Sommaire

SOMMAIRE

Table des figures

Introduction générale

Si naturelle que soit la définition de la somme d'une série convergente, il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit avant tout d'une limite, ce qui transporte le problème du champ de l'algèbre (dont relèvent les sommations) à celui de l'analyse.

L'objet de ce présent mémoire est de mettre en évidence que certaines propriétés algébriques, usuelles pour les sommes finies, ne "résistent" pas à ce passage à la limite.

Nous allons exposer dans ce travail divers résultats sur la théorie du réarrangement et sommabilité des séries numériques.
Nous rappellerons d'abord dans le premier chapitre des résultats généraux sur les séries. Par la suite, le deuxième chapitre sera consacré aux théorèmes généraux du réarrangement des séries numériques et particulièrement de la série harmonique alternée qui est un cas classique illustrant le changement de la somme lors du réarrangement et même de sa nature.

Le troisième chapitre concerne les séries doubles pour lesquelles l'interversion des deux sommes infinies prend plus d'ampleur.

Le quatrième chapitre est réservé au produit des séries : un exemple qui montre l'importance de l'invariance de la somme par réarrangement pour que ce produit puisse avoir un sens.

Dans le dernier chapitre, nous introduisons une définition qui assure l'unicité de la somme d'une série quelque soit l'ordre choisi, et on est alors amené à la théorie des familles sommables.
Nous terminons avec une remarque générale.

1 Généralités

Définition 1. *Soit* $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}$*. On pose, pour tout* n *de* $\mathbb{N}$ *:* $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$*. La suite ainsi définie* $S=(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, est une suite d'éléments de* $\mathbb{R}$ *appelée série associée à la suite* u*. On la note* $(\sum u_n)$ *ou* $(\sum_n u_n)$ *s'il y a un risque de confusion sur l'indice.*
L'élément de $\mathbb{R}$: $\mathbf{S_n}=\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}}\mathbf{u_k}$, *est appelé* ***la somme partielle*** *d'indice* n*, de la série* $(\sum u_n)$*.*

EXEMPLE : La série de terme général $(\frac{1}{k})$, c'est à dire $(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k})$ est appelée la *série harmonique*.

REMARQUES :

- En pratique, connaissant (u_n), la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\sum u_k$ est définie par la formule :

$$S_n=\sum_{0}^{n}u_k,\ \ pour\ \ tout\ \ n\in\mathbb{N}$$

  Réciproquement, si la suite (S_n) est connue, le terme général u_n de la série est déterminé par $S_0=u_0$ et :

$$u_n = S_n - S_{n-1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

La suite (u_n) est alors parfaitement déterminée.

1.1 Convergence et divergence d'une série

La série de terme général u_k est dite convergente si la suite (S_n) où $S_n = \sum\limits_0^n u_k$ converge dans $\mathbb{R}$, sinon, elle est dite divergente.

⊵ Exemples graphiques :

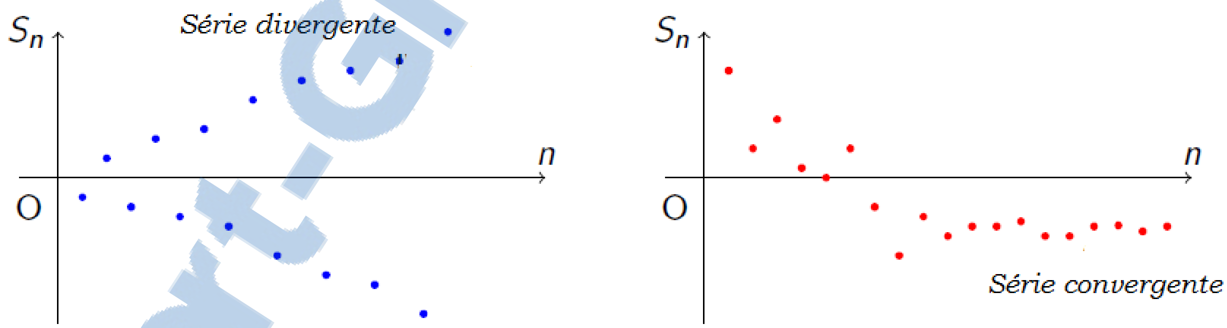


Figure 1.1 – Convergence et divergence d'une série

Notation :

Lorsque la série $(\sum u_k)$ converge, la limite de la suite (S_n) des sommes partielles est appelée **somme de la série** et elle est notée : $(\sum\limits_{n\geq 0} u_n)$.

Théorème 1. *Si la série $(\sum u_k)$ converge, son terme général tend vers 0.*

Démonstration. Le terme général de la série est : $u_n = S_n$-S_{n-1}.
Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 diverge. Elle est dite série grossièrement divergente. □

Exemple :

Une série géométrique est une série associée à une suite géométrique. La série $(\sum a^n)$ converge si et seulement si $|a| < 1$.
Plus généralement, pour $|a| < 1$, p fixé dans $\mathbb{N}$, la série géométrique de terme général $(a^k)_{k \geq p}$ converge et a pour somme :

$$\sum_{k \geq p} a^k = \frac{a^p}{1-a}$$

Lorsque $|a| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.

Remarques :

- Il faut bien distinguer la série $(\sum u_k)$ de la somme $(\sum_{n \geq 0} u_n)$ de la série qui n'est définie que lorsque la série converge.
- Deux séries qui diffèrent par un nombre fini de termes sont de même nature, c'est-à-dire sont simultanément convergentes ou divergentes.

1.2 Reste d'une série convergente

Lorsque la série $(\sum u_k)$ converge, on peut alors pour n fixé dans $\mathbb{N}$ définir $R_n = S - S_n$, où S est la somme de la série $(\sum u_k)$.
R_n est appelé le reste d'ordre n de la série $(\sum u_k)$.

1.3 Séries à termes positifs

1.3.1 Premiers critères

Définition 2. *On dit qu'une série $(\sum u_n)$ est une série à termes positifs si tous les termes de la suite (u_n) sont positifs.*

Théorème 2. *La suite* (S_n) *des sommes partielles d'une série à termes positifs* $(\sum u_n)$ *est croissante.*

Corollaire 1. *Une série* $(\sum u_n)$ *de réels positifs converge si et seulement si la suite* (S_n) *des sommes partielles de cette série est majorée et, dans ce cas :*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

Théorème 3. *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang, on ait :*

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Si :

- $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge*
- $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge*

1.3.2 Règle de comparaison

Théorème 4 (Règle de comparaison)**.** *Soient* (u_n) *et* (α_n) *deux suites de nombres réels positifs telles que* $u_n = \theta(\alpha_n)$, *alors la convergence de la série* $(\sum \alpha_n)$ *implique celle de la série* $(\sum u_n)$.

Démonstration. L'hypothèse $u_n = \theta(\alpha_n)$ se traduit par :

$$\exists M \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq M\alpha_n$$

Le théorème 3 permet de déduire. □

Corollaire 2. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de nombres réels positifs telles que,* $u_n \sim v_n$.
Alors les séries $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *sont de même nature, c'est à dire qu'elles sont simultanément convergentes ou divergentes.*

1.4 Critère de Cauchy

Définition 3. *La suite (x_p) de réels (ou de complexes) est appelée* ***suite de Cauchy*** *lorsqu'elle vérifie la condition :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,k) \in \mathbb{N}^2 : p \geq N \Longrightarrow |x_{p+k} - x_p| \leq \epsilon$$

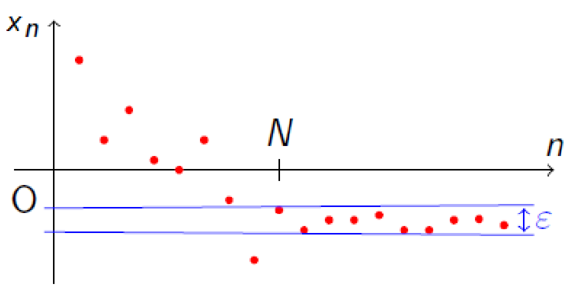


FIGURE 1.2 – SCHÉMA ILLUSTRANT LE CRITÉRE DE CAUCHY

Théorème 5 (Critère de Cauchy pour les séries)**.** *La série de terme général (u_k) converge si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} : n \geq N \Longrightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leq \epsilon$$

1.5 Séries alternées

Une série réelle de terme général (u_n) est dite alternée lorsque la suite $((-1)^n\ u_n)$ est de signe constant.

