Table des matières

Liste des tableaux

Introduction

Les nombres de Whitney interviennent dans plusieurs domaines des mathématiques et de manière intensive en combinatoire énumérative. Il ont été introduits par T. A. Dowling (voir [56]). Ils sont de deux type : les nombres de Whitney de première espèce et les nombres de Whitney de seconde espèce. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ces nombres. L'article de M. Benoumhani [25] se consacre à ces nombres et fournit une bibliographie riche et donne les fonctions génératrices, les formules explicites et les relations de récurrence, il montre aussi que la suite des nombres de Whitney de seconde espèce est strictement log-concave. Les nombres de Whitney sont liés à plusieurs autres suites combinatoires. En particulier, les nombres de Whitney de première espèce sont liés aux nombres de Stirling de première espèce et les nombres de Whitney de seconde espèce sont liés aux nombres de Stirling de seconde espèce.

On retrouve dans la littérature plusieurs généralisations : les nombres r-Whitney de deux espèces qui généralisent les nombres r-Stirling de deux espèces introduits par Broder[34]. Cheon et Jung [39] ont donné interprétation combinatoire des nombres r-Whitney de deux espèces associés aux treillis de Dowling et il a déterminé des identités combinatoires, les fonctions génératrices, les formules explicites et les relations de récurrence.

Les nombres r-Whitney de seconde espèce sont équivalents aux nombres $(r\text{-}\beta)$-Stirling, notés $\left\langle \binom{n}{k} \right\rangle_{\beta,r}$, étudiés par Corcino [42]. Plusieurs propriétés de ces nombres ont été établis dans [42] et [43] qui sont analogues à ceux des nombres de Stirling de seconde espèce. D'autre part, les nombres r-Whitney de première espèce sont équivalents aux nombres de Stirling de première espèce généralisés, noté $F_{\alpha,\gamma}(n,k)$, définis par Corcino [46],[47]. Plusieurs propriétés de ces nombres étaient déja établie, y compris une interpretation combinatoire pour $F_{\alpha,\gamma}(n,k)$. Il apparait aussi qu'ils sont équivalents aux nombres de Stirling généralisés de première et de seconde espèce, noté $\{w_{\alpha,\gamma}(n,k), W_{\beta,r}(n,k)\}$ étudiés par Corcino [44]. Dans [44], les auteurs montrent que la suite $\{w_{\alpha,\gamma}(n,k)\}_{k=0}^{n}$ est strictement log concave donc unimodale.

Le travail présenté dans cette thèse complète les travaux de Cheon et Jung sur les nombres r-Whitney de première et de seconde espèce et généralise les travaux de Belbachir et Mihoubi [11] pour obtenir des relations de récurrence aux nombres et polynômes r-Dowling et aussi généralise les travaux de Rahmani [86] sur les polynômes r-Eulériens de Dowling. On donne des extensions de résultats obtenus par Boyadziev pour les nombres r-Whitney. Nous nous sommes aussi intéressés aux nombres r-Whitney s-associés qui généralisent la notion de nombres r-Stirling s-associés [6], ainsi on étend les travaux de Boutiche, Rahmani et Srivastava [30], [93] pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés de paramètre m et les polynômes de Frobenius-Euler généralisés d'ordre supérieur.

Cette thèse est constituée d'une introduction, de cinq chapitres, d'une conclusion et d'une bibliographie.

Un premier chapitre contient les différentes notations et définitions de base qui seront utilisées dans le reste du document. On présente aussi des généralités sur les nombres r-Stirling, les nombres et polynômes r-Bell et les nombres et polynômes r-Bell ordonnés, on donne la technique du groupe de Riordan introduite par Shapiro et. al. [89], cette méthode nous permet de trouver plusieurs résultats et des preuves très simples de résultats précédemment établis. Ainsi, on étudie quelques suites de nombres : les nombres Harmoniques, les nombres et polynômes de Bernoulli, les nombres de Catalan, on présente la méthode de la matrice d'Euler Seidel qui est relativement plus facile que la plupart des méthodes combinatoires pour étudier la structure de tels nombres et polynômes. On complète ce chapitre avec une généralitée sur les nombres de Whitney associés aux treillis de Dowling, on présente le treillis de Dowling introduit par Dowling [56] et différentes propriétés sur les nombres de Whitney. On étudie les polynômes de Dowling et polynômes de Dowling ordonnés et leurs propriétés.

Le deuxième chapitre est réparti en quatre sections, on y définit les nombres r-Whitney, les nombres et polynômes r-Dowling, les nombres et polynômes r-Dowling ordonnés et les nombres et polynômes r-Eulerien de Dowling. On cite les principales identités, on donne une relation reliant les nombres r-Whitney de première espèce aux nombres de Stirling de seconde espèce

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}m^{n-j}S(n,j)w_{m,r}(j,k)=\binom{n}{k}r^{n-k},$$

et une autre relation lie les nombres r-Whitney de seconde espèce aux nombres de Stirling de première espèce

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}m^{n-j}s(n,j)W_{m,r}(j,k)=\binom{n}{k}(r|m)_{n-k}.$$

on présente des identités qui lient les deux types de nombres r-Whitney aux coefficients binomiaux et on exprime les nombres r-Dowling à l'aide des nombres r-Whitney de première espèce et à l'aide des nombres r-Whitney de seconde espèce.

$$D_{m,r}(n+k)=\sum_{j=0}^{k}W_{m,r}(k,j)D_{m,r+jm}(n),$$

$$D_{m,r+km}(n)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}w_{m,r}(k,j)D_{m,r}(n+j).$$

Nous proposons une nouvelle formule pour les polynômes r-Dowling en utilisant la méthode de la fonction génératrice donnée par Gould et Quaintance [63]

$$D_{m,r}(n+k,x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}W_{m,r}(k,j)\binom{n}{i}(mj)^{n-i}x^{j}D_{m,r}(i,x).$$

Nous donnons une expression explicite pour les polynômes r-Dowling liés aux nombres r-Whitney de première espèce, nous les exprimons également en une famille de bases spécifiques. On trouve une formule explicite et une relation de récurrence des polynômes r-Dowling ordonnés, on étudie aussi les nombres et polynômes r-Eulériens de Dowling et on déduit que les polynômes r-Dowling ordonnés sont liés aux nombres r-Eulériens de Dowling par

$$\mathcal{D}_{m,r}(n,x)=\sum_{k=0}^{n}a_{m,r}(n,k)(1+x)^{k}x^{n-k}.$$

Le troisième chapitre est consacré la transformée binomiale et aux nombres r-Whitney où on se propose de donner des extensions de résultats obtenus par K. Boyadzhiev grâce à la transformée binomiale en utilisant l'identité suivante

$$\sum_{k=o}^{p}(mk+r)^n c_k = \sum_{j=0}^{p} j! m^j W_{m,r}(n,j) \sum_{k=j}^{p} \binom{k}{j} c_k,$$

où les $c_1, c_2, \ldots$ forment une suite de nombres complexes et p un entier positif. Cette relation nous permet d'obtenir plusieurs identités. Ainsi, on trouve les relations qui lient les nombres r-Whitney de seconde espèce aux nombres harmoniques et hyperharmoniques.

Le quatrième chapitre est réparti en deux sections, la première est consacrée aux nombres r-Whitney s-associés de seconde espèce et aux différentes propriétés les concernant. Ainsi, on introduit les nombres r-Whitney s-associés par la fonction génératrice exponentielle suivante

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}^{(s)}(n,k) \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{rz}}{k!} \left(\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1} (mz)^j / j!}{m} \right)^k .$$

On obtient plusieurs relations de récurrence et formes explicites. Ces dernières permettent d'écrire les nombres r-Whitney s-associés en termes de nombres r-Whitney s-associés d'ordre inférieur et les nombres r-Whitney s-associés en termes de nombres r-Whitney $(s-1)$-associés en utilisant dans la preuve la fonction génératrice exponentielle et la transformée binomiale. En suite on établit des identités combinatoires qui permettent d'écrire les nombres r-Whitney s-associés en termes de nombres r-Stirling s-associés en utilisant la matrice de Riordan. Dans la seconde section, on définit les polynômes r-Dowling s-associés et on donne leurs principales propriétés, ainsi on donne des relations de récurrence et formes explicites permettant d'écrire les polynômes r-Dowling s-associés en termes de nombres r-Dowling s-associés d'ordre plus petit et les polynômes r-Dowling s-associés en termes de polynômes r-Dowling $(s-1)$-associés en utilisant dans la preuve la fonction génératrice exponentielle, la transformée binomiale et la méthode de la matrice d'Euler Seidel. On donne aussi des résultats sur les nombres de Whitney s-associés et les polynômes de Dowling s-associés comme des cas spéciaux.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous proposons une formule explicite pour les polynômes de Bernoulli généralisés de paramètre m en termes de polynômes de Whitney généralisés. On donne aussi une relation entre les nombres de Bernoulli généralisés et les nombres de Catalan et on génère le coefficient du nombre de cosécantes hyperboliques en termes du nombre de Bernoulli généralisé. En outre, on donne une formule explicite pour les polynômes d'Euler généralisés en termes de polynômes de Whitney gééralisés et on génère le coefficient de la sécante hyperbolique en termes du nombre d'Euler généralisé. On traite ainsi les polynômes de Frobenius-Euler généralisés $H_n^{(m)}(x, \alpha|\lambda)$ d'ordre α (dans $\mathbb{C}$ avec $\lambda \neq 1$) et les polynômes de Frobenius-Genocchi que nous exprimons en termes de polynômes de Whitney généralisés de seconde espèce. Ensuite, on introduit les polynômes de Whitney translatés de seconde espèce et on écrit les polynômes de Bernoulli généralisés, les polynômes d'Euler généralisés et les polynômes de Frobenius-Euler généralisés en termes des polynômes de Whitney translatés de seconde espèce. On complète ce chapitre par une relation de récurrence à trois termes pour calculer les polynômes de Frobenius-Euler généralisés $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$ d'ordre α.

$$A_{n+1,l}(x) = (x - ml)A_{n,l}(x) + \frac{m(\alpha + l)}{\lambda - 1}A_{n,l+1}(x),$$

avec $A_{0,l}(x) = 1$ et

$$A_{n,l}(x) = A_{n,l}^{\lambda,m}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k},$$

avec $A_{0,l}^{\lambda,m}(x,\alpha) = 1$ et $A_{n,0}^{\lambda,m}(x,\alpha) = H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons les notations et définitions dont on aura besoin dans les chapitres suivants. Elles sont principalement puisées dans les ouvrages de Comtet [40], Charalambides [38], Dowling [56] et Graham, Knuth et Patashnik [64].

