ pour $i \neq j$).

Soit $A = (a_{ij})$ avec $i, j = 1, \dots, n$ une matrice de dimension (n,n) et soit A_i la i^{me} colonne de la matrice A . Un résultat usuel du calcul matriciel permet de montrer que si la matrice Σ est diagonale, nous avons :

$$A\Sigma A' = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii} A_i A_i' \quad (1.28)$$

où $A\Sigma A'$ est une matrice Positive Définie Symétrique (PDS) de dimension $(n \times n)$. A est une matrice triangulaire inférieure ou supérieure mais comportant 1 sur la diagonale principale.

8. Regis Bourbonnais "Économétrie" 4^e édition, pp-267-270

9. Regis Bourbonnais "Économétrie" 4^e édition, pp-270-271

Chapitre 2

L'analyse de la VaR par simulation

2.1 Simulation de crise

A rappeler que les simulations de crise font partie des normes générales d'acceptation de la méthode interne.

C'est donc un point important dans la mise en place d'un modèle interne. Elles font, d'ailleurs, l'objet d'un paragraphe dans le texte de la Commission Bancaire de la BCE. Sept points sont alors évoqués :

1. "Les établissements... doivent se doter d'un programme de simulations de crise, à la fois rigoureux et complet.

Ces simulations, qui permettent d'identifier les événements susceptibles d'avoir une forte incidence, constituent un élément clé de l'évaluation du niveau des risques ;

2. Elles doivent couvrir toute la gamme des facteurs, y compris les événements à probabilité réduite ;

Elles doivent aussi rendre compte de l'impact de ces événements sur les produits linéaires et non linéaires ;

3. Les simulations de crise doivent revêtir un caractère quantitatif et qualitatif. En outre, l'établissement doit dresser l'inventaire des mesures à prendre pour réduire ses risques et préserver son capital. Leurs conclusions doivent être communiquées

systématiquement à la direction générale et, périodiquement, au conseil d'administration ;

4. L'exercice prudentiel consiste à tester, sur le portefeuille courant, des situations passées de perturbations majeures, en tenant compte des fortes variations de prix et de la vive réduction de la liquidité associées à ces événements, et/ou à évaluer la sensibilité des positions de marché aux modifications des hypothèses de volatilité et des corrélations ; cela nécessite une mesure des marges de fluctuations de ces valeurs dans le passé et un calcul sur la base des chiffres extrêmes.
5. Ces scénarios doivent, notamment, comprendre les situations que l'établissement identifie comme étant les plus défavorables, sur la base des caractéristiques de son portefeuille ;
6. La Commission Bancaire peut demander à l'établissement d'évaluer l'impact de scénarios qu'il a définies et de lui communiquer l'ensemble des conclusions ;
7. Les résultats doivent être revus à intervalles réguliers par la direction générale et être pris en compte dans la définition des limites et stratégies fixées. En outre, si la simulation fait apparaître une vulnérabilité particulière, à un ensemble donné de circonstances, l'établissement doit prendre rapidement les mesures nécessaires à une gestion adéquate de ces risques”.

Nous soulignons l'importance de la direction générale dans le système de gestion des risques. Celle-ci doit être continuellement informée. Il est intéressant de noter que le coeur du modèle interne doit être basé sur les éléments extrêmes. Le modèle doit donc bien mesurer une perte potentielle, un risque extrême. Enfin, il faut aussi remarquer l'importance de la Commission Bancaire qui, si elle le désire, peut intervenir et demander à l'établissement de chiffrer des scénarios.

2.2 Dispositif prudentiel de contrôle ex post lié à l'utilisation des modèles internes

Les contrôles ex post visent à s'assurer que le degré de couverture observé corresponde bien au niveau de confiance de 99%. Les quelques éléments ci-après permettent de pour mener à bien ces contrôles, à savoir :

1. ils sont réalisés à partir des résultats réels et /ou hypothétiques ;
2. ils sont réalisés, au moins, trimestriellement et les données des douze derniers mois glissants doivent être utilisées.

Ces contrôles permettent, notamment, de calculer les exceptions.

Une exception correspond à une date où la perte dépasse le risque calculé par le modèle. La Commission Bancaire utilise le nombre d'exceptions, pour valider le modèle et pour déterminer le coefficient multiplicateur $(3 + \xi)$, [57]¹.

Elle définit le concept de probabilité cumulée des exceptions comme "la probabilité d'obtenir au maximum le nombre d'exceptions indiqué avec un taux de couverture effectif de 99%".

Il est constaté, de façon concrète, comment le calcul est effectué. Si κ désigne la variable qui prend la valeur 1 dans le cas d'une exception, alors κ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{100}$ (une chance sur 100 pour que κ corresponde à une exception, lorsque le taux effectif de couverture est de 99%).

En considérant une période $[t_1, t_2]$ comprenant N jours ouvrés, pendant cette période, et sous l'hypothèse que les événements sont indépendants, la probabilité d'avoir n exceptions est égale à

$$Pr(X = n) = C_N^n p^n (1 - p)^{N-n} \quad (2.1)$$

avec X la variable aléatoire correspondant au nombre d'exceptions pour la période $[t_1, t_2]$. X correspond bien sûr à une variable aléatoire Binomiale B_p^N . La probabilité cumulée d'avoir n exceptions a donc pour expression

$$Pr(X \leq n) = \sum_{i=1}^n C_N^i p^i (1 - p)^{N-i} \quad (2.2)$$

1. Thierry Roncalli, [2011] "Introduction à la Gestion des Risques"

La Commission Bancaire définit alors trois zones, pour évaluer les résultats des contrôles ex post et pour appliquer le complément éventuel au coefficient multiplicateur 3. Nous remarquons que la position de la Commission Bancaire n'est pas très claire sur le facteur multiplicateur.

Enfin, les exceptions doivent être communiquées à la Commission Bancaire. Afin de permettre à la Commission Bancaire de vérifier en permanence l'adéquation du facteur complémentaire, l'établissement informe sans délai et en tout état de cause, dans les cinq jours ouvrables, le Secrétariat Général de la Commission Bancaire, des dépassements révélés par son programme de contrôle ex-post.

Pour n grand, le calcul des coefficients binomiaux est un travail pénible alors il est possible d'approximer cette loi en loi de poisson qui est une loi des événements rares, les accidents par exemple et par la suite d'approximer cette loi de poisson en loi normale (Annexe 5 et Annexe 6).



2.3 La VaR historique (ou non paramétrique)

L'estimation de la VaR via la simulation historique présuppose que le passé se rapporte à l'horizon choisi et s'appuie donc sur les données historiques des facteurs de risque, pour cerner la distribution anticipée. Considérer un portefeuille constitué de N actifs en nombres respectifs n_1, \dots, n_N s'exprimant à partir des facteurs de risques X_1, \dots, X_n :

$$P_j = a_{j1}X_1 + \dots + a_{jn}X_n, j = 1, \dots, N \quad (2.3)$$

La valeur du portefeuille s'écrit :

$$P_p(t) = \sum_{k=1}^N n_j P_j(t) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N n_j a_{jk} \right) X_k(t) \quad (2.4)$$

et ses variations entre les dates $t - 1$ et t

$$\Delta P_p(t) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N n_j a_{jk} \right) (X_k(t) - X_k(t-1)) \quad (2.5)$$

$$\Delta P_p(t) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N n_j a_{jk} X_k(t-1) \right) \left(\frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)} \right)$$

$$\Delta P_p(t) = \sum_{k=1}^n X_k(t-1) \Delta_k(t)$$

où $X_k(t-1)$ peut être interprété comme le montant investi en $t-1$ dans le k^{ime} facteur de risque. A supposer que l'horizon de calcul de la VaR est l'époque 1 et que la période à laquelle, nous effectuons les calculs est l'époque 0. A supposer également que nous connaissons :

- les positions actuelles en les différents facteurs de risque

$$X_k(0) = X_k, k = 1, \dots, n$$

- l'estimation des moyennes et des variances historiques qui sont

$$E[\Delta_k(1)] = E_k, k = 1, \dots, n \text{ et } Var[\Delta_k(1)] = \sigma_k^2 = \sigma_{kk}, k = 1, \dots, n,$$

$$Cov[\Delta_k(1), \Delta_l(1)] = \sigma_{kl},$$

$$Var_q = -E[\Delta P_p] + z_q \sigma[\Delta P_p] \quad (2.6)$$

$$Var_q = - \sum_{k=1}^n X_k E_k + z_q \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n X_k X_l \sigma_{kl}} \quad (2.7)$$

2.3.1 La simulation historique VaR

Dans l'hypothèse où les variations de prix des différents facteurs de risques sont stationnaires[36]², il convient de bien identifier les facteurs de risque qui permettront de déterminer la valeur des actifs en portefeuille.

Evaluer ensuite les variations relatives de chaque facteurs de risque :

$$\Delta_k(t) = \frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)}, k = 1, \dots, n, t = -T + 1, \dots, 0.$$

Les données présentes nous permettent alors d'estimer la distribution des valeurs futures des facteurs de risque.

$$X_k^{(t)}(1) = X_k(0) \cdot (1 + \Delta_k(t)), k = 1, \dots, n, t = -T + 1, \dots, 0.$$

et donc la distribution de perte encourue est :

$$L_k^{(t)} = X_k(0) - X_k^{(t)}(1) = -\Delta_k(t) \cdot X_k(0), k = 1, \dots, n, t = -T + 1, \dots, 0 \quad (2.8)$$

Pour le cas d'un actif, nous considérons un actif par exemple dépendant de plusieurs facteurs de risque $p = f(X_1, \dots, X_n)$ dont nous souhaitons déterminer la *VaR*.

Nous évaluons les variations futures des facteurs de risque $X_1^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1)$ en utilisant la méthode ci-dessus. De là, nous déduisons une estimation de la distribution du prix futur de l'actif :

$$P_1^{(t)} = f(X_1^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1)), t = -T + 1, \dots, 0$$

et, par différence, une estimation de la distribution de la perte subie

$$L^{(t)} = P(0) - P^{(t)}(1), t = -T + 1, \dots, 0.$$

Dans le cas d'un portefeuille, la méthode est similaire à celle d'un actif isolé.

Nous terminons simplement l'estimation de la *VaR* en déterminant la distribution de la perte subie par le portefeuille.

$$L^{(t)} = P(0) - P^{(t)}(1) = \sum_{j=1}^N n_j P_j(0) - \sum_{j=1}^N n_j P_j^{(t)}(1).$$

Il est déconseillé de calculer la *VaR* en utilisant la formule suivante :

$$VaR_q = E[L_t] + z_q \sigma(L_t) \quad (2.9)$$

2. Jean-Pierre Gueyié(UQAM), Guy Charest(Laval/UQAM), et Francis Mensah, MBA, CFA, CMA , [2008] "Valeur à Risque" PP.33-58

La VaR correspond à la valeur de la perte subie au seuil choisi se trouvant, après un arrangement par ordre croissant au rang $(\alpha \times T)$. L'arrangement se fait par le tri par insertion décrit en annexe 1 et nous avons en annexe 2 l'algorithme et le programme pour cette simulation .