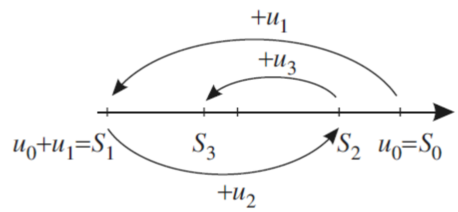


Figure 1.3 – Critère des séries alternées

Théorème 6 (Leibniz)**.** *Soit* $(\sum u_n)$ *une série alternée telle que la suite* $(|u_n|)$ *tende vers 0 en décroissant. Alors :*

- *La série* $(\sum u_n)$ *converge.*
- *Sa somme est comprise entre toutes sommes partielles consécutives.*
- *Pour tout n,* $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} u_k$ *est du signe de* u_{n+1}, *et :* $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

1.6 Séries absolument convergentes

Définition 4. *Une série* $(\sum u_n)$*, est dite absolument convergente lorsque la série* $(\sum |u_n|)$ *converge.*

Théorème 7. *Toute série absolument convergente est convergente.*
De plus, on a alors :

$$|\sum_{0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{0}^{\infty} |u_n|$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N, tel que pour tout $m > n > N$ on a :

$$|\sum_{k=n}^{m} u_k| < \epsilon$$

Mais

$$|\sum_{k=n}^{m} u_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |u_k|$$

donc,

$$|\sum_{k=n}^{m} u_k| \leq \epsilon$$

et le critère de Cauchy montre que la série de terme général u_n converge. On a également, pour tout entier m,

$$|\sum_{k=0}^{m} u_k| \leq \sum_{k=0}^{m} |u_k|$$

et en faisant tendre m vers l'infini,

$$|\sum_{k=0}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|.$$

□

1.7 Séries semi-convergentes

Définition 5. *Une série convergente, mais non absolument convergente, est dite* ***semi-convergente****.*

Ainsi la série $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$, est semi convergente.

Théorème 8. *Si la série de terme général u_n est semi-convergente, et la série de terme général v_n est absolument convergente, alors la série de terme général $(u_n + v_n)$ est semi-convergente.*

Démonstration. Si la série de terme général (u_n+v_n) était absolument convergente, alors :

$$|u_n| \leq |u_n + v_n| + |v_n|$$

et la série de terme général u_n serait absolument convergente. □

1.8 Régle de Cauchy et de d'Alembert

[20] Soit k un réel positif ; on sait que la série de terme général (k^n) est convergente si $k < 1$, et divergente si $k \geq 1$. Les règles que nous donnons ici concernent des séries qu'on peut comparer à une série géométrique.
Dans cette optique, on étudie la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$, ce qui conduit à la règle de Cauchy, et lorsqu'elle existe, on étudie la suite $(|\frac{u_{n+1}}{u_n}|)$, ce qui conduit à la règle de D'Alembert.

Théorème 9 (Régle de Cauchy)**.** *Soit (u_n) une suite à termes positifs. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ a une limite ℓ quand n tend vers ∞. Alors :*

- *Si $\ell < 1$, la série de terme général u_n est convergente ;*
- *Si $\ell \geq 1$, la série de terme général u_n est divergente.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien affirmer a priori quant à la nature de la série $\sum u_n$, on parle du cas douteux de la règle de Cauchy.*

Théorème 10 (Régle de D'Alembert)**.** *Soit (u_n) une suite à termes positifs. On suppose que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est définie pour n assez grand et a une limite ℓ quand n tend vers ∞. Alors :*

- *Si $\ell < 1$, la série de terme général u_n est convergente ;*
- *Si $\ell \geq 1$, la série de terme général u_n est divergente.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien affirmer a priori quant à la nature de la série $\sum u_n$, on parle du cas douteux de la règle de D'Alembert.*

1.9 Groupement des séries

Définition 6. *Soit $(\sum u_n)$, une série à valeurs dans $\mathbb{R}$, et ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que $\phi(0) = 0$.*

La série de terme général : $v_n = \sum_{k=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_k$ *est dite déduite de* $(\sum u_n)$ *par* ***regroupement des termes****, ou par* ***sommation par tranches*** *(définie au moyen de la fonction* ϕ*).*

Théorème 11. *Si* $(\sum u_n)$ *converge, alors la série déduite par regroupement de ses termes* $(\sum v_n)$ *est convergente, de plus elles ont la même somme.*

Démonstration. Cette proposition résulte de ce que (V_n) la suite des sommes partielles de $(\sum v_n)$ est extraite de (S_n) la suite des sommes partielles de $(\sum u_n)$.

□

Théorème 12. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, *et s'il existe* $M \in \mathbb{N}^*$ *tel que,* $\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(n+1) - \phi(n) \leq M$, *alors* $(\sum u_n)$, *et* $(\sum v_n)$ *sont de même nature.*

Démonstration. .
□ Montrons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, s'il existe $M \in \mathbb{N}^*$, tel que :

$$\phi(n+1) - \phi(n) \leq M,$$

et s'il existe $p_n \in \mathbb{N}$, unique tel que :

$$\phi(p_n) \leq n < \phi(p_n + 1)$$

De plus , on a $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

En effet,

- Si p_n existe, on a $p_n = max\{p \in \mathbb{N}, \phi(p) \leq n\}$, d'où l'unicité.

- Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\phi(k) \leq k$, il en résulte que le sous-ensemble de $\mathbb{N}$: $\{p \in \mathbb{N}, \phi(p) \leq n\}$ est majoré par n, comme il est non vide (il contient 0), il admet un plus grand élément, ce qui assure l'existence de p_n.

- En écrivant $\phi(p) = \phi(p) - \phi(0) = \sum_{k=1}^{p} [\phi(k) - \phi(k-1)] \leq pM$, on obtient :

$$n < \phi(p_n + 1) \leq (p_n + 1)M, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty.$$

□ D'après le théorème précédent, on a déjà :

$$\left(\sum u_n \textbf{ converge }\right) \Longrightarrow \left(\sum v_n \textbf{ converge}\right)$$

Montrons maintenant que : $\left(\sum v_n \textbf{ converge }\right) \Longrightarrow \left(\sum u_n \textbf{ converge}\right)$

Formons $|V_{p_n} - U_n| = |\sum_{k=n+1}^{\phi(p_n+1)-1} u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\phi(p_n+1)-1} |u_k|$

On a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_n = \sup_{p \geq n} |u_p|$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

En remarquant que $\phi(p_n + 1) - 1 - n \leq M$, on obtient :

$$|V_{p_n} - U_n| \leq M u_n.$$

$$\text{donc, } \lim_{n \to +\infty} U_n - V_{p_n} = 0.$$

Par ailleurs, en posant $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$,

On a : $\lim_{n \to +\infty} V_n = V$,

donc : $\lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty$,

il vient : $\lim_{n \to +\infty} V_{p_n} = V$, finalement : $\lim_{n \to +\infty} U_n = V$. $\square$

2 Théorie du réarrangement

Introduction :

Il est bien connu, qu'on peut permuter l'ordre des sommations quand on manipule des sommes finies. Le fait que ces sommes soient égales résulte donc, de la commutativité de l'addition mais aussi de son associativité.
Une question se pose : est ce qu'on peut généraliser les propriétés concernant les sommes finies aux " sommes infinies " ?

2.1 Modification de l'ordre des termes d'une série

[1]

Définition 7. *Soit* $(\sum u_n)$, *une série dans* $\mathbb{R}$ *et* σ *une permutation de* $\mathbb{N}$. *La série* $(\sum v_n)$ *de terme général* $(v_n = u_{\sigma(n)})$ *est dite déduite de* $(\sum u_n)$ *par* ***modification de l'ordre des termes*** *ou par* ***réarrangement*** *(associé à* *la permutation de σ).*

Exemples génériques :

1) Un réarrangement peut, sans changer la nature, modifier la somme d'une série

Considérons, par exemple la série harmonique alternée : $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, transformée en :

$$\sum_{n\geq 1} u'_n = 1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}+\ldots+\tfrac{1}{2n-1}-\tfrac{1}{2(2n+1)}-\tfrac{1}{4n}+\tfrac{1}{2n+1}-\ldots$$

D'après le théorème 12, $(\sum\limits_{n\geq 1} u'_n)$ est de même nature et a éventuellement même somme que :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} v_n &= (1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})-\frac{1}{8}\ldots-\frac{1}{4n}+(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)})+\ldots\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\ldots\\ &= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots)=\frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

On constate que $\sum\limits_{n\geq 1} v_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.
En conséquence, $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$, et donc $\sum\limits_{n\geq 1} u'_n$ sont convergentes et de somme : $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Le réarrangement a "divisé la somme par 2"

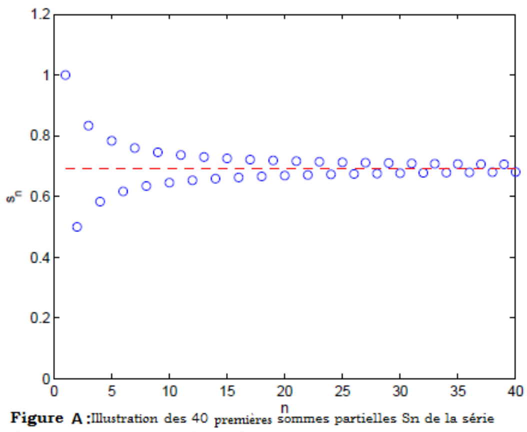


Figure A : Illustration des 40 premières sommes partielles Sn de la série alternée et harmonique de l'exemple .
Les sommes partielles impaires décroissent et les sommes partielles paires croissent jusqu'à atteindre la somme de la série : ln(2), comme indiquée pointillées.