1.1 Notations

On note par $\delta_{n,m}$ le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

On désigne par n ! le produit suivant :

$$n! = n(n-1)\cdots 1.$$

1.2 Relation d'équivalence, ensembles ordonnés, treillis

Le but de ce paragraphe est de définir le treillis de Dowling ainsi que les rangs et co-rangs associés.

1.2.1 Relation d'équivalence

Soient X et Y deux ensembles.

Produit cartésien : On appelle *produit cartésien* de deux ensembles X et Y, noté $X \times Y$, l'ensemble de toutes les paires ordonnées possibles dont le premier élément est dans X et le deuxième est dans Y :

$$X \times Y = \{(x,y)/x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

Relation binaire : *Une relation binaire* R d'un ensemble X vers un ensemble Y est définie par une partie G de $X \times Y$.

Si $(x,y) \in G$ on dit que x est en relation avec y et on note xRy. On dit que y est une image de x .

Dans le cas particulier où $X = Y$, on dit que R est une relation binaire définie sur X ou dans X.

Relation d'équivalence : *Une relation d'équivalence* $\Re$ dans un ensemble X est une relation binaire :

Réflexive, tout élément x de X est associé à lui-même : $\forall x \in X,\ x\Re x$.

Symétrique, tout élément de X est l'image de son image : $\forall (x,y) \in X^2,\ (x\Re y) \Rightarrow (y\Re x)$.

Transitive, toute image d'une image d'un élément de X est image directe de cet élément : $\forall (x,y,z) \in X^3$, $(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow (x\Re z)$.

Classe d'équivalence : on appelle *classe d'équivalence* d'un élément $x \in X$ noté $\Re(x)$, l'ensemble des images de x par la relation d'équivalence $\Re$: $\Re(x) = \{y \in X/x\Re y\}$.

Propriété. Les classes d'équivalences vérifient les propriétés suivantes :

1. $\Re(x)$ est un sous-ensemble de X.

2. $\Re(x)$ n'est jamais vide, car elle contient au moins x. Inversement, tout élément de X appartient à au moins une classe d'équivalence : la sienne.

3. $\Re(x) = \Re(y)$ si et seulement si $y \in \Re(x)$. Inversement, si $y \notin \Re(x)$ alors $\Re(x) \cap \Re(y) = \varnothing$.

Remarque 1.1. On déduit de ce que précède que l'ensemble des classes d'équivalence de X forme une partition de X. Inversement, toute partition de X définit une relation d'équivalence.

1.2.2 Ensembles ordonnés

Définition 1.1. Un *ensemble ordonné* est une relation binaire sur un ensemble V, désignée par $\leq$, satisfaisant les propriétés suivantes pour tout $x,y,z \in V$:

1. $x \leq x$ (*réflexivité*) ;
2. $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$ (*antisymétrie*) ;
3. $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$ (*transitivité*).

On lit x *inférieur ou égal* à y ou que x *minore* y le fait que $x \leq y$, et on note $x \nleq y$ le fait contraire.

On note $x < y$ si $x \leq y$ et $y \neq x$, ou ce qui est équivalent si $x \leq y$ et $y \lneqq x$. On dit que x est *strictement inférieur* à y.

Dans ce qui suit on suppose P fini.

Lorsque deux éléments x, y satisfont les deux conditions :

1. $x < y$,
2. il n'existe pas de z satisfaisant $x < z < y$,

on dit que x est *couvert* par y (ou que y *couvre* x) et on note ce fait $x \prec y$, on dit aussi que x est une *couverture inférieure* de y ou y est une *couverture supérieure* de x.

Un élément x d'un ensemble ordonné P est un élément *minimal*, resp. élément *maximal* s'il n'a pas de couverture inférieure, resp. couverture supérieure. Notons l'ensemble des éléments minimaux, resp. l'ensemble des éléments maximaux de P par $\min(P)$, resp. $\max(P)$.

Pour chaque entier $i > 0$, on définit le i^{eme} *niveau* de P par

$$L_i := \min(P - \bigcup_{j=0}^{i-1} L_j),$$

où $L_0 = \min(P)$.

La *hauteur* ou *rang* $h(x,P)$ d'un élément $x \in P$ est le numéro i du niveau L_i contenant x. La *hauteur* d'un ensemble ordonné P est $h(P) := \max\{h(x,P) + 1 : x \in P\}$.

Le *corang* $c(x,P)$ d'un élément $x \in P$ est $c(x,P) = h(P) - h(x,P) - 1$.

1.2.3 Treillis

Minorant, majorant, borne supérieure, borne inférieure

Soit P un ensemble ordonné. Soit a un élément de P et B une partie de P on dit que a *minore* B si a minore tout élément b de B. De même, on définit la majoration d'une partie par un élément a de P. On notera B^- l'ensemble des éléments de P qui minorent B et A^+ l'ensemble des éléments de P qui majorent A.
Lorsque A^+ a un plus petit élément, celui-ci s'appelle *la borne supérieure* de A. Cet élément noté $\sup(A)$, est donc caractérisé par les deux propriétés suivantes :

1. $a \in A \Rightarrow a \leq \sup(A)$,
2. Si $a \in A \Rightarrow a \leq b$, alors $\sup(A) \leq b$.

Lorsque A^- a un plus grand élément on l'appelle *la borne inférieure* de A. On le note $\inf(A)$.

Treillis complet, treillis

Lorsque toute partie S d'un ensemble ordonné P a une borne supérieure, noté $\sup(S)$ et une borne inférieure noté, $\inf(S)$, l'ensemble ordonné est appelé un *treillis complet.* Lorsque on impose seulement que toute partie à deux éléments ait une borne supérieure et une borne inférieure, l'ensemble ordonné P est appelé un *treillis.*

On dit que $\top$ est le *plus grand élément* d'un ensemble ordonné P si pour chaque $x \in P$, $\top \geq x$. Par dualité, on définit le plus petit élément $\perp$ de P.

On dit qu'un élément d'un ensemble ordonné P est un *atome* s'il couvre le plus petit élément. Un *coatome* d'un ensemble ordonné P est un élément couvert par le plus grand élément.

Un treillis fini T est *semimodulaire* si pour tout $x,y \in T$:

$$x \text{ et } y \text{ couvrent } \inf\{x,y\} \Rightarrow \sup\{x,y\} \text{ couvre } x \text{ et } y.$$

Un treillis T fini est un *treillis géométrique* s'il est complet, semimodulaire et si chaque élément x de T est une borne supérieure de l'ensemble des atomes dans $\{y : \perp \leq y \leq x\}$.

1.2.4 Fonction de Möbius, polynôme caractéristique

La *fonction de Möbius* μ d'un ensemble ordonné P fini est la fonction définie sur $P \times P$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ par :

$$\begin{cases} \mu(x,x) = 1 & \\ \mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z) & \text{si } \ x \leq y \\ \mu(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le *polynôme caractéristique* d'un treillis géométrique T fini de rang n est définie par :

$$p_T(\nu) = \sum_{x \in T} \mu(\bot,x)\nu^{n-rang(x)}.$$

1.3 Dénombrement

Soit N un ensemble finie, $|N| = n$ où $|N|$ est la cardinalité de l'ensemble N.

Définition 1.2. Une *m-combinaison* de m objets de $N = \{1,2,\ldots,n\}$ est une partie M à m éléments.

En d'autres termes, une combinaison est une distribution de m boules indiscernables dans n urnes discernables.

Le nombre de m-combinaisons est noté $\binom{n}{m}$. On a :

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}, \tag{1.1}$$

avec la convention,

$$\binom{n}{m} = 0, \quad pour \ \ m < 0 \ \ ou \ \ m > n. \tag{1.2}$$

Définition 1.3. Un *m-arrangement* d'une partie M à m éléments de N est une partie dont les éléments sont numérotés.

En d'autres termes, un arrangement est une application injective d'un ensemble M à m éléments dans un ensemble N à n éléments.

Le nombre de m-arrangement de N noté $(n)_m$, vaut :

$$(n)_m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.3}$$

Définition 1.4. On appelle *permutation* de N, notée P, tout arrangement de l'ensemble N dans un ordre donné. Une permutation est identifiée à une fonction bijective de N dans lui-même.

Le nombre de permutations est égal à $n!$, car une permutation n'est autre qu'un n-arrangement de N.

Définition 1.5. On dit que la suite $(p_1,p_2,\ldots,p_m)$, $p_i \in N, 1 \leq i \leq m$, forme un cycle de longueur m dans une permutation P si $P(p_1) = p_2$, $P(p_2) = p_3, \ldots, P(p_{m-1}) = p_m,\ P(p_m) = p_1$.

