

## TABLE DES MATIÈRES

<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>III</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES .....</b>	<b>IV</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>VII</b>
<b>LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....</b>	<b>XI</b>
<b>LISTE DES ANNEXES .....</b>	<b>XIV</b>
<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>XV</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION AUX REMBLAI .....</b>	<b>2</b>
1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES REMBLAIS .....	2
1.2 TRANSPORT DES REMBLAIS.....	6
1.2.1 Transport par gravité et pompage .....	7
1.2.2 Transport par pompage et gravité .....	7
1.2.3 Transport par gravité .....	7
1.3 RHÉOLOGIE DU REMBLAI EN PÂTE .....	8
1.3.1 Loi de comportement des fluides newtoniens .....	9
1.3.2 Loi de comportement des fluides non-newtoniens.....	10
1.3.3 Perte de charge dans le remblai en pâte.....	13
1.3.4 Mesure de la viscosité du remblai en pâte .....	14
1.3.5 Mesures des paramètres rhéologiques du remblai en pâte .....	17
<b>CHAPITRE 2 : COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE ET MESURE DES DÉFORMATIONS.....</b>	<b>23</b>
2.1 COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX À COMPOSANTE VISQUEUSE .....	23
2.1.1 Comportement viscoélastique linéaire .....	24
2.1.2 Comportement viscoélastique intégral non-linéaire : modèle K-BKZ .....	26
2.2 MÉTHODES DE DESCRIPTION CINÉMATIQUE D'ÉCOULEMENT DE FLUIDE .....	28
2.2.1 Description lagrangienne .....	29
2.2.2 Description eulérienne.....	29
2.3 SYSTÈME DE MESURE DES DÉFORMATIONS .....	29
2.3.1 Déformations en cisaillement et en extension axisymétrique .....	31

2.3.2	<i>Choix des variables de mesures des déformations</i> .....	42
<b>CHAPITRE 3 : MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS</b> .....		<b>45</b>
3.1	HYPOTHÈSES ET MISES EN ÉQUATIONS .....	45
3.2	MODÈLE DE KBK-Z ET DESCRIPTION .....	47
3.2.1	<i>Caractérisation et identification des paramètres rhéologiques</i> .....	49
3.3	MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS.....	51
3.3.1	<i>Formulation intégrale</i> .....	52
3.3.2	<i>Formulation matricielle élémentaire</i> .....	54
3.3.3	<i>Méthode de pénalité</i> .....	55
3.3.4	<i>Représentation isoparamétrique et maillage</i> .....	56
3.3.5	<i>Formulation algébrique globale t stratégie de résolution</i> .....	58
<b>CHAPITRE 4 : RÉSULTATS DES SIMULATIONS</b> .....		<b>60</b>
4.1	MODÈLE 1 : STOKES.....	61
4.2	MODÈLE 2 OU $N_1=0,5$ ET $N_2=0,2$ .....	64
4.3	MODÈLE 3 OU $N_1=0,5$ ET $N_2=0,5$ .....	78
4.4	ÉTUDE COMPARATIVE DES TROIS MODÈLES.....	89
<b>CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS</b> .....		<b>97</b>
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....		<b>99</b>
<b>ANNEXES</b> .....		<b>102</b>

**LISTE DES TABLEAUX**

<b>Tableau 1-1 : propriétés, avantages et inconvénients des trois types de remblais miniers (cours de remblais miniers à l'UQAT, 2013).....</b>	<b>3</b>
<b>Tableau 3-1 : résultats des essais dynamiques sur les résidus de la mine Doyon (Drissa Ouattara, 2011) .....</b>	<b>49</b>
<b>Tableau 3-2: valeurs d'identification utilisés pour le remblai-fluide.....</b>	<b>51</b>
<b>Tableau 3-3 : paramètres mécaniques considérés pour l'étude.....</b>	<b>51</b>

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1-1: schéma typique de la procédure complète de fabrication du remblai en pâte à l'usine (tiré de Belem Tikou et Mostafa Benzaazoua., 2003).....</b>	<b>6</b>
<b>Figure 1-2 : méthodes de transport des remblais miniers (adapté de Thomas, 1979; tiré de Belem et al., 2013).....</b>	<b>8</b>
<b>Figure 1-3: Illustration du seuil d'écoulement du remblai en pâte à travers une conduite (adapté de Revell.,2000).....</b>	<b>9</b>
<b>Figure 1-4 : Modèles rhéologiques des principaux fluides-newtoniens indépendants du temps.....</b>	<b>12</b>
<b>Figure 1-5: Courbes d'écoulements des fluides non-newtoniens dépendants du temps et effet d'hystérésis.....</b>	<b>13</b>
<b>Figure 1-6 : Mesure du slump par l'essai au cône d'affaissement (a) cône ; (b) Mesure du slump (Belem Tikou et Benzaazoua Mostafa., 2008).....</b>	<b>15</b>
<b>Figure 1-7 : Test d'affaissement au cône modifié pour la mesure de la vitesse de chute (Ferraris et de Larrard, 1998).....</b>	<b>16</b>
<b>Figure 1-8 : les différentes étapes de l'essai avec le disque parallèle du rhéomètre AR 2000 ; A-Mise en place de l'échantillon et B- Début des mesures.....</b>	<b>18</b>
<b>Figure 1-9 : Différentes dimensions de la géométrie de plaques parallèles.....</b>	<b>19</b>
<b>Figure 1-10 : Comportements des fluides soumis à des contraintes oscillatoires (Ghezzehei T.A et Or D. 2001).....</b>	<b>21</b>
<b>Figure 2-1 : Vecteurs de base <math>e_1'e_2'e_3'</math> et <math>e_1e_2e_3</math>.....</b>	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
<b>Figure 2-2: Déformations en cisaillement et en élongation induites dans une particule de remblais-fluide.....</b>	<b>32</b>
<b>Figure 2-3 : déformations subies par la particule polymère-fluide en cisaillement.....</b>	<b>37</b>

<b>Figure 2-4: Description et mesure des déformations</b> .....	41
<b>Figure 3-1 : Maillage des éléments finis</b> .....	56
<b>Figure 3-2 : Élément quadrilatéral de base utilisé pour le maillage</b> .....	57
<b>Figure 4-1 : Courbe des vitesses pour chaque débit</b> .....	62
<b>Figure 4-2 : Perte de charge pour chaque débit (Stokes)</b> .....	63
<b>Figure 4-3: Profil de vitesses pour chaque débit</b> .....	64
<b>Figure 4-4: Temps de résidence en fonction de la position de la particule de remblai</b> <b>(<math>n_1=0,5</math> et <math>n_2=0,2</math>)</b> .....	65
<b>Figure 4-5 : temps de résidence de particule de remblai pour un débit de 500 Kg/Hr</b> .....	66
<b>Figure 4-6: Fonction d'amortissement pour un débit <math>Q_1=250</math> Kg/Hr</b> .....	67
<b>Figure 4-7: Fonction d'amortissement pour un débit de 500 Kg/Hr</b> .....	68
<b>Figure 4-8: Fonction d'amortissement pour un débit de 1000 Kg/Hr</b> .....	69
<b>Figure 4-9: Fonction d'amortissement pour un débit de 1500 Kg/Hr</b> .....	70
<b>Figure 4-10: Fonction d'amortissement pour un débit de 2000 Kg/Hr</b> .....	71
<b>Figure 4-11: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 250 Kg/Hr</b> .....	72
<b>Figure 4-12: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 1000 Kg/Hr</b> .....	72
<b>Figure 4-13: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 2000 Kg/Hr</b> .....	73
<b>Figure 4-14: Viscosité en fonction du débit</b> .....	74
<b>Figure 4-15: Perte de charge en fonction du débit</b> .....	75
<b>Figure 4-16: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 0,6 cm</b> .....	76
<b>Figure 4-17: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 5,4 cm</b> .....	76
<b>Figure 4-18: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 10,2 cm</b> .....	77
<b>Figure 4-19: courbe de vitesse pour chaque débit</b> .....	78

<b>Figure 4-20: Temps de résidence en fonction de la position de la particule de remblai (<math>n_1=0,5</math> et <math>n_2=0,5</math>).....</b>	<b>79</b>
<b>Figure 4-21 : temps de résidence de particule de remblai pour un débit de 500 Kg/Hr.....</b>	<b>80</b>
<b>Figure 4-22: Fonction d'amortissement pour un débit <math>Q_1=250</math> Kg/Hr.....</b>	<b>81</b>
<b>Figure 4-23: Fonction d'amortissement pour un débit de 500 Kg/Hr.....</b>	<b>81</b>
<b>Figure 4-24: Fonction d'amortissement pour un débit de 1500 Kg/Hr.....</b>	<b>82</b>
<b>Figure 4-25: Fonction d'amortissement pour un débit de 2000 Kg/Hr.....</b>	<b>82</b>
<b>Figure 4-26 : Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 250 Kg/Hr .....</b>	<b>83</b>
<b>Figure 4-27: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 1000 Kg/Hr .....</b>	<b>84</b>
<b>Figure 4-28: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 2000 Kg/Hr .....</b>	<b>84</b>
<b>Figure 4-29: Viscosité en fonction du débit .....</b>	<b>85</b>
<b>Figure 4-30 : Perte de charge en fonction du débit.....</b>	<b>86</b>
<b>Figure 4-31: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 0,6 cm.....</b>	<b>87</b>
<b>Figure 4-32: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 5,4 cm.....</b>	<b>87</b>
<b>Figure 4-33: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 10,2 cm.....</b>	<b>88</b>
<b>Figure 4-34: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 250 Kg/Hr.....</b>	<b>89</b>
<b>Figure 4-35: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 500 Kg/Hr.....</b>	<b>90</b>
<b>Figure 4-36: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 1000 Kg/Hr.....</b>	<b>91</b>
<b>Figure 4-37: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 1500 Kg/Hr.....</b>	<b>92</b>

<b>Figure 4-38: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 2000 Kg/Hr.....</b>	<b>93</b>
<b>Figure 4-39: Comparaison des viscosités pour les 3 modèles.....</b>	<b>94</b>
<b>Figure 4-40 : comparaison des pertes de charge pour les 3 modèles.....</b>	<b>95</b>

Rapport-Gratuit.com

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Symboles latins

Symbole	Grandeur	Unité
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes	m
$r, z$	Coordonnées cylindriques	m
K	Indice de consistance	
$n$	Indice d'écoulement	
$p$	Pression	Pa
D	Diamètre intérieur du tuyau	m
V	Vitesse d'écoulement	m/s
$t$	Temps	s
T	Température	°C
Q	Débit volumique	m <sup>3</sup> /s
$I_1, I_2, I_3$	Invariants du tenseur de Finger	
$G^*$	Module complexe de cisaillement	
$G'$	Module d'élasticité	
$G''$	Module de fluidité	



Ei

Rigidité

**Symboles grecs**

Symbole	Grandeur	Unité
$\xi, \eta$	Coordonnées isoparamétriques	m
$\dot{\gamma}$	Vitesse de cisaillement	s <sup>-1</sup>
$\tau$	Contrainte de cisaillement	Pa
$\mu$	Viscosité dynamique	Pa.s
$\Upsilon$	Poids volumique	Pa/m
$\rho$	Masse volumique	Kg/m <sup>3</sup>
$\Omega$	Vitesse angulaire polaire	rad/s
$\sigma_{ij}$	Tenseur des contraintes visqueuses	
$\Omega^e$	Élément arbitraire	
$\Gamma^e$	Frontière de chaque élément	
$\omega$	Fréquence angulaire	m <sup>-1</sup>
$\lambda_i$	relaxation	

## **LISTE DES ANNEXES**

<b>ANNEXE A - RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE STOKES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES.....</b>	<b>102</b>
--	------------

## RÉSUMÉ

Lors du transport du remblai cimenté en pâte de la surface jusqu'au lieu de déposition par des pipelines, les pertes de charge se produisent tout le long de la tuyauterie. La détermination des pertes de charge les conduites est très importante parce que celles-ci conditionnent l'arrivée ou non du remblai aux cavités souterraines. Pour estimer les pertes de charge, nous considérons la méthode des éléments finis, en régime permanent, et nous supposons que le comportement de remblais peut être représenté par un modèle viscoélastique intégral. À cet effet, nous considérons deux volets : i) l'identification viscoélastique du comportement du remblai à l'aide du modèle intégral de K-BKZ et ii) l'estimation de la perte de charge en fonction du débit massique pour une conduite cylindrique expérimentale. Pour le premier volet, nous considérons des données expérimentales rhéologiques issues d'un viscomètre rotatif à contrainte contrôlée

**Mots clés :** remblai cimenté en pâte, pertes de charge, modèle intégral de KBK-Z, méthode des éléments finis, viscoélasticité

## INTRODUCTION

Le remblai minier cimenté en pâte (RMCP) est généralement utilisé pour combler les cavités laissées par l'exploitation des gisements souterrains (métaux de base et/ou précieux). Il permet d'assurer la stabilité des terrains et la sécurité des travailleurs et permet de réduire le stockage de matières en surface. Le remblayage peut se faire après ou pendant l'exploitation minière. Le but de l'étude est d'estimer les pertes de charge dans le remblai cimenté en pâte pendant son. Les essais dynamiques réalisés sur ces remblais (Ouattara,2011) se basent sur le fait que ceux-ci ont un comportement linéaire. Dans notre étude, nous allons considérer le comportement non linéaire du remblai qui n'est en effet pas observé par les essais dynamiques avec le rhéomètre. Nous utiliserons la méthode viscoélastique de type intégral KBK-Z qui est une méthode généralement utilisée pour les polymères. Celle-ci prend en considération le comportement non linéaire du remblai.

Le chapitre 1 présente les généralités sur les remblais et expose les pertes de charge dans les remblais.

## **CHAPITRE 1 : INTRODUCTION AUX REMBLAI**

### **1.1 Généralités sur les remblais**

Le remblayage des chantiers souterrains est devenu une pratique courante dans l'industrie minière. Le remblayage est une approche utilisée dans les mines canadiennes depuis plusieurs années (Benzaazoua et al, 2005). Les remblais sont constitués principalement de trois composants : le solide, l'eau et le liant. Le solide peut être constitué de rejets de concentrateur, du sable et /ou de gravier ou des stériles miniers. Le liant, quant à lui, peut être du ciment Portland tout usage ou en combinaison avec d'autres ciments ou ajouts minéraux : les cendres volantes, les scories, les fumées de silice, la chaux et les boues, le kaolin etc; ce qui permet d'augmenter la résistance mécanique du remblai grâce aux hydrates qu'ils forment. D'autres additifs tels que les accélérateurs et les retardateurs de prise et les superplastifiants peuvent aussi être ajoutés au remblai. On distingue principalement trois types de remblai à savoir le remblai rocheux fait de roches stériles cimentées ou non, le remblai hydraulique fait de résidus non sulfureux classifiés ou non et le remblai en pâte cimenté.

Les remblais en pâte cimentés sont de plus en plus utilisés dans les exploitations minières souterraines. Ils permettent d'une part la stabilisation physique des ouvrages et d'autre part la stabilisation chimique des contaminants dans la matrice du remblai par le processus de solidification et de stabilisation. Cette pratique permet une exploitation de plus en plus complète des gisements, une réduction des volumes de rejets de concentrateurs problématiques entreposés en surface. Aussi, l'ajout d'agents de cimentation permet une stabilité chimique en bloquant l'oxydation des sulfures et la rétention des métaux polluants (Benzaazoua et al.,2002)

Les propriétés des différents remblais sont résumées dans le tableau 1-1 :

Tableau 1-1 : propriétés, avantages et inconvénients des trois types de remblais miniers  
(cours de remblais miniers à l'UQAT, 2013)

Propriétés	Remblai hydraulique	Remblai en pâte	Remblai rocheux
Composition	Eau, liant, rejets de concentrateur hydrocyclonés et/ou amendés avec du sable et du gravier	Rejets de concentrateurs ségrégés, eau et liant.	Roches stériles d'origine minière ou non et agent liant
État des matériaux	60 à 75 % en pourcentage solide	75 à 85 % en pourcentage solide	Sec
Système de transport	Par trou foré ou pipeline, par gravité	Par trou foré ou pipeline, par gravité, peut être pompé	Par monterie ou par équipement mobile, ciment à part
Liaison des matériaux	Cimenté ou non	Cimenté seulement	Cimenté ou non
Ratio Eau/ciment	Ratio élevé, liant faible	Ratio moyen, liant moyen	Ratio faible, liant fort
Mise en place	100 à 200 tonnes/h	50 à 200 tonnes/h	100 à 400 tonnes/h
Ségrégation	Décantage et ségrégation, peu résistant	Pas de ségrégation	Empilement et ségrégation, résistance réduite et rigidité
Rigidité	Basse	Basse ou élevée	Élevée si mise en place correcte

Tableau 1-1 suite : propriétés, avantages et inconvénients de trois types de remblais miniers (cours de remblais miniers à l'UQAT, 2013)

Densité du remplissage	Impossible maximiser	à	Facile à maximiser	Difficile à maximiser
Quantité de liant	Grande quantité		Moins grande quantité	Quantités moyennes
Cloisons	Onéreuses		Peu dispendieuses	Non nécessaires
Écoulement des eaux	Abondant		Négligeable	Aucun
Coûts relatifs en capital	Bas		Plus élevés que pour les boues	Modérés
Coûts d'utilisation	Coûts de distribution faibles, moindres si non cimenté		Coûts les plus bas pour un remblai cimenté	Coûts élevés
% liant	4 à 7 % de ciment		5 à 6 % liant	3 à 7% de la masse totale des résidus secs
Avantage des remblais	Drainage rapide Transport facile		Rejets de concentrateur utilisés presque en totalité	Drainage rapide Résistance élevée



Tableau 1-1 suite : propriétés, avantages et inconvénients de trois types de remblais miniers (cours de remblais miniers à l'UQAT, 2013)

Inconvénients des remblais	Cout associé à l'hydrocyclonage	à Drainage lent	à Cout associé à l'épaississement du remblai	Transport difficile
	Résidus miniers utilisés seulement en partie			

Le remblai en pâte est fabriqué dans les usines de remblai selon la procédure classique suivante (Belem et Benzaazoua., 2003):

- Les résidus humides sont tout d'abord épaissis grâce aux épaisseurs pour arriver à un pourcentage massique de 55 % environ.
- Les résidus sont filtrés à l'aide de filtres à disques ou de filtres presse pour arriver à un pourcentage solide entre 70 et 85%.
- Le liant est ajouté dans une proportion de 2 à 8% de la masse totale des résidus secs.
- L'eau de procédé de la mine ou l'eau fraîche est ajoutée pour produire un affaissement entre 152 mm et 254 mm.
- Le mélange est ensuite malaxé pendant 45 secondes à une minute dans un malaxeur de grande puissance en continu ou par batch.
- Le remblai est envoyé sous terre par un réseau de trous de forage et de conduites soit par gravité, soit à l'aide d'une pompe à piston semblable à celle à béton.

Le schéma de la fabrication du remblai en pate est donné à la figure 1-1.

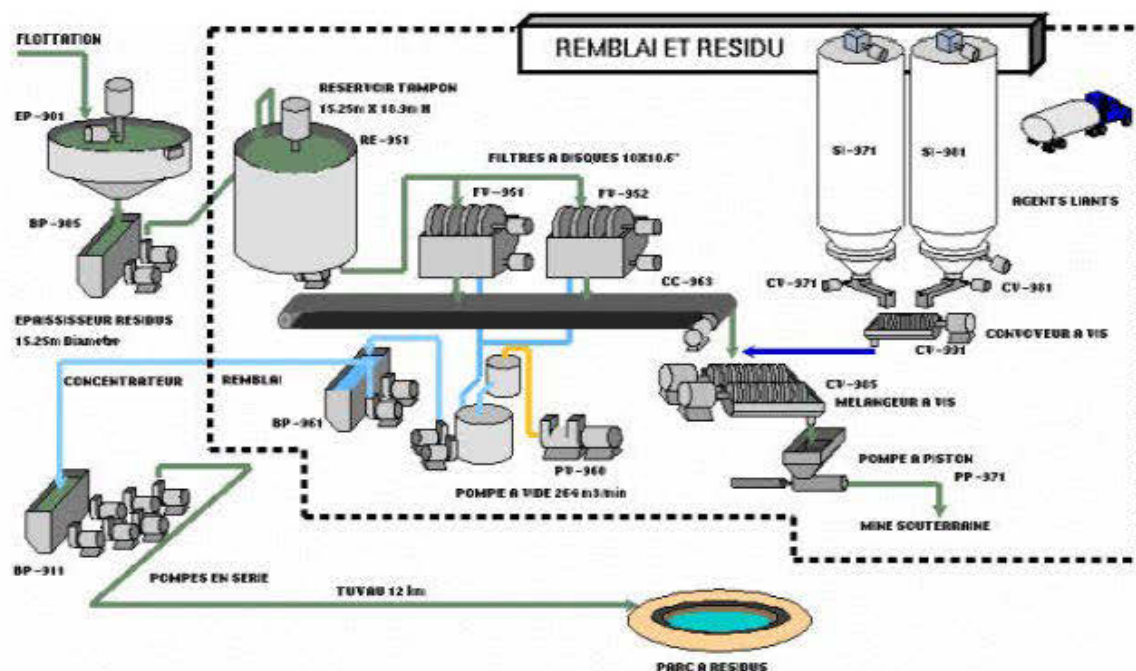


Figure 1-1: schéma typique de la procédure complète de fabrication du remblai en pâte à l'usine (tiré de Belem et Benzaazoua, 2003)

## 1.2 Transport des remblais

En pratique, l'industrie minière utilise plusieurs moyens pour acheminer les remblais miniers à leur lieu de déposition. La conception et l'emplacement des installations de l'usine de remblai doivent permettre à celle-ci de pouvoir envoyer le remblai sous terre. Le transport pourra se faire via des trous de forage inclinés d'un maximum de 30° par rapport à l'horizontale encagés avec des pipelines en acier et des pipelines. Le diamètre des pipelines est choisi en fonction de l'affaissement ou de la contrainte de cisaillement de la pâte de remblai et de sa variabilité, de la vitesse de la pâte dans la conduite et des pertes de charge prévues le long des conduites (Henderson et al., 2005). Selon Thomas (1979), il existe trois configurations possibles pour le transport du remblai de la surface jusqu'aux vides souterrains : le système par gravité, le système par gravité et pompage et

le système par pompage et gravité. La figure 1-2 présente les trois méthodes de transport des remblais miniers.

### **1.2.1 Transport par gravité et pompage**

Le remblai est acheminé dans les vides souterrains par chute libre à la verticale et l'écoulement sur la distance horizontale sera assuré par une partie de l'énergie de chute. Si le rapport distance verticale/distance horizontale est petit, une énergie externe sera nécessaire pour envoyer le transport dans la section horizontale (pompage).

### **1.2.2 Transport par pompage et gravité**

Après pompage du remblai sur une grande distance horizontale, celui-ci sera acheminé par chute libre à la verticale dans le chantier à remblayer.

### **1.2.3 Transport par gravité**

Les rampes formées par une portion horizontale précédée d'une hauteur de chute verticale permettront au remblai de s'écouler jusqu'aux vides souterrains. L'écoulement sera possible seulement lorsque l'énergie de chute verticale sera suffisante pour surmonter les pertes de charge produites dans la partie horizontale.

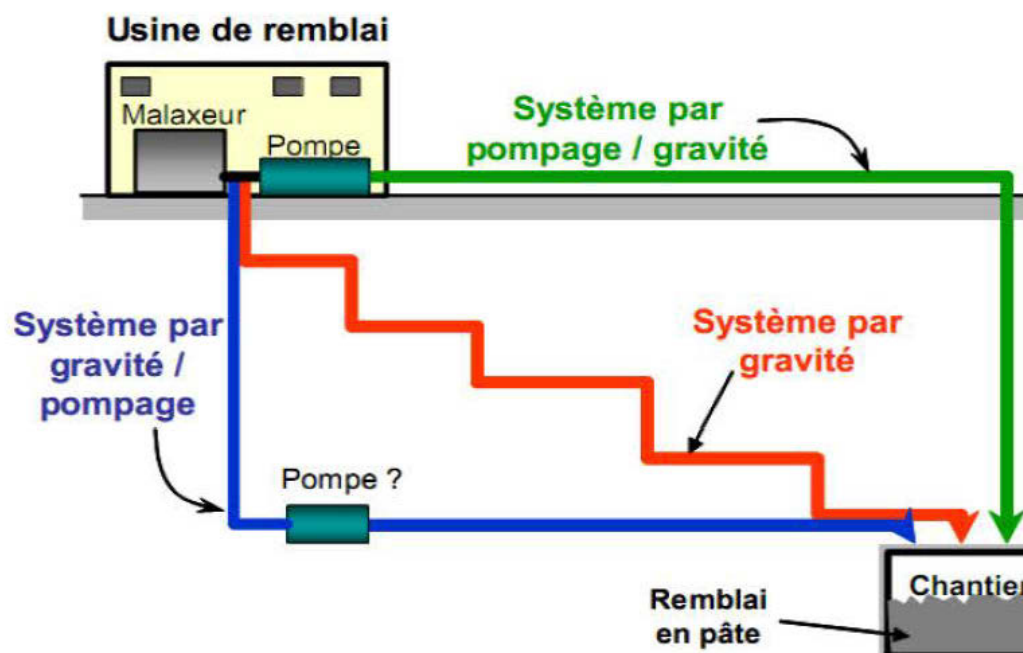


Figure 1-2 : Méthodes de transport des remblais miniers (adapté de Thomas (1979) et tiré de Belem et al., 2013)

### 1.3 Rhéologie du remblai en pâte

L'écoulement du remblai en pâte dans la conduite du réseau de distribution dépend entièrement des propriétés rhéologiques de ce remblai, c'est-à-dire sa viscosité. La viscosité du remblai en pâte est la mesure du frottement entre ses couches adjacentes lors de son écoulement dans une conduite; elle conditionne l'écoulement du remblai (Belem et Benzaazoua.,2003). Le remblai en pâte se comporte comme un fluide non newtonien : sa viscosité varie avec le taux de cisaillement et l'écoulement ne sera possible qu'à partir d'un seuil de contrainte appliquée. Comme le montre la figure 1-3, l'écoulement du remblai en pâte ne sera initié que sous une pression initiale supérieure au seuil de cisaillement.

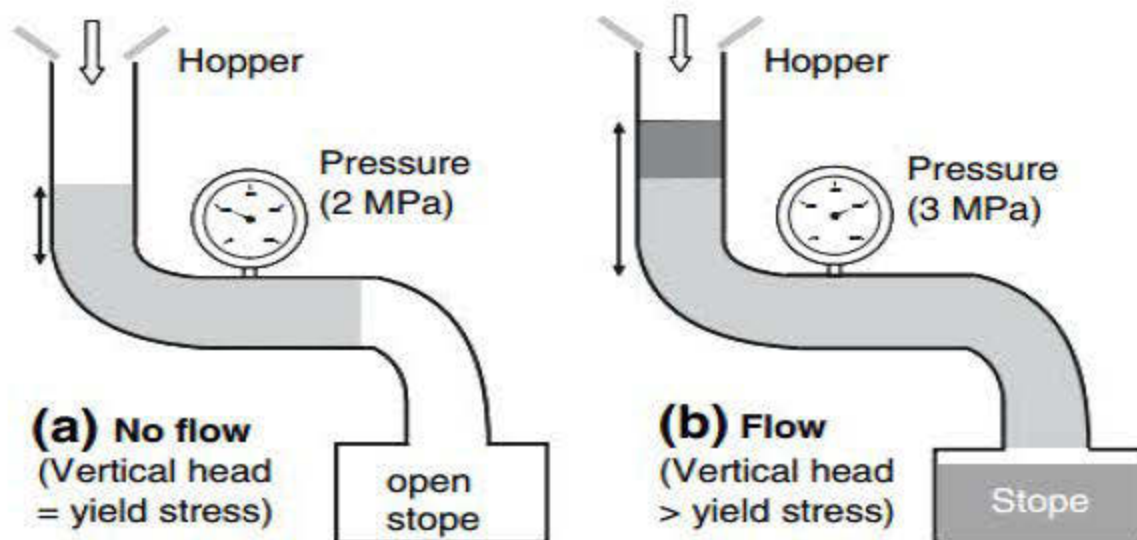


Figure 1-3: Illustration du seuil d'écoulement du remblai en pâte à travers une conduite (adapté de Revell.,2000)

Pour mieux comprendre la rhéologie du remblai en pâte, il est important de se familiariser avec les lois de comportement des fluides newtoniens et des fluides non newtoniens.

### 1.3.1 Loi de comportement des fluides newtoniens

Les fluides newtoniens sont des matériaux fluides dont la loi de comportement obéit à la loi de Newton qui stipule que la contrainte de cisaillement  $\tau$  est proportionnelle au gradient de vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . La loi de comportement des fluides newtoniens se traduit par une linéarité de la courbe d'écoulement. L'équation 1-1 illustre la loi de comportement des fluides newtoniens où  $\eta$  représente la viscosité dynamique du fluide.

$$\tau = \eta \dot{\gamma}$$

Équation 1-1

Selon Barnes et al (1989), les conséquences de la loi de Newton sont :

- ✓ La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement
- ✓ La viscosité est invariable quel que soit le temps de cisaillement et l'écoulement du fluide est arrêté immédiatement lorsque les contraintes sont nulles.

✓ Les seules contraintes au sein du fluide et à la base de son écoulement sont les contraintes de cisaillement dans le cas d'un cisaillement simple.

L'eau constitue un exemple de fluide newtonien dont la viscosité dynamique à 20°C et à une pression atmosphérique de 101325 Pa est de 0,001003 Pa.s. Le remblai hydraulique est aussi considéré comme un fluide newtonien. La figure 1-4 illustre le comportement rhéologique d'un fluide newtonien.

### 1.3.2 Loi de comportement des fluides non-newtoniens

Les fluides qui ne répondent pas à la loi de newton décrite ci-dessus sont appelés fluides non-newtoniens. Ils présentent une diversité de comportement qui est propre à chaque type de fluide. Il existe plusieurs modèles mathématiques pour l'ajustement des fluides non-newtoniens à partir des données expérimentales. Les fluides non-newtoniens peuvent être classés en trois groupes indépendamment du temps et avec des lois de comportement avec ou sans seuil de cisaillement.

✓ les fluides rhéo-épaississants ou dilatants : ils se caractérisent par une augmentation de la viscosité en réponse à une augmentation du taux de cisaillement. Elle présente une asymptote suivant l'axe des contraintes car une petite augmentation du taux de cisaillement entraîne une augmentation plus importante de la contrainte. Ce comportement est très peu observé dans les fluides indépendants du temps et sans seuil de cisaillement.

✓ Les fluides rhéo-fluidisants ou pseudo-plastiques : dans ce cas, l'augmentation du taux de cisaillement entraîne une diminution de la viscosité du fluide.

Les comportements rhéo-épaississant et rhéo-fluidisant sont ajustés par la loi d'Ostwalde De Waele (Barnes et al ; 1989) :

$$\tau = K\dot{\gamma}^n \text{ lorsqu'il n'y a pas de seuil de cisaillement } \tau_0 \quad \text{Équation 1-2}$$

Les fluides sans seuil de cisaillement s'écoulent dès l'application de la contrainte comme le montrent les courbes de la figure 1-4. Par contre, pour les fluides avec seuil de cisaillement, la contrainte appliquée doit atteindre le seuil de cisaillement pour initier l'écoulement.

Les fluides rhéo-épaississants ou rhéo-fluidisants peuvent présenter aussi des seuils de contrainte. Ce sont des fluides rhéo-fluidisants ou rhéo-épaississants à seuil de contrainte. Leur loi de comportement est bien ajustée par le modèle de Herschell-Bulkley :

$$\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n \text{ en présence d'un seuil de contrainte } \tau_0 \quad \text{Équation 1-3}$$

avec  $K$  et  $n$  des constantes appelées respectivement consistance et exposant du taux de cisaillement.