2.3.2 Exemple illustratif de l'application de la simulation historique (utilisation du programme de l'annexe 2)

Considérons un portefeuille de cinq actions en nombres respectifs $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 5, n_4 = 4, n_5 = 6$
(les montants dans le tableau sont en euros)

t	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
-10	12800	23800	1238	2800	129
-9	13150	23150	1236	2765	134
-8	12150	21875	1168	2715	145
-7	11100	21400	1234	2689	168
-6	11725	22100	1310	2599	179
-5	11950	21650	1262	2465	168
-4	12025	22650	1242	2536	164
-3	12325	21000	1170	2497	171
-2	13675	23625	1260	2468	176
-1	14300	24150	1342	2500	165
0	14800	25825	1530	2365	160

source : www.finance-factory.fr/Vulgarisation/VaR.htm

En appliquant l'algorithme de l'annexe 2, la VaR de ce portefeuille est : $VaR_{0.01} = -11826.2$ euros et nous avons la présentation de la distribution de la perte est la figure suivante :

TABLE 2.1 – calcul de la VaR historique

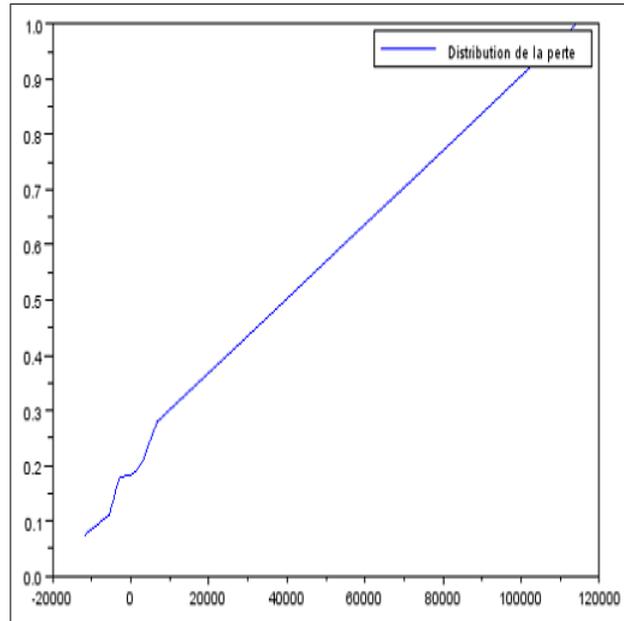


FIGURE 2.1 – la fonction de répartition de la simulation historique

2.3.3 La simulation de Monte Carlo

En simulation historique, la répartition récemment observée dans les variations dues au risque sert à prédire leur évolution à brève échéance et, du même coup, la VaR. Avec la méthode de Monte Carlo, cette répartition s’obtient en simulant à répétition l’effet possible du risque à brève échéance via un processus à tirage aléatoire. Cette approche dite stochastique s’adapte à un éventail élargi d’actifs, options comprises. Le processus typique marie une dérive (ou tendance stable) et un aléa. Dans une démarche typique, nous estimons d’abord la valeur courante du placement et les paramètres de sa variation due au risque ; puis, en générant N variations possibles, en autant de simulations, pour le même horizon court ; il reste à les ordonner à partir de la pire perte, avant d’égaliser la VaR à celle se trouvant au seuil choisi.

Il est possible alors de valoriser le portefeuille avec les facteurs simulés. En utilisant N simulations, il est possible de déterminer N variations simulées du portefeuille, que nous assimilons à N pertes potentielles. Il suffit ensuite de calculer le quantile correspondant, tout comme pour la méthode de la VaR historique.

Ces deux méthodes sont donc très semblables. La différence consiste l’une à utiliser

les facteurs passés pour l'une et ceux simulés pour l'autre.

Elles diffèrent aussi par la taille N de l'échantillon pour le calcul du quantile, qui n'est pas contraint dans le cas de la VaR Monte-Carlo[36]³.

Il faut, cependant, noter que cette méthode coûteuse en temps de calcul nécessite un ordinateur très performant, (elle convient difficilement au calcul journalier d'une VaR pour un nombre trop grand d'actifs).

De plus, elle demande un effort important de modélisation, pour déterminer entièrement les trajectoires des facteurs de marché que à utiliser pour calculer de la VaR.

Cette approche basée sur le processus de Gauss (loi normale) a un caractère de simplicité en tant que modèle de référence, toutefois, qui se fonde sur des processus stationnaires avec des queues de distribution plus denses que dans la réalité.

3. Jean-Pierre Gueyié(UQAM), Guy Charest(Laval/UQAM),et Francis Mensah, MBA, CFA, CMA , [2008] "*Valeur à Risque et Crédit à Risque*" PP.33-58

2.3.4 Analyse de la VaR par un raisonnement risque neutre basée sur les modèles Stochastiques

Soit X_t décrit un processus stochastique avec un drift, appelé mouvement Brownien qui vérifie les propriétés suivantes :

1. chaque variation $(X_{t+s} - X_s)$ du processus $\{X_t; t \geq 0\}$, entre les instants s et $s + t$, suit la loi normale de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$ où μ et σ^2 sont des paramètres constants ;
2. pour les instants $(t_1 < t_2 < \dots < t_n)$, les variations $(X_{t_2} - X_{t_1}) (X_{t_3} - X_{t_2}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes et suivent la loi normale, telle qu'elle est précisée en 1 ;
3. $X_0 = 0$ et $\{X_t; t \geq 0\}$ est continue par rapport au temps et $(X_{t+s} - X_s)$ est indépendante de l'historique du processus X_t .

Mouvement Brownien arithmétique

Le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ s'écrit :

$$dX_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dZ_t \quad (2.10)$$

où

- dZ_t est une variable aléatoire suivant une loi normale ;
- l'espérance mathématique de dZ_t est $E(dZ_t) = 0$;
- la variance de dZ_t est $V(dZ_t) = dt$;
- les valeurs de dZ_t , relatives à des intervalles de temps courts dt , quelconques, sont indépendantes.

Le drift réel μ et la volatilité σ sont deux paramètres possibles d'être estimés à partir de l'historique du prix de l'actif, lequel suit le processus X_t . Le processus dZ_t peut s'écrire sous la forme : $dZ_t = U\sqrt{dt}$ où U est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

La variable U^2 suit donc une loi du Khi-deux de degré 1, telle que son espérance mathématique est $E(U^2) = 1$, et sa variance est $V(U^2) = 2$.

Comme, le carré du processus dZ_t est : $dZ_t^2 = U^2 dt$, nous déduisons de ce qui précède que l'espérance de processus dZ_t^2 est $E(dZ_t^2) = E(U^2)dt = dt$, alors que sa variance est $V(dZ_t^2) = V(U^2)dt^2 = 2dt^2$.

Pour pouvoir affirmer que, quand dt tend vers 0, à l'ordre dt , le processus dZ_t^2 devient équivalent à dt , soit $dZ_t^2 \approx dt$.

Mouvement Brownien géométrique

Soit le processus $\{X_t; t \geq 0\}$ suivant un mouvement Brownien avec un drift, $\mu > 0$ et une variance constante égale à σ^2 . Le processus stochastique, défini par : $\{Y_t = e^{X_t}; t \geq 0\}$, est appelé mouvement Brownien géométrique. Il est dit qu'il suit à chaque instant t , une loi Log-normale dont les paramètres dépendent du temps t .

L'espérance et la variance de ce processus peuvent être déduites de celles de la loi Log-normale et nous avons :

$$E(Y_t/Y_0 = y_0) = y_0 e^{(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t)} \text{ et}$$

$$V(Y_t/Y_0 = y_0) = y_0^2 e^{(2\mu t + \sigma^2 t)} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

La fonction de densité de Y_t est : $g(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\left(\frac{\ln y - \mu t}{\sigma\sqrt{2t}}\right)^2}$; $y > 0$

Ainsi, pour les instants t_1, t_2, \dots, t_n , les variables (Y_{t_2}/Y_{t_1}) ,

$(Y_{t_3}/Y_{t_2}), \dots, (Y_{t_n}/Y_{t_{n-1}})$ sont indépendantes et suivent la loi Log-normale.

En continu, un mouvement Brownien géométrique s'écrit en fonction du mouvement Brownien standard $\{Z_t; t \geq 0\}$, sous la forme :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dZ_t \tag{2.11}$$

2.3.5 Génération des variables aléatoires normales centrées et réduites

Soient :

$$U_1 \longrightarrow U[0; 1]$$

$$U_2 \longrightarrow U[0; 1] \text{ indépendantes, c'est-à-dire } \rho(U_1; U_2) = 0$$

Pour générer deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 de loi normale centrée réduite, deux techniques entre autres peuvent être utilisées : l'inversion de la fonction de répartition de la loi normale, ou bien un changement de variables adéquates qui transforme deux variables aléatoires uniformes et indépendantes, en deux variables aléatoires normales centrées, réduites et indépendantes. Étant donné le nombre élevé d'itérations, dans une simulation de Monte Carlo, le temps CPU (Central Processing Unit) nécessaire, pour la transformation est déterminant dans le choix de la technique à adopter.

Inversion de la fonction de répartition de la loi normale

Une variable aléatoire centrée réduite peut être déduite, à partir d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$, tout simplement, par inversion de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite. Ainsi, les variables aléatoires normales centrées, réduites et indépendantes Y_1 et Y_2 peuvent être déduites, à partir du couple de variables indépendantes et uniformes sur l'intervalle $[0; 1]$, suivant la transformation :

$$Y_1 = F^{-1}(U_1)$$

$$Y_2 = F^{-1}(U_2)$$

Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes, puisque U_1 et U_2 sont elles-mêmes indépendantes.

Cette inversion consomme trop de temps CPU et elle n'est pas recommandée pour une simulation de Monte Carlo, où le nombre d'itérations doit être suffisamment grand pour assurer une bonne précision de calcul.

Changement de variables

Le changement de variables suivant, [14]⁴ :

$$- Y_1 = \sqrt{-2Ln(U_1)}Cos(2\pi U_2) \longrightarrow N(0; 1)$$

$$- Y_2 = \sqrt{-2Ln(U_1)}Sin(2\pi U_2) \longrightarrow N(0; 1)$$

permet de transformer le couple de variables uniformes et indépendantes $(U_1; U_2)$, en un couple de variables aléatoires normales centrées et réduites et indépendantes $(Y_1; Y_2)$.

En effet, si nous désignons par :

$f(u_1; u_2)$ la densité jointe au couple $(U_1; U_2)$

$g(y_1; y_2)$ la densité jointe au couple $(Y_1; Y_2)$

Nous avons :

$$f(u_1; u_2) = 1 \text{ si } (u_1; u_2) \in D_U = [0; 1] \times [0; 1]$$

$$f(u_1; u_2) = 0 \text{ si } (u_1; u_2) \in \bar{D}_U$$

Par le changement de variables : $(U_1; U_2) \longrightarrow (Y_1; Y_2)$, le domaine

D_U est transformé en \mathfrak{R}^2 . La fonction densité de probabilité du couple

$(Y_1; Y_2)$ se déduit, à partir de celle relative au couple $(U_1; U_2)$, à partir de l'équation suivante :

$$g(y_1; y_2) = f(u_1(y_1; y_2); u_2(y_1; y_2))|J|$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\delta u_1}{\delta y_1} & \frac{\delta u_1}{\delta y_2} \\ \frac{\delta u_2}{\delta y_1} & \frac{\delta u_2}{\delta y_2} \end{vmatrix} \text{ est le jacobéen relatif à la transformation en question.}$$

L'inversion des formules de changement de variables se fait suivant les équations suivantes :

$$(Y_1^2 + Y_2^2) = -2LnU_1 \implies U_1 = e^{-(Y_1^2 + Y_2^2)}$$

$$\frac{Y_2^2}{Y_1^2} = tg(2\pi U_2) \implies$$

$$U_2 = \frac{1}{2\pi} Arctg\left(\frac{Y_2^2}{Y_1^2}\right).$$

A partir de ces équations, déduire le jacobéen relatif, à cette transformation : $|J| =$

$$\begin{vmatrix} -y_1 u_1 & -y_2 u_1 \\ \frac{-y_2}{\pi(y_1^2 + y_2^2)} & \frac{y_1}{\pi(y_1^2 + y_2^2)} \end{vmatrix} = \left| \frac{-u_1}{2\pi} \right| = \frac{1}{2\pi} e^{-(y_1^2 + y_2^2)}.$$

Ainsi, la fonction densité jointe du couple $(Y_1; Y_2)$ s'écrit :

$$g(y_1; y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-(y_1^2 + y_2^2)} = \frac{1}{2\pi} e^{-y_1^2} e^{-y_2^2} = g_{Y_1}(y_1) g_{Y_2}(y_2).$$

Ainsi, vérifier, d'une part, que la densité marginale de chacune des variables correspond

4. Box Muller, [2011] : TP11.Vecteurs gaussiens

bien à celle de la loi normale centrée réduite, et d'autre part, vérifier bien que les deux variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes, puisque la densité jointe est égale au produit des densités marginales, ce qui est une conséquence logique de l'indépendance des variables uniformes tirées U_1 et U_2 .

Changement de variable permettant un gain en temps CPU

Comme la simulation de Monte Carlo nécessite un nombre d'itérations élevé, égal au produit du nombre d'intervalles à considérer N , par le nombre total de simulations M , tout gain de temps CPU, au niveau d'une itération, permet un gain significatif au niveau du temps de calcul global.

Pour ce faire, il faut éviter, au maximum, l'utilisation des fonctions usuelles programmées comme un développement limité à un ordre, défini par la précision de calcul de la machine. C'est ainsi qu'il faut éviter la génération d'une loi normale centrée réduite, à partir d'une loi uniforme, par inversion de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. De plus, le changement de variable étudié ci-dessus nécessite le calcul de trois fonctions, à savoir : le logarithme népérien, le sinus et le cosinus.