Définition 1.6. Soient $k_1,k_2,\ldots,k_m, m \geq 1$ des entiers relatifs, on définit *le coefficient multinomial*, noté $\binom{k_1+k_2+\cdots+k_m}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, par :

$$\binom{k_1+k_2+\cdots+k_m}{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \begin{cases} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_m)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} & \textit{si } k_i \geq 0, i \in \{1,2,\ldots,m\} \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases}$$

Définition 1.7. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, *la factorielle descendante d'ordre* n, notée $(x)_n$, est définie par la relation suivante :

$$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1), \qquad n \geq 1, \tag{1.4}$$

$$(x)_0 = 1.$$

Propriétés Soient $x,y \in \mathbb{C}$ et $n,m \in \mathbb{Z}$, alors :

$$(x)_{n+m} = (x)_n(x-n)_m,$$

$$(x)_{-m} = \frac{1}{(x+m)_m} \quad x \neq -1, -2, \ldots, -m.$$

Définition 1.8. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, *la factorielle ascendante ou montante d'ordre* n, notée $\langle x \rangle_n$, est définie par la relation suivante :

$$\langle x \rangle_n = x(x+1)\cdots(x+n-1), \qquad n \geq 1, \tag{1.5}$$

$$\langle x \rangle_0 = 1.$$

On a :

$$\langle x \rangle_n = (-1)^n (x)_n.$$

Définition 1.9. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, la factorielle descendante généralisée d'ordre n et de paramètre m, notée $(x|m)_n$, est définie par la relation suivante :

$$(x|m)_n = x(x-m)\cdots(x-(n-1)m), \qquad n \geq 1, \tag{1.6}$$

$$(x|m)_0 = 1.$$

Définition 1.10. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, *la factorielle ascendante généralisée d'ordre* n *et de paramètre* m, notée $\langle x|m \rangle_n$, est définie par la relation suivante :

$$\langle x|m \rangle_n = x(x+m)\cdots(x+(n-1)m), \qquad n \geq 1, \tag{1.7}$$

$$\langle x|m \rangle_0 = 1.$$

Définition 1.11. Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, *le coefficient binomial généralisé*, noté $\binom{x}{n}$, est défini par la relation suivante :

$$\binom{x}{n} = \frac{(x)_n}{n!}. \tag{1.8}$$

1.3.1 Transformée binomiale

Définition 1.12. *La transformée binomiale* d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout entier positif k, on a :

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j,$$

avec la formule d'inversion

$$a_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j.$$

1.4 Fonctions génératrices

Dans cette partie on présente les fonctions génératrices (voir [40]).

Définition 1.13. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle *fonction génératrice ordinaire* de la suite $(a_n)_n$, la fonction :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On appelle *fonction génératrice exponentielle* de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction :

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Remarque 1.2. Nous définissons ici les fonctions génératrices de manière formelle.

Définition 1.14. [40] On appelle *fonction génératrice factorielle* de la suite $(a_n)_n$, la fonction :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)_n.$$

On appelle *fonction génératrice binomiale* de la suite $(a_n)_n$, la fonction :

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}.$$

Définition 1.15. Soit $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ une suite bidimensionnelle de nombres réels. On appelle *fonction génératrice double ordinaire* de la suite $(a_{n,m})_{n,m}$, la fonction :

$$A(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} x^m z^n.$$

On appelle *fonction génératrice double exponentielle* de la suite $(a_{n,m})_{n,m}$, la fonction :

$$E(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!}.$$

Remarque 1.3. Dans le cas où la suite $(a_{n,m})_{n,m}$ est triangulaire (i.e., $a_{n,m} = 0$ pour $n < m$), il est plus commode d'utiliser *la fonction génératrice mixte* suivante :

$$\Phi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_{n,m} x^m \frac{z^n}{n!}.$$

1.5 Nombres de Stirling, nombres et polynômes de Bell et nombres et polynômes de Bell ordonnés

Dans cette partie, on présente les nombres de Stirling des deux espèces et les nombres de Bell. Les propriétés de ces nombres ont été principalement puisées de L. Comtet [40], de Graham, Knuth et Patashnik [64], Charalambides [38] et Crstici, Sandor et Mitrinovic [49].

Définition 1.16. Le *nombre de Stirling de première espèce*, noté $s(n,k)$, compte le nombre de permutations de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$ ayant exactement k cycles $(0 \leq k \leq n)$.

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante, pour $n \geq 1$

$$s(n,k) = (n-1)s(n-1,k) + s(n-1,k-1),$$

avec $s(n,0) = \delta_{0,n}$, $s(0,0) = 1$.

Définition 1.17. Le *nombre de Stirling de seconde espèce*, noté $S(n,k)$, compte le nombre de partitions de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$ en k sous-ensembles non vides $(0 \leq k \leq n)$.

Les nombres de Stirling de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1),$$

avec $S(n,0) = \delta_{0,n}$, $S(0,0) = 1$.

Exemple 1.1. : L'ensemble $\{1,2,3,4\}$ possède 11 permutations ayant 2 cycles 1234, 1243, 2134, 2143, 3124, 3142, 4123, et aussi 4132, 1234, 1324 et 1423. Par conséquent : $s(4,2) = 11$.

Exemple 1.2. L'ensemble $\{1,2,3,4\}$ possède 7 partitions en deux sous-ensembles non vides : $\{\{1,2,3\};\{4\}\}$,$\{\{1,2,4\};\{3\}\}$, $\{\{1,3,4\};\{2\}\}$, $\{\{2,3,4\};\{1\}\}$
et aussi $\{\{1,2\};\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\};\{2,4\}\}$ et $\{\{1,4\};\{2,3\}\}$. Par conséquent $S(4,2) = 7$.

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient la relation

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k.$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{(-1)^k(\ln(1-z))^k}{k!}. \tag{1.9}$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce vérifient la relation

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k.$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^z-1)^k. \tag{1.10}$$

Définition 1.18. Le *nombre de Bell*, noté B_n, compte le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, i.e $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$.

Le polynôme de Bell est défini par : $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k$.

Exemple 1.3. L'exemple suivant illustre l'interprétation des nombres de Bell.
Par définition, on a :

$$B_4 = S(4,0) + S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4).$$

$S(4,0) = 0$,
$S(4,1)$ compte le nombre de partitions de 4 éléments en un sous-ensemble :
$\{\{1,2,3,4\}\}$,
$S(4,2)$ compte le nombre de partitions de 4 éléments en deux sous-ensembles :
$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{3\},\{1,2,4\}\}$,$\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$,
$S(4,3)$ compte le nombre de partitions de 4 éléments en trois sous-ensembles :
$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\}$, $\{\{3\},\{2\},\{1,4\}\}$, $\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\}$, $\{\{4\},\{2\},\{1,3\}\}$,
$S(4,4)$ compte le nombre de partitions de 4 éléments en quatre sous-ensembles :
$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$,
ainsi, $B_4 = 0 + 1 + 7 + 6 + 1 = 15$.

Les nombres et polynômes de Bell vérifient, respectivement, les relations de récurrence suivantes :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k,$$

$$B_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x).$$

Définition 1.19. Le *nombre de Bell ordonné*, noté $\mathcal{B}_n$, compte le nombre de partitions ordonnées de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$. Il est donné par l'identité suivante :

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n} k!S(n,k).$$

Exemple 1.4. On donne un exemple pour illustrer l'interprétation des nombres de Bell ordonnés.
Pour $n = 4$, on a : 1 partition (un sous ensemble de 4 éléments).

7 partitions en deux sous ensembles : 4 partitions de $3+1$ et 3 partitions de $2+2$. Ce qui donne $7 \times 2 = 14$.

6 partitions en 3 sous ensembles $2 + 1 + 1$, soit $6 \times 3 \times 2 = 36$.

1 partition en 4 sous ensembles $1 + 1 + 1 + 1$, soit $4 \times 3 \times 2 = 24$.

ainsi, $\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{4} k!S(4,k) = 75$.

Le polynôme de Bell ordonné, $\mathcal{B}_n(x)$, est défini par :

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k!S(n,k)x^k.$$

Les nombres de Bell ordonnés vérifient la relation de récurrence [53]

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \mathcal{B}_k.$$

1.6 Nombres r-Stirling, nombres et polynômes r-Bell, nombres et polynômes r-Bell ordonnés

Dans cette partie, on étudie les nombres r-Stirling, les nombres r-Bell et les nombres r-Bell ordonnés. On peut retrouver dans [34], [35] et [37] les propriétés de ces nombres.

Définition 1.20. Le *nombre r-Stirling de première espèce*, noté $s_r(n+r,k+r)$, compte le nombre de permutations de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n+r\}$ ayant exactement $k+r$ cycles tels que les r-premiers éléments soient dans des cycles distincts, $r \geq 0, 0 \leq k \leq n$.

Les nombres r-Stirling de première espèce vérifient l'identité suivante, pour $n \geq 0$

$$\langle x+r \rangle_n = \sum_{k=0}^{n} s_r(n+r,k+r)x^k.$$

Définition 1.21. Le *nombre r-Stirling de seconde espèce*, noté $S_r(n+r,k+r)$, compte le nombre de partitions de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n+r\}$ en $k+r$ sous-ensembles non vides tels que les r-premiers éléments sont dans des sous-ensembles distincts.

