

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT	VI
LISTE DES FIGURES	XII
LISTE DES TABLEAUX.....	XIV
LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS.....	XV
CHAPITRE 1.....	1
INTRODUCTION.....	1
1.1 Mise en contexte	1
1.2 Perspective historique	1
1.3 Systèmes de transmission de puissance usuels	2
1.3.1 Systèmes mécaniques de transmission de puissance	2
1.3.2 Systèmes à fluide sous pression de transmission de puissance.....	3
1.3.2.1 Transmission hydrostatique	4
1.3.2.2 Transmission hydrocinétique	5
1.3.3 Systèmes soniques de transmission de puissance	6
1.4 Problématique	7
1.5 Objectifs	7
1.6 Structure du mémoire	8

CHAPITRE 2.....	9
LE CONVERTISSEUR DE COUPLE DE CONSTANTINESCO	9
2.1 Géométrie du convertisseur de couple de Constantinesco.....	10
2.1.1 Mécanisme pentagonal.....	10
2.1.2 Diode mécanique.....	10
2.2 Principe de fonctionnement du CCC.....	11
2.3 Discussions sur les différentes configurations envisageables du CCC	13
CHAPITRE 3.....	18
BASES THÉORIQUES DES ANALYSES STRUCTOMATIQUE, CINÉMATIQUE ET CINÉTOSTATIQUE DES MÉCANISMES ET APPLICATION AU CCC	18
3.1 Analyse structomatique.....	19
3.1.1 Concepts théoriques concernant l'analyse structomatique	19
3.1.2 Étude structomatique du convertisseur de couple de Constantinesco.	23
3.1.2.1 Modèle A : lorsque le couple résistant est vaincu	24
3.1.2.2 Modèle I : lorsque l'énergie du moteur est transmise au pendule.	27
3.1.3 Structomats requis pour décrire le mouvement du CCC.....	29
3.2 Analyse cinématique	30
3.2.1 Concepts théoriques concernant l'analyse cinématique des structomats	30
3.2.1.1 Équations non linéaires de position.....	32
3.2.1.2 Résolution du système d'équations de position	33
3.2.1.2 Équations linéaires de vitesse.....	37

3.2.1.3	Équations linéaires d'accélération.....	37
3.2.2	Modèles cinématiques des structomats du CCC	38
3.2.3	Étude cinématique du CCC.....	38
3.3	Analyse cinétostatique	40
3.3.1	Concepts théoriques concernant l'analyse cinétostatique des structomats ...	40
3.3.2	Modèles cinétostatiques des structomats du CCC	44
3.3.3	Étude cinétostatique du convertisseur de couple de Constantinesco ..	45
CHAPITRE 4.....		47
ANALYSE DYNAMIQUE DES MÉCANISMES À MEMBRURES		47
4.1	Modélisation dynamique d'un mécanisme à membrures.....	49
4.1.1	Variables généralisées	50
4.1.2	Fonctions de transmission de position	51
4.1.3	Fonctions de transmission de vitesse et d'accélération.....	52
4.1.4	Matrice de transmission de vitesse et d'accélération	58
4.2	Expression générale des équations de mouvement	64
CHAPITRE 5.....		69
INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT		69
5.1	Calcul des fonctions et matrices de transmission.....	69
5.1.1	Obtention des fonctions/matrices de transmission analytiquement	70
5.1.2	Obtention des fonctions/matrices de transmission numériquement....	76
5.1.3	Obtention des fonctions/matrices de transmission en utilisant les modèles cinématiques des structomats.....	77

5.1.3.1	Fonctions de transmission	78
5.1.3.2	Matrices de transmission	80
5.2	Implémentation à l'aide d'un logiciel informatique.....	84
5.3	Caractéristiques du couple moteur	89
5.4	Méthode de Runge-Kutta pour l'intégration des équations de mouvement	90
5.5	Étude dynamique du convertisseur de couple de Constantinesco.....	95
CHAPITRE 6.....		97
VÉRIFICATION DE LA PROCÉDURE NUMÉRIQUE PROPOSÉE		97
6.1	Mécanisme bielle-manivelle	97
6.2	Mécanisme pentagonal.....	100
6.2.1	Fonctions de transmission de l'élément 3	102
6.2.2	Vitesse et accélération du centre de gravité de l'élément 4	105
6.2.3	Variation des paramètres cinématiques des coordonnées généralisées.....	107
CHAPITRE 7.....		109
DISCUSSIONS SUR LA DYNAMIQUE DU CONVERTISSEUR DE COUPLE DE CONSTANTINESCO.....		109
7.1	Comportement du CCC lorsqu'aucun couple résistant n'est imposé.....	111
7.2	Comportement du CCC lorsqu'une résistance est imposée	113
CHAPITRE 8.....		116
CONCLUSION.....		116
8.1	Apport de ce mémoire à la théorie des mécanismes	116

8.2	Recommandations	117
8.3	Mot de la fin.....	118
	RÉFÉRENCES.....	119
	ANNEXE A.....	123
	GEORGE CONSTANTINESCO (1881-1965).....	123
	ANNEXE B.....	132
	EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES MATRICES DE TRANSMISSION DU MÉCANISME PENTAGONAL	132

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1 CONFIGURATION D'UNE MACHINE	2
FIGURE 2 PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT D'UNE TRANSMISSION HYDROSTATIQUE.....	4
FIGURE 3 DISPOSITIFS CONSTITUANT LE CCC.....	9
FIGURE 4 DIODE MÉCANIQUE : A) ROULEMENTS UNIDIRECTIONNELS B) CAMES.....	14
FIGURE 5 MEMBRURE 4 : A) MASSE OSCILLANTE B) VOLANT D'INERTIE	14
FIGURE 6 AUTRES CONFIGURATIONS ENVISAGEABLES DU CCC.....	15
FIGURE 7 CONFIGURATION DU CCC ÉTUDIÉE DANS LE CADRE DU MÉMOIRE	15
FIGURE 8 SÉQUENCE DE TRANSMISSION DE MOUVEMENT GÉNÉRALE DU CCC.....	16
FIGURE 9 ARRANGEMENT DU CCC EN CONSIDÉRANT LA TRIADE COMME STRUCTOMAT PASSIF	16
FIGURE 10 ARRANGEMENT DU CCC EN CONSIDÉRANT LA TÉTRADE COMME STRUCTOMAT PASSIF	17
FIGURE 11 A) MOTOÉLÉMENT B) (MOTO)DYADE C) (MOTO)TRIAD D) (MOTO)TÉTRADE	20
FIGURE 12 A) RRR B) RRT C) RTR D) TRT E) RTT	21
FIGURE 13 PRINCIPE DE FORMATION D'UN MÉCANISME	21
FIGURE 14 CHOIX DU MODÈLE STRUCTOMATIQUE POUR L'ÉTUDE DU CCC	24
FIGURE 15 MODÈLE A : A) SCHÉMA GRAPHE B) SCHÉMA BLOC	26
FIGURE 16 MISE EN ÉVIDENCE DES STRUCTOMATS DU MODÈLE A.....	26
FIGURE 17 MODÈLE I : A) MEMBRURE 6 EST ACTIVE B) MEMBRURE 8 EST ACTIVE.....	27
FIGURE 18 MODÈLE I : A) SCHÉMA GRAPHE B) SCHÉMA BLOC.....	28
FIGURE 19 MISE EN ÉVIDENCE DES STRUCTOMATS DU MODÈLE I.....	28
FIGURE 20 A) MOTOÉLÉMENT R B) DYADE RRR C) TRIADE RR-RR-RR	29
FIGURE 21 SCHÉMAS CINÉMATIQUES DES STRUCTOMATS DU CCC.....	33
FIGURE 22 ALGORITHME DE NEWTON-RAPHSON.....	36
FIGURE 23 PROCÉDURE POUR L'ANALYSE CINÉMATIQUE DES MODÈLES A ET I DU CCC.....	39
FIGURE 24 SCHÉMAS CINÉTOSTATIQUES DES STRUCTOMATS DU CCC.....	42
FIGURE 25 PROCÉDURE POUR L'ANALYSE CINÉTOSTATIQUE DES MODÈLES A ET I DU CCC.....	46
FIGURE 26 LIAISONS MOTRICES : A) DE ROTATION B) DE TRANSLATION	50
FIGURE 27 SCHÉMATISATION D'UN ÉLÉMENT K DU MÉCANISME	59
FIGURE 28 PROCÉDURE POUR L'OBTENTION DE LA MATRICE DE TRANSMISSION DE VITESSE V.....	71
FIGURE 29 PROCÉDURE POUR L'OBTENTION DES MATRICES D ET A.....	75
FIGURE 30 MATRICE STOCKANT LES ÉVALUATIONS DE LA FONCTION F REQUISES POUR.....	77
FIGURE 31 CALCUL DES MATRICES DE TRANSMISSION AVEC LES MODÈLES CINÉMATIQUES.....	83

FIGURE 32 PROCÉDURE POUR L'ANALYSE DYNAMIQUE D'UN MÉCANISME	85
FIGURE 33 PROCÉDURE POUR LA CONSTRUCTION DU SYSTÈME D'EDO DE PREMIER ORDRE.....	86
FIGURE 34 PROCÉDURE POUR LA RÉOLUTION DU SYSTÈME D'EDO DE PREMIER ORDRE	87
FIGURE 35 PROCÉDURE POUR L'ÉCRITURE DES FORCES GÉNÉRALISÉES	88
FIGURE 36 COUPLE MOTEUR CONSTANT EN FONCTION DE LA VITESSE ANGULAIRE.....	89
FIGURE 37 CARACTÉRISTIQUE MÉCANIQUE DU COUPLE D'UN MOTEUR ASYNCHRONE	89
FIGURE 38 DCL POUR LE CALCUL DU COUPLE GÉNÉRÉ AUX BRANCHES DE LA DIODE MÉCANIQUE.....	96
FIGURE 39 MÉCANISME BIELLE-MANIVELLE	97
FIGURE 40 SCHÉMA BLOC DU MÉCANISME BIELLE-MANIVELLE	98
FIGURE 41 ANGLE ET VITESSE ANGULAIRES DU MOTEUR.....	99
FIGURE 42 COUPLE MOTEUR.....	99
FIGURE 43 MÉCANISME PENTAGONAL R_A -RRR- R_A	100
FIGURE 44 SCHÉMA BLOC DU MÉCANISME PENTAGONAL.....	100
FIGURE 45 VARIATION DES FONCTIONS DE TRANSMISSIONS DE VITESSE DE L'ÉLÉMENT 3	103
FIGURE 46 VARIATION DES FONCTIONS DE TRANSMISSION D'ACCÉLÉRATION DE L'ÉLÉMENT 3.....	104
FIGURE 47 MODULE DE LA VITESSE AU CENTRE DE GRAVITÉ DE L'ÉLÉMENT 4	106
FIGURE 48 MODULE DE LA RÉACTION EN B	106
FIGURE 49 ANGLE ET VITESSE ANGULAIRE DU MOTEUR.....	107
FIGURE 50 ACCÉLÉRATION ANGULAIRE DU MOTEUR	107
FIGURE 51 CONFIGURATION UTILISÉE POUR L'ÉTUDE DYNAMIQUE DU CCC	109
FIGURE 52 VITESSE ANGULAIRE DES MEMBRURES 6 ET 8 DE LA DIODE MÉCANIQUE	111
FIGURE 53 VITESSE ANGULAIRE DE LA MANIVELLE	112
FIGURE 54 VARIATION DE LA VITESSE ANGULAIRE DU BALANCIER EN FONCTION DU TEMPS	114
FIGURE 55 GEORGE CONSTANTINESCO EN 1926	124
FIGURE 56 PUBLICATION DE LA REVUE <i>GRAPHIC</i> LE 16 JANVIER 1926.....	125
FIGURE 57 PREMIER MODÈLE DU CONVERTISSEUR DE COUPLE.....	128
FIGURE 58 CONSTANTINESCO TESTANT SON CONVERTISSEUR DE COUPLE EN 1923	129
FIGURE 59 MÉCANISME PENTAGONAL R_A -RRR- R_A	133

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 1 LISTE DES LIAISONS CONSTITUANT LE MODÈLE A	25
TABLEAU 2 LISTE DES ÉLÉMENTS CONSTITUANT LE MODÈLE A	25
TABLEAU 3 COEFFICIENTS DU TABLEAU BUTCHER POUR DORMAND-PRINCE D'ORDRES 4 ET 5	92
TABLEAU 4 PROPRIÉTÉS DES ÉLÉMENTS CONSTITUANT LE MÉCANISME BIELLE-MANIVELLE	98
TABLEAU 5 DONNÉES REQUISES POUR L'ANALYSE DYNAMIQUE DU MÉCANISME BIELLE-MANIVELLE ...	98
TABLEAU 6 PROPRIÉTÉS DES ÉLÉMENTS CONSTITUANT LE MÉCANISME PENTAGONAL	101
TABLEAU 7 DONNÉES REQUISES POUR L'ANALYSE DYNAMIQUE DU MÉCANISME PENTAGONAL	101
TABLEAU 8 PROPRIÉTÉS DES ÉLÉMENTS CONSTITUANT LE CCC	110
TABLEAU 9 DONNÉES REQUISES POUR L'ANALYSE DYNAMIQUE DU CCC	110

LISTE DES SYMBOLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviation

CCC Convertisseur de couple de Constantinesco

Alphabet latin

Symboles

a	Module de l'accélération
a_x	Projection de l'accélération selon l'axe des abscisses
a_y	Projection de l'accélération selon l'axe des ordonnées
c	Nombre de liaisons inférieures constituant un structomat
E	Nombre d'équations de position d'un structomat ou d'un mécanisme
g	Accélération gravitationnelle
G_k	Centre de gravité de l'élément k
I_{Gi}	Moment d'inertie de masse au centre de gravité de l'élément i
M	Degré de mobilité du mécanisme
m	Nombre d'éléments mobiles d'un structomat
m_i	Masse de l'élément i
N	Nombre de contours indépendants d'un structomat
n	Nombre de variables dépendantes associées à un structomat
PV	Puissance virtuelle
q	Coordonnée généralisée de position
\dot{q}	Coordonnée généralisée de vitesse
\ddot{q}	Coordonnée généralisée d'accélération
R	Liaison de rotation
s	Facteur de correction
tol	Tolérance
v_x	Projection de la vitesse selon l'axe des abscisses
v_y	Projection de la vitesse selon l'axe des ordonnées

x_k	Positionnement du centre de gravité de l'élément k selon l'axe des abscisses
x_s	Fonction de transmission de position de la s -ième variable dépendante
y_k	Positionnement du centre de gravité de l'élément k selon l'axe des ordonnées
Z	Zéropôle

Vecteurs ou matrices

a	Vecteur accélération des éléments à leur centre de gravité
A	Matrice de transmission d'accélération
B	Matrice des dérivées partielles de premier ordre des équations de position en fonction des coordonnées généralisées
B_p	Matrice des dérivées partielles de premier ordre de la matrice de transmission de position en fonction des coordonnées généralisées
B_q	Matrice des dérivées partielles de second ordre des équations de position en fonction des coordonnées généralisées
B_{q,p}	Matrice des dérivées partielles de second ordre de la matrice de transmission de position en fonction des coordonnées généralisées
C	Matrice des fonctions de transmission de vitesse
D	Matrice des fonctions de transmission d'accélération
E	Matrice diagonale contenant le vecteur des coordonnées généralisées de vitesse
F	Matrice des forces généralisées
H	Matrice contenant les coefficients multipliant les réactions d'un structomat
J	Matrice des efforts d'inertie d'un structomat
K	Matrice diagonale contenant les coordonnées généralisées de vitesse
L	Matrice des termes indépendants
\dot{L}	Matrice de la dérivée temporelle de la matrice des termes indépendants
M	Matrice d'inertie
P_k	Matrice élémentaire de transmission de position de l'élément k
P	Matrice de transmission de position
q	Vecteur des coordonnées généralisées de position
\dot{q}	Vecteur des coordonnées généralisées de vitesse

$\ddot{\mathbf{q}}$	Vecteur des coordonnées généralisées d'accélération
\mathbf{Q}	Matrice des efforts généralisés
\mathbf{R}	Vecteur contenant les réactions d'un structomat
\mathbf{S}	Matrice diagonale contenant la vitesse des variables dépendantes
\mathbf{T}	Vecteur contenant l'énergie cinétique des éléments d'un mécanisme
\mathbf{v}	Vecteur vitesse des éléments à leur centre de gravité
\mathbf{V}	Matrice de transmission de vitesse
\mathbf{W}	Matrice jacobienne (équation de position)
\mathbf{W}_p	Matrice jacobienne (matrice de transmission de position)
$\mathbf{W}_{x,p}$	Matrice des dérivées partielles de second ordre de la matrice de transmission de position en fonction des variables dépendantes
\mathbf{W}_x	Matrice des dérivées partielles de second ordre des équations de position en fonction des variables dépendantes
$\dot{\mathbf{W}}$	Matrice de la dérivée temporelle de la matrice jacobienne
\mathbf{x}	Vecteur des variables dépendantes de position d'un structomat ou d'un mécanisme
$\dot{\mathbf{x}}$	Vecteur des variables dépendantes de vitesse d'un structomat ou d'un mécanisme
$\ddot{\mathbf{x}}$	Vecteur des variables dépendantes d'acc. d'un structomat ou d'un mécanisme

Alphabet grec

Symboles

α_i	Accélération angulaire de l'élément i
φ_i	Variable dépendante de position associée à l'élément i
$\dot{\varphi}_i$	Variable dépendante de vitesse associée à l'élément i
$\ddot{\varphi}_i$	Variable dépendante d'accélération associée à l'élément i
ω_i	Vitesse angulaire de l'élément i

Vecteurs ou matrices

ϵ	Critère de convergence pour la méthode de Newton-Raphson
------------	--

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Mise en contexte

La dynamique des mécanismes est un sujet largement étudié dans la littérature de spécialité depuis maintenant plusieurs décennies. En fait, plusieurs méthodes ont été envisagées pour le calcul des paramètres cinématiques des moteurs, et ce, en tenant compte de plusieurs considérations : la géométrie du mécanisme, les paramètres inertiels des éléments, la gravité et les efforts externes appliqués en plus d'inclure l'aspect temporel. Les méthodes analytiques se sont montrées être inadaptées en raison de la complexité des expressions mathématiques qui en résultent. Ainsi, les méthodes graphiques ont été développées. Toutefois, dû à l'évolution de la technologie dans le domaine informatique, ces méthodes ont graduellement laissé leur place aux méthodes numériques.

1.2 Perspective historique

Dans le cadre de ce mémoire, une procédure numérique est proposée afin de faciliter l'intégration des équations de mouvement. Cette dernière est aussi appliquée pour l'étude du comportement dynamique d'un mécanisme : le convertisseur de couple de Constantinesco (CCC). Tel qu'introduit au chapitre 2, le CCC agit comme un système de transmission de puissance.

L'annexe A présente une perspective historique complète portant sur la vie scientifique de George Constantinesco (1881-1965) ainsi que les détails en lien avec le développement de son convertisseur de couple.

1.3 Systèmes de transmission de puissance usuels

Avant de détailler les objectifs de ce projet de maîtrise, il est important de définir ce qu'est un système de transmission de puissance et d'effectuer un bref aperçu des différents types de systèmes de transmission de puissance utilisés couramment dans l'industrie.

En ingénierie mécanique, un des problèmes fondamentaux est la manière de transmettre de l'énergie vers un récepteur quelconque. Les systèmes de transmission de puissance peuvent être définis comme étant les systèmes établissant une liaison entre une source motrice et un mécanisme de travail utilisant l'énergie mécanique produite par cette source pour effectuer un travail mécanique utile (Figure 1).

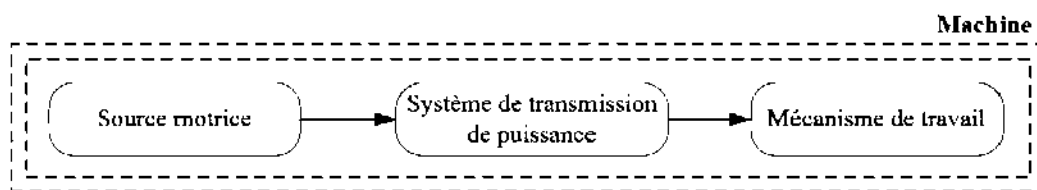


Figure 1 Configuration d'une machine

Ces systèmes sont répertoriés selon plusieurs familles. En fait, un système de transmission de puissance peut être dit mécanique, électrique ou à fluide sous pression.

Les deux sous-sections suivantes introduisent une brève description des systèmes de transmission de puissance mécaniques et à fluide sous pression : les systèmes électriques s'éloignant du concept général de ce mémoire. La section 1.3.3 offre un aperçu sur les fondements de la théorie de la sonlicité tel que spécifié par Constantinesco lui-même (voir annexe A).

1.3.1 Systèmes mécaniques de transmission de puissance

Les systèmes mécaniques de transmission de puissance font référence aux systèmes dont la conversion du couple moteur s'effectue à l'aide de composantes mécaniques telles que les trains d'engrenages, les poulies et les courroies, les chaînes et les roues

dentées, etc. Les systèmes mécaniques sont les plus anciens et les plus répandus. Ils peuvent être économiques dans certains cas, mais peuvent aussi devenir lourds, encombrants et coûteux dans d'autres.

Il existe des composantes entrant directement dans la conception des systèmes mécaniques de transmission de puissance : les embrayages, les freins et les limiteurs de couple. L'embrayage est un mécanisme permettant d'accoupler ou de désaccoupler deux parties d'une transmission. Il doit rendre possible le démarrage progressif du mécanisme de travail et garantir, à la fois, la transmission du couple sans glissement et une interruption rapide de la transmission de puissance. Le frein est un mécanisme permettant de ralentir ou d'empêcher temporairement un mouvement tandis que le limiteur de couple permet de protéger la transmission contre les surcharges. Sans entrer dans les détails, le point commun des mécanismes à friction est qu'ils utilisent la propriété de frottement ou d'adhérence des matériaux dans leur fonctionnement en éliminant le surplus d'énergie par transformation en chaleur (modulation de l'énergie).

Par exemple, pour adapter les différentes utilisations d'une automobile aux caractéristiques du moteur thermique, la transmission de puissance peut comporter un embrayage, un réducteur à plusieurs rapports (boîte de vitesse) et un différentiel.

1.3.2 Systèmes à fluide sous pression de transmission de puissance

Lorsqu'il est mentionné des systèmes de transmission de puissance à fluide sous pression, il est plutôt question des systèmes hydrauliques (liquide sous pression) et des systèmes pneumatiques (gaz sous pression). Pour cette section, seulement les principaux systèmes hydrauliques de transmission de puissance seront abordés.

1.3.2.1 Transmission hydrostatique

Le schéma de principe d'une transmission hydraulique est donné à la figure 2 [1].

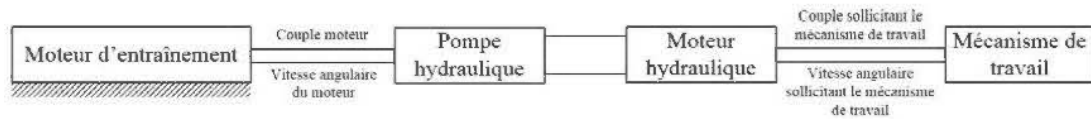


Figure 2 Principe de fonctionnement d'une transmission hydrostatique

Brièvement, une transmission hydrostatique est composée d'une pompe et d'un moteur hydraulique où le fluide sous pression est communiqué à ces deux composantes à l'aide de tuyaux, ce qui facilite leur aménagement respectif.

Ainsi, la pompe hydraulique transforme l'énergie mécanique qui lui est acheminée par un moteur d'entraînement en énergie fluide. Un moteur hydraulique reçoit cette énergie fluide fournie par la pompe et la transforme à nouveau en énergie mécanique afin que le mécanisme de travail soit en mesure de l'utiliser.

Lorsque la pompe hydraulique et/ou le moteur hydraulique sont caractérisés par une cylindrée variable, il est possible de générer une infinité de vitesses de rotation de l'arbre du moteur hydraulique ainsi qu'une large gamme de couples, et ce, même si des charges sollicitant l'arbre du moteur hydraulique fluctuent. Dans ce cas, la transmission hydrostatique est dite variable.

Dans ce genre de transmission, le débit de fluide circule de la pompe vers le réservoir d'une manière analogue au courant électrique continu.

Ce type de transmission a déjà conquis un vaste domaine d'utilisation étant donné qu'il détient une puissance massique très élevée (inertie, encombrement et poids réduits). Ces transmissions sont couramment utilisées pour le déplacement d'engins pour une large plage de puissance (de la tondeuse à gazon aux engins de travaux publics).

1.3.2.2 Transmission hydrocinétique

Dans une transmission hydrocinétique, c'est l'énergie cinétique du fluide qui réalise la transmission de puissance : il n'y a aucun lien mécanique solide qui lie directement les composantes [2].

Les coupleurs hydrocinétiques sont des turbotransmissions qui transmettent la puissance mécanique entre l'arbre d'un moteur et celui d'un mécanisme de travail par l'intermédiaire de la puissance hydraulique d'un fluide. Ils sont composés de deux roues à aubes disposées face à face dans un couvercle : l'impulseur et la turbine. L'impulseur reçoit l'énergie mécanique du carter puisque ce dernier est solidaire à l'arbre moteur. L'impulseur étant en rotation, en raison de la force centrifuge, le fluide est dirigé vers l'extérieur lorsqu'il frappe les aubes de la turbine et y transfère son énergie fluide. Ces dernières sont disposées de façon à ce que le fluide soit redirigé vers l'intérieur de l'impulseur. Ce mouvement du fluide permet de garantir le mouvement de la turbine. Par contre, la vitesse de rotation de la turbine est légèrement inférieure à celle de l'impulseur, et ce, dû aux pertes énergétiques. Les coupleurs hydrocinétiques agissent comme des accouplements hydrauliques et ne permettent pas la conversion du couple.

Pour faire varier le couple entre la sortie (turbine) et l'entrée (impulseur), une troisième composante est insérée entre les deux précédentes : le réacteur. Cette composante permet de réorienter le fluide en provenance de la turbine vers l'extérieur de l'impulseur afin d'améliorer l'efficacité du système : le parcours du fluide est donc différent que celui emprunté pour un coupleur hydrocinétique. La pression du fluide sur les aubes du réacteur entraîne un effet de bouchon où le fluide est comprimé, ce qui entraîne une augmentation du couple en réduisant la vitesse de rotation de la turbine. Ce type de système correspond au convertisseur hydrocinétique de couple. Un embrayage permet de raccorder l'impulseur à l'arbre de la turbine lorsque la vitesse de rotation du moteur devient suffisamment grande.

Les convertisseurs hydrocinétiques de couple sont souvent utilisés aujourd'hui dans les boîtes de vitesses automatiques.

1.3.3 Systèmes soniques de transmission de puissance

La théorie de la sonicité a été introduite et exploitée par le scientifique roumain George Constantinesco [3]. Les systèmes soniques transmettent l'énergie d'un point initial vers un point final par le biais de vibrations longitudinales, et ce, tant dans des milieux solides que liquides. Ainsi, les systèmes de transmission de puissance dits soniques se basent sur la propagation d'ondes pour acheminer la puissance. Le terme sonicité découle de ce principe et peut être défini comme étant la science utilisant les propriétés élastiques de la matière pour permettre la transmission de la puissance. Ainsi, puisque la puissance se transmet sous forme ondulatoire, la sonicité prône le fait que les grandeurs physiques du système, par exemple le volume, la pression, les réactions, le couple, etc. varient de façon périodique. Du point de vue de la transmission de puissance dans des milieux liquides, cette théorie s'oppose à celles de l'hydraulique, qui elle, se base sur le fait que les liquides sont considérés comme étant pratiquement incompressibles et qui circulent dans les conduites sous la forme d'un débit volumique constant.

La théorie de la sonicité fait référence au fait qu'une puissance issue d'un arbre en rotation ne peut être transmise à un second arbre que par le biais d'impulsions intermittentes (mouvement oscillatoire ou vibrations) [4] comme c'est le cas pour une paire d'engrenages où la pression transmise par une dent est nulle au départ, atteint un maximum lors du contact et redevient nulle par la suite.

La théorie de la sonicité est utilisée pour approfondir le concept de convertisseur de couple établi par Constantinesco. La propagation de la puissance est donc étudiée à travers un système de corps solides articulés.

1.4 Problématique

Dans cette section, quelques inconvénients relatifs aux systèmes de transmission de puissance actuels sont évoqués dans le but d'élaborer des objectifs à la section suivante.

- Les transmissions mécaniques usuelles consomment une plus grande puissance lors du démarrage afin de permettre la mise en mouvement des éléments du mécanisme de travail. Par la suite, si aucun effort extérieur soudain ne se manifeste, la puissance fournie par le moteur au système de transmission de puissance se situe au voisinage de la puissance nominale. Ainsi, la quantité d'énergie utilisée pour la phase de démarrage est largement supérieure à celle correspondant au fonctionnement nominal des cycles dynamiques subséquents, ce qui fait en sorte que le moteur est « surdimensionné » seulement pour garantir les besoins relatifs au démarrage.
- Les transmissions de puissance usuelles ne détiennent qu'un seul degré de mobilité (mouvement indépendant d'une membrure ou d'un groupe de membrures). Ainsi, lorsque des charges soudaines et anormalement grandes sont perçues, ceci pourrait résulter en l'arrêt complet du système.
- La modulation de l'énergie cinétique transmise par la source motrice s'effectue par dissipation d'énergie.

La discussion sur le principe de fonctionnement dynamique du convertisseur de couple de Constantinesco à la section 2.2 explique comment ce mécanisme est adapté pour pallier à ces importunités.

1.5 Objectifs

Avec son convertisseur de couple, Constantinesco a conçu un modèle novateur de transmission mécanique découlant de sa théorie de la sonicité. Toutefois, par manque d'opportunisme et/ou tout simplement par manque de soutien financier, ce projet n'a jamais abouti et ne semble plus être convoité par l'industrie d'aujourd'hui, et ce, même

si des résultats convaincants avaient été dévoilés à la communauté scientifique du début du vingtième siècle.

En consultant les brevets d'invention et les écrits relatifs au CCC tels que [4-6], seulement le fonctionnement général du convertisseur y est abordé en ne faisant que quelques allusions aux détails mathématiques appuyant ce qui avait été vérifié expérimentalement.

Ce projet de maîtrise vise à :

1. Introduire, comprendre et expliquer le comportement dynamique du CCC lorsque ce dernier est soumis à différents scénarios de sollicitation.
2. Modéliser le comportement dynamique du CCC dans le but de corroborer les avancements apportés par Constantinesco.
3. Proposer une procédure novatrice permettant de faciliter l'intégration des équations de mouvement des mécanismes à membrures détenant plusieurs degrés de mobilité en utilisant conjointement les notions de structomatique des mécanismes et de matrices de transmission.

1.6 Structure du mémoire

Outre le chapitre d'introduction, le mémoire est articulé autour de six autres chapitres dont les principaux thèmes sont les suivants : principe de fonctionnement du CCC et ces configurations envisageables (chapitre 2), les concepts théoriques des analyses structomatique, cinématique et cinétostatique des mécanismes ainsi que leurs applications au CCC (chapitre 3), le détail des procédures permettant l'écriture des équations de mouvement sous forme matricielle d'un mécanisme (chapitre 4) et de leur intégration (chapitre 5), la vérification de la procédure proposée (chapitre 6), la présentation et l'analyse des résultats issus de la modélisation dynamique du CCC (chapitre 7) ainsi qu'une conclusion et des recommandations (chapitre 8).

CHAPITRE 2

LE CONVERTISSEUR DE COUPLE DE CONSTANTINESCO

Le convertisseur de couple de Constantinesco est un mécanisme constitué uniquement de membrures. Il est aussi un système de transmission de puissance puisqu'il transmet la puissance développée par un moteur à l'arbre d'entrée vers un arbre de sortie sous forme d'un couple et d'une vitesse angulaire. Le convertisseur est constitué de deux dispositifs distincts : un mécanisme pentagonal et une diode mécanique. Une configuration envisageable du CCC est illustrée à la figure 3.

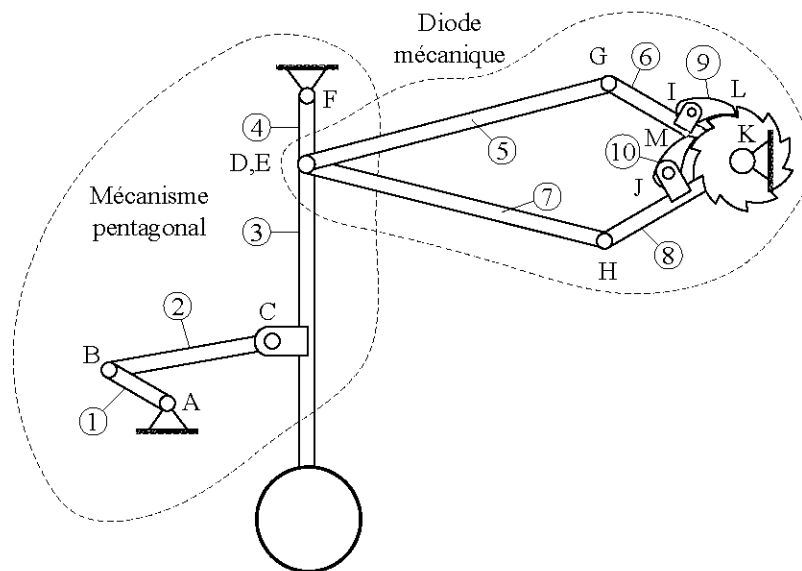


Figure 3 Dispositifs constituant le CCC

La géométrie du convertisseur de couple de Constantinesco ainsi que le comportement dynamique de ce dernier sont abordés aux sections 2.1 et 2.2. De plus, d'autres configurations envisageables du convertisseur de couple de Constantinesco, autre que celle présentée à la figure 3, sont explicitées à la section 2.3.

2.1 Géométrie du convertisseur de couple de Constantinesco

2.1.1 Mécanisme pentagonal

Le mécanisme pentagonal est un mécanisme à membrures détenant deux degrés de mobilité. Il est constitué d'une manivelle 1, d'une bielle 2, d'un balancier 3 et d'une membrure 4. La manivelle est liée à l'arbre moteur par la liaison A et correspond du même coup à l'élément actif. Cette manivelle est alimentée par un certain couple transmis par le moteur. Ce couple, dépendamment de la configuration du moteur choisi, peut être constant ou bien être fonction de sa vitesse angulaire ou de son déplacement angulaire. La bielle est connectée à la manivelle par la liaison B et au balancier par la liaison C. La bielle, entraînée par la manivelle, introduit un mouvement oscillatoire au balancier 3 qui, pour l'arrangement de la figure 3, est muni d'une masse à son extrémité rendant son comportement analogue à un pendule. Ce balancier est connecté à la membrure 4 par le biais de la liaison E et à la diode mécanique grâce à la liaison complexe D (à la figure 3, ces deux liaisons sont superposées). La membrure 4 est attachée à la base par la liaison F.

Le mécanisme pentagonal a pour but de transmettre l'énergie développée par le moteur vers la diode mécanique par l'intermédiaire du mouvement oscillatoire du balancier.

2.1.2 Diode mécanique

L'appellation diode mécanique est utilisée pour définir tout mécanisme permettant la conversion d'un mouvement oscillatoire en un mouvement de rotation unidirectionnel (ou de translation), et ce, par analogie à la diode électronique qui permet le passage du courant dans une direction unique [7].