Pour ne recourir qu'à la fonction logarithme, il faut transformer U_1 et U_2 en V_1 et V_2 , tel que ces deux dernières variables peuvent jouer le rôle d'un sinus et d'un cosinus, sans que leurs calculs ne nécessitent le recours à des fonctions usuelles. Pour ce faire, prendre :

$$V_1 = 2U_1 - 1$$

$$V_2 = 2U_2 - 1$$

V_1 et V_2 suivent une loi normale uniforme sur l'intervalle $[0;1]$ et elles sont indépendantes. Elles sont assimilables, respectivement, à un cosinus et à sinus.

Si nous choisissons une variable aléatoire Z , assimilable au carré du module d'un point, situé à l'intérieur du cercle trigonométrique, nous pouvons, alors, écrire :

$$Z = V_1^2 + V_2^2 \text{ avec } 0 < Z \leq 1$$

Démontrer, de la même manière que précédemment, que les variables aléatoires Z_1 et Z_3 , définies par les équations (2.12) et (2.13), sont normales centrées réduites et indépendantes.

$$Z_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(Z)}{Z}} = V_1 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(V_1^2 + V_2^2)}{V_1^2 + V_2^2}} \longrightarrow N(0; 1) \quad (2.12)$$

$$Z_3 = V_2 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(Z)}{Z}} = V_2 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(V_1^2 + V_2^2)}{V_1^2 + V_2^2}} \longrightarrow N(0; 1) \quad (2.13)$$

La variable Z_1 sera considérée, pour simuler le mouvement du prix du sous-jacent, alors que la variable aléatoire Z_2 , fonction linéaire de Z_1 et Z_3 , sera considérée pour simuler le mouvement de la volatilité.

La variable Z_2 est donnée par l'équation suivante :

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3 \text{ avec } \rho(Z_1; Z_2) = \rho.$$

2.3.6 Méthode d'évaluation des instruments financiers par simulation de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est, numériquement, plus efficace que les autres méthodes numériques, quand il existe trois variables stochastiques et davantage. Ceci, parce que le temps alloué pour qu'une simulation de Monte Carlo évolue, pratiquement, linéairement, avec le nombre de variables, alors que pour les autres méthodes de résolution, le temps de convergence évolue, pratiquement et exponentiellement, avec le nombre de variables.

Évaluation d'une option par un raisonnement risque neutre au cas où la volatilité serait stochastique

Une option est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent, à un prix prédéterminé et ce, pendant une période de temps donnée.

Un tel contrat représente un droit et non une obligation pour son détenteur. En d'autres termes, l'investisseur n'est pas contraint d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent. Pour une option européenne, la décision d'exercer ou de ne pas exercer ce droit aura lieu à l'échéance du contrat.

Par contre, pour une option du type américain, cette décision peut avoir lieu à n'importe quel moment de la vie du contrat. La plupart des options européennes standardisées

négociées, aujourd'hui, sur l'ensemble de la planète sont des options américaines. La plupart des options européennes sont aujourd'hui négociées sur le marché de gré à gré des options sur action, ainsi que sur le marché interbancaire de change.

Il existe deux types d'options : celles d'achat (call) et celles de vente (put) :

- un call est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix fixé d'avance durant une période donnée.
- un put est un contrat qui confère à son détenteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix prédéterminé durant une période donnée.

Autant l'acheteur d'un contrat d'option a le choix d'exercer ou non son droit, autant le vendeur d'un contrat d'option est totalement soumis à la décision de l'acheteur d'option. En contrepartie, le vendeur du contrat reçoit de l'acheteur une somme égale au prix du marché de l'option, appelée prime d'option.

L'acheteur d'une option américaine bénéficie de plus de droit que l'acheteur d'une option européenne, puisqu'il peut exercer à tout moment son droit, alors que le second doit attendre l'échéance pour décider. De ce fait, le prix d'une option américaine doit être supérieur à celui d'une option européenne ayant les mêmes caractéristiques.

Les options se distinguent, également, par l'actif sur lequel elles portent, autrement dit l'actif sous-jacent. Celui-ci peut être une action, une obligation, un indice, un tracker, un titre de créance négociable, une devise, de l'or ou encore un contrat à terme.

En ce qui concerne les produits financiers, la grande popularité des options auprès des investisseurs tient au fait qu'elles représentent un outil de placement extrêmement souple. Combinées à des portefeuilles d'actions, les options peuvent aider l'investisseur à limiter le risque de perte ou à augmenter le potentiel du rendement des actions détenues. De plus, elles permettent à un investisseur audacieux d'ajouter du levier à ses placements et à un autre moins audacieux de fixer le prix d'un achat ou d'une vente ultérieure d'action. En un mot, les options représentent un outil précieux de contrôle des risques du portefeuille et, pour cette raison, elles doivent occuper une place importante dans les stratégies de placement de l'investisseur.

La valeur de l'option dépend du prix de l'actif support-sous-jacent, du prix d'exercice,

du taux d'intérêt sans risque, de l'échéance et de la volatilité du prix de l'action. La valeur de l'option se décompose en valeur intrinsèque et valeur temps ou sur côte : la valeur intrinsèque représente ce que serait celle du contrat, si son échéance intervenait immédiatement. Elle est donc positive ou nulle. La valeur temps ou sur côte indique de valeur de cette dernière par rapport à sa valeur intrinsèque, étant donné le temps qui lui reste à courir. Tant qu'il existe une probabilité positive de pouvoir exercer l'option à l'échéance et, par -là même, de réaliser un bénéfice, les investisseurs sont prêts à payer une sur côte pour détenir le contrat d'option.

La valeur d'une option européenne C_T , à la date d'échéance T , est égale à sa valeur intrinsèque, puisque la valeur temps est nulle, à cet instant. Ainsi, en désignant par S_T , la valeur du sous-jacent à l'échéance, et par K le prix d'exercice de l'option, nous pouvons écrire :

$$C_T = E(\text{Max}(S_T - K, 0)) = \text{Max}(E(S_T) - K, 0) \quad (2.14)$$

Dans le cas général, selon un raisonnement risque neutre où le taux d'intérêt r est considéré comme stochastique, la valeur de l'option à l'instant t est donnée par l'équation :

$$C_T = e^{-\int_t^T r_\theta d\theta} E(C_T) = e^{-\int_t^T r_\theta d\theta} \text{Max}(E(S_T) - K, 0) \quad (2.15)$$

En désignant par $f(S_T, \sigma_T)$ la fonction de densité de probabilité jointe du couple, valeur du sous-jacent S_T et sa volatilité σ_T à l'échéance, nous pouvons écrire :

$$C_T = e^{-\int_t^T r_\theta d\theta} \int_K^{+\infty} \int_0^{+\infty} (S_T - K) f(S_T, \sigma_T) dS_T d\sigma_T \quad (2.16)$$

Soit, en développant, on obtient l'équation :

$$C_T = e^{-\int_t^T r_\theta d\theta} \int_K^{+\infty} \int_0^{+\infty} S_T f(S_T, \sigma_T) dS_T d\sigma_T - K e^{-\int_t^T r_\theta d\theta} \int_K^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(S_T, \sigma_T) dS_T d\sigma_T \quad (2.17)$$

La fonction de densité de probabilité $f(S_T, \sigma_T)$ est donnée par les processus de diffusion des deux variables d'état, à savoir : la valeur du sous-jacent et sa volatilité. La connaissance de cette fonction est déterminante pour définir la valeur de l'option en se basant sur un raisonnement risque neutre.

En supposant que la valeur du sous-jacent suive un mouvement Brownien géométrique,

nous pouvons écrire :

$$Ln(S_T) = Ln(S_t) + \int_t^T (r_\theta - \frac{\sigma_\theta^2}{2})d\theta + U_1 \int_t^T \sigma_\theta \sqrt{d\theta} \text{ avec } U_1 \longrightarrow N(0, 1) \quad (2.18)$$

De même, si la volatilité suit le processus régi par l'équation suivante :

$$d\sigma_t = (\omega_t - \lambda q(\sigma_t))dt + U_2 q(\sigma_t) \sqrt{dt} \text{ avec } U_2 \longrightarrow N(0, 1) \quad (2.19)$$

alors, la volatilité à l'échéance est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_T = d\sigma_t + \int_t^T (\omega_\theta - \lambda q(\sigma_\theta))d\theta + U_2 \int_t^T q(\sigma_\theta) \sqrt{d\theta} \quad (2.20)$$

Les deux variables aléatoires U_1 et U_2 qui sont normales centrées réduites, sont corrélées avec un coefficient ρ supposé constant.

Autant, l'espérance et la variance de valeur du sous-jacent à l'échéance S_T ne dépendent pas de celle-ci, autant elles dépendent de σ_T , au même titre que l'espérance et la variance de cette dernière.

Ceci veut dire que la densité de probabilité jointe à ces deux variables ne peut être déterminée facilement, et reste fonction surtout du modèle de la volatilité. Il faut, donc, choisir un modèle qui allie la facilité de calcul et la conformité du mouvement du sous-jacent à la réalité.

La difficulté de déterminer, analytiquement, la fonction de densité de probabilité jointe du couple (S_T, σ_T) , nous conduit à estimer l'espérance de la valeur de l'option à l'échéance, numériquement.

Avec un raisonnement risque-neutre, la méthode numérique la mieux adaptée est la simulation de Monte Carlo.

La valeur de l'option peut être déterminée par la simulation de Monte Carlo, dans la mesure où la valeur de l'option est égale à celle actualisée de l'espérance de l'option à l'échéance pour une option européenne.

Soit, $C_T = e^{-\int_t^T r_\theta d\theta} E(C_T)$ au cas où le taux d'intérêt serait stochastique.

Dans le cas où le taux d'intérêt serait supposé constant , égal à r , cette équation devient :

$$C_T = e^{-r(T-t)} E(C_T) \quad (2.21)$$

Ainsi, pour estimer la valeur de C_T , il faut estimer la valeur de $E(C_T)$.

Puisque, le meilleur estimateur de l'espérance est la moyenne empirique, il va falloir faire un nombre M de simulations lesquelles permettent de calculer à chaque fois la valeur de l'option à l'échéance, soit C_T^m pour la simulation numéro m ($1 \leq m \leq M$).

Au bout des M simulations, $E(C_T)$ sera estimée par la moyenne arithmétique :

$$\bar{C}_T = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_T^m \quad (2.22)$$

Comme la valeur d'une option européenne, à l'échéance, est égale à sa valeur intrinsèque $C_T = \text{Max}(S_T - K, 0)$, il suffit de calculer pour chaque simulation, numéro m , la valeur du sous-jacent à l'échéance S_T^m .

Ce calcul s'effectue, en divisant la durée de vie résiduelle de l'option $(T-t)$, en N intervalles du temps, égaux, ayant une durée $\Delta t = \frac{T-t}{N}$, puis en calculant la valeur de la volatilité et du sous-jacent à la fin de chaque intervalle de temps.

Ce dernier calcul se fera en se basant sur les équations de diffusion de la valeur du sous-jacent et de la volatilité. Si nous désignons par :

r_t : le taux d'intérêt à l'instant t ,

σ_t : la volatilité du sous-jacent à cet même instant et

$Z_{1,t}$: la valeur prise par la variable aléatoire normale centrée réduite Z_1 à ce même instant t , alors, la dynamique du sous-jacent peut s'écrire :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t \sqrt{dt} Z_{1,t}$$

En appliquant le lemme d'Itô à $G(S_t) = \text{Ln}(S_t)$, cette équation devient :

$$d\text{Ln}(S_t) = (r_t - \frac{\sigma_t^2}{2})dt + \sigma_t \sqrt{dt} Z_{1,t} \quad (2.23)$$

Par ailleurs, la dynamique de la volatilité peut s'écrire :

$$d\sigma_t = D_t dt + q_t \sqrt{dt} Z_{2,t} \quad (2.24)$$

où :

D_t est le drift risque de la volatilité ;

q_t est la volatilité de la volatilité à l'instant t et

$Z_{2,t}$ est la valeur prise par la variable aléatoire normale centrée réduite Z_2 à ce même instant t .

À noter que D_t et q_t peuvent être estimés à partir des données historiques de la volatilité, en considérant la volatilité historique ou implicite.

Le coefficient de corrélation, entre les deux variables aléatoires Z_1 et Z_2 est constant, égal à ρ .

L'estimation de la valeur de l'option à l'échéance, pour chacune des simulations, est basée sur la génération des processus $Z_{1,t}$ et $Z_{2,t}$ à chaque pas du temps Δt .