Les nombres r-Stirling de seconde espèce vérifient l'identité suivante, pour $n \geq 0$

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} S_r(n+r,k+r)(x)_k.$$

Définition 1.22. Le *nombre r-Bell*, noté $B_{n,r}$ est le nombre de partitions d'un ensemble à $n+r$ éléments tels que, dans chaque partition, les r-premiers éléments sont dans des sous-ensembles disjoints. Il sont donc donnés par :

$$B_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} S_r(n+r,k+r).$$

Le polynôme r-Bell est donné par

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} S_r(n+r,k+r)x^k.$$

Les polynômes r-Bell sont obtenus récursivement par la relation suivante :

$$B_{n,r}(x) = B_{n+1,r-1}(x) - (r-1)B_{n,r-1}(x),$$

avec $B_{0,r}(x) = 1$, pour tout r.

Les nombres r-Bell vérifient l'identité

$$B_{n,r+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{k,r}.$$

Définition 1.23. Le *nombre r-Bell ordonné*, noté $\mathcal{B}_{n,r}$, donne le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble à $n+r$ éléments telles que les r-premiers éléments soient dans des sous-ensembles disjoints. Il est donné par :

$$\mathcal{B}_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! S_r(n+r,k+r).$$

Le *polynôme r-Bell ordonné* est défini par la relation suivante :

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! S_r(n+r,k+r) x^k.$$

Les nombres r-Bell ordonnés vérifient l'identité [77]

$$\mathcal{B}_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+r)^n (k+r)!}{2^{k+r+1} k!}.$$

1.7 Matrice de Riordan

Dans cette partie, on présente la matrice de Riordan (voir [89], [90] et [39]).

Définition 1.24. Une *série formelle* est une somme infinie définie à partir d'une suite de nombre complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

où z est une variable formelle.

Notons $\mathbb{C}[[z]]$ l'anneau des séries formelles à coefficient dans $\mathbb{C}$ et en une variable z.
Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera $[z^n]$ le coefficient de z^n dans $f(z)$ et on écrit $a_n = [z^n] f(z)$.

Définition 1.25. Une *matrice de Riordan ordinaire* notée $((g(z),f(z))$ est une matrice triangulaire inférieure infinie $L = [l_{n,k}]_{n,k\geq 0}$ construire à partir de deux séries formelles $g(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ et $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ telle que $g(0) \neq 0$, $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. De telle manière $l_{n,k} = [z^n] g(z)(f(z))^k$.

Si $l_{n,k} = [\frac{z^n}{n!}] g(z)(f(z))^k / k!$, la matrice L s'appelle *matrice de Riordan exponentielle*, en abrégé e-matrice de Riordan et est notée $\langle g(z),f(z)\rangle$.

Remarque 1.4.
- $\sum_{n=0}^{\infty} l_{n,k} z^n = g(z)(f(z))^k$ est la fonction génératrice ordinaire de la k-ième colonne de la matrice de Riordan ordinaire.
- $\sum_{n=0}^{\infty} l_{n,k} z^n/n! = g(z)(f(z))^k/k!$ est la fonction génératrice exponentielle de la k-ième colonne de la matrice de Riordan exponentielle.

L'ensemble des matrices e-Riordan $\mathcal{E} = \{\langle g(z),f(z)\rangle\ ,\ g(0) \neq 0,\ f(0) = 0\ \text{ et }\ f'(0) \neq 0\}$ forme un groupe par la multiplication définie par

$$\langle g(z),f(z)\rangle \langle h(z),l(z)\rangle = \langle g(z)h(f(z)),l(f(z))\rangle .$$

L'élément identité de $\mathcal{E}$ est $\langle 1,z\rangle$, la matrice identité usuelle et l'inverse de $\langle g(z),f(z)\rangle$ est donnée par $\langle g(z),f(z)\rangle^{-1} = \langle 1/g(\overline{f}(z)),\overline{f}(z)\rangle$, où $\overline{f}$ est l'inverse de f, i.e.,$\overline{f}(f(z)) = f(\overline{f}(z)) = z$.

Soit $\langle g(z),f(z)\rangle$ une matrice de Riordan exponentielle, soient $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n/n!$ et $B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n/n!$, alors on a

$$\langle g(z),f(z)\rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} \Leftrightarrow g(z)A(f(z)) = B(z).$$

Cette propriétée s'appelle la propriétée fondamentale des matrice de Riordan ([89],[90]).

la *matrice de Pascal* P est une matrice dont les coefficients sont les coefficients binomiaux, la *matrice de Stirling de première espèce* est une matrice dont les coefficients sont les nombres de Stirling de première espèce et la *matrice de Stirling de seconde espèce* est une matrice dont les coefficients sont les nombres de Stirling de seconde espèce.

Soient, ci-dessous, la matrice de Pascal P et S_1, (resp. S_2) la matrice de Stirling de première espèce (resp. seconde espèce). La matrice e-Riordan de ces matrices est donnée par [90] :

$$P = \langle e^z,z\rangle = \left[\binom{n}{k}\right]_{n,k\geq 0}, \tag{1.11}$$

$$S_1 = \langle 1, -\ln(1-z)\rangle = [s(n,k)]_{n,k\geq 0}\,, \tag{1.12}$$

$$S_2 = \langle 1, e^z - 1 \rangle = [S(n,k)]_{n,k\geq 0}\,. \tag{1.13}$$

Voici les premières lignes de la matrice de Pascal, de la matrice de Stirling de première espèce et de la matrice de Stirling de seconde espèce respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $m \in \mathbb{R}^*$, on définit la *matrice de Pascal généralisée* $P\,[m]$ par sa matrice e-Riordan

$$P\,[m] = \left[m^{n-k} \binom{n}{k} \right]_{n,k\geq 0}, \tag{1.14}$$

motivée par :

$$P\,[m] = \langle e^{mz}, z \rangle = \langle 1, mz \rangle \langle e^z, z \rangle \langle 1, mz \rangle^{-1} = \left[m^{n-k} \binom{n}{k} \right]_{n,k\geq 0}.$$

La *matrice de Stirling de première espèce généralisée* $S_1\,[m]$

$$S_1\,[m] = \left[m^{n-k} s(n,k) \right]_{n,k\geq 0}. \tag{1.15}$$

motivée par :

$$S_1\,[m] = \left\langle 1, \frac{-\ln(1-mz)}{m} \right\rangle = \langle 1, mz \rangle \langle 1, -ln(1-z) \rangle \langle 1, mz \rangle^{-1} = \left[m^{n-k} s(n,k) \right]_{n,k\geq 0}.$$

Et la *matrice de Stirling de seconde espèce généralisée* $S_2\,[m]$

$$S_2\,[m] = \left[m^{n-k} S(n,k) \right]_{n,k\geq 0}, \tag{1.16}$$

motivée par :

$$S_2\,[m] = \left\langle 1, \frac{e^{mz} - 1}{m} \right\rangle = \langle 1, mz \rangle \langle 1, e^z - 1 \rangle \langle 1, mz \rangle^{-1} = \left[m^{n-k} S(n,k) \right]_{n,k\geq 0}.$$

Ainsi,

Puisque $\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}e^z z^k$, alors $\sum_{n\geq k} m^{n-k}\binom{n}{k}\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}e^{mz}\left(\frac{mz}{m}\right)^k$. D'où

$$\langle e^{mz},z\rangle=\left[m^{n-k}\binom{n}{k}\right]_{n,k\geq 0}.$$

Comme $\sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(e^z-1\right)^k$, alors $\sum_{n\geq k} m^{n-k}S(n,k)\frac{z^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^k$. D'où

$$\left\langle 1,\frac{e^{mz}-1}{m}\right\rangle=\left[m^{n-k}S(n,k)\right]_{n,k\geq 0}.$$

De même pour la relation (1.7).

Voici les premières lignes de la matrice de Pascal généralisée, de la matrice de Stirling de première espèce généralisée et de la matrice de Stirling de seconde espèce généralisée respectivement

$$P[m]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ m & 1 & 0 & 0 & 0\\ m^2 & 2m & 1 & 0 & 0\\ m^3 & 3m^2 & 3m & 1 & 0\\ m^4 & 4m^3 & 6m^2 & 4m & 1 \end{pmatrix}\quad S_1[m]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3m & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2m^2 & 3m & 1 & 0\\ 0 & 6m^3 & 11m^2 & 6m & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2[m]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & m & 1 & 0 & 0\\ 0 & m^2 & 3m & 1 & 0\\ 0 & m^3 & 7m^2 & 6m & 1 \end{pmatrix}$$

1.8 Fonction Gamma

Définition 1.26. Pour tout $z\in\mathbb{C}$ telle que $\mathcal{R}(z)$, la partie réelle de z est strictement positive, la *fonction Gamma*, notée Γ, est définie par :

$$\Gamma : z\to\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Cette fonction peut être prolongée analytiquement en une fonction holomorphe sur l'ensemble des nombres complexes, exceptés pour $z\in\mathbb{Z}^-$. C'est ce prolongement qu'on appelle généralement "fonction Gamma".

Propriétés

En intégrant par partie, on montre que :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(n+1) = n!$.

La fonction Gamma est donc un prolongement de la factorielle à l'ensemble des nombres complexes (excepté les entiers négatifs ou nuls).

1.9 Série hypergéométrique

Dans cette partie on étudie la série hypergéométrique (voir [1]). Soient a_i, b_j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ des réels, $m, n \in \mathbb{N}$.
La *série hypergéométrique* associée est la fonction définie par :

$${}_mF_n\left(\begin{array}{c} a_1 \dots a_m \\ b_1 \dots b_n \end{array} \middle| \; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle a_1\rangle_k \langle a_2\rangle_k \cdots \langle a_m\rangle_k}{\langle b_1\rangle_k \langle b_2\rangle_k \cdots \langle b_n\rangle_k} \frac{x^k}{k!}.$$

Les éléments a_i, b_j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sont les paramètres et x est l'argument de la fonction.