Pour  $n > 1$ , les fluides sont rhéo-épaississants ou dilatants

Pour  $n < 1$ , les fluides sont rhéo-fluidisants ou pseudo-plastiques

Lorsque la courbe de la contrainte en fonction du taux de cisaillement est linéaire au-delà d'un seuil de cisaillement  $\tau_0$ , la loi de comportement est ajustée par le modèle de Bingham:

$$\tau = \tau_0 + \eta_B \dot{\gamma} \text{ en présence d'un seuil de contrainte } \tau_0 \quad \text{Équation 1-4}$$

avec  $\eta_B$  la viscosité de Bingham

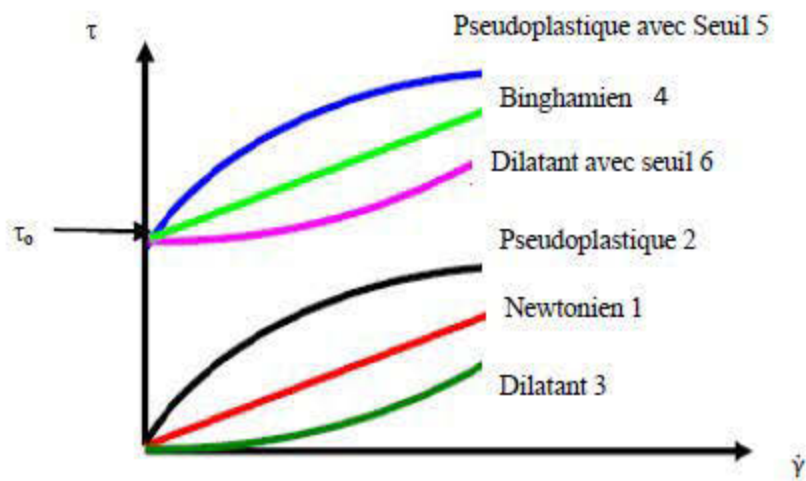


Figure 1-4 : Modèles rhéologiques des principaux fluides-newtoniens indépendants du temps

Certains fluides non-newtoniens possèdent des comportements rhéologiques dépendant du temps : ce sont les fluides thixotropiques, les fluides anti-thixotropiques et les fluides viscoélastiques. Les fluides thixotropiques voient leur viscosité diminuer au cours du temps lorsqu'une contrainte constante est appliquée. Le cisaillement provoque les changements de structure dans le fluide. Le fluide retrouve sa structure progressivement à l'arrêt de la contrainte. A titre d'exemple, on peut citer le ketchup, le yogourt et certaines peintures. Les fluides thixotropes présentent un phénomène d'hystérésis mis en évidence dans la figure 1-5. En effet, après le cisaillement, le fluide a une vitesse de déformation plus grande pour une valeur donnée de la tension de cisaillement (J. Briant et al., 1985).

Les fluides anti-thixotropes : contrairement aux fluides thixotropes, leur viscosité croît avec le temps lors d'un cisaillement constant. Ils retrouvent aussi leur viscosité initiale à l'arrêt de la contrainte de cisaillement.

Les fluides viscoélastiques : ils ont un comportement linéaire lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la contrainte critique. Une fois le seuil critique dépassé, le fluide adopte un comportement visqueux. En effet, lorsque le fluide est soumis à une



contrainte très brève, il réagit comme un solide élastique alors que sous une contrainte prolongée, il s'écoule (Briant et al., 1985). La figure 1-5 présente les comportements des fluides non newtoniens dépendants du temps.

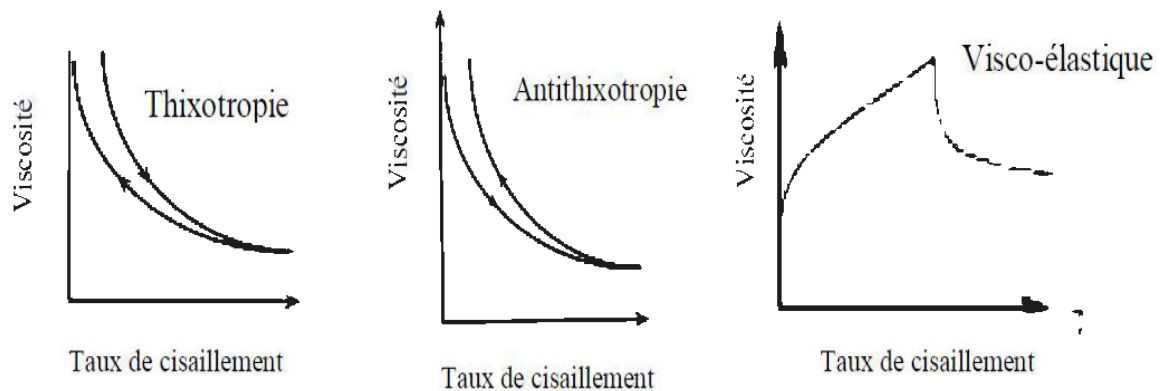


Figure 1-5: Courbes d'écoulements des fluides non-newtoniens dépendants du temps et effet d'hystérésis

### 1.3.3 Perte de charge dans le remblai en pâte

La perte de charge dans un tuyau d'un point A à un point B est définie comme la réduction de pression du point A au point B. Cette réduction de pression dépend de la pression développée  $P$ , de la viscosité du remblai et du diamètre intérieur  $D$  du tuyau. La perte de charge du remblai en pâte est donnée par l'équation 1-5 (Belem Tikou et Mostafa Benzaazoua., 2003):

$$\tau \approx \frac{PD}{4L} = \eta \frac{8V}{D} \left[ \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_0 4L}{PD}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0 4L}{PD}\right)^4 \right)^{-1} \right] \quad \text{Équation 1-5}$$

Ou  $\tau_0$  est le seuil de cisaillement,  $\eta$  est la viscosité plastique de la pâte (Pa.s),  $P$  est la pression de la pompe (Pa),  $D$  est le diamètre du tuyau (m),  $L$  la longueur du tuyau (m) et  $V$  est la vitesse d'écoulement (m/s).

Pour les tuyaux de transport de la pâte de remblai, D est compris généralement entre 100 mm et 200 mm, la vitesse d'écoulement entre 0,1 m/s et 1 m/s et la distance pratique de pompage de la pâte peut atteindre 1000 m longitudinalement et illimitée verticalement.

Mais, en pratique, la détermination des pertes de charge dans le tuyau se fait grâce aux essais en boucle (flow-loop test). La perte de charge par unité de longueur pour un fluide plastique de Bingham et en régime laminaire est donnée par l'équation 1-6:

$$\frac{\Delta P}{L} \text{ (Pa/m)} = \frac{32 \eta_B V}{D^2 \left(1 - \frac{4 \tau_w}{3 \tau_0} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_w}{\tau_0}\right)^4\right)} \quad \text{Équation 1-6}$$

Où  $\eta_B$  est la viscosité plastique de Bingham,  $\tau_0$  est le seuil de cisaillement et  $\tau_w$  est la résistance au cisaillement du remblai en pâte contre la paroi du tuyau ( $\tau_w \approx PD/4L$ ), D est le diamètre du tuyau et P est la pression de la pompe.

La distance horizontale maximale d'écoulement de la pâte de remblai est donnée par l'équation 1-7:

$$L_{H(\max)} \text{ (m)} = \frac{H \left(Y - \frac{\Delta P}{L}\right)}{\frac{\Delta P}{L}} \quad \text{Équation 1-7}$$

Où  $\frac{\Delta P}{L}$  est la perte de charge du loop-test, Y est le poids volumique du remblai en pâte et H la hauteur maximale de chute libre du remblai en pâte.

### 1.3.4 Mesure de la viscosité du remblai en pâte

La viscosité de la pâte de remblai dépend de plusieurs facteurs, sa prédiction est donc très difficile. En pratique, c'est l'affaissement ou slump S qui permet d'évaluer la consistance du remblai en pâte. En raison de sa simplicité, l'essai au cône d'affaissement est largement utilisé pour déterminer la consistance de la pâte de remblai (Belem et Benzaazoua., 2008). L'affaissement n'est rien d'autre que la mesure de la

hauteur d'effondrement de la pâte de remblai sous son propre poids. Selon Landriault (1995), le slump idéal pour un remblai en pâte devrait se situer entre 152 mm (6 pouces) et 254 mm (10 pouces). L'affaissement optimal pour les pâtes dans les systèmes de remblayage souterrain est généralement compris entre 178 mm (7 pouces) et 203 mm (8 pouces).

Ferraris et De Larrard (1998) ont réalisé des essais permettant de relier l'affaissement  $S$  au seuil de cisaillement  $\tau_0$  (équation 1-8) et plus intéressant encore un test d'affaissement au cône modifié permettant de mesurer le temps d'affaissement ( $T$ ) de la pâte. La figure 1-6 illustre le principe du test d'affaissement et la figure 1-7 le test d'affaissement au cône modifié.

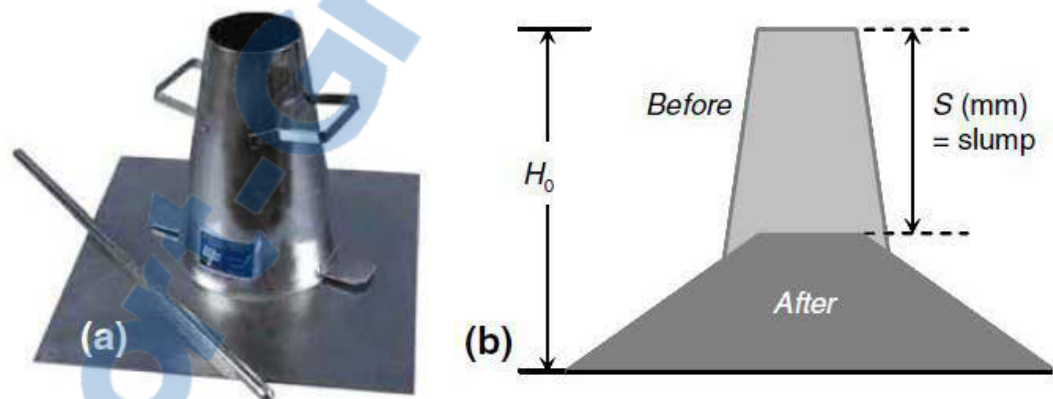


Figure 1-6 : Mesure du slump par l'essai au cône d'affaissement (a) cône ; (b) Mesure du slump (Belem et Benzaazoua., 2008)

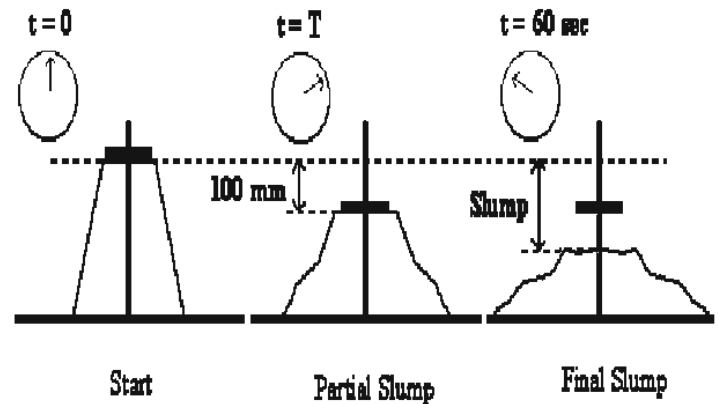


Figure 1-7 : Test d'affaissement au cône modifié pour la mesure de la vitesse de chute (Ferraris et de Larrard, 1998)

$$\tau_0 = \frac{\rho (300 - S)}{347} + 212 \quad \text{Équation 1-8}$$

$\rho$  est la masse volumique de la pâte fraîche ( $\text{kg/m}^3$ ),  $S$  l'affaissement final de la pâte (mm). Les constantes 347 et 212 doivent être calibrées pour le remblai en pâte.

Roussel (2006) a proposé un modèle semi-empirique basé sur des simulations numériques tridimensionnelles en utilisant le code de calcul en dynamique des fluides Flow3D. À partir des résultats prédits numériquement, une approximation simple et linéaire du slump entre 5 et 25 cm est donnée par l'équation 1-9 :

$$S = 25,5 - 17,6 \frac{\tau_0}{\rho} \quad \text{Équation 1-9}$$

Pour le remblai en pâte, la constante 17,6 doit être calibrée.

Une relation semi-empirique reliant le temps d'affaissement de la pâte à la viscosité plastique a été aussi proposée par Ferraris et de Larrard (1998) :

$$\eta = 25 * 10^{-3} * \rho T \quad \text{Équation 1-10}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique de la pâte fraîche ( $\text{kg/m}^3$ ),  $\eta$  est la viscosité plastique (Pa.s), T le temps d'affaissement partiel (s) et S l'affaissement final de la pâte (mm)

Le seuil de contrainte peut être aussi estimé par la méthode du plan incliné proposé par Coussot et Boyer (1995). On laisse le fluide s'écouler sur un plan, d'inclinaison variable comprise entre 10 et 30°, de longueur 1 m et de largeur comprise entre 5 et 25 cm. Le seuil est donc donné par l'équation 1-11 :

$$\tau_0 = \rho g h_0 \sin(i) \quad \text{Équation 1-11}$$

$h_0$  est l'épaisseur du fluide après l'arrêt de l'écoulement et  $i$  est l'inclinaison et  $\rho$  est la masse volumique de la pâte.

Dans le cas de notre étude, on considère que le remblai en pâte a un comportement viscoélastique.

En effet, plusieurs matériaux comme les remblais en pâte peuvent présenter des comportements intermédiaires entre un solide élastique idéal et un fluide visqueux idéal.

### 1.3.5 Mesures des paramètres rhéologiques du remblai en pâte

Le rhéomètre AR 2000 de la compagnie TA Instruments a été utilisé dans cette étude pour la mesure des paramètres rhéologique du remblai. C'est un viscomètre rotatif à contrainte contrôlée. Une plage de contrainte de cisaillement est imposée au rhéomètre et ce dernier nous fournit entre autres des variables dont le taux de cisaillement et la viscosité. Il est très sensible et le pilotage est réalisé à l'aide d'un logiciel de contrôle exigeant des réglages précis tels que la calibration de l'inertie, la calibration du *bearing*, le *mapping* de la géométrie et l'intégration des données relatives aux dimensions de la géométrie utilisée avant toute mesure. Le rhéomètre est composé de deux plaques : le fluide est disposé sur une plaque inférieure lisse ou rugueuse (stator) et une pièce

supérieure correspondant à la géométrie de mesure (rotor) comme l'indique la figure 1-8. La résistance du fluide au cisaillement provoque un couple de torsion (C) qui est mesuré sur l'une des deux plaques dépendamment du design du rhéomètre. Nous trouvons les équations associées à cette géométrie dans la littérature :

$$\tau = \frac{2C}{\pi R^3} \quad \text{Équation 1-12}$$

Et :

$$\dot{\gamma} = \frac{R\Omega}{h} \quad \text{Équation 1-13}$$

Avec C le couple de torsion, R le rayon du disque, h l'ouverture entre les deux disques et  $\Omega$  la vitesse angulaire polaire.

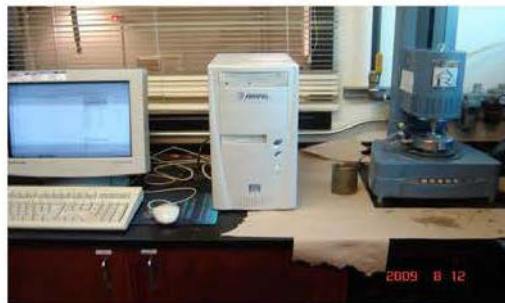


Figure 1-8 : les différentes étapes de l'essai avec le disque parallèle du rhéomètre AR 2000 ; A-Mise en place de l'échantillon et B- Début des mesures (Ouattara.,2011)

Sachant que la déformation est maximale sur la bordure au niveau du rayon R et nulle au centre, l'expression générale de la contrainte de cisaillement en fonction du taux de cisaillement est donnée par l'équation 1-14 :

$$\tau = \frac{2C}{\pi R^3} \left[ 3 + \frac{d \ln C}{d \ln \dot{\gamma}} \right] \quad \text{Équation 1-14}$$

Pour les fluides newtoniens, le rapport  $\frac{d \ln C}{d \ln \dot{\gamma}}$  est nul.

Les équations permettent d'obtenir l'expression de la viscosité comme suit :

$$\eta = \frac{3Ch}{2\pi\Omega R^4} \left( 1 + \frac{d \ln C}{3 d \ln \Omega} \right) = \frac{3Ch}{2\pi\Omega R^4} \left( 1 + \frac{\Omega}{C} + \frac{dC}{3 d\Omega} \right) \quad \text{Équation 1-15}$$

Les rotors disponibles sont de dimensions de 20 mm, 40 mm et 60 mm. Plus le fluide est visqueux, plus petit doit être le diamètre du rotor et les contraintes de cisaillement seront alors élevées comme présenté dans la figure 1-9. Lorsque le taux de cisaillement à atteindre est très élevé, l'ouverture de l'entrefer doit être réduite pour éviter l'éjection de l'échantillon hors de la géométrie. Étant donné que l'ordre de grandeur des viscosités des résidus miniers est moyen, le diamètre utilisé dans notre étude est de 40 mm.

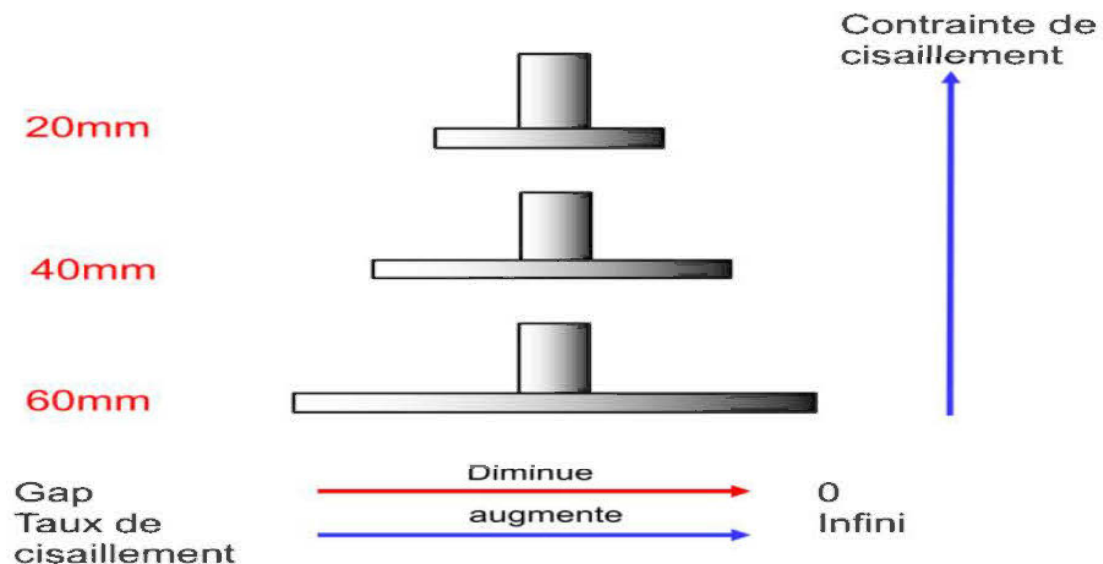


Figure 1-9 : Différentes dimensions de la géométrie de plaques parallèles

L'échantillon est soumis à une contrainte de cisaillement sinusoïdale  $\tau$  et d'amplitude  $\tau_0$  à une vitesse angulaire  $\omega=2\pi f$  ( $f$  est la fréquence). La contrainte oscillatoire est liée à la vitesse angulaire par l'équation 1-16 (Ghezzehei et Or, 2001) :

$$\tau = \tau_0 \sin \omega t \quad \text{Équation 1-16}$$

La déformation en cisaillement induite par la contrainte de cisaillement oscillatoire a également une forme sinusoïdale avec un déphasage angulaire  $\delta$  (déphasage angulaire entre la contrainte et la déformation) par rapport à la contrainte sinusoïdale. Les expressions de la déformation angulaire  $Y$  et du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  sont données par les équations 1-17 et 1-18 respectivement (Ghezzehei et Or, 2001) :

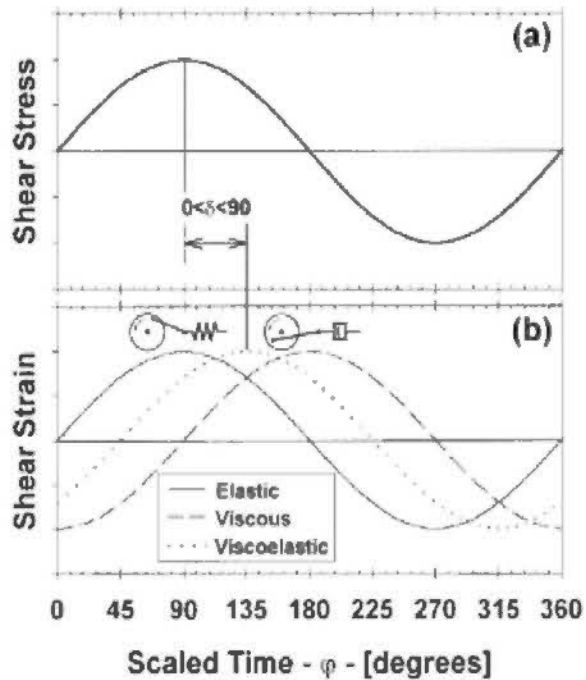
$$Y = Y_0 \sin(\omega t + \delta) \quad \text{Équation 1-17}$$

et :

$$\dot{\gamma} = Y_0 \omega \cos(\omega t + \delta) \quad \text{Équation 1-18}$$

La figure 1-10 présente les courbes oscillatoires des différents fluides :





- a) Fonction de contrainte  
b) Fonction de la réponse de déformation

-Trait plein : réponse de solide élastique parfait

-Trait discontinu : réponse d'un fluide parfait

-Pointillé : réponse de fluide viscoélastique

Figure 1-10 : Comportements des fluides soumis à des contraintes oscillatoires (Ghezzehei et Or., 2001)

-  $\delta=0$  (solide élastique parfait courbe en trait plein de la figure 1-10 b) déformation en phase avec la contrainte oscillatoire

-  $\delta=90^\circ$  (fluide parfait courbe discontinue de la figure 1-10 b) : déphasage de  $90^\circ$  entre la contrainte et la déformation oscillatoires

-  $0 < \delta < 90^\circ$  : fluide viscoélastique (courbe en pointillés de la figure 1-10 b) comme les fluides réels.

Pour les fluides viscoélastiques, les amplitudes des contraintes  $\tau_0$  et des déformations  $\gamma_0$  sont reliés par une équation d'élasticité :

$$\tau_0 = G^* \gamma_0$$

Équation 1-19

avec :

$$G^* = \sqrt{[(G')^2 + (i G'')^2]}$$

Équation  
1-20

$G^*$  est le module complexe de cisaillement

$$G' = G^* \cos(\delta)$$

Équation  
1-21

$G'$  représente le module d'élasticité ou de stockage en cisaillement

$$G'' = G^* \sin(\delta)$$

Équation  
1-22

$G''$  représente le module de fluidité ou de perte de rigidité en cisaillement.

Tout fluide viscoélastique est donc caractérisé par un comportement élastique représenté par le module élastique  $G'$  et un comportement visqueux représenté par le module visqueux  $G''$ .

Les mêmes transformations peuvent être faites également avec la viscosité.

Plusieurs rhéomètres permettent aussi de déterminer directement la viscosité des matériaux : on peut citer à titre d'information, le rhéomètre plan-plan et le rhéomètre capillaire.

## CHAPITRE 2 : COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE ET MESURE DES DÉFORMATIONS

### 2.1 Comportement des matériaux à composante visqueuse

Dans la littérature, on rencontre souvent trois types de modèles de comportement qui tiennent compte de la composante visqueuse dans les matériaux : i) les modèles viscoélastiques, ii) les modèles viscoplastiques et iii) les modèles visco-hyperélastiques. L'objectif de ce paragraphe est de présenter les principales caractéristiques des lois de comportements viscoélastiques. À cet effet, après une introduction sommaire sur le modèle de Maxwell (Bird et al, 1987) de base et celui de Maxwell généralisé (Bird et al, 1987), nous présentons le modèle intégral de comportement de Lodge (Lodge, 1964) pour la viscoélasticité linéaire et le modèle intégral de K-BKZ (Bernstein et al, 1965) pour la viscoélasticité non linéaire. Ce dernier modèle sera retenu pour la modélisation du comportement de remblais, en écoulement, dans une conduite cylindrique horizontale.

Les modèles de comportement viscoélastique sont des modèles qui dépendent, généralement, du taux de déformation, de l'historique des déformations et de la température. Pour ces modèles, la viscosité et la rigidité sont fonction de la température, de l'amplitude de la déformation et du temps. On rencontre deux classes de modèles viscoélastiques : les modèles linéaires et non linéaires. L'ensemble de ces modèles respecte trois principes fondamentaux : i) le principe de causalité (l'état du milieu à l'instant présent ne dépend que du mouvement et des efforts passés et présents), ii) le principe d'indifférence matérielle (la loi de comportement est la même pour tout observateur) et iii) le second principe de la thermodynamique (la loi de comportement assure une dissipation positive d'énergie indépendamment des sollicitations extérieures).

Dans ce qui suit, une introduction sommaire sur la viscoélasticité linéaire sera présentée. Ensuite, nous exposons une étude plus élargie sur la modélisation en viscoélasticité non linéaire.

### 2.1.1 Comportement viscoélastique linéaire

Selon la théorie de la viscoélasticité linéaire intégrale, la loi de comportement viscoélastique d'un matériau représente une relation linéaire entre l'historique des contraintes et l'historique des déformations. En plus, selon cette théorie qui tient compte des phénomènes de dissipation de l'énergie dans le temps, les déformations sont réversibles.

La description du comportement viscoélasticité linéaire des matériaux est généralement réalisée à l'aide de modèles rhéologiques. Plusieurs modèles rhéologiques sont disponibles dans la littérature pour décrire aussi bien les matériaux liquides que les matériaux semi-solides. Parmi les modèles de base, on trouve le modèle de Maxwell (Bird et al, 1987). Dans ce modèle, le caractère viscoélastique linéaire est représenté par un système ressort-amortisseur en série (analogie mécanique) : le ressort est caractérisé par un module élastique  $E$  et l'amortisseur par une viscosité  $\eta$ . Toutefois, ce modèle de base est insuffisant pour représenter les réponses, dans le temps et pour différentes sollicitations, d'une majorité de matériaux (polymères par exemple). À cet effet, on trouve le modèle de Maxwell généralisé (Bird et al, 1987) qui fait intervenir plusieurs éléments 'ressort-amortisseur' en parallèle. Chacun de ces éléments est caractérisé par un temps de relaxation  $\lambda_i$  et une rigidité  $E_i$ . L'ensemble des couples  $(\lambda_i, E_i)$  représente une caractéristique du matériau et forme ce qu'on appelle le spectre. La connaissance de ce spectre est essentielle pour déterminer les paramètres rhéologiques des matériaux viscoélastiques.

Du point de vue mathématique, il existe deux types de formulations pour représenter le comportement viscoélastique linéaire des matériaux: formulations différentielles et formulations intégrales. Parmi les modèles intégrales d'intérêt, il y a le modèle de Lodge (Lodge, 1964). Ce modèle résulte d'une théorie statistique (réseaux) développée en 1946

par Green et Tobolsky (Green and Tobolsky, 1946) pour décrire le comportement des polymères liquides en petites déformations. Ensuite cette théorie a été modifiée, dans un premier temps par Yamamoto (Yamamoto, 1956, 1957, 1958) et ensuite par Lodge (Lodge, 1964). Les concepts utilisés par Lodge, pour décrire le comportement des polymères liquides, sont basés sur le caractère temporaire des jonctions (nœuds) entre les chaînes macromoléculaires (segments) et l'existence de l'enchevêtrement entre les segments. Pour établir le modèle mathématique de Lodge, les considérations suivantes sont utilisées :

- Le polymère est considéré comme un milieu continu, homogène et incompressible et sa température est uniforme partout.

- Le principe de superposition de Boltzmann (généralisation) est considéré

- Le second principe de la thermodynamique est utilisé dans la théorie de Lodge

- A tout instant, les longues chaînes macromoléculaires sont en liaison par leurs bouts. Les enchevêtrements physiques de ces chaînes sont temporaires et s'étendent partout dans le réseau en créant des segments. Chacun de ces segments possède une ou plusieurs jonctions par rapport à un petit élément de volume.

- Le mouvement dû à l'effet thermique provoque une destruction et une création continues des segments. A tout instant  $t$ , la concentration des segments qui existe dans un intervalle de temps  $[t', t' + dt']$  est :  $N(t - t')dt'$  ou  $N$  est le taux de création des segments par unité de volume. Il dépend de l'intervalle  $[t - t']$  et non de  $t$  ou  $t'$  séparément. Le modèle mathématique proposé par Lodge et qui relie l'historique des contraintes réelles avec les déformations est donné par l'expression suivante :

$$[\sigma(t)] = -p[I] + \int_{-\infty}^t \mu(t - t') [c(t', t)]^{-1} dt' \quad \text{Équation 2-1}$$

$p$  est la pression hydrostatique,  $[I]$  est une matrice unitée,  $[c(t', t)]$  représente le tenseur des déformations de Finger et  $m(t - t')$  représente la fonction mémoire :

$$\mu(t - t') = \sum_k g_k \exp[-(t - t')/\lambda_k] \quad \text{Équation 2-2}$$

$\lambda_k$  est le temps de relaxation et  $g_k$  est la rigidité associée à la relaxation  $\lambda_k$ . La détermination des paramètres  $\lambda_k$  et  $g_k$  nécessite, d'une part des tests rhéologiques (dynamique en cisaillement par exemple), ensuite l'utilisation d'algorithmes des moindres carrés.

### 2.1.2 Comportement viscoélastique intégral non-linéaire : modèle K-BKZ

Bien que la théorie des réseaux donne de bons résultats pour la description des faibles déformations des polymères viscoélastiques, en cisaillement (Wagner, 1976) et en extension (Chang et Lodge, 1972), il n'en est pas le cas pour les régions non linéaires (grandes déformations). Pour contourner ce problème, plusieurs approches ont été développées. Parmi les modèles d'intérêt, il y a le modèle intégral proposé par Kaye (1962), ensuite, celui proposé par Bernstein, Kearley et Zapas (Breinstein et al, 1963) et qui porte maintenant le nom de K-BKZ (équation constitutive K-BKZ) (Bernstein et al, 1965).

Dans le modèle intégral de K-BKZ, la fonction mémoire est exprimée en termes dépendant de la déformation et de l'histoire de la déformation dans le matériau. Du point de vue mathématique, cette fonction mémoire fait apparaître une fonction non séparable (fonction de la différence de temps  $(t-t')$  et des invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  du tenseur des déformations de Cauchy). Cependant, des expériences ont montré (Laun, 1978) la nécessité d'introduire la supposition de la séparabilité de la fonction mémoire d'une autre fonction distincte (fonction d'amortissement). Cette considération est reliée au phénomène de démêlement des jonctions d'enchevêtrement caractéristique du comportement non linéaire des polymères liquides qui augmente avec la décroissance de la déformation. Ceci affecte par la suite la structure du réseau. En se basant sur les

considérations ci-dessus, Wagner (1979) a modifié la théorie de réseau en introduisant deux hypothèses indépendantes :

La probabilité de survie dans le réseau d'un type  $k$  de segments dans l'intervalle de temps  $[t - t']$  est  $\exp[-(t - t')/\tau_k]$

La probabilité de survie d'un segment  $k$  de réseau suite à une déformation relative entre  $t'$  et  $t$  est indépendante du type de segment  $k$  et est égale à  $h(I_1(t', t), I_2(t', t))$  et où  $I_1$  et  $I_2$  sont respectivement le premier et le deuxième invariant du tenseur relatif des déformations de Finger.

La probabilité totale de survie d'un segment  $k$  du réseau dans l'intervalle  $[t - t']$  pour une déformation donnée est le produit de  $\exp[-(t - t')/\tau_k]$  avec la fonction  $h(I_1, I_2)$ .