En ce qui concerne la volatilité, avec le processus régi par l'équation (2.24), elle peut prendre des valeurs négatives. Pour éviter ce genre de problème, il vaut mieux calculer la volatilité comme l'exponentielle de son logarithme népérien.

Soit : $\sigma_t = e^{Ln\sigma_t}$. En appliquant le Lemme d'Itô, sur processus de $G(\sigma_t) = Ln(\sigma_t)$, nous obtenons l'équation suivante :

$$dLn(\sigma_t) = \left(\frac{D}{\sigma_t} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{\sigma_t} \right) dt + \frac{q}{\sigma_t} Z_{2,t} \sqrt{dt} \quad (2.25)$$

La volatilité est déterminée, à chaque intervalle de temps, à partir de son logarithme et elle est toujours positive puisqu'elle est une exponentielle. Ainsi, le problème de tomber sur une valeur négative de la volatilité, au cours d'une simulation de Monte Carlo, est résolu.

Pour estimer les valeurs du sous-jacent et de la volatilité à chacun des N intervalles du temps, il va falloir générer les variables Z_1 et Z_2 .

Or, les machines informatiques ne permettent de générer que des variables aléatoires indépendantes, suivant des lois uniformes sur l'intervalle $[0; 1]$.

Il va falloir établir, dans un premier temps, une relation transformant deux variables aléatoires U_1 et U_2 uniformes sur l'intervalle $[0,1]$ et indépendantes (générées par la machine), en deux variables aléatoires Z_1 et Z_3 normales, centrées, réduites et indépendantes.

Dans un second temps, nous pouvons déduire Z_2 , à partir de Z_1 et Z_3 , sachant qu'elle est

normale centrée, réduite et que son coefficient de corrélation avec Z_1 est constant, égal à ρ , soit :

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3 \longrightarrow N(0; 1) \text{ et } \rho(Z_1; Z_2) = \rho \quad (2.26)$$

Ce coefficient de corrélation est supposé être constant, bien qu'il soit stochastique en réalité et il est sensé être négatif.

En effet, plusieurs auteurs Black (1976), Schamalensee et Trippi (1978), Beckers (1981) et Chritie (1982) ont observé que la variance des rendements d'une action est inversement liée au prix de celle-ci. Selon eux, cette relation négative est entre le prix de l'action et sa volatilité par l'endettement des entreprises. En effet, si le prix d'une action baisse, le ratio correspondante d'endettement (dettes/fonds propres) de l'entreprise augmente et le risque de l'action, mesuré par la volatilité aussi, et vice versa. Le coefficient de corrélation est, donc, souvent négatif d'ailleurs confirmé par des études empiriques : les prix des actifs financiers tendent à baisser, quand leur volatilité augmente page(251-253),[60] ⁵.

Le résultat à l'échéance pour une prime P se déduit par :

Pour l'acheteur d'un call, on a : $R_{call} = \text{Max}(E(S_T) - K, 0) - P$

Pour le vendeur d'un call, on a : $R_{call} = -\text{Max}(E(S_T) - K, 0) + P$

Pour l'acheteur d'un put, on a : $R_{put} = \text{Max}(K - E(S_T), 0) - P$

Pour le vendeur d'un put, on a : $R_{put} = -\text{Max}(K - E(S_T), 0) + P$

Dans le cas où l'option serait exercée, l'acheteur aurait un gain sinon, il subirait une perte et réciproquement pour le vendeur.

Dans le cas d'une perte, il faut mesurer le risque de cette perte et calculer la VaR en ce sens.

Arranger les pertes en prenant comme VaR, la valeur la plus défavorable.

La génération des variables aléatoires normales centrées, réduites et indépendantes se fait à partir des variables aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0;1]$ et indépendantes, générées par un ordinateur. En définitive, le calcul de la valeur de l'option, par simulation de Monte Carlo avec une volatilité stochastique, va s'effectuer suivant l'algorithme en annexe 3.

5. Yacin Jerbi , [2006]Thèse de Doctorat "Évaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique" pp-618

2.3.7 Exemple illustratif d'un call (Programme de l'annexe 3)

Supposons un investisseur intéressé par l'achat d'une action de la société X qui vaut aujourd'hui $S_0=30$ euros. Et il désire ne l'acheter que dans 4 mois, mais il craint une hausse du cours à ce moment là. Il est prêt, dans 4 mois, à payer jusqu'à $K=28$ euros mais pas plus. Il achète une option européenne d'achat de sous jacent X de prix d'exercice $K=28$ euros et de maturité 4 mois. Il paie initialement une prime $p=5$ euros pour cette garantie (prix de l'option). Le drift risque neutre de la volatilité est estimé à partir des observations historiques sur le marché, idem pour la volatilité de la volatilité, du coefficient de corrélation. Ici, nous avons fixé pour illustration le drift risque neutre de la volatilité à $d_0=0.1$, idem pour $q_0=0.001$ et pour $R_0=-0.3$, le taux d'intérêt $r = 0.0475$. La date d'échéance $T=120$ (4 mois), $t_0=0$ et avec $M=50$ simulation. La VaR dans ce cas est de -4.89 euros au seuil de 0.01.

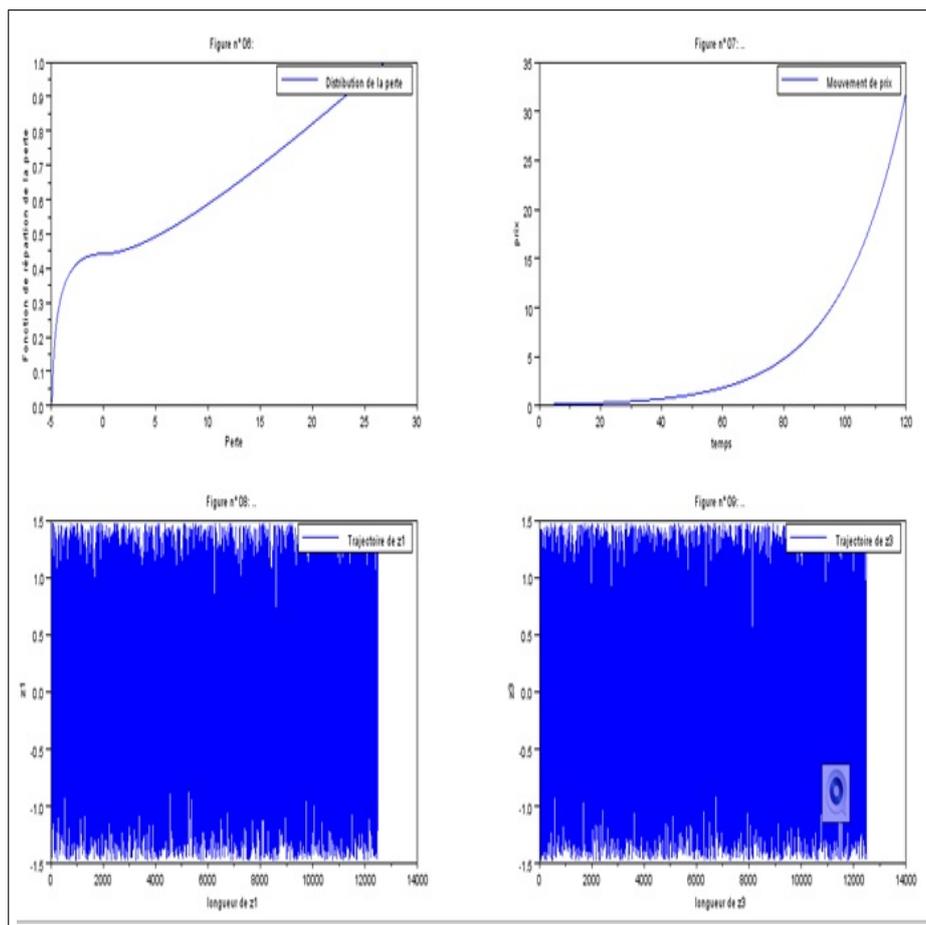


FIGURE 2.2 – Exemple d’une option

En considérant une volatilité constante, nous retrouvons le modèle de Black & Scholes. Et les valeurs empiriques données par la simulation convergent vers la valeur du modèle de Black & Scholes. Toutefois, en tenant compte du biais produit par l’ordinateur lors de la génération de la loi uniforme, pour avoir une bonne précision sur la convergence, il faut un nombre de simulation assez grand. Pour Yacin Jerbi, dans sa thèse, il a puis démontré cette convergence en prenant un nombre de simulation $M=5000$ et une période de $N=400$. En ce qui nous concerne, nous allions à ce résultat, car nous n’avons pas une machine capable de faire cette simulation (page 336-340) [60]⁶.

6. Yacin Jerbi, [2006], Thèse de Doctorat *“Évaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique”* pp-618

Évaluation d'une action par un raisonnement risque neutre dans le cas où la volatilité serait stochastique

En simulation historique, la répartition récemment observée dans les variations dues au risque sert à prédire leur évolution à brève échéance et, du même coup, la VaR. Avec la méthode de Monte Carlo, la répartition s'obtient en simulant à répartition l'effet possible du risque à brève échéance via un processus à tirage aléatoire

Cette méthode dite stochastique s'adapte à un éventail élargi d'actifs, options comprises. Le processus typique, consiste à estimer d'abord la valeur courante du placement et les paramètres de sa variation due au risque, puis à générer n variations possibles, en autant de simulations, pour le même horizon court ; il reste à les ordonner à partir de la pire perte, avant d'égaliser la VaR à celle se trouvant au seuil choisi. En supposant une action qui rapporte en moyenne un rendement r d'écart type q qui suit le mouvement Brownien géométrique.

Comme précédemment, son prix est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp_t}{p_t} = (r - \frac{1}{2}\sigma_t^2)dt + \sigma_t\sqrt{dt}Z_{1,t} \text{ et la dynamique de la volatilité peut s'écrire :}$$
$$d\sigma_t = D_t dt + q_t\sqrt{dt}Z_{2,t}.$$

Ce qui revient à exprimer plus commodément le prix possible de l'action par :

$P_t = P_0 e^{[(r-\frac{1}{2})dt + \sigma_t\sqrt{dt}Z_{1,t}]}$. En définitive, le calcul de la valeur de l'action, par simulation de Monte Carlo avec une volatilité stochastique, va se faire suivant l'algorithme annexe 4.

2.3.8 Exemple d'un action (utilisation du programme de l'annexe 4)

Soit le prix initial d'une action $p_0=67$ euros, la valeur du portefeuille $V_0=6700$ euros, le nombre d'actions $a = 100$, la valeur du drift risque neutre de la volatilité est fixée à $d_0=0.1$ et la volatilité de la volatilité à $q_0=0.001$ pour l'illustration, nous prenons le nombre de simulations $M=100$, $T=120$, $t_0=0$, $r = 0.033$ et $R_0= -0.4$. La VaR est de -528.92072 euros au seuil de 0.01.