Ces séries sont une généralisation de la série hypergéométrique gaussienne :

$$F\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & \end{array} \middle| \; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle a\rangle_k \langle b\rangle_k}{\langle c\rangle_k} \frac{x^k}{k!}.$$

Gauss, en 1812, a étudié ses propriétés. On peut l'écrire en utilisant la fonction Gamma :

$$F\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & \end{array} \middle| \; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)} \frac{x^k}{k!},$$

elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$x(x-1)y''(x) + (c - (a+b+1)x)y'(x) - (ab)y(x) = 0.$$

Quelques exemples

Si on prend $m = n = 0$, on obtient :

$$ {}_0F_0(|x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x. $$

Pour $m = n = 1$ et $a_1 = b_1 = 1$, on a :

$$ {}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ & x \\ 1 & \end{array} \right) = e^x. $$

Ceci est valide car la fonction n'est pas modifiée si on ajoute deux paramètres identiques en haut et en bas.

Si on prend $m = 2$, $n = 1$ et $a_1 = a_2 = b_1 = 1$, on obtient :

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ & & x \\ 1 & & \end{array} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = {}_1F_0. $$

Si on prend $m = 2$, $n = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = b_1 = 1$, on obtient ce qui suit :

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & \\ & & x \\ 1 & & \end{array} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle a \rangle_k \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{(1-x)^a}. $$

Mêmes conditions avec $a_1 = -a$ et $x = -x$, on a :

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{cc|c} -a & 1 & \\ & & -x \\ 1 & & \end{array} \right) = (1+x)^a. $$

Un cas particulier de la série hypergéométrique est :

$$ \begin{aligned} \ln(1+x) &= x\,{}_2F_1\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ & & -x \\ 2 & & \end{array} \right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots \end{aligned} $$

1.10 Nombres harmoniques et généralisations

Le *nombre harmonique*, noté H_n, est défini par :

$$ H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \text{ où } H_0 = 0. $$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{3781}{2520}$

TABLE 1.1 – Nombres harmoniques.

Les premières valeurs des nombres harmoniques sont présentées dans la table (1.1).

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres harmoniques est donnée par (voir [60]) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x},$$

et la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres harmoniques, obtenue par Gosper en 1996, est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{x^n}{n!} = e^x x \;\; {}_2F_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ & & -x \\ 2 & 2 & \end{array} \right).$$

Propriétés [24]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

(1) $\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$,

(2) Pour $0 \leq m < n$,

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1} \left(H_n - \frac{1}{m+1} \right),$$

(3) Pour $0 \leq m < n$,

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m} \frac{1}{n-k} = \binom{n}{m} (H_n - H_m).$$

Nombres hyperharmoniques

Une des généralisations des nombres harmoniques est celle donnée par Conway et Guy dans [41].

Le *nombre hyperharmonique*, noté $H_n^{(r)}$, est défini par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} H_n^{(r)} = 0, \quad \text{pour } r < 0 \text{ ou } n \leq 0, \\ H_n^{(0)} = \frac{1}{n}, \quad \text{pour } r \geq 0, \\ H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} H_k^{(r-1)}. \end{cases}$$

Le nombre $H_n^{(r)}$ s'appelle le $n^{\text{ème}}$ nombre hyperharmonique d'ordre m, il s'exprime en termes des coefficients binomiaux et des nombres harmoniques comme suit (voir [41]) :

$$H_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r-1} \left(H_{n+r-1} - H_{r-1} \right). \tag{1.17}$$

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres hyperharmoniques est donnée par (voir [23]) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^r},$$

et la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres hyperharmoniques est donnée par (voir [81]) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} \frac{x^n}{n!} = e^x \sum_{k=1}^{r-1} H_k^{(r-k)} \frac{x^k}{k!} + x^r e^x \frac{(r-1)!}{(r!)^2} \; {}_2F_2 \left(\left. \begin{matrix} 1 & 1 \\ r+1 & r+1 \end{matrix} \right| -x \right).$$

Il est à noter que ces nombres ne sont jamais entiers pour une grande classe des valeurs de n et r (voir Mezö [75], Ait Amrane et Belbachir [2],[3] et voir aussi [61]). Le problème reste encore ouvert dans sa globalité. Pour d'autres propriétés, voir [23].

1.11 Nombres et polynômes de Bernoulli

Les nombres et polynômes de Bernoulli sont présentés dans [1], [29], [48], [71] and [73].

Définition 1.27. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le *nombre de Bernoulli*, noté β_n, est défini pour $n \geq 1$, par

$$\beta_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \beta_k,$$

avec

$$\beta_0 = 1.$$

Remarque 1.5. Les nombres de Bernoulli sont rationels.

Les nombres de Bernoulli vérifient les identités suivantes :

1. Pour tout entier $n > 0$ et tous entiers $p,r \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+r)^p = \frac{1}{p+1}\left(\beta_{p+1}(n+r) - \beta_{p+1}(r)\right). \tag{1.18}$$

2. **Formule de Faulhaber**

$$p\sum_{k=1}^{n} k^{p-1} = n^p + n^{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1}\beta_i\binom{p}{i}n^{p-i} + \frac{p}{2}. \tag{1.19}$$

On liste dans la Table (1.2) les premières valeurs de β_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Table 1.2 – Nombres de Bernoulli.

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Bernoulli est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}. \tag{1.20}$$

Définition 1.28. Pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de Bernoulli est défini par :

$$\beta_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k x^{n-k},$$

ainsi $\beta_n(0) = \beta_n$.

On donne dans la Table (1.3) les premières valeurs de $\beta_n(x)$ pour $n \leq 5$:

La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes de Bernoulli est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}. \tag{1.21}$$

n	$\beta_n(x)$
0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x}{6}$

TABLE 1.3 – Polynômes de Bernoulli.

1.11.1 Nombres de Bernoulli généralisés

On définit les *nombres de Bernoulli généralisés* pour tout entier r par leur fonction génératrice exponentielle comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(r)} \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^r, \ (r \geq 1). \tag{1.22}$$

On a $\beta_n^{(1)} = \beta_n$.

Les premières valeurs de ces nombres :

n	$\beta_n^{(r)}$
0	1
1	$-\frac{r}{2}$
2	$\frac{r(3r-1)}{12}$
3	$\frac{-r^2(r-1)}{8}$
4	$\frac{1}{384}r^4 - \frac{1}{192}r^3 + \frac{1}{1152}r^2 + \frac{1}{2880}r$

TABLE 1.4 – Nombres de Bernoulli généralisés.

1.12 Nombres de Catalan

Le *nombre de Catalan* d'indice n, appelé *n-ième nombre de Catalan*, est défini par

$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.

Les dix premiers nombres de Catalan pour n de 0 à 9 sont : $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430$ et 4862.

Les nombres de Catalan satisfont la relation de récurrence

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0$$

avec $C_0 = 1$.

1.13 Matrice d'Euler Seidel

Dans cette partie on présente la méthode de la matrice d'Euler Seidel [57]. Cette méthode est relativement plus facile que la plupart des méthodes combinatoires pour étudier la structure de tels nombres et polynômes.

Définition 1.29. Soit une suite réelle $(a_n)_n$. La *matrice d'Euler-Seidel* correspondant à la suite $(a_n)_n$ est déterminée récursivement par la formule suivante :

$$\begin{aligned} a_n^0 &= a_n, \quad (n \geq 0), \\ a_n^k &= a_n^{k-1} + a_{n+1}^{k-1}, \quad (n \geq 0, k \geq 1), \end{aligned} \tag{1.23}$$

où a_n^0 est la première ligne et a_0^n est la première colonne.

i.e.

$$\begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & a_n^{k-1} \rightarrow & a_{n+1}^{k-1} & . & . \\ . & . & a_n^k \swarrow & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

De la relation (1.23), on remarque que la première ligne et la première colonne peuvent être transformées par les identités de Dumont suivantes (voir Dumont [57]).

$$a_0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k^0, \tag{1.24}$$

et

$$a_n^0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_0^k. \tag{1.25}$$

Proposition 1.1. *(Euler, 1783 [59]). Soit* $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 x^n$*, la fonction génératrice de la suite initiale* $(a_n^0)_n$*. Alors la fonction génératrice de la suite* $(a_0^n)_n$ *est donnée par*

$$\overline{a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n x^n = \frac{1}{1-x} a\left(\frac{x}{1-x}\right). \tag{1.26}$$

Proposition 1.2. *(Seidel, 1877 [88]). Soit* $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 \frac{x^n}{n!}$*, la fonction génératrice exponentielle de la suite initiale* $(a_n^0)_n$*. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite* $(a_0^n)_n$ *est donnée par*

$$\overline{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{x^n}{n!} = e^x A(x). \tag{1.27}$$

1.14 Nombres de Whitney associés aux treillis de Dowling

Dans cet partie, on présente les nombres de Whitney associés aux treillis de Dowling des deux espèces, On cite leurs principales propriétés.

Les identités et propriétés de ces nombres ont été principalement puisées de M. Benoumhani [25], [27] et T. A. Dowling [56].

1.14.1 Treillis de Dowling

On présente le treillis de Dowling introduit par Dowling [56].

Définition 1.30. Le *treillis de Dowling*, noté $Q_n(G)$ est un treillis géométrique de rang n sur un groupe G.

Soit G un groupe fini d'ordre $m \geq 1$. Une *partition partielle* de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ est une collection de sous-ensembles disjoints non vides de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$.