Selon ces hypothèses, l'équation constitutive de Lodge devient alors :

$$[\sigma(t)] = -p[I] + \int_{-\infty}^t m(t - t') [c(t', t)]^{-1} dt' \quad \text{Équation 2-3}$$

Où la fonction mémoire  $m(t - t')$  est maintenant séparable en deux termes :

$$m(t - t') = \mu(t - t')h(I_1, I_2) \quad \text{Équation 2-4}$$

$\mu(t - t')$  représente la fonction mémoire viscoélastique linéaire et  $h(I_1, I_2)$  est la fonction déformation ou la fonction d'amortissement.  $h(I_1, I_2)$  tend vers 1 pour les faibles déformations et vers 0 pour les grandes déformations :  $0 \leq h(I_1, I_2) \leq 1$

Pour généraliser les résultats expérimentaux, Wagner et Stephenson en 1979 ont introduit l'invariant généralisé des déformations  $I$  (Wagner and Stephenson, 1979)

$$I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2 \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{Équation 2-5}$$

où  $\alpha$  est un paramètre matériel.

Pour un écoulement en cisaillement pur,  $I$  est indépendant de  $\alpha$  puisque  $I_1 = I_2$  :

$$I(\gamma) = I_1(\gamma) = I_2(\gamma) = \gamma^2 + 3 \quad \text{Équation 2-6}$$

Pour un écoulement en extension ( $\varepsilon_a$  positive), on a la représentation suivante :

$$I(\varepsilon_a) = \alpha I_1(\varepsilon_a) + (1 - \alpha)I_2(\varepsilon_a); \quad \text{Équation 2-7}$$

La fonction d'amortissement peut être exprimée de manière générale sous plusieurs formes. Dans le cas d'une somme de deux termes exponentiels (Osaki,1976), on a l'expression suivante :

$$h(I) = h(I_1, I_2) = f \exp(-n_1 \sqrt{I-3}) + (1-f) \exp(-n_2 \sqrt{I-3}) \quad \text{Équation 2-8}$$

## 2.2 Méthodes de description cinématique d'écoulement de fluide

Le champ de vitesse, donné par le vecteur vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t', t)$ , et le vecteur position,  $\vec{r}(r, z)$ , sont nécessaires pour la description cinématique de l'écoulement. La trajectoire des éléments matériels peut être illustrée par l'une ou l'autre des deux méthodes descriptives suivantes.



### 2.2.1 Description lagrangienne

La trajectoire de la particule est obtenue en relevant la position de celle-ci en fonction du temps. Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur lieu. Les trajectoires des particules sont donc les intégrales des équations différentielles suivantes :

$$\frac{dr}{dt} = v_r(r, z, t) \quad \text{Équation 2-9}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z(r, z, t)$$

Les conditions initiales qui donnent la position  $\vec{r} = \vec{r}_0$  au temps  $t = t_0$  nous permettent d'intégrer aisément ces équations. Le résultat de l'intégration se présente sous forme paramétrique où  $t$  est le paramètre.

### 2.2.2 Description eulérienne

Cette méthode consiste à la détermination du champ de vitesse des lignes de courant données par les intégrales du système différentiel suivant :

$$\frac{dr}{dv_r} = \frac{dz}{dv_z} \quad \text{Équation 2-10}$$

Le paramètre  $t$  a une valeur fixe. Les lignes de courant changent de position par rapport au temps. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, les particules suivent continuellement les mêmes trajectoires engendrant ainsi les mêmes lignes de courant.

## 2.3 Système de mesure des déformations

Dans cette partie nous introduisons un modèle mathématique pour la description des déformations induites dans une particule de *remblais-fluide* lors de son déplacement avec l'écoulement. À cette fin, nous considérons l'approche proposée dans (Erchiqui et al, 2004).

Considérons une particule de *remblais-fluide* qui a subi une déformation quelconque entre deux instants  $t'$  (passé) et  $t$  (actuel) le long d'une ligne de courant  $\psi$  d'un écoulement axisymétrique. À ses deux instants  $t'$  et  $t$ , respectivement, associons à la particule de fluide un système de deux vecteurs de base matérielle  $(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3)_\psi$  et  $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)_\psi$ . La base  $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)_\psi$  est supposée être orthonormée et elle sera utilisée comme système de référence pour mesurer les déformations matérielles induites dans la particule de fluide. En plus, nous supposons que les déformations mesurées dans le système  $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)_\psi$  à l'instant  $t$ , peuvent être exprimées en fonction des déformations mesurées dans la base  $(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3)_\psi$  et vice-versa.

Pour la suite de l'étude, le vecteur  $\vec{e}_1$  est supposé être dirigé le long de la ligne de courant  $\psi$  engendrée par l'écoulement axisymétrique, le vecteur  $\vec{e}_2$  est normal à la surface axisymétrique du courant et  $\vec{e}_3$  est orienté le long de la direction radiale de l'écoulement. La figure ci-dessus schématise les deux bases de vecteurs matérielles :

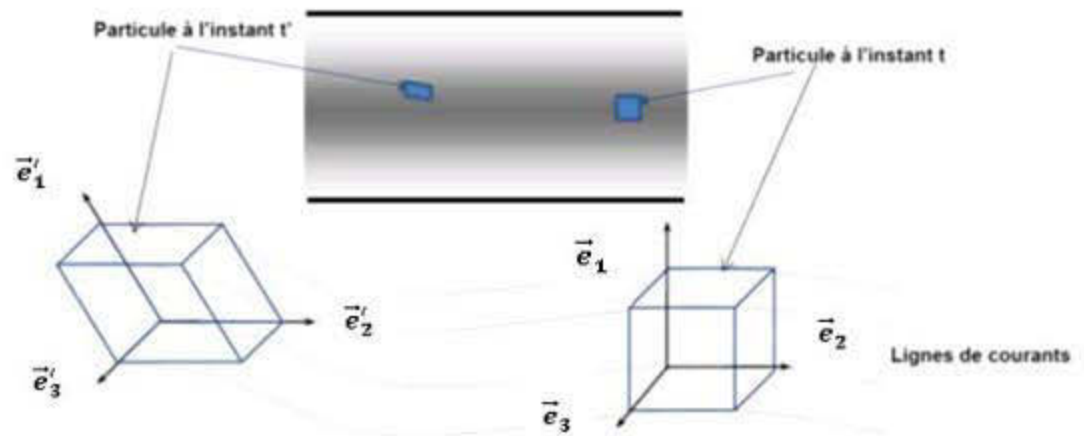


Figure 2-1 : Vecteurs de base  $(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3)$  et  $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$

### 2.3.1 Déformations en cisaillement et en extension axisymétrique

Pour le développement du modèle mathématique, nous supposons que la déformation induite dans la particule *remblais-fluide*, lors de l'écoulement axisymétrique, peut être décomposée en deux parties : i) déformation en élévation pure ( $\epsilon$ ) et ii) déformation en cisaillement ( $\gamma$ ). Cette dernière est considérée comme la résultante d'une déformation en cisaillement pur et d'une déformation en cisaillement supplémentaire due à l'extension (Erchiqui et al, 2004). La figure ci-dessous illustre, en 2D, les deux déformations induites dans l'écoulement axisymétrique.

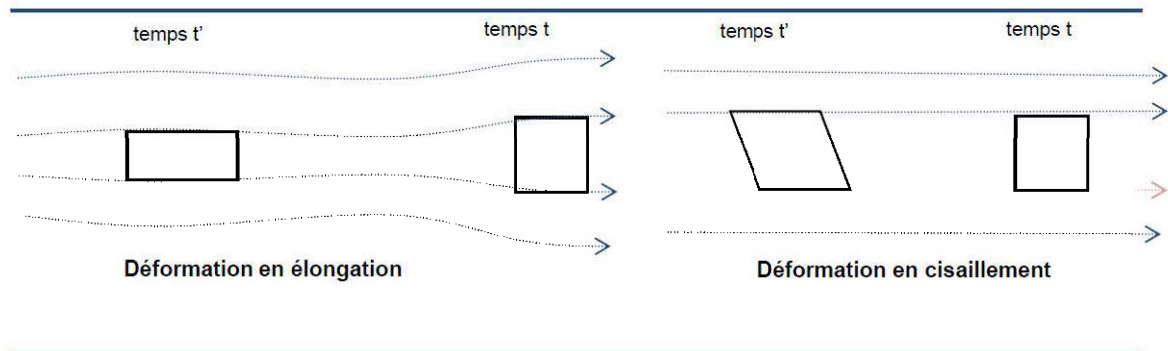


Figure 2-2: Déformations en cisaillement et en élongation induites dans une particule de remblais-fluide

Les sous sections ci-dessus décrivent chacune de ces deux déformations.

### 2.3.1.1 Déformation en extension pur

Considérons une particule de *remblais-fluide* qui a subi, à l'instant  $t$ , des déformations élongationnelles sur chacune des directions principales du vecteur matérielle ( $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ ). Ensuite, désignons par  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$  et  $\dot{\epsilon}_3$  les taux de déformation dans les directions respectives  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ . Dans ces conditions, on a les définitions suivantes (Erchiqui, et al, 2004) :

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{1}{L_{\psi,1}} \frac{dL_{\psi,1}}{dt} \quad \text{Équation 2-11}$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{1}{L_{\psi,2}} \frac{dL_{\psi,2}}{dt} \quad \text{Équation 2-12}$$

$$\dot{\epsilon}_3 = \frac{d\epsilon_3}{dt} = \frac{1}{L_{\psi,3}} \frac{dL_{\psi,3}}{dt} \quad \text{Équation 2-13}$$

$dL_{\psi,1}$ ,  $dL_{\psi,2}$  et  $dL_{\psi,3}$  représentent respectivement les élongations différentielles adimensionnelles de la particule de *remblais-fluide* dans les directions  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ .  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  désignent respectivement les déformations en extension selon les directions  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ .  $L_{\psi,1}$ ,  $L_{\psi,2}$  et  $L_{\psi,3}$  représentent la longueur des particules après élongation respectivement sur  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ .

Et En intégrant les expressions ci-dessus, on obtient les déformations développées par la particule de *remblais-fluide*, entre les instants  $t'$  et  $t$ , soient :

$$\varepsilon_1(t', t) = \int_{t'}^t \dot{\varepsilon}_1(t'') dt'' = \ln \left( \frac{L_{\psi,1}(t)}{L_{\psi,1}(t')} \right) \quad \text{Équation 2-14}$$

$$\varepsilon_2(t', t) = \int_{t'}^t \dot{\varepsilon}_2(t'') dt'' = \ln \left( \frac{L_{\psi,2}(t)}{L_{\psi,2}(t')} \right) \quad \text{Équation 2-15}$$

$$\varepsilon_3(t', t) = \int_{t'}^t \dot{\varepsilon}_3(t'') dt'' = \ln \left( \frac{L_{\psi,3}(t)}{L_{\psi,3}(t')} \right) \quad \text{Équation 2-16}$$

En utilisant la définition suivante :

$$L_{i,\psi}(t', t) = \frac{1}{L_{i,\psi}(t, t')} = \frac{L_{\psi,i}(t)}{L_{\psi,i}(t')}, \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad \text{Équation 2-17}$$

Nous déduisons des relations xx-yy, les représentations suivantes :

$$L_{1,\psi}(t', t) = \frac{1}{L_{1,\psi}(t, t')} = \frac{L_{\psi,1}(t)}{L_{\psi,1}(t')} = \exp(\varepsilon_1(t', t)) \quad \text{Équation 2-18}$$

$$L_{2,\psi}(t', t) = \frac{1}{L_{2,\psi}(t, t')} = \frac{L_{\psi,2}(t)}{L_{\psi,2}(t')} = \exp(\varepsilon_2(t', t)) \quad \text{Équation 2-19}$$

$$L_{3,\psi}(t', t) = \frac{1}{L_{3,\psi}(t, t')} = \frac{L_{\psi,3}(t)}{L_{\psi,3}(t')} = \exp(\varepsilon_3(t', t)) \quad \text{Équation 2-20}$$

Selon l'hypothèse d'un milieu incompressible (principe de conservation de la masse), les extensions principales sont reliées entre elles par la relation suivante :

$$L_{1,\psi}(t, t')L_{2,\psi}(t, t')L_{3,\psi}(t, t') = 1 \quad \text{Équation 2-21}$$

Soit encore :

$$L_{3,\psi}(t, t') = \frac{1}{L_{1,\psi}(t', t)L_{2,\psi}(t', t)} \quad \text{Équation 2-22}$$

Finalement, les résultats obtenus pour les déformations en extension pur, dans la base matérielle  $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$ , peuvent être exprimées en fonction de la base matérielle  $(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3)$  de la manière suivante :

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{L_{1,\psi}(t', t)} \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3$$

$$\vec{e}'_2 = 0 \vec{e}_1 + \frac{1}{L_{2,\psi}(t', t)} \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3$$

$$\vec{e}'_3 = 0 \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 + \frac{1}{L_{3,\psi}(t', t)} \vec{e}_3$$

Sous forme matricielle, le système ci-dessus devient :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \langle \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3 \rangle \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{1,\psi}(t', t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{2,\psi}(t', t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{3,\psi}(t', t)} \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-23}$$

Soit encore :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \langle \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3 \rangle \cdot [f(t', t)] \quad \text{Équation 2-24}$$

$[f(t', t)]$  représente le tenseur gradient des déformations eulériennes défini par :

$$[f(t', t)] = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{1,\psi}(t', t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{2,\psi}(t', t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{3,\psi}(t', t)} \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-25}$$

En termes des déformations  $\varepsilon_1(t', t)$ ,  $\varepsilon_2(t', t)$  et  $\varepsilon_3(t', t)$ , le tenseur gradient déformation devient par l'utilisation des formules x, y et z :

$$[f(t', t)] = \begin{pmatrix} \exp(-\varepsilon_1(t', t)) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\varepsilon_2(t', t)) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-\varepsilon_3(t', t)) \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-26}$$

Pour le besoin de la représentation des modèles de comportements viscoélastiques de K-BKZ, relation y, on a besoin de l'expression du tenseur de Finger et ses invariants. Pour cela, dans un premier temps, déterminons l'expression du tenseur de Cauchy-Green (qui exprime les variations des longueurs et des directions des vecteurs matériels  $(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3)$  provoqués par l'écoulement en élongation pur) à l'aide de la formule suivante:

$$[c(t', t)] = [f(t', t)]^T \cdot [f(t', t)] \quad \text{Équation 2-27}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_{1,\psi}^2(t', t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{2,\psi}^2(t', t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{3,\psi}^2(t', t)} \end{pmatrix}$$

Ensuite, en inversant la matrice ci-dessus, nous obtenons l'expression de tenseur de Finger, soit :

$$[c(t', t)]^{-1} = \begin{pmatrix} L_{1,\psi}^2(t', t) & 0 & 0 \\ 0 & L_{2,\psi}^2(t', t) & 0 \\ 0 & 0 & L_{3,\psi}^2(t', t) \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-28}$$

Les invariants associés au tenseur de Finger sont alors donnés par les formules suivantes :

$$I_1([c(t', t)]^{-1}) = L_{1,\psi}^2(t', t) + L_{2,\psi}^2(t', t) + L_{3,\psi}^2(t', t) \quad \text{Équation 2-29}$$

$$I_2([c(t', t)]^{-1}) = L_{1,\psi}^2(t', t) L_{2,\psi}^2(t', t) + L_{1,\psi}^2(t', t) L_{3,\psi}^2(t', t) + L_{2,\psi}^2(t', t) L_{3,\psi}^2(t', t)$$

$$I_3([c(t', t)]^{-1}) = L_{1,\psi}^2(t', t) L_{2,\psi}^2(t', t) L_{3,\psi}^2(t', t)$$

En termes des déformations  $\varepsilon_1(t', t)$ ,  $\varepsilon_2(t', t)$  et  $\varepsilon_3(t', t)$ , le tenseur de Finger et ses invariants s'écrivent :



$$[c(t', t)]^{-1} = \begin{pmatrix} \exp(2\varepsilon_1) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2\varepsilon_3) \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-30}$$

Les invariants associés au tenseur de Finger sont alors donnés par les formules suivantes :

$$I_1(c^{-1}) = \exp(2\varepsilon_1) + \exp(2\varepsilon_2) + \exp(2\varepsilon_3) \quad \text{Équation 2-31}$$

$$I_2(c^{-1}) = \exp(2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) + \exp(2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)) + \exp(2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3))$$

$$I_3(c^{-1}) = \exp(2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3))$$

### 2.3.1.2 Déformation en cisaillement

Considérons, dans un premier temps, le cas d'un écoulement en cisaillement pur et supposons que le vecteur  $\vec{e}_1$  est dirigé dans la direction du cisaillement. L'angle de cisaillement, n'est donc que l'inclinaison du vecteur matériel  $\vec{e}'_2$  par rapport à  $\vec{e}_2$  (inclinaison de  $\vec{e}'_2$  par rapport à la surface axisymétrique de l'écoulement). La figure 2-4 illustre les déformations subies par la particule remblai-fluide:

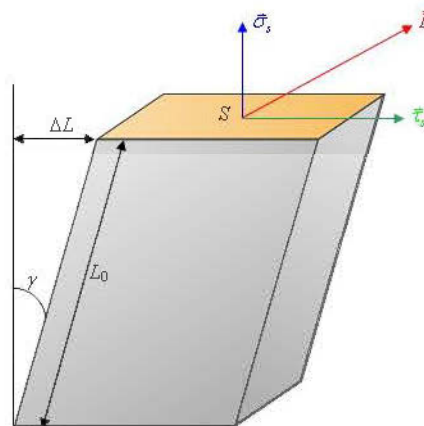


Figure 2-3 : déformations subies par la particule polymère-fluide en cisaillement

Il s'ensuit que, le cisaillement pur,  $\gamma_\psi$ , accumulé par la particule de *remblais-fluide*, dans l'intervalle de temps  $[t', t]$ , dans la direction  $\vec{e}_2$ , est la sommation des taux de cisaillement  $\dot{\gamma}_\psi$  subit par la particule entre les deux instants  $t'$  et  $t$ :

$$\gamma_\psi(t', t) = \int_{t'}^t \dot{\gamma}_\psi(t'') dt'' \quad \text{Équation 2-32}$$

Toutefois, comme il est souligné dans (Erchiqui et al, 2004), il faut ajouter à la déformation en cisaillement pur, donnée par l'équation 2-32, un cisaillement supplémentaire dû à l'extension de la particule de fluide. L'expression globale de ce cisaillement est donnée par la formule suivante (Erchiqui et al, 2004):

$$\bar{\gamma}_\psi(t', t) = \frac{\gamma_\psi(t', t)}{L_{2,\psi}(t', t)} \quad \text{Équation 2-33}$$

Finalement, la déformation en cisaillement, dans la direction matérielle  $\vec{e}'_2$  s'exprime en fonction de la base matérielle  $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$  de la façon suivante :

$$\vec{e}'_1 = 1 \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3 \quad \text{Équation 2-34}$$

$$\vec{e}'_2 = -\frac{\gamma_\psi(t', t)}{L_{2,\psi}(t', t)} \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3$$

$$\vec{e}'_3 = 0 \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 + 1 \vec{e}_3$$

Sous forme matricielle, le système de l'équation 2-34 devient :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \langle \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3 \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\gamma_\psi}{L_{2,\psi}(t', t)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-35}$$

Soit encore :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \langle \vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3 \rangle \cdot [f(t', t)] \quad \text{Équation 2-36}$$

avec  $f, (t', t)$  le tenseur gradient des déformations eulérien défini par :

$$[f(t', t)] = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\gamma_\psi}{L_{2,\psi}(t', t)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-37}$$

Même remarque que précédemment, pour le besoin de la représentation des modèles de comportements viscoélastiques de K-BKZ, on a besoin de l'expression du tenseur de Finger et de ses invariants. Ainsi, en utilisant l'équation 2-37 dans le cas d'une déformation en cisaillement, nous obtenons l'expression suivante pour le tenseur de Finger :

$$[c(t', t)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{L_{2,\psi}^2(t', t)} & \frac{\gamma}{L_{2,\psi}(t', t)} & 0 \\ \frac{\gamma}{L_{2,\psi}(t', t)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-38}$$

qui possède les invariants suivants :

$$I_1 = \frac{\gamma^2}{L_{2,\psi}^2(t', t)} + 3 \quad \text{Équation 2-39}$$

$$I_2 = \frac{\gamma^2}{L_{2,\psi}^2(t', t)} + 3$$

$$I_3 = 1$$

### 2.3.1.3 Principe de superposition des déformations en cisaillement et en extension

Suite aux définitions obtenues pour les déformations en cisaillement et en extension pur, le principe de superposition nous permet alors de définir le tenseur gradient des déformations globales selon la formule suivante:

$$[f(t', t)]_{\psi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_{1,\psi}} & -\frac{\gamma_{\psi}}{L_{2,\psi}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{2,\psi}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{3,\psi}} \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-40}$$

Le tenseur de Finger est alors donné par la formule suivante :

$$[c(t', t)]^{-1} = \begin{pmatrix} (1 + \gamma_{\psi}^2) L_{1,\psi}^2(t', t) & \gamma_{\psi} L_{1,\psi}(t', t) L_{2,\psi}(t', t) & 0 \\ \gamma_{\psi} L_{1,\psi}(t', t) L_{2,\psi}(t', t) & L_{2,\psi}^2(t', t) & 0 \\ 0 & 0 & L_{3,\psi}^2(t', t) \end{pmatrix} \quad \text{Équation 2-41}$$

qui possède les invariants suivants :

$$I_1 = (1 + \gamma_{\psi}^2) L_{1,\psi}^2(t', t) + L_{2,\psi}^2(t', t) + L_{3,\psi}^2(t', t) \quad \text{Équation 2-42}$$

$$I_2 = L_{1,\psi}^2(t', t) L_{2,\psi}^2(t', t) + (1 + \gamma_{\psi}^2) L_{1,\psi}^2(t', t) L_{3,\psi}^2(t', t) \\ + L_{2,\psi}^2(t', t) L_{3,\psi}^2(t', t)$$

$$I_3 = L_{1,\psi}^2(t', t) L_{2,\psi}^2(t', t) L_{3,\psi}^2(t', t) = 1$$

La figure 2-5 illustre schématiquement le principe de superposition des déformations en extension pur et en cisaillement :

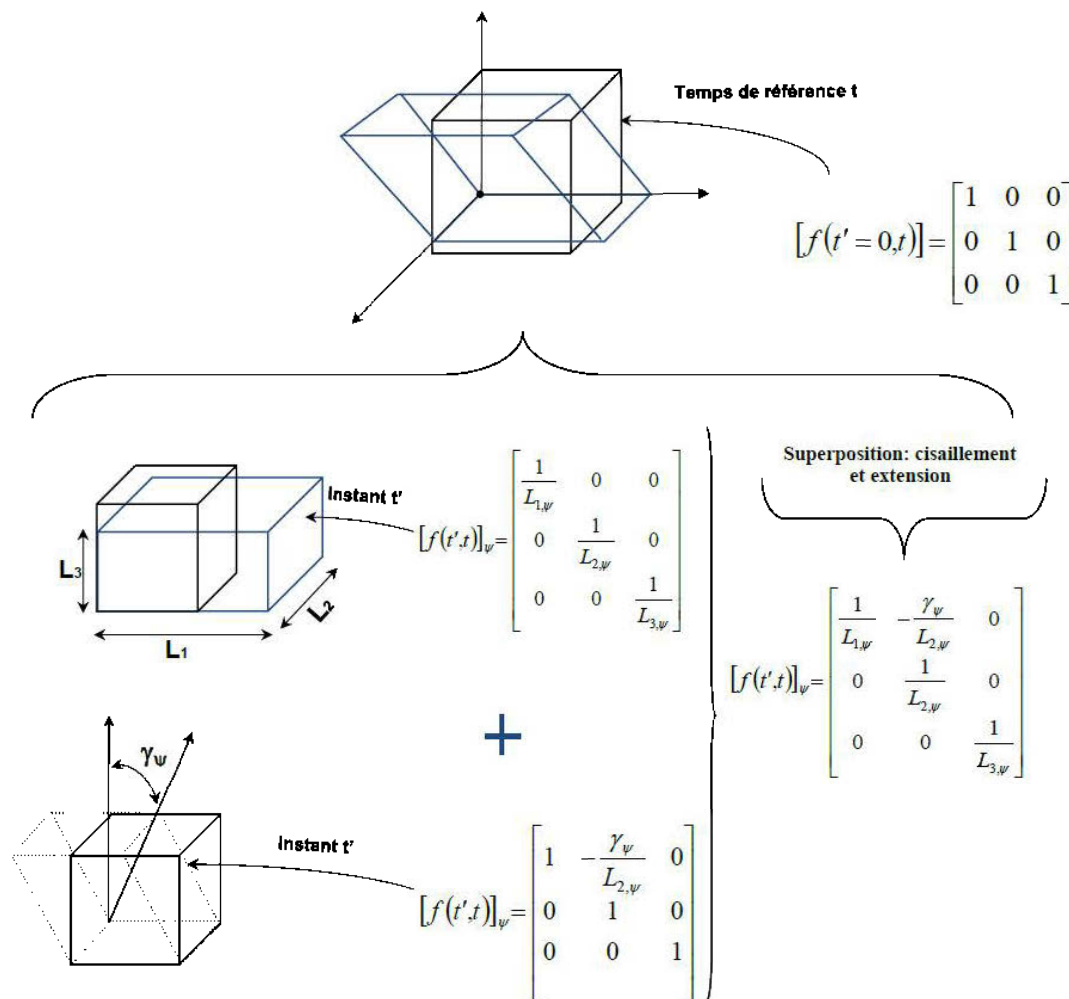


Figure 2-4: Description et mesure des déformations

**Remarque :** Pour un écoulement en cisaillement pur,  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$  et  $I_1 = I_2$  quelle que soit la valeur du paramètre  $\alpha$  apparaissant dans la loi de comportement de K-

BKZ (fonction *damping*). Pour un écoulement en extension, la description rhéologique uniaxiale nécessite une valeur de  $\alpha = 0$  et la description rhéologique biaxiale nécessite une valeur de 1.

### 2.3.2 Choix des variables de mesures des déformations

La déformation subie par le vecteur matériel  $\vec{e}'_1$  est directement reliée au rapport des vitesses  $v_1(t')$  et  $v_1(t)$ , respectivement aux temps  $t'$  et  $t$ . Ceci permet de définir  $\vec{e}'_1$  de la manière suivante :

$$\vec{e}'_1 = \left( \frac{v_1(t')}{v_1(t)}, 0, 0 \right); \quad \text{Équation 2-43}$$

Nous déduisons alors :

$$L_1(t', t)_\psi = \frac{v_1(t)}{v_1(t')}$$

L'indice  $\psi$  signifie que la déformation se mesure sur chaque ligne de courant.

Comme il est souligné dans la référence (Erchiqui et al, 2004), la déformation subie par le vecteur matériel  $\vec{e}'_3$  est directement reliée au rapport des positions radiales  $r(t')$  et  $r(t)$ , mesurés respectivement aux temps  $t'$  et  $t$ . Ceci nous permet alors d'écrire :

$$\vec{e}'_3 = \left( \frac{r(t')}{r(t)}, 0, 0 \right); \quad \text{Équation 2-44}$$

Soit :

$$L_3(t', t)_\psi = \frac{r(t)}{r(t')} \quad \text{Équation 2-45}$$

Finalement, la déformation subie par le vecteur matériel  $\vec{e}'_2$ , en se basant sur le principe de superposition (extension et cisaillement), est alors donnée par la formule suivante :

$$\vec{e}'_2 = \left( \frac{-\gamma_\psi}{L_2(t',t)_\psi}, \frac{1}{L_2(t',t)_\psi}, 0 \right) \quad \text{Équation 2-46}$$

En utilisant la condition d'incompressibilité du matériau, nous déduisons l'expression de  $L_2(t',t)_\psi$ :

$$L_2(t',t)_\psi = \frac{v(t')r(t')}{v(t)r(t)} = \frac{1}{L_1 L_3} \quad \text{Équation 2-47}$$

Pour le calcul de la déformation  $\gamma_\psi(t',t)$ , nous considérons l'approche proposée par (Erchiqui et al, 2004). Selon cette approche, la déformation en cisaillement, qui est la résultante du cisaillement pur ( $\dot{\gamma}_{21}$ ) et d'un cisaillement supplémentaire (dû à l'extension), peut être représenté par une sommation, dans le temps, du taux de cisaillement pur,  $\dot{\gamma}_\psi$  multiplié par le rapport  $\Delta L_{1,\psi} / \Delta L_{2,\psi}$  soit :

$$\gamma_\psi(t',t) = \int_{t'}^t \frac{\Delta L_{1,\psi}}{\Delta L_{2,\psi}} \dot{\gamma}_\psi(t'',t) dt'' \quad \text{Équation 2-48}$$

avec :

$$\Delta L_{1,\psi}(t',t) = \frac{L_{1,\psi}(t'',t)}{L_{1,\psi}(t'',t)} \quad \text{Équation 2-49}$$

$$\Delta L_{2,\psi}(t',t) = \frac{L_{2,\psi}(t'',t)}{L_{2,\psi}(t'',t)} \quad \text{Équation 2-50}$$

Finalement, soulignons que les composantes du tenseur des déformations de Finger sont évaluées sur chaque ligne de courant à l'aide de l'angle  $\omega$ , qui est définie avec l'axe horizontal  $z$  du système de coordonnées associé à l'écoulement axisymétrique:

$$\omega = \tan^{-1}\left(\frac{v_r}{v_z}\right) \quad \text{Équation 2-51}$$

Le temps de résidence d'une particule de *remblais-fluide*, sur une ligne de courant  $\psi$  donnée, entre les instants  $t'$  et  $t$ , peut être évalué à l'aide de la formule suivante :

$$(t' - t)_\psi = \int_{z'}^z \left(\frac{1}{v_z}\right)_\psi dz \quad \text{Équation 2-52}$$

**Remarque :** Le temps de résidence des particules de fluides se trouvant sur ou au voisinage les parois de la conduite est très grand par rapport au temps de résidence des particules se trouvant aux autres endroits de la conduite (hypothèse d'adhérence des particules matérielles : conditions aux limites).

### Calcul des lignes de courants

Pour un écoulement axisymétrique, la ligne de courant est donnée par :

$$\psi(r) = \frac{\int_0^r \rho v_z(r) r dr}{\int_0^R \rho v_z(r) r dr} \quad \text{Équation 2-53}$$

$R$  étant le rayon du cylindre. La ligne de courant est nulle sur les parois de la conduite d'écoulement.



## CHAPITRE 3 : MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

Le but de ce chapitre est double : dans un premier temps, nous présentons les hypothèses et les équations de base qui ont servi à établir le modèle numérique pour l'étude de l'écoulement axisymétrique. Ensuite, nous présentons le modèle viscoélastique intégral K-BKZ, qui est utilisé pour le calcul des pertes de charges dans une conduite cylindrique horizontal. Pour ce modèle, nous dévoilons les paramètres identifiés grâce à l'utilisation combinée des données rhéologiques, associé aux essais dynamiques présentés, et la méthode des moindres carrées. Pour le volet de la modélisation par éléments finis, nous avons présenté les éléments essentiels pour la mise en œuvre numérique.