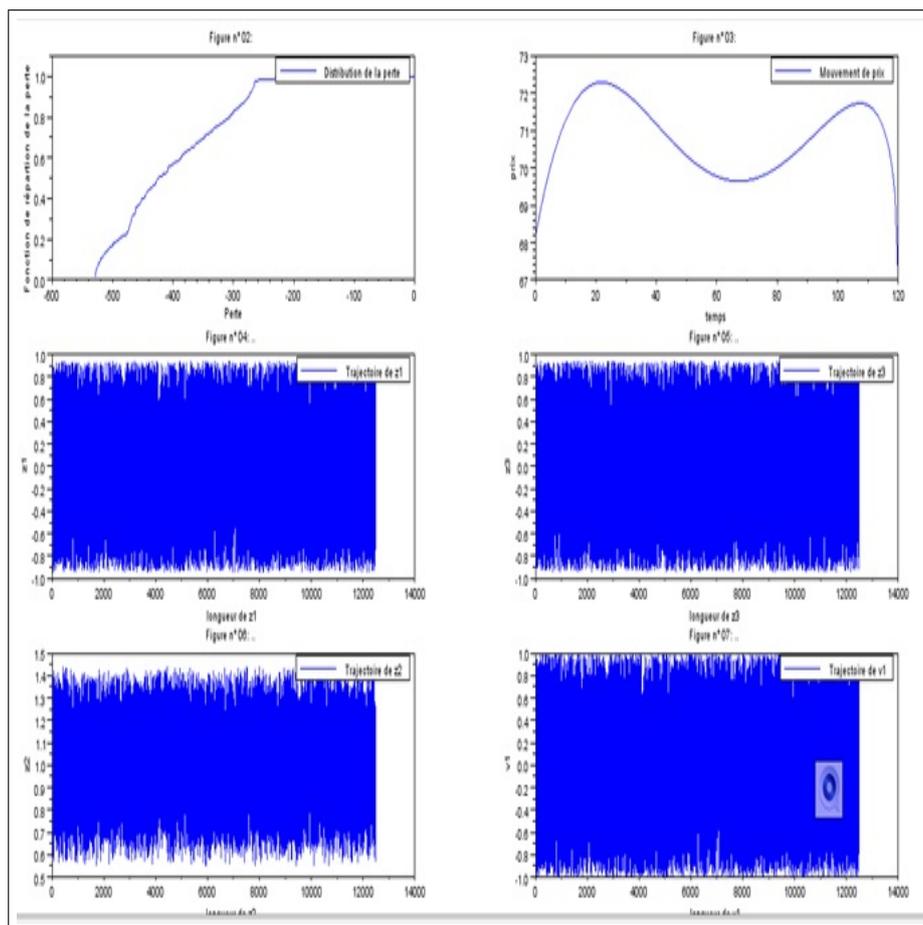


FIGURE 2.3 – Exemple d'un action

2.4 Pertinence des mesures de la VaR

IL est montré que la VaR paramétrique ne convenait pas aux les portefeuilles d'options. Toutes les mesures ne sont donc pas pertinentes pour n'importe quel type de portefeuille. Le tableau suivant montre le périmètre d'utilisation des mesures de la VaR en fonction de la normalité des facteurs de marché et de la linéarité du portefeuille :

Instrumentes linéaires	Normalité des facteurs	
	Oui	Nom
Oui	Paramétrique, Monte-Carlo, Historique	Historique
Nom	Monte-Carlo, Historique	Historique

TABLE 2.2 – périmètre d'utilisation des mesures de la VaR

[13]⁷

7. Boulier, J-F., A. Brabant, R.Dalaud et A-L. Dieu, [1997], Risque de marché : "Vue de Profil, Direction de la Recherche et de l'Innovation, Crédit Commercial de France", quants, 28,

2.5 Le problème du scaling

Cette section s'intéresse au choix de l'horizon considéré et aux difficultés qu'il engendre pour le calcul de la VaR.

Selon le type d'actifs à gérer, nous avons tendance à porter notre attention sur des VaR allant de l'intraday à quelques années.

De manière opérationnelle, les risques sont souvent mesurés à 1 jour. Le passage à un autre horizon peut poser quelques problèmes.

Le comité de Bâle impose une période de détention de 10 jours pour mesurer les risques d'un portefeuille. Il conseille alors de convertir la VaR 1 jour à la VaR 10 jours par scaling.

Le scaling consiste à multiplier la volatilité à 1 jour par \sqrt{T} , T étant l'horizon considéré.

Cette méthode soulève une certaine polémique quant à son application, et le débat sur l'adéquation du scaling s'intensifie, sans pour autant faire ressortir un consensus clair.

Conclusion

Depuis les évènements de 1994 à nos jours, le monde des placements n'est pas à l'abri des faillites. Partout, dans le monde et dans des grandes institutions, la faille est passée par là, malgré le développement des modèles internes et externes, voire extrêmes de mesure de risques. Aujourd'hui, les économies sont plus que jamais en situation d'inquiétude et ces crises incessantes alimentent les doutes sur les modèles économiques. La contribution de tout un chacun dans l'analyse de ces modèles permettra à répondre, d'une manière efficace, aux questions économiques.

Comme il a pu être constaté, les modèles de mesures des risques demandent un savoir-faire. Celui-ci ne doit pas concerner seulement les instruments financiers, mais aussi les outils statistiques et de gestion des bases de données.

Avec l'interaction des marchés, la mesure de la VaR est de plus en plus compliquée, du fait qu'il existe une corrélation des institutions financières. Cette mesure demande des données fiables qui représentent exactement la réalité de la firme. La fiabilité des données peut résulter des crises incessantes.

La VaR n'est pas une boîte noire. Elle recherche, surtout à analyser et à comprendre. En définitive, elle passe par la compréhension de micro-structure des différents types des risques.

Elle permet de mesurer la perte potentielle à l'intérieur d'un intervalle de confiance déterminé en se basant sur des éléments d'informations interne et externe, d'identifier des sources de risque dans un portefeuille d'une manière globale en s'appuyant sur les outils d'analyse de risque, de calculer les fonds propres à allouer à la couverture des risques

de marché (outil prudentiel), de comparer le risque au rendement de l'exposition sur le marché et, donc, de calculer l'allocation optimale de capital.

Tout au long de notre recherche, en se basant sur le rendement des actifs, nous avons pu proposer des formules assez simples pour le calcul de la VaR. C'est le cas de son estimation pour le rendement d'un actif ou d'un portefeuille et pour les facteurs observables et inobservables, mais aussi pour le rendement auto régressif.

Le calcul de la VaR sous l'hypothèse de l'autoregressivité des rendements permet d'incorporer plusieurs facteurs de marché ou plusieurs portefeuilles sur des durées assez longues et de mesurer les chocs d'innovations ou les effets d'une variation d'un facteur ou d'un portefeuille sur les autres.

La convergence de la loi binomiale à une loi de poisson et puis à une loi normale montre bien qu'il est possible de partir des exceptions, des évènements considérés comme rares à des évènements normaux, d'où l'admission de l'hypothèse de normalité des facteurs de marché.

A l'aide de nos algorithmes qui méritent des tests de validation, nous estimerions apporter une grande contribution à la prévision de la VaR, surtout, pour les instruments financiers les plus complexes, tout en considérant la corrélation des actifs.

Annexes

2.6 Annexe 1 : L'algorithme pour le tri par insertion

2.6.1 Annexe 1.a : Explication du tri par insertion

La problématique du tri est d'entrer une séquence de n nombre x_1, \dots, x_n et à la sortie la séquence est permuter en x'_1, \dots, x'_n telle que $x'_1 \leq x'_2, \dots, \leq x'_n$. Le principe du tri est de retirer de manière répétée, un nombre de la séquence d'entrée en l'insérant à la bonne place dans la séquence de nombre déjà triée.

2.6.2 Annexe 1.b : Algorithme d'insertion

1. retirer un élément de la séquence d'entrée ;
2. supposer qu'on a aussi la situation suivante : les $j-1$ premiers éléments de x sont déjà triés
3. Tant que nous n'arrivons pas au bout du tableau et que l'élément courant est plus grand que celui à insérer ; décaler l'élément courant (et on met une place vide permettant d'effectuer l'insertion). En sortant de cette boucle, nous avons la place pour réaliser l'insertion.

2.6.3 Annexe 1.c : Algorithme de calcul

DEBUT

Pour $i \leftarrow 2$ à n faire

```

temp ← x[j]
j ← i-1
tant que (j>0) et (x[j]>temp) faire
début
x[j+1] ← x[j]
j ← j-1
fin
x[j+1] ← temp
FIN

```

2.7 Annexe 2 : La simulation historique

2.7.1 Annexe 2.a : Algorithme de la simulation historique

1. donner le nombre d'actifs qui constitue le portefeuille ;
2. préciser le nombre de chaque action ;
3. définir la plage des données historiques T (par exemple 504 jours ouvrables ou 2 ans) ;
4. calculer les variations des données pour chaque facteur de risque (chaque actif) et pour tout $t = -T + 1, \dots, 0$

$$d_k(t) = \frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)} ;$$

5. calculer les valeurs estimées pour la prochaine période pour chaque facteur de risque et pour tout t

$$X_k^t(1) = X_k(0)(1 + d_k(t)) ;$$

6. déterminer la valeur du portefeuille en t=0 et les estimations futures (la valeur de $P_p(0)$: le portefeuille à $t = 0$ est connue),

$$P_p^t(1) = \sum_{i=1}^n X_i^t(1) ;$$

7. estimer la distribution de la perte subie par le portefeuille :

$$L^t = P_p(0) - P_p^t(1) ;$$

8. ordener les montants à partir du plus petit ;

9. prendre comme VaR le montant de perte se trouvant au seuil choisi.

DEBUT

N = entrer le nombre des actifs qui constituent le portefeuille;

pour $i = 1$ à n faire

n_i = entrer le nombre d'actions de chaque actif;

Fin;

T= plage des données historiques;

pour $t = -T + 1, \dots, 0$ faire

pour $k = 1, \dots, n$ faire

$X(k, t)$ = entrer les valeurs de X(k,t)

$$d(k, t) = \frac{X(k, t) - X(k, t-1)}{X(k, t-1)}$$

$$X(k, t, 1) = X(k, 0)(1 + d(k, t))$$

$$Pp(1, t) = P0 + X(k, t, 1)$$

Fin

$$L(t) = Pp(0) - Pp(1, t)$$

Arranger les valeurs de la perte et établir la fonction de répartition de la perte de la manière suivante :

Soit Y le vecteur trouvé après arrangement de composante $y_i, i = 1, \dots, T$

$$F(y_t) = \frac{\sum_{i=1}^t |y_i|}{\sum_{i=0}^T |y_i|}$$

La VaR est la valeur de la perte se trouvant à la position $\epsilon * T$, après arrangement des pertes, ϵ est le seuil.

Fin

FIN

2.7.2 Annexe 2.b : Le programme de la simulation historique

```
clear; clc;
```

```
function x = tri - insertion(x)
```

```
n = length(x)
```

```
for i = 2 :n
```

```
temp = x(i)
```

```

j = i-1
while j > 0 & temp < x(j)
x(j+1) = x(j)
j = j-1
end x(j+1) = temp
end
endfunction

seuil=input("Entrer le seuil : ");
N = input("Entrer le nombre des actifs : ");
for i = 1 :N
n(i) = input("Entrer le nombre de n(i) : " );
end

    T=input("Entrer la plage des données T : " );
for i = 1 :N
for t = 1 :T+1
x(t,i) = input("Entrer le nombre de x(k,i) : " );

    end
end
disp(n,"n = ");
disp(x,"x = ");
for i = 1 :N
for t = 2 :T+1
d(t,i) = [x(t,i)-x(t-1,i)]/(x(t-1,i));
end
end
disp(d,"d = ");
for i = 1 :N
for t = 2 :T+1
X(t,i,1) = x(T+1,i)*(1+d(t,i));

```

end

end

disp(X,"les valeurs estimées des actions X = ");

for t = 2 :T+1

for i = 1 :N

P(t,i,1) = n(i)*X(t,i,1);

end

end

disp(P,"P = ");

Pp0 = 114120;

for t = 1 :T+1

for i = 1 :N

Pp(t,i,1) = P(t,i,1);

end

Pp1(t) = sum(Pp(t, :));

L(t) = Pp0 - Pp1(t);

end

disp(Pp1," les valeur estimées du portefeuille est Pp1 = ");

disp(L,"L = ");

$R = tri - insertion(L);$

disp(R,"après arrangement, on a R = ");

Y = abs(R);

disp(Y,"y");

F = cumsum(Y)./sum(Y);

disp(F,"les valeurs de la fonction de répartition F");

m1 = ceil(T*seuil);

disp(m1,"m1");

VaR = R(m1);

disp(VaR,"la VaR au seuil choisi est :");

```
clf;  
plot(R,F);  
xtitle("Figure numéro 01 : ","Perte"," Fonction de répartition de la perte");  
legend('Distribution de la perte');
```

```
show-window ;
```

2.8 Annexe 3 : Pour une option

2.8.1 Annexe 3.a : L'algorithme pour une option

1. entrer le seuil choisi ϵ ;
2. entrer le nombre de simulations M ;
3. entrer la date courante t_0 ;
4. entrer la date d'échéance T ;
5. entrer le prix de l'exercice K de l'option ;
6. entrer la valeur de S_0 ;
7. entrer le prime de l'exercice p ;
8. entrer le drift risque neutre de la volatilité d_0 ;
9. entrer la volatilité de la volatilité q_0 ;
10. entrer le taux d'intérêt r ;
11. entrer le coefficient de corrélation entre Z_1 et Z_2 constant R_0 ;
12. $N = 250$, le nombre de période de temps, séparant l'instant présent et la date d'échéance ;
13. pour $t = t_0 : T$, définir l'intervalle de temps relatif à une période $\Delta t = \frac{T-t}{N}$;
14. a chaque simulation, attribuer un numéro n d'intervalle de temps ;
 $1 \leq n \leq N$;
15. simuler la valeur de V_1 (sinus) : $V_1 = 2R\text{nd}() - 1$ et la valeur de V_2 (cosinus) :
 $V_2 = 2R\text{nd}() - 1$ pour la valeur de simulation m qui varie de 1 à M ;
16. calculer la valeur de Z : $Z = V_1^2 + V_2^2$;
17. pour $Z < 1$, calculer les valeurs de Z_1, Z_2, Z_3 de la manière suivante : $Z_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(Z)}{Z}}$, $Z_3 = V_2 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(Z)}{Z}}$, $Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3$;
18. calculer la volatilité à l'échéance de la manière suivante :
19. $\sigma(n; m) = \sigma(n - 1; m) + D(n - 1; m)\Delta t + q(n - 1; m)\sqrt{\Delta t}Z_2(n, m)$;
20. Pour gagner en temps CPU, calculer, à chaque pas de temps, la quantité :
$$S(n; m) = S_0 \exp[r(T - t) - \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^2(n; m) + \sqrt{\Delta t} \sum_{n=1}^N \sigma(n; m)Z_1(n; m)]$$