Pour une partition partielle $A = \{A_1,A_2,\ldots,A_s\}$ de $\{1,2,\ldots,n\}$, on définit une G-*partition partielle* de $\{1,2,\ldots,n\}$ par une famille $\alpha = \{a_1,a_2,\ldots,a_s\}$ de fonctions a_i :

$A_i \to G$, on définit la fonction d'unité $e_i : \{i\} \to G$ par $e_i(i) = 1$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ alors chaque fonction a_i s'écrit comme une combinaison linéaire $a_i = \sum_{k\in A_i} g_k e_k$, avec $g_k \in G$ et $g_k = a_i(k)$.

Soit $Q'_n(G)$ l'ensemble de toutes les G-partitions partielles de $\{1,2,\ldots,n\}$.

Soient $\alpha, \beta \in Q'_n(G)$ où $\alpha = \{a_i : A_i \to G,\ i = 1\ldots s\}$ et $\beta = \{b_k : B_k \to G,\ k = 1\ldots r\}$, on dit que $\alpha \leq \beta$ si pour chaque $b_k \in \beta$ il existe un sous ensemble α_l de α et $g_i \in G$ tel que $b_k = \sum_{a_i \in \alpha_l} g_i a_i$. La relation $\leq$ est un préordre sur $Q'_n(G)$.

On définit ainsi sur $Q'_n(G)$ la relation $\sim$ par :

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \text{ et } \beta \leq \alpha.$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $Q'_n(G)$ et $\overline{\alpha}$ est la classe d'équivalence de α. On note $Q_n(G) = Q'_n(G)/\sim$, l'ensemble des classe d'équivalences de $Q'_n(G)$. L'ensemble ordonné défini sur $Q_n(G)$ par

$$\overline{\alpha} \leq \overline{\beta} \Longleftrightarrow \alpha \leq \beta$$

s'appelle *le treillis de Dowling* sur un groupe finie G.

Si G est le groupe trivial i.e., $m = 1$ alors $Q_n(G) \simeq \prod_{n+1}$, le treillis géométrique de l'ensemble des parties de $\{1,2,\ldots,n+1\}$.

Le plus petit élément de $Q_n(G)$ est $\overline{\perp}$ où $\perp = \{e_i, i = 1,\ldots,n\}$ l'ensemble des fonctions d'unités et le rang d'un élément $\overline{\alpha}$ de $Q_n(G)$ est donné par : $rang\,(\overline{\alpha}) = n - |\alpha|$.

Théorème 1.3. *[56] Soit $Q_n(G)$ le treillis de Dowling de rang n et soient $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ deux éléments de $Q_n(G)$*
l'élément $\overline{\beta}$ couvre $\overline{\alpha}$ si et seulement si $\overline{\beta} = \overline{\alpha - \{a_i\}}$ ou $\overline{\beta} = \overline{\alpha - \{a_i, a_k\} \cup \{a_i + g a_k\}}$ où $a_i,a_k \in \alpha$, $g \in G$.

Théorème 1.4. *Soit G un groupe fini d'ordre m, le polynôme caractéristique de $Q_n(G)$ est donné par*

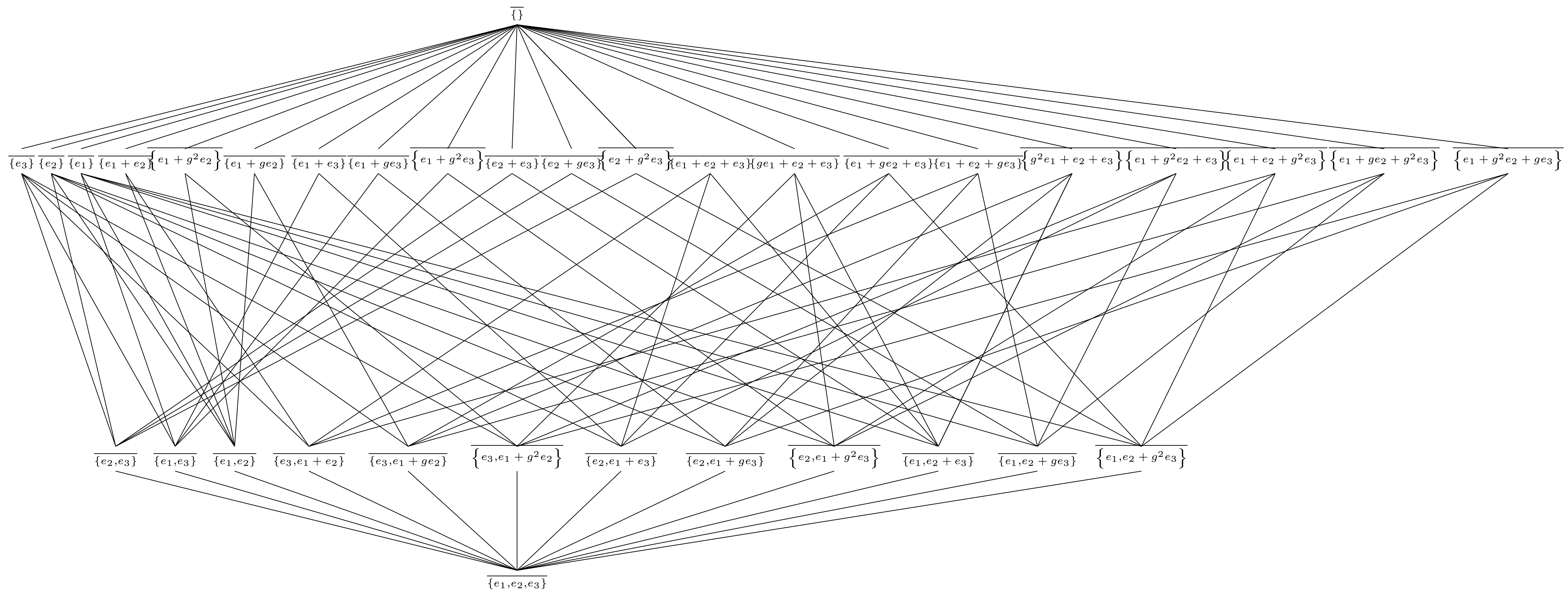
$$p_n(\nu; m) = \prod_{i=0}^{n-1} (\nu - 1 - mi) = m^n \binom{\nu - 1}{m}_{(n)}.$$

Exemple 1.5. Soit $G = \{1,g,g^2\}$ un groupe d'ordre 3 et soient $A = \{\{1\}\}$, $B = \{\{2\}\}$, $C = \{\{3\}\}$, $D = \{\{1,2\}\}$, $E = \{\{2,3\}\}$, $F = \{\{1,3\}\}$, $G = \{\{1,2,3\}\}$, $H = \{\{1\},\{2,3\}\}$, $I = \{\{2\},\{1,3\}\}$, $J = \{\{3\},\{1,2\}\}$, $K = \{\{1\},\{2\}\}$, $L = \{\{1\},\{3\}\}$, $M = \{\{2\},\{3\}\}$,

$N = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $O = \{\{\}\}$ les ensembles de partitions partielles de l'ensemble $\{1,2,3\}$.

L'ensemble $Q'_3(G)$ des G-partitions partielle de $\{1,2,3\}$ est formé des éléments suivantes :
$\alpha_A = \{de_1\}$, $\alpha_B = \{de_2\}$, $\alpha_C = \{de_3\}$, $d \in G$,
$\alpha_D = \{de_1 + d'e_2\}$, $\alpha_E = \{de_2 + d'e_3\}$, $\alpha_F = \{de_1 + d'e_3\}$, $d,d' \in G$,
$\alpha_G = \{de_1 + d'e_2 + d''e_3\}$,$d, d',d'' \in G$,
$\alpha_H = \{de_1, d'e_2 + d''e_3\}$, $\alpha_I = \{de_2, d'e_1 + d''e_3\}$, $\alpha_j = \{de_3, d'e_1 + d''e_2\}$, $d, d', d'' \in G$,
$\alpha_K = \{de_1, d'e_2\}$, $\alpha_L = \{de_1, d'e_3\}$, $\alpha_M = \{de_2, d'e_3\}$, $d, d' \in G$,
$\alpha_N = \{de_1, d'e_2, d''e_3\}$, $d, d',d'' \in G$, $\alpha_O = \{\}$.

Soit $G = \{1,g,g^2\}$ un groupe d'ordre 3, le treillis de Dowling $Q_3(G)$ est presenté comme suit : le plus grand élément est $\overline{\{\}}$, cette élément couvre les éléments $\overline{\{e_1\}}$, $\overline{\{e_2\}}$ et $\overline{\{e_3\}}$, chaque élément $\overline{\{e_i\}}$, $i = 1,\ldots,3$, couvre un pair $\overline{\{e_i,e_j\}}$, $\overline{\{e_i,e_k\}}$, $j,k = 1,\ldots,3$. Ainsi, chaque élément $\overline{\{e_i\}}$, $i = 1,\ldots,3$, couvre trois autres éléments $\overline{\{e_i,e_j + de_k\}}$, $j,k = 1,\ldots,3$ pour chaque $d \in G$. Il y'a neuf autre éléments couvert par $\overline{\{\}}$ qui sont $\overline{\{e_j + de_k\}}$, $j,k = 1,\ldots,3$, $d \in G$ alors l'élément $\overline{\{e_j + de_k\}}$, $j,k = 1,\ldots,3$ pour chaque $d \in G$ couvre un pair $\overline{\{e_j,e_k\}}$, $\overline{\{e_i,e_j + de_k\}}$. Also, il y'a des éléments couvert par le plus grand élément qui sont $\overline{\{de_1, + d'^{-1}e_2 + e_3\}}$ et $\overline{\{e_1 + de_2 + d'^{-1}e_3\}}$, $d,d' \in G$ alors $\overline{\{de_1 + d'^{-1}e_2 + e_3\}}$ couvre trois éléments, $\overline{\{e_1, e_2 + d'e_3\}}$, $\overline{\{e_2, e_1 + d^{-1}e_3\}}$, $\overline{\{e_3, e_1 + (d'd)^{-1}e_3\}}$, $d,d' \in G$ et $\overline{\{e_1 + de_2 + d'^{-1}e_3\}}$ couvre $\overline{\{e_1, e_2 + (d'd)^{-1}e_3\}}$, $\overline{\{e_2, e_1 + d'^{-1}e_3\}}$, $\overline{\{e_3, e_1 + de_3\}}$, $d,d' \in G$. Le plus petit élément est $\overline{\{e_1, e_2,e_3\}}$.