Contrairement au mécanisme pentagonal qui détient deux degrés de mobilité, la diode mécanique est passive et est constituée de deux branches formées par les paires d'éléments 5-6 et 7-8 respectivement. De façon générale, lorsque le mouvement du balancier implique que la liaison D s'éloigne de la liaison H, les membrures de la diode mécanique se ferment, c'est-à-dire que la membrure 6 subit un mouvement dans le sens

antihoraire et que la membrure 8 sera plutôt en mouvement dans le sens horaire. Le contraire se produit lorsque la liaison D se rapproche de la liaison H. Ce comportement de la diode mécanique est valide lorsque l'arbre de sortie, assimilé à la liaison complexe K, est maintenu en mouvement. Le cas où un couple résistant sollicite l'arbre de sortie sera considéré à la section suivante. Ainsi, peu importe le mouvement du balancier, une des deux branches de la diode mécanique entraînera l'arbre de sortie dans le sens de rotation désirée garantissant ainsi un mouvement de rotation continu. À la figure 3, un dispositif à cliquets (éléments 9 et 10 sur la figure 3) permet de garantir le mouvement unidirectionnel de l'arbre de sortie.

2.2 Principe de fonctionnement du CCC

Le principe de fonctionnement du CCC, tel qu'avancé par Constantinesco lui-même dans quelques-uns de ses écrits [4-6] et rapporté par son fils Ian Constantinesco [8] et d'autres scientifiques [9, 10], est introduit dans cette section.

Pour expliquer le fonctionnement dynamique du convertisseur de couple de Constantinesco, supposons que la manivelle (élément 1) est sollicitée par un couple moteur constant et que l'arbre de sortie (liaison H) entraîne un mécanisme de travail assimilable à une certaine résistance (couple résistant constant). Si la résistance est inchangée, le balancier (élément 3) se verra osciller à une certaine amplitude.

Si aucune résistance n'est appliquée à l'arbre de sortie et que le moteur fournit un couple constant (aucune limitation de la vitesse angulaire, voir la figure 36) à la manivelle, le moteur accélérera le balancier continuellement de sorte que la vitesse angulaire de l'arbre de sortie augmentera indéfiniment. Lorsqu'une résistance est appliquée à l'arbre de sortie, la manivelle ralentira jusqu'à une certaine vitesse angulaire. Dans ces conditions, l'arbre de sortie va effectuer un certain travail qui se doit d'être fourni par le moteur. Le moteur ralentira donc jusqu'à développer la puissance consommée à l'arbre de sortie.

Si l'arbre de sortie est immobile, le travail effectué par ce dernier est aussi nul. Puisque le moteur fournit un couple constant, l'énergie est acheminée au balancier afin d'accroître sa fréquence d'oscillation : ce dernier accumule l'énergie fournie par le moteur sous forme d'énergie cinétique. Plus la fréquence d'oscillation du balancier est grande, plus les modules des réactions engendrées aux liaisons G et I de la diode mécanique sont élevées permettant ainsi, après un certain temps d'accumulation, de vaincre de nouveau la résistance.

Contrairement aux boîtes de vitesse des véhicules et leurs différents ratios de transmission prédéfinis, il suffit que la résistance augmente ou diminue pour que le balancier ajuste automatiquement le couple transmis à l'arbre de sortie.

Dans le cas où la résistance est diminuée, l'arbre de sortie se verra être mis en mouvement. À ce moment, une certaine puissance est consommée à l'arbre de sortie pour maintenir le mécanisme de travail en opération. Cet apport en puissance va automatiquement résulter en une diminution de la vitesse angulaire du moteur jusqu'à atteindre une vitesse angulaire où la puissance développée est la même que celle consommée à l'arbre de sortie. Si la résistance devient nulle à l'arbre de sortie, la vitesse angulaire du moteur augmentera et accélérera le balancier indéfiniment. Pour des valeurs particulières de la résistance à l'arbre de sortie, le moteur tournera à une vitesse angulaire minimale. À ce moment, toute variation (augmentation ou diminution) de la résistance résultera en une augmentation de la vitesse angulaire du moteur.

Il est donc évident que le comportement dynamique du convertisseur de couple de Constantinesco dépend du couple pouvant être généré à la diode mécanique afin de vaincre la résistance à l'arbre de sortie.

Constantinesco avança le fait qu'une fois que la vitesse angulaire du moteur avoisine la vitesse angulaire minimale pour une certaine résistance, la variation de la vitesse angulaire du moteur est très faible, et ce, même pour des variations substantielles de la

résistance. Il indiqua même qu'il est possible de concevoir un convertisseur de couple où la vitesse angulaire du moteur ne variera pas au-delà de 10 % de cette vitesse angulaire minimale.

Ainsi, le CCC est une transmission mécanique à ratios variables continus où le ratio entre l'arbre de sortie et l'arbre moteur est lié à la fréquence du mouvement oscillatoire du balancier. Son application dans le domaine de l'automobile, comparativement aux boîtes de vitesse, n'utilise aucun train d'engrenages ni embrayage, ce qui a pour effet de réduire le nombre de composantes et donc le poids. De plus, en raison de sa capacité d'accumulation, le moteur peut être dimensionné à la puissance nominale.

Dans ce mémoire, une procédure dynamique pour l'étude du convertisseur de couple de Constantinesco est élaborée (section 5.5). Connaissant le comportement dynamique du convertisseur, il sera possible de confirmer ou d'infirmer les avancements de Constantinesco mentionnés précédemment à l'aide de simulations dynamiques. À noter que les membrures du CCC sont considérées comme étant rigides.

2.3 Discussions sur les différentes configurations envisageables du CCC

En 1925, George Constantinesco déposa un brevet d'invention concernant les méthodes et les dispositifs permettant de transmettre la puissance d'un moteur (ayant la capacité de développer un couple limité) vers un ou plusieurs arbres de sortie [6] où il y exposa plusieurs configurations envisageables, dont celle présentée précédemment à la figure 3.

Pour garantir le mouvement unidirectionnel de l'arbre de sortie, la diode mécanique peut être aussi munie de roulements unidirectionnels montés directement sur l'arbre de sortie (figure 4a) ou à l'aide de cames et d'un disque (figure 4b).

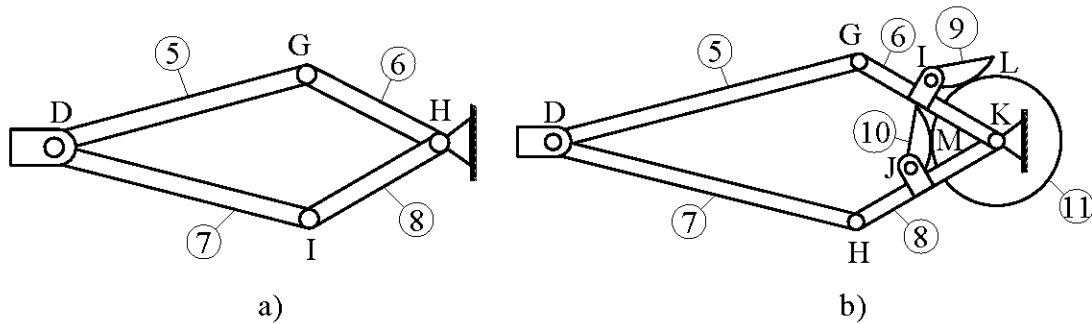


Figure 4 Diode mécanique : a) Roulements unidirectionnels b) Cames

Dans ce mémoire, l'étude dynamique se limite au cas où des roulements unidirectionnels sont montés sur l'arbre de sortie.

Tel qu'abordé à la section précédente, dans certains cas, l'énergie fournie au mécanisme pentagonal par le moteur est stockée dans un élément caractérisé par une forte inertie. Ce dernier peut être une masse oscillante ou un volant d'inertie. Au lieu que cet élément soit associé au balancier comme ce fût le cas pour la masse oscillante de la figure 3, il est possible d'attribuer l'élément de forte inertie avec la membrure 4 tel qu'illustré à la figure 5.

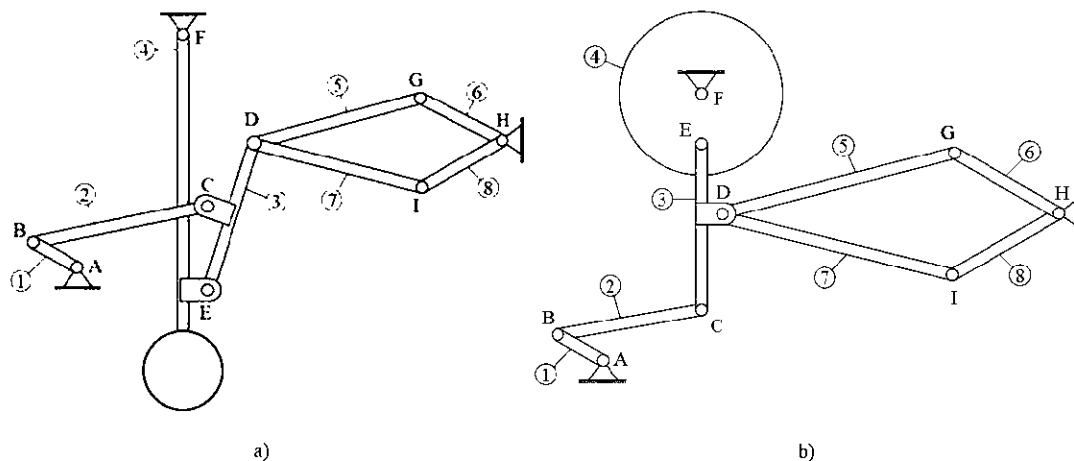


Figure 5 Membrane 4 : a) masse oscillante b) volant d'inertie

D'autres configurations envisageables impliquent l'utilisation d'un volant d'inertie et que la diode mécanique soit connectée à l'extrémité du balancier. Deux de ces configurations sont illustrées à la figure 6

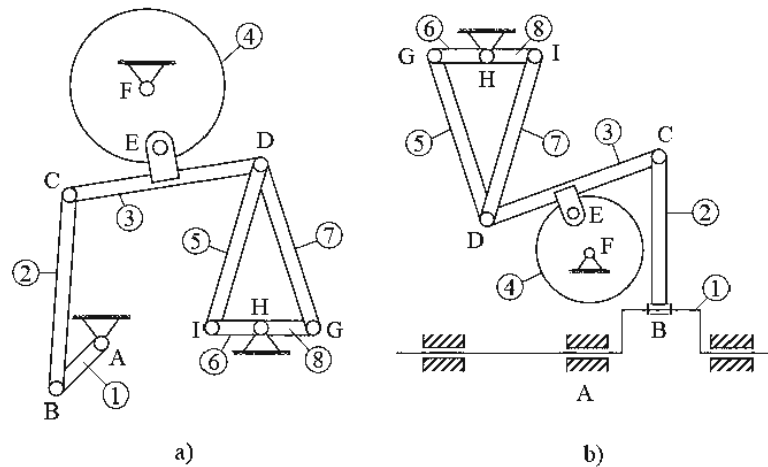


Figure 6 Autres configurations envisageables du CCC

Par contre, Constantinesco suggéra que la configuration optimale est celle où la diode mécanique est connectée à mi-chemin entre les liaisons E et C et qu'une masse oscillante soit joint à l'extrémité du balancier.

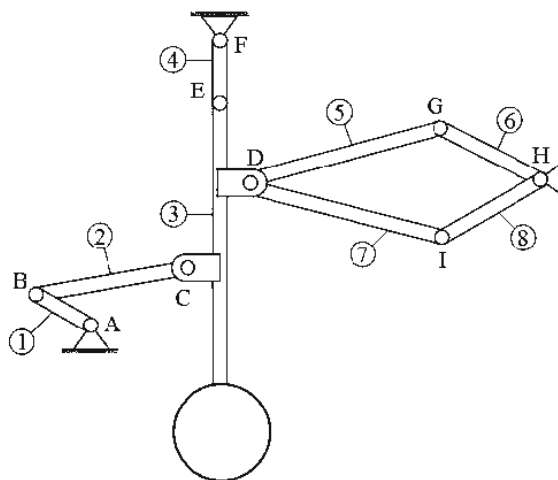


Figure 7 Configuration du CCC étudiée dans le cadre du mémoire

La configuration du convertisseur de couple de Constantinesco de la figure 7 est étudiée dans les chapitres suivants.

Plusieurs autres arrangements du CCC pourraient être considérés. En fait, le schéma bloc de la figure 8 peut être considéré comme modèle général de la transmission de mouvement du CCC (davantage de détails sont fournis au chapitre 3).

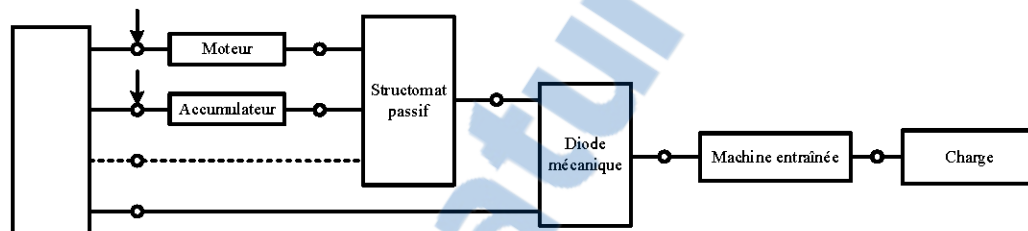


Figure 8 Séquence de transmission de mouvement générale du CCC

Brièvement, les éléments 1 et 4 de la figure 7 correspondent respectivement au moteur et à l'accumulateur. Les éléments 2 et 3 forment un structomat passif appelé dyade (voir figure 11b). Toutefois, la triade et la tétrade (figure 11) pourraient être utilisées en tant que structomat passif tel qu'illustré aux figures 9 et 10.

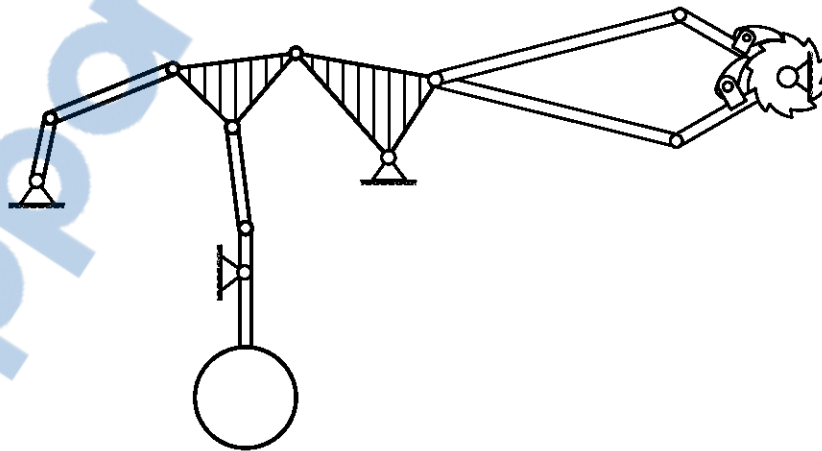


Figure 9 Arrangement du CCC en considérant la triade comme structomat passif

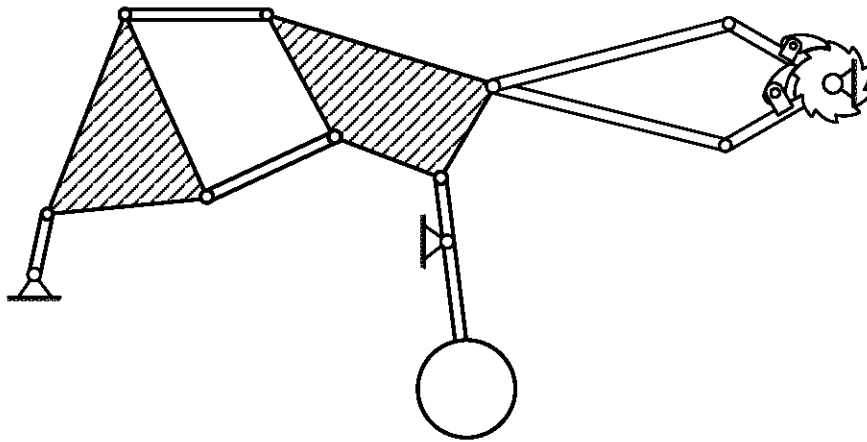


Figure 10 Arrangement du CCC en considérant la tétrade comme structomat passif

Toutefois, ces arrangements sont uniquement explicités pour compléter le discours. Ils ne seront pas investigués aux chapitres suivants.

CHAPITRE 3

BASES THÉORIQUES DES ANALYSES STRUCTOMATIQUE, CINÉMATIQUE ET CINÉTOSTATIQUE DES MÉCANISMES ET APPLICATION AU CCC

Dans ce chapitre, les études structomatique, cinématique et cinétostatique des mécanismes à membrures sont introduites. L'analyse structomatique est préalable aux études cinématique et cinétostatique. Cette dernière permet de séparer en groupements, appelés structomats, les éléments d'un mécanisme à membrures. À partir de la morphologie de chacun de ces structomats, des modèles cinématiques et cinétostatiques peuvent être déduits. Chacun de ces modèles peut ensuite être implémenté dans un logiciel tel Matlab®. Ces routines informatiques constituent donc une librairie pouvant être utilisée dans le but d'étudier une multitude de mécanismes à membrures. En fait, ces structomats permettent d'étudier un mécanisme par morceaux et de combiner les résultats pour analyser le mécanisme en entier.

Par analyse cinématique, il est entendu le calcul de la position, vitesse et accélération de l'ensemble des liaisons et des éléments constituant un mécanisme à membrures. L'analyse cinétostatique fait suite à l'analyse cinématique et permet d'obtenir le module des réactions de chacune des liaisons du mécanisme en plus du ou des modules des forces ou couples moteurs nécessaires à son mouvement.

Les analyses structomatique, cinématique et cinétostatique seront abordées successivement aux sections suivantes. Celles-ci sont organisées en débutant par les concepts théoriques suivis de l'application de ces concepts au CCC. Certains travaux font aussi référence à la structomatique comme méthode d'analyse des mécanismes [11-15].

3.1 Analyse structomatique

3.1.1 Concepts théoriques concernant l'analyse structomatique

L'analyse structomatique prend naissance dans l'étude des chaînes cinématiques. La structure d'un mécanisme, c'est-à-dire les connectivités entre ces éléments et ces liaisons, peut être représentée schématiquement en utilisant une seule chaîne cinématique fermée : le schéma graphe. Mruthyunjaya résume les différentes techniques de schématisation éléments/liaisons dans une revue de synthèse [16]. La structomatique prône le fait que ce schéma graphe peut être subdivisée en une succession de chaînes cinématiques ouvertes plus simples appelées structomats. L'ordre d'apparition de ces structomats, c'est-à-dire la manière dont les chaînes cinématiques ouvertes sont connectées les unes aux autres pour former le schéma graphe, permet de former différents mécanismes. Cet ordre d'apparition des structomats indique la séquence de transmission du mouvement et est schématisé à l'aide du schéma bloc (schéma analogue à celui de la figure 8). En fait, chacun de ces structomats détient une morphologie unique et peut être retrouvé dans la constitution de plusieurs mécanismes. Le terme structomatique et les théories utilisées dans le cadre de ce mémoire ont été introduits par Éné [17].

Assur a été le premier, au début du vingtième siècle, à démontrer que la structure d'un mécanisme peut être décomposée en certains groupements uniques appelés groupements d'Assur. Chacun de ces groupements correspond à des chaînes cinématiques caractérisées par un degré de mobilité nul. Plusieurs travaux font référence à l'étude des groupements d'Assur, par exemple [18-23]. Dans la littérature traitant des groupements d'Assur, la formation des mécanismes est limitée à la combinaison des groupements d'Assur à un ou plusieurs éléments moteurs de rotation (manivelle) ou de translation. Dans le vocabulaire de la structomatique, ces groupements d'Assur correspondent à des structomats dits passifs.

Les travaux des chercheurs Duca et Simionescu [24] ont permis de déceler certaines chaînes cinématiques ayant un degré de mobilité supérieur à zéro pouvant tout autant

faire partie de la constitution des mécanismes que les groupements d'Assur. Par opposition aux structomats passifs, ces chaînes cinématiques font référence aux structomats actifs. L'apparition de ces structomats actifs permet d'analyser une plus large gamme de mécanismes à membrures.

Depuis maintenant plusieurs décennies, l'étude de ces chaînes cinématiques n'a pas cessé d'évoluer. En plus d'étudier l'isomorphisme de ces chaînes [25], plusieurs méthodes de représentations ont été introduites par certains chercheurs. Il suffit de penser, entre autres, à la théorie des graphes [26], à la notation simplifiée de Franke [27] ou aux notions combinées de chiffres multipolaires et de matrice d'adjacence [28].

Pour l'étude des mécanismes à membrures, les structomats les plus communs ne sont habituellement constitués que de quelques éléments mobiles tel que présentés à la figure 11 [29].

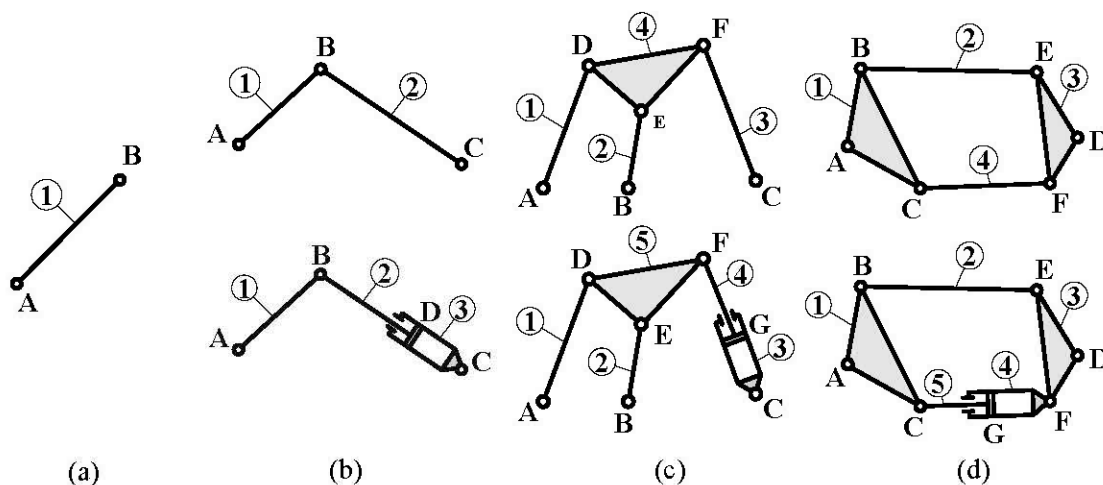


Figure 11 a) motoélément b) (moto)dyade c) (moto)triade d) (moto)tétrade

Il existe plusieurs configurations possibles de chacun de ces structomats. En fait, chacune des liaisons inférieures constituant un structomat peut être soit de rotation R soit de translation T. De cette façon, il est possible de générer cinq structomats non isomorphes associés à la dyade [17] vingt pour la triade [30] et quatorze pour la tétrade [31]. Ceux relatifs à la dyade sont présentés à la figure 12.

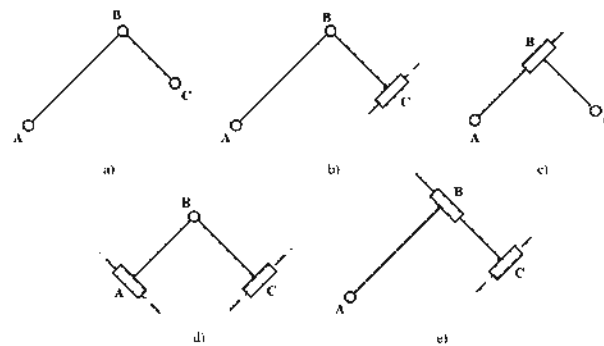


Figure 12 a) RRR b) RRT c) RTR d) TRT e) RTT

Tel que mentionné précédemment, l'ordre d'apparition de ces structomats indique la séquence de transmission du mouvement. Cette séquence de transmission débute assurément par la base (liaisons fixes du mécanisme) appelée zéropôle. Le premier structomat constituant un mécanisme à membrures détenant M degrés de mobilité est nécessairement actif. Le mouvement engendré par ce structomat actif est transmis aux autres structomats qui peuvent être soit actifs ou passifs. Ce principe général de formation des mécanismes est illustré à la figure 13.

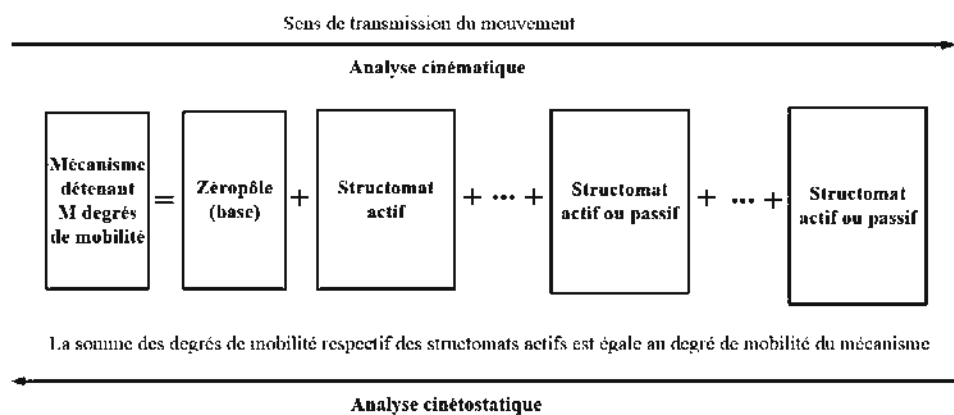


Figure 13 Principe de formation d'un mécanisme

Comme il en sera question dans les sections suivantes, l'avantage marqué de la subdivision d'un mécanisme en structomats est la réduction, en premier lieu, du nombre d'équations non linéaires à résoudre simultanément (et généralement de leur

complexité) pour le calcul des paramètres cinématiques et, en deuxième lieu, du nombre d'équations linéaires permettant le calcul des réactions dans les liaisons actives et passives.

L'analyse structomatique d'un mécanisme à membrures se fait en respectant les étapes suivantes :

- 1) Faire un schéma cinématique du mécanisme en numérotant chacun des éléments et en attribuant une lettre à chacune des liaisons.
- 2) Dresser une liste des connectivités, c'est-à-dire une liste des liaisons tout en spécifiant quels sont les éléments formant ces liaisons. De plus, le type de liaisons est spécifié pour chacune d'entre elles, c'est-à-dire R (rotation), T (translation), RT (supérieure) ou RR (complexe).
- 3) Dresser une liste des éléments en spécifiant quelles sont les liaisons relatives à chacun d'entre eux. Cette liste met en évidence la décomposition des liaisons supérieures et complexes. De plus, l'ordre de chacun des éléments doit être spécifié.
- 4) Tracer le schéma graphe en agençant tous les éléments présents dans la liste établie à l'étape 3. De cette façon, il est possible de visualiser comment les éléments sont connectés entre eux.
- 5) À partir du schéma graphe, dégager les différents structomats constituant le mécanisme et en déduire le schéma bloc. Les structomats constituant un mécanisme à membrures sont obtenus par essai et erreur à partir du schéma graphe. Cependant, la certitude est qu'une fois les liaisons motrices établies, la décomposition du mécanisme en structomats est unique.
- 6) Écrire la formule structomatique, c'est-à-dire la séquence de transmission du mouvement, à partir du schéma bloc. Le premier structomat est toujours le zéropôle et ce dernier est assurément connecté à au moins un structomat actif.

Ces étapes seront détaillées et appliquées lors de l'étude structomatique du convertisseur de couple de Constantinesco abordée à la sous-section suivante.

3.1.2 *Étude structomatique du convertisseur de couple de Constantinesco*

Le convertisseur de couple est particulier au niveau de sa structure. En fait, pour une majorité de mécanismes à membrures, leur structure est permanente (les structomats dictant la séquence de mouvement sont inchangés) et ne dépend pas de la variation de grandeurs physiques des éléments les constituant. Dans le cas du CCC, sa structomatique est qualifiée d'évolutive ou changeante, c'est-à-dire qu'à un certain moment, le mouvement transmis par le moteur aux éléments du convertisseur est régi par un certain modèle structomatique tandis qu'à un autre moment, en fonction du couple généré à la diode mécanique, la séquence de mouvement sera dictée par un second modèle structomatique.

En fait, tel que mentionné à la section 2.2, si le couple généré par une des deux branches de la diode mécanique est supérieur au couple résistant, l'arbre sera mis ou maintenu en mouvement par la diode mécanique. À ce moment, l'énergie fournie par le moteur est transmise majoritairement à l'arbre de sortie, réduisant ainsi l'amplitude du pendule, et le CCC détient deux degrés de mobilité. Le modèle structomatique utilisé pour modéliser le mouvement du convertisseur pour cette situation sera désigné comme étant le modèle A (Arbre de sortie). Dans le cas où le couple résistant ne peut pas être vaincu, l'énergie transmise par le moteur est cédée majoritairement au pendule (élément de grande inertie). Dans ce cas, seulement une branche de la diode mécanique est active à la fois et tente ainsi de vaincre le couple résistant. La branche active est celle ayant le même sens de rotation que celui alloué par les roulements unidirectionnels. Dépendamment de la branche active, soit la liaison G ou la liaison I du convertisseur de couple de Constantinesco (voir figure 17) est fixe résultant au fait que ce dernier détient un seul degré de mobilité. Pour étudier ce cas, le modèle structomatique I (Inertie) sera plutôt employé.

Le principe de fonctionnement du convertisseur de couple de Constantinesco ainsi que les conditions de sélection du modèle structomatique adéquat est résumé à la figure 14.

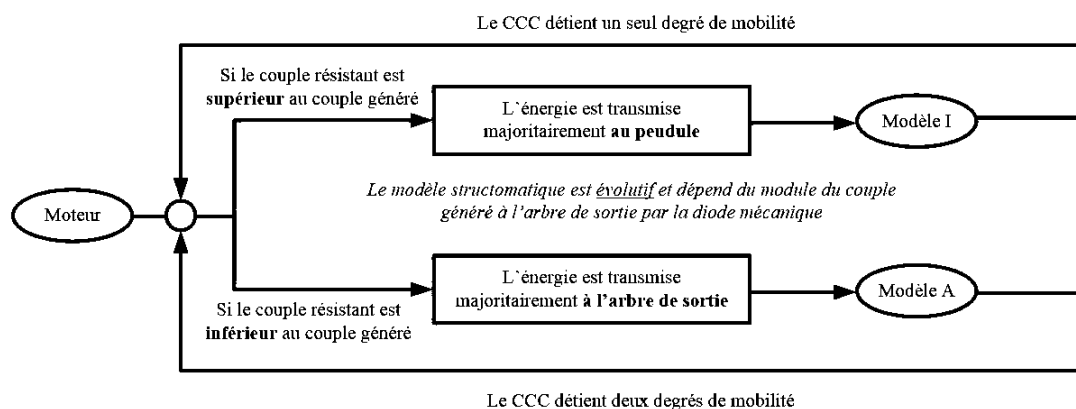


Figure 14 Choix du modèle structomatique pour l'étude du CCC

Les deux modèles structomatiques pouvant définir le convertisseur de couple de Constantinesco sont abordés aux sous-sections suivantes.

3.1.2.1 *Modèle A : lorsque le couple résistant est vaincu*

Lorsque le couple résistant à l'arbre de sortie est vaincu, le convertisseur de couple de Constantinesco détient deux degrés de mobilité et son schéma cinématique est identique à celui présenté à la figure 7. Le second moteur, relatif au second degré de mobilité, est considéré à la liaison F. Puisqu'il n'y a physiquement qu'un seul moteur qui transmet de l'énergie à la diode mécanique, le second moteur pourrait être considéré à n'importe quelle autre liaison. Ceci influencerait seulement sur les types de structomats trouvés pour définir le mouvement du mécanisme (voir l'étape 4 de la procédure pour effectuer l'analyse structomatique). Le deuxième degré de mobilité permet l'accumulation de l'énergie lorsque la diode mécanique est bloquée.

Cette configuration est caractérisée par la présence de deux liaisons complexes d'ordre 2 (où trois éléments y sont connectés) : D et H. Pour réaliser la liste des liaisons, chacune de ces liaisons complexes sera décomposée en deux liaisons inférieures.

Ainsi, le convertisseur de couple de Constantinesco compte 11 liaisons inférieures et 8 éléments dont les listes respectives sont présentées aux tableaux 1 et 2.

Tableau 1 Liste des liaisons constituant le modèle A

Liaison	Éléments	Type de liaisons
A	(0,1)	R
B	(1,2)	R
C	(2,3)	R
D ₁	(3,5)	R
D ₂	(3,7)	R
E	(3,4)	R
F	(0,4)	R
G	(5,6)	R
H ₁	(0,6)	R
H ₂	(0,8)	R
I	(7,8)	R

Tableau 2 Liste des éléments constituant le modèle A

Éléments	Liaisons	Ordre
0	(A,F,H ₁ ,H ₂)	IV
1	(A,B)	II
2	(B,C)	II
3	(C,D ₁ ,D ₂ ,E)	IV
4	(E,F)	II
5	(D ₁ ,G)	II
6	(G,H ₁)	II
7	(D ₂ ,I)	II
8	(I,H ₂)	II

L'élément 0 fait référence aux liaisons liées au zéropôle (base) et l'ordre d'un élément correspond au nombre de liaisons le constituant.

Il est à noter que les tableaux 1 et 2 sont équivalents : de l'un, il est possible de déduire l'autre.

Grâce au schéma graphe de la figure 15a, les connexions entre chaque élément peuvent être visualisées. Les liaisons foncées (A et F) sont les liaisons motrices. Chaque boîte du schéma bloc de la figure 15b est relative à un structomat distinct. Les liaisons à

gauche de ces boîtes sont des pôles d'entrée, ceux à leur droite sont des pôles de sortie et ceux à l'intérieur de ces mêmes boîtes sont plutôt des pôles intérieurs. Cette nomenclature sera utilisée lors de l'analyse cinématique.

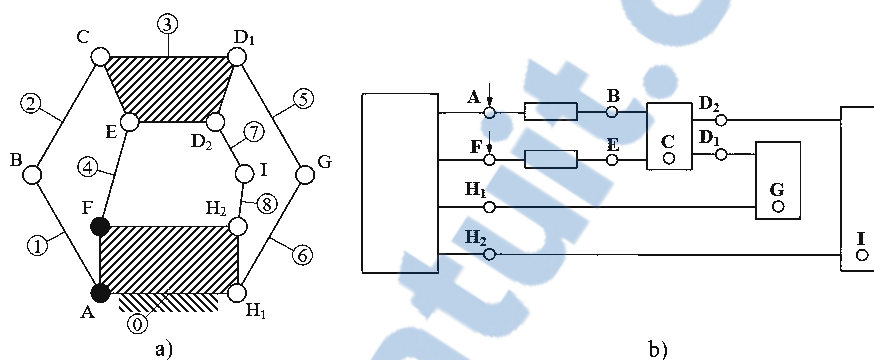


Figure 15 Modèle A : a) Schéma graphe b) Schéma bloc

Les structomats du schéma bloc (figure 15b) sont mis en évidence à la figure 16.