### 3.1 Hypothèses et mises en équations

Dans le cas de notre étude, plusieurs hypothèses ont été considérées sur le comportement de remblais et de son écoulement dans les conduites axisymétriques:

- ✓ Le remblai est supposé être un milieu homogène, isotrope et incompressible
- ✓ Le comportement de remblais est supposé être viscoélastique de type intégral
- ✓ La Température de remblais lors d'écoulement demeure constante
- ✓ Le remblai ne subit aucune réaction chimique dans le temps.
- ✓ Le régime d'écoulement de remblais est supposé être stationnaire et laminaire (nombre de Reynolds faible :  $Re \ll 1$ ) : Hypothèse de Stokes.
- ✓ Les Forces volumiques sont négligeables devant les forces de pression et de viscosité

Pour l'analyse numérique, nous considérons un système de coordonnées axisymétrique en  $r$  et  $z$ . Dans ce système, nous désignons par  $u$  la composante de la vitesse ( $\vec{v}$ ), d'une particule de fluide, selon l'axe  $r$  et par  $w$  sa composante selon l'axe des  $z$ . L'équation de conservation de la masse exige que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{Équation 3-1}$$

La pression  $p$  et les contraintes  $(\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz})$  engendrées par l'écoulement dans la conduite axisymétrique sont reliées entre elles par les équations de la conservation de la quantité de mouvement (équations de Navier-Stokes). Toutefois, avec les hypothèses qui stipulent que les forces volumiques sont négligeables devant les forces de pression et les forces de viscosité, et que l'écoulement, s'effectue avec un nombre de Reynolds faible, il s'ensuit, dans le cas d'un écoulement incompressible  $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$  et stationnaire, les équations 3-2, 3-3 et 3/4 de conservations de mouvements (équations de Stokes) référence :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0 \quad \text{Équation 3-2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad \text{Équation 3-3}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta_{rz} \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta_{rz} \frac{u}{r}; \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta_{rz} \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \sigma_{rz} &= \eta_{rz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad \text{Équation 3-4}$$

$\eta_{rz}$  représente la viscosité dynamique du fluide.

La résolution des équations ci-dessus nécessite la connaissance des conditions aux limites. Pour cela, nous considérons les conditions aux limites sur les parois de la conduite (qui sont supposés être fixe). Parmi ces conditions, il y a la condition d'adhérence du fluide :

$$\vec{u}_{paroi} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}_{paroi} = \vec{0} \quad \text{Équation 3-5}$$

La relation ci-dessus, dans le cas particulier d'un écoulement axisymétriques, s'exprime de la manière suivante :

$$u_{paroi} = 0 \quad \text{Équation 3-6}$$

$$w_{paroi} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial r_{paroi}} = 0$$

En plus, le fluide à l'entrée et la sortie de la conduite présente une surface libre. En conséquence, la condition suivante doit être considérée :

$$\sigma_{ij} \cdot n_j - p \cdot n_i = 0$$

$n_i$  étant la normale à la surface libre.

### 3.2 Modèle de KBK-Z et description

Dans notre étude, nous considérons le modèle de comportement viscoélastique de type KBK-Z. Pour ce modèle, le champ de contraintes à l'instant présent  $t$  est déterminé en prenant en compte l'historique des déformations que le fluide a subies dans le passé. La relation entre le tenseur des contraintes à l'instant  $t$  et l'historique du tenseur gradient de déformations est régit par l'équation 2-55 :

$$\sigma(t) = -P(t)I + \int_{-\infty}^t m(\tau, t) [c(\tau, t)]^{-1} d\tau \quad \text{Équation 3-7}$$

$p$  est la pression hydrostatique,  $I$  est la matrice identité,  $[c]^{-1}$  est le tenseur de Finger,  $m(\tau, t)$  est une fonction non-linéaire caractéristique du matériau. La fonction mémoire est donnée par l'expression suivante :

$$m(\tau, t) = \mu(\tau, t)h(I_1, I_2) \quad \text{Équation 3-8}$$

La fonction  $\mu(\tau, t)$  représente la fonction mémoire du matériau donnée par :

$$\mu(t, \tau) = \sum_{k=1}^n \frac{g_k}{\tau_k} \exp\left[-\frac{t - \tau}{\tau_k}\right] \quad \text{Équation 3-9}$$

Le terme  $\tau_k$  représente le temps de relaxation associé à la rigidité  $g_k$ . La fonction  $h(I_1, I_2)$  représente la fonction d'amortissement du matériau (*damping*), dépendant des invariants du tenseur de Finger. Plusieurs modèles de fonctions *damping* existent dans la littérature. Toutefois, notre choix est orienté vers le modèle de Papanastasiou :

$$h(I_1, I_2) = f \exp(-n_1 \sqrt{I - 3}) + (1 - f) \exp(-n_2 \sqrt{I - 3}) \quad \text{Équation 3-10}$$

Avec :

$$I = \alpha I_1 + (1 - \alpha) I_2 \quad \text{avec } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{Équation 3-11}$$

Les paramètres  $f$ ,  $n_1$  et  $n_2$  sont des constantes matérielles qui peuvent être déterminés par l'utilisation des données expérimentales et numériques d'optimisations.  $\alpha$  est un paramètre dépendant du type de déformation rencontrée dans l'écoulement.

La viscosité est reliée aux paramètres mécaniques par la relation suivante (Erchiqui et al, 2004) :

$$\eta_{rz}(\dot{\gamma}_{rz}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 \frac{f_j \tau_i g_i}{(1 + n_j \tau_i \dot{\gamma}_{rz})^2} \quad \text{Équation 3-12}$$

Avec  $f_1 = f$  et  $f_2 = 1 - f$ .  $\dot{\gamma}_{rz}$  et le taux de cisaillement donné par :

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{Équation 3-13}$$

Dans le cas de notre travail, nous avons utilisés des fonctions de déformations arbitraires en s'inspirant des travaux réalisés sur des polymères. En effet, les fonctions déformations n'ont pas été déterminées au laboratoire pour les remblais.

### 3.2.1 Caractérisation et identification des paramètres rhéologiques

Le rhéomètre AR 2000 de la compagnie TA instrument, disponible à l'Université du Québec en Abitibi-Témiscamngue, a été utilisé pour étudier la rhéologie du remblai. Pour cela, des essais dynamiques à la température ambiante ont été réalisés sur le remblai. Les résultats associés à ses essais dynamiques, selon les travaux de maîtrise de Drissa Ouattara (Drissa Ouattara, 2011), sont illustrés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3-1 : résultats des essais dynamiques sur les résidus de la mine Doyon (Drissa Ouattara, 2011)

Fréquence (Hz)	0,1	0,4	1	2	2,8	4	4,3
G' (Pa)	63,09	55,37	44,41	35,89	34,38	35,19	35,34
G'' (Pa)	40,91	41,69	45,24	54,32	61,92	70,08	71,16
Fréquence (Hz)	5	5,8	6,2	7	8	9	
G' (Pa)	34,89	32,45	30,34	24,3	14,08	2,88	
G'' (Pa)	71,88	69,61	67,34	61	51,37	43,18	

Puisque les tests sont réalisés par des essais dynamiques dans des régions linéaire (petites déformations), seuls les paramètres mécaniques associé à la fonction mémoire,

$\mu(\tau, t)$ , peuvent être déterminés (c'est-à-dire : temps de relaxation  $\tau_k$  et rigidité  $g_k$ ). En conséquence, l'effet de la fonction *damping*,  $h(I_1, I_2)$ , ne sera pas considéré pour l'identification et on lui imposera la valeur de 1.

Pour l'identification du spectre associé aux temps de relaxation  $\tau_k$  et aux rigidités  $g_k$ , intervenant dans la fonction mémoire  $\mu(\tau, t)$ , nous considérons la méthode des moindres carrés. Pour cela, il est impératif d'exprimer les expressions théoriques du module de stockage en cisaillement ( $G'_{th}$ ) et du module de perte de rigidité en cisaillement ( $G''_{th}$ ) en fonction du temps de relaxation  $\tau_k$ , de la rigidité  $g_k$  et de la fréquence  $\omega$ . Selon la référence (Erchiqui et al, 2010), ils sont donnés par les formules suivantes :

$$G'_{th}(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{g_i \lambda_i^2 \omega^2}{1 + \lambda_i^2 \omega^2} \quad \text{Équation 3-14}$$

$$G''_{th}(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{g_i \lambda_i \omega}{1 + \lambda_i^2 \omega^2} \quad \text{Équation 3-15}$$

Ensuite il s'agit de minimiser l'erreur dans le sens des moindres carrés à l'aide de la fonction objectif suivante :

$$F = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{G'_{i,exp.} - G'_{i,th}}{G'_{i,exp.}} \right]^2 + \left[ \frac{G''_{i,exp.} - G''_{i,th}}{G''_{i,exp.}} \right]^2 \quad \text{Équation 3-16}$$

N est le nombre de points de données mesurées,  $G'_{i,exp.}$  et  $G''_{i,exp.}$  représentent les modules dynamiques mesurés dans les tests expérimentaux et  $G'_{i,th}$  et  $G''_{i,th}$  représentent, respectivement, les expressions exactes du module de stockage ( $G'_{th}$ ) et du module de perte de rigidité ( $G''_{th}$ ). Dans cette étude nous n'avons considéré que trois valeurs de temps de relaxation. Les valeurs d'identification sont données dans le tableau suivant :

Tableau 3-2: valeurs d'identification utilisés pour le remblai-fluide

$\tau_k$ (second)	$g_k$ (pascal)
5	1
1	31
0.01	320

Pour l'étude, nous considérons arbitrairement les paramètres mécaniques  $f$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  suivants pour caractériser la fonction *damping*, intervenant dans le modèle K-BKZ. Ces paramètres sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau 3-3 : paramètres mécaniques considérés pour l'étude

$f$	$n_1$	$n_2$
-	0	0
0.25	0.5	0.2
0.25	0.5	0.5

### 3.3 Modélisation par éléments finis

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour la résolution de systèmes d'équations différentielles rencontrés en sciences de l'ingénieur. Elle consiste, dans un premier temps, à la discrétisation d'un domaine

physique en éléments géométriques simples et, ensuite, il s'agit d'interpoler les variables physiques (vitesse, pression, température, etc.) sur chacun de ces éléments en fonction de leurs valeurs nodales. L'assemblage de ces éléments simples permettra la construction d'un système algébrique d'équations. La résolution de ce système, en prenant en compte les conditions initiales et conditions aux limites permettra, permet l'accès aux valeurs approximatives des variables physiques nodales.

La méthode des éléments finis est détaillée dans plusieurs références et à titre d'exemple voici quelques références de base : Touzot, 1984; Reddy, 1993 et Zienkiewicz et Taylor, 2005. C'est dans ce cadre que le projet est inscrit et il concerne l'utilisation de la méthode des éléments finis, en régime stationnaire, pour estimer les pertes de charges dans des conduites cylindriques horizontales. Seul le cas de Stokes sera considéré dans l'étude (faible vitesse d'écoulement).

### 3.3.1 Formulation intégrale

Pour les problèmes physiques en général il est très difficile, voire impossible de résoudre analytiquement l'équation de conservation de mouvement en recherchant une solution une fois différentiable par rapport aux coordonnées spatiales. La méthode des éléments finis propose d'approcher la solution exacte, à priori inconnue, par une solution dont la singularité est moins forte que celle de la solution exacte (Zienkiewicz et Taylor, 2005). Une telle formulation est obtenue en ramenant tous les termes de l'équation de Stokes d'un côté et en multipliant l'équation entière par une fonction appelée fonction poids  $w$ . Ensuite, il s'agit d'intégrer sur le domaine d'étude  $\Omega$ .

Effectuons une formulation intégrale générale à partir des équations de conservation de mouvement et de masse. Pour cela, considérons les fonctions de pondérations  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  sur le domaine d'étude  $\Omega$ . Nous obtenons alors par intégration dans le domaine  $\Omega$ , en coordonnées axisymétrique, les expressions suivantes pour les équations de conservations:



$$0 = 2\pi \int_{\Omega} \left\{ w_1 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right] \right\} r dr dz \quad \text{Équation 3-17}$$

$$0 = 2\pi \int_{\Omega} \left\{ w_2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{rz}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] \right\} r dr dz \quad \text{Équation 3-18}$$

$$0 = 2\pi \int_{\Omega} \left\{ w_3 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\} r dr dz \quad \text{Équation 3-19}$$

Comme l'équation 3-17 est l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur l'axe des  $r$ ,  $w_1$  doit être la composante de la vitesse selon l'axe des  $r$ . De la même manière,  $w_2$  doit être la composante de la vitesse selon l'axe des  $z$ . L'équation 3-19 représente les variations de volume dans un élément de dimensions  $dr$  et  $dz$ . Alors,  $w_3$  peut être assimilée à la force qui provoque le changement de volume. La variation de volume est provoquée par l'action de la pression hydrostatique donc  $w_3$  équivaut à  $-P$ .

Donc on peut écrire :

$$w_1 \sim u, \quad w_2 \sim w, \quad w_3 \sim -P$$

Pour l'obtention d'une formulation faible, on intègre les équations 3-17, 3-18 et 3-19 par parties et on applique le théorème du gradient, cela nous permet d'obtenir :

$$0 = 2\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial w_1}{\partial r} \sigma_{rr} + w_1 \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \sigma_{rz} \right] r dr dz - 2\pi \oint_{\Gamma} w_1 t_r r ds \quad \text{Équation 3-20}$$

$$0 = 2\pi \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial w_2}{\partial r} \sigma_{rz} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \sigma_{zz} \right] r dr dz - 2\pi \oint_{\Gamma} w_2 t_z r ds \quad \text{Équation 3-21}$$

$$0 = 2\pi \int_{\Omega} \left( w_3 \frac{\partial}{\partial r} (ru) + r w_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) r dr dz \quad \text{Équation 3-22}$$

Avec :  $T_r = \sigma_{rr} \mathbf{n}_r + \sigma_{rz} \mathbf{n}_z$  et  $\Gamma$  est la frontière du domaine  $\Omega$ .

### 3.3.2 Formulation matricielle élémentaire

La formulation intégrale faible montre que  $u$  et  $w$  sont les variables primaires qui doivent être continues aux frontières entre les éléments, il ne doit pas être le cas pour la pression. Les éléments finis de Lagrange peuvent donc être utilisés pour les vitesses et la pression ( $u, w, P$ ).

La continuité requiert au minimum que  $(u, w)$  soit linéaire en  $z$  et  $r$  et que  $P$  soit constant.

En subdivisant le domaine  $\Omega$  par un ensemble fini d'éléments finis on peut alors approximer chaque fonction  $u(r, z), w(r, z)$  et  $P(r, z)$ , sur chaque élément à l'aide des formules suivantes :

$$u(r, z) = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i^e(r, z) \quad \text{Équation 3-23}$$

$$w(r, z) = \sum_{j=1}^n w_j \psi_j^e(r, z) \quad \text{Équation 3-24}$$

$$P(r, z) = \sum_{J=1}^m P_J \phi_J^e(r, z) \quad \text{Équation 3-25}$$

Où  $\psi_i^e, \psi_j^e$  et  $\phi_J^e$  sont des fonctions d'interpolation d'ordres différents ( $m < n; m + 1 = n$ ) sur chaque élément  $\Omega^e$  du domaine  $\Omega$ .

En substituant les équations 3-23, 3-24 et 3-25 dans les équations 3-20, 3-21 et 3-22, on obtient le modèle algébrique suivant sur chaque élément de la géométrie  $\Omega$  :

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] & [K^{23}] \\ [K^{31}] & [K^{32}] & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{w\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} \quad \text{Équation 3-26}$$

$$K_{ij}^{11} = 2\pi \int_{\Omega^e} \eta_{rz} \left[ 2 \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\psi_i \psi_j}{r} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right] r dr dz; \quad \text{Équation 3-27}$$

$$K_{ij}^{12} = 2\pi \int_{\Omega^e} \eta_{rz} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} r dr dz;$$

$$K_{ij}^{13} = -2\pi \int_{\Omega^e} \left( r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \Phi_j + \psi_i \Phi_j \right) dr dz;$$

$$K_{ij}^{22} = 2\pi \int_{\Omega^e} \eta_{rz} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + 2 \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right) r dr dz;$$

$$K_{ij}^{23} = -2\pi \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \Phi_j r dr dz;$$

$$K_{ij}^{33} = 0$$

$$F_i^1 = 2\pi \oint_{\Gamma^e} t_r \psi_i ds \quad \text{Équation 3-28}$$

$$F_i^2 = 2\pi \oint_{\Gamma^e} t_z \psi_i ds \quad \text{Équation 3-29}$$

### 3.3.3 Méthode de pénalité

Dans la méthode de pénalité, le problème avec contrainte est reformulé en problème sans contrainte (Reddy, 1993). La contrainte étant l'équation de continuité dépendant de deux variables à savoir les vitesses.

Le paramètre de pénalité  $\gamma$  peut être choisi relativement à chaque élément. L'expression de la pression est alors de la forme :

$$P = -\gamma \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad \text{Équation 3-30}$$

En conséquence le modèle d'éléments finis devient sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{Équation 3-31}$$

avec :

$$\overline{K_{ij}^{11}} = K_{ij}^{11} + 2\pi\gamma \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{\psi_i}{r} \right) \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\psi_j}{r} \right) r dr dz; \quad \text{Équation 3-32}$$

$$\overline{K_{ij}^{12}} = K_{ij}^{12} + 2\pi\gamma \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{\psi_i}{r} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial z} r dr dz;$$

$$\overline{K_{ij}^{22}} = K_{ij}^{22} + 2\pi \int_{\Omega^e} \gamma_\psi \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} r dr dz$$

### 3.3.4 Représentation isoparamétrique et maillage

La représentation isoparamétrique est très utile car elle facilite une représentation précise des domaines irréguliers (par exemple des domaines avec des frontières curvilignes) (Reddy, 1993). Aussi, il est difficile de calculer les coefficients matriciels et les vecteurs des colonnes lorsqu'on est en coordonnées cartésiennes. Pour remédier à cela, on introduit une transformation entre un élément curvilinéaire  $\Omega^e$  et un élément de forme simple  $\hat{\Omega}$  pour faciliter l'intégration numérique.

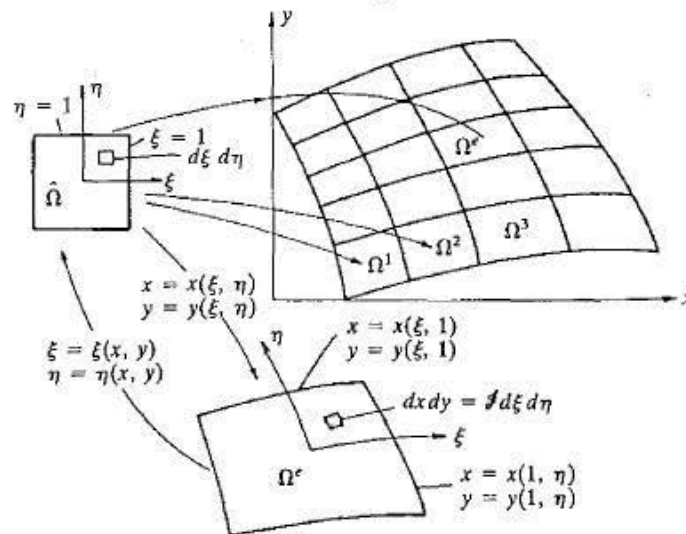


Figure 3-1 : Maillage des éléments finis

Dans cette étude nous considérons une interpolation quadratique de la vitesse. En conséquence, la pression, qui est la dérivée de la vitesse, sera interpolée linéairement sur chaque élément fini. De ce fait, nous allons travailler en considérant des éléments rectangulaires à 4 nœuds pour la pression et 9 nœuds pour la vitesse comme le montre la figure numéro.

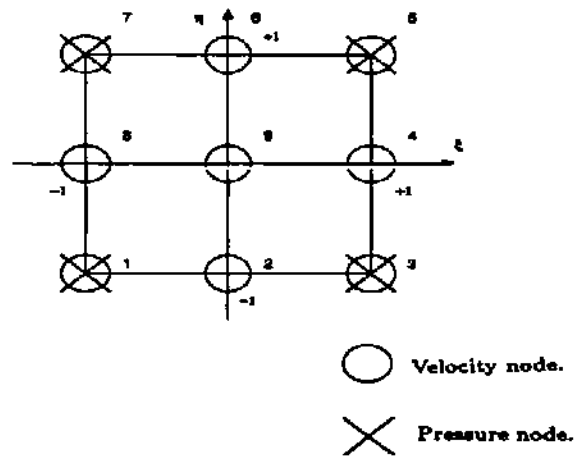


Figure 3-2 : Élément quadrilatéral de base utilisé pour le maillage

Les fonctions d'interpolation pour les vitesses sont :

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta)$$

Équation 3-33

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)$$

$$\psi_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

$$\psi_6 = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$\psi_7 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta)$$

$$\psi_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta)$$

$$\psi_9 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta)$$

Les fonctions d'interpolation pour les pressions sont :

$$\widehat{\psi}_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad \text{Équation 3-34}$$

$$\widehat{\psi}_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\widehat{\psi}_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$\widehat{\psi}_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

### 3.3.5 Formulation algébrique globale et stratégie de résolution

Après discrétisation par des éléments finis, nous obtenons un système d'équations algébrique du rang égal au nombre total des degrés de libertés associé aux variables vitesse ( $u$  et  $w$ ) et pression. Le système à résoudre est de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} [\overline{K}^{11}] & [\overline{K}^{12}] \\ [\overline{K}^{21}] & [\overline{K}^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \quad \text{Équation 3-35}$$

À cela il faut ajouter les conditions aux limites exposées au début de chapitre et qui sont reliées aux  $\{F^1\}$  et  $\{F^2\}$ .

La stratégie de résolution consiste en trois étapes :

1. Connaissant le débit volumique de remblais, on détermine une vitesse moyenne à l'entrée de la conduite axisymétrique ;
2. On estime la viscosité du remblai, par itération, en utilisant la loi de comportement intégral de K-BKZ
3. On introduit les conditions aux limites et on calcule le champ des vitesses et, ensuite, le champ de pression
4. On estime les pertes de charge

## CHAPITRE 4 : RÉSULTATS DES SIMULATIONS

Suite aux résultats d'identification obtenus, nous considérons, d'une part, le modèle viscoélastique de K-BKZ, et la méthode des éléments finis, d'autre part, pour calculer les pertes de charge dans une conduite cylindrique. Il est important de noter que les dimensions de la conduite cylindrique considérée ne sont pas les dimensions réelles des pipelines (qui sont de l'ordre de 100 mm de diamètre et de 1000 m de longueur pour les dimensions utilisées dans les travaux de maîtrise de Drissa Ouattara, 20011 à titre d'exemple). Ceci nécessite un nombre élevé de degrés de liberté (nombre de nœuds très grand) et un temps de calcul considérable. Afin de contourner ce problème, nous considérons un modèle géométrique réduit du cylindre. Nous avons considéré pour ladite conduite les dimensions suivantes : 1m de longueur et un diamètre de 20 mm. Pour le maillage par éléments finis, on a utilisé 80 éléments de type quadrilatère (à 9 nœuds) et 356 nœuds en total. Les profils des vitesses, le champ de pression et les pertes de charges ont été estimés à l'aide du code *DieExtrusion* (Erchiqui.,UQAT). À cet effet, la méthode de pénalité est considérée.

Pour l'analyse, nous avons considéré trois modèles (situations):

1. Modèle 1: K-BKZ avec  $n_1=n_2=0$  et  $h=1$  (modèle de Lodge : déformations faibles)
2. Modèle 2 : K-BKZ avec  $n_1=0,5$  et  $n_2=0,2$
3. Modèle 3 : K-BKZ avec  $n_1=0,5$  et  $n_2=0,5$ .

Les simulations ont été réalisées pour quatre débits à savoir : 250, 500, 1000, 1500 et 2000 Kg/Hr.

Suite aux simulations effectuées, nous avons pu obtenir des résultats sur :



1. les profils de vitesses,
2. le temps de résidence de chaque particule de fluide-remblais
3. la fonction dumping (amortissement),
4. la déformation subie par les particules de fluide sur chaque ligne de courant,
5. la viscosité induite par l'écoulement
6. les pertes de charge.

L'ensemble de ces résultats seront exposés ci-dessous. Ensuite, une étude comparative entre les trois modèles est réalisée et discutée.

#### **4.1 Modèle 1 : Stokes**

Dans ce modèle, le fluide est considéré newtonien et les déformations sont très faibles. Les courbes de vitesse pour chaque débit et la perte de charge sont données respectivement par les figures 4-1 et 4-2.

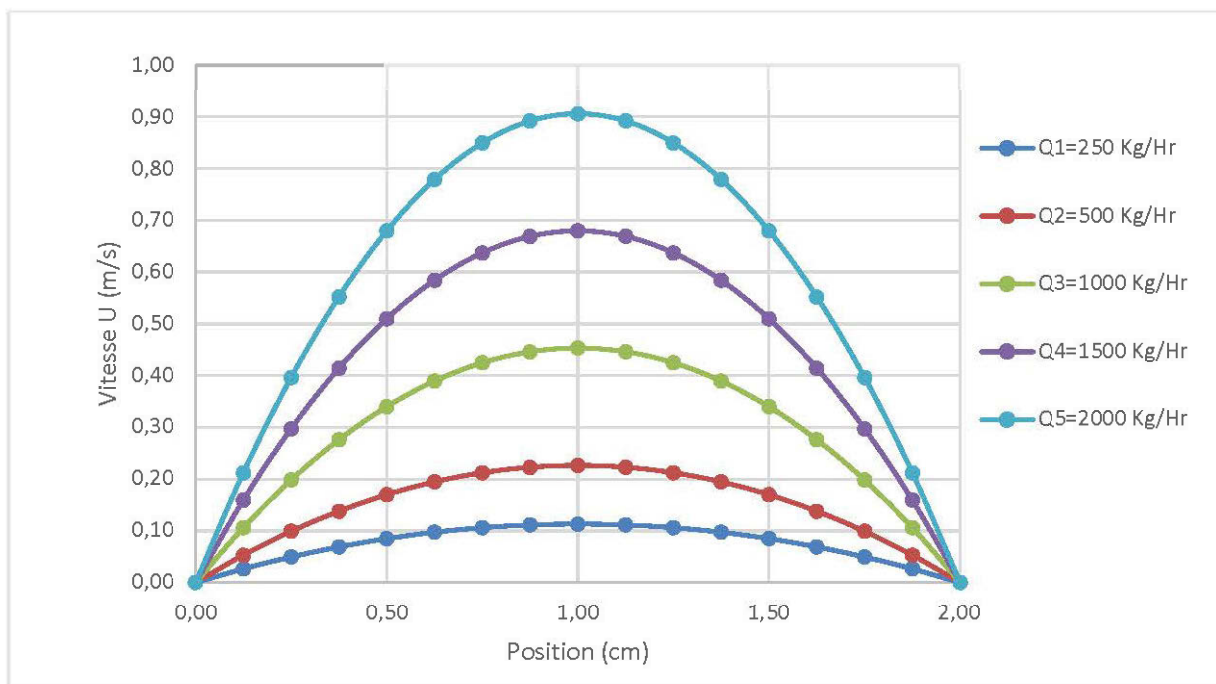


Figure 4-1 : Courbe des vitesses pour chaque débit

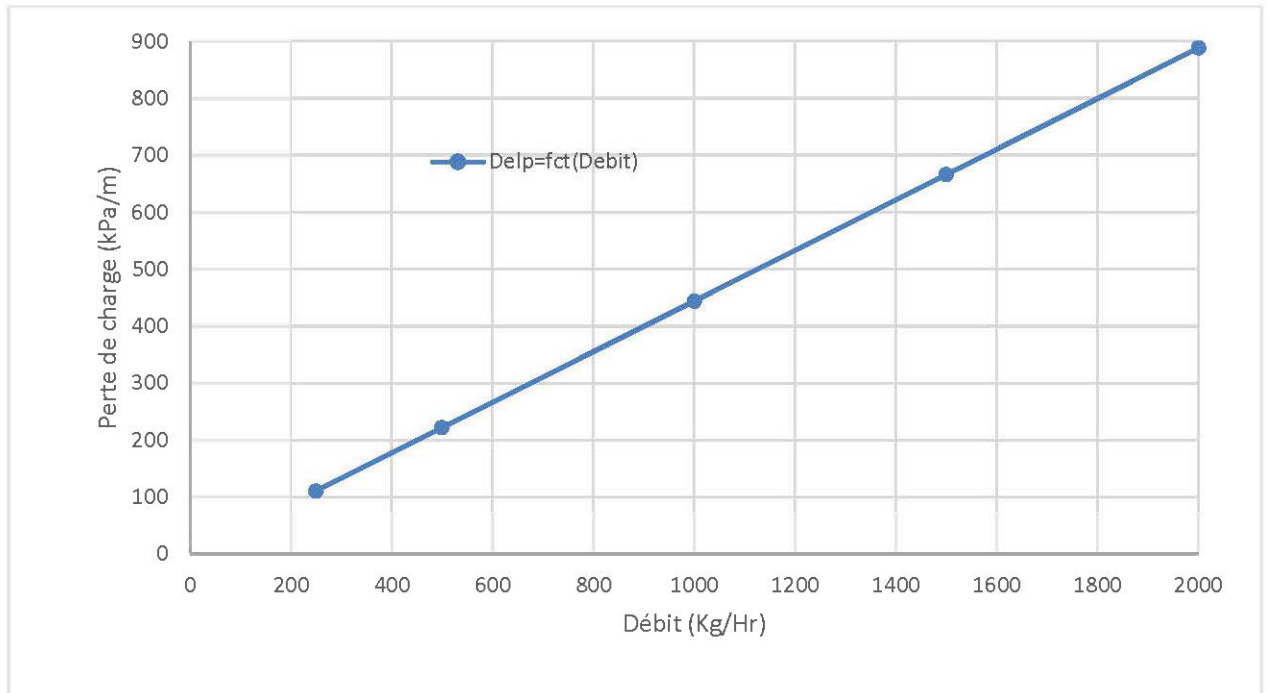


Figure 4-2 : Perte de charge pour chaque débit (Stokes)

Pour le cas de Stokes, on remarque que le profil de vitesses est de forme parabolique. Plus le débit imposé à l'entrée de la conduite est important plus la vitesse est grande.

La perte de charge augmente linéairement avec une augmentation du débit. La viscosité quant à elle est demeurée constante et égale à 49 Pa.s quel que soit le débit.

Contrairement au cas de Stokes, pour les 2 prochains modèles, une déformation a été considérée (fonction amortissement différent de 1).

## 4.2 Modèle 2 ou $n_1=0,5$ et $n_2=0,2$

La figure 4-3 présente le profil de vitesses pour chaque débit.

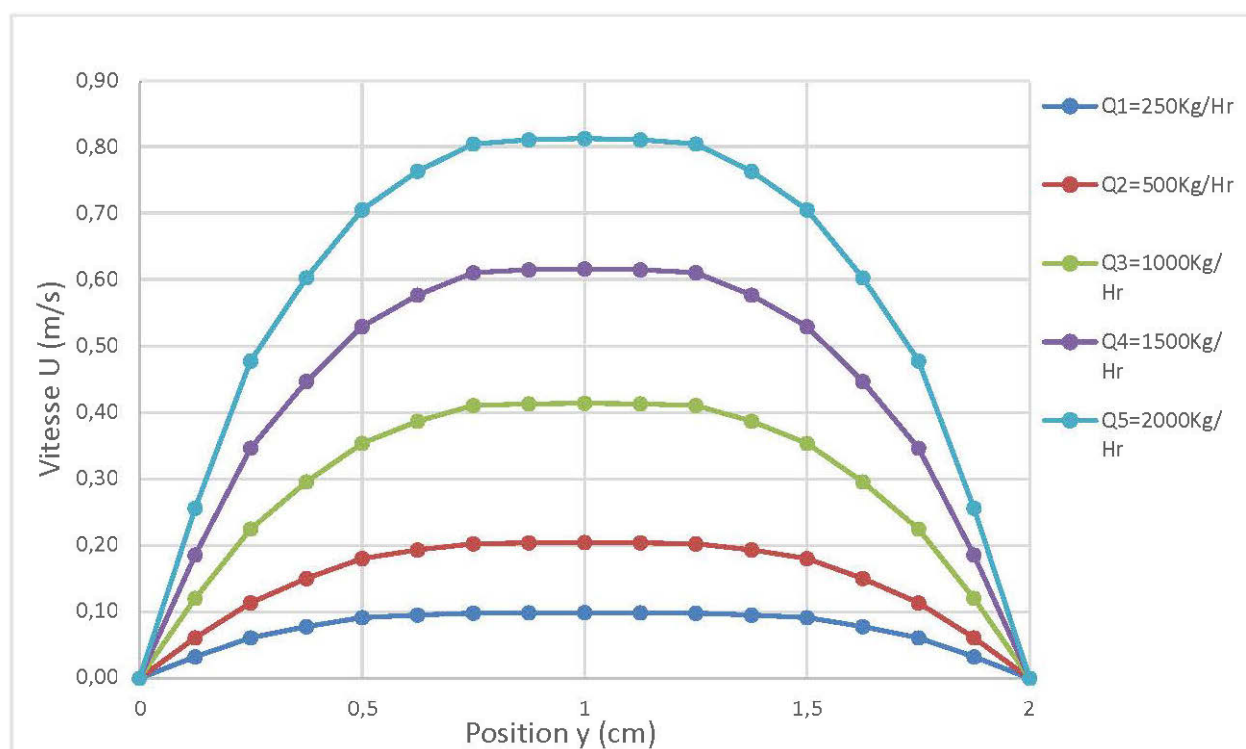


Figure 4-3: Profil de vitesses pour chaque débit

Le profil de vitesses n'a plus une forme parabolique mais se rapproche au profil d'un écoulement bouchon. La vitesse augmente avec le débit à l'entrée de la conduite.