21. à chaque simulation m , calculer, les quantités : $S_\sigma(m) = \sum_{n=1}^N \sigma^2(n; m)$ et $X_\sigma(m) = \sum_{n=1}^N \sigma(n; m)Z_1(n; m)$
22. la valeur du sous-jacent à l'échéance, pour la simulation N , est donnée par l'équation suivante :

$$S(n; m) = S_0 \exp[r(T - t) - \frac{\Delta t}{2} S_\sigma(m) + \sqrt{\Delta t} X_\sigma(m)]$$
23. calculer la valeur du sous-jacent à l'échéance relative à cette simulation. La valeur de l'option, relative à la simulation m , est : $C(m) = S(N, m) - K$.
24. la valeur finale de l'option, par la simulation de Monte Carlo, est :

$$\bar{C} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C(m) = \left[\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S(N; m) \right] - K$$
25. la valeur de l'option, à l'instant t , est donc : $C_{MC} = \bar{C} e^{-r(T-t)}$
26. calculer le résultat : $Rc = C_{MC} - P$
27. arranger les résultats par ordre croissant (l'arrangement est fait par un tri par insertion).
28. déterminer la fonction de répartition comme dans la simulation historique.
Soit Y le vecteur trouvé après arrangement de composante $y_i, i = 1, \dots, T$

$$F(y_t) = \frac{\sum_{i=1}^t |y_i|}{\sum_{i=0}^T |y_i|}$$
29. la VaR est la valeur du résultat se trouvant à la position de $M * \epsilon$.

2.8.2 Annexe 3.b : Algorithme de calcul

DEBUT

Seuil= entrer le seuil

m = numéro de simulation avec $1 \leq m \leq M$

M = nombre total de simulations

T = date d'échéance

t_0 = date courante

d_0 = le drift risque neutre de la volatilité

q_0 = la volatilité de la volatilité q_0

K = le prix de l'exercice de l'option

P = la prime pour l'exercice de l'option

Rc = le résultat d'un call

r = le taux d'intérêt r

N = 250 nombre de périodes de temps relatif à une période

$\Delta t = \frac{T-t}{N}$ = intervalle de temps relatif à une période

n = numéro de l'intervalle de temps $1 \leq n \leq N$

Pour m = 1 à M

Pour n = 1 à N

Faire

$D = d_0 \cdot \text{ones}(n, m);$

$q = q_0 \cdot \text{ones}(n, m);$

$V_1 = 2Rnd() - 1$

$V_2 = 2Rnd() - 1$

$Z = V_1^2 + V_2^2$

si $z < 1$ alors faire

$Z_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2Ln(Z)}{Z}}$

$Z_3 = V_2 \sqrt{\frac{-2Ln(Z)}{Z}}$

$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3$

$\sigma(n; m) = \sigma(n - 1; m) + D(n - 1; m)\Delta t + q(n - 1; m)\sqrt{\Delta t}Z_2(n, m)$

$A(n; m) = (r - \frac{1}{2}(\sigma(n; m))^2)\Delta t + \sigma(n; m)\sqrt{\Delta t}Z_1(n, m)$

$S(n; m) = S(0, m)e^{A(n; m)}$

$C(m) = \text{Max}(S(N; m) - K; 0)$

$\Sigma C(m) = \Sigma C(m) + C(m)$

Fin

$C_{MC} = e^{-r(T-t)}(\frac{1}{M}\Sigma C(m))$

$Rc = C_{MC} - P$

si $Rc < 0$ alors $Per = Rc$

FIN

2.8.3 Annexe 3.c : Le programme d'une option

```
clear; clc;
function x = tri - insertion(x)
n = length(x)
for i = 2 :n
temp = x(i)
j = i-1
while j > 0 & temp < x(j)
x(j+1) = x(j)
j = j-1
end
x(j+1) = temp
end
endfunction
seuil = input("Entrer le seuil de votre choix seuil = : ")
d0 = input("Entrer le drift risque neutre de la volatilité d0 = :");
q0 = input("Entrer la volatilité de la volatilité q0 = :");
P = input("Entrer le prime de l exercice :");
S0 = input("Entrer la valeur de S0 :");
T = input("Entrer la date d échéance : ");
M = input("Entrer le nombre total de simulations : ");
K = input("Entrer le prix de l exercice k :")
r = input("Entrer le taux d intérêt r : ")
t0 = input("Entrer la date initiale t0 : ");
t = t0 :T;
R0= input("Entrer le coefficient de corrélation entre Z1 et Z2 constant R0 :");
N = 250;
n = 1 :N;//numéro de l'intervalle de temps
dt = (T-t)/N;//intervalle de temps relatif à une période
for m = 1 :M
for n = 1 :N
```

```

D = d0.*ones(n,m);
q = q0.*ones(n,m);
v1 = 2*rand(n,m)-1;
v2 = 2*rand(n,m)-1;
z = v1.*v1 + v2.*v2;
end
end
for m = 1 :M
for n = 1 :N
if z(n,m) < 1 then
z11 = z(n,m);
z1 = v1.*sqrt(-2.*log(z11)./z11);
z3 = v2.*sqrt(-2.*log(z11)./z11);
z2 = Ro.*z1+sqrt(1-Ro*Ro.*z3);
end
end
end
for m = 1 :M
for n = 1 :N
s = D(n,m).*dt+q(n,m).*sqrt(dt).*z2(n, m);
Sm = cumsum(s);
A = (r-(1/2).*Sm.*Sm).*dt+Sm.*(sqrt(dt)).*z1(n, m);
GS = S0*exp(A);
C = max(GS-K,0);
SC = sum(C( :));
CMC = (SC/M).*exp(-r*(T-t));
Rc = CMC-P;
end
end
disp(SC,"SC = ");
disp(CMC,"CMC = ");
disp(Rc,"Rc = ");

```

```

disp(v1,"v1 = ");
disp(v2,"v2 = ");
disp(z,"z = ");
disp(z1,"z1 = ");
disp(z3,"z3 = ");
disp(z2,"z2 = ");
disp(s,"s = ");
for m = 1 :M
disp(Sm,"Sm = ");
disp(A,"A = ");
disp(GS,"GS = ");
disp(C,"C = ");
end
for m = 1 :M
Q = Rc( :);
R = tri - insertion(Q);
Y = abs(R);
F = cumsum(Y)./sum(Y);
end
disp(R,"après arrangement de Q, on a R = ");
disp(Y,"y");
disp(F,"les valeurs de la fonction de répartition F");
x2 = z3(:)
x1 = z1(:);
a2 = 1 :length(x2);
a1 = 1 :length(x1);
m1 = ceil(M*seuil);
disp(m1,"m1");
VaR = R(m1);
disp(VaR,"la VaR au seuil choisi est :");
clf;
subplot(221)

```

```

plot(R,F);
xlabel("Figure numéro 06 : ", "Perte", "Fonction de répartition de la perte")
legend('Distribution de la perte');
subplot(222)
plot(t,CMC);
xlabel("Figure numéro 07 : ..", "temps", "prix")
legend('Mouvement de prix');
subplot(223)
plot(a1 , x1);
xlabel("Figure numéro 08 : ..", "longueur de z1", "z1")
legend('Trajectoire de z1');
subplot(224)
plot(a2 , x2);
xlabel("Figure numéro 09 : ..", "longueur de z3", "z3")
legend('Trajectoire de z3');
show-window ;

```

2.9 Annexe 4 : Pour un action

2.9.1 Annexe 4.a : L'algorithme pour un action

1. entrer le seuil choisi ϵ ;
2. entrer le nombre de simulations M ;
3. entrer la date courante t_0 ;
4. entrer la date d'échéance T ;
5. entrer la valeur du portefeuille V_0 ;
6. entrer le prix p_0 ;
7. entrer le nombre d action a ;
8. entrer le drift risque neutre de la volatilité d_0 ;

9. entrer la volatilité de la volatilité q_0 ;
10. entrer le taux d'intérêt r ;
11. entrer le coefficient de corrélation entre z_1 et z_2 constant R_o ;
12. $N = 250$, nombre de période de temps, séparant l'instant présent et la date d'échéance ;
13. pour $t = t_0 : T$, définir l'intervalle de temps relatif à une période $\Delta t = \frac{T-t}{N}$;
14. a chaque simulation, attribuer un numéro n d'intervalle de temps ;
 $1 \leq n \leq N$;
15. simuler la valeur de V_1 (sinus) : $V_1 = 2R\text{nd}() - 1$ et la valeur de V_2 (cosinus) :
 $V_2 = 2R\text{nd}() - 1$ pour la valeur de simulation m qui varie de 1 à M ;
16. calculer la valeur de Z : $Z = V_1^2 + V_2^2$;
17. pour $Z < 1$, on calcule les valeurs de Z_1, Z_2, Z_3 de la manière suivante : $Z_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(Z)}{Z}}$, $Z_3 = V_2 \sqrt{\frac{-2\text{Ln}(Z)}{Z}}$, $Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3$;
18. calculer la volatilité à l'échéance de la manière suivante :
19. $\sigma(n; m) = \sigma(n - 1; m) + D(n - 1; m)\Delta t + q(n - 1; m)\sqrt{\Delta t}Z_2(n, m)$;
20. Pour gagner en temps CPU, calculer, à chaque pas de temps, la quantité :
 $S(n; m) = S_0 \exp[r(T - t) - \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^2(n; m) + \sqrt{\Delta t} \sum_{n=1}^N \sigma(n; m)Z_1(n; m)]$
21. à chaque simulation m , calculer, les quantités :
 $S_\sigma(m) = \sum_{n=1}^N \sigma^2(n; m)$ et $X_\sigma(m) = \sum_{n=1}^N \sigma(n; m)Z_1(n; m)$
22. la valeur du sous-jacent à l'échéance, pour la simulation N , est donnée par l'équation suivante :
 $S(n; m) = S_0 \exp[r(T - t) - \frac{\Delta t}{2} S_\sigma(m) + \sqrt{\Delta t} X_\sigma(m)]$
23. la valeur finale de l'action, par la simulation de Monte Carlo, est :
 $P(n; m) = P_0 * S(n; m)$.
24. la valeur du portefeuille, pour la simulation, est donc : $V(n; m) = a * P(n; m)$
25. La distribution de la perte est donnée par : $Per = V_o - V(n; m)$
26. arranger les résultats par ordre croissant (l'arrangement est fait par un tri par insertion).

27. déterminer la fonction de répartition comme dans la simulation historique.

Soit Y le vecteur trouvé après arrangement de composante $y_i, i = 1, \dots, T$

$$F(y_t) = \frac{\sum_{i=1}^t |y_i|}{\sum_{i=0}^T |y_i|}$$

28. la VaR est la valeur du résultat se trouvant à la position de $M * \epsilon$.