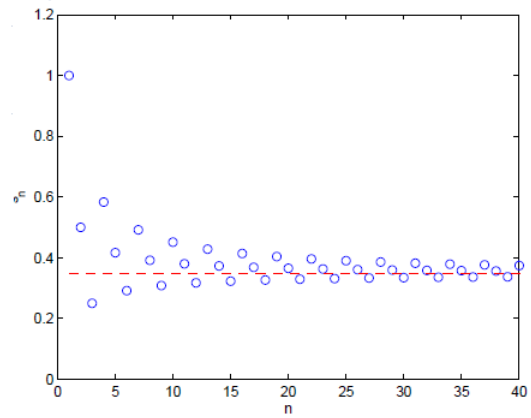


Figure B : Illustration des 40 premières sommes partielles Sn de la série harmonique alternée après réarrangement de ces termes .La série converge vers la moitié de la somme de la série originale ; 1/2 log 2

Figure 2.1 – Les 40 premières sommes partielles de la série harmonique alternée, avant et après réarrangement

2) Un réarrangement peut modifier la nature d'une série :

Considérons encore la série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On peut réarranger $(u'_n)_{n\geq 1}$ telle que $(\sum u'_n)$ puisse par un regroupement de termes, donner une série $(\sum v_n)$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > \frac{1}{n+1}$, en prenant :

$v_0 = 1$

$v_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \ldots + \frac{1}{15} > \frac{1}{2}$

$v_2 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \ldots + \frac{1}{51} > \frac{1}{3}$

$\vdots$

$v_n = \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2p_n+1} + \ldots \frac{1}{2p_{n+1}-1} > \frac{1}{n+1}$

(L'existence de p_{n+1} est assurée par le fait que la série $(\sum\limits_{k\geq p_n} \frac{1}{2k+1})$ diverge

Par construction $(\sum v_n)$ est divergente car $(\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})$ et donc $(\sum u'_n)$ est également divergente .

Par modification de l'ordre des termes, nous avons ainsi transformé une série convergente en une série divergente.

2.2 La série harmonique alternée

[8] Considérons la série harmonique alternée précédemment évoquée :

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln(2)$$

Considérons maintenant une autre série :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Notons que l'ajout de 0 entre deux termes ne changera pas la somme de la série. Nous obtenons donc,

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Maintenant, ajoutons terme à terme cette série à la série harmonique alternée, on aura alors :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\ldots = \frac{3}{2}\ln(2)$$

Notez que la série résultante est un réarrangement de la série harmonique alternée, mais elle converge vers une autre somme.

L'objectif de cette partie est de présenter quelques résultats classiques illustrant ce phénomène.

2.2.1 Théorème d'Ohm

Théorème 13. *[7]*

Pour p et q entiers positifs, réorganiser la série : $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, *revient à prendre les p premiers termes positifs et les q premiers termes négatifs, en deuxième étape, prendre les p termes positifs suivants, les q termes négatifs suivants, et ainsi de suite...*
La série a la forme :

$$\underbrace{(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2p-1})}_{p}-\underbrace{(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{2q})}_{q}+\underbrace{(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1})}_{p}-\underbrace{(\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{4n})}_{q}\cdots$$

(1)

Alors la série réarrangée converge vers :

$$\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(\frac{p}{q})$$

Démonstration. [21]
Considérons les suites (H_m) et (E_m) tel que :
Pour tout m entier positif,

$$H_m = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\tfrac{1}{m} \quad \text{et} \quad E_m = H_m - \ln(m+1)$$

Sachant que :

$$\lim_{m\to\infty} E_m = \gamma \text{ [1]}$$

On a :

1. La constante d'Euler-Mascheroni γ est définie comme étant la limite de la différence entre la série harmonique et le logarithme naturel : $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$ Les 10 premières décimales de la constante d'Euler-Mascheroni (suite A001620 de l'OEIS) sont : $\gamma \approx 0,5772156649$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m(p+q)} u_k &= \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=p(j-1)+1}^{p_j}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=q(j-1)+1}^{q}\frac{1}{2i}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{2mp-1}\frac{1}{i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{mp-1}\frac{1}{i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{mn}\frac{1}{i}\\
&= H_{2mp-1}+\frac{1}{2}H_{mp-1}-\frac{1}{2}H_{mq}\\
&= \ln(2mp)-\frac{1}{2}\ln(mp)-\frac{1}{2}\ln(mq+1)+E_{2mp-1}-\frac{1}{2}E_{mp-1}-\frac{1}{2}E_{mq}\\
&= \ln(2)+\frac{1}{2}\ln(\frac{mp}{mq+1})E_{2mp-1}-\frac{1}{2}E_{mp-1}-\frac{1}{2}E_{mq}
\end{aligned}$$

En faisant tendre m vers l'infini,

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m(p+q)} u_k = \ln(2)+\ln(\tfrac{p}{q})+\gamma-\tfrac{1}{2}\gamma-\tfrac{1}{2}\gamma = \ln(2)+\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{p}{q}).$$

□

2.2.2 Réarrangement de Pringsheim

Le théorème suivant est une généralisation du théorème d'Ohm.

Théorème 14. *[9]*

Soit u_n une suite à termes positifs qui tend vers 0 en décroissant et tel que la série $\sum_n (-1)^{n-1}u_n$ converge.
Si on réarrange les termes de $\sum_n (-1)^{n-1}u_n$ en prenant alternativement p termes positifs, puis q termes négatifs et ainsi de suite...
Alors la série réarrangée converge vers :

$$\mathbf{S} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{g}\,\ln(\mathbf{k})$$

avec : $g = \lim_{n\to\infty} n.u_n$ *et* $k = \frac{p}{q}$

En particulier, si $u_n = \frac{1}{n}$ on a le théorème d'Ohm.

2.3 Réarrangement de Reimann

2.3.1 Historique du réarrangement de Riemann

En 1827, Dirichlet a découvert un résultat surprenant en travaillant sur les conditions qui assurent la convergence des séries de Fourier. Il a été le premier à se poser la question de la possibilité de réorganiser les termes de certaines séries (maintenant connues sous le nom des séries semi-convergentes), de sorte qu'on obtienne une somme différente.
Comment un tel résultat est-il possible ? Dirichlet n'a jamais été en mesure d'en donner une réponse (dans un article publié en 1837, il se contente de prouver que le réarrangement des termes d'une série absolument convergente ne modifie pas sa somme).
En 1852, Riemann a commencé à travailler sur un document étendant les résultats de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier. Il a alors trouvé une explication remarquable à ce que représente ce comportement "bizarre", maintenant connu sous le nom de **" Théorème de réarrangement de Riemann"**, qu'il a incorporé dans son article sur les séries de Fourier.
L'article a été publié après sa mort en 1866, sous le titre **"Sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique"** [2].

2.3.2 Théorème de réarrangement de Riemann

[6] Si une série à termes réels est semi-convergente, alors on peut réarranger ses termes pour qu'elle converge vers n'importe quel réel ou même tendre vers l'infini.
Notons que l'exemple traité précédemment en est une parfaite illustration.

2. Riemann, Bernhard. “Uber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.” Gesammelte Mathematische Werke (Leipzig 1876) : 213–53.

Théorème 15. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels dont la série associée est semi-convergente.*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, alors il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Lemme 1. *Soit $(\sum_n u_n^+)$ et $(\sum_n u_n^-)$ qui sont respectivement les termes positifs et négatifs de la série $(\sum u_n)$ avec :*

$$u_n^+ = max(u_n, 0) \quad et \quad u_n^- = min(0, u_n)$$

Si la série est semi-convergente alors les séries : $(\sum_n u_n^+)$ et $(\sum_n u_n^-)$ divergent et on a :

$$\sum_{n\geq 0} u_n^+ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad et \quad \sum_{n\geq 0} u_n^- \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Démonstration. Soit $(\sum u_n)$ une série semi-convergente telle que :

$$\sum u_n = \sum u_n^+ + \sum u_n^-$$

Pour étudier la nature de $(\sum u_n^+)$ et $(\sum u_n^-)$, on distingue 4 cas possibles :

- Cas 1 : $(\sum u_n^+)$, converge et $(\sum u_n^-)$, converge.
- Cas 2 : $(\sum u_n^+)$, converge et $(\sum u_n^-)$, diverge.
- Cas 3 : $(\sum u_n^+)$, diverge et $(\sum u_n^-)$, converge.
- Cas 4 : $(\sum u_n^+)$, diverge et $(\sum u_n^-)$, diverge.

On ne peut pas avoir le premier cas car :
Si on suppose que $\sum u_n^+ = S$ et $\sum u_n^- = -T$ avec $T > 0$
alors : $\sum |u_n^-| = T$.
d'où : $\sum |u_n| = \sum u_n^+ + \sum |u_n^-|$,
$(\sum |u_n|)$ est la somme de deux séries convergentes contradiction, la série $(\sum u_n)$

est semi-convergente.

On ne peut pas avoir les cas 2 et 3 car :
Si l'un des deux séries $(\sum u_n^+)$ ou $(\sum u_n^-)$ diverge, alors $(\sum u_n)$ diverge, contradiction ; la série est semi-convergente d'où le résultat.

□

Démonstration. (théorème 15).