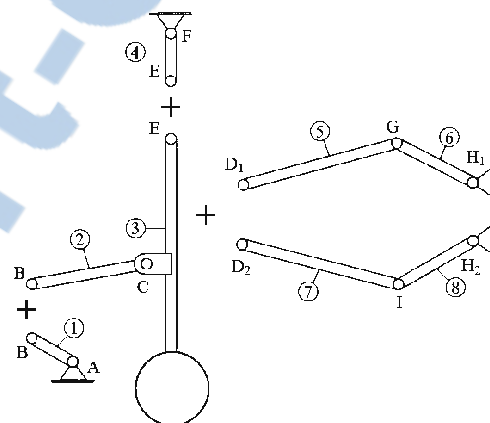


Figure 16 Mise en évidence des structomats du modèle A

Les structomats décrivant la séquence de transmission du mouvement est donnée par la formule structomatique suivante :

$$Z(0) + R(1) + R(4) + RRR(2,3) + RRR(5,6) + RRR(7,8) \quad (3.1)$$

Le modèle A est donc constitué de 6 structomats : le zéropôle $Z(0)$, le motoélément $R(1)$, le motoélément $R(4)$, et les trois dyades $RRR(2,3)$, $RRR(5,6)$ et $RRR(7,8)$ où R est une liaison de rotation. La dyade RRR est schématisée à la figure 11b. Les arrangements de ces structomats lors des analyses cinématique et cinétostatiques seront abordés plus en détail lors de leurs applications au CCC.

3.1.2.2 Modèle I: lorsque l'énergie du moteur est transmise au pendule

Lorsque le couple généré par chacune des branches de la diode mécanique est inférieur au couple résistant, le convertisseur de couple de Constantinesco se comporte tel un mécanisme à un seul degré de mobilité.

Tel que mentionné précédemment, dépendamment du sens de rotation permis par les roulements unidirectionnels à l'arbre de sortie, seulement une branche de la diode mécanique sera en mesure de vaincre le couple résistant. De ce fait, deux « sous-modèles » du modèle structomatique I peuvent être explicités.

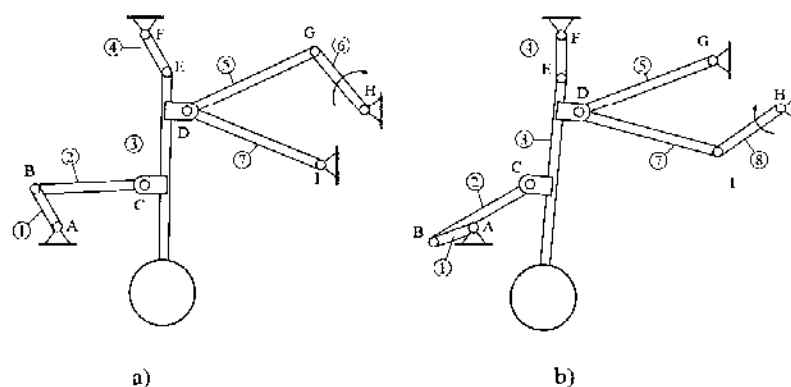


Figure 17 Modèle I : a) Membrane 6 est active b) Membrane 8 est active

Au fil des révolutions de la manivelle, les modèles de la figure 17 se succèdent jusqu'au moment où le couple généré par la diode mécanique à la liaison H soit supérieur au couple résistant. Ensuite, le convertisseur de couple de Constantinesco suit le

comportement dynamique relatif au modèle A tant et aussi longtemps que le module du couple résistant n'augmente pas de façon soudaine.

Les schémas graphe et bloc correspondant au modèle I de la figure 17a sont illustrés à la figure 18 sans expliciter les tableaux des liaisons et des éléments. Ces schémas sont analogues pour l'étude structomatique du modèle I présenté à la figure 17b. Il suffit d'interchanger les liaisons G et I.

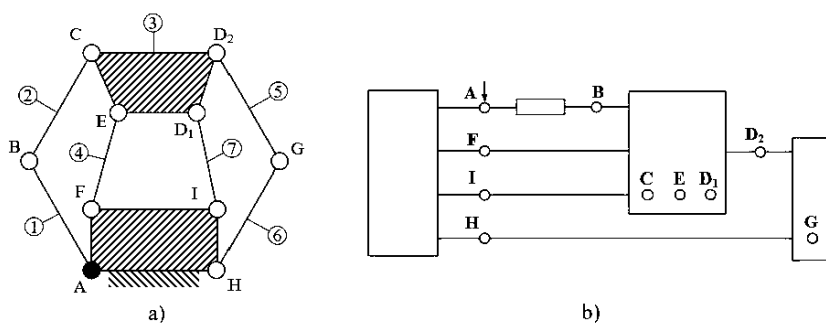


Figure 18 Modèle I : a) Schéma graphe b) Schéma bloc

Les structomats du modèle I faisant partie de la séquence de transmission de mouvement du schéma bloc sont explicités à la figure 19.

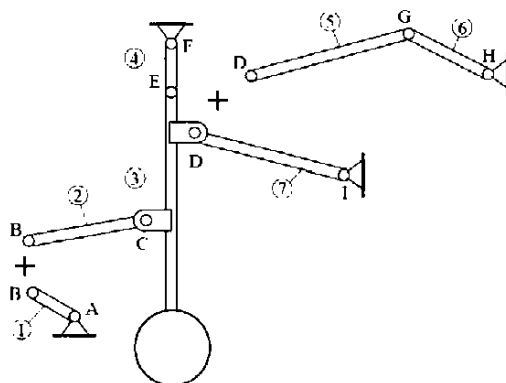


Figure 19 Mise en évidence des structomats du modèle I

Pour étudier le modèle I de la transmission mécanique du point de vue cinématique et cinétostatique, seulement un structomat actif et deux passifs (en plus du zéro-pôle) sont

requis : un motoélément R, une triade RR-RR-RR et une dyade RRR. La triade est schématisée à la figure 11c.

La formule structomatique décrivant la séquence de mouvement du modèle I de la figure 17a se note comme étant :

$$Z(0) + R(1) + RR-RR-RR(2,3,4,7) + RRR(5,6) \quad (3.2)$$

tandis que celle associée à la configuration de la figure 17b est plutôt :

$$Z(0) + R(1) + RR-RR-RR(2,3,4,5) + RRR(7,8) \quad (3.3)$$

3.1.3 Structomats requis pour décrire le mouvement du CCC

Les structomats inclus dans les modèles structomatiques A et I sont illustrés sous forme générale à la figure 20.

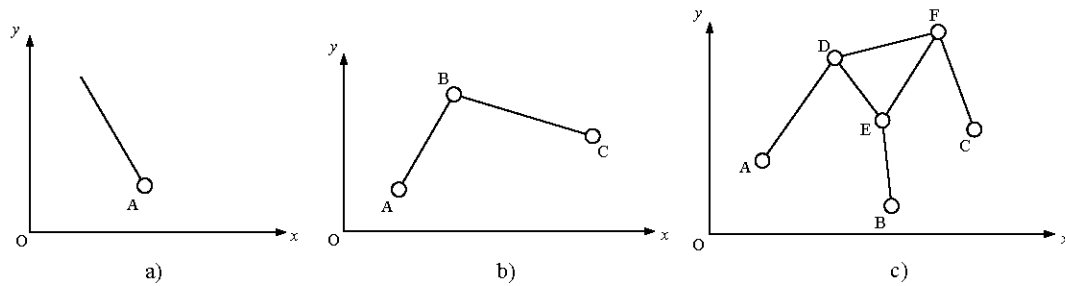


Figure 20 a) Motoélément R b) Dyade RRR c) Triade RR-RR-RR

Le motoélément R est un structomat actif composé d'un élément monaire en plus d'une seule liaison de rotation et détient un degré de mobilité unitaire. Généralement, la liaison A de la figure 20a est connectée avec le zéropôle. Ce structomat ne détient aucun pôle intérieur. Le motoélément peut aussi être utilisé pour calculer les paramètres cinématiques d'un ou plusieurs pôles de sortie, c'est-à-dire une liaison qui est solidaire à un élément d'un structomat, mais qui ne fait pas partie intégrante de la configuration de référence du structomat. Ce dernier est largement utilisé pour l'étude des mécanismes.

La dyade RRR est un structomat passif constamment rencontré dans la constitution des mécanismes plans à membrures. Elle est constituée de trois liaisons de rotation et de deux éléments binaires. Ces pôles d'entrée sont les liaisons A et C tandis que la liaison B correspond à un pôle intérieur (figure 20b). Les pôles de sortie de ce structomat correspondent aux autres liaisons pouvant être solidaires à ces deux éléments cinématiques.

La triade RR-RR-RR est un autre structomat passif composé de trois éléments binaires et d'un élément ternaire. Ce dernier est constitué de 6 liaisons de rotation. Les pôles d'entrée de ce structomat sont relatifs aux liaisons A, B et C alors que les pôles intérieurs correspondent aux liaisons D, E et F (figure 20c). Les autres liaisons solidaires à un ou plusieurs de ces éléments correspondent aux pôles de sortie.

3.2 Analyse cinématique

Les paramètres cinématiques d'un structomat sont calculés en tenant compte uniquement de la géométrie du mécanisme en excluant l'influence des masses et des moments d'inertie de masse des éléments ainsi que l'effet de la gravité et des efforts extérieurs.

Cette section est divisée en trois sous-sections. La première traite des concepts théoriques en lien avec l'analyse cinématique des structomats, la seconde traite des modèles cinématiques des structomats du CCC tandis que la troisième aborde la procédure afin de réaliser l'analyse cinématique du CCC.

3.2.1 Concepts théoriques concernant l'analyse cinématique des structomats

Tel qu'illustré à la figure 13, les calculs cinématiques sont effectués en étudiant les structomats du zéropôle vers les structomats finaux (ceux le plus à droite sur le schéma bloc). Les paramètres cinématiques des pôles du zéropôle sont initialement connus et correspondent aux pôles d'entrée des structomats qui lui sont liés. L'analyse cinématique de ces structomats permet non seulement le calcul des paramètres

cinématiques des pôles dont ils sont constitués, mais aussi des paramètres cinématiques des pôles qui sont entraînés par le mouvement des éléments du structomat : les pôles de sortie. Ces pôles de sortie correspondent aux pôles d'entrée des structomats suivants et ainsi de suite jusqu'au moment où la totalité des structomats ait été étudiée.

L'analyse cinématique des structomats est un outil primordial lors de l'écriture des équations de mouvement d'un mécanisme à membrures (chapitre 4). En fait, dans ce mémoire, les modèles cinématiques des structomats seront utilisés pour construire ces équations de mouvement. Cette procédure est peu investiguée dans la littérature de spécialité. Les avantages liés à l'utilisation des modèles cinématiques des structomats pour réaliser l'étude dynamique d'un mécanisme à membrures sont explicités au prochain chapitre.

La procédure à suivre pour modéliser le comportement cinématique d'un structomat est détaillée :

- 1) Utiliser la méthode des contours indépendants afin de dégager le système d'équations non linéaires de position.
- 2) Résoudre ce système d'équations de position à l'aide d'une méthode numérique appropriée dans le but d'obtenir les paramètres cinématiques de position des éléments du structomat.
- 3) Écrire le système d'équations de vitesse et d'accélération en effectuant les dérivées première et seconde en fonction du temps du système d'équations de position et déduire les paramètres cinématiques de vitesse et d'accélération des éléments du structomats.

Les sous-sections suivantes détaillent chacune de ces trois étapes.

3.2.1.1 Équations non linéaires de position

Les paramètres cinématiques de position d'un élément d'un structomat subissant un mouvement de rotation sont associés à un déplacement angulaire noté φ et défini dans le sens trigonométrique par rapport à l'axe des abscisses. Ces paramètres cinématiques de position correspondent aux inconnues du système d'équations de position.

Le nombre de contours indépendants N d'un structomat peut être calculé connaissant le nombre d'éléments mobiles m et le nombre de liaisons inférieures c constituant le structomat :

$$N = c - m \quad (3.4)$$

Chaque contour indépendant est associé à une équation vectorielle fermée à l'origine et passant par deux pôles d'entrée.

En projetant chacune de ces équations vectorielles selon les deux axes de référence, le nombre d'équations de position, noté E , décrivant le mouvement d'un structomat est :

$$E = 2N \quad (3.5)$$

Puisque l'ensemble des liaisons du CCC sont des liaisons de rotation, pour l'étude de chacun des structomats pris séparément, un vecteur \mathbf{x} contenant l'ensemble des angles associés à chacun des éléments est introduit :

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_E]^T = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \dots \ \varphi_E]^T \quad (3.6)$$

où le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations de position E .

Les schémas cinématiques des structomats entrant dans la constitution du convertisseur de couple de Constantinesco sont illustrés à la figure 21.

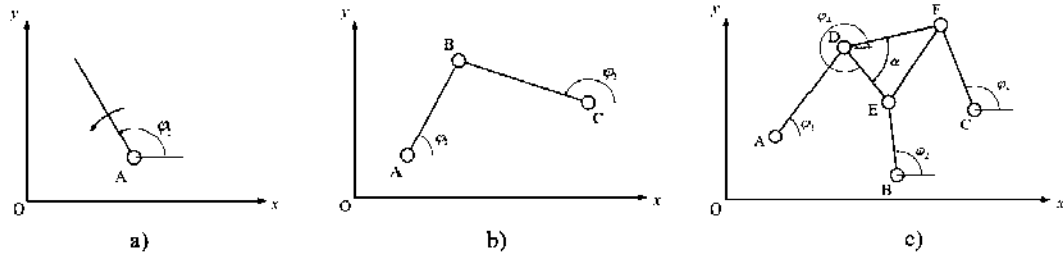


Figure 21 Schémas cinématiques des structomats du CCC

Le système d'équations de position d'un structomat s'écrit sous la forme :

$$f_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, E) \quad (3.7)$$

Ces équations de position sont écrites de façon implicite et comportent des termes dits indépendants, c'est-à-dire qui sont connus et qui ne dépendent aucunement des inconnues telles que les termes liés aux paramètres cinématiques de position du ou des moteurs (loi de mouvement) et les termes associés aux paramètres cinématiques de position des pôles d'entrée (nécessaire pour fermer la chaîne cinématique ouverte).

3.2.1.2 Résolution du système d'équations de position

Pour résoudre le système d'équations de position relatif à un structomat, la méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée. Cette dernière n'est pas la seule méthode numérique pouvant être utilisée pour résoudre un système d'équations non linéaires, mais elle est une méthode largement utilisée dans la littérature en raison de son taux de convergence satisfaisant (généralement quadratique) et de sa facilité d'implémentation [32].

L'équation de récurrence, obtenue grâce au développement en série de Taylor, est donnée par [33]:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.8)$$

où \mathbf{W}^{-1} est l'inverse de la matrice jacobienne \mathbf{W} et le terme $-\mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$ est un vecteur des corrections relatives à chacun des variables.

La matrice jacobienne \mathbf{W} est composée des dérivées partielles des équations de position $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en fonction des inconnues \mathbf{x} et s'écrit comme suit :

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \varphi_E} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial \varphi_E} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_E(\mathbf{x})}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f_E(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} & \dots & \frac{\partial f_E(\mathbf{x})}{\partial \varphi_E} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Pour que l'inverse de la matrice jacobienne soit définie, il est primordial que le jacobien, le déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{W} , soit différent de zéro. Si ce n'est pas le cas, la configuration du structomat est associée à une position singulière. Ces positions sont à éviter lors de la synthèse d'un mécanisme à membrures [34].

Pour effectuer la première itération, les conditions initiales de chacune des inconnues du vecteur \mathbf{x} sont requises. Ainsi, lors de l'implémentation du modèle cinématique d'un structomat sous un logiciel tel Matlab®, les inconnues se doivent d'être considérées, à la fois, comme des variables d'entrée et des variables de sortie. Pour déterminer ces conditions initiales, connaissant les longueurs des différents éléments du mécanisme, un logiciel tel que Working Model (ce logiciel permet de réaliser des simulations dynamiques sur une large gamme de systèmes mécaniques. Il est simple d'utilisation et est un outil permettant de visualiser le mouvement du système tout donnant la possibilité de mesurer la variation de plusieurs paramètres), peut être utilisé afin d'en recueillir des valeurs précises. Par contre, il serait aussi envisageable d'attribuer une condition initiale à chacune des inconnues à l'aide de rapports trigonométriques lorsque possible ou tout simplement à l'aide de suppositions plausibles.

Cependant, afin d'assurer que l'algorithme de Newton-Raphson converge aisément, ces conditions initiales doivent être comprises dans un intervalle de valeur près de la solution voulue du système afin de minimiser l'erreur $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\delta}$ lors de la première évaluation des équations de position.

Pour chacune d'itération, une nouvelle valeur de \mathbf{x} est obtenue selon l'équation (3.8). En fixant un certain critère de convergence $\boldsymbol{\varepsilon} = \left| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right|$, il est garanti que, si la méthode converge, que la précision désirée sera respectée de sorte que :

$$\left| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right| \leq \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.10)$$

Lors de l'implémentation de la méthode de Newton-Raphson à l'aide d'un logiciel, l'algorithme présenté à la figure 22 est utilisé.

Bien sûr, il serait possible d'étudier l'ensemble du mécanisme dès le départ au lieu de le traiter structomat par structomat selon l'ordre décrit par la séquence de transmission de mouvement [35]. Par contre, du point de vue mathématique, pour le mécanisme en entier, les équations vectorielles de fermeture sur le contour sont généralement plus complexes, mais surtout plus nombreuses. Par conséquent, la matrice jacobienne est de plus grande taille. Ainsi, il est primordial de connaître avec précision les conditions initiales de l'ensemble des inconnues de ce système d'équations pour permettre la convergence et donc l'obtention des résultats.

De plus, puisque le système d'équations de position est non linéaire, afin de réduire le temps de résolution, la diminution du nombre d'équations à résoudre simultanément est nécessaire, et ce, même si cela entraîne une augmentation du nombre de sous-systèmes analysés (structomats présents dans la séquence de transmission du mouvement) [36].

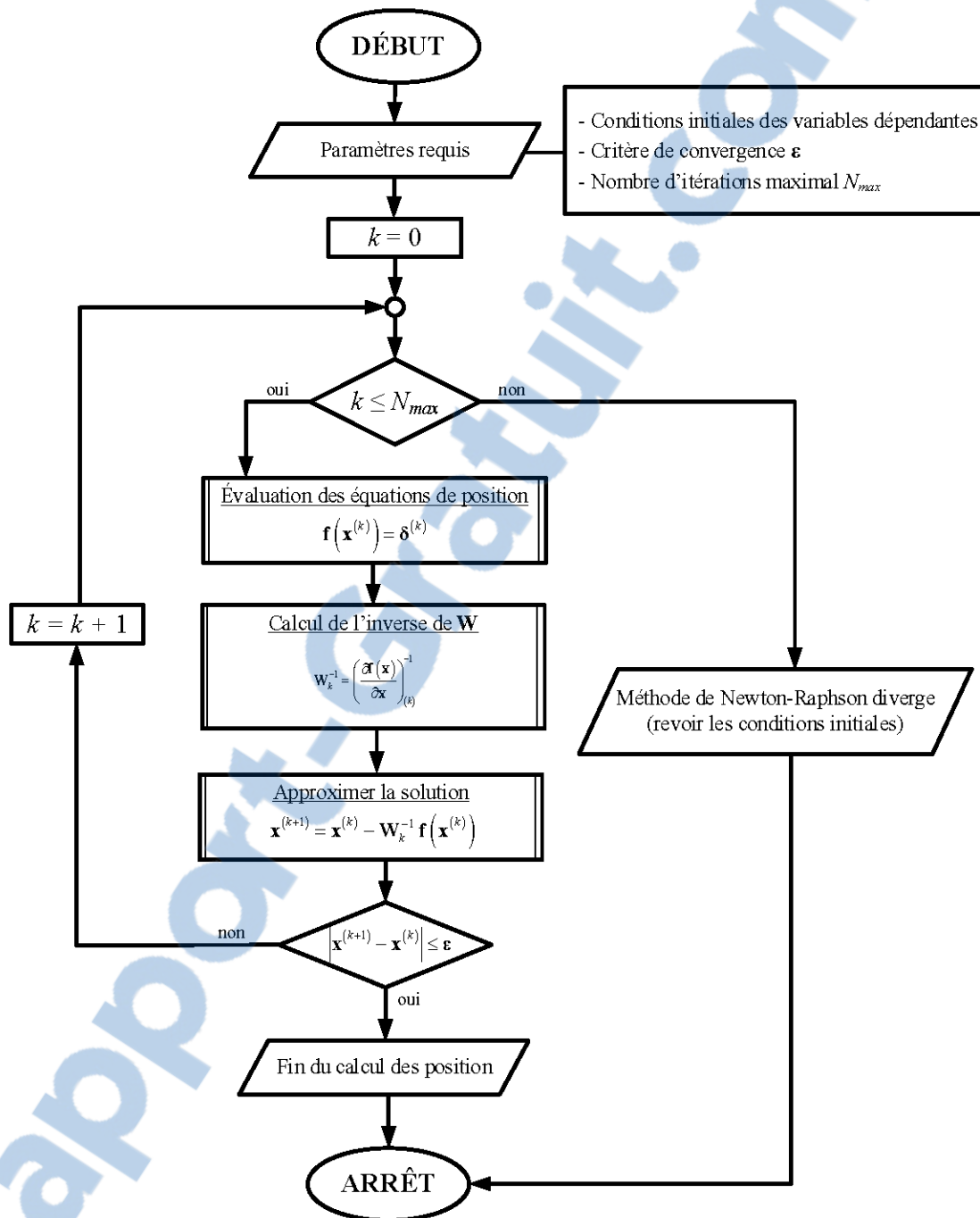


Figure 22 Algorithme de Newton-Raphson

3.2.1.2 Équations linéaires de vitesse

Connaissant les paramètres cinématiques de position des éléments constituant le structomat (vecteur \mathbf{x}), la table est mise pour l'étude des paramètres cinématiques de vitesse.

En dérivant le système d'équations de position (3.7) en fonction du temps, le système d'équations de vitesse peut être écrit :

$$\mathbf{W} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L} \quad (3.11)$$

Contrairement au système d'équations de position, le système (3.11) est linéaire.

La matrice jacobienne \mathbf{W} requise (voir équation (3.9)) pour l'utilisation de l'algorithme de Newton-Raphson fait partie de l'écriture du système d'équations de vitesse. Le vecteur des termes indépendants \mathbf{L} inclut tous les termes qui ne sont pas fonction des paramètres cinématiques de vitesse compris dans $\dot{\mathbf{x}}$.

En isolant le vecteur des paramètres cinématiques de vitesse :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{L} \quad (3.12)$$

3.2.1.3 Équations linéaires d'accélération

Lorsque les paramètres cinématiques de position et de vitesse ont été calculés, il est possible de déduire ceux relatifs à l'accélération.

En dérivant le système d'équations de vitesse en fonction du temps, le système d'équations d'accélération, qui est aussi un système linéaire, peut s'écrire comme étant :

$$\mathbf{W} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{W}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{L}} \quad (3.13)$$

où $\dot{\mathbf{W}}$ et $\dot{\mathbf{L}}$ sont les dérivées en fonction du temps de \mathbf{W} et de \mathbf{L} .

En isolant le vecteur des paramètres cinématiques d'accélération :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^{-1} (\ddot{\mathbf{L}} - \dot{\mathbf{W}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \quad (3.14)$$

3.2.2 Modèles cinématiques des structomats du CCC

Les modèles cinématiques sont construits à partir des systèmes d'équations de position (3.7), de vitesse (3.11) et d'accélération (3.13). Puisque les modèles cinématiques des structomats du CCC (motoélément, dyade et triade) sont explicités dans la littérature [17, 29], ces derniers ne sont pas réécrits ici.

3.2.3 Étude cinématique du CCC

Pour réaliser l'analyse cinématique, une procédure itérative doit être mise en place afin d'obtenir les paramètres cinématiques des éléments et des liaisons du mécanisme en fonction des lois de mouvement imposées à ou aux moteurs.

Ainsi, d'un point de vue général, cette procédure est la suivante :

- 1) Effectuer l'étude structomatique du mécanisme afin d'en extraire la séquence de transmission du mouvement (schéma graphe et schéma bloc).
- 2) Étudier séparément chacun des structomats apparaissant dans la constitution du mécanisme, c'est-à-dire, construire les expressions analytiques des systèmes d'équations de position, vitesse, et d'accélération.
- 3) À l'aide d'un logiciel tel Matlab® :
 - a. Créer une sous-routine pour chacun des structomats où les paramètres d'entrée sont les pôles d'entrée du structomat, les conditions initiales des variables dépendantes et les longueurs des éléments le constituant.
 - b. Créer une routine principale où les sous-routines définies en 3a sont appelées selon l'ordre de transmission de mouvement du mécanisme. Les pôles de

sortie des structomats sont calculés en utilisant la routine cinématique du motoélément R.

La figure 23 illustre la procédure cinématique à suivre pour étudier le mouvement du convertisseur de couple. Ces procédures sont montrées ici à titre indicatif. Au chapitre 7, ces dernières seront utilisées en fonction du couple généré à la diode mécanique tout en tenant compte du module du couple résistant à l'arbre de sortie.

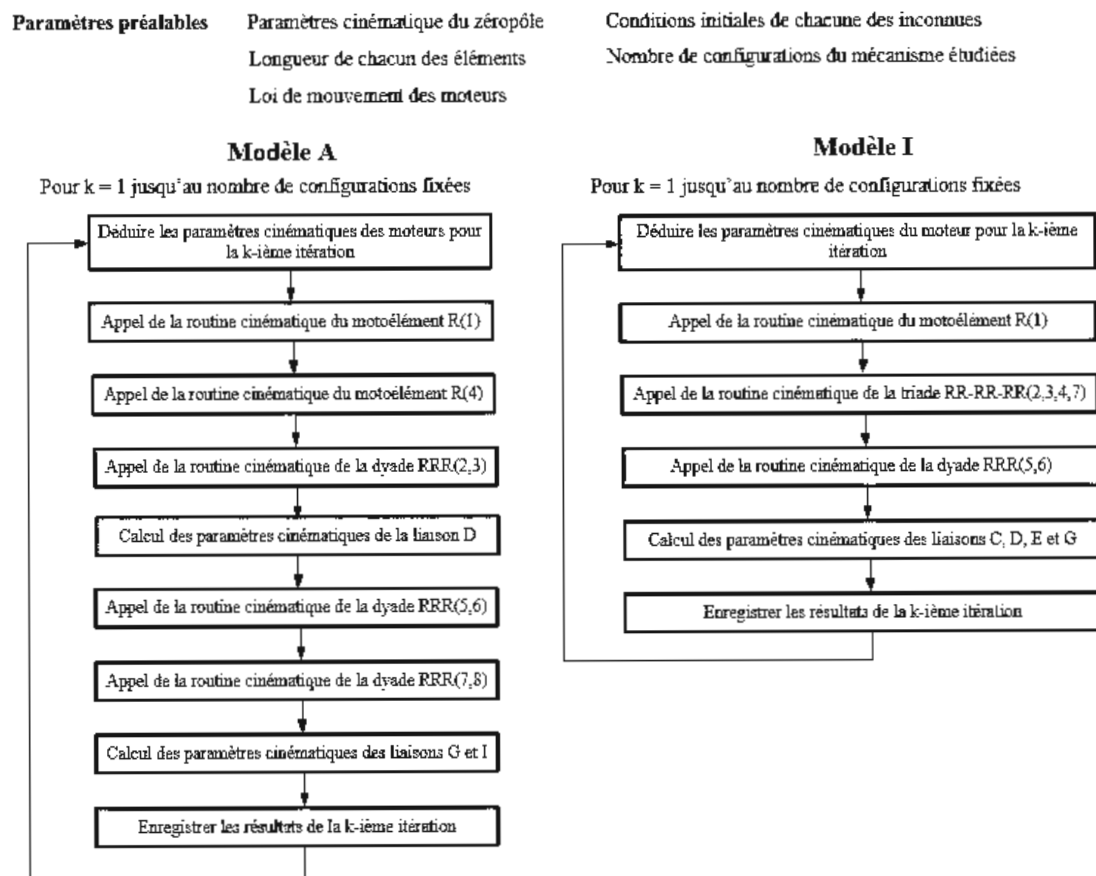


Figure 23 Procédure pour l'analyse cinématique des modèles A et I du CCC

Pour utiliser la seconde configuration du modèle I (voir figure 17b), il suffit de substituer la dyade (5,6) par la dyade (7,8) et la triade (2,3,4,7) par la triade (2,3,4,5).

3.3 Analyse cinétostatique

Les mécanismes ne sont pas utilisés seulement pour se mouvoir à l'intérieur d'une certaine plage de travail, ils sont aussi employés pour transmettre des efforts nécessaires afin de vaincre l'inertie des éléments en mouvement, mais aussi pour permettre et garantir le mouvement du mécanisme de travail.

Lorsque les paramètres cinématiques des liaisons et des éléments sont connus, les efforts d'inertie peuvent être déduits et les réactions dans l'ensemble des liaisons passives et actives du mécanisme peuvent être calculées. Ainsi, pour un cycle cinématique ou dynamique, il est possible de connaître la sollicitation de chacun des éléments et ainsi valider leur dimensionnement à l'aide des théories de la résistance des matériaux. De plus, le calcul cinétostatique rend possible le choix du moteur ou du vérin à utiliser tout en étant une étape préalable aux calculs relatifs aux vibrations, à l'usure, etc.

Dans le cadre de ce mémoire, le frottement ne sera pas considéré dans les liaisons du CCC. Toutefois, Durango a introduit un algorithme permettant d'introduire le frottement dans les modèles cinétostatiques des structomats [37].

Cette section est divisée de la même manière que celle portant sur l'analyse cinématique. La première sous-section introduit les concepts théoriques liés à l'étude cinétostatique des structomats, la seconde fait référence aux modèles cinétostatiques des structomats tandis que la troisième détaille la procédure à suivre pour effectuer l'analyse cinétostatique complète du convertisseur de couple de Constantinesco.

3.3.1 Concepts théoriques concernant l'analyse cinétostatique des structomats

L'analyse cinétostatique fait suite à l'analyse cinématique ou à l'analyse dynamique (lorsque les équations de mouvement du mécanisme sont intégrées). L'analyse cinétostatique tient aussi compte de la séquence de transmission du mouvement dictée par le schéma bloc afin d'étudier le mécanisme structomat par structomat. Par contre,

pour cette analyse, le schéma bloc est parcouru dans le sens inverse, c'est-à-dire des structomats finaux vers le ou les structomats actifs liés au zéropôle (figure 13). Ainsi, les pôles de sortie d'un structomat lors de l'analyse cinématique sont les pôles d'entrée lors de l'étude cinétostatique.

Le calcul des réactions dans les liaisons passives et actives d'un mécanisme se fait en considérant tous les efforts extérieurs appliqués (constants ou variables) sur les éléments du mécanisme, la gravité ainsi que les efforts d'inertie engendrés au centre de gravité des éléments dû, à la fois, à leur accélération dans le plan et à leur accélération angulaire.

Les schémas cinétostatiques des structomats du convertisseur de couple de Constantinesco sont illustrés à la figure 24 [17, 38, 39].

L'approche de d'Alembert [40] est utilisée pour écrire les modèles cinétostatiques des structomats. Les efforts d'inertie sont supposés statiques et trois équations d'équilibre peuvent être appliquées à chacun des éléments d'un structomat :

$$\begin{aligned}\sum (F_x)_{G_i} &= m_i (a_x)_{G_i} \\ \sum (F_y)_{G_i} &= m_i \left[(a_y)_{G_i} + g \right] \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ \sum (M_z)_{G_i} &= I_{G_i} \alpha_i\end{aligned}\tag{3.15}$$

où G_i est le centre de gravité de l'élément i , m_i et I_{G_i} sont respectivement la masse et le moment d'inertie de masse au centre de gravité de l'élément i et g est l'accélération gravitationnelle.

L'accélération gravitationnelle est incluse dans la deuxième équation d'équilibre (3.15) dans le but d'inclure le poids de l'élément comme une force extérieure agissant en son centre de gravité.

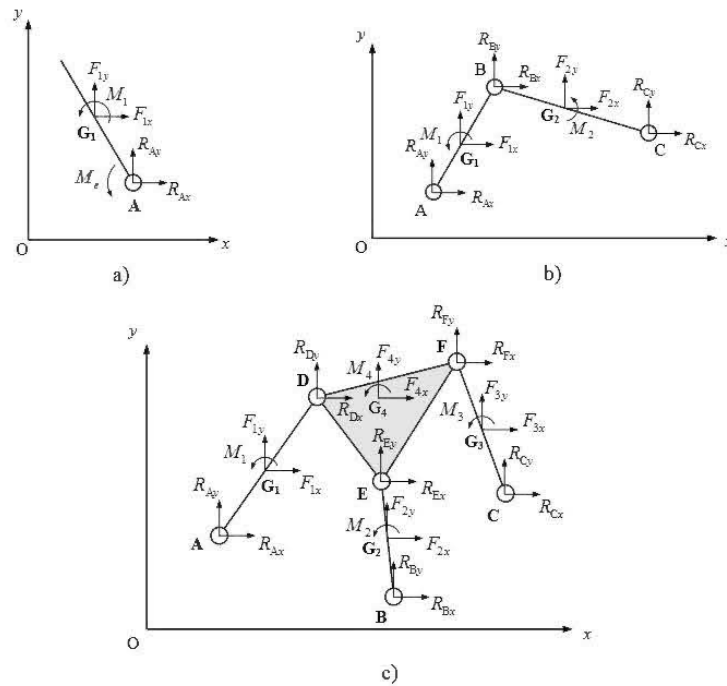


Figure 24 Schémas cinéto-statiques des structomats du CCC

Pour calculer les efforts d'inertie au centre de gravité d'un structomat, seulement les paramètres inertiels des éléments (masse et moment d'inertie de masse), les paramètres cinématiques de vitesse et d'accélération du centre de gravité de chacun des éléments ainsi que les réactions sollicitant les pôles d'entrée (calculées lors de l'étude des structomats précédents) sont requis. Ainsi, le côté droit des équations d'équilibre comprend tous les termes connus (lorsqu'une réaction connue intervient dans la somme des forces ou des moments du côté gauche des équations d'équilibre, elle est transférée du côté droit). Ces efforts d'inertie doivent être calculés préalablement aux calculs des réactions dans les liaisons d'un structomat.

La routine cinématique du motoélément R, tel que mentionné à la section 3.1.3, peut être employée pour calculer les paramètres cinématiques des centres de gravité de chacun des éléments constituant un structomat.

Ainsi, pour un structomat constitué de m éléments mobiles, le nombre d'équations linéaires compris dans le système d'équations est :

$$E = 3m \quad (3.16)$$

pouvant être représentées sous forme d'un système d'équations linéaires :

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{J} \quad (3.17)$$

où :

- \mathbf{H} est une matrice de dimensions $E \times E$ contenant les coefficients multipliant chacune des réactions (inconnues) du structomat inclus du côté gauche des équations d'équilibre (3.15).
- \mathbf{R} est le vecteur contenant les réactions à calculer.
- \mathbf{J} est un vecteur contenant les efforts d'inertie au centre de gravité des éléments du structomat calculé au préalable.

Les réactions contenues dans le vecteur \mathbf{R} se calcule donc selon la relation suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{J} \quad (3.18)$$

Pour une liaison de rotation, le module de la réaction est projeté selon les deux axes de référence afin d'être en mesure d'appliquer les équations d'équilibre. De plus, l'analyse cinétostatique rend possible le calcul du couple moteur permettant ainsi de déduire, connaissant la vitesse angulaire du moteur, la puissance que doit développer celui-ci pour permettre le mouvement du mécanisme.