Le temps de résidence d'une particule fluide est le temps que met la particule pour aller d'un point A à un point B. La figure 4-4 présente le temps de résidence de la particule pour les cinq différents débits et la figure 4-5 donne le temps de résidence sur les lignes de courant (LC)

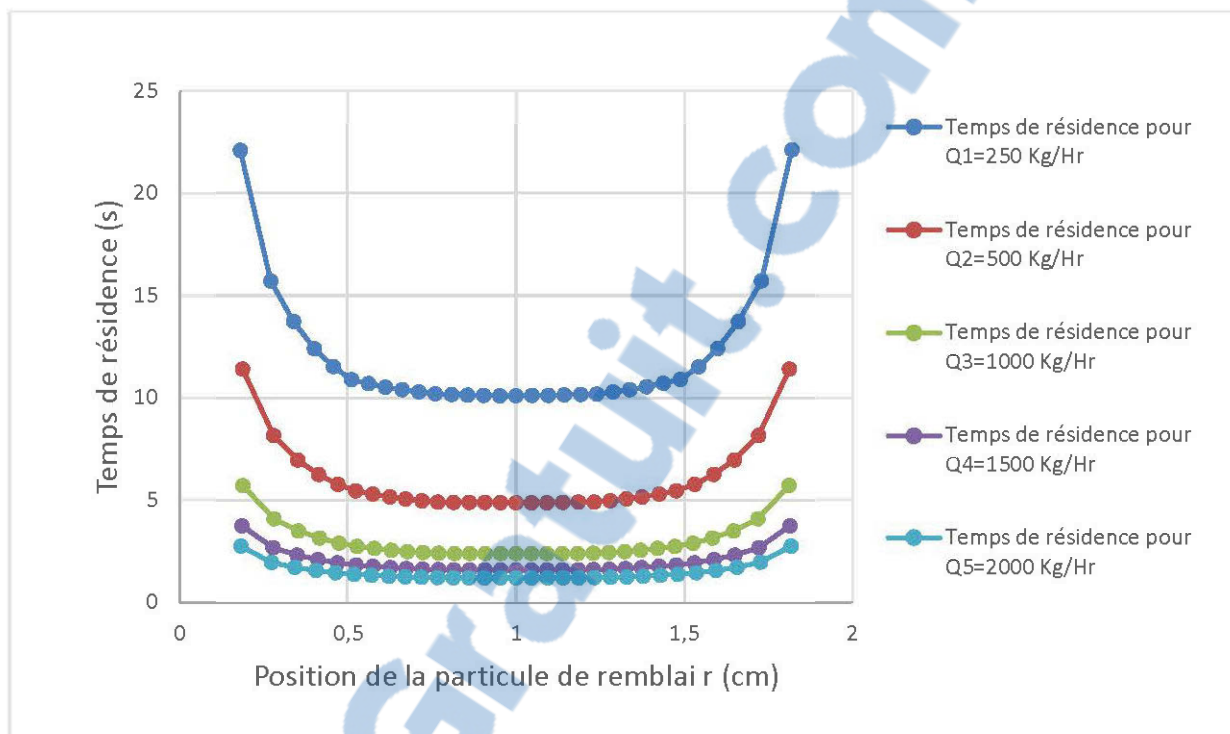


Figure 4-4: Temps de résidence en fonction de la position de la particule de remblai ( $n_1=0,5$  et  $n_2=0,2$ )

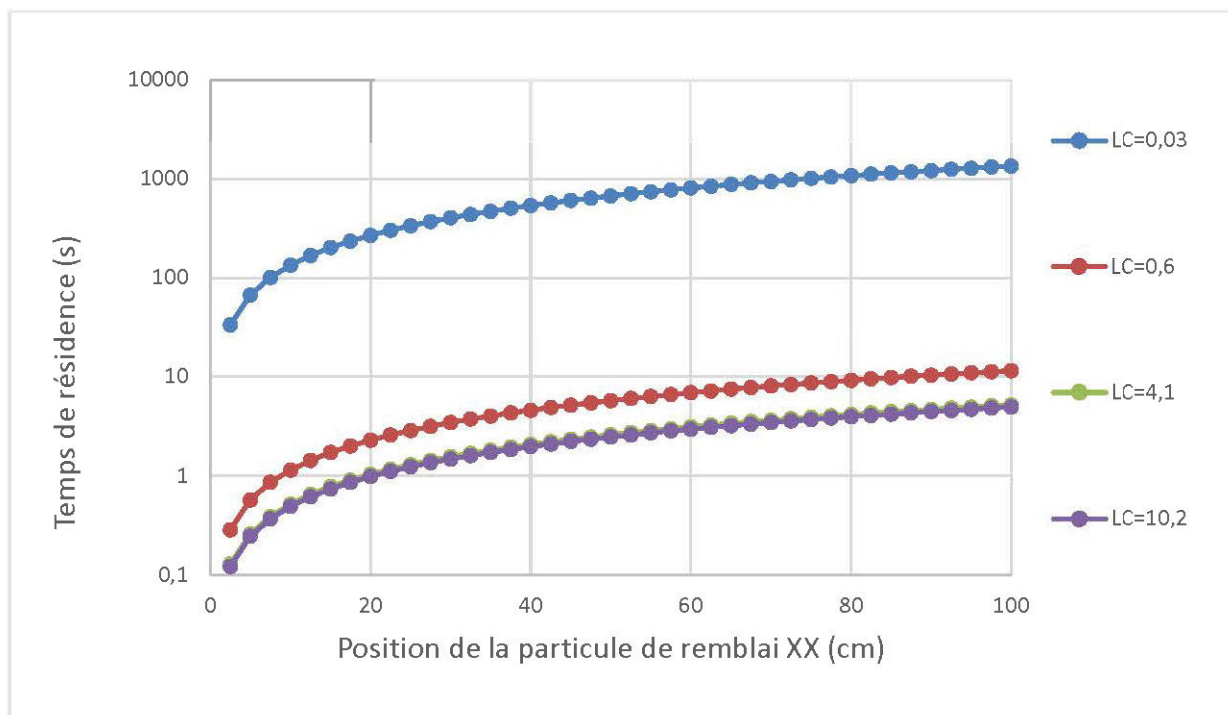


Figure 4-5 : temps de résidence de particule de remblai pour un débit de 500 Kg/Hr

Plus le débit à l'entrée de la conduite est grand, plus le temps de résidence est petit.

Pour un même débit, le temps de résidence de la particule aux parois de la conduite est plus de 100 fois plus élevé que dans les autres parties de la conduite. Par exemple pour un débit de 250 Kg/Hr, le temps de résidence est de 1349 s alors qu'il n'est que d'un maximum de 11,4 s dans les autres parties de la conduite.

Les figures 4-6 à 4-10 présentent les courbes de la fonction d'amortissement (Dumping ou fonction de déformation) pour les différents débits.

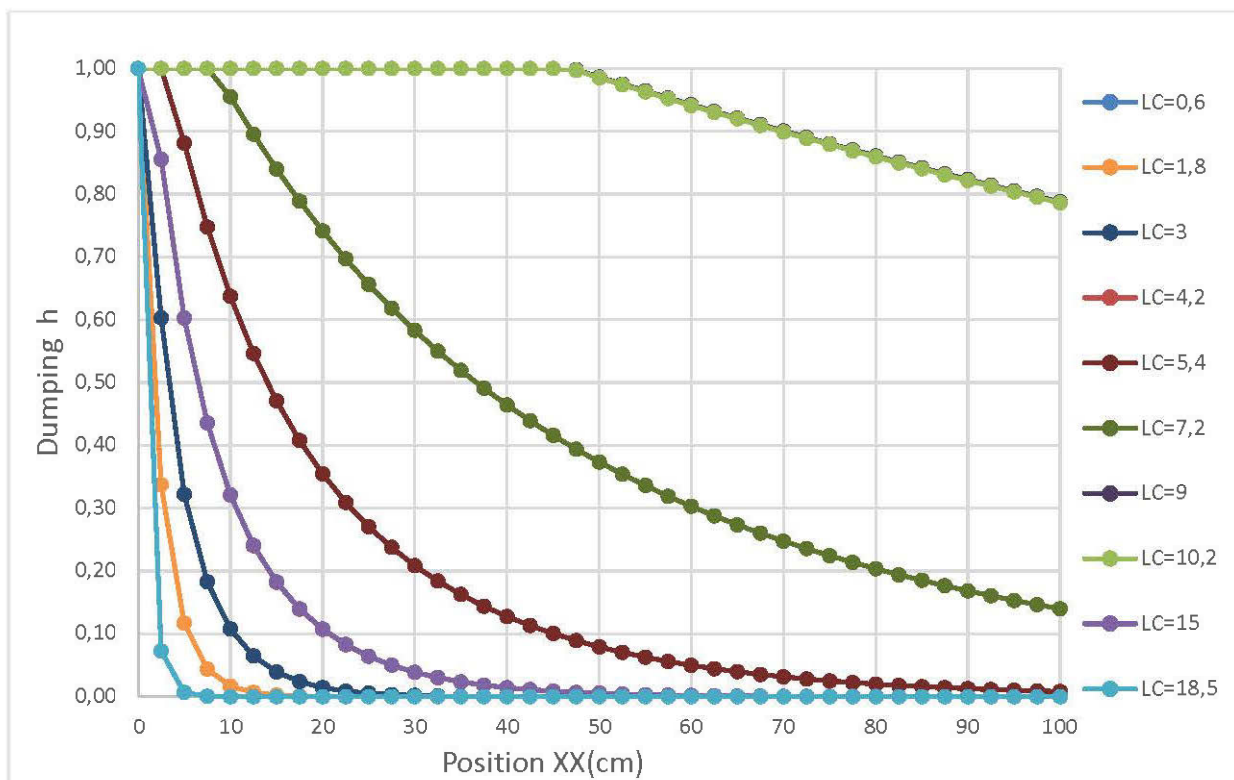


Figure 4-6: Fonction d'amortissement pour un débit  $Q_1=250$  Kg/Hr

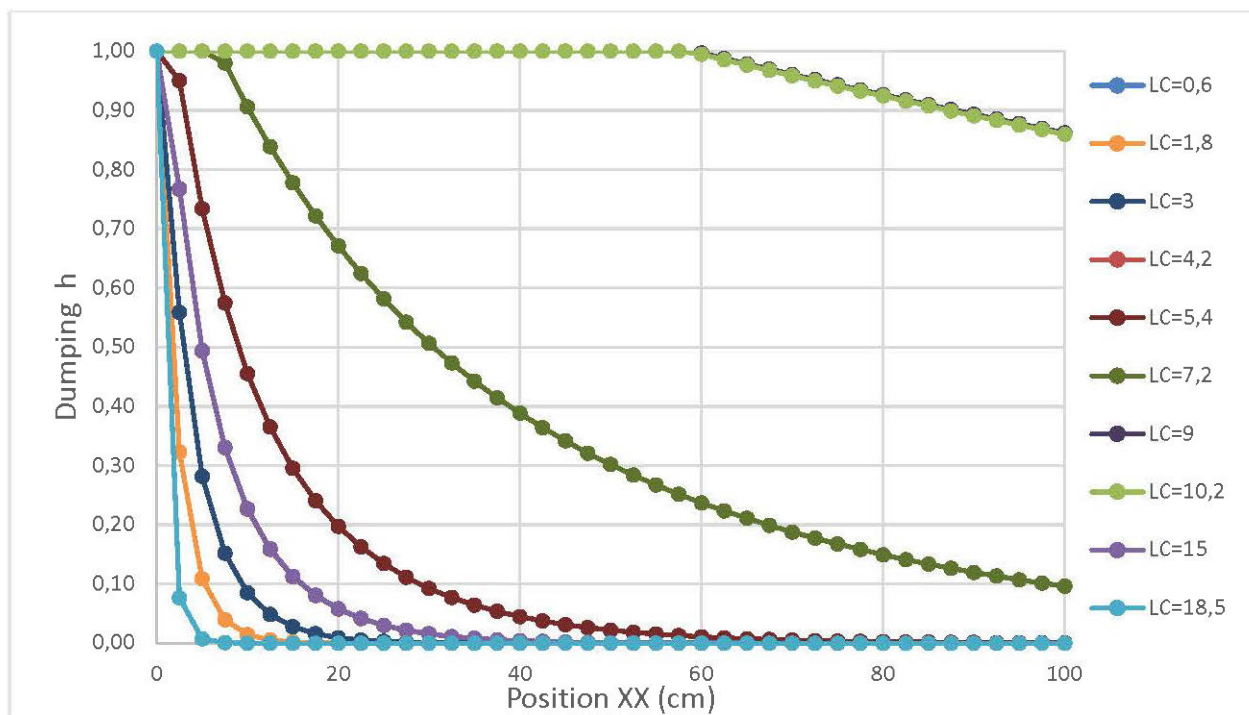


Figure 4-7: Fonction d'amortissement pour un débit de 500 Kg/Hr



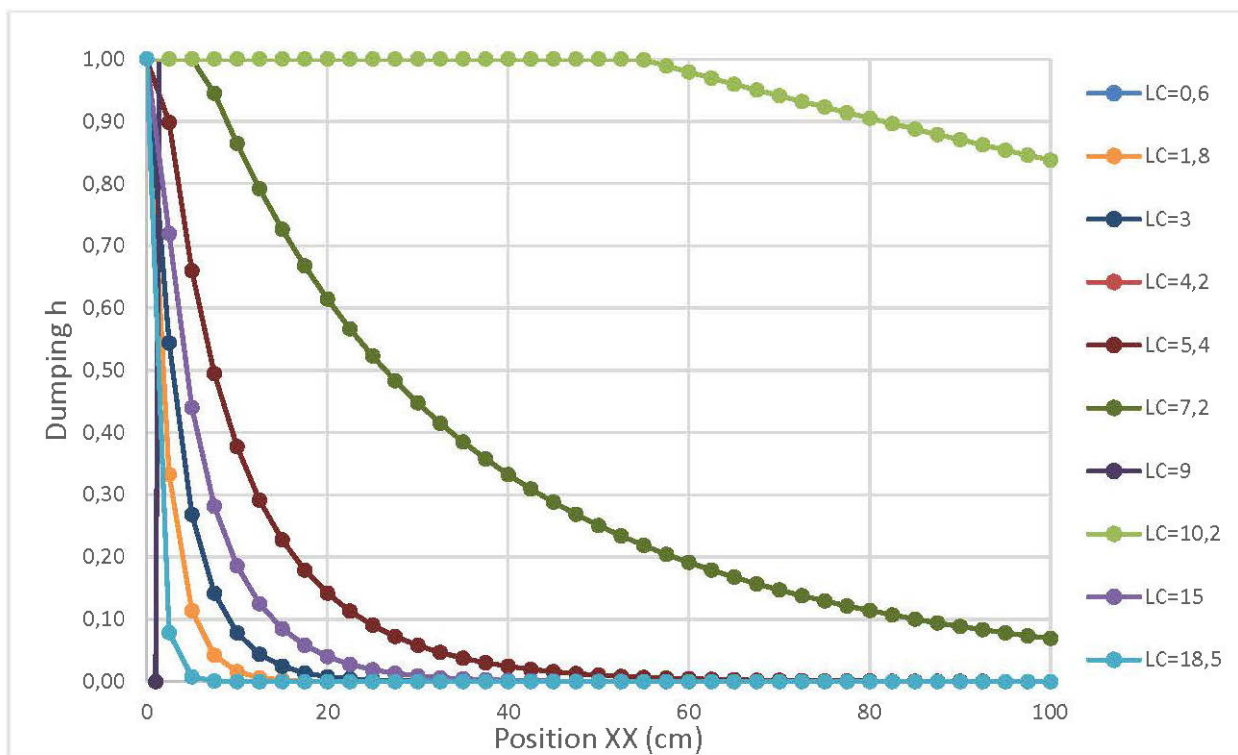


Figure 4-8: Fonction d'amortissement pour un débit de 1000 Kg/Hr

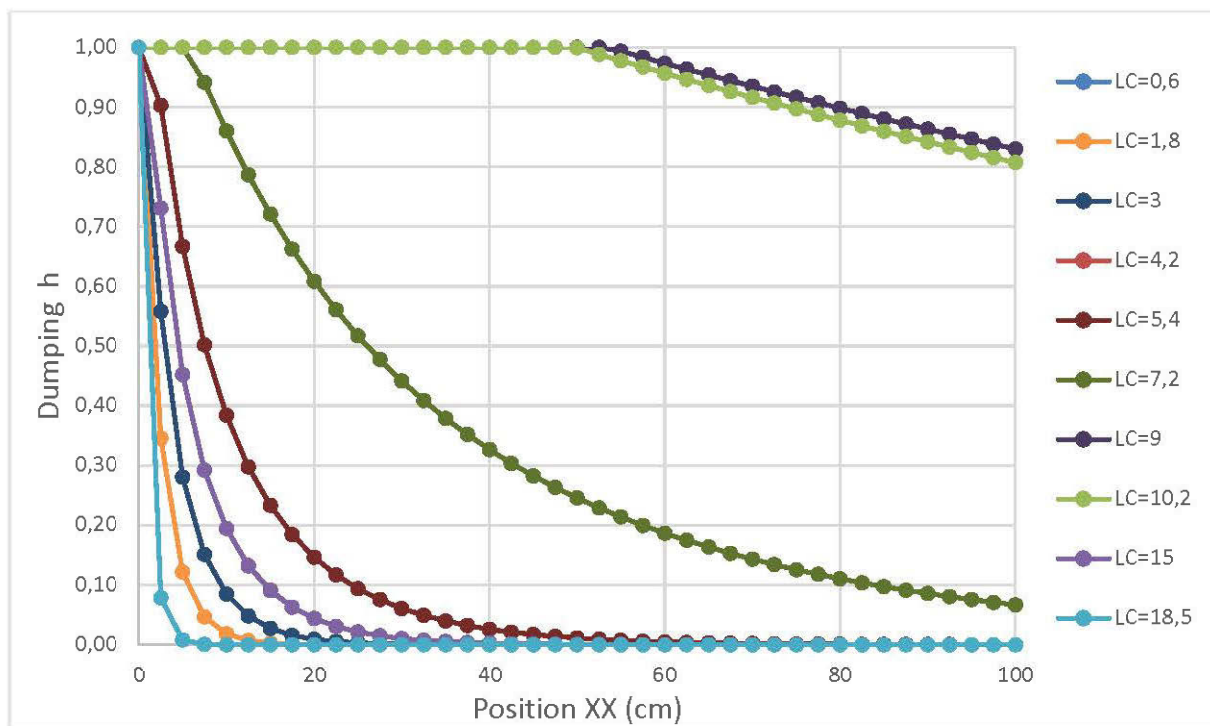


Figure 4-9: Fonction d'amortissement pour un débit de 1500 Kg/Hr

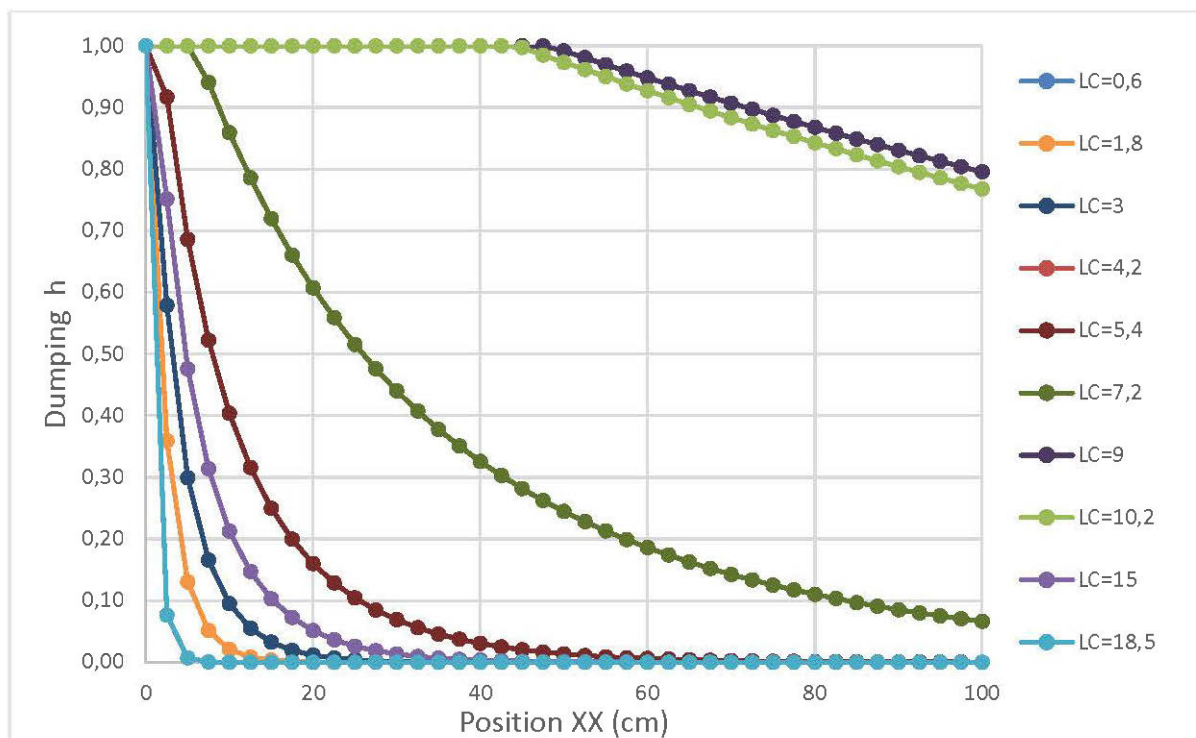


Figure 4-10: Fonction d'amortissement pour un débit de 2000 Kg/Hr

Plus on se rapproche des parois de la conduite, plus la fonction d'amortissement est petite. Aussi, la fonction d'amortissement diminue avec une augmentation du débit à l'entrée de la conduite.

Les déformations sur les lignes de courant (LC) sont présentées pour trois débits (250, 1000 et 2000 Kg/Hr) sur les figures 4-11 à 4-13.

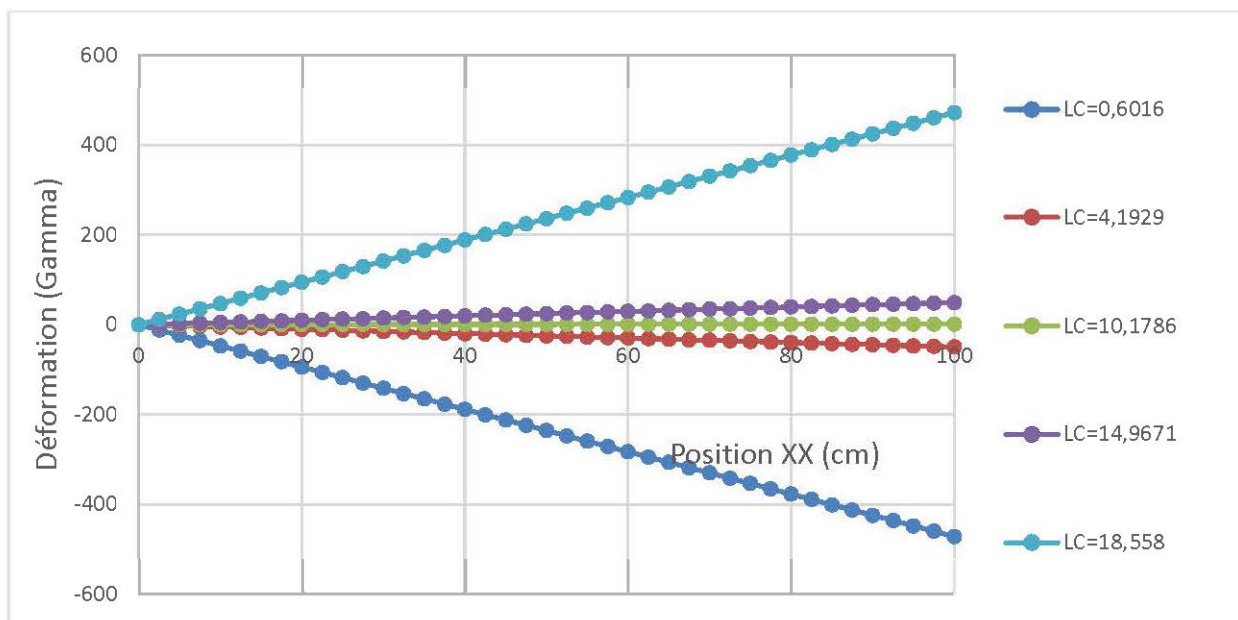


Figure 4-11: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 250 Kg/Hr

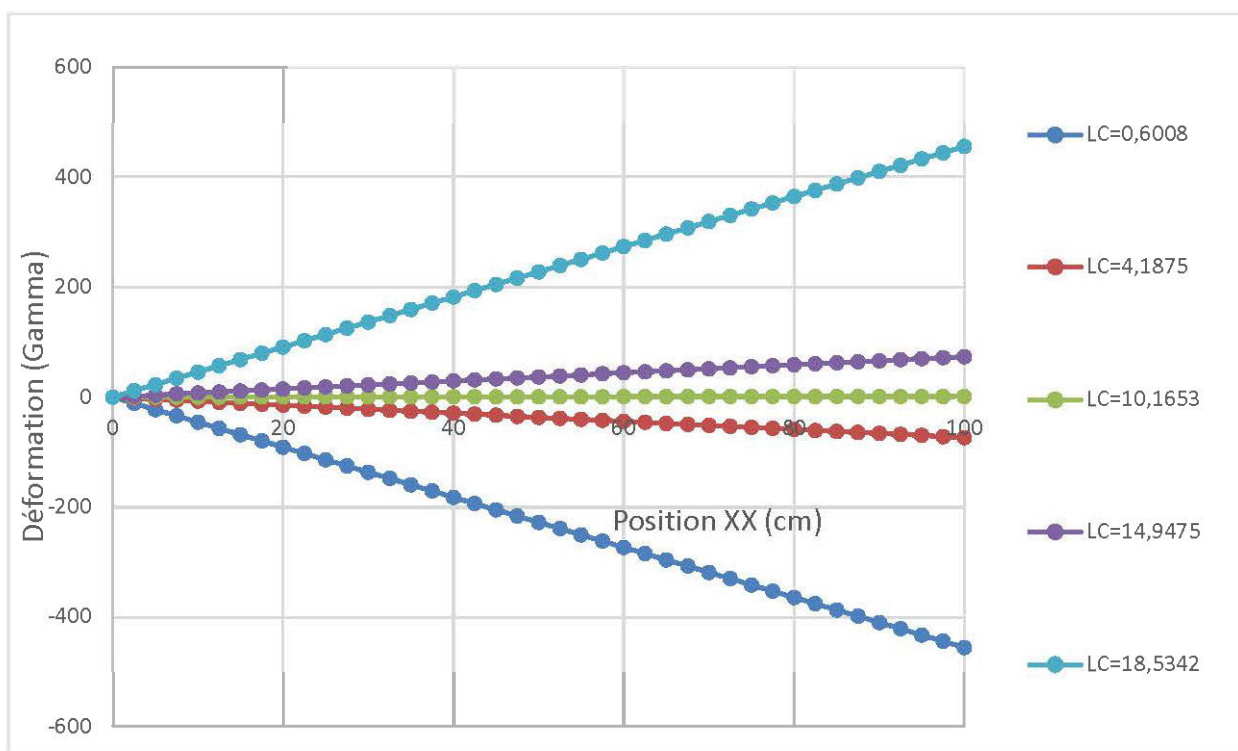


Figure 4-12: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 1000 Kg/Hr

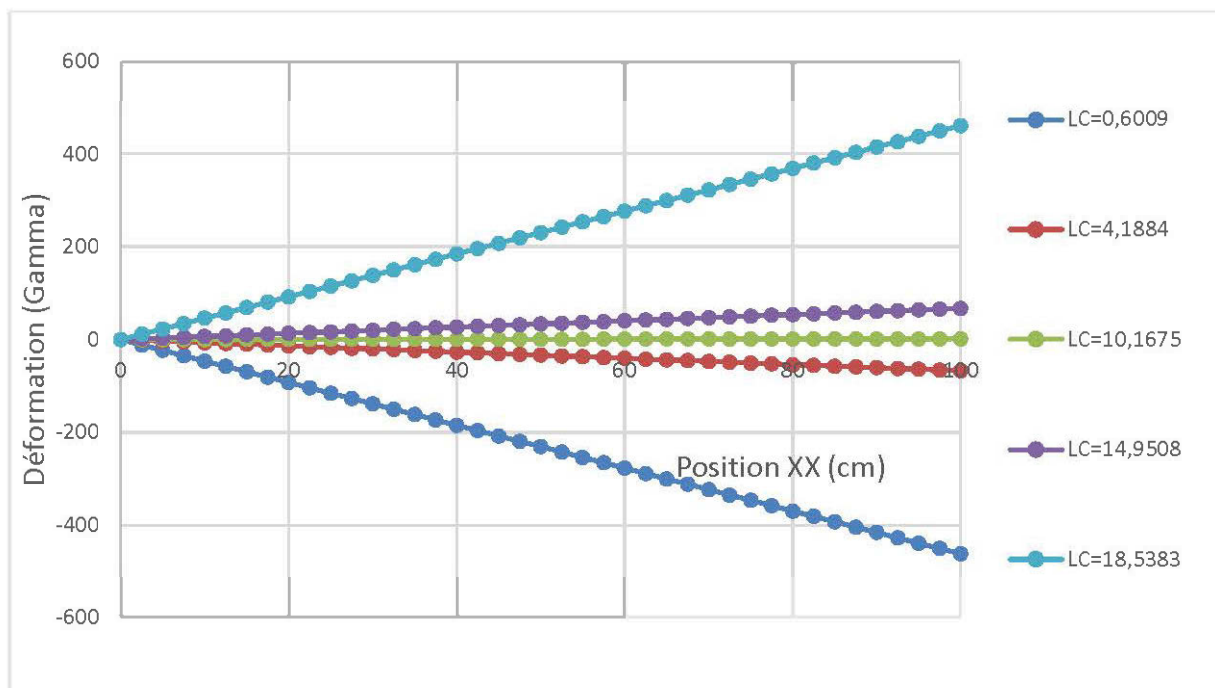


Figure 4-13: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 2000 Kg/Hr

Les déformations sur les lignes de courant sont de plus en plus grandes au fur et à mesure qu'on se rapproche des parois. Les déformations sur les lignes de courant ne dépendent pas vraiment du débit à l'entrée de la conduite.

La viscosité a été déterminée pour les cinq différents débits. Elle n'est plus constante comme dans le modèle de Stokes. La figure 3-14 présente la viscosité du remblai en fonction du débit.