Construction de la permutation :

On construit une permutation σ de $\mathbb{N}$ de la façon suivante.
On commence à sommer les termes positifs ou nuls (sans en omettre) jusqu'à dépasser α. Puis on somme tous les termes strictement négatifs jusqu'à ce que la somme partielle soit strictement inférieure à α. Puis on itère le procédé, en sommant les termes positifs à partir de là où on s'était arrêté, puis les termes négatifs, etc... On a alors bien construit une permutation.

Convergence :

Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles obtenue à chaque fin de sommation de termes positifs et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celle des sommes partielles à chaque fin de sommation de termes négatifs. La suite complète des sommes partielles croît jusqu'à x_0, puis décroît jusqu'à y_0, puis croît jusqu'à x_1, etc... Pour montrer qu'elle converge vers α, il suffit donc de montrer que les deux sous-suites et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers α.

Or si u_{k_n} désigne le dernier terme de la somme partielle x_n, on a par construction : $x_n - u_{k_n} \leq \alpha < x_n$, donc $0 < x_n - \alpha \leq u_{k_n}$.

Comme la suite des indices k_n est strictement croissante, elle tend vers l'infini donc : $\lim_{n\to\infty} u_{k_n} = \lim_{k\to\infty} u_k = 0$.

Ceci prouve que la suite x_n converge vers α.

On procède de même pour y_n, ce qui achève la preuve.

$\square$

Exemple.1 :[8]
Considérons la série harmonique alternée :

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots$$

Nous savons déjà que cette série converge vers $\ln(2)$.
Cependant, montrons que cela est vrai en appliquant le théorème de réarrangement de Riemann.
D'abord notons par $\sum_n a_n,$ la série des termes positifs de la série harmonique alternée et $\sum_n b_n,$ celle des termes négatifs .
En utilisant le théorème de réarrangement de Riemann, nous obtenons la première somme partielle S_1, en ajoutant des termes de la série $\sum_n a_n,$ jusqu'à avoir $S_1 > \ln(2) \approx 0.6931$:

$$S_1 > \ln(2)$$

Pour construire la deuxième somme partielle S_2, on ajoute des termes de la séries des termes négatifs $(\sum_n b_n)$ à S_1, jusqu'à avoir $S_2 < \ln(2)$:

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} < \ln(2)$$

Pour construire S_3, on ajoute suffisamment de termes de $(\sum_n a_n)$ à S_2 pour avoir $S_3 > \ln(2)$:

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \approx \ln(2).$$

et de même, on ajoute suffisamment de termes de la série $(\sum_n b_n),$ à S_3 jusqu'à avoir $S_4 < \ln(2)$:

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \approx 0.5833 < \ln(2)$$

Poursuivant ce processus, nous obtenons les sommes partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
S_{10} &\approx 0.6456 < \ln(2)\\
S_{21} &\approx 0.7164 > \ln(2)\\
S_{30} &\approx 0.6768 < \ln(2)\\
S_{41} &\approx 0.7052 > \ln(2)\\
S_{50} &\approx 0.6832 < \ln(2)\\
S_{71} &\approx 0.7018 > \ln(2)\\
S_{80} &\approx 0.6886 < \ln(2)\\
S_{91} &\approx 0.7002 > \ln(2)\\
S_{100} &\approx 0.6898 < \ln(2)\\
S_{111} &\approx 0.6993 > \ln(2)\\
S_{120} &\approx 0.6906 < \ln(2)\\
S_{131} &\approx 0.6986 > \ln(2)
\end{aligned}$$

Chaque fois qu'on ajoute des termes négatifs pour avoir une somme partielle inférieure à $\ln(2)$, la somme croit et s'approche de la somme de la série harmonique alternée. De même, quand on ajoute assez de termes positifs pour avoir la nouvelle somme partielle, la suite des sommes partielles décroît et s'approche de $\ln(2)$.
En d'autres termes, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $S_{2k} \to \ln(2)^-$ et $S_{2k+1} \to \ln(2)^+$.

Exemple.2 :[8]

Considérons à nouveau la série harmonique alternée. Nous voulons montrer qu'il existe un réarrangement qui converge vers $\frac{3}{2}\ln(2) \approx 1.0397$. En appliquant le théorème de Riemann, nous obtenons les sommes partielles suivantes :

$S_1 = 1 + \frac{1}{3} \approx 1.3333 > \frac{3}{2}\ln(2)$
$S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \approx 0.8333 < \frac{3}{2}\ln(2)$

$S_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \approx 1.1762 > \frac{3}{2}\ln(2)$
$S_4 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \approx 0.9261 < \frac{3}{2}\ln(2)$
$S_5 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \approx 1.2191 > \frac{3}{2}\ln(2)$
$\vdots$
$S_{35} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots - \frac{1}{32} + \frac{1}{65} + \frac{1}{67} + \frac{1}{71} \approx 1.0538 > \frac{3}{2}\ln(2)$
$S_{36} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots - \frac{1}{32} + \frac{1}{65} + \frac{1}{67} + \frac{1}{71} - \frac{1}{36} \approx 1.02598 < \frac{3}{2}\ln(2)$
$S_{37} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots - \frac{1}{34} + \frac{1}{69} + \frac{1}{71} - \frac{1}{36} + \frac{1}{73} + \frac{1}{75} \approx 1.05301 > \frac{3}{2}\ln(2)$
$S_{38} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdots - \frac{1}{34} + \frac{1}{69} + \frac{1}{71} - \frac{1}{36} + \frac{1}{73} + \frac{1}{75} - \frac{1}{38} \approx 1.02669 < \frac{3}{2}\ln(2)$

Notez que, si nous continuons ce processus, les sommes partielles finissent par converger vers $\frac{3}{2}\ln(2)$.

Remarques :

- Soit la série $\sum\limits_k u_k$. L'ensemble des sommes de tous ses réarrangements convergents est noté $\mathbf{S}(\sum \mathbf{u_k})$ et est défini par :

$$\mathbf{S}(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u_k}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{u}_{\pi(\mathbf{k})} \quad \text{pour toutes permutations } \pi\}$$

- Pour les séries $\sum\limits_k u_k$ semi-convergentes on a $S(\sum\limits_k u_k) = \mathbb{R}$.

Théorème 16 (Dirichlet)**.** *[4]*
Chaque réarrangement d'une série absolument convergente est convergente et a la même somme.

Démonstration. Admettons que $(\sum\limits_n |u_n|)$ converge, alors $(\sum\limits_n u_n)$ converge. On veut montrer que chaque réarrangement de la série $(\sum\limits_n u_n)$ converge vers la même somme que la série originale.

Cas particulier :

Supposons que : $u_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Alors la suite de la somme partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\sum_n u_n)$ est croissante et bornée de limite S (La somme de la série $(\sum_n u_n)$), qui est égal au $\sup_{n\in\mathbb{N}}(S_n)$.

Soit f une permutation de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de la somme partielle de la série réarrangée $(\sum_n u_{f(n)})$.
Alors (t_n) est une suite croissante.
Montrons que $t_n \leq S$, pour tout n.
Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $M(n) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\{f(1), f(2), ... f(n)\} \subset \{1, 2, ..., M(n)\}$$

Prenons $M(n) = max\{f(1), f(2), ..., f(n)\}$,
alors $t_n \leq S_{M(n)} \leq s$,
cela montre que la série réarrangée converge, notons t sa somme avec $t \leq s$.

Résumé : Si la série est à termes positifs converge alors chaque réarrangement converge vers la somme de la série originale.
Mais $(\sum_n u_n)$ est un réarrangement de la série $(\sum_n u_{f(n)})$ donc sa somme est inférieur à t.
D'où : s=t et ceci achève la preuve pour les séries à termes positifs.

Cas général :

Soit $(\sum_n u_n)$ tel que $\sum_n u_n = \sum_n u_n^+ - \sum_n u_n^-$.

Pour tout réarrangement de $(\sum_n u_n)$ introduit un réarrangement de $(\sum_n u_n^+)$ et $(\sum_n u_n^-)$, et d'après les résultats du **cas particulier,** ces réarrangements convergent vers la somme des séries originales : $(\sum_n u_n^+)$ et $(\sum_n u_n^-)$. Alors la série réarrangée qui est la somme de la série réarrangée de termes positifs et la série réarrangée des termes négatifs converge vers la somme initiale. □

2.4 Réarrangement de Sierpiński

2.4.1 Lien avec le réarrangement de Riemann

Dans le théorème de Riemann, la permutation utilisée pour réarranger une série conditionnellement convergente [3] pour obtenir une valeur donnée dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nous pouvons avoir des points arbitrairement non-fixes, à savoir que tous les indexés des termes de la série peuvent être réorganisés. On peut se demander s'il est possible de réorganiser uniquement les indexes dans un ensemble plus restreint de sorte qu'une série conditionnellement convergente, converge vers un nombre réel ou diverge à l'infini (positif ou négatif). La réponse à cette question est positive : Sierpiński a donné une condition suffisante pour réorganiser seulement certains termes strictement positifs ou seulement certains termes strictement négatifs.