L'analyse cinétostatique d'un structomat est effectuée en considérant la procédure suivante :

- 1) Tracer un diagramme des corps libérés (DCL) pour chaque élément d'un structomat. Inclure les réactions aux liaisons et les efforts d'inertie au centre de gravité de chacun des éléments. Pour une liaison propre à deux éléments du structomats, la troisième loi de Newton doit être respectée.
- 2) Appliquer les trois équations d'équilibre (3.15) à chacun des DCL. Combiner les équations obtenues pour former le système d'équations linéaires (3.17).
- 3) Résoudre le système linéaire d'équilibre.

Une méthode alternative peut être utilisée pour valider les résultats obtenus à l'aide de la procédure cinétostatique : la méthode des puissances virtuelles [29]. Cette dernière tient seulement compte des paramètres cinématiques des éléments et des liaisons du mécanisme calculés préalablement et des paramètres inertiels des éléments. Elle postule un équilibre de puissance dans un mouvement virtuel. Ainsi, si le mécanisme subit un déplacement fictif, la somme des puissances développées par les forces et les moments est nulle. La puissance virtuelle PV se calcule comme suit :

$$PV = \sum_{i=1}^m m_i \left[(a_x)_{G_i} (v_x)_{G_i} + \left((a_y)_{G_i} + g \right) (v_y)_{G_i} \right] + \sum_{i=1}^m I_{G_i} \times \alpha_i \times \omega_i \quad (3.19)$$

Si des efforts extérieurs sont appliqués à un élément du mécanisme, la puissance qui lui est attachée est ajoutée à l'équation (3.19).

3.3.2 Modèles cinétostatiques des structomats du CCC

Comme pour les modèles cinématiques, les modèles cinétostatiques des structomats sont détaillés dans plusieurs travaux de recherche et ne sont donc pas donnés ici. Ces modèles sont d'une aide primordiale afin d'être en mesure de calculer le couple engendré à la diode mécanique du CCC.

3.3.3 Étude cinétostatique du convertisseur de couple de Constantinesco

Pour chaque configuration prise par le mécanisme, les paramètres cinématiques des éléments et des liaisons sont connus. Ainsi, pour chacune de ces configurations, l'analyse cinétostatique peut être réalisée. En considérant le sens de lecture du schéma bloc pour l'analyse cinétostatique (droite vers la gauche), la procédure suivante peut être appliquée :

- 1) Effectuer au préalable l'analyse cinématique pour une configuration donnée du mécanisme (section 3.2.3).
- 2) Étudier séparément les différents structomats constituant le mécanisme en écrivant les expressions analytiques des équations contenues dans leur système d'équations linéaires d'équilibre respectif.
- 3) À l'aide d'un logiciel tel Matlab®, créer une sous-routine pour chacun des structomats où les paramètres d'entrée sont les paramètres cinématiques des pôles d'entrée du structomat ainsi que les paramètres cinématiques et les efforts d'inertie relatifs au centre de gravité de chacun des éléments constituant le structomat.
- 4) Dans la routine principale, à la suite de la procédure relative à l'analyse cinématique
 - a) Obtenir les paramètres cinématiques des centres de gravité de chacun des éléments en utilisant la routine cinématique du motoélément.
 - b) Calculer les réactions aux liaisons de chacun des structomats en calculant au préalable les efforts d'inertie aux centres de gravité de chacun des éléments les constituant.

Lors de l'analyse dynamique du convertisseur de couple de Constantinesco, le module du couple généré à la diode mécanique sera calculé en considérant les mêmes modèles structomatiques que ceux utilisés lors de l'analyse cinématique.

Ainsi, les procédures détaillées afin de réaliser l'analyse cinétostatique des deux modèles structomatiques sont présentées à la figure 25.

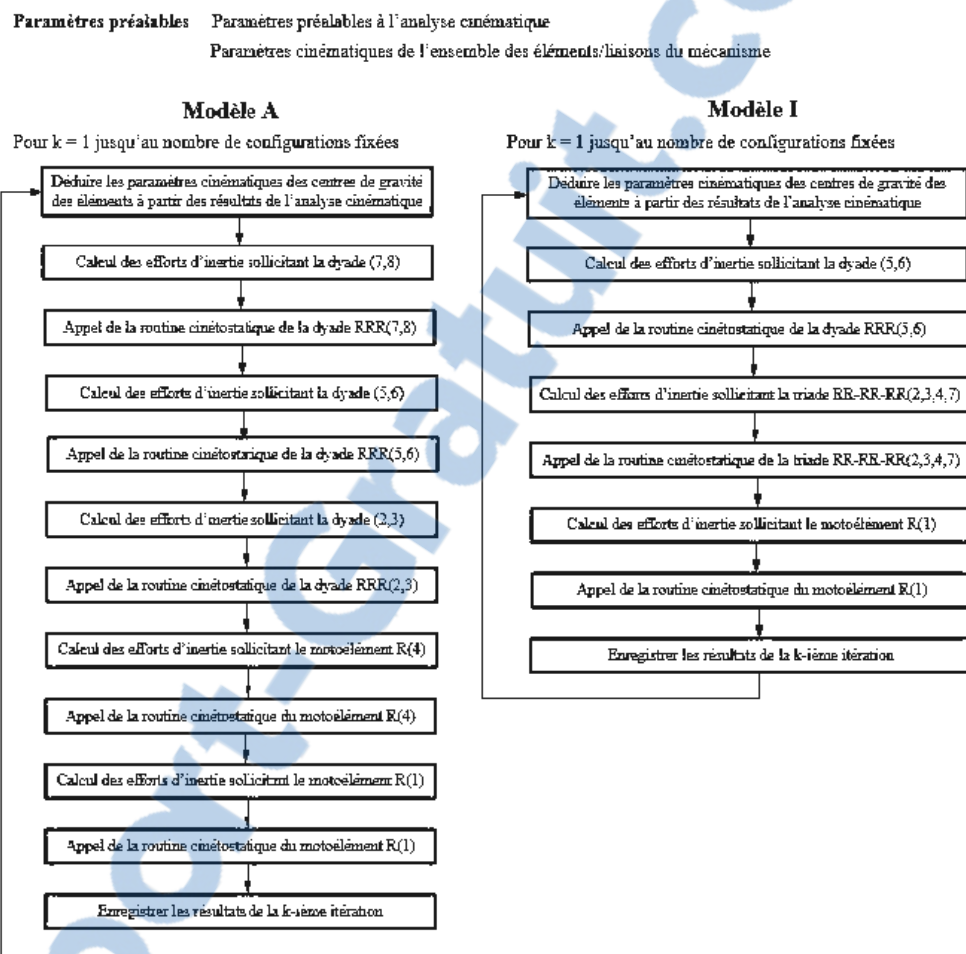


Figure 25 Procédure pour l'analyse cinétostatique des modèles A et I du CCC

Pour utiliser la seconde configuration du modèle I (voir figure 17b), il suffit de substituer la dyade (5,6) par la dyade (7,8) et la triade (2,3,4,7) par la triade (2,3,4,5).

CHAPITRE 4

ANALYSE DYNAMIQUE DES MÉCANISMES À MEMBRURES

À la section 3.2, lors de l'analyse cinématique, les paramètres cinématiques des éléments et des liaisons du mécanisme sont calculés en presumant que les lois de mouvement des moteurs sont connues. En fait, une modélisation plus réaliste implique que ces paramètres cinématiques soient calculés en considérant les paramètres inertiels (masse et moment d'inertie) des éléments, la gravité en plus du couple développé par chacun des moteurs et non seulement en considérant la géométrie du mécanisme.

Pour ce faire, les équations de mouvement du mécanisme sont nécessaires. L'intégration de ces équations de mouvement permet d'obtenir la variation des paramètres cinématiques des moteurs en fonction du temps.

L'analyse dynamique des systèmes mécaniques est un domaine d'intérêt depuis maintenant plusieurs décennies. Toutefois, la théorie fondamentale sur la dynamique des corps rigides remonte aux travaux de L. Euler (1707-1783) et J.L. Lagrange (1736-1813) [41]. Trois méthodes peuvent être employées dans le but d'étudier un mécanisme sur le plan dynamique : les méthodes graphiques, les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

Les méthodes graphiques étaient utilisées par les ingénieurs mécaniques principalement au début du vingtième siècle et étaient appropriées pour l'étude des mécanismes plans. Les travaux de F. Wittenbauer [42] ont fait la renommée de ces méthodes et ont été considérés comme étant de référence pendant une longue période.

L'évolution de la technologie informatique a permis le développement des méthodes numériques. Ces méthodes peuvent être adaptées afin d'étudier le comportement

dynamique d'un mécanisme, et ce, peu importe sa structure. En fait, les algorithmes numériques sont capables de :

- 1) générer automatiquement les équations de mouvement d'un mécanisme ;
- 2) résoudre les équations de mouvement par intégration numérique ;
- 3) calculer les réactions aux liaisons du mécanisme.

Les différentes techniques les plus adaptées permettant l'écriture des équations de mouvement sont issues de la mécanique analytique et découlent d'un même point de départ : le principe du travail virtuel. En fait, ces équations de mouvement peuvent être écrites en utilisant les équations de Lagrange (sans ou avec les multiplicateurs de Lagrange) ou les équations canoniques de Hamilton [43]. La mécanique vectorielle (équations de Newton) peut aussi être considérée. Par contre, un travail mathématique plus soutenu est requis pour écrire les équations de mouvement.

Les équations de mouvement peuvent être écrites automatiquement, peu importe le degré de mobilité de ce dernier. Toutefois, pour obtenir les paramètres cinématiques des moteurs, il est primordial de les résoudre. Puisque ces équations de mouvement sont généralement complexes et encombrantes du point de vue mathématique, il est impossible d'espérer être en mesure d'obtenir une solution analytique. Pour pallier à cette importunité, les méthodes numériques d'intégration des systèmes d'équations différentielles sont de mise. Les méthodes les plus appropriées sont celles incluses dans la famille de Runge-Kutta [44].

Avec les années, les méthodes graphiques ont été délaissées aux profits des méthodes numériques. Paul [45] résume les bases théoriques des différentes méthodes pouvant être utilisées pour l'écriture des équations de mouvement ainsi que celles pouvant être favorisées pour leur intégration.

Dans le cadre de ce mémoire, les équations de Lagrange sont utilisées pour l'écriture des équations de mouvement. Ces équations requièrent, entre autres, la connaissance

de l'expression de l'énergie cinétique totale du mécanisme (voir section 4.2). Pour ce faire, le concept de matrice de transmission est introduit. En fait, Dranga et Manolescu [46, 47] ont priorisé ce concept afin de proposer un algorithme permettant l'écriture des équations de mouvement sous forme matricielle, de façon systématique et compacte, et ce, tant pour des mécanismes détenant un seul degré de mobilité que pour des mécanismes multimobiles. Cette méthode a aussi été discutée par Éné [48]. Cependant, ces auteurs prônent une écriture analytique de ces matrices de transmission. Ainsi, pour garantir une démarche purement numérique, une procédure utilisant les modèles cinématiques des structomats définis à la section 3.2 est proposée dans le cadre de ce mémoire.

Ainsi, ce quatrième chapitre est divisé en deux sections. La première introduit les concepts tels que les fonctions et matrices de transmission requises pour la modélisation dynamique d'un mécanisme à membrures. La seconde utilise ces concepts pour l'écriture des équations de mouvement sous forme matricielle en utilisant les équations de Lagrange.

4.1 Modélisation dynamique d'un mécanisme à membrures

Afin d'être en mesure d'écrire les équations de mouvement d'un mécanisme à membrures (plan) en utilisant les matrices de transmission, il est nécessaire de définir les concepts suivants :

- 1) Coordonnées généralisées ;
- 2) Fonctions de transmission de position ;
- 3) Fonctions de transmission de vitesse et d'accélération ;
- 4) Matrices de transmission de vitesse et d'accélération.

Chacune des sous-sections suivantes est dédiée à l'explication de chacun de ces points.

4.1.1 Variables généralisées

Les coordonnées généralisées de position, les vitesses généralisées et les accélérations généralisées, notées respectivement q_i , \dot{q}_i et \ddot{q}_i (variables généralisées) pour le i -ième élément moteur, permettent de décrire la configuration géométrique et le mouvement de l'ensemble du mécanisme. Ainsi, les profils de position, de vitesse et d'accélération d'un élément ou d'une liaison sont uniquement dépendants de ces mêmes variables généralisées, qui elles, sont fonction du temps.

En fait, le nombre de coordonnées généralisées q_i est égal au degré de mobilité M du mécanisme. Généralement, une coordonnée généralisée correspond à un angle lorsque celle-ci est associée à un mouvement de rotation assimilable à une manivelle entraînée par un moteur ou plutôt à une distance, par exemple, lorsqu'un vérin introduit un mouvement de translation. Ces deux types de liaisons motrices sont schématisées à la figure 26 [49].

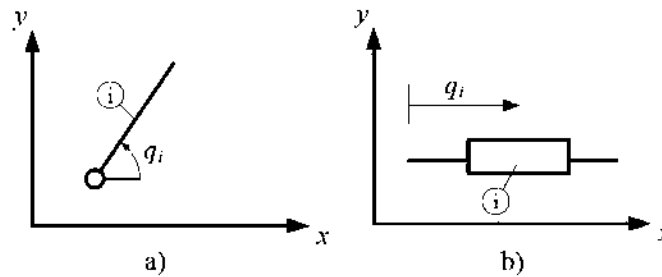


Figure 26 Liaisons motrices : a) de rotation b) de translation

L'ensemble des M coordonnées généralisées sont regroupées dans un vecteur \mathbf{q} :

$$\mathbf{q}(t) = [q_1, q_2, \dots, q_M]^T \quad (4.1)$$

En effectuant les dérivées première et seconde de ce vecteur en fonction du temps, les vecteurs relatifs aux coordonnées généralisées de vitesse et d'accélération sont obtenus. Ces vecteurs seront omniprésents lors de l'écriture des équations de mouvement.

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_M]^T \quad (4.2)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = [\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \dots \ \ddot{q}_M]^T \quad (4.3)$$

4.1.2 Fonctions de transmission de position

Considérant que le mécanisme est constitué de m éléments mobiles, ceci implique que $m-M$ éléments ne sont pas associés directement à une coordonnée généralisée, mais plutôt à une variable dépendante. En fait, la quantité $m-M$ correspond au nombre d'équations de position E requis pour analyser l'ensemble du mécanisme. Comme pour l'analyse cinématique, les variables dépendantes sont regroupées dans un vecteur \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_E]^T \quad (4.4)$$

Ces variables, φ_i pour une liaison de rotation et s_i pour une liaison de translation, sont qualifiées de dépendantes puisqu'elles peuvent être entièrement définies en fonction des coordonnées généralisées \mathbf{q} [48, 49] :

$$x_s = x_s(q_1, q_2, \dots, q_M) = x_s(\mathbf{q}) \quad (s = 1, 2, \dots, E) \quad (4.5)$$

La fonction x_s fait référence à la fonction de transmission de position de la s -ième variable dépendante. En fait, il est essentiel de définir les variables dépendantes en fonction des coordonnées généralisées puisque les équations de mouvement doivent être entièrement écrites en fonction de ces mêmes coordonnées généralisées. Toutefois, les expressions analytiques de ces variables dépendantes se complexifient très rapidement ce qui a pour effet d'alourdir énormément l'écriture des équations de mouvement. Pour cette raison, les fonctions de transmission de position ne sont pas écrites sous forme explicite, mais plutôt implicitement comme suit :

$$f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, E) \quad (4.6)$$

Dans ce cas, ces fonctions de transmission de position correspondent aux équations de position du mécanisme. C'est à partir des équations de position que les fonctions de transmission de vitesse ainsi que les fonctions de transmission d'accélération seront extraites et utilisées pour l'écriture matricielle des équations de mouvement.

4.1.3 Fonctions de transmission de vitesse et d'accélération

Si les fonctions de transmission de position sont écrites sous la forme explicite de l'équation (4.5), leurs dérivées par rapport au temps permettent d'écrire la vitesse de ces variables dépendantes de la façon suivante :

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^M \frac{\partial x_s}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \quad (s = 1, 2, \dots, E) \quad (4.7)$$

où $\partial x_s / \partial q_k$ correspondent aux fonctions de transmission de vitesse.

Par définition, une fonction de transmission de vitesse est la dérivée partielle de premier ordre d'une variable dépendante x_s par rapport à une coordonnée généralisée q_k . Elle tient uniquement compte de la géométrie du mécanisme. Le lien entre la géométrie et la cinématique est fait grâce au terme \dot{q}_k qui multiplie la fonction de transmission de vitesse.

En dérivant l'équation (4.7) en fonction du temps, l'accélération des variables dépendantes s'écrit comme suit :

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \sum_{k=1}^M \frac{\partial x_s}{\partial q_k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^M \sum_{r=1}^M \frac{\partial^2 x_s}{\partial q_j \partial q_r} \cdot \dot{q}_j \dot{q}_r \quad (s = 1, 2, \dots, E) \quad (4.8)$$

où la première sommation fait référence aux fonctions de transmission de vitesse définies à l'équation (4.7) tandis que les dérivées partielles $\partial^2 x_s / \partial q_j \partial q_r$ de la seconde sommation correspondent aux fonctions de transmission d'accélération.

Analogiquement aux fonctions de transmission de vitesse, par définition, les fonctions de transmission d'accélération correspondent à la dérivée partielle de second ordre, mixte ou non, d'une variable dépendante x_s par rapport aux coordonnées généralisées.

De façon générale, les fonctions de transmission de position sont analogues aux équations de position, c'est-à-dire qu'elles sont écrites sous la forme implicite de l'équation (4.6) et dépendent simultanément des coordonnées généralisées et des variables dépendantes. Ainsi, en dérivant les équations de position en fonction du temps, les équations de vitesse du mécanisme sont écrites :

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Cette dernière équation est réécrite plus convenablement sous forme matricielle :

$$\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

où :

B : Matrice $E \times M$ contenant les dérivées partielles de chacune des équations de position par rapport à chacune des coordonnées généralisées :

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_E}{\partial q_1} & \frac{\partial f_E}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_E}{\partial q_M} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

W : Matrice jacobienne $E \times E$ contenant les dérivées partielles des équations de position par rapport aux variables dépendantes :

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_E} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_E} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_E}{\partial x_1} & \frac{\partial f_E}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_E}{\partial x_E} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

C : Matrice $E \times M$ contenant les fonctions de transmission. Elle est définie comme étant la matrice des fonctions de transmission de vitesse :

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_M} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial q_M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x_E}{\partial q_1} & \frac{\partial x_E}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_E}{\partial q_M} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

En dérivant de nouveau le système matriciel de vitesse (4.10) en fonction du temps, les équations d'accélération du mécanisme s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{B} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{C} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W} \cdot \dot{\mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

Puisque les équations de position de l'équation (4.6) sont une sommation de termes trigonométriques, leurs dérivées premières $\partial f_i / \partial q_k$ (contenues dans **B**) dépendent uniquement de q_k tandis que $\partial f_i / \partial x_j$ (contenues dans **W**) sont des expressions où seulement la variable x_j , qui est définie en fonction de l'ensemble des coordonnées généralisées selon l'équation (4.5), intervient. Ainsi, les dérivées secondes peuvent être simplifiées comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_k}\right) &= \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_j \partial q_k} \cdot \dot{q}_j + \sum_{j=1}^M \sum_{r=1}^E \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_r \partial q_k} \frac{\partial x_r}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j \\ (4.15) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_k}\right) &= \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_k^2} \cdot \dot{q}_k \quad (i=1, 2, \dots, E)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_j}\right) &= \sum_{j=1}^M \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_j \partial x_j} \cdot \dot{q}_j + \sum_{r=1}^M \sum_{k=1}^E \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \\ (4.16) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_j^2} \cdot \sum_{r=1}^M \frac{\partial x_j}{\partial q_r} \cdot \dot{q}_r \quad (i=1, 2, \dots, E)\end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{B}}$ correspond à la dérivée par rapport au temps de la matrice \mathbf{B} :

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_M^2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_E}{\partial q_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_E}{\partial q_M^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dot{q}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{q}_M \end{bmatrix} = \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{K} \quad (4.17)$$

de sorte que $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{K}$ où \mathbf{B}_q est la matrice $E \times M$ regroupant les dérivées secondes des équations de position par rapport aux coordonnées généralisées et \mathbf{K} est une matrice $M \times M$ contenant les coordonnées généralisées de vitesse sur sa diagonale.

La dérivée par rapport au temps de la matrice jacobienne \mathbf{W} s'écrit :

$$\dot{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_E^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_E^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_E}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_E}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_E}{\partial x_E^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^M \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^M \frac{\partial x_E}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \end{bmatrix} = \mathbf{W}_x \cdot \mathbf{S} \quad (4.18)$$

de sorte que $\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{W}_x \cdot \mathbf{S}$ où \mathbf{W}_x est la matrice $E \times E$ regroupant les dérivées secondes des équations de position par rapport aux variables dépendantes et \mathbf{S} est une matrice $E \times E$ contenant les expressions de la vitesse de chacune des variables dépendantes le définies à l'équation (4.7) sur sa diagonale.

Chacune des fonctions de transmission de vitesse dépendent de l'ensemble des coordonnées généralisées de sorte que la matrice $\dot{\mathbf{C}}$ s'écrit comme suit :

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_1} \cdot \dot{q}_i & \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_2} \cdot \dot{q}_i & \dots & \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_i \partial q_M} \cdot \dot{q}_i \\ \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_1} \cdot \dot{q}_i & \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_2} \cdot \dot{q}_i & \dots & \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_i \partial q_M} \cdot \dot{q}_i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_i \partial q_1} \cdot \dot{q}_i & \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_i \partial q_2} \cdot \dot{q}_i & \dots & \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_i \partial q_M} \cdot \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Cette matrice peut être écrite comme étant le produit matriciel suivant :

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_2 \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_M \partial q_1} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_M \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial q_M^2} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_2 \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_M \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 x_2}{\partial q_M^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_2 \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 x_M}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_M \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 x_E}{\partial q_M^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (4.20)$$

où la matrice \mathbf{D} de dimensions $E \times M^2$ est la matrice de fonctions de transmission d'accélération tandis que \mathbf{E} est une matrice de dimensions $M^2 \times M$ contenant seulement les coordonnées généralisées de vitesse (produit matriciel entre la matrice identité et le vecteur $\dot{\mathbf{q}}$ des coordonnées généralisées de vitesse). À noter que $\mathbf{0}$ est un vecteur nulle de dimensions $M \times 1$.

Pour des mécanismes à membrures où $M \geq 2$, la matrice \mathbf{D} fait intervenir des dérivées partielles mixtes. Selon le théorème de Schwarz [50] puisque les fonctions de transmission de position admettent des dérivées de premier ordre continues et que les dérivées mixtes $\partial^2 x_i / \partial q_j \partial q_k$ et $\partial^2 x_i / \partial q_k \partial q_j$ existent et sont aussi continues, alors l'ordre de dérivation peut être interverti :

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \quad (4.21)$$

Avec les équations (4.17), (4.18) et (4.20), le système matriciel d'accélération (4.14) se réécrit sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{B} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{C} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_x \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Ainsi, les équations matricielles (4.10) et (4.22) de vitesse et d'accélération font intervenir les matrices de fonctions de transmission de vitesse **C** et d'accélération **D**. Ces matrices sont nécessaires à l'obtention des matrices de transmission.

Lorsque les fonctions de transmission de position sont définies de façon implicite, il peut être ardu d'extraire les expressions analytiques des fonctions de transmission incluses dans les matrices **C** et **D**. En fait, à la section 5.1, trois procédures seront abordées afin de calculer ces fonctions de transmission. L'accent sera mis sur l'utilisation des modèles cinématiques définis à la section 3.2 puisqu'ils rendent possible le calcul de ces fonctions de transmission sans passer par l'application des équations matricielles (4.10) et (4.22)

4.1.4 Matrice de transmission de vitesse et d'accélération

Les matrices de transmission de position, vitesse et d'accélération regroupent en une seule matrice les paramètres cinématiques des centres de gravité de tous les éléments constituant un mécanisme.

Prenons un élément k connecté à deux éléments $k+1$ et $k-1$ tel qu'illustré à la figure 27 [47].

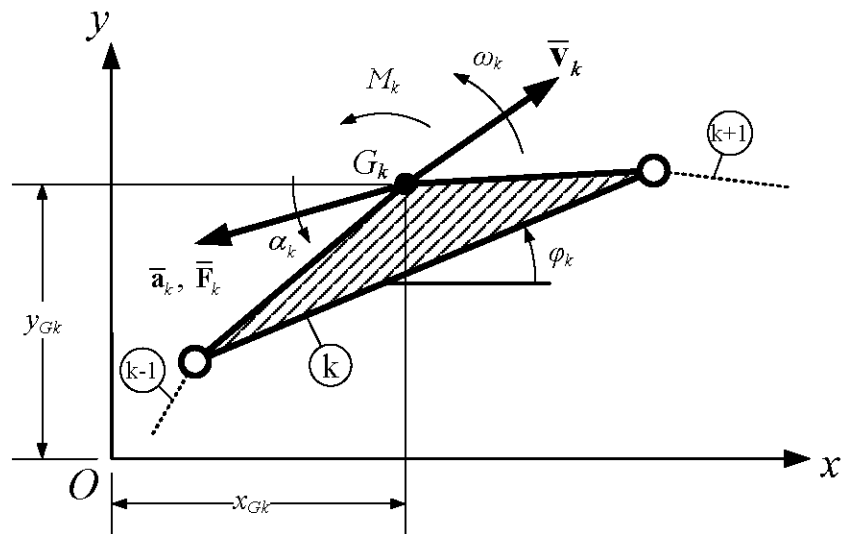


Figure 27 Schématisation d'un élément k du mécanisme

où :

- G_k est le centre de gravité de l'élément k ;
- x_{G_k} et y_{G_k} sont les coordonnées du centre de gravité de l'élément k ;
- φ_k est l'orientation de l'élément k par rapport à l'axe des abscisses ;
- $\bar{\mathbf{v}}_k$ est le vecteur vitesse du centre de gravité de l'élément k ;
- $\bar{\mathbf{a}}_k$ est le vecteur accélération du centre de gravité de l'élément k ;
- ω_k est la vitesse angulaire de l'élément k ;
- α_k est l'accélération angulaire de l'élément k ;
- $\bar{\mathbf{F}}_k$ est le vecteur de la force d'inertie au centre de gravité de l'élément k ;
- \bar{M}_k est le couple d'inertie au centre de gravité de l'élément k .

À chaque élément constituant le mécanisme est associée une matrice de transmission élémentaire de position, notée \mathbf{P}_k , permettant de connaître la position du centre de gravité G_k de l'élément k par rapport à l'origine O du système. À noter que le centre de gravité peut se trouver n'importe où dans l'espace indépendamment de la géométrie de

la membrure. En fait, les deux premières rangées font référence au positionnement du centre de gravité dans le plan xy alors que la troisième rangée indique son orientation. Puisque les variables dépendantes peuvent être entièrement définies en fonction des coordonnées généralisées, il en est de même pour la matrice élémentaire de transmission de position.

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} x_{G_k}(\mathbf{q}) & y_{G_k}(\mathbf{q}) & \varphi_k(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (4.23)$$

Par contre, tel que discuté à la section précédente, pour exprimer le positionnement de l'élément k seulement en fonction des coordonnées généralisées, les variables dépendantes doivent être écrites sous forme explicite, ce qui n'est pas communément le cas. Ainsi, de façon plus générale :

$$\mathbf{P}_k(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_{G_k}(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{q})) & y_{G_k}(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{q})) & \varphi_k(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{q})) \end{bmatrix}^T \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (4.24)$$

La matrice de transmission de position du mécanisme notée \mathbf{P} regroupe l'ensemble des matrices de transmission élémentaires de position :

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T & \mathbf{P}_2^T & \dots & \mathbf{P}_m^T \end{bmatrix}^T \quad (4.25)$$

En dérivant la matrice de transmission de position de l'équation (4.25) par rapport au temps, le vecteur vitesse \mathbf{v} des centres de gravité des éléments du mécanisme est déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) &= \frac{d\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) &= \mathbf{B}_p \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

où, analogiquement au système d'équations de vitesse (4.9), $\partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{q}$ est une matrice $3m \times M$ regroupant les dérivées partielles de x_{G_k} , y_{G_k} et φ_k en fonction des coordonnées généralisées, $\partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{x}$ est une matrice $3m \times E$ impliquant les dérivées partielles de x_{G_k} , y_{G_k} et φ_k en fonction des variables dépendantes et $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$ est la matrice des fonctions de transmission \mathbf{C} définie à l'équation (4.13) de sorte que :

$$\mathbf{B}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_1(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_1(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_1(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_M} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_2(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_2(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_2(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{P}_m(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_m(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_m(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial q_M} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{W}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{P}_1(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_1(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_1(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_E} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_2(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_2(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_2(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_E} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{P}_m(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{P}_m(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{P}_m(\mathbf{q}, \mathbf{x})}{\partial x_E} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Chacune des dérivées partielles contenues dans les matrices \mathbf{B}_p et \mathbf{W}_p sont uniquement fonction de la coordonnée généralisée ou de la variable dépendante par rapport à laquelle elle est définie de sorte que les conclusions des équations (4.15) et (4.16) s'appliquent.

En reprenant l'équation (4.26), l'écriture du vecteur vitesse \mathbf{v} des centres de gravité des éléments s'écrit sous forme matricielle comme étant :

$$\mathbf{v} = [\mathbf{B}_p + \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{C}] \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.29)$$

où la matrice de transmission de vitesse \mathbf{V} de dimensions $3m \times M$ est écrite selon l'expression matricielle suivante :

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}_p + \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{C} \quad (4.30)$$

Cette matrice \mathbf{V} sera utilisée pour définir l'énergie cinétique du mécanisme lors de l'élaboration des équations de mouvement à partir des équations de Lagrange (voir section 4.2) et dépend de la matrice \mathbf{C} des fonctions de transmission de vitesse.

Le vecteur accélération des centres de gravité des éléments est obtenu en dérivant le vecteur vitesse \mathbf{v} de l'équation (4.29) par rapport au temps :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + [\dot{\mathbf{B}}_p + \dot{\mathbf{W}}_p \cdot \mathbf{C} + \mathbf{W}_p \cdot \dot{\mathbf{C}}] \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.31)$$

où :

$$\dot{\mathbf{B}}_p = \frac{d\mathbf{B}_p}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial q_M^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial q_M^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial q_M^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dot{q}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dot{q}_M \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{q,p} \cdot \mathbf{K} \quad (4.32)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_P = \frac{d\mathbf{W}_P}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial x_E^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial x_E^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial x_E^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^M \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=1}^M \frac{\partial x_E}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{W}}_P = \mathbf{W}_{x,P} \cdot \mathbf{S} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (4.33)$$

En procédant de la même façon que pour l'écriture des matrices $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{W}}$ et $\dot{\mathbf{C}}$ lors de l'obtention du système matriciel d'accélération (4.14), l'expression du vecteur accélération (4.31) peut être développée sous la forme :

$$\mathbf{a} = \mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_{q,P} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{W}_{x,P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{W}_P \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.34)$$

où les matrices \mathbf{K} , \mathbf{S} et \mathbf{E} sont présentées respectivement aux équations (4.17), (4.18) et (4.20). La matrice \mathbf{D} est la matrice des fonctions de transmission d'accélération.

La dérivée de la matrice de transmission de vitesse \mathbf{V} en fonction du temps apparaissant à l'équation (4.31) peut être écrite sous la même forme que la matrice $\dot{\mathbf{C}}$ de l'équation (4.20) de sorte que :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial q_j \partial q_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial q_j \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_1}{\partial q_j \partial q_M} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial q_j \partial q_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial q_j \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_2}{\partial q_j \partial q_M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial q_j \partial q_1} & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial q_j \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathbf{P}_m}{\partial q_j \partial q_M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \quad (4.35)$$

Cette expression peut être comparée à celle obtenue à l'équation (4.34) comme suit :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}_{q,p} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{W}_{x,p} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (4.36)$$

De cette façon, le vecteur accélération se résume à l'expression suivante :

$$\mathbf{a} = \mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (4.37)$$

Les matrices de transmission de vitesse \mathbf{V} et d'accélération \mathbf{A} interviennent dans la définition des équations de mouvement d'un mécanisme à membrures. Il faut se rappeler que les fonctions de transmission de vitesse et d'accélération font partie intégrante de ces matrices de transmission.

4.2 Expression générale des équations de mouvement

L'équation de Lagrange est une équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre faisant intervenir les notions d'énergie cinétique et d'efforts généralisés :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (4.38)$$

qui écrit sous forme matricielle correspond plutôt à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (4.39)$$

Avec :

\mathbf{T} : Matrice colonne définissant l'ensemble de l'énergie cinétique du mécanisme

\mathbf{Q} : Matrice colonne des efforts généralisés

À noter que, dans notre cas, le poids de chacun des éléments est considéré comme une force extérieure, c'est-à-dire, que ce dernier sera inclus dans la matrice \mathbf{Q} .

Ainsi, pour M coordonnées généralisées, un système de M équations différentielles ordinaires de deuxième ordre à coefficients variables devra être résolu afin d'obtenir la variation des coordonnées généralisées de position et des vitesses généralisées en fonction du temps. Ensuite, en revenant à l'équation (4.39), les accélérations généralisées pourront être déduites.

Les paramètres inertiels de chacun des éléments sont introduits au sein d'une matrice carrée notée \mathbf{M}_k . Cette matrice de dimensions $3m \times 3m$ est nommée matrice d'inertie élémentaire et fait apparaître sur sa diagonale la masse et le moment d'inertie de masse de l'élément k .

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} m_k & 0 & 0 \\ 0 & m_k & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_k} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Les matrices élémentaires d'inertie sont placées sur la diagonale de la matrice d'inertie \mathbf{M} de dimensions $3m^2 \times 3m^2$.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_m \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

À noter que chaque $\mathbf{0}$ dans la matrice d'inertie correspond en fait à une matrice nulle de dimension 3×3 .

L'énergie cinétique de l'ensemble du mécanisme correspond à la somme des énergies cinétiques de chacun des éléments le constituant. Cette énergie cinétique est définie en fonction de la matrice d'inertie, mais aussi en fonction de la matrice de transmission

de vitesse telle que définie à la section 4.1.4. Il faut se rappeler que la matrice de transmission de vitesse tient compte à la fois du caractère translationnel et rotationnel du mouvement de l'élément de sorte que :

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 + \frac{1}{2} I_{G_k} \boldsymbol{\omega}_k^2 \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.42)$$

La puissance \mathbf{P}_k des efforts extérieurs agissant sur un élément k se note :

$$\mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}_k^T \mathbf{F}_k = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}_k \quad (4.43)$$

où \mathbf{F}_k est la matrice des forces agissant au centre de gravité de l'élément k . Cette matrice est de dimensions 3×1 et ces deux premières rangées font référence à des forces extérieures orientées selon les axes de référence x et y respectivement appliquées au centre de gravité de l'élément k (comme le poids) tandis que la troisième rangée correspond à un moment extérieur (par exemple, un couple moteur).