Treillis de Dowling $Q_3(G)$ pour $|G| = 3$.

1.14.2 Nombre de Whitney de première et de seconde espèce

Les nombres de Whitney des deux espèces ont été introduits par T. A. Dowling [56] et généralisent les nombres de Stirling des deux espèces.

Définition 1.31. Le *nombre de Whitney de première espèce associé au treillis de Dowling* $Q_n(G)$, noté $w_m(n,k)$, est la valeur absolue du coefficient de ν^k dans le polynôme caractéristique $p_{Q_n(G)}(\nu)$ de $Q_n(G)$.

Les nombres de Whitney de première espèce du treillis de Dowling vérifient la relation de récurrence [56] suivante :

$$w_m(n,k) = w_m(n-1,k-1) + ((n-1)m+1)w_m(n-1,k). \tag{1.28}$$

Définition 1.32. Le *nombre de Whitney de seconde espèce associé au treillis de Dowling* $Q_n(G)$, noté $W_m(n,k)$, compte le nombre d'éléments de corang k de $Q_n(G)$.

Les nombres de Whitney de seconde espèce du treillis de Dowling vérifient la relation de récurrence [56] suivante :

$$W_m(n,k) = W_m(n-1,k-1) + (km+1)W_m(n-1,k). \tag{1.29}$$

Pour $m = 1$, $w_1(n,k) = s(n+1,k+1)$ et $W_1(n,k) = S(n+1,k+1)$, ce sont les nombres de Stirling de première et de seconde espèce respectivement.

Remarque 1.6. Les nombres de Whitney d'un treillis de Dowling $Q_n(G)$ ne dépendent que de l'ordre m du groupe G.

Exemple 1.6. Soit G un groupe d'ordre 3. Le polynôme caractéristique $p_{Q_3(G)}(\nu)$ de $Q_3(G)$, est donné par

$$\begin{aligned} p_{Q_3(G)}(\nu) &= \sum_{x\in Q_3(G)} \mu(\perp,x)\nu^{3-rang(x)} \\ &= \sum_{x\in\{\overline{\{e_1,e_2,e_3\}}\}} \mu(\perp,x)\nu^3 + \sum_{x\in A'} \mu(\perp,x)\nu^2 + \sum_{x\in B'} \mu(\perp,x)\nu + \sum_{x\in\{\overline{\emptyset}\}} \mu(\perp,x). \end{aligned}$$

où
$\perp = \overline{\{e_1,e_2,e_3\}}$
A' est constitué des éléments de rang 1 dans $Q_3(G)$,
B' est constitué des éléments de rang 2 dans $Q_3(G)$.
On a $\sum_{x\in\{\overline{\{e_1,e_2,e_3\}}\}} \mu(\perp,x) = 1$,
$\sum_{x\in A'} \mu(\perp,x) = -12$,
$\sum_{x\in B'} \mu(\perp,x) = -(-5+1)\times 3 - (-2+1)\times 9 - (-3+1)\times 9 = 39$
et $\sum_{x\in\{\bar{\emptyset}\}} \mu(\perp,x) = -(1-12+39) = -28$, ainsi

$$p_{Q_3(G)}(\nu) = \nu^3 - 12\nu^2 + 39\nu - 28.$$

Par conséquent, $w_3(3,1) = 39$ et $w_3(3,2) = 12$.

Exemple 1.7. Le nombre d'éléments de corang 2 dans $Q_3(G)$ est 12. Par conséquent, $W_3(3,2) = 12$.

On donne le tableau des premières valeurs des nombres de Whitney de première espèce et de seconde espèce du treillis de Dowling $Q_n(G)$ avec $m = 3$, obtenues grâce aux relations de récurrence (1.28) et (1.29).

nk	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	4	5	1			
3	28	39	12	1		
4	280	418	159	22	1	
5	2740	5714	2485	445	35	1

TABLE 1.5 – Nombres de Whitney de première espèce.

nk	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	5	1				
3	1	21	12	1			
4	1	85	105	22	1		
5	1	341	820	325	35	1	
6	1	1365	6081	4070	780	51	1

TABLE 1.6 – Nombres de Whitney de seconde espèce.

Voici quelques valeurs des nombres de Whitney :

$$W_m(n,0) = 1,$$

$$w_m(n,0) = \prod_{i=1}^{n}((i-1)m+1),$$

$$W_m(n,n-1) = w_m(n,n-1) = m\binom{n}{2} + n.$$

Fonctions génératrices

La suite des nombres de Whitney de première espèce n'admet pas de fonction génératrice ordinaire.

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Whitney de première espèce est donnée par (voir[25]) :

$$\sum_{n=k}^{\infty} w_m(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{(1+mz)^{\frac{-1}{m}}\ln^k(1+mz)}{k!m^k}. \tag{1.30}$$

La fonction génératrice mixte est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} w_m(n,k)\frac{z^n}{n!}x^k = (1+mz)^{\frac{x-1}{m}}. \tag{1.31}$$

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres de Whitney de seconde espèce est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_m(n,k)z^{n-k} = \frac{1}{(1-z)\,(1-(m+1)\,z)\,(1-(2m+1)\,z)\ldots(1-(km+1)\,z)}. \tag{1.32}$$

et la fonction génératrice exponentielle est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_m(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^z}{k!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^k. \tag{1.33}$$

La fonction génératrice mixte est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} W_m(n,k)\frac{z^n}{n!}x^k = \exp\{z + x\frac{e^{mz}-1}{m}\}. \tag{1.34}$$

Orthogonalité

Les nombres de Whitney des deux espèces vérifient les relations d'orthogonalité suivantes [56]

$$\sum_{p=k}^{n} W_m(n,p)w_m(p,k) = \sum_{p=k}^{n} w_m(n,p)W_m(p,k) = \delta_{nk}. \tag{1.35}$$

qui sont équivalentes aux relations inverses :

$$a_n = \sum_k W_m(n,k)b_k \Longleftrightarrow b_n = \sum_k w_m(n,k)a_k. \tag{1.36}$$

Comme conséquence, les nombres de Stirling des deux espèces vérifient les relations d'orthogonalité suivantes [40] :

$$\sum_{i=k}^{n} s(n,i)S(i,k)(-1)^{n-i} = \sum_{i=k}^{n} S(n,i)s(i,k)(-1)^{n-i} = \delta_{n,k},$$

qui sont équivalentes aux relations inverse :

$$a_n = \sum_j s(n,j)(-1)^{n-j}b_j \Longleftrightarrow b_n = \sum_j S(n,j)a_j. \tag{1.37}$$

Identités combinatoires

En développant la fonction génératrice des nombres de Whitney de seconde espèce on obtient la formule explicite suivante [25] :

$$W_m(n,k) = \frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(m(k-j)+1)^n. \tag{1.38}$$

Cette formule peut être écrite de la façon suivante :

$$W_m(n,k) = \frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(mj+1)^n. \tag{1.39}$$

Les nombres de Whitney de première espèce (resp. de seconde espèce) sont liés aux nombre de Stirling de première espèce (resp. de seconde espèce) par la relation suivante [25] :

$$w_m(n,k) = \sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}m^{n-j}s(n,j), \tag{1.40}$$

$$W_m(n,k) = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}m^{j-k}S(j,k). \tag{1.41}$$

Pour le cas $m = 1$, on retrouve les relations données dans [25].

$$w_1(n,k) = s(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}s(n,j), \tag{1.42}$$

$$W_1(n,k) = S(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}S(j,k). \tag{1.43}$$

Théorème 1.5. *[25] Les nombres $w_m(n,k)$ satisfont*

$$m^{n-k}s(n,k) = \sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}w_m(n,i). \tag{1.44}$$

Théorème 1.6. *[25] Les nombres $W_m(n,k)$ vérifient*

$$W_m(n+1,k) = W_m(n,k) + \sum_{j=k-1}^{n}\binom{n}{j}m^{n-j}W_m(j,k-1). \tag{1.45}$$

$$kW_m(n,k) = \sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{n}{j}m^{n-j-1}W_m(j,k-1). \tag{1.46}$$

Théorème 1.7. *[25] Les nombres de Whitney de première espèce vérifient la relation suivante :*

$$m^n(x)_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}w_m(n,k)(mx+1)^k. \tag{1.47}$$

L'identité relative aux nombres de Whitney de seconde espèce est donné par :

Théorème 1.8. *[25]*

$$(mx+1)^n = \sum_{k=0}^{n} m^k W_m(n,k)(x)_k. \tag{1.48}$$

1.15 Nombres et polynômes de Dowling

Dans cette partie, on étudie les nombres et polynômes de Dowling (voir [25], [26]).

Définition 1.33. Le *nombre de Dowling*, noté $D_m(n)$, compte le nombre d'élément dans le treillis de Dowling $Q_n(G)$.