Théorème 17 (de Siepisńki)**.** *[8]*
Soit la série $(\sum_i u_i)$ *une série semi-convergente de réels, qui converge vers S.*
Pour tout $V \leq S$*, il existe un réarrangement* (v_i) *de* (u_i) *tel que* $\sum_i v_i = V$ *laissant fixes tout les termes négatifs.*
De même, pour tout $W \geq S$*, il existe un réarrangement* (w_j) *de* (u_i) *tel que* $\sum_j w j = W$ *et le réarrangement laisse fixe tous les termes positifs.*

2.5 Convergence commutative

Définition 8. *Une série* $(\sum_n u_n)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est dite **commutativement convergente**, si et seulement si pour toute bijection* σ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*, la série* $(\sum_n u_{\sigma(n)})$ *est convergente .*

3. Conditionnellement convergente : semi-convergence

2.5.1 Convergence commutative et convergence absolue

Théorème 18. *[18]*
Soit I un ensemble dénombrable, $(u_i)_{i\in I}$ une série d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par I, la série $(\sum\limits_{i\in I} u_i)$ est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.

Démonstration. 1-*La convergence absolue entraine la convergence commutative :*
Puisque $(\sum\limits_{i\in I} |u_i|)$ est automatiquement commutativement convergente, la série $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_{\pi(n)}|)$ est convergente pour toute bijection π de $\mathbb{N}$ sur I. On déduit que la série $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{\pi(n))}$ est convergente. Il reste à voir que la somme S est indépendante de la bijection π choisie, ce qui est facile.

2-*La convergence commutative entraine la convergence absolue :*

Choisissons une bijection avec laquelle nous identifions I à $\mathbb{N}$, ce qui permet d'écrire la série considérée $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n)$.
Nous allons montrer que cette série ne peut être commutativement convergente que si la série partielle des termes positifs et la série partielle des termes négatifs sont convergentes, ce qui entraine la convergence absolue.
En effet, supposons par exemple, que la série partielle des termes positifs soit divergente et réordonnons la série de la façon suivante : on commence par prendre dans l'ordre les premiers termes positifs jusqu'à ce que leur somme soit supérieur à 1 ; on prend alors les premiers termes négatifs, on prend ensuite les termes positifs suivants jusqu'à ce que la somme de la série partielle obtenue soit supérieur à 2, ce qui est rendu possible par l'hypothèse, etc.., on voit que la série obtenue est divergente.

□

3 Produit de deux séries

Introduction :

La propriété de commutativité des séries absolument convergentes est nécessaire pour donner un sens au produit de deux séries.

Définition 9. *On appelle* ***produit des séries*** $(u_r)_{r\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$, *la série de terme général* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *avec :*

$$w_r = u_0 v_r + u_1 v_{r-1} + \dots + u_r v_0 = \sum_{k=0}^{r} u_k v_{r-k}.$$

? QUESTION :

Si les séries $(u_r)_{r\in\mathbb{N}}$ et $(v_r)_{r\in\mathbb{N}}$ convergent, alors leurs produit est-il convergent et a t-on dans ce cas : $\sum\limits_r w_r = (\sum\limits_i u_i)(\sum\limits_j v_j)$

RÉPONSE : Non.

Considérons l'exemple suivant : $(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$.

Les deux séries sont de terme général : $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \geq 1$, en

prenant $u_0 = v_0 = 0$.
En appliquant le critère de convergence des séries alternées [1], les deux séries convergent. Montrons que leurs produit diverge.
En effet, on a : $w_0 = u_0 v_0 = 0$ et $w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 = 0$.
Pour $n \geq 2$:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

Or, pour $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$k(n-k) \leq (n-1)(n-1) = (n-1)^2 \implies \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

On voit que,

$$(-1)^n w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 1$$

Alors w_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini donc la série $(\sum w_n)$ diverge grossièrement.

Remarques :

* Pour pouvoir définir le produit de deux séries numériques , il faut vérifier si ces séries ne sont pas affecter par le réarrangement.

En effet, a priori il n'y a pas de formule simple ou évidente pour considérer le produit

$$(\sum_{r=1}^{+\infty} u_r).(\sum_{p=1}^{+\infty} v_p) = (u_1 + u_2 + ...).(v_1 + v_2 + ...)$$

On pourrait certes imaginer qu'il suffit de sommer tous les produits $u_i.v_j$.

1. Si la série alternée vérifie les deux hypothèses suivantes :
-$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ (les termes généraux décroissent en valeur absolue)
-$u_n \to 0$ (le terme général tend vers 0). Alors le critère de convergence des séries alternées est vérifiée et la série est convergente.

Le problème est que dans ce cas, on obtient un tableau plutôt qu'une suite :

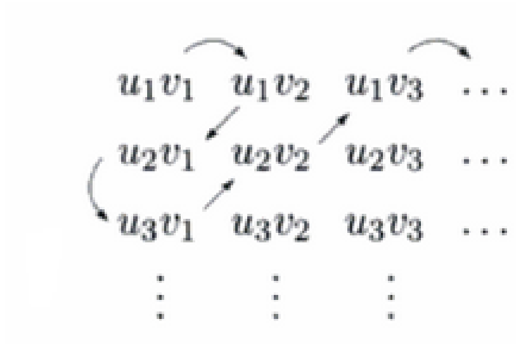


FIGURE 3.1 – TABLEAU DE PRODUIT

Cela dit, tous les éléments du tableau peuvent être ordonnés de manière à constituer une suite (par exemple en progressant selon les diagonales successives, ainsi que l'indiquent les flèches figurant sur le tableau des nombres). Reste cependant une difficulté majeure : la série produit de deux séries convergentes $(u_r)_{r\in\mathbb{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ i.e. la série de terme général :

$$w_k = \sum_{k=r+p} u_r.v_p$$

peut être divergente. Par contre, si l'une des séries au moins est absolument convergente, alors la série produit converge aussi absolument, c'est pourquoi on est conduit au théorème suivant.

Théorème 19. *[12] Si les séries $(\sum u_k)$ et $(\sum v_p)$* ***convergent*** *respectivement vers U et V et que l'une d'entre elles* ***converge absolument,*** *alors la* ***série produit*** *$(\sum_r w_r)$ converge vers :*

$$W = U.V$$

Démonstration. Soient $s_n = \sum\limits_{r=0}^{n} u_r$, $k_n = \sum\limits_{r=0}^{n} v_r$ et $z_n = \sum\limits_{r=0}^{n} w_r$ les sommes partielles de rang n des différentes séries considérées.

En utilisant la définition du produit de deux séries, on a :

$$\begin{aligned} z_n = \sum_{r\geq 1} w_r &= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + ... + (u_0 v_n + u_1 v_n - 1 + ... + u_n v_0) \\ &= u_0(v_0 + v_1 + ... + v_n) + u_1(v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}) + ... u_n v_0 \\ &= u_0 k_n + u_1 k_{n-1} + ... u_n k_0 \\ &= u_0(v + r_n) + u_1(v + r_{n-1}) + ... + u_n(v + r_0) \\ &= s_n v + u_0 r_n + u_1 r_{n-1} + ... u_n r_0 \end{aligned}$$

où, $r_n = k_n - v \to 0$, il vient alors :

$$z_n - s_n.v = u_0 r_n + u_1 r_{n-1} + ... u_n r_0 = \gamma_n \ \mathbf{(1)}$$

Puisque $s_n v \to uv$ quand n tend vers l'infinie. Il faut donc prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

Supposons que ce soit $(\sum u_r)$ qui converge absolument et posons

$$\alpha = \sum_{r=0}^{+\infty} |u_r|.$$

Soit alors un nombre arbitraire $\epsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier N tel que, $|r_n| < \epsilon$
Si $n > N$ (la série $(\sum v_r)$ est en effet convergente, ce qui implique que $r_n = v_n - v \to 0$). On a donc pour $n > N$:

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |r_0 u_n + ... + r_N u_{n-N}| + |r_{N+1} u_{n-N} + ... + r_n u_0| \\ &\leq |r_0 u_n + ... + r_N u_{n-N}| + \epsilon\alpha. \end{aligned}$$

Puisque $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour N fixé,
on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \sup|\gamma_n| \le \epsilon\alpha.$$

Et la condition ($\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$) est vérifiée et en faisant tendre n vers l'infini dans **(1)**.

Il vient alors :

$$\sum_{r=0}^{+\infty} w_r = v \sum_{r=0}^{+\infty} u_r = U.V.$$

$\square$

4 Séries doubles à termes réels

Introduction :

Au vu de ce qui précède, la permutation des termes dans une somme infinie n'est pas sans difficultés.
On peut donc imaginer sans peine, que l'interversion de deux sommes infinies risque elle aussi, de poser quelques problèmes mathématiques.