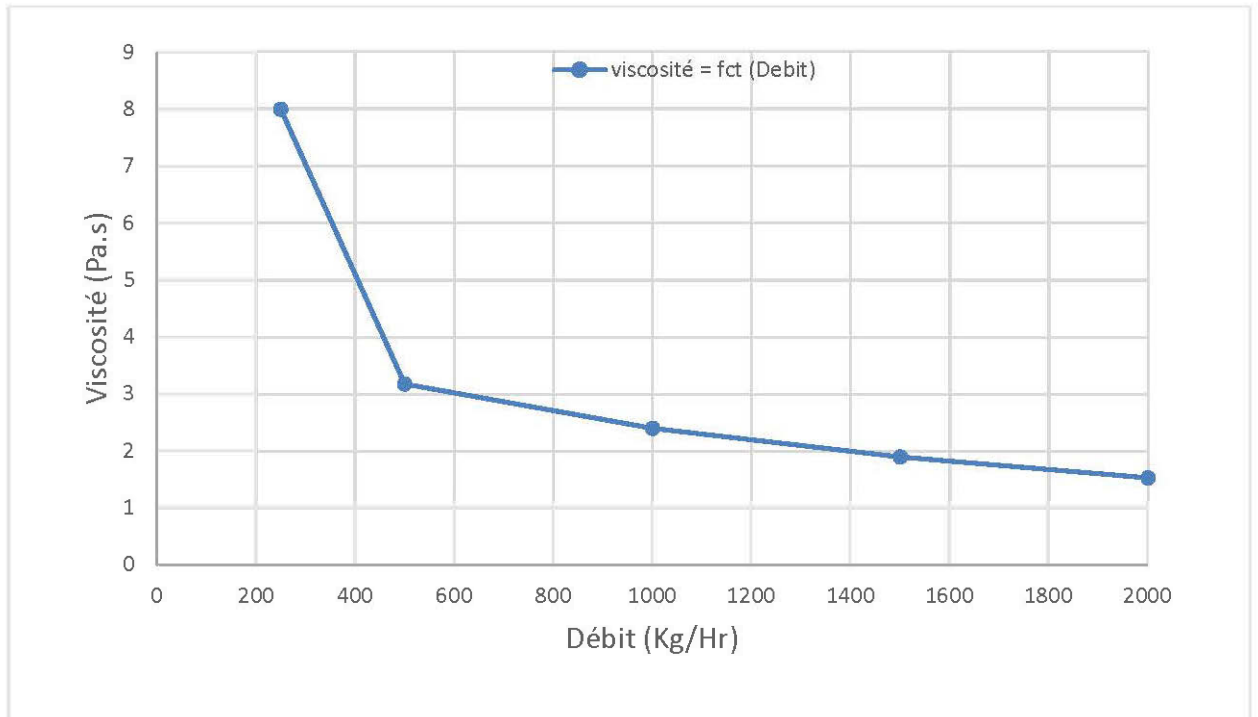


Figure 4-14: Viscosité en fonction du débit

La figure 4-15 présente la perte de charge en fonction du débit.

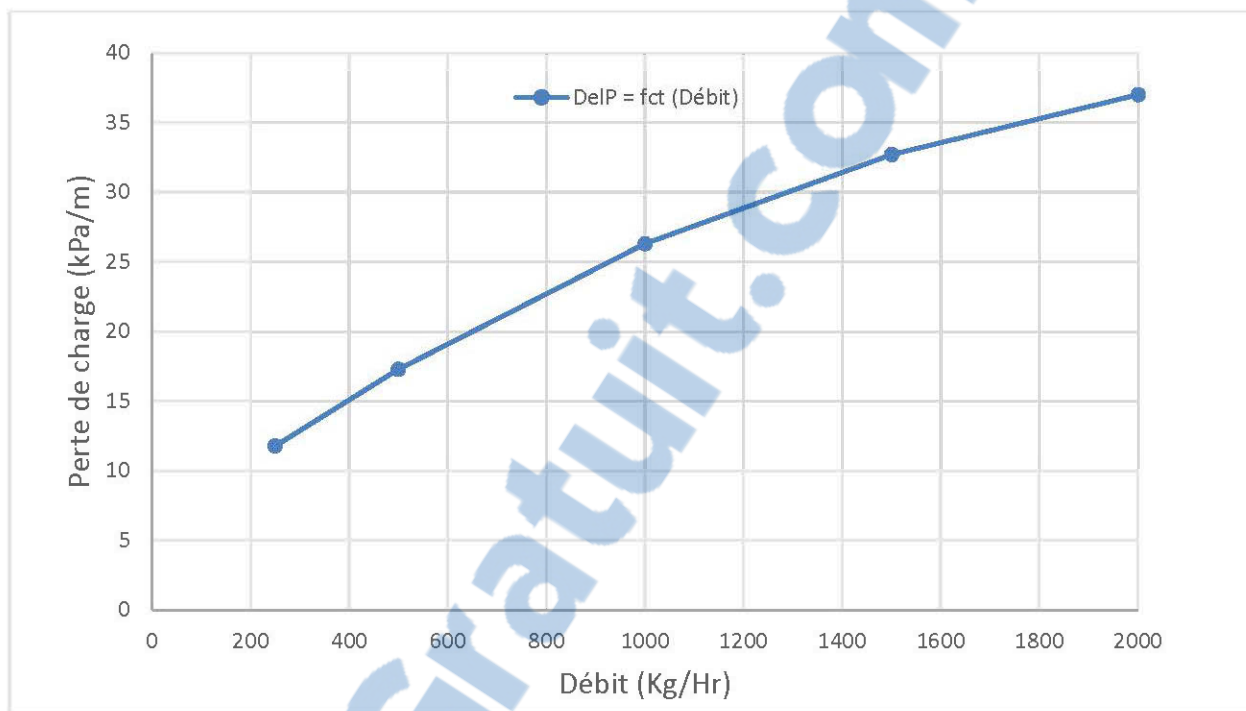


Figure 4-15: Perte de charge en fonction du débit

La perte de charge ne varie plus linéairement avec le débit. Plus le débit à l'entrée de la conduite est grande plus importante est la perte de charge.

Pour des raisons de symétrie dans la conduite cylindrique, la fonction d'amortissement sera présentée pour 3 lignes de courant à savoir 0,6 cm, 5,4 cm et enfin 10,2 cm. Les courbes de la fonction d'amortissement pour ces trois lignes de courant sont présentées par les figures 3-16 à 3-18.

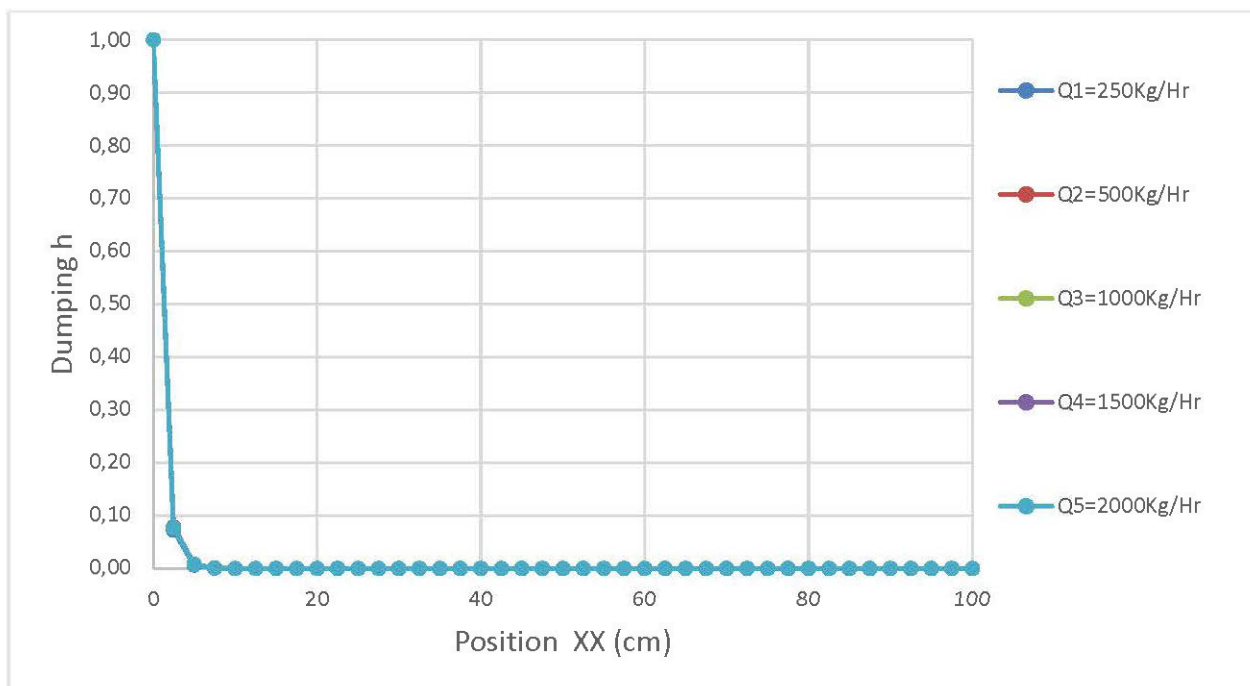


Figure 4-16: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 0,6 cm

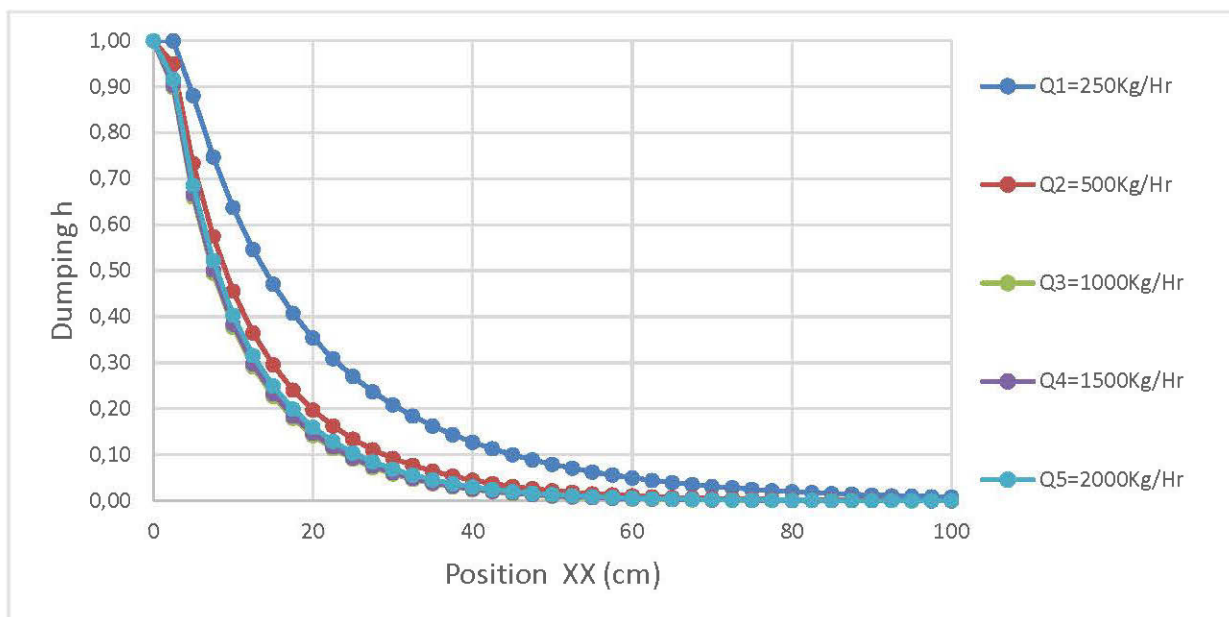


Figure 4-17: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 5,4 cm



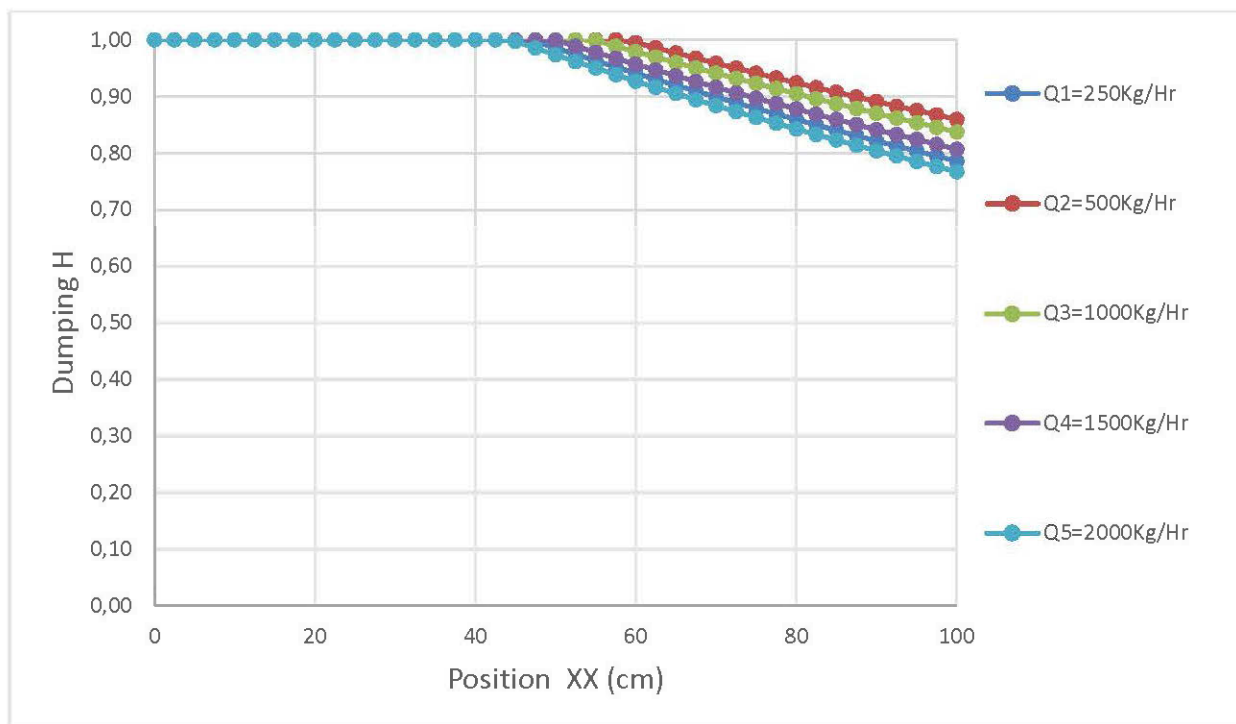


Figure 4-18: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 10,2 cm

La fonction déformation est de plus en plus petite au fur et à mesure qu'on s'approche des parois de la conduite.

### 4.3 Modèle 3 ou $n_1=0,5$ et $n_2=0,5$

La figure 4-19 présente le profil de vitesses pour chaque débit.

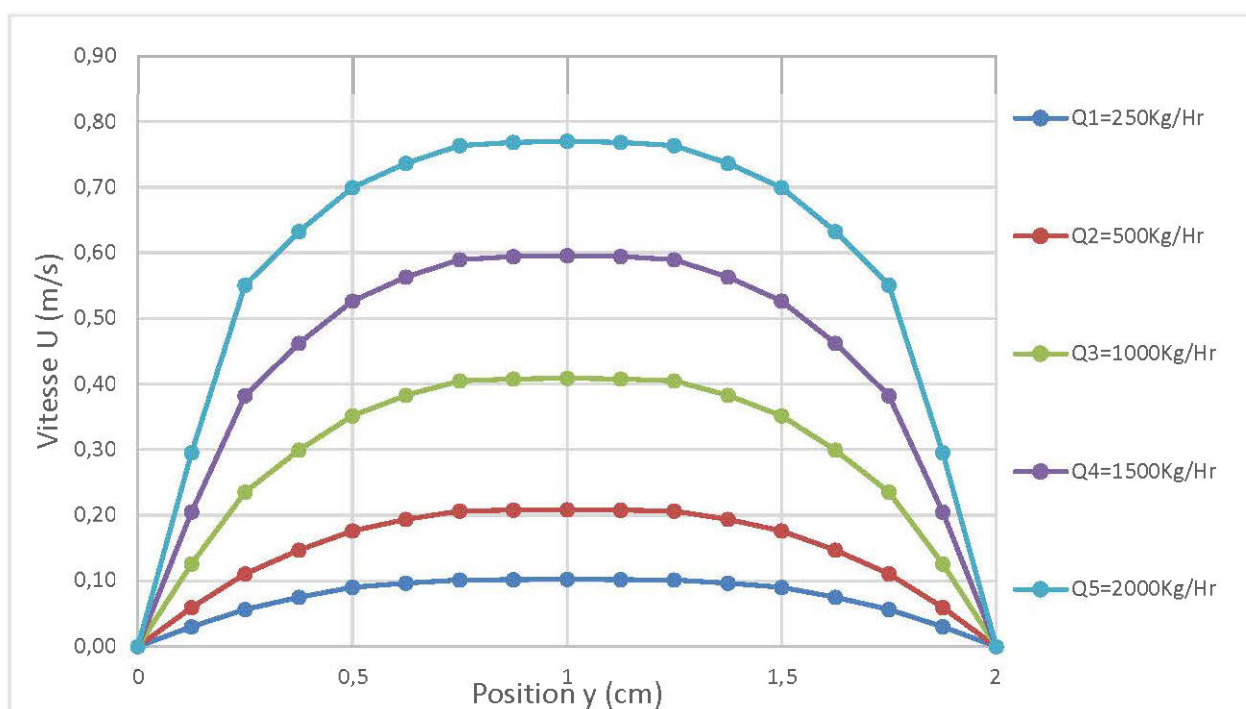


Figure 4-19: courbe de vitesse pour chaque débit

Le profil de vitesses n'a plus une forme parabolique mais se rapproche encore plus au profil d'un écoulement bouchon. La vitesse augmente avec le débit à l'entrée de la conduite.

La figure 4-20 présente le temps de résidence de la particule pour les cinq différents débits et la figure 4-21 donne le temps de résidence sur les lignes de courant.

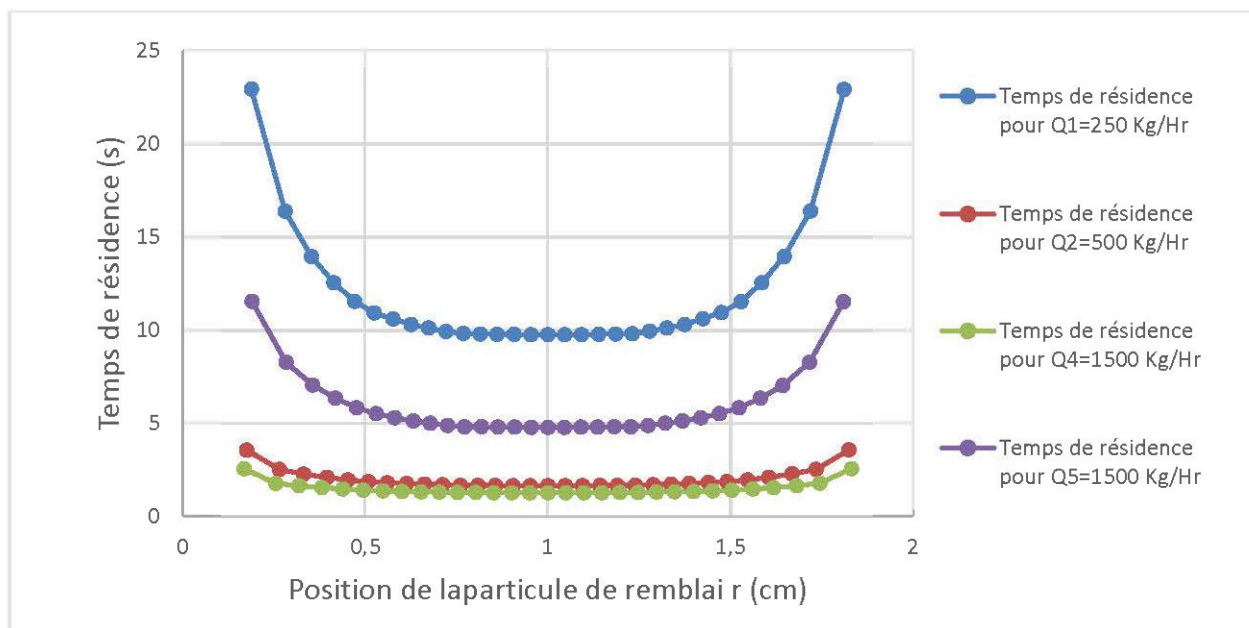


Figure 4-20: Temps de résidence en fonction de la position de la particule de remblai ( $n_1=0,5$  et  $n_2=0,5$ )

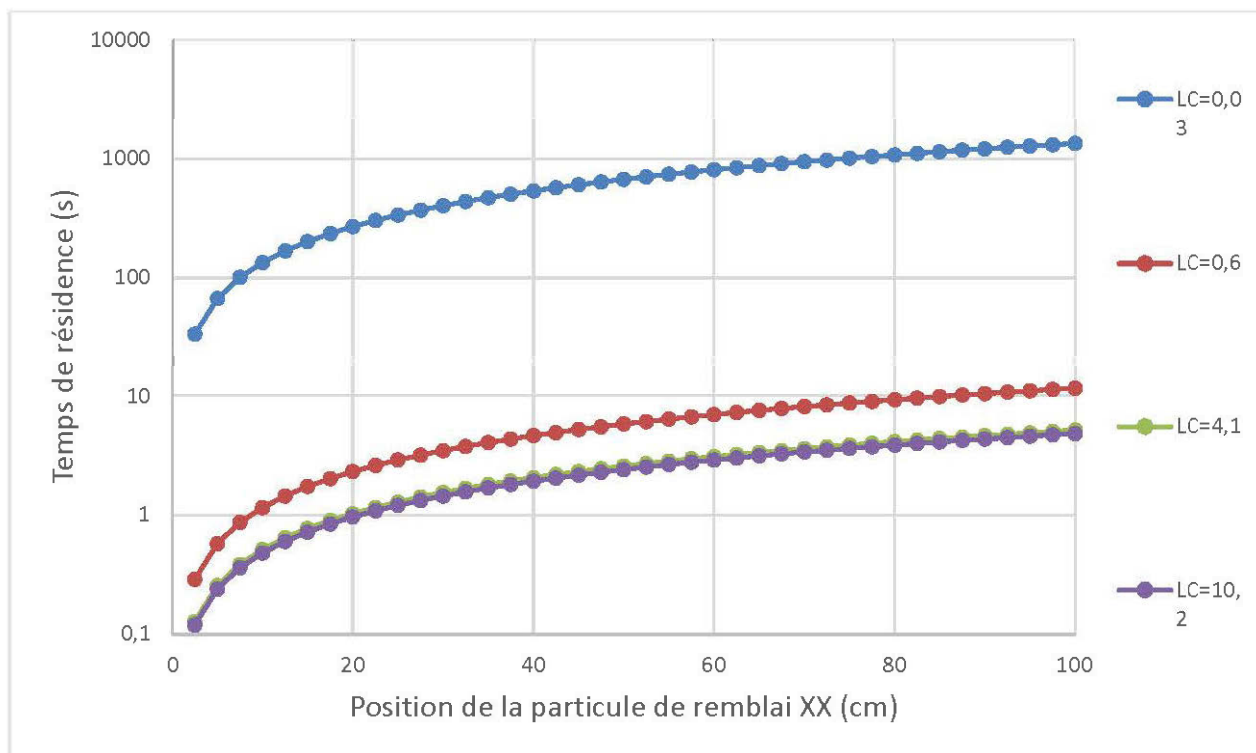


Figure 4-21 : temps de résidence de particule de remblai pour un débit de 500 Kg/Hr

Plus le débit à l'entrée de la conduite est grand, plus le temps de résidence est petit.

Pour un même débit, le temps de résidence de la particule aux parois de la conduite est plus de 100 fois plus élevé que dans les autres parties de la conduite.

Les figures 4-22 à 4-25 présentent les courbes de la fonction d'amortissement pour les différents débits.

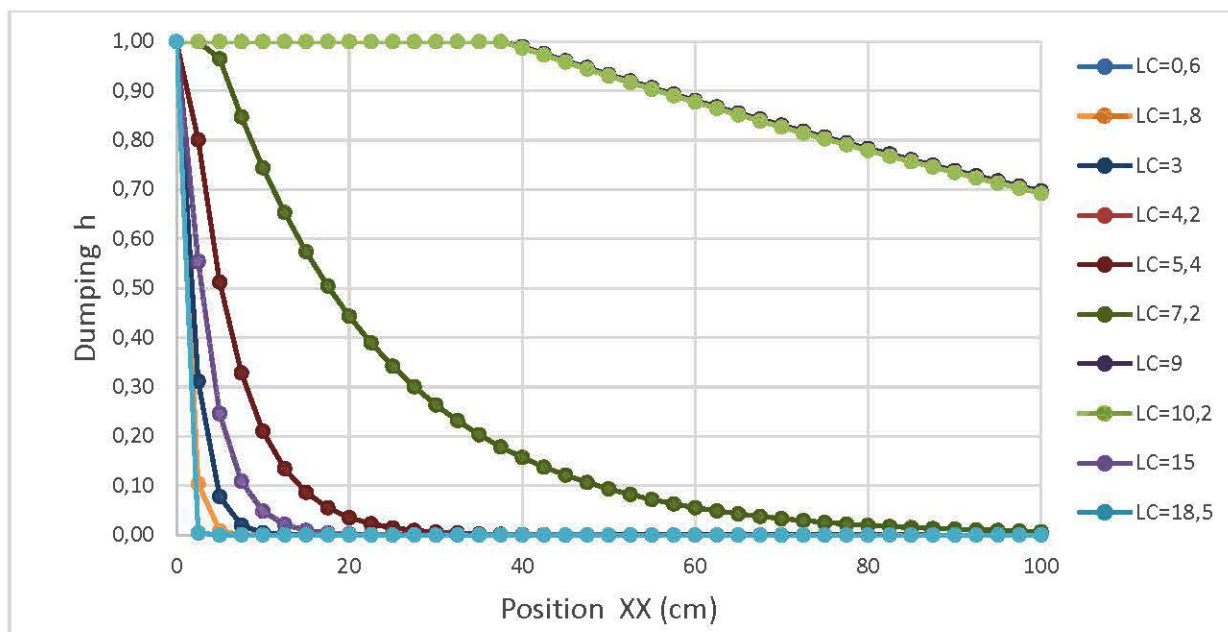


Figure 4-22: Fonction d'amortissement pour un débit  $Q_1=250 \text{ Kg/Hr}$

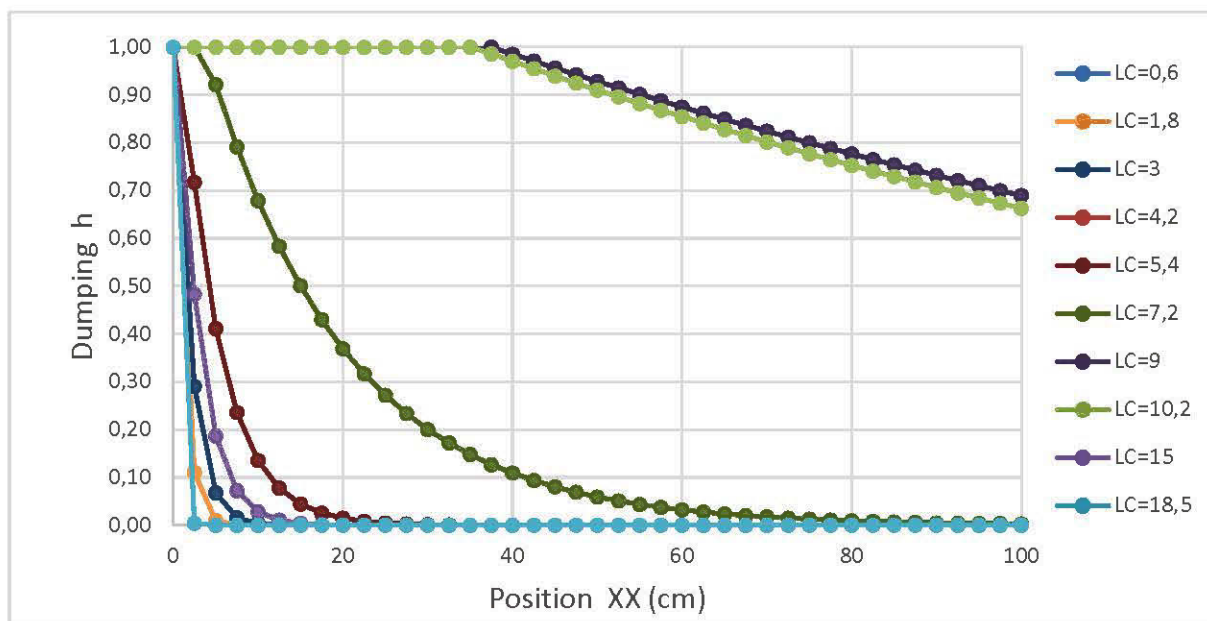


Figure 4-23: Fonction d'amortissement pour un débit de 500 Kg/Hr

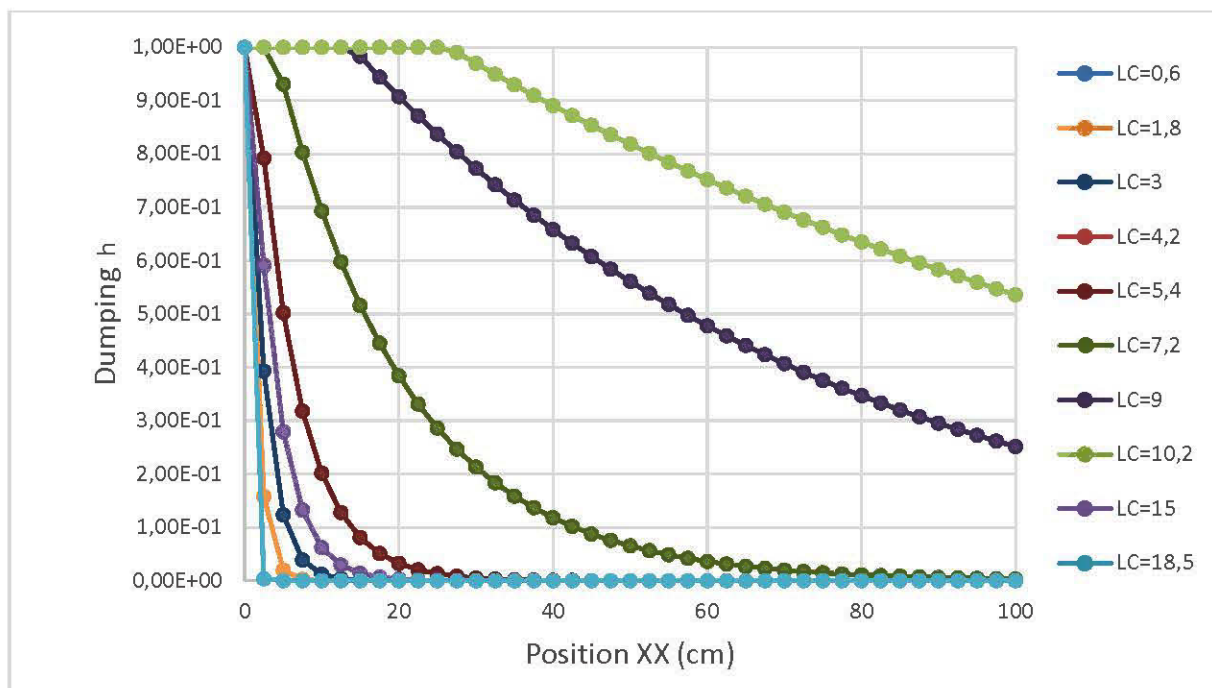


Figure 4-24: Fonction d'amortissement pour un débit de 1500 Kg/Hr

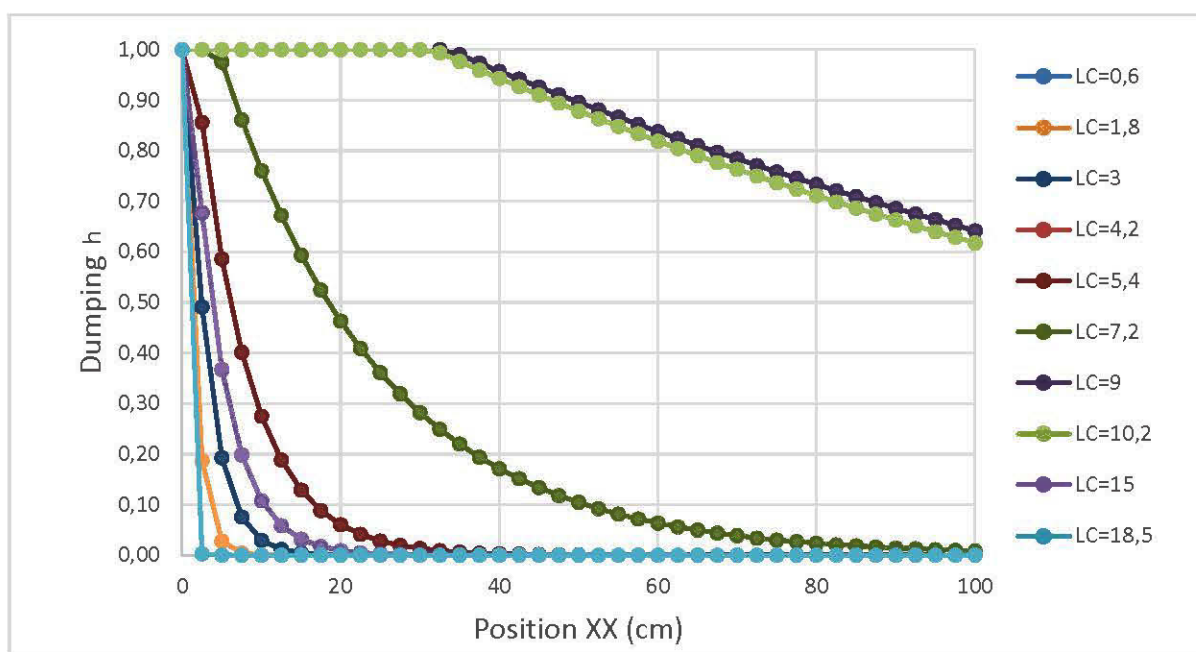


Figure 4-25: Fonction d'amortissement pour un débit de 2000 Kg/Hr

Plus on se rapproche des parois de la conduite, plus la fonction d'amortissement est petite. Aussi, la fonction déformation diminue avec une augmentation du débit à l'entrée de la conduite.