La matrice élémentaire des efforts généralisés associée à l'élément k peut être dégagée de l'équation (4.43) :

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{V}_k^T \mathbf{F}_k \quad (4.44)$$

Comme ce fût le cas pour les matrices de transmission, les matrices des forces \mathbf{F} et des efforts généralisés \mathbf{Q} tiennent compte de l'ensemble des matrices élémentaires \mathbf{F}_k et \mathbf{Q}_k :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T & \mathbf{F}_2^T & \cdots & \mathbf{F}_m^T \end{bmatrix}^T \quad (4.45)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T & \mathbf{Q}_2^T & \cdots & \mathbf{Q}_m^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{V}^T \mathbf{F} \quad (4.46)$$

Les M équations de mouvement du mécanisme sont obtenus en introduisant les expressions de l'énergie cinétique du mécanisme (4.42) et des efforts généralisés (4.46) dans l'équation de Lagrange (4.39) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} \right) &= \mathbf{V}^T \mathbf{F} \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) &= \mathbf{V}^T \mathbf{F} \\ \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{d\mathbf{V}^T}{dt} \mathbf{M} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left(2 \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) &= \mathbf{V}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (4.47)$$

En substituant le résultat de l'équation (4.35) :

$$(\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{E}^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{E}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{E} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}^T \mathbf{F} \quad (4.48)$$

Les équations de mouvement sous forme matricielle peuvent s'écrire en isolant le vecteur de coordonnées généralisées d'accélération :

$$\ddot{\mathbf{q}} = (\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V})^{-1} \cdot (\mathbf{V}^T \mathbf{F} - \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{E} \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.49)$$

$(\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V})^{-1}$ est toujours inversible puisque ce produit matriciel est défini positif. En observant l'expression de ces équations de mouvement, il est possible d'imaginer comment leur expression analytique est complexe et lourde mathématiquement. Les matrices \mathbf{V} , \mathbf{A} contiennent les fonctions de transmission comprises dans les matrices \mathbf{C} et \mathbf{D} , qui elles, sont à leur tour fonction des variables dépendantes. Pour être en mesure de résoudre ces équations de mouvement, il faudrait aussi écrire chacune des variables dépendantes en fonction des coordonnées généralisées.

Cet inconvénient sera contourné en calculant les fonctions et matrices de transmission à chaque instant t (relatif à une combinaison précise des coordonnées généralisées) par

une méthode numérique (section 5.1.2) ou à l'aide des modèles cinématiques des structomats (section 5.1.3). La procédure dynamique d'intégration des équations de mouvement est introduite à la section 5.2.

CHAPITRE 5

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT

Une fois que les équations de mouvement d'un mécanisme sont écrites, le défi est de les intégrer dans le but d'obtenir la variation des variables généralisées en fonction du temps.

La première sous-section de ce chapitre fait référence aux calculs des fonctions et des matrices de transmission requises pour l'écriture des équations de mouvement (4.49). La seconde propose une procédure numérique pour les intégrer. La troisième sous-section fait référence aux caractéristiques du couple de certains moteurs. L'avant-dernière sous-section introduit la méthode de Runge-Kutta pour la résolution de système d'équations différentielles tandis que la dernière discute de la procédure dynamique adaptée pour l'étude du CCC.

5.1 Calcul des fonctions et matrices de transmission

Pour l'écriture des équations de mouvement, les fonctions de transmission incluses dans les matrices de fonctions de transmission de vitesse \mathbf{C} et d'accélération \mathbf{D} en plus des matrices de transmission de vitesse \mathbf{V} et d'accélération \mathbf{A} peuvent être calculées de trois façons distinctes :

- en considérant leurs expressions analytiques ;
- en utilisant les notions de différenciation numérique ;
- en utilisant les modèles cinématiques des structomats.

Dranga et Manolescu [46, 47] de même que Handra-Luca [51] présentent les matrices de transmission sous forme analytique et ne font mention d'aucune méthode

alternative. De plus, les auteurs ne font aucun commentaire concernant l'obtention des fonctions de transmission.

Les prochaines sous-sections détaillent une procédure, pour chacun des points mentionnés, afin de calculer conjointement les fonctions et matrices de transmission.

5.1.1 *Obtention des fonctions/matrices de transmission analytiquement*

Les outils de calcul symbolique d'un logiciel tel Matlab® sont utilisés pour implémenter une procédure capable de déduire les fonctions et matrices de transmission de vitesse et d'accélération relatives à un mécanisme détenant M degré de mobilité.

Les équations de position $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (fonctions de transmission de position) et la matrice de transmission de position \mathbf{P} doivent être initialisées pour que les dérivées partielles contenues dans les matrices \mathbf{B} , \mathbf{W} , \mathbf{B}_P et \mathbf{W}_P soient déduites.

En reprenant le système matriciel de vitesse (4.10), la matrice des fonctions de transmission de vitesse peut être déduite directement :

$$\mathbf{C} = -\mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{\det \mathbf{W}} [\text{com} \mathbf{W}]^T \cdot \mathbf{B} \quad (5.1)$$

où $\det \mathbf{W}$ est le déterminant de la matrice jacobienne \mathbf{W} et $\text{com} \mathbf{W}$ est la matrice des cofacteur de cette même matrice jacobienne.

de sorte que la matrice de transmission de vitesse \mathbf{V} peut être calculée en utilisant l'équation (4.30).

La procédure pour écrire la matrice de transmission de vitesse sous forme analytique est illustrée à la figure 28.

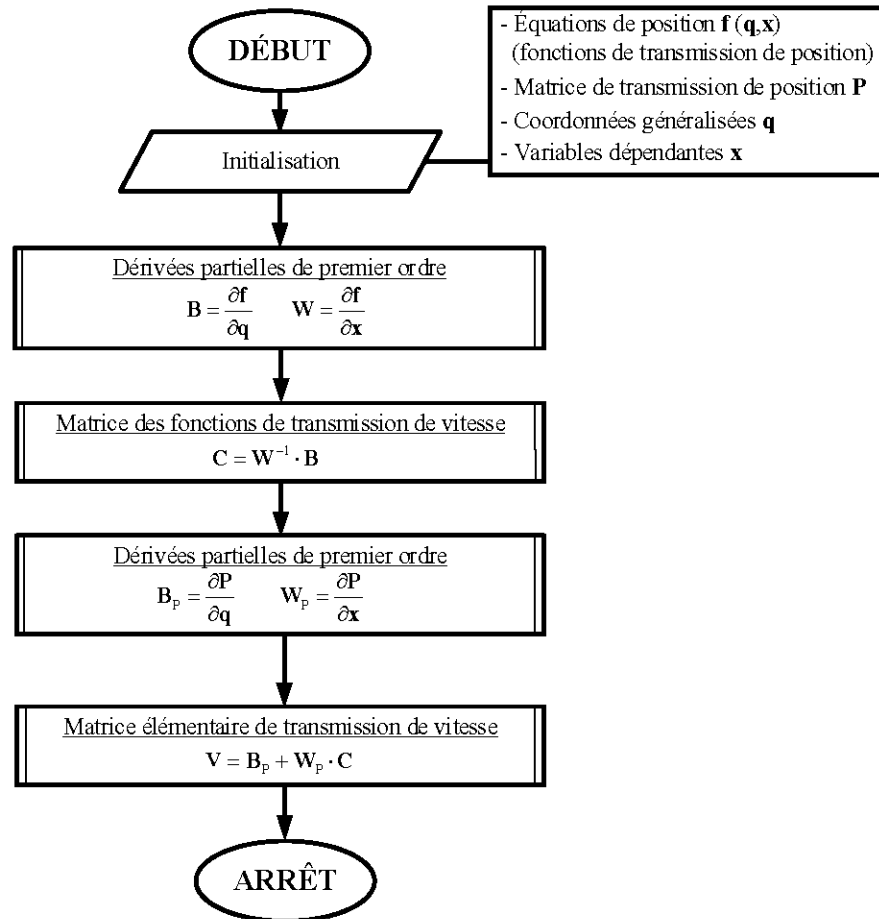


Figure 28 Procédure pour l'obtention de la matrice de transmission de vitesse \mathbf{V}

La matrice des fonctions de transmission d'accélération \mathbf{D} (4.20) n'est pas obtenue systématiquement. Des valeurs particulières des coordonnées généralisées de vitesse $\dot{\mathbf{q}}$ et d'accélération $\ddot{\mathbf{q}}$ doivent être introduites pour y parvenir.

Ainsi, en imposant que les coordonnées généralisées d'accélération $\ddot{\mathbf{q}}$ sont nulles (hypothèse facilitant le calcul des fonctions de transmission) :

$$\ddot{\mathbf{q}} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \quad (5.2)$$

le système matriciel (4.22) est réduit à :

$$\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_x \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

En isolant le produit matriciel contenant les fonctions de transmission d'accélération à gauche de l'égalité, le système (5.3) se réécrit comme suit :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{W}^{-1} \left(\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_x \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) \quad (5.4)$$

où le produit $\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{q}}$ dépend seulement des coordonnées généralisées de vitesse :

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_M \end{bmatrix} = \left[\dot{q}_j \dot{q}_1 \quad \dot{q}_j \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_j \dot{q}_M \right]^T \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (5.5)$$

Les fonctions de transmission d'accélération non mixtes ($\partial^2 x_i / \partial q_j^2$) sont déduites lorsque l'ensemble des coordonnées généralisées de vitesse $\dot{\mathbf{q}}$ sont nulles à l'exception d'une seule, notée \dot{q}_j , qui est imposée comme étant unitaire. Ces fonctions de transmission d'accélération sont donc obtenues successivement.

Sous cette condition, l'équation matricielle (5.4) se simplifie à :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_j^2} = -\mathbf{W}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial q_j^2} + \sum_{i=1}^E \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i^2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \right) \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (5.6)$$

où la totalité des dérivées partielles à droite de l'égalité sont connues.

Les dérivées partielles mixtes ($\partial^2 x_i / \partial q_k \partial q_j$) sont calculées en considérant que les k -ième et j -ième coordonnées généralisées sont unitaires lorsque les autres sont nulles de sorte que le système matriciel (5.4) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_j^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_k^2} = -\mathbf{W}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial q_j^2} + \sum_{i=1}^E \sum_{z=1}^M \sum_{w=1}^M \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_z} \frac{\partial x_i}{\partial q_w} \right) \quad (j, k = 1, 2, \dots, M) \quad (5.7)$$

Les fonctions de transmission d'accélération mixtes sont déduites en utilisant les résultats fournis par l'équation (5.7). Ainsi, l'écriture de la matrice des fonctions de transmission \mathbf{D} peut être complétée et utilisée pour déduire les expressions comprises dans la matrice de transmission d'accélération \mathbf{A} .

Pour la continuité du discours, l'équation (4.36) est réécrite :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}_{q,p} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{W}_{x,p} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{W}_p \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (5.8)$$

Puisque le produit matriciel $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ est une matrice de dimensions $M^2 \times M$, les colonnes de la matrice \mathbf{A} sont dégagées par identification. Pour obtenir l'ensemble des dérivées partielles (mixtes ou non) de la matrice de fonction de transmission \mathbf{P} , une seule coordonnée généralisée de vitesse est imposée comme étant unitaire lorsque les autres sont supposées nulles. Si, comme pour la matrice des fonctions de transmission \mathbf{D} , une combinaison de deux coordonnées généralisées de vitesse est considérée, c'est plutôt une sommation des dérivées partielles qui sera obtenue.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \begin{cases} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j \partial q_1} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j \partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j \partial q_M} \right], \\ \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j \partial q_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_k \partial q_1} \right) \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j \partial q_2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_k \partial q_2} \right) \quad \dots \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j \partial q_M} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_k \partial q_M} \right) \right] \end{cases} \quad (5.9)$$

La première rangée de l'équation (5.9) est valable lorsque $\dot{q}_j = 1$ et la seconde lorsque $\dot{q}_j = \dot{q}_k = 1$.

Ainsi, en considérant la j -ième coordonnée généralisée comme étant unitaire, les dérivées partielles non mixtes $\partial^2 \mathbf{P} / \partial q_j^2$ de la j -ième colonne de la matrice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ sont obtenues de sorte que, par identification avec le côté droit de l'équation (5.8) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j^2} + \sum_{i=1}^E \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x_i^2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 + \sum_{i=1}^E \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j^2} \quad (5.10)$$

Pour les dérivées partielles mixtes $\partial^2 \mathbf{P} / \partial q_j \partial q_k$, toujours en considérant la j -ième coordonnée généralisée comme étant unitaire, ces dernières sont dégagées en tenant compte de la k -ième colonne de la matrice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$ de sorte que, par identification avec le côté droit de l'équation (5.8) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial q_j \partial q_k} = \sum_{i=1}^E \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} + \sum_{i=1}^E \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial x_i^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (5.11)$$

La procédure faisant appel aux valeurs particulières des coordonnées généralisées de vitesse pour le calcul des fonctions et matrices de transmission d'accélération pour un mécanisme détenant M degré de mobilité est illustrée à la figure 29. Il est nécessaire de tenir compte au préalable de la procédure pour l'obtention de la matrice de transmission de vitesse \mathbf{V} (voir figure 28).

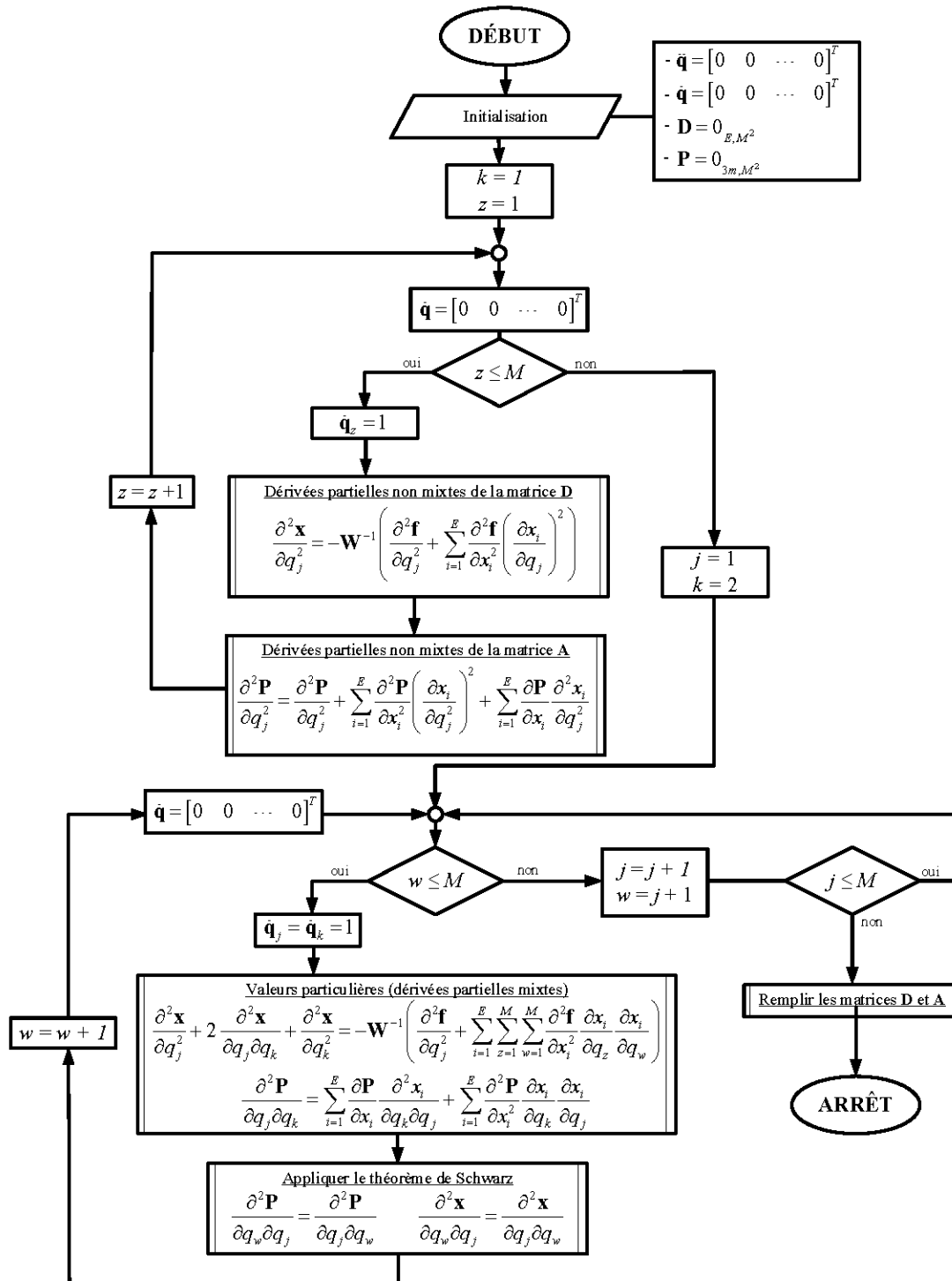


Figure 29 Procédure pour l'obtention des matrices **D** et **A**

5.1.2 Obtention des fonctions/matrices de transmission numériquement

Du point de vue numérique, comme pour la méthode analytique, deux concepts mathématiques sont requis : les équations de position du mécanisme et la matrice de transmission de position du mécanisme.

Les dérivées partielles requises pour l'obtention de la matrice de transmission de vitesse \mathbf{V} (voir figure 28) sont calculées en utilisant la notion de différenciation numérique centrée d'ordre 4 :

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_j} = \frac{-f_i(x+2\varepsilon) + 8f_i(x+\varepsilon) - 8f_i(x-\varepsilon) + f_i(x-2\varepsilon)}{12\varepsilon} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j^2} = \frac{-f_i(x+2\varepsilon) + 16f_i(x+\varepsilon) - 30f_i(x) + 16f_i(x-\varepsilon) - f_i(x-2\varepsilon)}{12\varepsilon^2} \quad (5.13)$$

où ε est le pas entre les points d'interpolation et où la fonction f peut être perçue comme étant soit les équations de position \mathbf{f} ($i = 1, 2, \dots, E$) ou soit la matrice de transmission de position \mathbf{P} ($i = 1, 2, \dots, m$). Aussi, z peut être considéré comme étant les coordonnées généralisées \mathbf{q} ou les variables dépendantes \mathbf{x} .

Pour calculer les dérivées partielles numériques centrées d'ordre 4, plusieurs évaluations des équations de position ou de la matrice de transmission de position sont requises. Il serait possible de réduire ce nombre en diminuant l'ordre. Par contre, ceci résulterait en une diminution de la précision. De plus, la valeur du paramètre ε doit être soigneusement étudiée : il est recommandé d'utiliser $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ [33, 52].

Les matrices \mathbf{D} et \mathbf{A} sont calculées en suivant la procédure développée à la section 5.1.1 et illustrée à la figure 29 en stockant les évaluations de la fonction f apparaissant aux équations (5.12) et (5.13) dans une matrice de trois dimensions où une rangée correspond à la i -ième fonction f , une colonne correspond à une coordonnée généralisée

ou une variable dépendante et la profondeur fait référence à une évaluation spécifique de la fonction en tenant compte du paramètre ε .

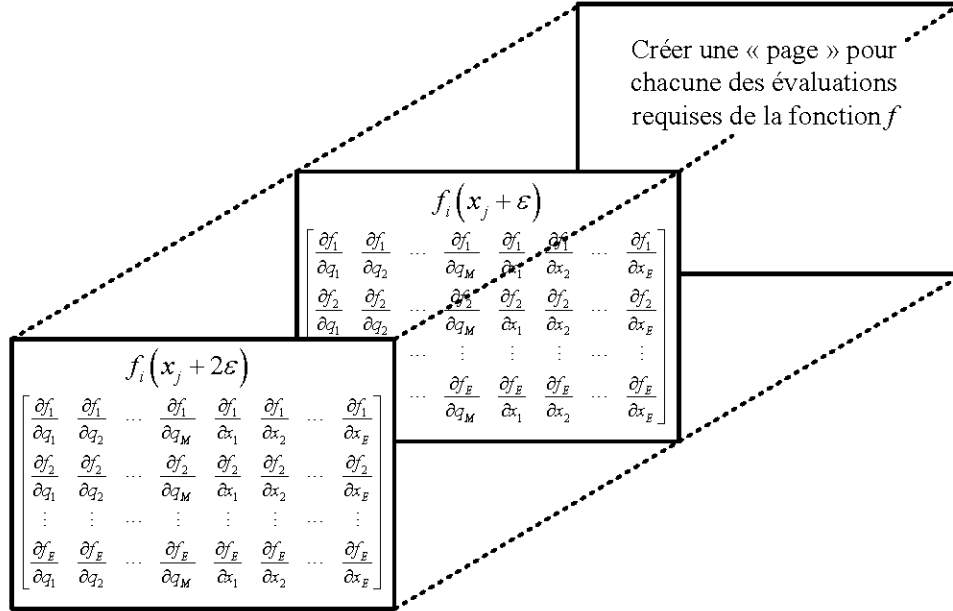


Figure 30 Matrice stockant les évaluations de la fonction f requises pour

Le fait d'utiliser la différenciation numérique pour évaluer les dérivées partielles réduit drastiquement le temps de calcul puisque les opérations symboliques sont écartées. Toutefois, puisque les valeurs numériques comprises dans les matrices **C**, **D**, **V** et **A** sont valables uniquement pour l'étude du mécanisme à l'instant t (pour des valeurs précises des coordonnées généralisées), les équations de mouvement doivent être actualisés à chaque instant t étudié suivant la procédure présentée à la figure 33.

5.1.3 Obtention des fonctions/matrices de transmission en utilisant les modèles cinématiques des structomats

Cette technique est une application directe de l'analyse cinématique classique par l'utilisation des modèles cinématiques des structomats présentés à la section 3.2. La procédure pour le calcul des fonctions de transmission se fait par l'analyse cinématique

d'un mécanisme. Cette procédure a pour unique but de remplir les matrices **C**, **D**, **V** et **A** requises pour l'écriture des équations de mouvement à un instant t .

L'obtention des fonctions et matrices de transmission en utilisant les modèles cinématiques des structomats permet de simplifier énormément les calculs puisque les systèmes matriciels (4.10), (4.22), (4.30) et (4.36) de la section 4.1 ne sont pas considérés. L'application des modèles cinématiques des structomats est directe et permet de calculer les dérivées partielles contenues dans les matrices **C**, **D**, **V** et **A** selon la séquence de transmission de mouvement du mécanisme.

5.1.3.1 Fonctions de transmission

Les équations de position d'un structomat sont écrites en fonction des coordonnées généralisées et des variables dépendantes. Il est connu que les n variables dépendantes constituant un structomat peuvent être entièrement définies en fonction des coordonnées généralisées :

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{q}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.14)$$

En dérivant les équations de position d'un structomat, l'expression des paramètres cinématiques de vitesse et d'accélération des n variables dépendantes, se notent comme suit :

$$\dot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^M \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.15)$$

$$\ddot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^M \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^M \sum_{r=1}^M \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_r \partial q_j} \cdot \dot{q}_j \dot{q}_r \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.16)$$

qui sont les mêmes expressions que celles présentées précédemment aux équations (4.7) et (4.8).

À noter que φ_i , $\dot{\varphi}_i$ et $\ddot{\varphi}_i$ sont les paramètres cinématiques des variables dépendantes calculés en utilisant directement les modèles cinématiques des structomats et, évidemment, dépendent des fonctions de transmission.

Afin d'extraire les fonctions de transmission, l'astuce est d'imposer successivement des valeurs particulières aux coordonnées généralisées afin d'extirper une à une les fonctions de transmission relatives aux variables dépendantes. Pour plusieurs structomats constituant un mécanisme, les fonctions de transmission sont calculées successivement selon la séquence de transmission du mouvement.

En considérant que toutes les coordonnées généralisées de vitesse sont nulles à l'exception de $\dot{q}_z = 1$, les paramètres cinématiques calculés avec le modèle cinématique d'un structomat permettent de dégager les fonctions de transmission de vitesse et d'accélération par rapport à cette z -ième coordonnée généralisée de sorte que :

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_z} \quad (i = 1, 2, \dots, E) \quad (5.17)$$

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_z^2} \quad (i = 1, 2, \dots, E) \quad (5.18)$$

Lorsque la valeur d'une vitesse généralisée est imposée, celle-ci est valable pour l'ensemble du mécanisme et donc pour l'ensemble des structomats constituant sa séquence de transmission de mouvement.

Pour évaluer les fonctions de transmission d'accélération relatives à des dérivées partielles mixtes, une combinaison de deux coordonnées généralisées de vitesse est considérée comme étant unitaire pendant que les autres coordonnées généralisées de vitesse sont nulles. À ce stade, les coordonnées généralisées d'accélération sont imposées comme étant nulles de sorte que $\ddot{\mathbf{q}} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$.

Avec l'équation (5.16) et en supposant que $\dot{q}_j = \dot{q}_k = 1$, les paramètres cinématiques d'accélération des n variables dépendantes d'un structomat suivent la relation :

$$\ddot{\varphi}_i = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial^2 q_j^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_k \partial q_j} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial^2 q_k^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_j \partial q_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.19)$$

En considérant le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\ddot{\varphi}_i - \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_j^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_k^2} \right)}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.20)$$

Les autres fonctions de transmission d'accélération sont obtenues de façon similaire en « activant » simultanément une certaine combinaison de coordonnées généralisées de vitesse.

5.1.3.2 Matrices de transmission

Le calcul des dérivées partielles incluses dans les matrices de transmission \mathbf{V} et \mathbf{A} se fait conjointement aux calculs des fonctions de transmission de vitesse et d'accélération d'un structomat. (voir procédure de la figure 31).

En fait, telles qu'introduites à la section 4.1.4, les dérivées partielles contenues dans les matrices de transmission \mathbf{V} et \mathbf{A} sont celles obtenues à partir de la matrice de transmission de position \mathbf{P} , contenant l'ensemble des matrices élémentaires de position \mathbf{P}_k , voir équation (4.24), en fonction des coordonnées généralisées. Suite à l'obtention des fonctions de transmission d'un structomat, le modèle cinématique du motoélément R est utilisé pour calculer les paramètres cinématiques des centres de gravité des m_s éléments constituant un structomat, et ce, en considérant les mêmes valeurs particulières des coordonnées généralisées de vitesse ayant servies au calcul des fonctions de transmission du structomat.

Comme ce fut le cas pour les matrices **C** et **D**, les matrices de transmission **V** et **A** peuvent être remplies successivement, c'est-à-dire colonne par colonne.

Ainsi, lorsqu'une coordonnée généralisée de vitesse \dot{q}_z est supposée unitaire lorsque toutes les autres sont nulles, la dérivée partielle de la matrice élémentaire de position de chacun des m_s éléments constituant le structomat par rapport à cette coordonnée généralisée de vitesse peut être calculée :

$$\frac{\partial \mathbf{P}_k}{\partial \dot{q}_z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial \dot{q}_z} \\ \frac{\partial y_k}{\partial \dot{q}_z} \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial \dot{q}_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{vitesse } v_x \text{ du centre de gravité } G_k \\ \text{vitesse } v_y \text{ du centre de gravité } G_k \\ \text{vitesse angulaire } \dot{\varphi} \text{ de l'élément } k \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, m_s) \quad (5.21)$$

Il en est de même pour la dérivée partielle de second ordre :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}_k}{\partial \dot{q}_z^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \dot{q}_z^2} \\ \frac{\partial^2 y_k}{\partial \dot{q}_z^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \dot{q}_z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{accélération } a_x \text{ du centre de gravité } G_k \\ \text{accélération } a_y \text{ du centre de gravité } G_k \\ \text{accélération angulaire } \ddot{\varphi} \text{ de l'élément } k \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, m_s) \quad (5.22)$$

Pour ce qui est des dérivées partielles mixtes apparaissant dans la matrice de transmission d'accélération **A**, comme ce fût le cas pour les fonctions de transmission, il est nécessaire de considérer qu'une combinaison de deux coordonnées généralisées de vitesse \dot{q}_j et \dot{q}_k soit supposée unitaire lorsque les coordonnées généralisées d'accélération sont nulles.

Avec le théorème de Schwarz :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_k \partial q_j} \\ \frac{\partial^2 y_k}{\partial q_k \partial q_j} \\ \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial q_k \partial q_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j \partial q_k} \\ \frac{\partial^2 y_k}{\partial q_j \partial q_k} \\ \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial q_j \partial q_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(a_x)_{G_k} - \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j^2} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_k^2} \right)}{2} \\ \frac{(a_y)_{G_k} - \left(\frac{\partial^2 y_k}{\partial q_j^2} + \frac{\partial^2 y_k}{\partial q_k^2} \right)}{2} \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, m_s) \quad (5.23)$$

Ainsi, la relation permettant le calcul des dérivées partielles mixte des matrices élémentaires de transmission de position est écrite analogiquement à celle définie à l'équation (5.20).

À noter que si l'élément k est associé à une coordonnée généralisée, la dérivée partielle $\partial^2 \varphi_k / \partial q_j \partial q_k$ est forcément nulle.

La procédure pour le calcul des fonctions et matrices de transmission à l'aide des modèles cinématiques des structomats est présentée à la figure 32.

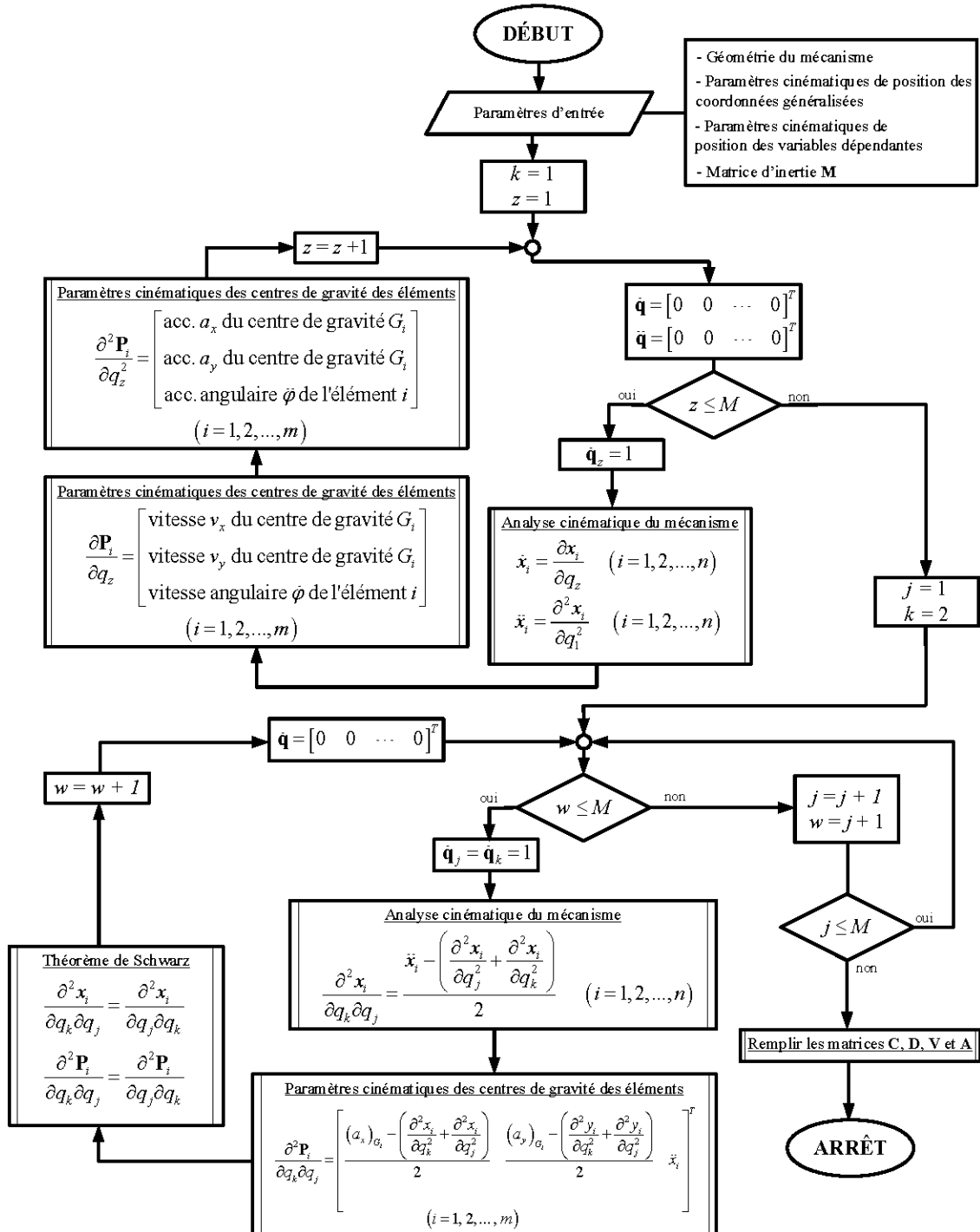


Figure 31 Calcul des matrices de transmission avec les modèles cinématiques

5.2 Implémentation à l'aide d'un logiciel informatique

Lorsque la géométrie et les paramètres inertiels des éléments du mécanisme, les lois de mouvement des moteurs et les conditions initiales des variables dépendantes sont connus, en spécifiant les paramètres pour l'intégration numérique (section 5.4), la table est mise pour entreprendre l'étude dynamique d'un mécanisme à membrures.

La procédure débute au temps t_0 par l'analyse cinématique du mécanisme. De cette façon, les paramètres cinématiques des variables dépendantes sont calculés. Ces derniers sont par la suite utilisés pour performer l'analyse cinétostatique.

L'intégration des équations de mouvement permet l'obtention des paramètres cinématiques des coordonnées généralisées pour l'instant suivant où le pas est calculé en considérant le contrôle de l'erreur (voir section 5.4) de sorte les paramètres cinématiques des variables dépendantes peuvent être déduits pour débiter une nouvelle itération.

La procédure générale pour réaliser l'analyse dynamique d'un mécanisme à membrures est présentée à la figure 32. Les « sous-procédures » pour le calcul des fonctions et matrices de transmission de vitesse et d'accélération, la construction du système d'équations différentielles de premier ordre issu des équations de mouvement, la résolution de ce système d'équations différentielles ainsi que le calcul des forces généralisées sont données aux figures 31, 33, 34 et 35 respectivement.

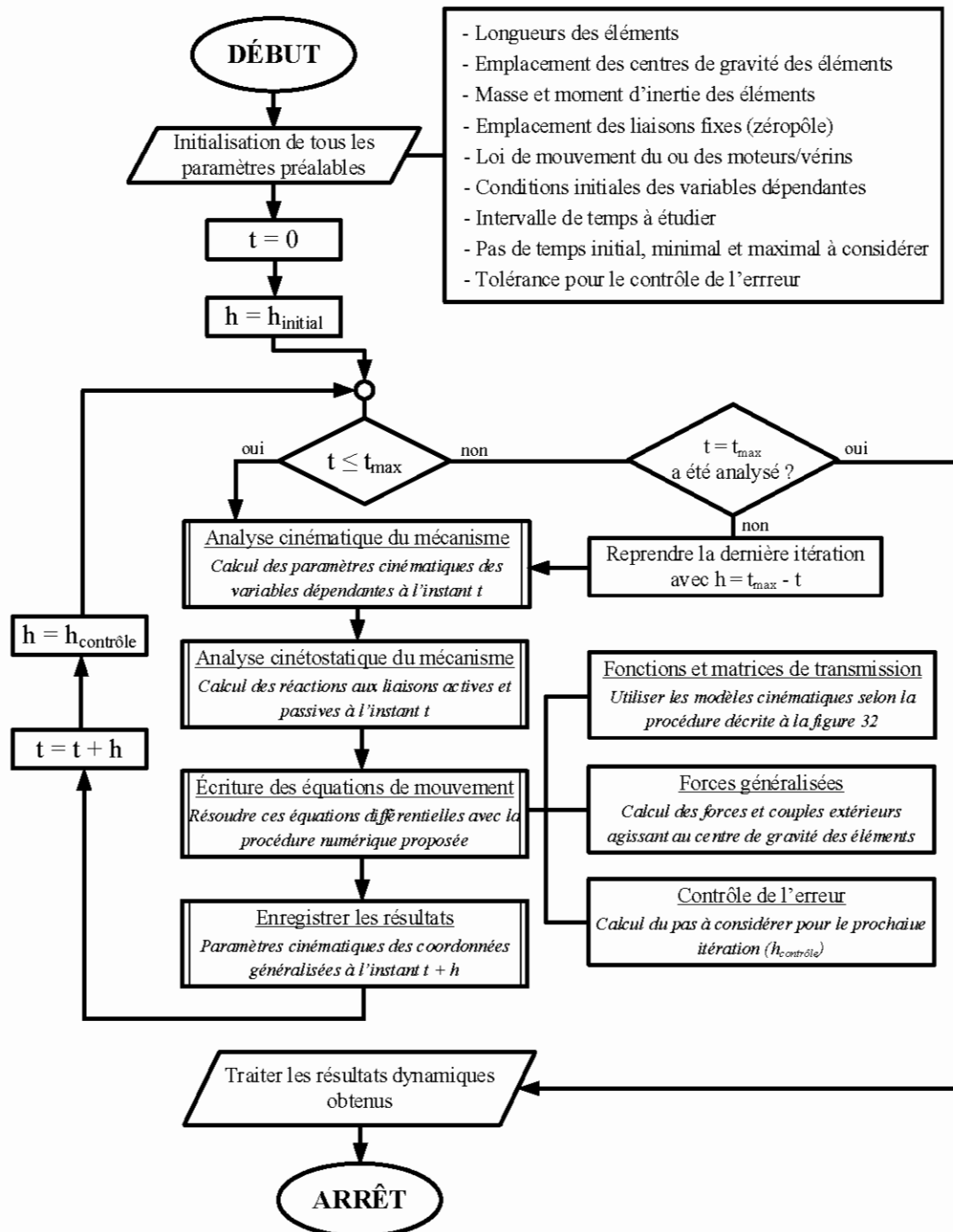


Figure 32 Procédure pour l'analyse dynamique d'un mécanisme

Les équations de mouvement sont converties en un système d'équations différentielles de premier ordre pour chaque itération de la méthode de Runge-Kutta selon la procédure de la figure 34 (voir section 5.4).