Définition 10. *La série double est une série dont le terme général correspond à une application de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Ainsi on pourra écrire ce terme général sous la forme : $(u_{m,n})_{(m,n)}$.
La série double est dite ***à termes positifs*** *si :*

$$u_{m,n} > 0, \text{ pour tout } (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Une telle série peut être représentée par une matrice infinie (figure 5.1) :

$$
\begin{array}{cccccc}
u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & \dots & u_{0,n} & \cdots \\
u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} & \cdots \\
u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} & \cdots \\
. & . & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & . & \cdots \\
u_{m,0} & u_{m,1} & u_{m,2} & \dots & u_{m,n} & \cdots \\
. & . & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & . & \cdots
\end{array}
$$

FIGURE 4.1 – REPRÉSENTATION D'UNE SÉRIE DOUBLE

Remarques :

- Une série double peut encore être vue comme **une série de séries**, chaque série correspondant à une ligne ou(une colonne) de la matrice infinie (figure 5.2) :

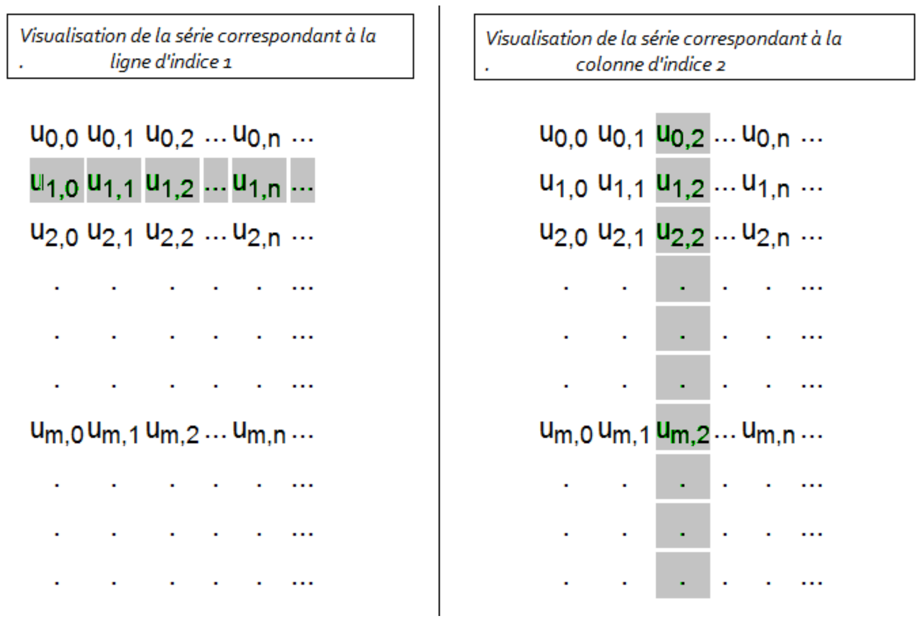


FIGURE 4.2 – SÉRIE DOUBLE VISUALISÉE PAR LIGNE OU COLONNE

- Définissons encore un **"rectangle"**, de dimensions (m,n) (d'origine (0,0)), comme la matrice finie des termes $u_{i,j}$ avec $0 \leq i \leq m$ et $0 \leq j \leq n$.
  Nous colorions ci-dessous, le rectangle de dimensions (3,2) (figure 5.3) :

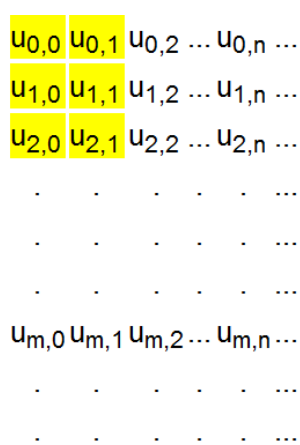


FIGURE 4.3 – SÉRIE DOUBLE VISUALISÉE PAR RECTANGLES

Pour un tel rectangle nous désignerons par $s_{m,n}$ la somme de tous les termes du rectangle de dimensions (m+1,n+1) :

$$s_{m,n} = \sum_{i=0,j=0}^{m+1,n+1} u_{i,j}.$$

C'est l'équivalent des sommes partielles pour les séries simples.

4.0.1 Convergence d'une série double

Définition 11. *On dit que la série double de terme général* $(u_{m,n})$ *et de sommes partielles* $s_{m,n}$ *converge vers la limite S si :*

$\forall \epsilon > 0,\ \exists (M,N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$ *vérifiant* $m > M$ *et* $n > N$, *on ait :* $|s_{m,n} - S| < \epsilon.$

Théorème 20. *La série double de terme général* $(u_{m,n})$ *converge si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

- *Pour tout i (i est quelconque mais fixé), la série* $(\sum_j u_{i,j})$ *est convergente (la somme porte sur j)*
- *La série de terme général :* $v_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j}$ *est convergente*

Dans ce cas on dit que $S = \sum_{i=0}^{\infty} v_i$ *est la somme de la série double et l'on note :*

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j}$$

Théorème 21. *Si la série* $(\sum_{m,n} u_{m,n})$ *converge alors* $\lim_{(m,n)\to\infty} u_{m,n} = 0$

Démonstration. La preuve résulte de : $u_{m,n} = s_{m,n} - s_{m-1,n} - s_{m,n-1} + s_{m-1,n-1}$. □

Théorème 22 (Critère de Stolz)**.** *Quelque soit* $\epsilon > 0$*, il existe deux entiers p et q tels que pour tout* $m > p$ *et* $n > q$ *on a :* $|s_{m+i,n+j} - s_{m,n}| < \epsilon$*, pour tout* $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*.*

C'est l'équivalent du critère de Cauchy pour les séries doubles.

⚠ La satisfaction du critère de Stolz est une condition nécessaire et suffisante de convergence pour les séries doubles.

Définition 12 (Convergence absolue)**.** *On dit qu'une série double de terme général* $(u_{m,n})$ *est absolument convergente si la série double de terme général* $(|u_{m,n}|)$ *est convergente.*

4.0.2 Réarrangement des séries doubles

Pour calculer la somme d'une série double, on distingue entre deux formes :

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right) \text{ et } \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right)$$

Bien que l'ordre de sommation est sans importance dans le cas fini, l'ordre est très important pour les séries doubles.
Cela n'est pas surprenant, puisque ce fait est vrai même pour les séries simples (**Voir : principe de réarrangement (p.19)**).

En particulier, considérons l'exemple suivant :

$$\left.\begin{array}{cccccccl}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots\ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Dans chaque ligne, on a : $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 0$.
Par conséquent, pour tout i, on a : $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = 0 \quad (\star)$

Shématisons le résultat $(\star)$:

$$\left.\begin{array}{l}
(1 - 1 + 0 + 0 \ldots) \\
\qquad\quad + \\
(0 + 1 - 1 + 0 + 0 \ldots) \\
\qquad\quad + \\
(0 + 0 + 1 - 1 + 0 + 0 \ldots)
\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{c} 0 \\ + \\ 0 \\ + \\ 0 \\ \vdots \end{array}\right\} = 0$$

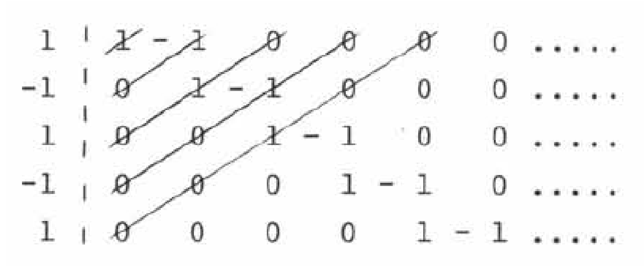
D'autre part, la première colonne a pour somme 1, tandis que les autres colonnes ont 0 pour somme d'où : $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} = 1$ et $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = 0$ pour $j = 2, 3, \ldots$
Ainsi :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right) = 1 + 0 = 1. \quad (\star\star)$$

En comparant $(\star)$ et $(\star\star)$, on déduit que :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right) \neq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$

Considérons maintenant, la sommation par diagonale comme indiqué ci-dessous, la série double diverge :



En d'autres termes, la somme d'une série double est considérablement affectée par le réarrangement des termes.

Le théorème suivant, nous donnera une situation où on aura l'égalité.

Théorème 23 (Théorème d'interversion Fubini)**.** *Soit* $(u_{n,p})_{n,p}$ *le terme général de la série double* $(\sum\limits_{n,p} u_{n,p})$ *tel que :*

(i). *Pour tout entier n, la série* $(\sum\limits_{p}|u_{n,p}|)$ *est convergente ;*

(ii). *La série* $(\sum\limits_{n}\sum\limits_{p=0}^{\infty}|u_{n,p}|)$ *est convergente.*

Alors on a la formule d'interversion :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}$$

Démonstration. .

Posons pour x entier, $S_n(x) = \sum\limits_{p=0}^{x} u_{n,p}$;

◦ **Premier point** :
Pour tout n, la série $(\sum\limits_{p} u_{n,p})$ est absolument convergente (hypothèse i.) donc

convergente. Par suite, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ et vaut : $\sum\limits_{p=0}^{\infty} u_{n,p}$.

◦ **Second point** :

Pour tout entier x, on a :

$$|S_n(x)| \leq \sum_{p=0}^{x} |u_{n,p}| \leq \sum_{p=0}^{\infty} |u_{n,p}| = \sigma_n$$

qui est le terme général d'une série convergente (hypothèse ii.) indépendante de x. La série de fonctions $(\sum S_n)$ converge donc normalement (par rapport à la variable entière x) sur $\mathbb{N}$.