Les déformations sur les lignes de courant (LC) sont présentées pour trois débits (250, 1000 et 2000 Kg/Hr) par les figures 4-26 à 4-28.

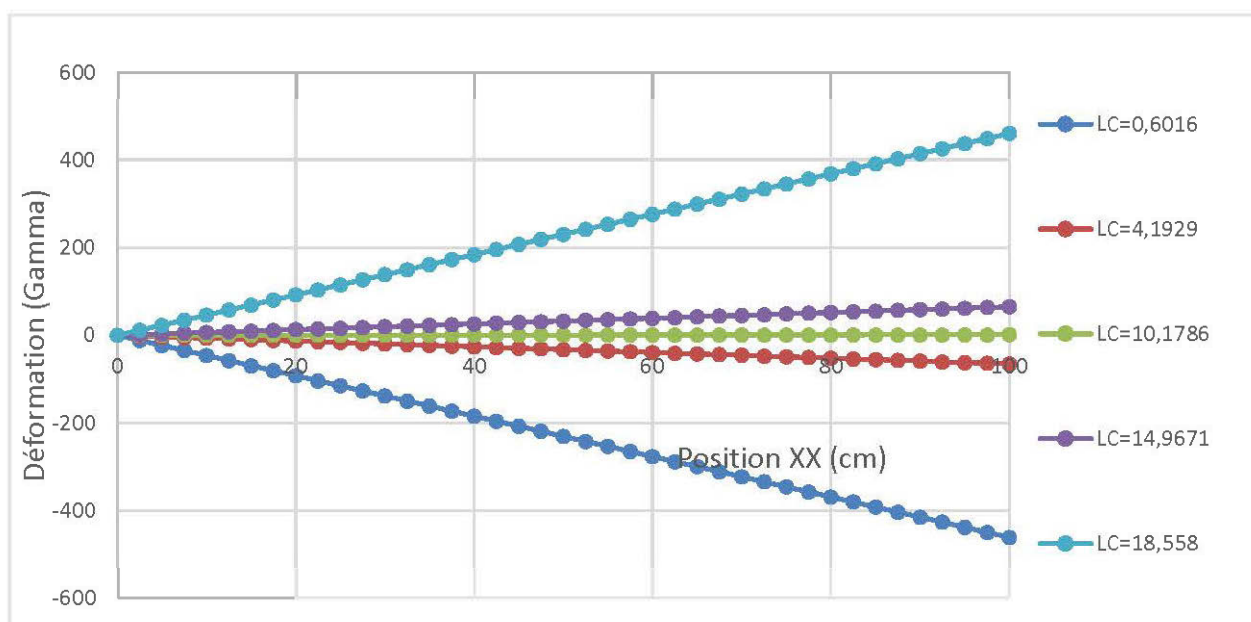


Figure 4-26 : Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 250 Kg/Hr

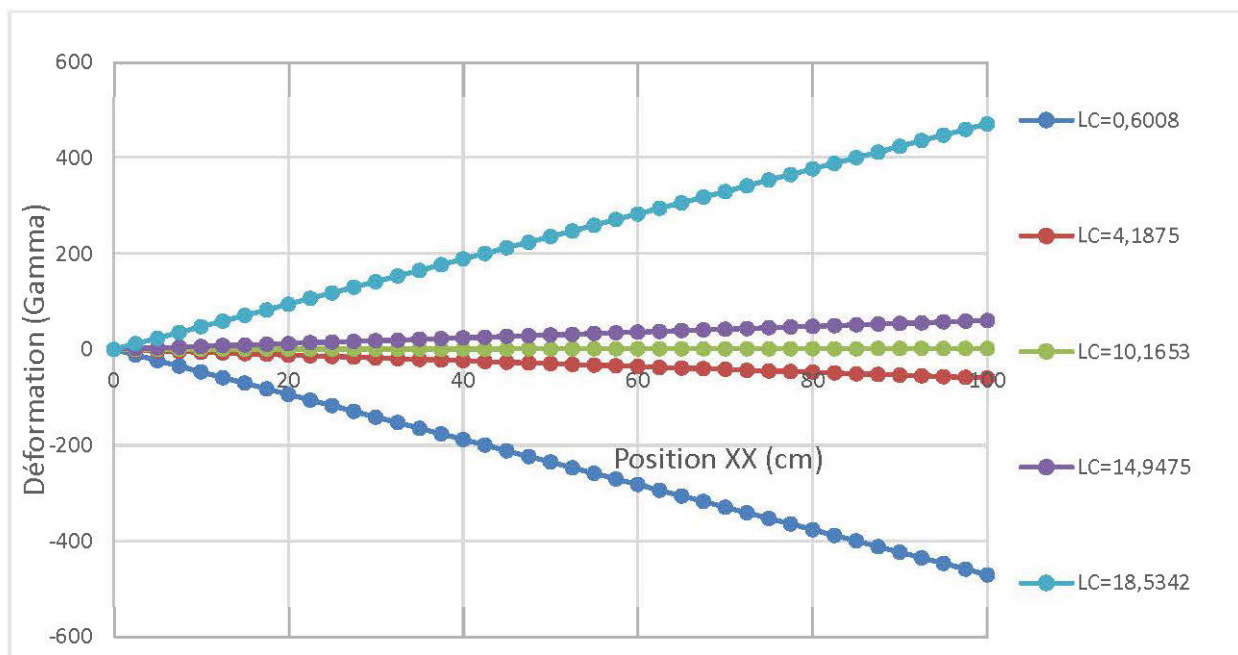


Figure 4-27: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 1000 Kg/Hr

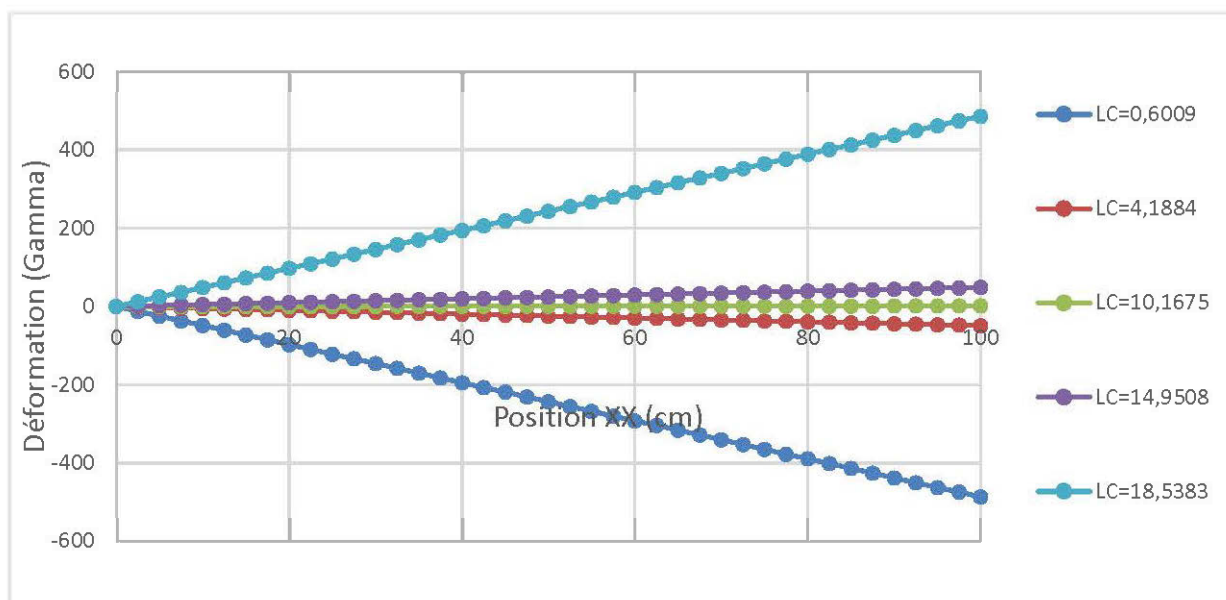


Figure 4-28: Déformation sur les lignes de courant pour un débit de 2000 Kg/Hr

Plus on se rapproche des parois, plus les déformations sur les lignes de courant sont grandes. Ces dernières ne dépendent pas vraiment du débit à l'entrée de la conduite.



La viscosité a été déterminée pour les cinq différents débits. Elle n'est plus constante comme dans le modèle de Stokes. La figure 4-29 présente la viscosité du remblai en fonction du débit.

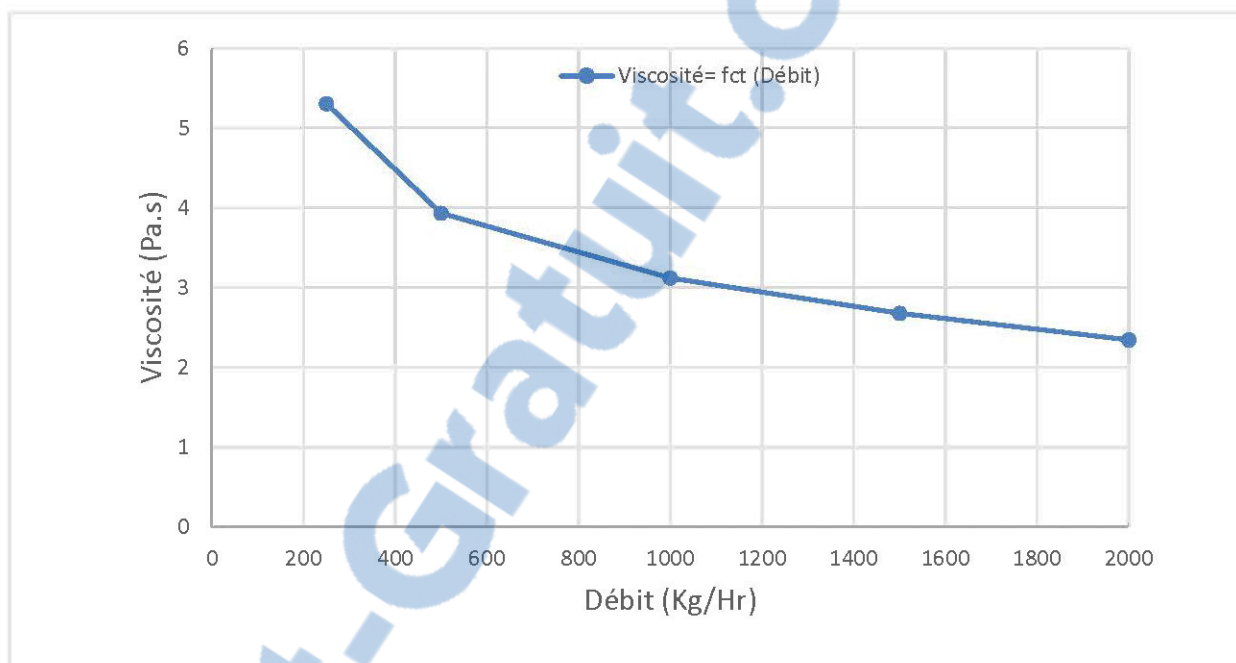


Figure 4-29: Viscosité en fonction du débit

La viscosité diminue avec une augmentation du débit à l'entrée de la conduite.

La figure 4-30 présente la perte de charge en fonction du débit.

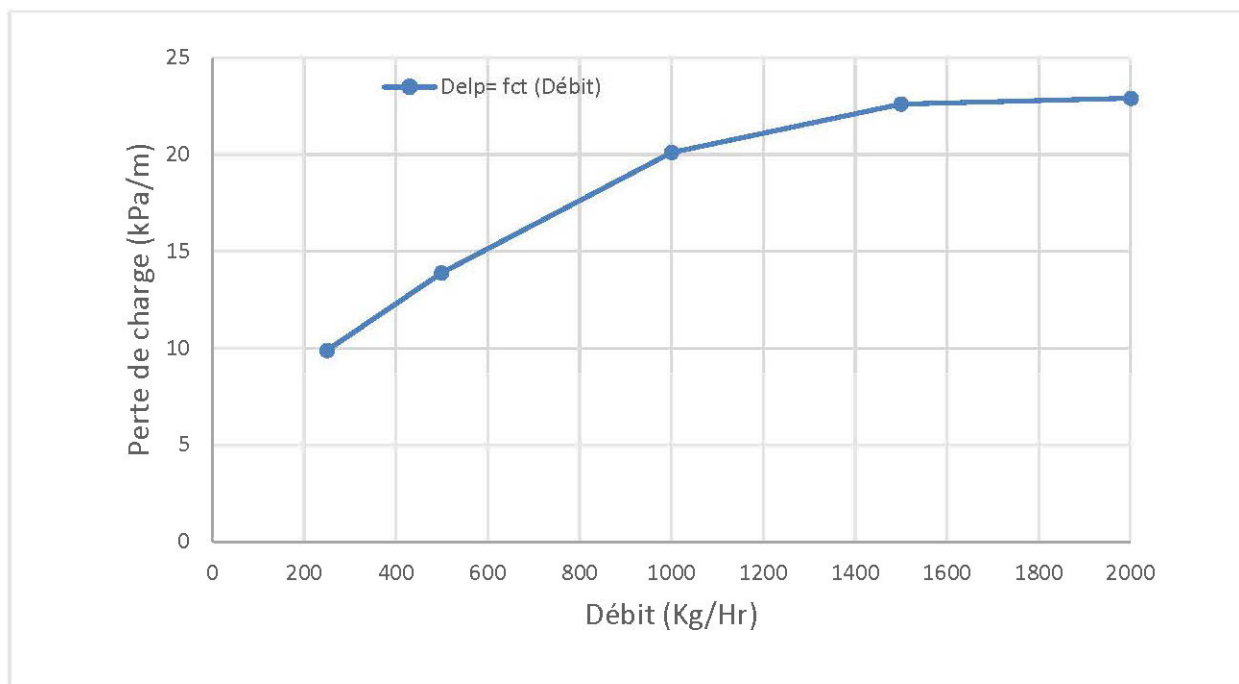


Figure 4-30 : Perte de charge en fonction du débit

La perte de charge ne varie plus linéairement avec le débit. Une croissance du débit provoque une perte de charge plus importante.

Pour des raisons de symétrie dans la conduite cylindrique, la fonction d'amortissement sera présentée pour 3 lignes de courant à savoir 0,6 cm, 5,4 cm et enfin 10,2 cm. Les courbes de la fonction d'amortissement pour ces trois lignes de courant sont présentées par les figures 4-31 à 4-33.

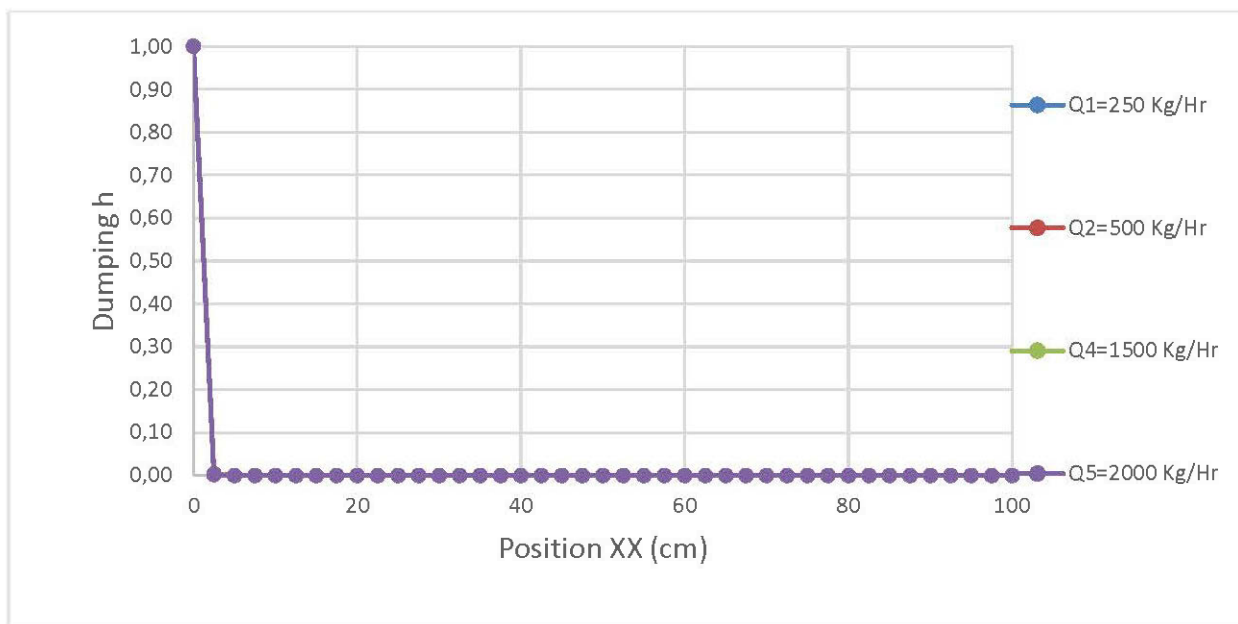


Figure 4-31: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 0,6 cm

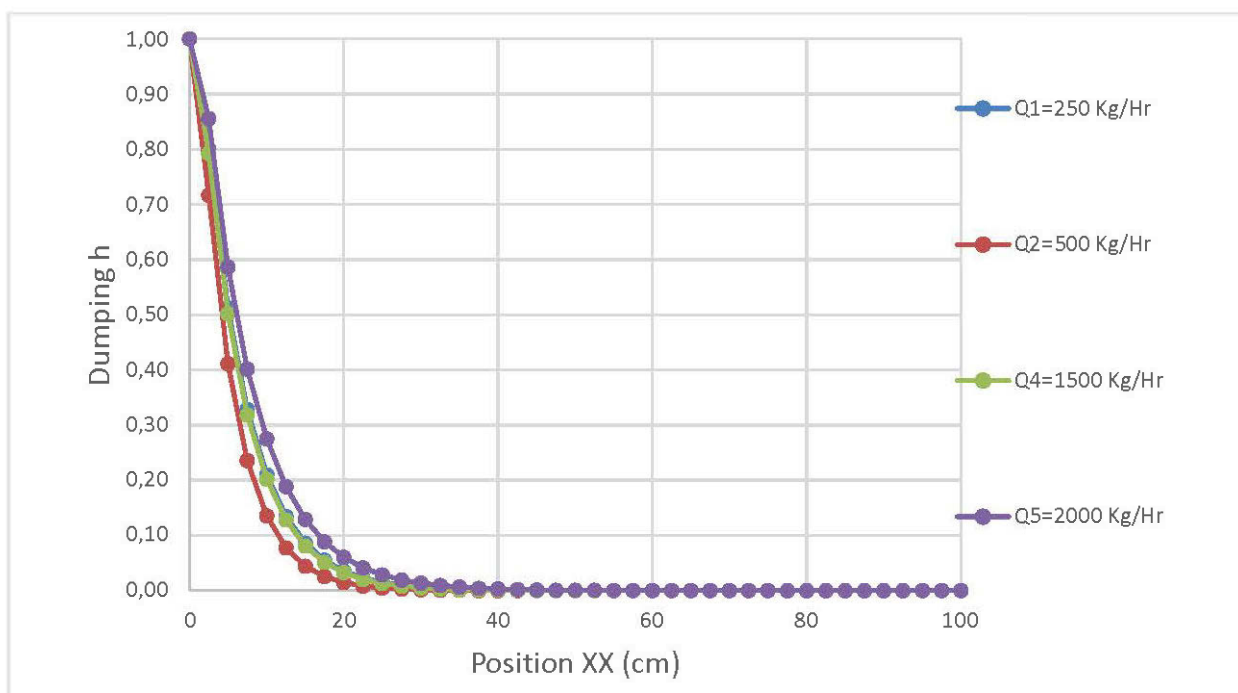


Figure 4-32: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 5,4 cm

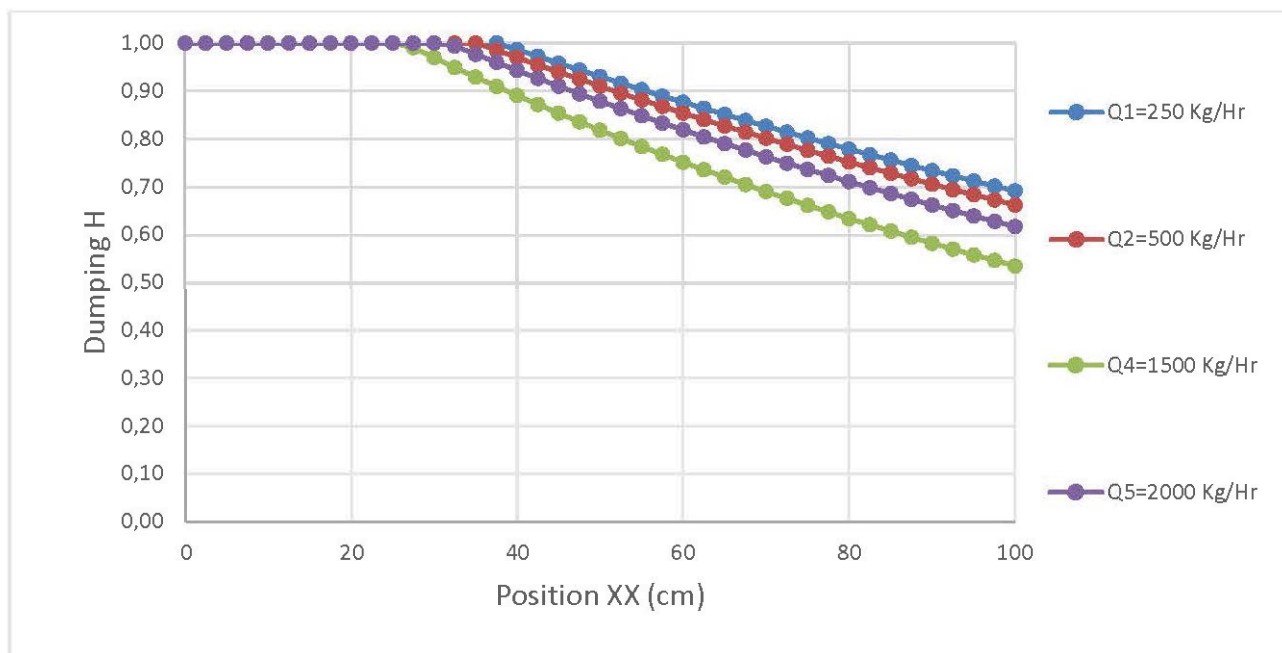


Figure 4-33: fonction d'amortissement sur la ligne de courant de 10,2 cm

La fonction d'amortissement est de plus en plus petite au fur et à mesure qu'on s'approche des parois de la conduite.

## 4.4 Étude comparative des trois modèles

Les champs de vitesse pour les 3 modèles et pour les cinq différents débits sont présentés par les figures 4-34 à 4-38 :