2.9.2 Annexe 4.b : Algorithme de calcul

DEBUT

Seuil = entrer le seuil

m = numéro de simulation avec $1 \leq m \leq M$

M = nombre total de simulations

T = date d'échéance

t_0 = date courante

r = le taux d'intérêt r

d_0 = le drift risque neutre de la volatilité

q_0 = la volatilité de la volatilité q_0

a = nombre d'actions

P_0 = prix initial d'action

N = 250 nombre de périodes de temps relatif à une période

$\Delta t = \frac{T-t}{N}$ = intervalle de temps relatif à une période

n = numéro de l'intervalle de temps $1 \leq n \leq N$

Pour m = 1 à M

Faire

Pour n = 1 à N

Faire

$D = d_0 \cdot \text{ones}(n, m);$

$q = q_0 \cdot \text{ones}(n, m);$

$V_1 = 2Rnd() - 1$

$V_2 = 2Rnd() - 1$

$Z = V_1^2 + V_2^2$

si $z < 1$ alors faire

$$Z_1 = V_1 \sqrt{\frac{-2Ln(Z)}{Z}}$$

$$Z_3 = V_2 \sqrt{\frac{-2Ln(Z)}{Z}}$$

$$Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3$$

$$\sigma(n; m) = \sigma(n - 1; m) + D(n - 1; m)\Delta t + q(n - 1; m)\sqrt{\Delta t}Z_2(n; m)$$

$$A(n; m) = (r - \frac{1}{2}(\sigma(n; m))^2)\Delta t + \sigma(n; m)\sqrt{\Delta t}Z_1(n; m)$$

$$S(n; m) = e^{A(n; m)}$$

$$P(n; m) = P0 * S(n; m)$$

$$V(n; m) = a * P(n; m)$$

$$Per = Vo - V(n; m)$$

Fin

FIN

2.9.3 Annexe 4.c : Le programme action

```

clear ; clc ;
function x = tri - insertion(x)
n = length(x)
for i = 2 :n
temp = x(i)
j = i-1
while j > 0 & temp < x(j)
x(j+1) = x(j)
j = j-1
end
x(j+1) = temp
end
endfunction
seuil = input("Entrer le seuil de votre choix seuil = : ");
d0 = input("Entrer le drift risque neutre de la volatilité d0 = :");
q0 = input("Entrer la volatilité de la volatilité q0 = :");

```

```

V0 = input("Entrer la valeur du portefeuille V0 = : ");
a = input("Entrer le nombre d action a : ");
p0 = input("Entrer le prix p0 : ");
T = input("Entrer la date d échéance : ");
M = input("Entrer le nombre total de simulations : ");
t0 = input("Entrer la date initiale t0 : ");
t = t0 :T;
r = input("Entrer le taux d intérêt r : ")
Ro = input("Entrer le coefficient de corrélation entre z1 et z2 constant Ro :");
N = 250 ;//le nombre de période de temps, séparant l'intant présent et la date d'échéance ;
n = 1 :N ;//numéro de l'intervalle de temps ;
dt = (T-t)/N ;//intervalle detemps relatif à une périod ;
for m = 1 :M
for n = 1 :N
D = d0.*ones(n,m) ;
q = q0.*ones(n,m) ;
v1 = 2*rand(n,m)-1 ;
v2 = 2*rand(n,m)-1 ;
z = v1.*v1 + v2.*v2 ;
end
end
for m = 1 :M
for n = 1 :N
if z(n,m) <1 then
z11 = z(n,m) ;
z1 = v1.*sqrt(-2.*log(z11)./z11) ;
z3 = v2.*sqrt(-2.*log(z11)./z11) ;
z2 = Ro.*z1+sqrt(1-Ro * Ro. * z3) ;
end
end
end
for m = 1 :M

```

```

for n = 1 :N
s = D(n,m).*dt+q(n,m).*sqrt(dt).*z2(n, m);
Sm = cumsum(s);
A = (r-(1/2).*Sm.*Sm).*dt+Sm.*(sqrt(dt)).*z1(n, m);
GS = exp(A);
P = P0 * GS;
V = a*P;
Per = V0-V;
end

```

```

end
disp(v1, "v1 = ");
disp(v2, "v2 = ");
disp(z, "z = ");
disp(z1, "z1 = ");
disp(z3, "z3 = ");
disp(z2, "z2 = ");
disp(z11, "z11 = ");
for m=1 :M
disp(s, "s = ");
disp(Sm, "Sm = ");
disp(A, "A = ");
disp(GS, "SG = ");
disp(P, "P = ");
disp(V, "V = ");
disp(Per, "Per = ");
end

```

```

for m=1 :M
Q=Per( :);
R = tri - insertion(Q);
Y = abs(R);

```

```

F = cumsum(Y)./sum(Y);
end
//disp(Q,"Q");
disp(R, "après arrangement, on a R = ");
disp(Y, "y");
disp(F, "les valeurs de la fonction de répartition F = ");
x2 = z3(:);
a2 = 1 :length(x2);
x1 = z1(:);
a1 = 1 :length(x1);
x3 = z2(:);
//disp(x3,"x3")
m1 = ceil(M*seuil);
disp(m1,"m1");
VaR = R(m1);
disp(VaR, "la VaR au seuil choisi est :");
clf;
subplot(221)
plot(R,F);
xlabel("Figure numéro 02 : ", "Perte", "Fonction de répartition de la perte")
legend('Distribution de la perte');
subplot(222)
plot(t,P);
xlabel("Figure numéro 03 : ", "temps", "prix")
legend('Mouvement de prix');
subplot(223)
plot(a1,x1);
xlabel("Figure numéro 04 : ..", "longueur de z1", "z1")
legend('Trajectoire de z1');
subplot(224)
plot(a2, x2);
xlabel("Figure numéro 05 : ..", "longueur de z3", "z3")

```

legend('Trajectoire de z_3 ');

show-window ;

2.9.4 Annexe 5 :Loi de poisson limite de la loi binomiale

Considérons une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli, [42]⁸ ; la probabilité de n succès dans N épreuves est : $\pi_n = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$. En posant $q = 1-p$ on a : $\pi_n = C_N^n p^n q^{N-n}$, ou : $\pi_n = \frac{p^n q^{-n}}{n!} N(N-1)\dots(N-n+1)q^N$

La quantité $u_N = N(N-1)\dots(N-n+1)q^N$ s'écrit : $u_N = (1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})\dots(1-\frac{n-1}{N})N^n q^N$ n étant fixé, le produit des n-1 premiers facteurs tend vers 1, lorsque n augmente indéfiniment ; en posant : $v_N = N^n q^N$ alors $\text{Log}v_N = n\text{Log}N + N\text{Log}q = N(\frac{n\text{Log}n}{N} + \text{Log}q)$ la parenthèse tend vers $\text{Log}q < 0$, $\text{Log}v_N$ tend vers $-\infty$ et v_N tend vers 0. Il en résulte que π_n tend vers zéro. Mais, si nous lisons la probabilité de succès p et le nombre N d'épreuves, les résultats peuvent être différents. En supposant, par exemple, que : $Np = \mu$ où μ est une constante positive.

π_n s'écrit : $\pi_n = \frac{\mu^n}{n!} (1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})\dots(1-\frac{n-1}{N})(1-\frac{\mu}{N})^{-n} (1-\frac{\mu}{N})^N$ quand N tend vers l'infini $(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})\dots(1-\frac{n-1}{N})(1-\frac{\mu}{N})^{-n}$ est le produit de n facteurs dont chacun tend vers 1 ; ce produit tend donc vers 1 ; sachant que $(1-\frac{\mu}{N})^N$ tend vers $e^{-\mu}$, nous obtenons ainsi la limite, quand $N \rightarrow \infty$ est $e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}$. Ainsi, la probabilité π_n de la valeur n dans la distribution binomiale tend vers la probabilité de la valeur n dans la distribution de Poisson de moyenne μ . Nous pouvons donc considérer celle-ci comme une approximation de la distribution binomiale. Mais, cette approximation ne peut pas être employée dans le problème suivant : étant donné une suite de n épreuves binomiales, où la probabilité de succès est donnée et où N est grand, calculer la probabilité que le nombre de succès soit compris entre deux nombres donnés. Léonce Liseur et Jean Lefebvre ont cherché une approximation de cette probabilité pour les grandes valeurs de N et, plus particulièrement, en faisant tendre N vers l'infini. Puisque p, cette fois, est fixé, ils ont prévu que n et N-n augmentent indéfiniment.

8. Léonce Liseur et Jean Lefebvre "Complements d'analyse, Statistique et Probabilités"pp-420-421

2.9.5 Annexe 6 : Loi Normale limite de la loi binomiale

En effet, [42]⁹ :

en considérant la variable centrée réduite : $\xi_N = \frac{X_N - Np}{\sqrt{Npq}}$ et l'évènement $\lambda_1 \leq \xi_N \leq \lambda_2$ Où (λ_1, λ_2) est un intervalle fini donné; ceci signifie qu'il est imposé à l'écart de X_N à $E(X_N)$ d'être compris entre $\lambda_1\sqrt{npq}$ et $\lambda_2\sqrt{npq}$ c'est-à-dire entre $\lambda_1\sigma(X_N)$ et $\lambda_2\sigma(X_N)$

La probabilité π_n est donnée par : $\pi_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$ en appliquant la formule de Stirling ($n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$), nous avons :

$\pi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{N}{n(N-n)}} \left(\frac{Np}{n}\right)^n \left(\frac{Nq}{N-n}\right)^{N-n} e^\theta$ avec $\theta = \theta_N - \theta_n - \theta_{N-n}$ L'évènement $\xi_N < \xi$ est caractérisé par $X_N < Np + \xi\sqrt{Npq}$; pour passer à la variable réduite, nous effectuons le changement de variable défini par : $n = Np + \xi\sqrt{Npq}$

Nous avons $\frac{Np}{n} = \frac{1}{1+\xi\sqrt{\frac{q}{Np}}}$, $\frac{Nq}{N-n} = \frac{1}{1-\xi\sqrt{\frac{p}{Nq}}}$ d'où :

$$\begin{aligned} \text{Log}\left[\left(\frac{Np}{n}\right)^n \left(\frac{Nq}{N-n}\right)^{N-n}\right] &= -(Np + \xi\sqrt{Npq}) \text{Log}\left(1 + \xi\sqrt{\frac{q}{Np}}\right) \\ &- (Nq - \xi\sqrt{Npq}) \text{Log}\left(1 - \xi\sqrt{\frac{p}{Nq}}\right) \end{aligned}$$

En effectuant le développement de Mac-Laurin du second membre, le calcul donne comme terme principal $-\frac{1}{2}\xi^2$; l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{\xi^3}{\sqrt{N}}$ (si $p \neq q$ et d'ordre supérieur si $p=q$). L'erreur commise, en remplaçant le premier membre par $-\frac{1}{2}\xi^2$, est donc majorée quel que soit $\xi \in [\lambda_1, \lambda_2]$ par une quantité $\frac{A}{\sqrt{N}}$ et nous écrivons :

$$\left(\frac{Np}{n}\right)^n \left(\frac{Nq}{N-n}\right)^{N-n} = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} e^{\frac{a(\xi)}{\sqrt{N}}}, |a(\xi)| \leq A;$$

$$\text{Nous pouvons écrire : } \sqrt{\frac{N}{n(N-n)}} = \frac{1}{\sqrt{Npq}} \left(1 + \frac{\xi(q-p)}{\sqrt{Npq}} - \frac{\xi^2}{N}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Il vient : } \sqrt{\frac{N}{n(N-n)}} = \frac{1}{\sqrt{Npq}} \left(1 + \frac{a'(\xi)}{\sqrt{N}}\right), |a'(\xi)| \leq A';$$

$$\text{Pour } \theta, \text{ nous avons : } |\theta| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{n} + \frac{1}{N-n}\right) \text{ Nous pouvons écrire : } \frac{1}{n} + \frac{1}{N-n} =$$

$$\frac{1}{Npq} \frac{1}{(1+\xi\sqrt{\frac{q}{Np}})(1-\xi\sqrt{\frac{q}{Np}})}$$

$$\text{et nous posons : } \theta = \frac{a''(\xi)}{N}, |a''(\xi)| \leq A''.$$

$$\text{Nous obtenons ainsi : } \pi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} e^{\frac{a(\xi)}{\sqrt{N}} + \frac{a''(\xi)}{N}} \left(1 + \frac{a'(\xi)}{\sqrt{N}}\right).$$

Lorsque N augmente indéfiniment, π_n est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ et nous pouvons poser :

$$\pi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \left(1 + \frac{b(\xi)}{\sqrt{N}}\right), |b(\xi)| \leq B$$

L'évènement $\lambda_1 \leq \xi \leq \lambda_2$ a la même probabilité que celui-ci :

$Np + \lambda_1\sqrt{Npq} \leq X_N \leq Np + \lambda_2\sqrt{Npq}$, c'est-à-dire $\sum \pi_n$, où la somme est étendue à toutes les valeurs entières n de l'intervalle; en désignant par j_1, j_2, \dots, j_r , les valeurs correspondantes de ξ sont données par : $\xi_h = \frac{j_h - Np}{\sqrt{Npq}}$, $h = 1, \dots, r$ et l'écart de deux ξ_k consécutifs