Le théorème de sommation des limites s'applique donc et nous dit que :

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)$$

existe et vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}$$

◦ **Dernier point :**

Pour tout entier p, la série $(\sum\limits_{n,p} u_{n,p})$ converge absolument donc converge.

En effet :

$$\forall p \geq 0, |u_{n,p}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}| = \sigma_n$$

et la série $\sum \sigma_n$ converge.

On peut donc écrire, par sommation d'un nombre fini de séries convergentes :

$$\sum_{p=0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{x} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x).$$

Reste à faire tendre x vers l'infini dans l'égalité précédente :

- le terme $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(x))$ tend vers $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{p=0}^{\infty} u_{n,p})$, c'est ce qui été prouvé au second point.

- $\sum\limits_{p=0}^{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{n,p}$ tend vers $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{n,p}$ qui existe, ces sommes partielles ayant une limite pour $x \to +\infty$

On récupère bien ainsi la formule d'interversion :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}$$

□

EXEMPLE :

Soit la série double de terme générale : $(\frac{1}{n^p})_{n,p\geq 2}$.

Alors pour n fixé, la série géométrique $(\sum\limits_{p\geq 2} \frac{1}{n^p})$ converge, et sa somme, égale à :

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

En bref, on a prouvé que $(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{p=2}^{\infty} u_{u_{n,p}})$ existe, et vaut :

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1$$

Le terme général considéré étant à termes réels positifs, on déduit l'existence de $(\sum\limits_{p=2}^{\infty}\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_{n,p})$, ainsi que sa valeur qui est 1.

Mais

$$\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{p=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{p=2}^{\infty}(\zeta(p)-1)$$

où ζ est la fonction de Riemann.

Finalement, on a prouvé la convergence de la série $(\sum(\zeta(p)-1))$

et l'on a de plus :

$$\sum_{p=2}^{\infty}(\zeta(p)-1)=1$$

5 Familles numériques sommables

Introduction :

La notion de famille sommable vise à étendre les calculs de sommes au cas d'un nombre infini de termes. Contrairement à la notion de série, on ne suppose pas que les termes sont donnés sous forme d'une suite ordonnée mais d'une famille indexée par un ensemble quelconque. Il s'agit donc de pouvoir en définir la somme de façon globale, sans préciser l'ordre dans lequel on procède. De ce fait la sommabilité est plus globale que la notion de convergence d'une série.

Rappel :
Un ensemble I est dénombrable si et seulement s'il existe une bijection de I sur une partie de $\mathbb{N}$.

5.1 Sommabilité

Définition 13. *La famille* $(x_i)_{i\in J_0}$ *est dite sommable de somme* S*, si et seulement si :*

$$(1)\ \forall\epsilon>0,\ \exists I\ fini,\ \forall J\ fini\supset I:\ |\sum_{i\in J} x_i - S| < \epsilon$$

On dit qu'elle satisfait au critère de Cauchy au sens de la sommabilité, si et seulement si :

$$(2)\ \forall\epsilon>0,\ \exists K\ tq\ \ \forall L\ \textit{fini disjoint de}\ K : |\sum_{i\in L} x_i| < \epsilon$$

(les ensembles I, J, K, L, sont tous des sous-ensembles finis d'indices inclus dans J_o*)*

Unicité de la somme :

L'unicité de la somme au sens de la sommabilité est facile à montrer ; si on suppose en effet :

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\ J \text{ fini} \supset I\ :\ |\sum_{i\in J} x_i - S| < \epsilon$$

et $$\exists I' \text{ fini tel que } \ \forall J' \text{ fini} \supset I'\ :\ |\sum_{i\in J'} x_i - S'| < \epsilon.$$

Prenons $J = J' = I \cup I'$, on aura $|S - S'| \leq |\sum_{i\in J} x_i - S| + |\sum_{i\in J} x_i - S'| < 2\epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$,
d'où on conclut que $S = S'$.

Propriété 1. *Si* $(x_i)_{i\in J}$ *est sommable de somme* S*, alors elle satisfait au critère de Cauchy au sens de la sommabilité.*

Démonstration. .
Écrivons $\mathbf{(1)}$ avec $K = J = I$, puis $J = I \cup L$, L fini disjoint de K, nous obte-

nons :

$$|\sum_{i\in L} x_i| = |\sum_{i\in I\cup L} x_i - \sum_{i\in I} x_i| = |(\sum_{i\in I\cup L} x_i - S) - (\sum_{i\in I} x_i - S)|$$

$$\leq |\sum_{i\in I\cup L} x_i - S| + |\sum_{i\in I} x_i - S| < 2\epsilon.$$

□

5.2 Convergence commutative et sommabilité

Proposition 1. *Si la série* $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$ *est sommable de somme* S*, alors elle est commutativement convergente, de même somme que* $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = S$*, indépendamment de la permutation* σ*.*

Démonstration. On écrit la définition (1) de la sommabilité de la famille (u_n), à l'ensemble fini d'indices I on associe $N(\sigma,\epsilon)$ tel que :

$$\{\sigma(0),\ldots,\sigma(N)\} \supset I \text{ (prendre } = max\{\sigma^{-1}(I)\})$$

Pour tout $n \geq N$, on considère $J = \{\sigma(0),\ldots,\sigma(n)\}$;
On a alors,

$$|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(n)} - S| = |\sum_{i=\sigma(n)\in J} u_i - S| < \epsilon$$

Ce qui prouve bien que : $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)=S}$

□

Lemme 2. *Si la série* $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$ *est commutativement convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy au sens de la sommabilité.*

Démonstration. On procède par l'absurde ; si la série ne vérifiait pas le critère de Cauchy au sens de la sommabilité, alors on pourrait construire pour un certain $\epsilon > 0$ une suite $L_1, L_2, ..., L_k, ...$ de sous-ensembles finis d'indices dans $\mathbb{N}$ tels que L_k soit disjoint de $L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_{k-1}$ avec ;

$$\forall k, |\sum_{i \in L_k} u_i| > \epsilon$$

Soit $L_0 = \mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k = \{i_1, i_2, ...\}$ (fini ou infini) ; à la partition de $\mathbb{N}$ suivante :
$\mathbb{N} = L_1 \cup \{i_1\} \cup L_2 \cup \{i_2\} \cup ...$ (en intercalant les indices pris dans L_0 jusqu'à épuisement éventuel)

On peut associer, moyennant un ordre sur les indices de chaque L_k, une certaine bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (en numérotant les indices dans l'ordre d'apparition dans la partition) qui ne vérifie pas le critère de Cauchy au sens des séries (aussi loin que l'on veut, on trouve une quantité de Cauchy $|\sum_{i \in L_k} u_i|$ qui le contredit), et qui n'est donc pas convergente, contradiction.

□

Proposition 2. *Si la série* $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$ *est commutativement convergente, alors la famille* (u_i) *est sommable.*

Démonstration. Écrivons que $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$ est convergente :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |\sum_{k=0}^{n} u_k - S| < \frac{\epsilon}{2}$$

Le critère de Cauchy au sens de la sommabilité, vérifié par la famille (u_i), le lemme précédent, nous donne :

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \text{ fini}, \forall L \text{ fini disjoint de } K : |\sum_{n \in L} u_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

On peut choisir n_1 pour que $K_1 = \{0, ..., n_1\}$ contienne K, et poser $N = max\{n_1, n_0\}$.
Soit $\{0, ..., N\}$, tout ensemble fini d'indices J contenant I peut s'écrire $J = I \cup L$,

avec L disjoint de K.
Il en résulte :

$$|\sum_{n\in J} u_n - S| \leq |\sum_{n\in I} u_n - S| + |\sum_{n\in L} u_n| < \epsilon$$

et ceci pour tout J fini contenant I, cqfd. □

Corollaire 1. *Si la série* $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$ *est commutativement convergente, alors la somme* $S(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ *est en fait indépendante de la permutation* σ *; autrement dit toutes les séries permutées* $(\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)})$ *sont convergentes de même somme.*

Démonstration. D'après la proposition 2, la famille (u_i) est sommable ; d'après la proposition 1, la somme $S(\sigma)$ au sens de la convergence commutative est égale à la somme S au sens de la sommabilité, indépendamment de la permutation σ.

□

Corollaire 2. *Si la famille* (u_i) *vérifie le critère de Cauchy au sens de la sommabilité, alors la famille* (u_i) *est sommable.*

Démonstration. Dès lors que (u_i) vérifie le critère de Cauchy au sens de la sommabilité, chaque série permutée vérifie le critère de Cauchy pour les séries (vérification immédiate), donc la série $(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)$ est commutativement convergente, d'après la proposition 2, la famille (u_i) est donc sommable. □

5.3 Linéarité

Théorème 24. *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *et* $(v_i)_{i\in I}$ *deux familles d'éléments de* $\mathbb{R}$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si $(u_i)_{i\in I}$ *et* $(v_i)_{i\in I}$ *sont sommables alors* $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ *l'est aussi et on a :*

$$\sum_{i\in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration. Pour tout $i \in I$, $|\lambda u_i + \mu v_i| \leq |\lambda||u_i| + |\mu||v_i|$
Donc pour toute partie F finie $\subset I$,

$$\sum_{i\in F} |\lambda u_i + \mu v_i| \leq |\lambda| \sum_{i\in F} |u_i| + |\mu| \sum_{i\in F} |v_i| \leq |\lambda| \sum_{i\in I} |u_i| + |\mu| \sum_{i\in I} |v_i| = M.$$

Ainsi $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable.
De plus, par linéarité des séries convergentes :

$$\sum_{i\in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

□

5.4 Comparaison

Théorème 25. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par I.*
Si $u_i \leq v_i$, pour tout $i \in I$ et si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ l'est aussi et $\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$.