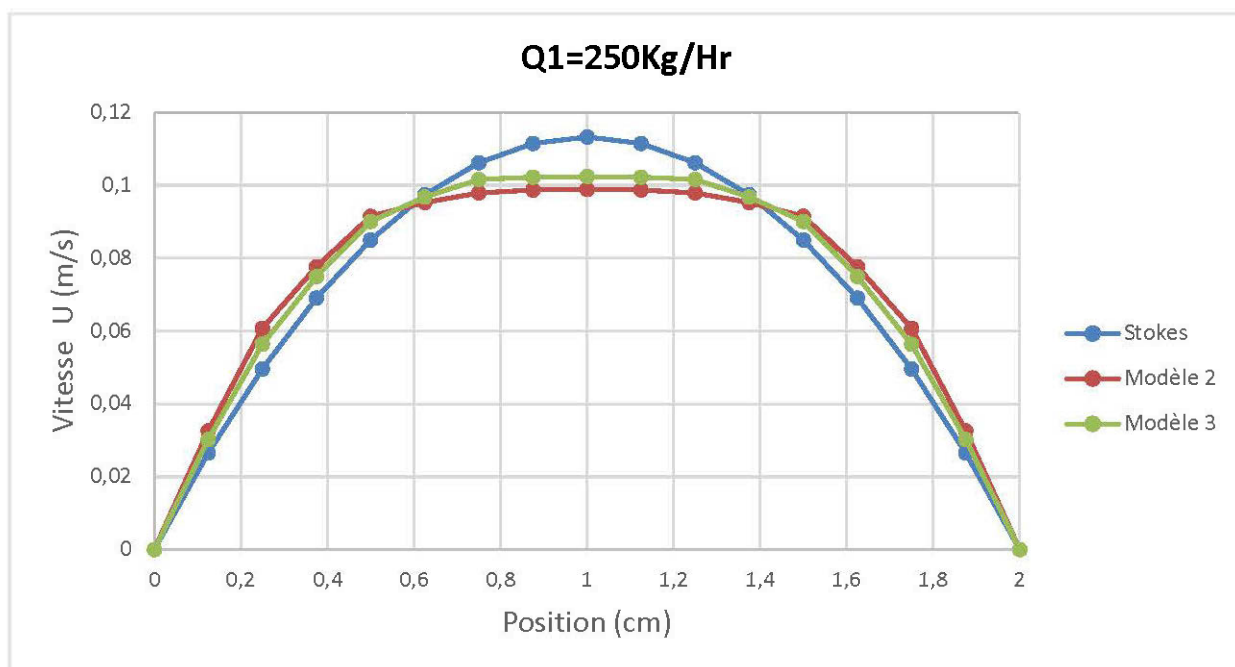


Figure 4-34: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 250 Kg/Hr

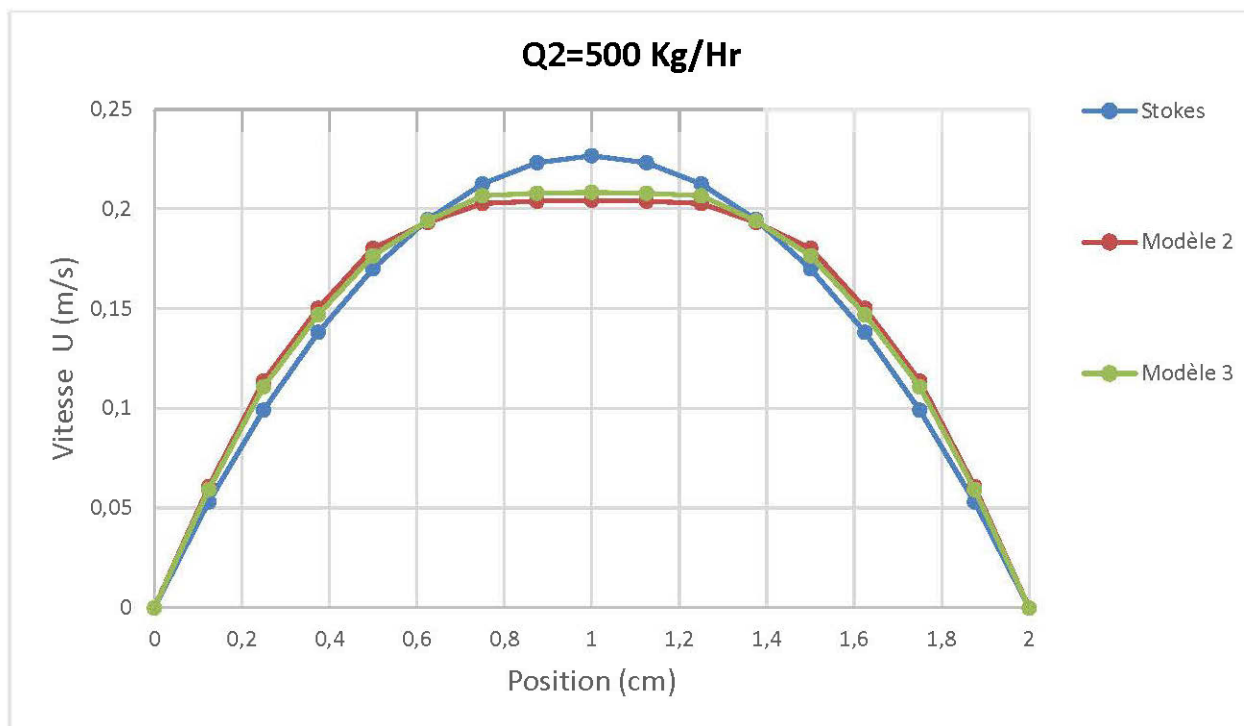


Figure 4-35: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 500 Kg/Hr

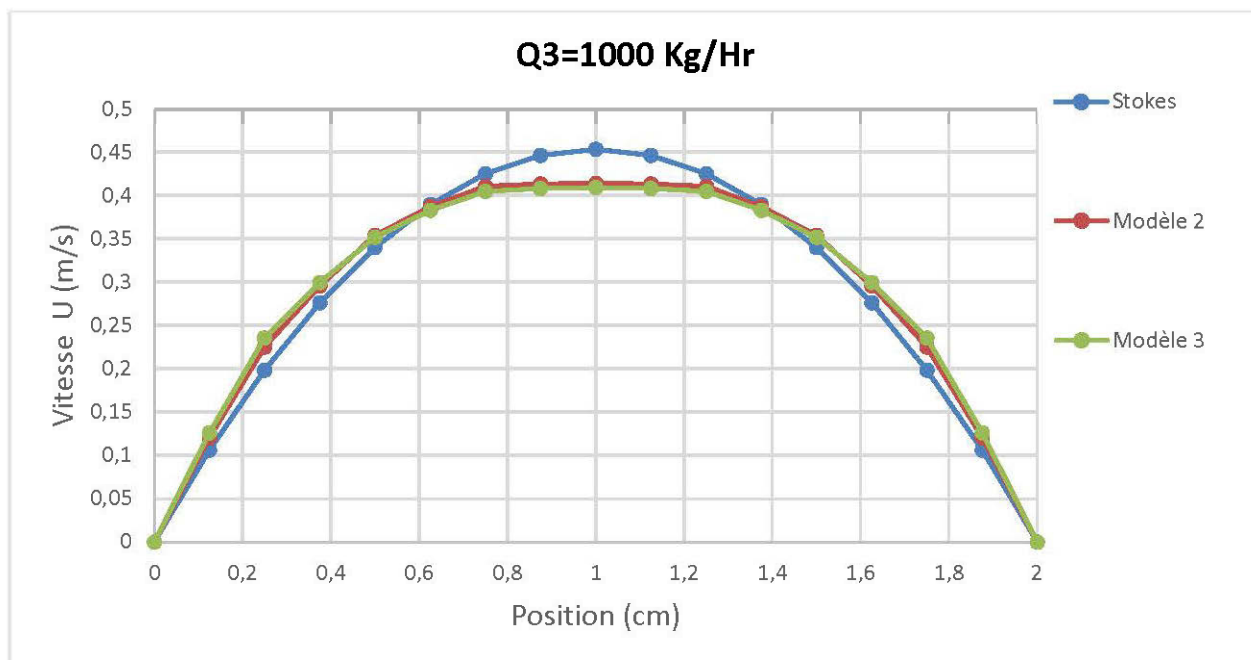


Figure 4-36: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 1000 Kg/Hr

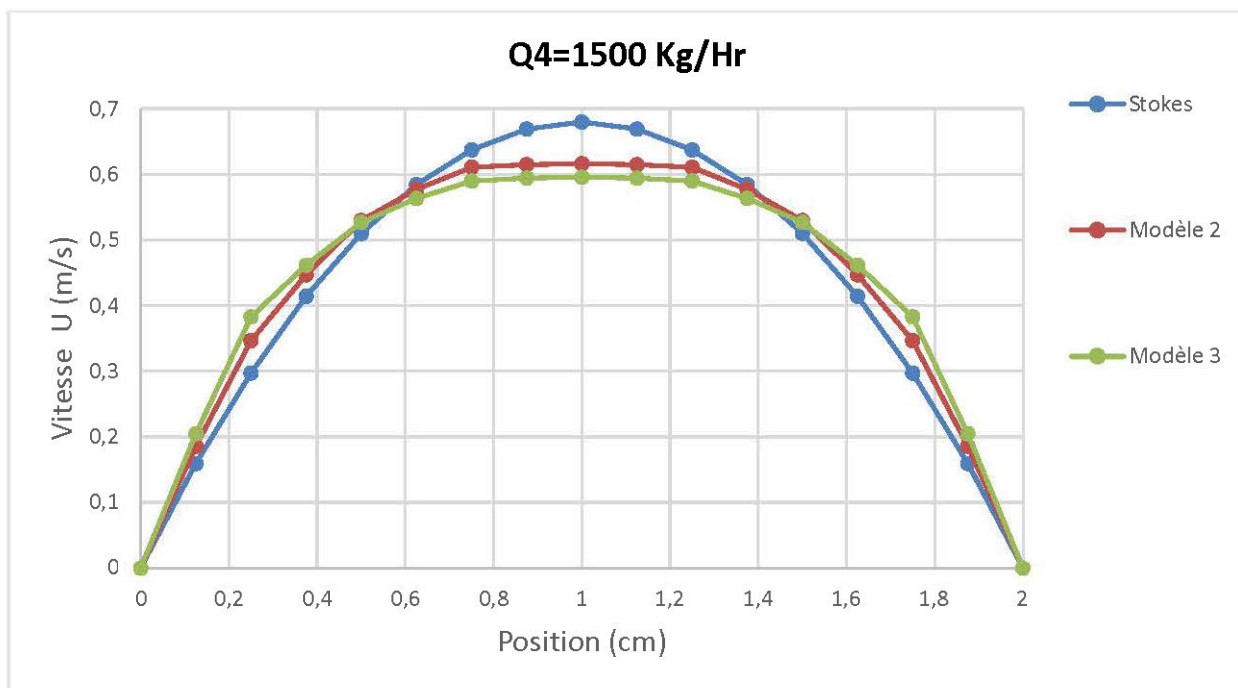


Figure 4-37: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 1500 Kg/Hr



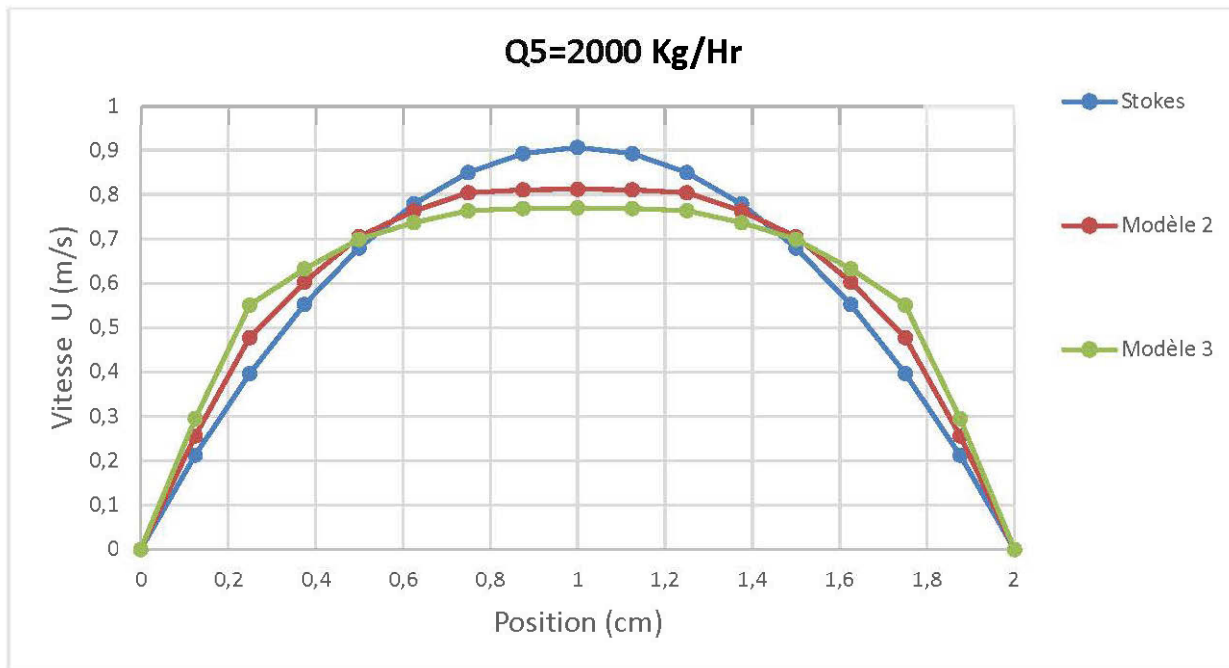


Figure 4-38: Comparaison des champs de vitesses pour les 3 modèles pour un débit de 2000 Kg/Hr

Plus le débit à l'entrée de la conduite est grand, plus les vitesses sont élevées. La vitesse du remblai est plus basse près de la paroi et s'annule à la paroi. Les profils de vitesses sont paraboliques pour le modèle de Stokes contrairement aux deux autres modèles. Les vitesses proches des parois sont plus importantes pour les modèles 2 et 3 que pour le modèle de Stokes. Par contre pour le modèle de Stokes, celles-ci sont plus grandes au milieu de la conduite cylindrique comparativement aux deux autres modèles.

La viscosité pour les 3 modèles a été compilée dans la figure 4-39. La viscosité est constante pour le modèle de Stokes alors qu'elle varie pour les 2 autres modèles, celle-ci diminue en réponse à une augmentation du débit.

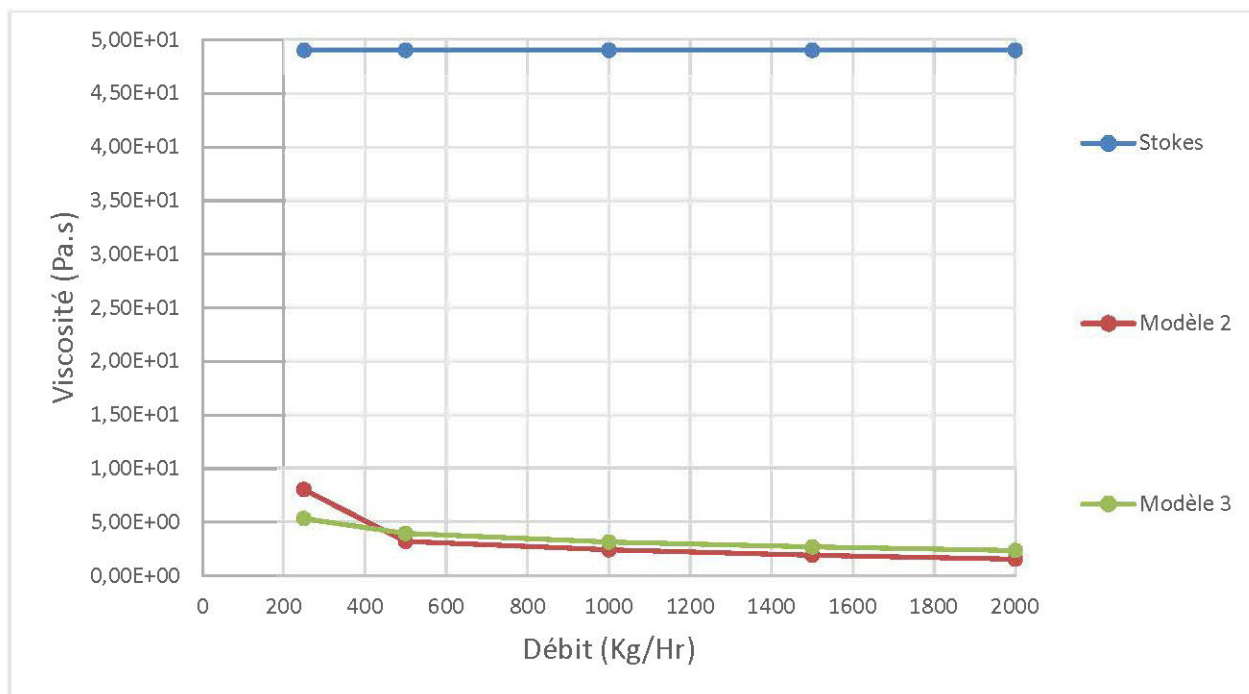


Figure 4-39: Comparaison des viscosités pour les 3 modèles

La figure 4-40 présente les pertes de charge en fonction du débit pour les 3 modèles.

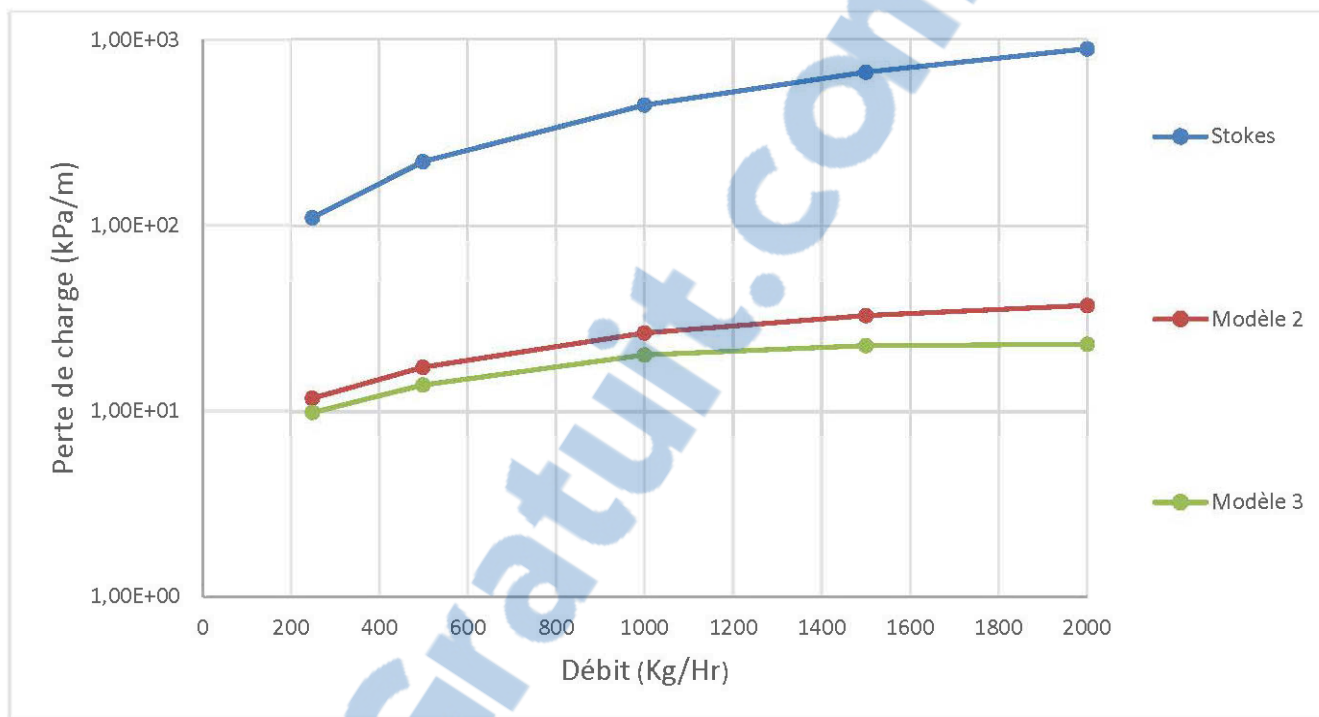


Figure 4-40 : comparaison des pertes de charge pour les 3 modèles

Pour le modèle de Stokes, le profil de vitesses a une forme parabolique et la viscosité est constante. Le remblai se comporte comme un fluide newtonien. Pour les deux autres modèles, le fluide subit des déformations lors de son écoulement (fonction d'amortissement différent de 1). La viscosité diminue en réponse à une augmentation du débit à l'entrée de la conduite. Le remblai se comporte comme un fluide non newtonien. En effet, plus le débit à l'entrée de la conduite est grand, plus les vitesses sont élevées, par conséquent, le taux de cisaillement sera plus important et la viscosité plus faible.

Les vitesses sont plus élevées au milieu de la conduite pour le modèle de Stokes comparativement aux deux autres modèles et celles-ci sont, par contre, plus faibles proche des parois. En effet, pour le modèle de Stokes, le remblai ne subit aucune déformation pendant son écoulement, seuls les frottements aux parois de la conduite retardent l'écoulement du remblai. Ces frottements sont transmis perpendiculairement

aux autres couches du remblai ; le remblai s'écoule de la même manière jusqu'au bout de la conduite. Par contre, pour les 2 autres modèles avec déformations, un cisaillement se produit au sein du fluide, ce qui provoque des vitesses plus élevées proches des parois. Mais au centre de la conduite, ce cisaillement n'a pas le temps d'être transmis à toutes les couches, donc le remblai s'écoule en blocs. C'est exactement pour cela que les vitesses sont plus faibles au milieu de la conduite pour ces 2 modèles. La déformation est plus importante pour le 3<sup>e</sup> modèle donc les vitesses sont plus élevées que celles observées pour le 2<sup>e</sup> modèle.

Le temps de résidence de la particule de fluide est très élevé aux parois de la conduite comparativement aux autres parties de la conduite : ceci est dû aux frottements du fluide avec les parois de la conduite, ce qui ralentit l'écoulement du fluide à ce niveau. Les déformations sont donc de plus en plus importantes du milieu de la conduite vers les parois. Raison pour laquelle la fonction d'amortissement est petite lorsqu'on se rapproche des parois de la conduite.

Une augmentation du débit provoque un temps de résidence plus petit et des vitesses plus grandes parce qu'elle permet de s'opposer aux forces de frottement et de diminuer leur effet sur l'écoulement.

Plus la viscosité du remblai est élevée, plus celui-ci opposera une résistance à l'écoulement, et il faudra alors plus d'énergie pour provoquer l'écoulement dudit remblai. Les pertes de charge augmentent donc avec la viscosité

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Dans ce mémoire, l'investigation numérique d'un modèle viscoélastique de type intégral pour l'estimation des pertes de charge dans une conduite cylindrique de remblai a été abordée.

Dans le chapitre 1, une revue de littérature sur les pertes de charge dans les conduites de remblai a été proposée. Après un bref rappel sur les remblais, on a abordé les différentes méthodes de transport des remblais en pâte. Ensuite on s'est penché sur la rhéologie du remblai, plus précisément sur son comportement, les pertes de charge et la détermination des paramètres rhéologiques.

Dans le chapitre 2, on a tout d'abord exposé les équations de continuité et de mouvement et les hypothèses propres à notre problème. Par la suite, la caractérisation des paramètres rhéologiques et la loi de comportement nous ont permis la résolution numérique de notre problème par la méthode des éléments finis en régime stationnaire.

Dans le chapitre 3, on présente les résultats des simulations numériques réalisées. Les résultats obtenus montrent l'importance de la fonction d'amortissement sur l'écoulement du remblai.

La méthode viscoélastique de type intégral KBK-Z est une méthode généralement utilisée pour les polymères. Elle prend en considération le comportement non linéaire du remblai qui n'est pas observé par les essais dynamiques avec le rhéomètre. Elle semble très prometteuse pour étudier le comportement des remblais. En effet, avec les hypothèses considérées dans le projet, les résultats expérimentaux obtenus avec le modèle de Bingham donnent des résultats qui se rapprochent des résultats obtenus dans nos simulations (pour Bingham : pour un débit de 1000 Kg/Hr, la viscosité de Bingham est de 1,89 Pa.s, la perte de charge est de 10,71 kPa/m). Cette approche est nouvelle dans le domaine minier et prend en considération la loi de comportement du remblai dans le présent en se basant sur les déformations subies par ce dernier dans le passé. Dans notre investigation, des valeurs arbitraires ont été choisies pour la fonction d'amortissement.

Nous suggérons la détermination des paramètres de la fonction d'amortissement associés à notre matériau pour une analyse plus poussée et complète des pertes de charge dans les remblais. La température, la pente et l'écoulement en régime permanent sont nos futurs centres d'intérêt dans le domaine de la modélisation de l'écoulement de remblai. Aussi, on pourra intégrer un seuil de cisaillement dans les études futures. Cette étude est une première lancée vers un terrain encore vierge, elle mérite d'être approfondie pour les recherches futures.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Barnes, H. A., Hutton, J. F., & Walters, K. (1989). *An introduction to rheology*(Vol. 3). Elsevier.
- Belem Tikou (2013). Notes de cours de GNM 1002. Remblais miniers. École Polytechnique de Montréal. 2013
- Belem, T., Benzaazoua, M., & Bussière, B. (2003, February). Utilisation du remblai en pâte comme support de terrain. Partie I: De sa fabrication à sa mise en place sous terre. In *Symp. int. Apres-mines, GISOS, Gisos ed., Nancy, France* (pp. 5-7).
- Belem, T., & Benzaazoua, M. (2008, February). Predictive models for prefeasibility cemented paste backfill mix design. In *The 3rd international conference on post-mining* (Vol. 8, pp. 6-8).
- Benzaazoua, M., Marion, P., Bussière, B., & Picquet, I. (2002, November). Stabilisation et solidification de résidus miniers sulfo-arséniés dans des remblais cimentés en pâtes. In *Proc. of Symposium*.
- Benzaazoua, M., Bois, D., Belem, T., Gauthier, P., Ouellet, S., Fall, M., & St-Onge, J. F. (2005). Remblais souterrains, évolution des connaissances et de la pratique. In *20th Colloque Contrôle de terrains*.
- Bernstein, B., Kearsley, E. A., & Zapas, L. J. (1963). A study of stress relaxation with finite strain. *Transactions of The Society of Rheology (1957-1977)*, 7(1), 391-410.
- Bernstein, B., Kearsley, E., & Zapas, L. (1965). Elastic Stress-Strain Relations in Perfect Elastic Fluids. *Transactions of The Society of Rheology (1957-1977)*,9(1), 27-39.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., & Curtiss, C. F. (1977). *Dynamics of polymeric liquids* (Vol. 1, p. 210). New York: Wiley.
- Briant, J., Denis, J., & Parc, G. (1985). *Propriétés rhéologiques des lubrifiants*. Editions Technip.

- Chang, H., & Lodge, A. S. (1972). Comparison of rubberlike-liquid theory with stress-growth data for elongation of a low-density branched polyethylene melt. *Rheologica Acta*, 11(1), 127-129.
- Chiara, F. F. (1998). Modified slump test to measure rheological parameters of fresh concrete. *Cement, Concrete and Aggregates*, 20(2), 241-247.
- Coussot, P., & Boyer, S. (1995). Determination of yield stress fluid behaviour from inclined plane test. *Rheologica acta*, 34(6), 534-543.
- Dealy, J. M. (1982). *Rheometers for molten plastics: a practical guide to testing and property measurement*. Van Nostrand Reinhold Company.
- Erchiqui, F., Godard, F., & Yedder, R. B. (2004). Hybrid approach for modeling of parison extrusion in blowmolding. *Journal of polymer engineering*, 24(6), 537-556.
- Ghezzehei, T. A., & Or, D. (2001). Rheological properties of wet soils and clays under steady and oscillatory stresses. *Soil Science Society of America Journal*, 65(3), 624-637.
- Green, M. S., & Tobolsky, A. V. (1946). A new approach to the theory of relaxing polymeric media. *The Journal of Chemical Physics*, 14(2), 80-92.
- Henderson, A., Revell, M. B., Landriault, D., & Coxon, J. (2005). Paste fill. *Handbook on mine fill*.
- Landriault, D. (1995, May). Paste backfill mix design for Canadian underground hard rock mining. In *97th Annual General Meeting of CIM. Rock Mechanics and Strata Control Session. Halifax, Nova Scotia* (pp. 229-238).
- Laun, H. M. (1978). Description of the non-linear shear behaviour of a low density polyethylene melt by means of an experimentally determined strain dependent memory function. *Rheologica Acta*, 17(1), 1-15.
- Lodge, A. S. (1964). Elastic liquids. *London and New York*, 118-120.
- Ouattara, D. (2011). *Étude des propriétés rhéologiques de résidus miniers densifiés* (Doctoral dissertation, École Polytechnique de Montréal).



- Revell, M. (2000, April). Cannington backfill taking the pig out of paste. In *Paste Technology Seminar* (pp. 1-12).
- Roussel, N. (2006). Correlation between yield stress and slump: comparison between numerical simulations and concrete rheometers results. *Materials and Structures*, 39(4), 501-509.
- Thomas, A. D. (1979). Settling of particles in a horizontally sheared Bingham plastic, 1st Nat. In *Conf. on Rheology* (pp. 89-92).
- Wagner, M. H. (1976). Analysis of time-dependent non-linear stress-growth data for shear and elongational flow of a low-density branched polyethylene melt. *Rheologica Acta*, 15(2), 136-142.
- Wagner, M. H. (1978). A constitutive analysis of uniaxial elongational flow data of low-density polyethylene melt. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 4(1), 39-55.
- Wagner, M. H., & Stephenson, S. E. (1979). The irreversibility assumption of network disentanglement in flowing polymer melts and its effects on elastic recoil predictions. *Journal of Rheology (1978-present)*, 23(4), 489-504.
- Yamamoto, M. (1956). The visco-elastic properties of network structure I. General formalism. *Journal of the physical society of Japan*, 11(4), 413-421.
- Yamamoto, M. (1957). The visco-elastic properties of network structure II. Structural viscosity. *Journal of the physical society of Japan*, 12(10), 1148-1158.
- Yamamoto, M. (1958). The visco-elastic properties of network structure III. Normal stress effect (Weissenberg effect). *Journal of the physical society of Japan*, 13(10), 1200-1211.

## ANNEXES

### RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE STOKES EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

✓ Formulation intégrale

En considérant un élément arbitraire  $\Omega^e$  de notre domaine d'étude  $\Omega$ , la formulation intégrale faible du problème de Stokes en coordonnées cartésiennes s'écrit donc :

$$0 = \int_{\Omega^e} \{w_1 [\frac{\partial P}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]\} dx dy \quad \text{Équation A-1}$$

$$0 = \int_{\Omega^e} \{w_2 [\frac{\partial P}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}]\} dx dy \quad \text{Équation A-2}$$

$$0 = \int_{\Omega^e} w_3 (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) dx dy \quad \text{Équation A-3}$$

Ou  $w_1, w_2$  et  $w_3$  sont les fonctions poids.

Comme l'équation A-1 est l'équation de conservation du moment,  $w_1$  doit être la composante de la vitesse selon l'axe des x. De la même manière,  $w_2$  doit être la composante de la vitesse selon l'axe des y. La troisième équation représente les variations de volume dans un élément de dimensions dx et dy. Alors,  $w_3$  peut être assimilée à la force qui provoque le changement de volume. La variation de volume est provoquée par l'action de la pression hydrostatique donc  $w_3$  équivaut à  $-P$ .

Donc on peut écrire :

$$w_1 \sim u, \quad w_2 \sim v, \quad w_3 \sim -P$$

En deuxième lieu, on intègre les équations A-1 et A-2 par parties et on applique le théorème du gradient, cela nous permet d'obtenir :

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[ \mu \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial x} P \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} w_1 t_x ds \quad \text{Équation A-4}$$

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[ \mu \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial w_2}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial y} P \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} w_2 t_y ds \quad \text{Équation A-5}$$

$$0 = \int_{\Omega^e} w_3 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{Équation A-6}$$

✓ Formulation matricielle de l'équation de Stokes incompressible

La formulation intégrale faible montre que  $u$  et  $v$  sont les variables primaires qui doivent être continues aux frontières entre les éléments, il ne doit pas être le cas pour la pression. Les éléments finis de Lagrange peuvent donc être utilisés pour les vitesses et la pression  $(u, v, P)$ .

La continuité requiert au minimum que  $(u, v)$  soit linéaire en  $x$  et  $y$  et que  $P$  soit constant.

Les fonctions d'interpolation pour  $u, v$  et  $P$  sont alors :

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i^e \quad \text{Équation A-7}$$

$$v = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j^e \quad \text{Équation A-8}$$

$$P = \sum_{j=1}^m P_j \Phi_j^e \quad \text{Équation A-9}$$

Ou  $\psi_i^e, \psi_j^e$  et  $\Phi_j^e$  sont des fonctions d'interpolation d'ordres différents ( $m < n; m + 1 = n$ ).

En substituant les équations A-7, A-8 et A-9 dans les équations A-4, A-5 et A-6, on obtient le modèle d'éléments finis de la forme :

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] & [K^{23}] \\ [K^{31}] & [K^{32}] & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad \text{Équation A-10}$$

Avec ( $i, j=1, 2, \dots, n$  et  $J=1, 2, \dots, m$ )

$$[K^{11}] = [K^{22}] = \mu [S^{11}] + \mu [S^{22}] \quad \text{Équation A-11}$$

Nous avons :

$$S_{ij}^{11} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy \quad \text{Équation A-12}$$

$$S_{ij}^{22} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy$$

Équation A-13

$$[K^{12}] = [K^{21}] = [K^{33}] = 0$$

Aussi :

$$K_{ij}^{13} = K_{ij}^{31} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \phi_j dx dy$$

Équation A-14

$$F_i^1 = \oint_{\Gamma^e} t_x \psi_i ds$$

Équation A-15

$$F_i^2 = \oint_{\Gamma^e} t_y \psi_i ds$$

Équation A-16

✓ Méthode de pénalité en éléments finis

La méthode de pénalité est une méthode qui nous permet de reformuler un problème avec contrainte en un problème sans contrainte. Commençons tout d'abord à formuler le problème de Stokes incompressible en un problème simple avec contrainte.

- Formulation du problème de Stokes en un problème avec contrainte

D'après la formulation faible, nous avons les termes bilinéaires  $B((w_1, w_2), (u, v))$  et linéaires  $l(w_1, w_2)$  suivantes lorsque les vitesses satisfont la condition  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  :

$$B((w_1, w_2), (u, v)) = \mu \int_{\Omega^e} \left[ \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

Équation A-170-1

$$l(w_1, w_2) = \oint_{\Gamma^e} (t_x w_1 + t_y w_2) ds$$

Équation A-18

La pression n'intervient pas dans le terme bilinéaire. La fonction quadratique est donnée par l'équation :

$$\begin{aligned}
 I((u, v)) &= \frac{1}{2} B((u, v), (u, v)) - l(u, v) I(u, v) && \text{Équation A-19} \\
 &= \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega^e} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 &\quad - \oint_{\Gamma^e} (t_x u + t_y v) ds
 \end{aligned}$$

Où le champ de vitesse  $(u, v)$  satisfait l'équation de continuité. Nous remarquons clairement que l'équation de Stokes incompressible en régime permanent équivaut à minimiser  $I(u, v)$  sous la contrainte :

$$G(u, v) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{Équation A-20}$$

- Formulation du multiplicateur de Lagrange



Dans la méthode de Lagrange, le problème avec contraintes est reformulé en problème sans contrainte en recherchant les points stationnaires de la fonction suivante :

$$I_L(u, v, \lambda) \equiv I(u, v) + \int_{\Omega^e} \lambda G(u, v) dx dy \quad \text{Équation A-21}$$

Où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange.

La condition nécessaire pour que  $I_L$  ait un point stationnaire est :

$$\delta I_L = \delta_u I_L + \delta_v I_L + \delta_\lambda I_L = 0$$

Où  $\delta_u I_L = 0$ ,  $\delta_v I_L = 0$ ,  $\delta_\lambda I_L = 0$

$\delta_u$ ,  $\delta_v$  et  $\delta_\lambda$  sont les variations partielles de  $u$ ,  $v$  et  $\lambda$  respectivement.

Ainsi, le modèle d'éléments finis vitesse-pression peut aussi être formulé en modèle Lagrangien d'éléments finis.

- Formulation de la méthode de pénalité :

Dans la méthode de pénalité, le problème avec contrainte est reformulé en problème sans contrainte en minimisant la fonction suivante :

$$I_p(u, v, \lambda) \equiv I(u, v) + \frac{1}{2} \gamma_e \int_{\Omega^e} [G(u, v)]^2 dx dy \quad \text{Équation A-22}$$

Le paramètre de pénalité  $\gamma_e$  peut être choisi relativement à chaque élément.

Le problème avec contraintes peut être reformulé en un problème sans contraintes en utilisant le multiplicateur de Lagrange ou la méthode de pénalité.

Pour que  $I_p$  ait un minimum, la condition nécessaire est :

$$\delta_u I_p = 0, \quad \delta_v I_p = 0$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \delta_u I_p &= \delta_u I + \gamma_e \int_{\Omega^e} G(u, v) \delta_u G(u, v) dx dy && \text{Équation A-23} \\ &= \int_{\Omega^e} \left( \mu \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial \delta u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{\Gamma^e} \delta u t_x ds \\ &\quad + \gamma_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 \delta_v I_p &= \delta_v I + \gamma_e \int_{\Omega^e} G(u, v) \delta_v G(u, v) dx dy \\
 &= \int_{\Omega^e} \left( \mu \frac{\partial \delta v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial \delta v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{\Gamma^e} \delta v t_y ds \\
 &+ \gamma_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0
 \end{aligned}$$

Équation A-24

Le modèle d'éléments finis découlant est de la forme :

$$\begin{bmatrix} [\overline{K^{11}}] & [\overline{K^{12}}] \\ [\overline{K^{21}}] & [\overline{K^{22}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix}$$

Équation A-25

Avec :

$$[\overline{K^{11}}] = [K^{11}] + \gamma [S^{11}] = \mu ([S^{11}] + [S^{22}]) + \gamma[S^{11}]; \quad [\overline{K^{12}}] = \gamma[S^{12}]$$

Équation A-26

Et :

$$[\overline{K^{22}}] = [K^{22}] + \gamma [S^{22}] = \mu ([S^{11}] + [S^{22}]) + \gamma[S^{22}]$$

Équation A-27

Et :

$$[S^{12}] = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy$$

Équation A-28

L'équation II-35 peut être réécrite sous la forme :

$$[K]\{\Delta\} = (\mu [K^1] + \gamma[K^2])\{\Delta\} = \{F\}$$

Équation A-29

$\{\Delta\}$  est le vecteur des vitesses,  $[K^1]$  représente le terme de viscosité et  $[K^2]$  le terme de pénalité issu de la contrainte d'incompressibilité. Lorsque la valeur de  $\gamma$  est très grande, on a :

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma} ((\mu [K^1] + \gamma[K^2])\{\Delta\} - \{F\}) = \{0\} \text{ Ou}$$

Équation A-30

$[K^2]\{\Delta\} = 0$  lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$