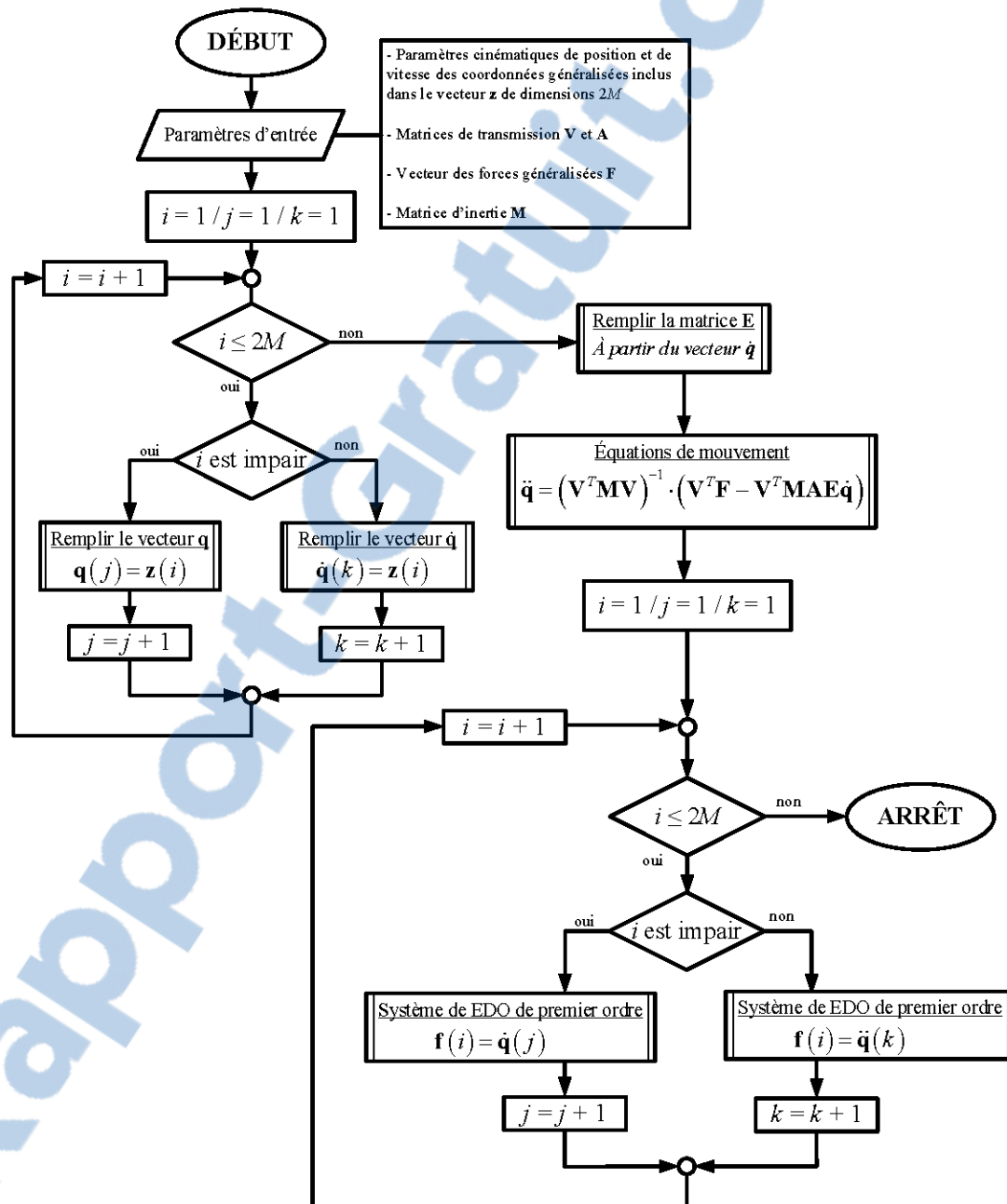


Figure 33 Procédure pour la construction du système d'EDO de premier ordre

Ensuite, le système d'équations différentielles de premier ordre est résolu en tenant compte de la procédure de la figure 35 (voir section 5.4).

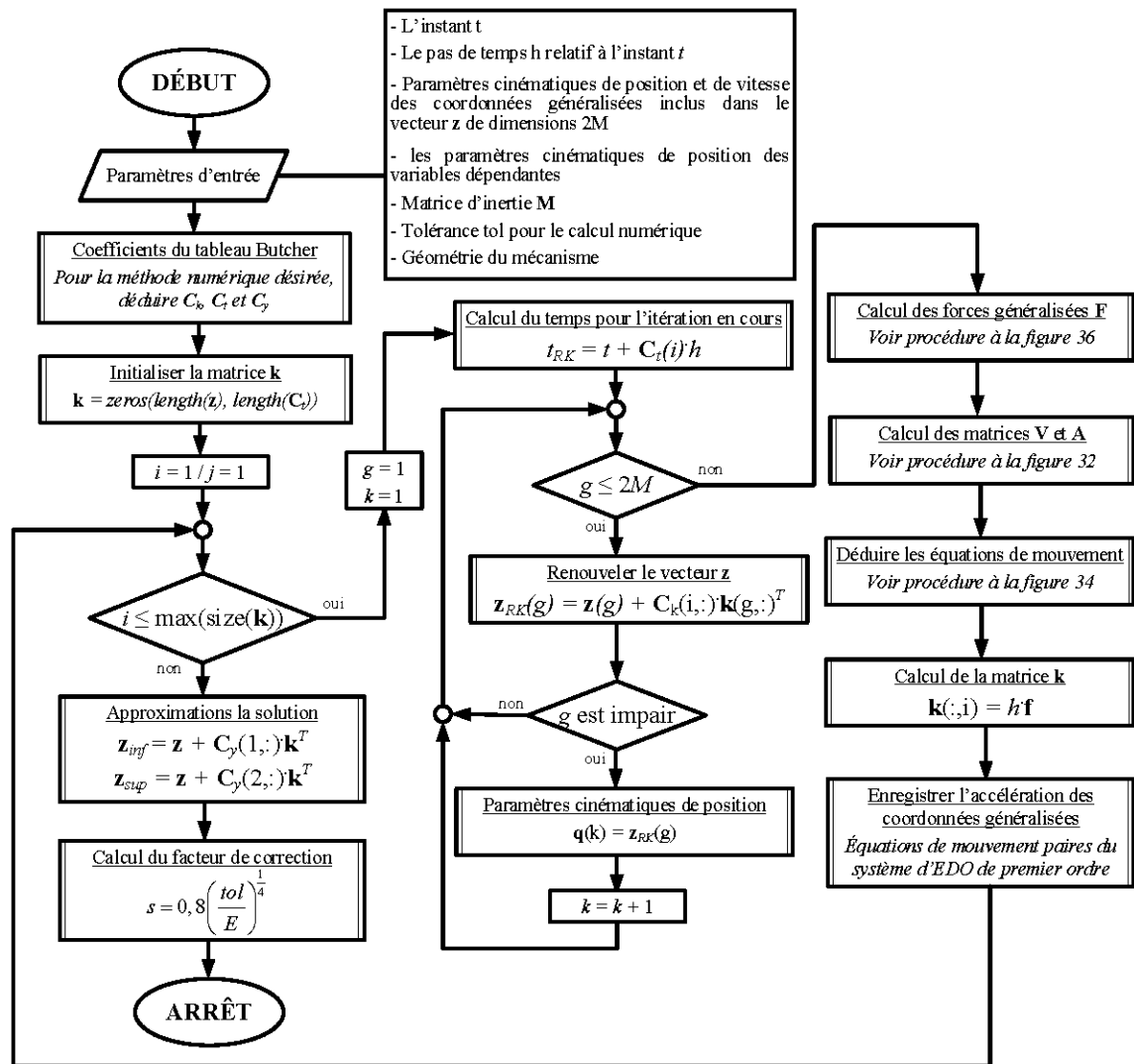


Figure 34 Procédure pour la résolution du système d'EDO de premier ordre

Les forces généralisées doivent être calculées afin de construire les équations de mouvement et appliquer la procédure de la figure 35. Pour ce faire, la procédure suivante est utilisée.

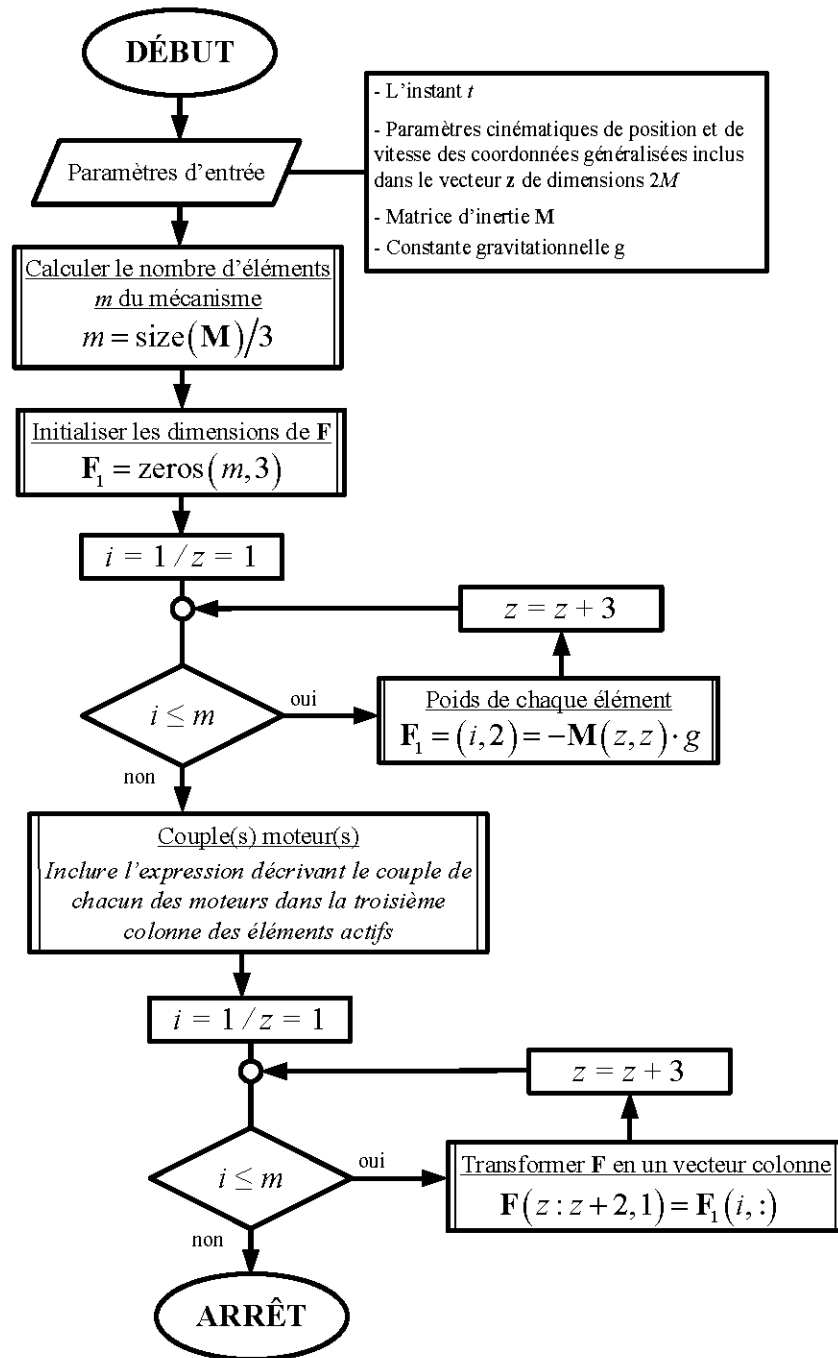


Figure 35 Procédure pour l'écriture des forces généralisées

5.3 Caractéristiques du couple moteur

Dans les écrits de Constantinesco [4], le comportement dynamique du CCC est investigué en considérant un couple moteur constant tel qu'illustré à la figure 36. En imposant un tel couple, la vitesse du moteur peut varier indéfiniment.

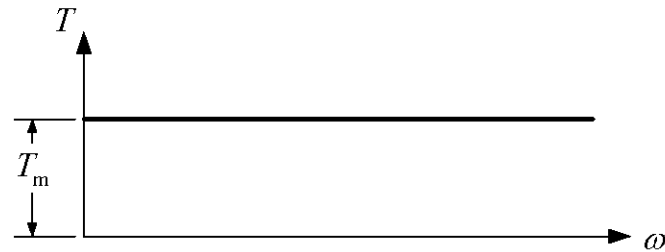


Figure 36 Couple moteur constant en fonction de la vitesse angulaire

Le couple développé pourrait être aussi dépendant de la vitesse angulaire du moteur [48], de sorte que le couple augmente au démarrage avant de se stabiliser dans la zone de travail compris entre les points C et D de la figure 37. Ainsi, dans cette zone de travail, une augmentation de la vitesse angulaire du moteur résulte en une diminution du couple.

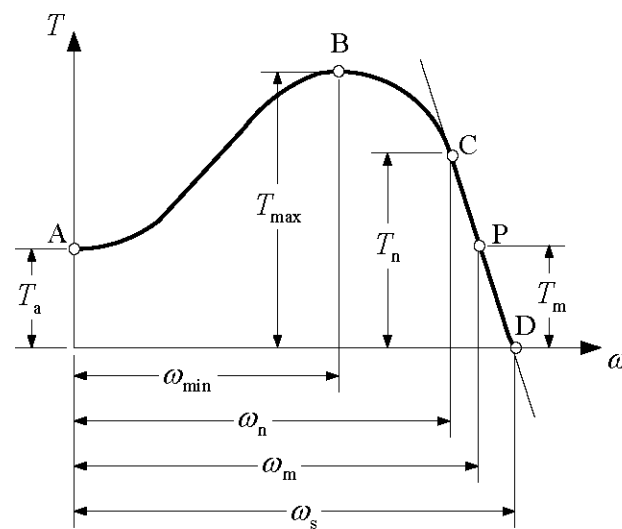


Figure 37 Caractéristique mécanique du couple d'un moteur asynchrone

Pour se rapprocher du comportement observé expérimentalement, le couple est posé égal à un polynôme de deuxième degré de la vitesse angulaire du moteur [48] :

$$T_m = a_m + b_m \cdot \omega + c_m \cdot \omega^2 \quad (5.24)$$

où :

$$a_m = - \frac{\omega_s (T_m \omega_{\min}^2 - T_m \omega_s \omega_{\min} - T_{\max} \omega_n^2 + T_{\max} \omega_s \omega_n)}{(\omega_{\min} - \omega_n)(\omega_{\min} - \omega_s)(\omega_n - \omega_s)} \quad (5.25)$$

$$b_m = \frac{T_n (\omega_{\min}^2 - \omega_s^2) + T_{\max} (\omega_s^2 - \omega_n^2)}{(\omega_{\min} - \omega_n)(\omega_{\min} - \omega_s)(\omega_n - \omega_s)} \quad (5.26)$$

$$c_m = - \frac{T_n (\omega_{\min} - \omega_s) + T_{\max} (\omega_s - \omega_n)}{(\omega_{\min} - \omega_n)(\omega_{\min} - \omega_s)(\omega_n - \omega_s)} \quad (5.27)$$

Peu importe la définition du couple moteur, il est nécessaire d'introduire son expression dans la matrice des forces généralisées F .

5.4 Méthode de Runge-Kutta pour l'intégration des équations de mouvement

La majorité des méthodes numériques sont conçues pour résoudre une équation ou un système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre. Pour adapter l'équation ou le système d'équations de mouvement (4.49), une série de paramètres est introduite :

$$\begin{array}{llll} z_1 = q_1 & z_3 = q_2 & \dots & z_{n-1} = q_M \\ z_2 = \dot{q}_1 & z_4 = \dot{q}_2 & & z_n = \dot{q}_M \end{array} \quad (n = 2M) \quad (5.28)$$

En effectuant la dérivée première de chacun de ces paramètres, la conversion de chacune des équations de mouvement en deux équations différentielles de premier ordre est possible de sorte que :

$$\begin{array}{llll}
\dot{z}_1 = \dot{q}_1 = z_2 & \dot{z}_3 = \dot{q}_2 = z_4 & \dots & \dot{z}_{n-1} = \dot{q}_M = z_n \\
\dot{z}_2 = \ddot{q}_1 & \dot{z}_4 = \ddot{q}_2 & & \dot{z}_n = \ddot{q}_M
\end{array} \quad (5.29)$$

est le système d'équations de premier ordre représentant le comportement dynamique du mécanisme.

Les expressions des coordonnées généralisées d'accélération apparaissant dans l'équation (5.29) correspondent directement à celles fournies par les équations de mouvement de l'équation (4.49). Il suffit d'y substituer les expressions de coordonnées généralisées de position et de vitesse par les paramètres z_i de l'équation (5.28) afin d'obtenir un système d'équations différentielles de premier ordre défini uniquement en fonction de z_i et \dot{z}_i .

La résolution de ce système d'équations différentielles de premier ordre permet habituellement d'obtenir directement la variation des paramètres z_i et \dot{z}_i de l'équation (5.29) sur un certain intervalle de temps prédéfini. Ensuite, en revenant à l'équation (5.28) et aux équations de mouvement (4.49), celle des coordonnées généralisées de position, de vitesse et d'accélération peut être identifiée.

Par contre, puisque les équations de mouvement ne sont pas écrites sous forme analytique et que les fonctions et matrices de transmission doivent être calculées numériquement pour chaque instant t , les équations de mouvement doivent être actualisés pour chaque instant t étudié avant d'être intégrées numériquement (voir la procédure dynamique à la figure 32).

Plusieurs méthodes de la famille de Runge-Kutta peuvent être utilisées pour résoudre le système d'équations différentielles (5.31) au temps t : Heun, Euler, Dormand-Prince, Fehlberg, Cash-Karp, Bogacki-Shampine, Merson, etc. Le choix d'une de ces méthodes repose sur la précision des résultats désirée. En fait, ces méthodes diffèrent concernant l'ordre de l'approximation effectuée. Il est aussi convenable d'introduire un algorithme permettant d'ajuster la valeur du pas de temps entre deux instants

(contrôle de l'erreur). Ainsi, le pas de temps augmente lorsque la variation de la solution est faible et diminue dans le cas contraire. Le contrôle de l'erreur est utile pour réduire le temps de résolution lorsque possible ou pour étudier plus étroitement un intervalle de temps où la solution varie drastiquement. Pour ce faire, deux approximations d'ordre différent sont calculées, et ce, dans le but de déduire une erreur d'approximation, notée E . Cette erreur d'approximation sert à déduire un facteur de correction s qui permet de déduire le pas de temps adéquat à considérer à l'instant suivant :

$$s = \left(\frac{0,8 \times tol}{E} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.30)$$

Si la valeur de s est supérieure à 2, la valeur du pas pour la prochaine itération sera doublée par rapport à l'itération actuelle. Si la valeur de s est inférieure à 1, celle-ci sera plutôt réduite de moitié. Autrement, la valeur de s pour l'itération suivante reste inchangée. Préalablement, des limites inférieures et supérieures pour le pas sont spécifiées.

Dans le cadre de ce mémoire, la méthode de Dormand-Prince d'ordres 4 et 5 est utilisée[44]. Cette dernière offre un bon compromis entre précision des résultats et vitesse de calcul. Elle est aussi la méthode implémentée dans la fonction ode45 de Matlab®.

Chaque méthode numérique de la famille de Runge-Kutta fait l'usage de coefficients différents afin de résoudre le système d'équations différentielles de premier ordre pour un instant t . Ceux relatifs à la méthode de Dormand-Prince d'ordre 4 et 5 sont présentés au tableau 3.

Tableau 3 Coefficients du tableau Butcher pour Dormand-Prince d'ordres 4 et 5.

0 ||

1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	-56/15	32/9				
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729			
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	
	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0
	5179/57600	0	7571/16695	393/640	-92097/339200	187/2100	1/40

Lors de l'implémentation de la méthode numérique sous un logiciel informatique (voir figure 34) :

- Les coefficients de la première colonne sont relatifs au calcul du temps et sont notés un vecteur C_k .
- Les coefficients des deux dernières rangées sont liés respectivement à l'approximation d'ordre 4 et d'ordre 5 de la solution et sont incorporés dans une matrice C_z .
- Les coefficients restants (partie centrale) sont stockés dans une matrice C_k et servent aux calculs des coefficients k de la méthode de Runge-Kutta.

Ainsi, la procédure pour l'intégration d'un système d'équations différentielles en utilisant la méthode de Dormand-Prince 4-5 est énumérée aux points suivants :

- 1) Spécifier les limites du pas de temps h_{max} et h_{min} ainsi que sa valeur initiale h_0 , le nombre n d'équations différentielles de premier ordre, les conditions initiales $t_0, z_{10}, z_{20}, \dots, z_{n0}$ et la tolérance tol .

- 2) Calculer les paramètres k_{ij} pour $i = 1, 2, \dots, n$ en considérant les coefficients du tableau 3 :

$$\begin{aligned}
 k_{i,1} &= h_{t_0} f_i(t_0, z_{i0}, z_{20}, \dots, z_{n0}) \\
 k_{i,2} &= h_{t_0} f_i\left(t_0 + \frac{1}{5}h, z_{i0} + \frac{1}{5}k_{i,1}\right) \\
 k_{i,3} &= h_{t_0} f_i\left(t_0 + \frac{3}{10}h, z_{i0} + \frac{3}{40}k_{i,1} + \frac{9}{40}k_{i,2}\right) \\
 k_{i,4} &= h_{t_0} f_i\left(t_0 + \frac{4}{5}h, z_{i0} + \frac{44}{45}k_{i,1} - \frac{56}{12}k_{i,2} + \frac{32}{9}k_{i,3}\right) \\
 k_{i,5} &= h_{t_0} f_i\left(t_0 + \frac{8}{9}h, z_{i0} + \frac{19372}{6561}k_{i,1} - \frac{25360}{2187}k_{i,2} + \frac{64448}{6561}k_{i,3} - \frac{212}{729}k_{i,4}\right) \\
 k_{i,6} &= h_{t_0} f_i\left(t_0, z_{i0} + \frac{9017}{3168}k_{i,1} - \frac{355}{33}k_{i,2} + \frac{46732}{5247}k_{i,3} + \frac{49}{176}k_{i,4} - \frac{5103}{18656}k_{i,5}\right) \\
 k_{i,7} &= h_{t_0} f_i\left(t_0, y_{i0} + \frac{35}{384}k_{i,1} + \frac{500}{1113}k_{i,3} + \frac{125}{192}k_{i,4} - \frac{2187}{6784}k_{i,5} + \frac{11}{84}k_{i,6}\right)
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

- 3) Calcul des approximations d'ordres 4 et 5 :

$$\begin{aligned}
 (z_i)_{4^{\text{e ordre}}} &= z_{i0} + \frac{35}{384}k_{i,1} + \frac{500}{1113}k_{i,3} + \frac{125}{192}k_{i,4} - \frac{2187}{6784}k_{i,5} + \frac{11}{84}k_{i,6} \\
 (z_i)_{5^{\text{e ordre}}} &= z_{i0} + \frac{5179}{57600}k_{i,1} + \frac{7571}{16695}k_{i,3} + \frac{393}{640}k_{i,4} - \frac{92097}{339200}k_{i,5} + \frac{187}{2100}k_{i,6} + \frac{1}{40}k_{i,7}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

- 4) Calcul de l'erreur :

$$E = (z_i)_{5^{\text{e ordre}}} - (z_i)_{4^{\text{e ordre}}} \tag{5.33}$$

- 5) Calcul du facteur de correction et déduire le prochain pas de temps à considérer :

$$s = \left(\frac{0,8 \times tol}{E} \right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{si } s < 1, & h_{t_0+\Delta t} = h_{t_0} / 2 \\ \text{si } 1 \leq s \leq 2, & h_{t_0+\Delta t} = h_{t_0} \\ \text{si } s > 2, & h_{t_0+\Delta t} = 2h_{t_0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{si } h_{t_0+\Delta t} > h_{\max}, & h_{t_0+\Delta t} = h_{\max} \\ \text{si } h_{t_0+\Delta t} < h_{\min}, & h_{t_0+\Delta t} = h_{\min} \end{array} \quad (5.34)$$

- 6) Calcul du prochain temps t à étudier :

$$t_{t_0+\Delta t} = t_0 + h_{t_0+\Delta t} \quad (5.35)$$

Ainsi, pour calculer les paramètres cinématiques des coordonnées généralisées à un instant t , sept évaluations des équations de mouvement sont requises. Il serait possible d'accroître la précision des résultats en utilisant la méthode de Dormand-Prince d'ordre 7 et 8. Par contre, le calcul de treize coefficients k est nécessaire ce qui a pour effet d'augmenter le temps de résolution. La précision des résultats peut aussi être ajustée en réduisant la tolérance tol à l'équation (5.30), ce qui aura pour effet de réduire le facteur de correction s . Toutefois, il est inutile de réduire drastiquement la tolérance puisque le pas de temps h sera buté à sa limite inférieure.

5.5 Étude dynamique du convertisseur de couple de Constantinesco

La procédure dynamique pour l'étude du convertisseur de couple de Constantinesco est semblable à celle présentée à la section 5.2 (voir figure 32). Toutefois, il faut se rappeler qu'un couple résistant est imposé à l'arbre de sortie rendant la structomatique du CCC comme étant évolutive : les modèles structomatiques A et I peuvent définir la transmission du mouvement (voir la section 3.1.2). Ainsi, pour une modélisation dynamique du CCC, le couple généré à la diode mécanique à chaque instant t (suite à l'analyse cinétostatique) doit être pris en considération afin de sélectionner le modèle

structomatique adéquat (selon les conditions de la figure 14) pour bâtir les équations de mouvement.

Les forces sollicitant les membrures 6 et 8 de la diode mécanique peuvent être visualisées à l'aide des DCL de la figure 38.

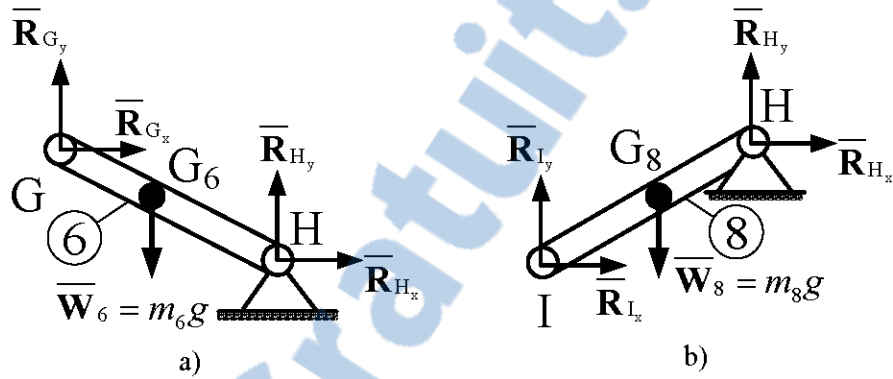


Figure 38 DCL pour le calcul du couple généré aux branches de la diode mécanique

Avec une sommation des moments à la liaison fixe H, les modules des couples générés par la membrure 6 de la branche supérieure de la diode mécanique (noté T_{sup}) et par la membrure 8 de la branche inférieure peuvent être calculés :

$$\begin{aligned} T_{\text{sup}} &= -R_{G_x} (G_y - H_y) - R_{G_y} (H_x - G_x) + m_6 g (H_x - G_{6,x}) \\ T_{\text{inf}} &= R_{I_x} (H_y - I_y) - R_{I_y} (H_x - I_x) + m_8 g (H_x - G_{8,x}) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Ces commentaires pour adapter la procédure dynamique de la figure 33 à la modélisation du CCC sont considérés pour les simulations réalisées au chapitre 7.

CHAPITRE 6

VÉRIFICATION DE LA PROCÉDURE NUMÉRIQUE PROPOSÉE

La véracité de la procédure dynamique proposée à la section 5.2 est vérifiée en étudiant deux mécanismes à membrures : le mécanisme bielle-manivelle et le mécanisme pentagonal (cinq barres).

6.1 Mécanisme bielle-manivelle

Les études cinématique, cinétostatique et dynamique du mécanisme bielle-manivelle sont largement étudiées dans la littérature tel que dans [53, 54].

Le mouvement de ce mécanisme peut être entièrement défini en fonction d'une seule coordonnée généralisée q_1 ($M = 1$) tel qu'illustré à la figure 39.

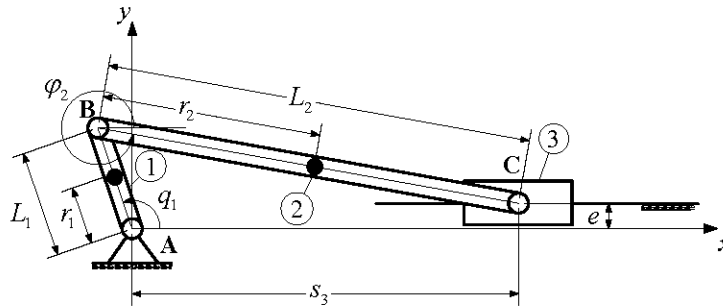


Figure 39 Mécanisme bielle-manivelle

Le mécanisme bielle-manivelle est constitué de trois éléments et de quatre liaisons. Puisque la manivelle (élément 1) est associée à une coordonnée généralisée, deux variables dépendantes sont requises. La première, φ_2 , permet d'orienter l'élément 2 dans le plan xy tandis que la seconde, s_3 , correspond au mouvement de translation de l'élément 3.

Pour cette simulation, les données fournies aux tableaux 4 et 5 sont considérées :

Tableau 4 Propriétés des éléments constituant le mécanisme bielle-manivelle

Élément	Longueur (m)	Masse (kg)	Moment d'inertie (kg.m ²)
1	$L_1 = 0,06$	0,24	0,04
2	$L_2 = 0,225$	0,90	0,06
3	-	0,62	-

Tableau 5 Données requises pour l'analyse dynamique du mécanisme bielle-manivelle

Géométrie	Conditions initiales	Calcul numérique
$r_1 = 0,02$ m	$(q_1)_0 = 100^\circ$	$h_{\max} = 0,100$ s
$r_2 = 0,10$ m	$(\varphi_2)_0 = 345^\circ$	$h_{\min} = 0,01$ s
$e = 0,00$ m	$(s_3)_0 = 0,21$ m	$h_0 = 0,05$ s
		$tol = 1e^{-15}$
		$t_{\max} = 10$ s

Le schéma bloc illustrant la transmission du mouvement du mécanisme bielle-manivelle est présentée à la figure 40. Ce mécanisme est constitué d'un motoélément (élément 1) et d'une dyade RRT (éléments 2 et 3) : la liaison C étant une liaison supérieure décomposée en deux liaisons inférieures C_1 (rotation) et C_2 (translation).

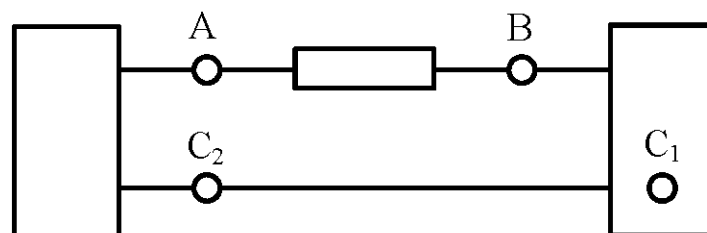


Figure 40 Schéma bloc du mécanisme bielle-manivelle

Le couple moteur T_m est défini tel que présenté à l'équation (5.24) en considérant un couple maximal T_{\max} de 10 N.m, un couple nominal T_n de 3 N.m, une vitesse angulaire minimale ω_{\min} de 10 rpm (1,05 rad/s), une vitesse angulaire nominale ω_n de 45 rpm (4,71 rad/s) et une vitesse angulaire de synchronisme ω_s de 70 rpm (7,33 rad/s).



Les résultats obtenus en utilisant la procédure numérique proposée à la section 5.2 (1000 itérations en 2,20 secondes sous Matlab®) sont comparés avec ceux issus du logiciel de simulation Working Model.

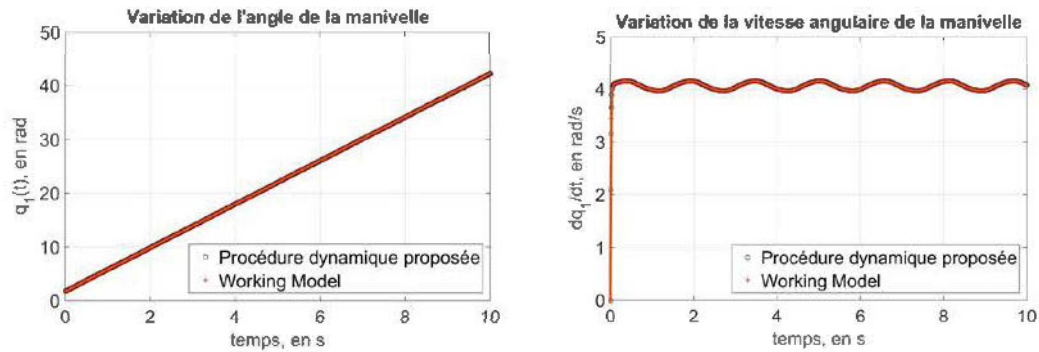


Figure 41 Angle et vitesse angulaires du moteur

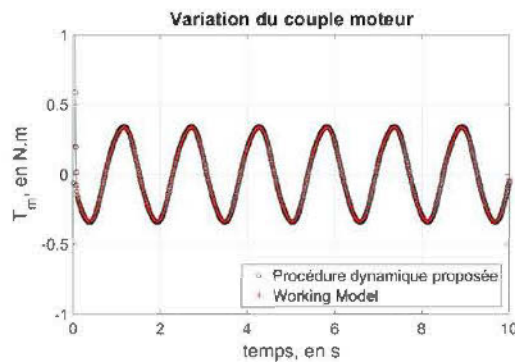


Figure 42 Couple moteur

Les variations de l'angle q_1 et de la vitesse angulaire \dot{q}_1 du moteur ainsi que le couple moteur développé en fonction du temps concordent avec celles fournies par le logiciel commercial. La méthode numérique utilisée par Working Model est celle de Kutta-Merson.