Démonstration. Pour toute partie finie J incluse dans I :

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in J} v_i \leq \sum_{i\in I} v_i$$

□

Théorème 26. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et $J \subset I$. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable alors la sous-famille $(u_i)_{i\in J}$ l'est aussi .*

Démonstration. Pour toute partie finie J incluse dans I, on a :

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i = M.$$

□

5.5 Regroupement de la sommation

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par un ensemble I dénombrable.

Théorème 27. *On suppose* $I = I_1 \cup I_2$ *avec* I_1, I_2 *disjoints. Alors les deux propositions (i) et (ii) sont équivalentes :*

(i) $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable.*

(ii) $(u_i)_{i\in I_1}$ *et* $(u_i)_{i\in I_2}$ *sont sommables.*
De plus, on a alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i.$$

Démonstration. .
$(i) \Longrightarrow (ii)$ Supposons $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.
Puisque $I_1, I_2 \subset I$ les sous-familles $(u_i)_{i\in I_1}$ et $(u_i)_{i\in I_2}$ sont sommables.
De plus, pour F_1 finie $\subset I_1$ et F_2 finie $\subset I_2$

$$\sum_{i\in F_1} u_i + \sum_{i\in F_2} u_i = \sum_{i\in F_1\cup F2} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i = M.$$
$$\Longrightarrow \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i \ .$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Supposons que $(u_i)_{i\in I_1}$ et $(u_i)_{i\in I_2}$ sont sommables.
Pour F finie $\subset$ I, on a :

$$\sum_{i\in F} u_i = \sum_{i\in F\cap I_1} u_i + \sum_{i\in F\cap I_2} u_i \leq \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i = M$$

donc $(u_i)_{i\in I_1}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i$$

□

Remarque :

Ce résultat s'étend évidemment à $I = I_1 \cup I_2 \cup .. \cup I_N$, avec $(I_j)_{1 \leq j \leq N}$ deux à deux disjoints.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de réels positifs.
La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si la famille des termes positifs $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la famille des termes négatifs $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le sont.
De plus, on a alors,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^+ + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^-$$

.

5.6 Sommation par paquets

Théorème 28. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de réels positifs et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de I vérifiant :*
$\forall n \neq m,\ I_n \cap I_m = \emptyset,$ *et* $\bigcup_{n\in N} I_n = I.$

Alors les deux propositions sont équivalentes :

(i) La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ;

(ii) Chaque famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable et la série :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{i\in I_n} u_i) \text{ converge.}$$

Démonstration. .
$(i) \implies (ii)$
Supposons $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset I$ donc $(u_i)_{i \in I_n}$ est aussi sommable. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ considérons la partition finie de I, réalisée à partir de $I_0, \dots, I_N$, et
$J = \bigcup\limits_{n \geq N+1} I_n$.
On a :

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{i \in I_n} u_i \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{i \in I_n} u_i + \sum_{i \in J} u_i = \sum_{i \in I} u_i$$

.

Puisque $(\sum\limits_{i \in I_n} u_i)$ est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées, celle-ci converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\sum\limits_{i \in I_n} u_i) \leq \sum\limits_{i \in I} u_i$.

$(ii) \implies (i)$
Supposons (ii).
Soit une partie F, finie $\subset$ I. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F \subset \bigcup\limits_{n=0}^{N} I_n$ et alors ;

$$\sum_{i \in F} u_i = \sum_{n=0}^{N} (\sum_{i \in F \cap I_n} u_i) \leq \sum_{n=0}^{N} (\sum_{i \in I_n} u_i) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{i \in I_n} u_i) = M.$$

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est donc sommable et $\sum\limits_{i \in I} u_i \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\sum\limits_{i \in I_n} u_i)$.

□

La richesse de ce théorème est donc bien double :

- il permet de prouver en pratique qu'une famille est sommable en partitionnant à notre convenance notre ensemble d'indices.
- une fois prouvé que la famille est sommable, il fournit un moyen de calculer sa somme mais surtout, en choisissant plusieurs partitions de I, il donne des sommes de séries qui sont toutes égales à $\sum\limits_i u_i$ et donc égales entre elles.

Théorème 29. *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de réels positifs et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de I vérifiant : $\forall n \neq m$, $I_n \cap I_m = \emptyset$ et $\bigcup\limits_{n \in N} I_n = I$.*

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable alors chaque famille* $(u_i)_{i\in I_n}$ *l'est aussi et la série* $\sum(\sum\limits_{i\in I_n} u_i)$ *converge absolument.*
De plus, on a alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i).$$

Démonstration. Puisque la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est aussi et donc les familles $(|u_i|)_{i\in I_n}$ le sont encore et la série converge. Ainsi les familles $(u_i)_{i\in I_n}$ sont sommables et la série $\sum(\sum\limits_{i\in I_n} |u_i|)$ est absolument convergente car dans le cadre réel :

$$|\sum_{i\in I_n} u_i| \leq \sum_{i\in I_n} u_i^+ \sum_{i\in I_n} u_i^- \leq \sum_{i\in I_n} |u_i|$$

Il reste à établir l'égalité :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i).$$

- Celle-ci est connue si tous les termes u_i sont réels positifs.

- Celle-ci est encore vraie si tous les u_i sont réels en raisonnant par u_i^+ et u_i^-.

□

Remarque importante

Les différents thèmes traités dans ce mémoire peuvent être généralisés et restent valables dans tout espace vectoriel normé, à condition que celui-ci soit **complet**.

Bibliographie

[1] D. Guinin, B. Joppin, *Analyse PC*, Les nouveaux Précis Bréal.

[2] M.Tarqi, *Cours de Mathématiques MP* .

[3] H.Gross, *Calculus Revisited : Multivariable Calculus*, MIT OpenCourseWare,
URL : http://ocw.mit.edu

[4] *Rearrangements of infinite series*, Math 320-1, Spring 2006,
URL : www.math.ku.edu/~lerner/.../Rearrangements.pdf

[5] *Séries doubles*,
URL : http://gilles.dubois10.free.fr/analyse_reelle/seriesdouble.html

[6] *Théorème de Riemann*,
URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_réarrangement_de_Riemann

[7] Ohm, Martin, *De nonnullis seriebus infinitis summandis*, typis Trowitzschii et filii, 1839.

[8] Josue A.M, *The classical theory of rearrangements*, A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Mathematics Boise State University, December 2015.

[9] N.P Bali, and R.P.Kaufman, *Golden sequences and infinite series*, Firewall Media (2007), New Delhi

[10] Sierpinski Wacław, *Sur une propriété des séries qui ne sont pas absolument convergentes* , Bull. Intern. Acad. Sci. : Cracovie A (1911) : 149-58.

[11] Godel, Kurt, *Collected Works*, Vol. 3. Unpublished Essays and Lectures. New York : Oxford University Press, 1995.

[12] Bismans.F, *Mathématiques pour l'économie*, Volume 1, Fonctions d'une variable réelle , De Boeck université, 1999.

[13] UC Davis Mathematics, *Chapter 4 :Series*,
URL : https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/intro_analysis_pdf/ch4.pdf

[14] Beck.B, Selon.I, *H-prepa Analyse* 2$^{\text{ème}}$ *année, PC*, HACHETTE-LIVRE, 2004

[15] Moussa.A, *Cours – Rappels d'analyse*, AIMS-Sénégal, Année universitaire 2012-2013.

[16] Karim.B, *Espaces de Hilbert : Applications*, [Annexe.Familles sommables, p.1,2]

[17] *Théorème de Fubini pour les séries doubles de réels positifs*
URL : https://von.koch.free.fr/maths/Theoreme%20de%20Fubini%20pour%20les%20series.pdf

[18] Chenciner.A, *Courbes algébriques planes*, Springer 2008.

[19] *Famille Sommable*
URL : https://perso.univ-rennes1.fr/karim.bekka/ANAH/Week%20by%20week/Annexe2.pdf

[20] *Séries numériques*, Université en ligne.
URL : http://uel.unisciel.fr/mathematiques/serie/serie_ch01/co/apprendre_10.html

[21] Lawrence H. Riddle, *Rearranging the Alternating Harmonic Series*, Department of Mathematics, Agnes Scott College, Decatur, GA 30030.

[22] *Sommabilité, Convergence Commutative* , Association GALILEE, 2009,
URL : http://esprit.des.maths.free.fr/documents/documents/Sommabilite_et_Convergence_Commutative.pdf http ://mp-valence-2009.wifeo.com/documents/series-doubles.pdf