9. Léonce Lesieur et Jean Lefebvre "Complements d'analyse, Statistique et Probabilités" pp-421-423

est $\frac{1}{\sqrt{Npq}}$. Nous avons :

$\sum \pi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{Npq}} \sum_h e^{-\frac{1}{2}\xi_h^2} (1 + \frac{b_h}{\sqrt{N}}) \frac{1}{\sqrt{Npq}} \sum_h e^{-\frac{1}{2}\xi_h^2}$ est une valeur approchée de l'intégrale :

$I(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ En faisant tendre N vers l'infini, $\frac{1}{\sqrt{Npq}} \sum_h e^{-\frac{1}{2}\xi_h^2}$ tend vers $I(\lambda_1, \lambda_2)$; nous avons d'autre part : $\frac{1}{\sqrt{Npq}} \sum_h e^{-\frac{1}{2}\xi_h^2} \frac{b_h}{\sqrt{N}} \leq \frac{B}{\sqrt{N}} (\frac{1}{\sqrt{Npq}} \sum_h e^{-\frac{1}{2}\xi_h^2})$ et le premier membre tend vers zéro, quand N augmente indéfiniment. Il en résulte la limite, quand N tend vers l'infini de $\sum \pi_n$ est égale à : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} I(\lambda_1, \lambda_2)$, nous trouvons le théorème de Moivre-Laplace suivant :

Si X_N désigne le nombre de succès dans la suite d'épreuves de Bernoulli ($p > 0$) où le nombre N augmente indéfiniment, nous avons : $Pr(X_N = x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} e^{-\frac{(x-Np)^2}{2Npq}}$

$\lim Pr(\lambda_1 \leq \frac{X_N - Np}{\sqrt{Npq}} \leq \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ quand N augmente indéfiniment

Plus brièvement, lorsque N tend vers l'infini, p restant constant, la distribution de la variable aléatoire binomiale réduite tend vers la distribution normale. IL est dit qu'elle est asymptotiquement normale.

Bibliographie

- [1] Alain Monfort, [2008-2009] *"Cours d'Économétrie de la Finance"*, PP-459,
- [2] Alain Monfort, [2006], *"Multi-lag Term Structure Models with Stochastic Risk Premia"*, PP-69,
- [3] Alain Monfort, [2007], *"Optimal Portfolio Allocation Under Asset and Surplus VaR Constraints"*, PP-31
- [4] Alain Monfort, [2008], *"Une Modélisation Séquentielle de la VaR"*, PP-27,
- [5] Alain Monfort, [2003], *"Variables Latentes et Modélisation Statistique en Assurance"*, PP-30 ,
- [6] Alejandro Balbás, [2007], *"Mathematical Methods in Modern Risk Measurement : A Survey"*, PP-205-219,
- [7] Andersen, T.G., [1994], *"Stochastic autoregressive volatility : a framework for volatility modeling, Mathematical Finance"*, PP-75-102,
- [8] Andrzej Blacha, [2009], *"Advanced Scenario Generation for Historical Value-at-Risk Calculations : Empirical Analysis on Equity Option"*, PP-100,
- [9] Antonio Díaz María de la O González Eliseo Navarro, *"Bond Portfolio Immunization, Immunization Risk and Idiosyncratic Risk : Spanish Experience"*, PP-18,
- [10] *"Basel Committee on Banking Supervision, Operational Risk-Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord"*, January 2001, PP-139
- [11] Bollerslev, T., [1986], *"Generalized autoregressive conditionnal heteroskedasticity, Journal of Econometrics"*, PP-987-1008,
- [12] Bollerslev, T., R.F. Engle et D.B. Nelson, [1993], *"ARCH models, in The Handbook of Econometrics"*, Volume 4, Chapter 11,

- [13] Boulier, J-F., A. Brabant, R.Dalaud et A-L. Dieu, [1997], Risque de marché : "Vue de Profil, Direction de la Recherche et de l'Innovation, Crédit Commercial de France", quants, 28,
- [14] Box Muller, [2011] TP11.Vecteurs gaussiens
- [15] Brigitte Godbillon-Camus et Christophe J.Godlewski, [2005], "Gestion du Risque de Crédit dans la Banque : Information Hard, Information Soft et Manipulation", PP-26,
- [16] "Capital Adequacy Directive (CAD), directive 93/6/CEE du Conseil du 15 mars 1993 sur l'adéquation des fonds propres des entreprises d'investissements de crédit, *Journal Officiel des Communautés Européennes*," numéro L 141/1-26,
- [17] Cardenas, J., E. Fruchard, E. Koehler, C.Michel et I. Thmazeau, [1997], "VaR : One step beyond, *Risk magazine*", PP-72-75,
- [18] C.Gourieroux, Alain.Monfort and V.Polimenis, [2005], "Affine Model for Credit Analysis", PP-56,
- [19] C.Gourieroux and Alain Monfort, [2003], "Equidependence in Qualitative and Duration Models with Application Credit Risk", PP-49,
- [20] Christiant Labrousse, "Introduction à l'économetrie" 3^e et 4^e années de licence ès Sciences économiques. Diplôme d'Etudes Supérieures de Sciences économiques Grandes Ecoles, PP-150,
- [21] Christoffersen, P.F., F.X. Diebold et T.Schuermann, [1998], "Horizon Problems and Extreme Events in Financial Risk Management, *FRBNY Economic Policy Review*",
- [22] Christophe Godowski, [2004], "L'assimilation de la méthode RAROC en milieu bancaire ", PP-117-133,
- [23] Darrell Duffe and Jun Pan, [1997] "An Overview of Value at Risk", PP-39
- [24] Davé, R.D et G. Stahl, [1999], "On the accuracy of VaR estimates based on the variance-covariance approach", Workin paper,
- [25] Diebold, F.X.,A.Hicikman, A.Inoue et T.Schuermann, [1997], "Conveting 1-Day Volatility to h-Day volatility : Scaling by \sqrt{h} is worse than you think, *The wharton school*", University of Pennsylvania, PP-97-34,
- [26] Eengel, R.F., [1982], "Autoregressive conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of the U.K.inflation,*Econometrica*", PP-987-1008,

- [27] Florian Herzog, [2005] *"Strategic Portfolio Management for Long-Term Investments : An Optimal Control Approach"* PP-194,
- [28] Gaël Didier, [2008], *"Inférence Indirecte et Modèles à Volatilité Stochastique"* PP-32,
- [29] Gary Chamberlain and Michael Rothschild, [1982], *"Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets"*, PP-46,
- [30] H.Bertholon, A.Monfort and F.Pegoraro, [2007], *"Econometric Asset Pricing Modelling"*, PP-63,
- [31] Hela Dahen, [2006], Thèse sur *"La Quantification du Risque Opérationnel des Institutions Bancaires"*, PP-168 ,
- [32] Harry Markowitz, [1952] *"Portfolio Selection"* The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), PP- 77-91.,
- [33] Harry Markowitz, [2002] *Markowitz's " Portfolio Selection : A Fifty- Year Reprospective"*,
- [34] Jean-Baptiste Desquilbet, [2010], *"Value at Risque"*, PP-29,
- [35] Jean-Christophe Bouetté and Jean-François Chassagneux, [2005] *"Mesures de risque et allocation optimale de capitale"*, PP-66,
- [36] Jean-Pierre Gueyié (UQAM), Guy Charest (Laval/UQAM),et Francis Mensah, MBA, CFA, CMA, [2008], *"Valeur à Risque et Crédit à Risque"*, PP-33-58,
- [37] Jean-Yves Ouvrard, [2000], *"maîtrise agrégation"* probabilités 2, PP-557,
- [38] Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft *"A Decision Rule Based on the Conditional Value at Risk"* PP-11,
- [39] Jón Daniélsson : London School of Economics, Bjørn N. Jorgensen : University of Colorado at Boulder, Gennady Samorodnitsky : Cornell University, Gennady Samorodnitsky : Cornell University and Casper G. de Vries : Erasmus University Rotterdam, Tinbergen Institute Rotterdam, [2011] *"Fat Tails, VaR and Subadditivity"*,
- [40] J.P.Morgan and Reuters, [1996], *"RiskMetrics"*, PP-282,
- [41] K. M. Bensafta, *"La gestion du Risque de Marché : Application de la Valeur-à-Risque"*, PP-26,
- [42] Léonce Lesieur et Jean Lefebvre, [1967], *"Complements d'analyse, Statistique et Probabilités"*, PP-526,

- [43] Michel Rothschild, [1985], *"Asset Pricing Theories"*, PP-25,
- [44] Miguel Ángel Martin Mato, *"Classic and Modern Measures of Risk in fixed Income Portfolio Optimization"*, PP-15,
- [45] Mme Monique Bourven et M.Yves Zehr, [2009], *"La crise Bancaire et la Régulation Financière"*, PP-90,
- [46] Monica Billio, Lorian Pelizzon, [2000], *"Value-at-Risk : a multivariate switching regime"*, Journal of Empirical Finance 7, PP-531-554,
- [47] Phillippe Bernard, [2007], *"Le modèle d'Équilibre des Actifs Financiers"*, PP-32,
- [48] Regis Bourbonnais, [2002], *"Économétrie"* 4^e édition, PP-303,
- [49] Robert F.Engle Victor Ng Michael Rothschild, [1988] , *"Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure : Empirical Estimates for Treasury bills"*, PP-36,
- [50] Robert J. Bianchi, Adam E. Clements and Michael E. Drew , *"Portfolio Selection and Hedge Funds : Linearity, Heteroscedasticity, Autocorrelation and Tail-Risk"*, PP-236,
- [51] Robert J. Bianchi, Adam E. Clements and Michael E. Drew , *"Portfolio Selection and Hedge Funds : The Effects of Autocorrelation and Tail Risk"*, PP-31,
- [52] Sessi N. Tokpavi, [2008] *"Essais sur la Value-at-Risk : mesures de risque intra-journalières et tests de Validation"*, PP-243,
- [53] Slim Mseddi, [2008] *Gestion des risques et la valeur de l'entreprise*, PP-248
- [54] Stefan Koch *"Using Value-at-Risk for IS/IT Project and Portfolio Appraisal and Risk Management"*, PP-6,
- [55] Taylor, S.J. [1994], Modeling stochastic volatility : a review and comparative study,"*Mathematical Finance*", PP-183-204,
- [56] T. Canel, B. Gautier et N. Zamfirescu, [1991] *"Mesure de Performance-Risque des SICAV"*, PP-317-345,
- [57] Thierry Roncalli, [2011], *"Introduction à la Gestion des Risques"*, PP-184
- [58] Thierry Roncalli, [2009], *"La Gestion des Risques en Gestion d'Actifs"*, PP-37
- [59] Thierry Roncalli, *"Value at Risk"*, PP-24,
- [60] Yacin Jerbi, [2006], Thèse de Doctorat *"Évaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique"*, PP-618,

Résumé : Le présent mémoire contribue à la littérature sur les deux principaux axes de recherche relatifs à la Value-at-Risk (VaR) : la méthode paramétrique du calcul de la VaR (Variance-Covariance) et les méthodes non paramétriques (Simulation historique et simulation de Monte-Carlo). En rapport au premier axe, la méthode paramétrique a été utilisée pour le cas statique et en considérant l'interdépendance. Dans cette optique, en premier lieu la VaR a été examinée à l'aide de la Variance-covariance et la moyenne, en deuxième lieu, la VaR pour les facteurs observables et inobservables et, enfin, la VaR a été introduite pour les rendements auto régressifs. Pour la deuxième axe, nous avons pu élaborer trois algorithmes qui simulent la VaR, notamment d'une manière historique, pour une action et pour une option.

Mots clés : VaR, Variance-Covariance, interdépendance, Portefeuille, actifs, action, option, simulation.

Abstract : The present memory contributes to the literature on the two principal research orientations about of the Value-at-Risk (VaR) : parametric method for calculating the VaR (Volativity-covolativity) and no-parametric methods (historical Simulation and simulation of Monte-Carlo). In report with the first axis, we used the parametric method for the static case and by considering the interdependent. Accordingly, we examined initially the VaR by using the Volativity-covolativity, in secondly we examined VaR for the observable and unobservable factors, finally we introduce the autoregressif VaR for the return . For the second axis, we could draw up three algorithms which simulate the VaR in particular historical simulation, in one another for one action and too one option.

Key words : VaR, Variance-covariance, interdependent, Portfolio, Asset, action, option, simulation

Le numero 1 mondial du memoires



www.rapport-gratuit.com

clubmemoire@gmail.com