Les résultats montrent que le comportement dynamique du mécanisme bielle-manivelle est stable après seulement quelques dixièmes de seconde. Par la suite, les cycles dynamiques se répètent avec une vitesse angulaire moyenne du moteur se situant près de la vitesse angulaire nominale imposée et un couple moteur oscillant autour de zéro.

Les deux coordonnées généralisées de position q_1 et q_2 sont associées au mouvement angulaire des motoéléments 1 et 4 tandis que les variables dépendantes φ_3 et φ_4 font référence aux mouvements angulaires des éléments 3 et 4 constituant la dyade.

Le mécanisme est mis en mouvement par l'application d'un couple moteur à la liaison A. Pour les fins de cette simulation, ce couple est considéré constant (10 N m) et aucun moteur n'est considéré à la liaison E.

Les propriétés des éléments du mécanisme pentagonal sont données au tableau 6.

Tableau 6 Propriétés des éléments constituant le mécanisme pentagonal

Élément	Longueur (m)	Masse (kg)	Moment d'inertie (kg.m ²)
1	0,400	0,160	0,0020
2	0,300	0,120	0,0009
3	1,850	0,740	0,2110
4	1,400	0,560	0,0920

De plus, avant d'appliquer la procédure fournie à la section 5.2, il est nécessaire de connaître l'emplacement des liaisons constituant le zéropôle, l'emplacement du centre de gravité de chacun des éléments, les conditions initiales des coordonnées généralisées et des variables dépendantes en plus des paramètres requis pour l'intégration des équations de mouvement. Ces données sont incluses dans le tableau 7.

Tableau 7 Données requises pour l'analyse dynamique du mécanisme pentagonal

Géométrie	Conditions initiales	Calcul numérique
$k = 2,500$ m	$(q_1)_0 = 80^\circ$	$h_{\max} = 0,100$ s
$r_1 = 0,200$ m	$(q_2)_0 = 70^\circ$	$h_{\min} = 0,001$ s
$r_2 = 0,150$ m	$(\varphi_3)_0 = 30^\circ$	$h_0 = 0,05$ s
$r_3 = 0,925$ m	$(\varphi_4)_0 = 132^\circ$	$\text{tol} = 1e^{-15}$
$r_4 = 0,700$ m		$t_{\max} = 5$ s

Les prochaines sections comparent pour un intervalle de temps de 5 secondes :

- les variations des fonctions de transmission de vitesse et d'accélération relative à l'élément 3 calculées en utilisant les modèles cinématiques des structomats et leurs expressions analytiques ;
- les variations de la vitesse des centres de gravité de l'élément 4 (calculées à partir des matrices de transmission de vitesse) obtenues à l'aide des modèles cinématiques des structomats et leurs expressions analytiques ;
- les variations des coordonnées généralisées de position, de vitesse et d'accélération de l'élément 1 calculées avec la procédure numérique proposée et le module Dynamic Simulation du logiciel Inventor.

6.2.1 Fonctions de transmission de l'élément 3

Les expressions analytiques des fonctions de transmission de vitesse et d'accélération sont obtenues en utilisant la procédure présentée à la figure 32. Ces dernières sont identiques à celles fournies par les chercheurs Maros et Orlandea [55].

Ainsi, pour l'élément 3, les fonctions de transmission de vitesse sont notées comme suit :

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} = \frac{L_1 \sin(\varphi_4 - q_1)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} = -\frac{L_2 \sin(\varphi_4 - q_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (6.1)$$

Les fonctions de transmission d'accélération associées à l'élément 3 se notent plutôt comme étant :

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1^2} = \frac{-L_1 \cos(\varphi_4 - q_1) - L_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right)^2 + L_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right)^2}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} - L_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2^2} = \frac{L_2 \cos(\varphi_4 - q_2) - L_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right)^2 + L_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right)^2}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (6.4)$$

En regardant l'allure de ces fonctions de transmission, il est évident qu'en remplaçant l'expression analytique des variables dépendantes (en fonction des coordonnées généralisées), ces expressions deviendraient lourdes mathématiquement. Imaginons lorsque ces dernières seront substituées dans les matrices de transmission et dans les équations de mouvement.

Les variations des fonctions de transmission en fonction du temps obtenues avec la procédure numérique proposée sont les mêmes que celles analytiques comme en témoignent les figures 45 et 46.

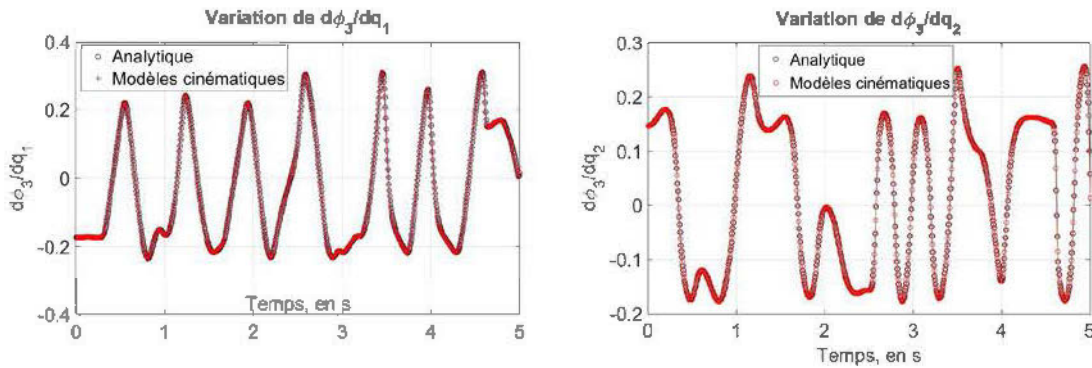


Figure 45 Variation des fonctions de transmissions de vitesse de l'élément 3

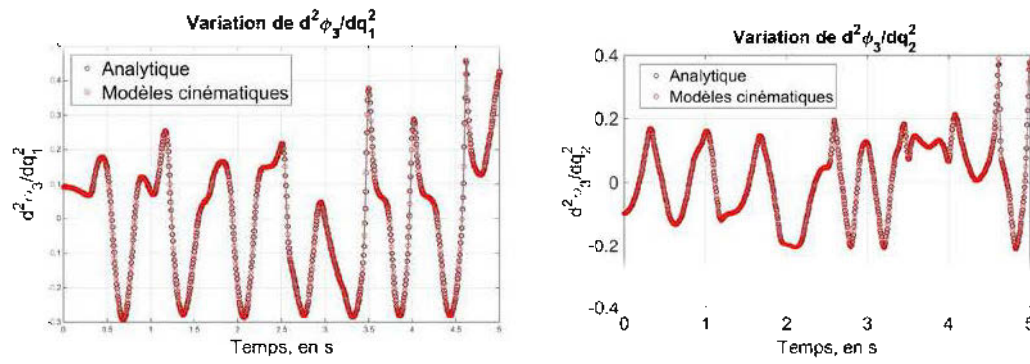


Figure 46 Variation des fonctions de transmission d'accélération de l'élément 3

Il en est de même pour la fonction de transmission d'accélération mixte.

6.2.2 Vitesse et accélération du centre de gravité de l'élément 4

Pour l'élément 4, sa matrice élémentaire de transmission de position s'écrit :

$$P_4 = \begin{bmatrix} k + L_2 \cos q_2 + r_4 \cos \varphi_4 & L_2 \sin q_2 + r_4 \sin \varphi_4 & \varphi_4 \end{bmatrix}^T \quad (6.5)$$

ce qui rend possible l'écriture de la matrice élémentaire de transmission de vitesse sous forme analytique :

$$V_4 = \begin{bmatrix} -r_4 \sin \varphi_4 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} & -L_2 \sin q_2 - r_4 \sin \varphi_4 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \\ r_4 \cos \varphi_4 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} & L_2 \cos q_2 + r_4 \cos \varphi_4 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Ainsi, en tenant compte de l'équation (4.29), le vecteur vitesse au centre de gravité de l'élément 4 s'écrit :

$$v_4 = V_4 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \quad (6.7)$$

Comme ce fut le cas pour les fonctions de transmission, la variation du module de la vitesse au centre de gravité de l'élément 4 obtenue par la procédure numérique proposée est la même que celle donnée analytiquement.

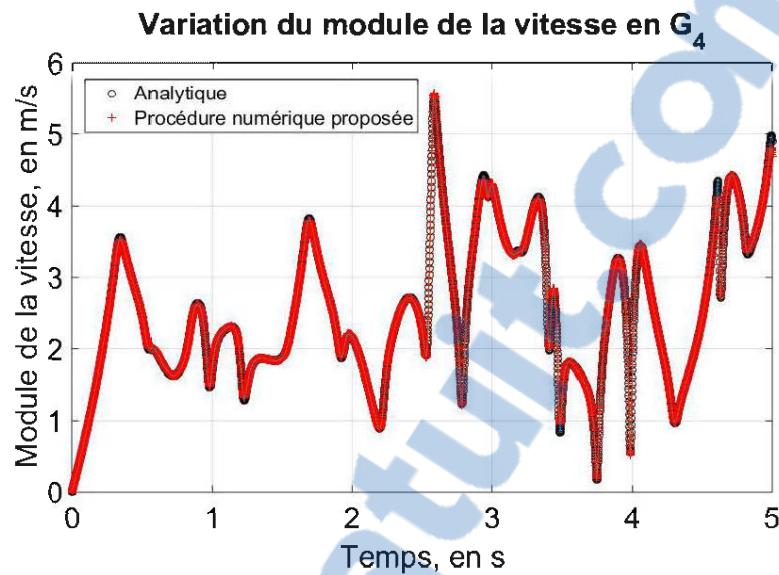


Figure 47 Module de la vitesse au centre de gravité de l'élément 4

Et il en est de même pour tous les paramètres cinématiques des éléments en plus du module des réactions de chaque liaison comme l'illustre la figure 48.

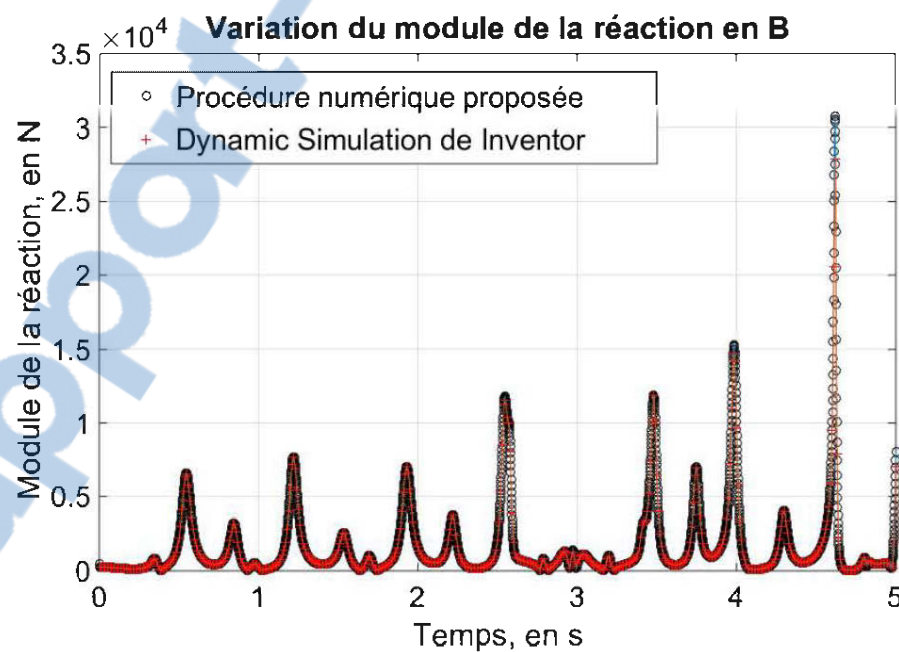


Figure 48 Module de la réaction en B

6.2.3 Variation des paramètres cinématiques des coordonnées généralisées

Cette fois-ci, les résultats obtenus en utilisant la procédure numérique proposée sont comparés avec le module de simulation dynamique du logiciel Inventor.

Les résultats sont quasi-identiques pour un intervalle de 5 secondes. Toutefois, si la durée de la simulation augmente, les variations vont subir les mêmes tendances, mais en accumulant une certaine erreur. Il faut se rappeler que le logiciel Inventor utilise aussi un algorithme d'approximation numérique pour fournir les résultats et que, pour les mécanismes multimobiles, plusieurs équations de mouvement doivent être résolues simultanément.

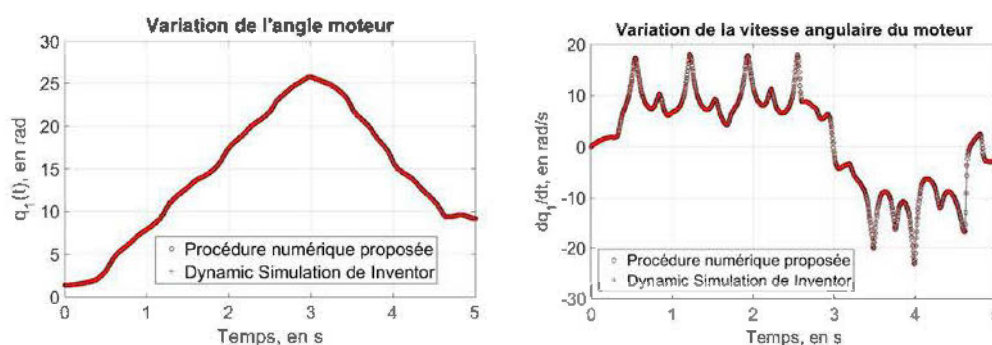


Figure 49 Angle et vitesse angulaire du moteur

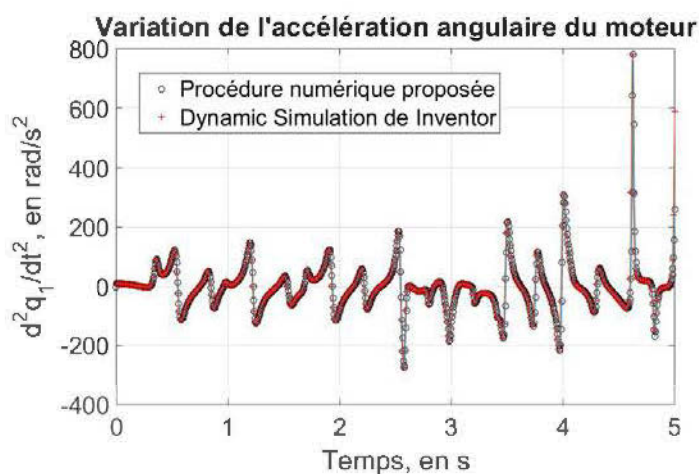


Figure 50 Accélération angulaire du moteur

Les nombreuses fluctuations visibles dans les graphiques des figures 49 et 50 illustrent l'instabilité et le comportement dynamique chaotique du mécanisme pentagonal. En fait, lorsqu'un seul moteur est considéré à l'élément 1, le fait que le mécanisme détienne deux degrés de mobilité, rend la trajectoire des liaisons C et D imprédictibles. En fait, au fil des révolutions de la manivelle, pour un même angle de cette dernière, la membrure 4 peut avoir subi un déplacement angulaire différent, ce qui fait en sorte qu'il se peut que le sens de rotation de la manivelle change comme c'est le cas à la figure 49 (environ à $t = 3$ sec). De plus, une faible variation concernant les conditions initiales, les longueurs ou les paramètres inertiels des éléments résultent un comportement dynamique différent.

CHAPITRE 7

DISCUSSIONS SUR LA DYNAMIQUE DU CONVERTISSEUR DE COUPLE DE CONSTANTINESCO

Lorsque Constantinesco travailla sur le développement de sa théorie de la sonicité, il a défini ce qu'était le convertisseur de couple : « Le convertisseur de couple est un mécanisme, mais sera quelque chose de vraiment différent des autres mécanismes tel que connu jusqu'à ce jour. Ce que j'ai découvert est simple, mais extraordinairement difficile à expliquer » [9].

Dans le cadre de ce chapitre, la procédure dynamique développée à la section 5.2 et adaptée pour le CCC à la section 5.5 est utilisée pour tenter de démystifier le comportement dynamique qui lui est propre. Pour assurer la continuité du discours, la configuration du CCC utilisé pour l'analyse dynamique est reprise à la figure 51, mais en incluant l'ensemble des angles nécessaires pour définir le mouvement du CCC.

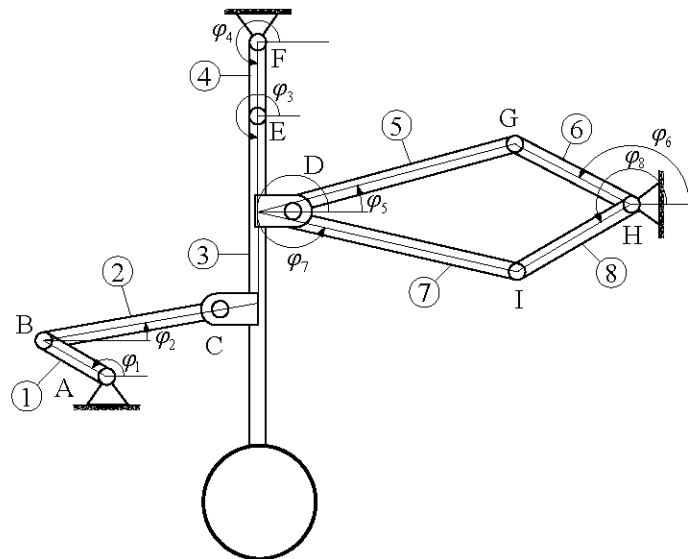


Figure 51 Configuration utilisée pour l'étude dynamique du CCC

Avant tout, des hypothèses concernant la constitution du CCC doivent être établies. La géométrie, les paramètres inertiels des éléments, l'emplacement des liaisons fixes en plus de la masse du pendule doivent être imposés. Ces données sont présentées dans les tableaux 8 et 9.

Tableau 8 Propriétés des éléments constituant le CCC

Élément	Longueur (m)	Masse (kg)	Moment d'inertie (kg.m ²)
1	0,075	0,688	0,0010
2	0,350	2,888	0,0330
3	0,700	5,462	0,2390
4	0,100	0,888	0,0010
5	0,650	5,288	0,1960
6	0,300	2,488	0,0220
7	0,650	5,288	0,1960
8	0,300	2,488	0,0220
masse	-	6,00	0,0400

Les branches de la diode mécanique sont symétriques. Les éléments sont considérés comme étant des barres rectangulaires faites d'acier.

Tableau 9 Données requises pour l'analyse dynamique du CCC

Géométrie	Conditions initiales		Calcul numérique
A = (0,00 ; 0,00)	$(\varphi_1)_0 = 105^\circ$	$(\varphi_5)_0 = 20^\circ$	$h_{\max} = 0,100 \text{ s}$
F = (0,20 ; 0,50)	$(\varphi_2)_0 = 315^\circ$	$(\varphi_6)_0 = 140^\circ$	$h_{\min} = 0,01 \text{ s}$
H = (1,10 ; 0,00)	$(\varphi_3)_0 = 290^\circ$	$(\varphi_7)_0 = 300^\circ$	$h_0 = 0,15 \text{ s}$
	$(\varphi_4)_0 = 270^\circ$	$(\varphi_8)_0 = 200^\circ$	$tol = 1e^{-15}$
			$t_{\max} = 5 \text{ s}$

Les sous-sections de ce chapitre tentent de corroborer les avancements de Constantinesco vis-à-vis le comportement dynamique du CCC discutés à la section 2.2. Premièrement, le CCC est étudié en ne considérant aucun couple résistant à l'arbre de sortie et ensuite, en considérant un certain couple résistant à l'arbre de sortie.

7.1 Comportement du CCC lorsqu'aucun couple résistant n'est imposé

Lorsque qu'aucun couple n'est imposé à l'arbre de sortie, le CCC est représenté par un mécanisme détenant deux degrés de mobilité et la majorité de l'énergie transmise par le moteur est acheminée vers l'arbre de sortie (modèle A). Dans ce cas, les angles φ_1 et φ_4 de la figure 51 correspondent aux coordonnées généralisées q_1 et q_2 et la séquence de transmission du mouvement suit le schéma bloc illustré à la figure 15b.

Avec un couple constant suffisamment grand pour permettre une révolution complète de la manivelle, le comportement dynamique du CCC est inévitablement instable. La vitesse angulaire du moteur augmente indéfiniment résultant en une augmentation de la puissance développée en fonction du temps. La géométrie imposée au mécanisme fait en sorte que la membrure 4, sous cette condition de couple, peut effectuer une révolution complète, ce qui résulte forcément en une configuration singulière.

Pour un couple constant de 12 N.m et pour une simulation de seulement 0,60 s, la figure 52 illustre que la vitesse angulaire des membrures 6 et 8 de la diode mécanique évolue rapidement vers des valeurs importantes.

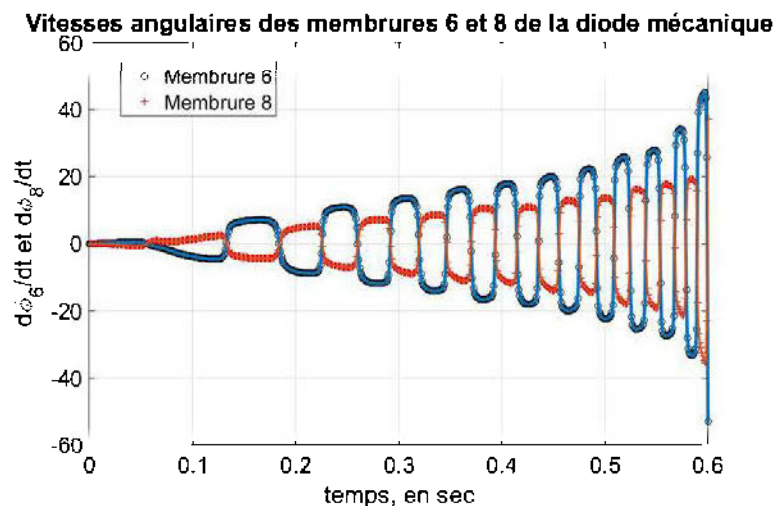


Figure 52 Vitesse angulaire des membrures 6 et 8 de la diode mécanique

De plus, cette même figure permet de visualiser la « symétrie » de la diode mécanique : les deux branches ne tournent pas dans le même sens simultanément, ce qui avait été introduit à la section 2.1.2. Il y a donc toujours une branche qui évolue dans le sens de rotation imposé à l'arbre de sortie par les roulements unidirectionnels.

Le graphique de la figure 53 permet de visualiser la variation importante de la vitesse angulaire de la manivelle en fonction du temps, prouvant hors de tout doute, que le système est instable.

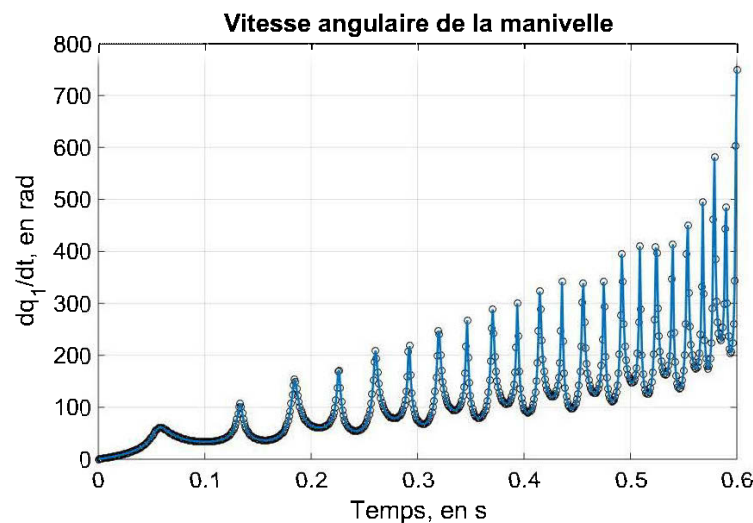


Figure 53 Vitesse angulaire de la manivelle

Les fluctuations du graphique de la figure 53 peuvent être expliquées en se basant sur le mouvement du pendule. En fait, lorsque la manivelle est positionnée dans les quadrants III et IV, celle-ci doit pousser le pendule, ce qui réduit sa vitesse angulaire. Dans les quadrants I et II, le poids du pendule favorise l'augmentation de la vitesse angulaire de la manivelle (sans parler de la gravité qui joue son rôle dans les quadrants II et III).

En fait, pour cette simulation, le mouvement du CCC est complètement imprédictible et non intuitif voir chaotique. Au fil du temps, pour un même angle de la manivelle,

l'angle définissant la membrure 4 peut être différent de sorte que la liaison D peut être entraînée dans toutes les directions, et ce de façon assez drastique. Pour un couple constant, une géométrie qui serait être adaptée, si elle existe, demanderait une synthèse dimensionnelle.

7.2 Comportement du CCC lorsqu'une résistance est imposée

Lorsqu'une résistance est imposée à l'arbre de sortie, le comportement dynamique du CCC attendu est celui où l'énergie développée par le moteur est acheminé majoritairement au balancier. Ainsi, les paramètres cinématiques de ce dernier se verront augmenter au fil du temps, ce qui aura pour effet de hausser le module des réactions aux liaisons G et I et donc, le module du couple développé par la diode mécanique.

En fixant un couple résistant constant à l'arbre de sortie, le couple généré par la diode mécanique alterne entre ceux développés par les branches supérieure et inférieure jusqu'à l'instant où la mise en mouvement de l'arbre en sortie peut être débuté et maintenu. Par contre, les simulations démontrent qu'il se peut que même si le couple résistant ait été vaincu à un certain instant t , dû à la géométrie des éléments et au mouvement chaotique associé à un mécanisme multimobile (modèle A), que le couple développé par la diode mécanique redevienne inférieur au couple résistant. Toutefois, lorsque les cycles dynamiques se répètent et que le mouvement du CCC est plus stable, cette situation ne se manifeste plus et le mouvement de l'arbre de sortie est garanti et maintenu.

Même si la morphologie du CCC peut paraître simple en première vue, les simulations démontrent clairement que le mouvement de ce dernier est complexe à modéliser. La géométrie des éléments semble être un critère clé pour le bon fonctionnement du CCC. Une synthèse dimensionnelle devrait donc être effectuée pour s'assurer que la trajectoire de la liaison D reste à l'intérieur d'une région prédéfinie de sorte que la membrure 4 ne soit pas en mesure de subir un déplacement angulaire qui compromet

la stabilité du CCC. Aussi, la masse du pendule, le couple moteur ainsi que les conditions initiales, influencent de façon importante le mouvement du CCC.

Pour confirmer les avancements émis par Constantinesco discutés à la section 2.2, les efforts seront concentrés sur la variation des paramètres cinématiques du balancier en fonction du couple résistant à l'arbre de sortie.

Cette simulation considère un couple résistant constant de module 800 N·m actif dès l'instant $t = 0$ s et un couple moteur aussi constant de 12 N·m. Durant les premiers instants, la vitesse angulaire du balancier augmente jusqu'au moment où le couple résistant peut être vaincu. Par la suite, le balancier oscille à faible amplitude à une vitesse quasi-constante en raison du fait que l'énergie sera principalement transmise à l'arbre de sortie. La variation de la vitesse angulaire du balancier en fonction du temps peut être visualisée à la figure 54.

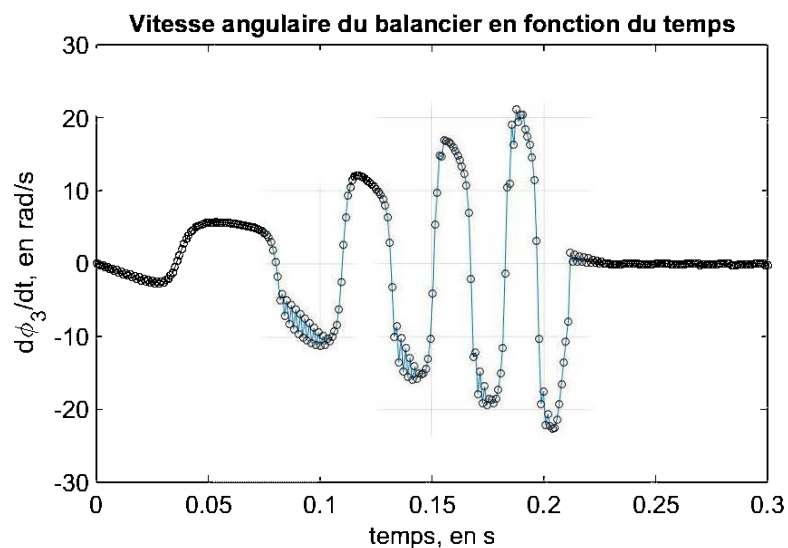


Figure 54 Variation de la vitesse angulaire du balancier en fonction du temps

Ce graphique présente quelques endroits où il y a de fortes fluctuations de la vitesse angulaire du balancier. Ces fluctuations étalées sur un court intervalle de temps subviennent lorsque le balancier travaille contre le moteur, c'est-à-dire, lorsque la

manivelle passe du quadrant II vers le quadrant III et que le balancier se déplace dans le sens horaire. La dernière fluctuation est relative aux passages successifs entre les modèles I et le modèle A avant que le mouvement de l'arbre de sortie puisse être maintenu.

Pour un couple moteur de 12 N·m et un couple résistant de 800 N·m, le convertisseur de couple de Constantinesco prend seulement quelques dixièmes de seconde pour accumuler l'énergie nécessaire dans le balancier pour vaincre la résistance à l'arbre de sortie. Ce comportement confirme ce que Constantinesco prônait au début du vingtième siècle : son dispositif est un accumulateur d'énergie très efficace.

CHAPITRE 8

CONCLUSION

8.1 Apport de ce mémoire à la théorie des mécanismes

L'objectif principal de ce mémoire était de proposer une procédure permettant d'obtenir la réponse dynamique d'un mécanisme en utilisant conjointement les notions de matrice de transmission et de structomatique des mécanismes. De plus, un objectif secondaire était d'appliquer cette procédure à l'étude du mécanisme du CCC afin de vérifier l'efficacité du dispositif en tant qu'accumulateur d'énergie tel que prôné par Constantinesco.

Un des points importants de ce mémoire est qu'il incorpore les notions de structomatique à l'analyse dynamique des mécanismes à membrures. Le fait de subdiviser le mécanisme en plusieurs structomats permet d'explicitier la séquence de transmission du mouvement permettant ainsi de résoudre les équations de la cinématique et de la cinétostatique successivement. Cette méthode est proposée à la communauté scientifique puisqu'elle est systématique et adaptée pour l'étude des mécanismes complexes.

Ce mémoire utilise les modèles cinématiques des structomats pour calculer les fonctions et matrices de transmission de vitesse et d'accélération. La procédure proposée à la section 5.1.3 est novatrice en raison de son approche numérique qui écarte le travail mathématique requis pour le développement de leurs expressions analytiques. De plus, cette procédure complète le discours des articles traitant de l'intégration des équations de mouvement sous forme matricielle puisque les auteurs font abstraction d'une quelconque technique pour le calcul des fonctions de transmission apparaissant dans les expressions des matrices de transmission.

La procédure d'intégration des équations de mouvement est aussi un apport important de ce mémoire. Le fait d'actualiser ces équations à chaque instant t permet d'incorporer les valeurs numériques des variables dépendantes et des fonctions de transmission sans tenir compte de leurs expressions analytiques écrites en fonction des coordonnées généralisées, et ce, peu importe le degré de mobilité M du mécanisme étudié.

Ce mémoire ouvre aussi la porte à l'étude des mécanismes à structure évolutive démontrant ainsi que la structomatique est une méthode adaptée pour étudier le comportement dynamique de mécanismes multimobiles. La procédure discutée à la section 5.2 pourrait être adaptée à toute transmission mécanique ou tout mécanisme entraînant un mécanisme de travail offrant une certaine résistance.

Il a aussi été démontré que l'énergie cinétique peut être accumulée à l'aide d'un mécanisme constitué uniquement de membrures. Toutefois, afin de développer davantage sur le sujet, plusieurs recommandations doivent être considérées.

8.2 Recommandations

Dans le but d'approfondir l'étude du CCC, les recommandations suivantes peuvent être considérées :

- Au chapitre 7, le convertisseur de couple de Constantinesco a été étudié en imposant la géométrie et les paramètres inertiels des éléments. Même si le comportement dynamique prédit par Constantinesco a été observé, un algorithme d'optimisation pourrait être implémenté afin d'étudier la capacité d'accumulation d'énergie cinétique du balancier. Un des objectifs de cette optimisation serait la minimisation du temps d'accumulation requis pour vaincre un certain couple résistant à l'arbre de sortie. Suite à cette optimisation, une géométrie précise des éléments du CCC (incluant la masse du pendule) en plus des caractéristiques du moteur pourront être considérés.

- Pour une modélisation davantage réaliste, le frottement dans les liaisons du CCC devrait être considéré.
- La fabrication d'un prototype pourrait être bénéfique afin de vérifier le comportement dynamique du CCC expérimentalement. De plus, en considérant les mêmes données que celles fournies aux tableaux 8 et 9, les résultats présentés aux figures 54 à 55 du chapitre 7 pourront être validés.
- Une étude du point de vue vibratoire du CCC pourrait être investiguée afin de tenter de synchroniser les fréquences de la manivelle et du balancier afin que ce dernier ne travaille pas contre la manivelle. Aussi, il pourrait être intéressant d'étudier le comportement dynamique du CCC lorsque le balancier est sollicité à sa fréquence de résonance.

8.3 Mot de la fin

Le fait que le comportement dynamique du convertisseur de couple de Constantinesco avancé par l'inventeur lui-même au début du XX^e siècle ait pu être corroboré dans les simulations prouve deux aspects : 1) George Constantinesco avait une intuition des plus aiguisées lors de la conception du CCC et 2) la procédure numérique proposée est un outil de simulation valide.

Avec cet outil de simulation et les recommandations proposées, il serait possible d'approfondir considérablement l'analyse dynamique du convertisseur de couple de Constantinesco et de répondre à la question que l'auteur s'est posée constamment : comment dimensionner le CCC pour une demande en puissance plus élevée ? De cette façon, ce dernier pourrait être appliqué à une large gamme d'applications.

RÉFÉRENCES

1. Labonville, R., *Conception des circuits hydrauliques: une approche énergétique*. 1999: Presses internationales Polytechnique.
2. Calloch, S., Cognard, J.-Y., Dureisseix, D., Marquis, D., *Les systèmes de transmission de puissance : systèmes mécaniques et hydrauliques*. 2003: Lavoisier.
3. Constantinesco, G., *Theory of sonics. a treatise on transmission of power by vibrations*. 1918: Proprietors of patents controlling wave transmission.
4. Constantinesco, G., *The Torque Converter*. Journal of the Royal Society of Arts, 1926. 75(3866): p. 148-177.
5. Constantinesco, G., *Power transmission*. 1925, Google Patents.
6. Constantinesco, G., *Method and means for transmitting power*. 1925, Google Patents.
7. Constantinesco, G., *Clutch and unidirectional driving device*. 1927, Google Patents.
8. Constantinesco, I., Brown, T., *George Constantinesco: His Torque Converter and Other Inventions*. 1994: M.W. Models.
9. McNeil, I., *George Constantinesco, 1881–1965 and the Development of Sonic Power Transmission*. Transactions of the Newcomen Society, 1982. 54(1): p. 105-126.
10. Jack, R., *The Constantinesco Torque-Converter*. 1927, SAE Technical Paper.
11. Durango, S., Giraldo, C., Calle, G., Mesa, L., *Dynamics of planar mechanisms by a modular approach*. Ingeniería y competitividad, 2014. 16(1): p. 159-168.
12. Moise, V., Voicu, G., *Structural, Kinematics and Kinetostatics Analysis of the Lifting and Emptying Mechanism from the Small Containers*. Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine Cluj-Napoca. Agriculture, 2009. 66(1).
13. Stoica, D., Voicu, G., Moise, V., Constantin, G., Carp-Ciocârdia, C., Kovačev, I. *Kinematic-structural analysis of actuating mechanism of a conical sieve with oscillating movement*. in *Proceedings of the 43rd International Symposium on Agricultural Engineering, Actual Tasks on Agricultural Engineering, Opatija, Croatia, 24-27 February 2015*. 2015. University of Zagreb.

14. Mailloux, M., Éné, M., Simionescu, I., Tabara, I., *Use of the Structomatic Method to Perform the Forward Kinematic and Kinetostatic Analyses of a Hydraulic Excavator*, in *New Advances in Mechanisms, Mechanical Transmissions and Robotics*. 2017, Springer. p. 167-175.
15. Éné, M., *Analyses structomatique, cinématique, cinetostatique et dynamique du mécanisme du concasseur à mâchoires*. Proceedings of the Canadian Engineering Education Association, 2011.
16. Mruthunjaya, T. S., *Kinematic structure of mechanisms revisited*. Mechanism and Machine Theory, 2003. 38(4): p. 279-320.
17. Ene, M., *Introduction à la théorie des mécanismes : Modèles et méthodes*, ed. Fégalma. 2016.
18. Davies, T., *An extension of Manolescu's classification of planar kinematic chains and mechanisms of mobility $M \geq 1$, using graph theory*. Journal of Mechanisms, 1968. 3(2): p. 87-100.
19. Galletti, C. U., *On the position analysis of Assur's groups of high class*. Meccanica, 1979. 14(1): p. 6-10.
20. Galletti, C. U., *A note on modular approaches to planar linkage kinematic analysis*. Mechanism and Machine Theory, 1986. 21(5): p. 385-391.
21. Hansen, M. R., *A general method for analysis of planar mechanisms using a modular approach*. Mechanism and Machine Theory, 1996. 31(8): p. 1155-1166.
22. Jinkui, C., Weiqing, C., *Systemics of Assur groups with multiple joints*. Mechanism and Machine Theory, 1998. 33(8): p. 1127-1133.
23. Manolescu, N., *For a united point of view in the study of the structural analysis of kinematic chains and mechanisms*. Journal of Mechanisms, 1968. 3(3): p. 149-169.
24. Duca, C., Simionescu, I., *Un principe général de formation des mécanismes*. Studii si Cercetari de Mecanica Apicata, 1973. 32(1).
25. Uicker, J., Raicu, A., *A method for the identification and recognition of equivalence of kinematic chains*. Mechanism and Machine Theory, 1975. 10(5): p. 375-383.
26. Dobrjanskyj, L., Freudenstein, F., *Some Applications of Graph Theory to the Structural Analysis of Mechanisms*. Journal of Engineering for Industry, 1967. 89(1): p. 153-158.
27. Davies, T. H., Crossley, F. E., *Structural analysis of plane linkages by Franke's condensed notation*. Journal of Mechanisms, 1966. 1(2): p. 171-183.

28. Raicu, A., *Matrices associated with kinematic chains with from 3 to 5 members*. Mechanism and Machine theory, 1974. 9(1): p. 123-129.
29. Éné, M., Moise, V., *Mécanismes à membrures : Une approche structomatique d'analyse avec Matlab*. 2010: Printech.
30. Mitsi, S., Bouzakis, K.-D., Mansour, G., Popescu, I., *Position analysis in polynomial form of planar mechanisms with Assur groups of class 3 including revolute and prismatic joints*. Mechanism and machine theory, 2003. 38(12): p. 1325-1344.
31. Mitsi, S., Bouzakis, K.-D., Mansour, G., *Position analysis in polynomial form of planar mechanism with an Assur group of class 4 including one prismatic joint*. Mechanism and machine theory, 2004. 39(3): p. 237-245.
32. Moise, V., Ene, M., *Numerical Methods in Mechanism Synthesis*, in *8th IFTOMM Symposium on Theory of Machines and Mechanisms*. 2001.
33. Fortin, A., *Analyse numérique pour ingénieurs*. 2011: Presses internationales Polytechnique.
34. Gosselin, C., Angeles, J., *Singularity analysis of closed-loop kinematic chains*. IEEE transactions on robotics and automation, 1990. 6(3): p. 281-290.
35. Hall, A., McAree, P. R., *Robust bucket position tracking for a large hydraulic excavator*. Mechanism and Machine Theory, 2005. 40(1): p. 1-16.
36. Ene, M., Grecu, E., *Kinematic Modules for the Dynamic Simulation of the Parallel Robots*, in *Mecatronics'01 : 5th Franco-Japanese Congress & 3rd European-Asian Congress*. 2001: France.
37. Durango, S., Calle, G., Ruiz, O., *Analytical method for the kinetostatic analysis of the second-class RRR Assur group allowing for friction in the kinematic pairs*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2010. 32(3): p. 200-207.
38. Norton, R. L., *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. 2012: McGraw-Hill.
39. Dresig, H., Holzweißig, F., *Dynamics of Machinery: Theory and Applications*. 2010: Springer Berlin Heidelberg.
40. Vujanovic, B., *Conservation laws of dynamical systems via D'Alembert's principle*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1978. 13(3): p. 185-197.
41. Lagrange, J. L., *Mécanique Analytique*. 2009: Cambridge University Press.
42. Wittenbauer, F., *Graphische Dynamik: Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure*. 2013: Springer-Verlag.

43. Hamill, P., *A Student's Guide to Lagrangians and Hamiltonians*. 2013: Cambridge University Press.
44. Prince, P., Dormand, J., *High order embedded Runge-Kutta formulae*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1981. 7(1): p. 67-75.
45. Paul, B., *Analytical dynamics of mechanisms—a computer oriented overview*. Mechanism and Machine Theory, 1975. 10(6): p. 481-507.
46. Dranga, M., Manolescu, N., *Matrix equation for the motion of planar mechanisms with one degree of mobility using transmission functions*. Mechanism and Machine Theory, 1977. 12(2): p. 165-172.
47. Manolescu, N., Dranga, M., *La détermination matricielle des équations de mouvement d'un mécanisme avec plusieurs degrés de mobilité à l'aide des fonctions de transmission*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1975: p. 1179-1183.
48. Ene, M., *La dynamique lagrangienne des mécanismes*. 2013: Printech.
49. Kolovsky, M. Z., Lilov, L., Evgrafov, A. N., Semenov, Y. A., Slousch, A. V., *Advanced Theory of Mechanisms and Machines*. 2012: Springer Berlin Heidelberg.
50. Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., McCallum, W. G., *Calculus: Single and Multivariable, 6th Edition*. 2012: Wiley Global Education.
51. Handra-Luca, V., *Positional Shifts Determination of Mechanisms by Means of Transmission Functions*, in *6th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. 1983, New-Delhi. p. 205-208.
52. Maron, M. J., *Numerical analysis*. 1987: Macmillan.
53. Ha, J.-L., Fung, R.-F., Chen, K.-Y., Hsien, S.-C., *Dynamic modeling and identification of a slider-crank mechanism*. Journal of sound and vibration, 2006. 289(4): p. 1019-1044.
54. Horváth, Z., Molnárka, G., *The Dynamic Model of the Slider-crank Mechanism*. Acta Technica Jaurinensis, 2013. 6(3): p. 74-85.
55. Maros, D., Orlandea, N., *Contributions to the Determination of the Equations of Motion for Multidegree of Freedom Systems*. Journal of Engineering for Industry, 1971. 93(1): p. 191-195.

ANNEXE A

GEORGE CONSTANTINESCO (1881-1965)

Le fondement de ce projet de maîtrise est directement lié avec l'ingéniosité et le savoir-faire de l'ingénieur roumain George Constantinesco (1881-1965). Né en Roumanie en 1881, George Constantinesco est un pianiste talentueux ayant un intérêt grandissant pour le domaine de l'acoustique. Souhaitant améliorer le problème d'affaiblissement de l'ouïe de sa mère, il s'intéressa, dès l'âge de 18 ans, à la propagation du son ainsi qu'à la théorie de l'harmonie, ce qui lui sera bénéfique lors de ces futurs projets de recherche. Il poursuivit ses études en ingénierie en 1898 à l'École Nationale des Ponts et Chaussées à Bucarest, qu'il finira en 1904 comme chef de promotion.



Figure 55 George Constantinesco en 1926

Suite à l'obtention de son diplôme d'ingénieur, George Constantinesco travailla pour le ministère des Travaux publics en Roumanie où il fût responsable de la construction de nombreux édifices et de ponts. Il fût un des précurseurs de l'utilisation du béton armé pour la construction de structures et ses travaux portant sur les fondements théoriques de l'utilisation de ce matériau ont été publiés entre 1904 et 1905. En 1908, il quitta le ministère des Travaux publics pour entreprendre une carrière de consultant et d'entrepreneur avant de se déplacer à Londres en 1910. Ce changement géographique semble coïncider avec un changement complet de ses intérêts en

recherche partant alors du génie civil et la construction de ponts et d'édifices au génie mécanique et à l'étude des véhicules et de leurs composantes mécaniques.

Durant les années suivantes, George Constantinesco sera le père de nombreux brevets d'invention relatifs, entre autres, aux domaines de l'ingénierie automobile, de la dynamique des fluides et de la conception de transmissions mécaniques. En fait, avant sa mort en 1865, il sera crédité de cent trente-trois brevets britanniques. Il serait aussi associé à plus de cent cinquante autres inventions qui n'auront pas été brevetées.

George Constantinesco a été un des chercheurs les plus prolifiques de son époque. La figure 2 présente les portraits de dix-sept personnalités ayant le plus contribué à l'avancement de la science pour la période entre 1900 et 1925. Constantinesco, deuxième rangée et première colonne de la figure 56, apparaît aux côtés, entre autres, de Einstein, Kelvin, Bell, Edison, Curie et Thompson.

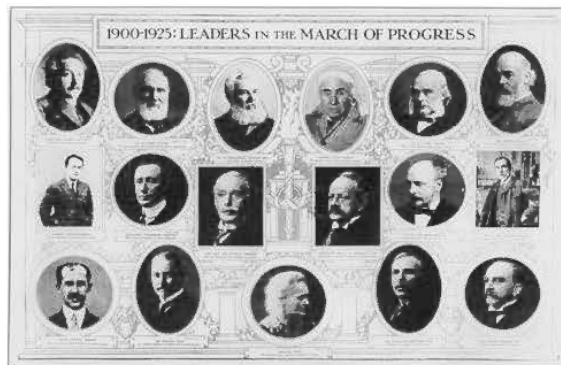


Figure 56 Publication de la revue *Graphic* le 16 janvier 1926

Un des faits marquants de sa carrière est le développement et l'explication de la théorie de la sonicité (« theory of sonics », en anglais). Cette théorie, dont il est le fondateur, est la science faisant référence à la transmission de puissance par le biais de vibrations à travers des milieux liquide, solide ou gazeux. Grâce au progrès de cette science, il a pu concevoir, en 1915, un dispositif indispensable lors de la Première Guerre mondiale : le mécanisme de synchronisation. Ce dernier était utilisé pour permettre aux

pilotes des avions de combat de tirer vers l'ennemi à travers les hélices de leurs avions. Pour ne pas que les avions de combat s'autodétruisent, il était nécessaire de synchroniser les tirs avec la vitesse de rotation des hélices, ce que Constantinesco fit en utilisant les impulsions de pression provenant du générateur afin d'actionner le mécanisme de déclenchement des tirs et ainsi d'être en phase avec les hélices. Cette solution s'est avérée être simple et élégante et fut un succès immédiat. Ce dispositif fut produit à plus de cinquante mille exemplaires.

Toujours en 1915, il réfuta le mythe de l'incompressibilité des liquides en construisant un « ressort liquide ». En fait, en utilisant l'énergie provenant de l'expansion d'une huile fortement compressée, il conçut un canon capable de projeter une masse de 90 kg sur plus de mille quatre cent mètres.

En 1918, subventionné par l'Amirauté (administration supérieure de la Marine britannique), un laboratoire à la fine pointe de la technologie où plusieurs projets de recherche et développement portant sur sa théorie de la sonicité ont été mis de l'avant et construit à West Drayton. Un des projets ayant vu le jour grâce à ce laboratoire est un système à haute fréquence (douze mille Hz) et silencieux qui étant approprié pour les sous-marins de la Marine britannique. Par contre, un des projets de recherche les plus prometteurs de Constantinesco était l'application de la théorie de la sonicité pour la fabrication de pompe à injection Diesel.

Toujours en 1918, la contribution majeure « Theory of Sonics » de George Constantinesco fut publiée par l'Amirauté en quantité limitée. Dans cet ouvrage, l'auteur fit part à la communauté scientifique de l'époque des premières lois mathématiques liées à la compressibilité des fluides. C'est aussi dans cet ouvrage que les fondements de la transmission de puissance par vibrations ont été exposés. Par contre, tous les travaux émanant de son laboratoire sont devenus la propriété de l'Amirauté. Ainsi, Constantinesco ne reçut aucune contribution financière concernant les inventions qui ont pris naissance dans ce laboratoire. D'ailleurs, peu de temps après

l'armistice, le laboratoire fût fermé par l'Amirauté. Il retourna donc en Roumanie où contre toute attente, quelques-uns de ses principes soniques ont pris racine et se sont épanouis. Il est même rapporté que Constantinesco aurait gardé secrets les avancements de sa pompe « sonique » à injection Diesel.

Durant les années de la première guerre, Constantinesco travailla sur un modèle unique et novateur de transmission mécanique : le convertisseur de couple. Il concocta un modèle mathématique satisfaisant pour plusieurs configurations de ce convertisseur et prôna le fait que ce dernier pourrait être d'une grande utilité pour une vaste gamme d'applications pratiques telles que les véhicules, les locomotives, les bateaux, l'artillerie militaire et les machines agricoles. Puisqu'à cette époque, seulement une faible proportion de la population avait les moyens financiers pour se procurer une automobile, Constantinesco voulut introduire sur le marché un véhicule plus abordable. De plus, à cette époque, il semblerait que les citoyens et hommes de science s'entendaient pour dire que le pétrole était une ressource qu'ils disaient inépuisable. Constantinesco était en avance sur son temps et préconisait l'économie de carburant. En fait, il voulait proposer à la classe moyenne un véhicule qui se déplacerait sans chocs lors des changements de vitesse et avec lequel il serait possible de se déplacer sur une distance de cent milles avant seulement un gallon d'essence à une vitesse moyenne avoisinant les 40 milles par heure.

Pour ce faire, la transmission mécanique de Constantinesco ne faisait référence à aucun embrayage ni engrenage, mais était plutôt composée uniquement de membrures. Le tout étant alimenté par un moteur de plus faible puissance que les véhicules déjà sur les routes à l'époque. En quelques mots, le moteur transmet sa puissance à un ensemble de membrures où un des éléments détient une grande inertie agissant ainsi comme un pendule ou un volant d'inertie. Le mouvement de ces membrures entraîne une valve mécanique qui est directement liée aux roues de l'automobile. Constantinesco a donné le nom de valve mécanique à tout dispositif capable de convertir un mouvement

oscillatoire en un mouvement de rotation dans un seul sens permettant du même coup de fournir un couple qui est unidirectionnel [4]. Le point marquant de cette transmission mécanique est que si le couple résistance aux roues de l'automobile est supérieur à celui généré par le mouvement des membrures et transmet à la valve mécanique, l'énergie sera accumulée dans le pendule ou le volant d'inertie jusqu'au moment où il sera possible de permettre aux roues d'entrer en mouvement.

Pour expliquer le mouvement et la transmission de puissance de ce système, George Constantinesco utilisa sa théorie de la sonicité, mais cette fois, les vibrations étant transmises dans un milieu solide au lieu d'un milieu liquide. Par contre, il admit que le fonctionnement de cette transmission mécanique variable continue était loin d'être facile à expliquer puisque la théorie conventionnelle relative à la conception de mécanismes n'était pas adaptée à ce type de système. Le fait le plus impressionnant est que le premier prototype de cette transmission mécanique ayant été fabriqué a fonctionné tel que prédit sans aucune modification.

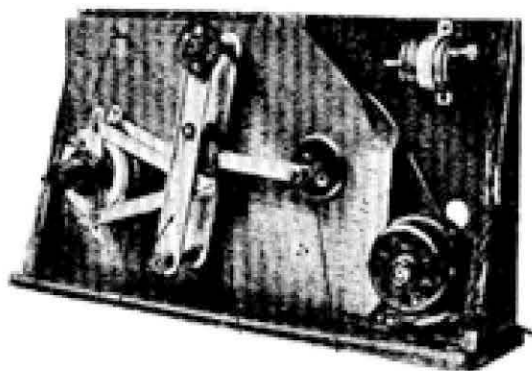


Figure 57 Premier modèle du convertisseur de couple

La communauté scientifique du temps n'était pas prête à une telle modification dans la conception des automobiles et c'est pourquoi des critiques négatives et du scepticisme ont entaché l'invention de Constantinesco. Par contre, il était tellement convaincu de la véracité de sa logique mathématique qu'il offrit £100 au premier individu capable

de prouver que ces calculs mathématiques étaient faux ou même que son interprétation du fonctionnement de son convertisseur de couple n'était pas en parfait accord avec la logique.

En mai 1923, Constantinesco testa pour la première fois son convertisseur de couple. Il remplaça le moteur de quarante-cinq hp actuel par un de dix hp et construisit une plateforme sur l'automobile pour permettre à dix individus de prendre place à ces côtés sur l'automobile. L'automobile eu le potentiel de se déplacer dans les rues de Londres sans problème, même lors de pente ascendante ou lorsque des obstacles tels des blocs de bois étaient placés intentionnellement en avant des roues avants de l'automobile. Ce test était pour prouver la capacité de son convertisseur de couple à s'adapter à un large éventail de situations. Il spécifia même qu'un moteur ayant une plus faible puissance aurait pu fournir les résultats escomptés.

En 1924, il présenta son convertisseur de couple à l'exposition de Wembley ainsi qu'à celle de Paris en 1926. Il y eut un intérêt tellement grand suite à ces expositions que plus de trois cents convertisseurs de couple ont été demandés par des entreprises et plus de deux cents articles scientifiques et journalistiques ont été écrits à ce sujet.



Figure 58 Constantinesco testant son convertisseur de couple en 1923

Comme ce fût le cas dans le passé, Constantinesco eut de la difficulté à faire financer la production de son convertisseur de couple puisque la réaction des grands producteurs automobiles était tiède ou même de complète opposition. Même que la société des producteurs automobiles s'était opposée à ce que le convertisseur de couple soit exposé à Wembley résultant en une poursuite en justice de la part de Constantinesco qui perdit sa cause à déficit, mais qui fût autorisé à présenter à un autre endroit.

En 1925, la *General Motors Corporation* de Détroit eut la permission de produire le convertisseur de couple avec l'accord de *Constantinesco Torque Converters Ltd*, une compagnie créée par *Industria Sonica* en Roumanie en 1922. Un montant de cent mille dollars fut avancé pour permettre la recherche et développement en plus d'un montant mensuel de trois mille dollars pour les droits de production. *General Motors Corporation* garantissait un montant de quatre millions de dollars sur quatre ans et une royauté de deux dollars par convertisseur de couple vendu aux États-Unis. Cet accord amena Constantinesco à dépensé l'entièreté de ses fonds disponibles dans la recherche, non seulement pour l'utilisation dans l'industrie automobile, mais aussi pour d'autres applications. Son style de vie et sa générosité avec les membres de sa famille et amis reflétaient le succès d'un riche homme d'affaires et d'un travailleur acharné. Malheureusement, le projet ne s'est jamais concrétisé et cette époque fut marquée par des problèmes financiers endommageant la santé du chercheur, ce qui l'amena au divorce. Pour enivrer davantage sa frustration, les taxes assujetties aux royautés reçues lors de la guerre pour son mécanisme de synchronisation lui ont été perçues. Bref, la fabrication du convertisseur de couple a été bloquée.

Jusqu'à la fin de la décennie, Constantinesco était plongé dans des situations financières précaires jusqu'au moment où l'espoir renaquit lorsque les roumains ont démontré de l'intérêt à utiliser le convertisseur sur les chemins de fer. Suite à cette nouvelle, il créa un laboratoire en annexe à sa maison. Des tests en Roumanie ont montré qu'un moteur de dix hp monté sur un convertisseur de couple pouvait entraîner

des locomotives de dix tonnes considérant le fait que des moteurs entre cent et cent quarante hp étaient utilisés auparavant. Une locomotive de trente tonnes a aussi pu être entraînée lorsqu'alimentée par deux moteurs de seulement vingt hp permettant à cette dernière de se déplacer à une vitesse de quarante milles par heure. Par contre, un changement dans la loi roumaine résulta au retrait du convertisseur de couple. Il retourna donc en Angleterre où il se buta de nouveau à un manque de fonds et à l'avènement de la guerre qui rendait difficile le développement et la recherche.

George Constantinesco ne fut pas le premier inventeur à avoir échoué la mise en marché d'un produit révolutionnaire. Le convertisseur de couple était unique et introduisait de nouveaux concepts dans la théorie des machines. Il était juste en avance sur son temps, ce qui créa le scepticisme des grands producteurs automobiles qui étaient dévoués aux transmissions mécaniques de l'époque. Les périodes de guerre, le progrès des systèmes de transmission de puissance électrique et le fait que le pétrole était en abondance et bon marché n'ont pas été bénéfiques pour l'un des hommes de science les plus renommés de la Roumanie.

ANNEXE B

EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES MATRICES DE TRANSMISSION DU MÉCANISME PENTAGONAL

Reprenons le schéma du mécanisme pentagonal de la figure 43.

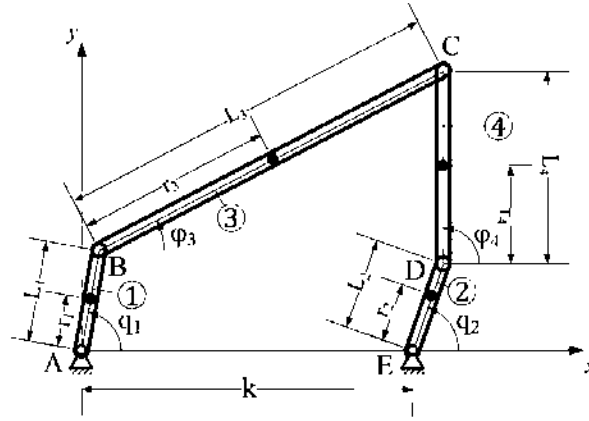


Figure 59 Mécanisme pentagonal R_a -RRR- R_a

Les équations de position sont écrites en projetant l'équation vectorielle de fermeture sur le contour ABCDEA :

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2, \varphi_3, \varphi_4) &= L_1 \cos q_1 + L_3 \cos \varphi_3 - L_4 \cos \varphi_4 - L_2 \cos q_2 - k = 0 \\ f_2(q_1, q_2, \varphi_3, \varphi_4) &= L_1 \sin q_1 + L_3 \sin \varphi_3 - L_4 \sin \varphi_4 - L_2 \sin q_2 = 0 \end{aligned} \quad (B.1)$$

En isolant le terme contenant φ_3 dans chacune des équations de position (B.1), en élevant chacune de ces dernières au carré et en les additionnant, il est possible d'écrire que :

$$A \cos \varphi_3 + B \sin \varphi_3 = C \quad (B.2)$$

avec :

- $A = kL_3 - L_1L_3 \cos q_1 + L_2L_3 \cos q_2$
- $B = -L_1L_3 \sin q_1 + L_2L_3 \sin q_2$

- $$C = \left(\frac{k^2 + L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - L_4^2}{2} \right) - kL_1 \cos q_1 + kL_2 \cos q_2 - L_1 L_2 \cos(q_1 - q_2)$$

L'équation (B.2) permet d'écrire la variable dépendante φ_3 uniquement en fonction des coordonnées généralisées q_1 et q_2 comme suit :

$$\varphi_3 = \tan^{-1} \left(\frac{BC + A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{AC - B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}} \right) \quad (\text{B.3})$$

Il est possible de constater que la fonction de transmission de position (B.3) est complexe mathématiquement. Effectuer les dérivées première et seconde de cette expression dans le but de remplir les matrices **C** et **D** (voir les équations 4.7 et 4.8) représenterait un travail mathématique de longue haleine.

Évidemment, la fonction de transmission de position de la variable dépendante φ_4 peut aussi être écrite sous la forme de l'équation (B.3) :

$$\varphi_4 = \tan^{-1} \left(\frac{BC + A\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{AC - B\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}} \right) \quad (\text{B.4})$$

avec :

- $A = kL_2 + L_2 L_4 \cos q_2 - L_1 L_4 \cos q_1$
- $B = L_2 L_4 \sin q_2 - L_1 L_4 \sin q_1$
- $C = \left(\frac{L_3^2 - k^2 - L_1^2 - L_2^2 - L_4^2}{2} \right) - kL_2 \cos q_2 + kL_1 \cos q_1 + L_1 L_2 \cos(q_1 - q_2)$

En dérivant le système d'équations de position (B.1) en fonction du temps, le système d'équations de vitesse peut être écrit :

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dt} &= -L_1 \sin q_1 \cdot \dot{q}_1 - L_3 \sin \varphi_3 \cdot K_1 + L_4 \sin \varphi_4 \cdot K_2 + L_2 \sin q_2 \cdot \dot{q}_2 = 0 \\ \frac{df_2}{dt} &= L_1 \cos q_1 \cdot \dot{q}_1 + L_3 \cos \varphi_3 \cdot K_1 - L_4 \cos \varphi_4 \cdot K_2 - L_2 \cos q_2 \cdot \dot{q}_2 = 0\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Avec :

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 \\ K_2 &= \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

En posant des valeurs particulières aux vitesses généralisées, par exemple $\dot{q}_1 = 1$ et $\dot{q}_2 = 0$, les fonctions de transmission de vitesse $\partial \varphi_3 / \partial q_1$ et $\partial \varphi_4 / \partial q_1$ peuvent être dégagées de sorte que :

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} = \frac{L_1 \sin(\varphi_4 - q_1)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} = \frac{L_1 \sin(\varphi_3 - q_1)}{L_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.8})$$

En imposant plutôt que $\dot{q}_1 = 0$ et $\dot{q}_2 = 1$, les fonctions de transmission de vitesse $\partial \varphi_3 / \partial q_2$ et $\partial \varphi_4 / \partial q_2$ peuvent être dégagées à leur tour :

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} = \frac{-L_2 \sin(\varphi_4 - q_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} = \frac{-L_2 \sin(\varphi_3 - q_2)}{L_4 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.10})$$

Les expressions (B.6) jusqu'à (B.9) constitue la matrice des fonctions de transmission de vitesse \mathbf{C} .

Pour obtenir les expressions des fonctions de transmission d'accélération, le système d'équations d'accélération doit être écrit. Pour ce faire, les équations (B.5) sont dérivées en fonction du temps comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f_1}{dt^2} &= -L_1 \sin q_1 \cdot \ddot{q}_1 - L_1 \cos q_1 \cdot \dot{q}_1^2 - L_3 \sin \varphi_3 \cdot K_3 - L_3 \cos \varphi_3 \cdot K_1^2 \\ &\quad + L_4 \sin \varphi_4 \cdot K_4 + L_4 \cos \varphi_4 \cdot K_2^2 + L_2 \sin q_2 \cdot \ddot{q}_2 + L_2 \cos q_2 \cdot \dot{q}_2^2 = 0 \\ \frac{d^2 f_2}{dt^2} &= L_1 \cos q_1 \cdot \ddot{q}_1 - L_1 \sin q_1 \cdot \dot{q}_1^2 + L_3 \cos \varphi_3 \cdot K_3 - L_3 \sin \varphi_3 \cdot K_1^2 \\ &\quad - L_4 \cos \varphi_4 \cdot K_4 + L_4 \sin \varphi_4 \cdot K_2^2 - L_2 \cos q_2 \cdot \ddot{q}_2 + L_2 \sin q_2 \cdot \dot{q}_2^2 = 0\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Avec :

$$\begin{aligned}K_3 &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1^2} \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2 \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \cdot \ddot{q}_2 + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2^2} \cdot \dot{q}_2^2 \\ K_4 &= \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \cdot \ddot{q}_1 + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1^2} \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2 \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \cdot \ddot{q}_2 + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1 \partial q_2} \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2^2} \cdot \dot{q}_2^2\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

En posant que l'ensemble des vitesses \dot{q}_k et des accélérations généralisées \ddot{q}_k des équations d'accélération (B.11) soient nulles à l'exception de \dot{q}_1 qui est considérée comme étant unitaire, les fonctions de transmission des variables dépendantes par rapport à la coordonnée généralisée q_1 peuvent être explicitées :

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1^2} = - \frac{L_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right)^2 - L_3 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right)^2 + L_1 \cos(\varphi_4 - q_1)}{L_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1^2} = - \frac{L_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right)^2 - L_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right)^2 + L_1 \cos(\varphi_3 - q_1)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.14})$$

où les fonctions de transmission de vitesse $\partial \varphi_3 / \partial q_1$ et $\partial \varphi_4 / \partial q_1$ correspondent aux équations (B.7) et (B.8).

En imposant que \dot{q}_2 est unitaire lorsque les autres vitesses généralisées ainsi que les accélérations généralisées sont nulles, les fonctions de transmission d'accélération des variables dépendantes par rapport à la coordonnée généralisée q_2 sont dégagées :

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2^2} = \frac{-L_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right)^2 + L_3 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right)^2 + L_4 \cos(\varphi_4 - q_2)}{L_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2^2} = \frac{-L_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right)^2 + L_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right)^2 + L_4 \cos(\varphi_3 - q_2)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.16})$$

Pour obtenir les fonctions de transmission d'accélération correspondant à des dérivées partielles mixtes, les vitesses généralisées \dot{q}_1 et \dot{q}_2 sont imposées comme étant unitaire simultanément lorsque les accélérations généralisées sont gardées nulles. Ainsi, il est possible d'écrire que :

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{L_3 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right) - L_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right)}{L_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2 \partial q_1} = - \frac{L_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right) - L_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right)}{L_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)} \quad (\text{B.18})$$

Les fonctions de transmission d'accélération de (B.13) à (B.18) font partie de la matrice de transmission d'accélération **D**.

Pour écrire les matrices élémentaires de transmission de position, l'emplacement et l'orientation de chacun des centres de gravité des membrures doivent être considérés :

$$\mathbf{P}_1 = [r_1 \cos q_1 \quad r_1 \sin q_1 \quad q_1]^T \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{P}_2 = [r_2 \cos q_2 \quad r_2 \sin q_2 \quad q_2]^T \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{P}_3 = [L_1 \cos q_1 + r_3 \cos \varphi_3 \quad L_1 \sin q_1 + r_3 \sin \varphi_3 \quad \varphi_3]^T \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{P}_4 = [k + L_2 \cos q_2 + r_4 \cos \varphi_4 \quad L_2 \sin q_2 + r_4 \sin \varphi_4 \quad \varphi_4]^T \quad (\text{B.22})$$

La matrice de transmission de position **P** comprend l'ensemble des matrices élémentaires de transmission de position comme suit :

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1^T \quad \mathbf{P}_2^T \quad \mathbf{P}_3^T \quad \mathbf{P}_4^T]^T \quad (\text{B.23})$$

La première colonne de la matrice de transmission de vitesse **V** correspond aux dérivées partielles de la matrice de transmission de position par rapport à la coordonnée généralisée q_1 tandis que la seconde fait plutôt référence à q_2 de sorte que :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -r_1 \sin q_1 & 0 \\ r_1 \cos q_1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -r_2 \sin q_2 \\ 0 & r_2 \cos q_2 \\ 0 & 1 \\ -L_1 \sin q_1 - r_3 \sin \varphi_3 \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} & -r_3 \sin \varphi_3 \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \\ L_1 \cos q_1 + r_3 \cos \varphi_3 \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} & r_3 \cos \varphi_3 \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \\ r_4 \sin \varphi_4 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} & -L_2 \sin q_2 - r_4 \sin \varphi_4 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \\ r_4 \cos \varphi_4 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} & L_2 \cos q_2 + r_4 \cos \varphi_4 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

La matrice de transmission d'accélération \mathbf{A} incorpore les dérivées partielles de second ordre de la matrice de transmission de position \mathbf{P} . Elle peut être écrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \quad (\text{B.25})$$

avec :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}
 -r_1 \cos q_1 & 0 \\
 -r_1 \sin q_1 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 -r_3 \cos \varphi_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right)^2 - L_1 \cos q_1 - r_3 \sin \varphi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1^2} & -r_3 \sin \varphi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2 \partial q_1} + r_3 \cos \varphi_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right) \\
 -r_3 \sin \varphi_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right)^2 - L_1 \sin q_1 + r_3 \cos \varphi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1^2} & r_3 \cos \varphi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2 \partial q_1} - r_3 \sin \varphi_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2 \partial q_1} \\
 -r_4 \cos \varphi_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right)^2 - r_4 \sin \varphi_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1^2} & -r_4 \sin \varphi_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2 \partial q_1} - r_4 \cos \varphi_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right) \\
 -r_4 \sin \varphi_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right)^2 + r_4 \cos \varphi_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1^2} & r_4 \cos \varphi_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2 \partial q_1} - r_4 \sin \varphi_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2 \partial q_1}
 \end{bmatrix}$$

(B.26)

et :

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & -r_2 \cos q_2 \\
 0 & -r_2 \sin q_2 \\
 0 & 0 \\
 -r_3 \sin \varphi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1 \partial q_2} + r_3 \cos \varphi_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right) & -r_3 \cos \varphi_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right)^2 - r_3 \sin \varphi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2^2} \\
 r_3 \cos \varphi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1 \partial q_2} - r_3 \sin \varphi_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right) & -r_3 \sin \varphi_3 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} \right)^2 + r_3 \cos \varphi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2^2} \\
 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial q_2^2} \\
 -r_4 \sin \varphi_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1 \partial q_2} - r_4 \cos \varphi_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right) & -r_4 \cos \varphi_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right)^2 - L_2 \cos q_2 - r_4 \sin \varphi_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2^2} \\
 r_4 \cos \varphi_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1 \partial q_2} - r_4 \sin \varphi_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right) & -r_4 \sin \varphi_4 \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial q_2} \right)^2 - L_2 \sin q_2 + r_4 \cos \varphi_4 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2^2} \\
 \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial q_2^2}
 \end{bmatrix}$$

(B.27)

Une fois que les matrices de transmission de vitesse \mathbf{V} et d'accélération \mathbf{A} sont connues, les équations de mouvement du mécanisme à membrures peuvent être écrites. Tel que mentionné dans le mémoire, les matrices \mathbf{V} et \mathbf{A} sont définies en fonction des fonctions de transmission comprises dans les matrices \mathbf{D} et \mathbf{A} . En raison du fait que les variables dépendantes peuvent aussi être écrites en fonction des coordonnées généralisées et de la géométrie du mécanisme, il est possible de constater la complexité des équations de mouvement lorsqu'écrites sous forme analytique.