Puisque $W_m(n,k)$, pour $0 \leq k \leq n$, compte le nombre d'éléments de corang k dans $Q_n(G)$, on obtient immédiatement la relation suivante :

$$D_m(n) = \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k). \tag{1.49}$$

Exemple 1.8. L'exemple suivant illustre la signification des nombres de Dowling.
Par définition, on a :

$$D_3(3) = W_3(3,0) + W_3(3,1) + W_3(3,2) + W_3(3,3).$$

$W_3(3,0)$ compte le nombre d'éléments de corang 0 dans $Q_3(G)$:
$\overline{\{\}}$,
$W_3(3,1)$ compte le nombre d'éléments de corang 1 dans $Q_3(G)$:
$\overline{\{e_3\}}$; $\overline{\{e_2\}}$; $\overline{\{e_1\}}$; $\overline{\{e_1+e_2\}}$; $\overline{\{e_1+ge_2\}}$; $\overline{\{e_1+g^2e_2\}}$; $\overline{\{e_1+e_3\}}$; $\overline{\{e_1+ge_3\}}$; $\overline{\{e_1+g^2e_3\}}$; $\overline{\{e_2+e_3\}}$; $\overline{\{e_2+ge_3\}}$; $\overline{\{e_2+g^2e_3\}}$; $\overline{\{e_1+e_2+e_3\}}$; $\overline{\{ge_1+e_2+e_3\}}$; $\overline{\{e_1+ge_2+e_3\}}$; $\overline{\{e_1+e_2+ge_3\}}$; $\overline{\{g^2e_1+e_2+e_3\}}$; $\overline{\{e_1+g^2e_2+e_3\}}$; $\overline{\{e_1+e_2+g^2e_3\}}$; $\overline{\{e_1+ge_2+g^2e_3\}}$; $\overline{\{e_1+g^2e_2+ge_3\}}$,
$W_3(3,2)$ compte le nombre d'éléments de corang 2 dans $Q_3(G)$:

$\overline{\{e_3,e_1+g^2e_2\}}$; $\overline{\{e_2,e_1+e_3\}}$; $\overline{\{e_3,e_1+ge_2\}}$; $\overline{\{e_3,e_1+e_2\}}$; $\overline{\{e_1,e_2\}}$; $\overline{\{e_1,e_3\}}$; $\overline{\{e_2,e_3\}}$; $\overline{\{e_2,e_1+ge_3\}}$; $\overline{\{e_2,e_1+g^2e_3\}}$; $\overline{\{e_1,e_2+e_3\}}$; $\overline{\{e_1,e_2+ge_3\}}$; $\overline{\{e_1,e_2+g^2e_3\}}$,
$W_3(3,3)$ compte le nombre d'éléments de corang 3 dans $Q_3(G)$:
$\overline{\{e_1,e_2,e_3\}}$,
ainsi, $D_3(3) = 1 + 21 + 12 + 1 = 35$.

Le *polynôme de Dowling* est défini par, [26] :

$$D_m(n,x) = \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)x^k.$$

Pour $m = 1$, on retrouve les polynôme de Bell $D_1(n,x) = B_{n+1}(x)$ (voir [80]).
Voici les premières valeurs des polynômes de Dowling,

$D_m(0,x) = 1$
$D_m(1,x) = 1 + x$
$D_m(2,x) = 1 + (m+2)x + x^2$
$D_m(3,x) = 1 + (m^2+3m+3)x + (3m+3)x^2 + x^3$
$1 + (m^3+4m^2+6m+4)x + (7m^2+12m+6)x^2 + (6m+4)x^3 + x^4$

TABLE 1.7 – Polynôme de Dowling.

La fonction génératrice exponentielle des polyñomes de Dowling est donné par [26]

$$\sum_{n\geq 0} D_m(n,x)\frac{z^n}{n!} = \exp(z + x\frac{e^{mz}-1}{m}), \tag{1.50}$$

et par conséquent, en termes de nombres de Dowling :

$$\sum_{n\geq 0} D_m(n)\frac{z^n}{n!} = \exp(z + \frac{e^{mz}-1}{m}).$$

Théorème 1.9. *[26] Les polynômes et nombres de Dowling vérifient, respectivement, les relations de récurrence suivantes :*

$$D_m(n+1,x) = D_m(n,x) + x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}m^{n-j}D_m(j,x), \tag{1.51}$$

$$D_m(n+1) = D_m(n) + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} m^{n-j} D_m(j). \tag{1.52}$$

Théorème 1.10. *[26] Les polynômes et nombres de Dowling vérifient, respectivement, les identités suivantes :*

$$D_m(n,x) = e^{\frac{-x}{m}} \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!m^k}(mk+1)^n, \tag{1.53}$$

$$D_m(n) = e^{\frac{-1}{m}} \sum_{k\geq 0} \frac{(mk+1)^n}{k!m^k}. \tag{1.54}$$

1.16 Nombres et polynômes de Dowling ordonnés

Dans cette partie, on présente les polynômes et nombres de Dowling et on donne quelque propriétés.

Définition 1.34. Le *nombre de Dowling ordonné* est défini par ([26],[77]) :

$$\mathcal{D}_m(n) = \sum_{k=0}^{n} k! W_m(n,k). \tag{1.55}$$

1.16.1 Exemples et tables

On donne un exemple pour illustrer les nombres de Dowling ordonnés.

Pour $n = 3$, $m = 3$, on a par définition

$\mathcal{D}_m(n) = 0!W_3(3,0) + 1!W_3(3,1) + 2!W_3(3,2) + 3!W_3(3,3) = 1 + 21 + 24 + 6 = 52$

Le polynôme de Dowling ordonné, $\mathcal{D}_m(n,x)$, est défini par :

$$\mathcal{D}_m(n,x) = \sum_{k=0}^{n} k! W_m(n,k) x^k. \tag{1.56}$$

Voici les premières valeurs des polynômes de Dowling ordonnés

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Dowling ordonnés est donnée par [26] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_m(n,x) \frac{z^n}{n!} = \frac{e^z}{1 - x\frac{\exp(mz)-1}{m}}, \tag{1.57}$$

$\mathcal{D}_m(0,x) = 1$
$\mathcal{D}_m(1,x) = 1 + x$
$\mathcal{D}_m(2,x) = 1 + (m+2)x + 2x^2$
$\mathcal{D}_m(3,x) = 1 + (m^2+3m+3)x + 2(3m+3)x^2 + 6x^3$
$\mathcal{D}_m(4,x) = 1 + (m^3+4m^2+6m+4)x + 2(7m^2+12m+6)x^2 + 6(6m+4)x^3 + 24x^4$

TABLE 1.8 – Polynômes de Dowling ordonnés, quelques valeurs.

et par conséquent, en termes des nombres de Dowling :

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{D}_m(n)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^z}{1-\frac{e^{mz}-1}{m}}. \tag{1.58}$$

On retrouve dans [26] l'identité suivante : une formule explicite des polynômes de Dowling ordonnés est donné par : Pour $m \geq 1$ et $x > -\frac{m}{2}$ on a

$$\mathcal{D}_m(n,x) = \frac{m}{m+x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{m+x}\right)^k (mk+1)^n. \tag{1.59}$$

1.16.2 Nombres et polynômes Eulériens de Dowling

Dans cette partie, on définit les polynômes et nombres Eulériens de Dowling et on donne quelque propriétés (voir [86]).

Définition 1.35. Le *polynôme Eulérien de Dowling* $\mathcal{A}_m(n,x)$ est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m(n,x) &= \sum_{i=0}^{n} i!W_m(n,i)(x-1)^{n-i} && (1.60)\\ &= (x-1)^n\mathcal{D}_m(n,\frac{1}{x-1}). && (1.61)\end{aligned}$$

On définit le *nombre Eulérien de Dowling* $a_m(n,k)$ par :

$$a_m(n,k) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i-k}i!\binom{n-i}{k}W_m(n,i). \tag{1.62}$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes Eulériens de Dowling est donnée par :

Théorème 1.11. *[86]*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_m(n,x)\frac{z^n}{n!} = \frac{m(x-1)e^{(x-1)z}}{m(x-1)+1-e^{m(x-1)z}} \tag{1.63}$$

Théorème 1.12. *[86] Les polynômes de Dowling ordonnés sont liés aux nombres Eulériens de Dowling par l'identité suivante :*

$$\mathcal{D}_m(n,x) = \sum_{k=0}^{n} a_m(n,k)(1+x)^k x^{n-k}. \tag{1.64}$$

Pour $x = 1$, on retrouve une relation entre les nombres Eulériens et les nombres de Dowling ordonnés

$$\mathcal{D}_m(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_m(n,k) \tag{1.65}$$

Chapitre 2

Nombres r-Whitney associés aux treillis de Dowling et polynômes r-Dowling

Dans ce chapitre on présente les nombres r-Whitney associés aux treillis de Dowling, les nombres et polynômes r-Dowling et les nombres et polynômes r-Dowling ordonnés. On donne des formules explicites, des relations de récurrences, des identités combinatoires. On trouve une relation reliant les nombres r-Whitney de première espèce aux nombres de Stirling de seconde espèce et une autre relation lie les nombres r-Whitney de seconde espèce aux nombres de Stirling de première espèce, on présente des identités qui lient les deux types de nombres r-Whitney aux coefficients binomiaux. On donne la fonction génératrice ordinaire de la suite des polynômes r-Dowling, on exprime les polynômes r-Dowling à l'aide des nombres r-Whitney de première espèce et à l'aide des nombres r-Whitney de seconde espèce et on prouve une relation entre les polynômes r-Dowling et ceux de r-Bell et aussi de Bell. Ainsi, on trouve une expression explicite lie les polynômes r-Dowling aux nombres r-Whitney de seconde espèce et polynômes r-Dowling précédents, nous donnons une formule explicite pour les polynômes r-Dowling liés aux nombres r-Whitney de première espèce, nous les exprimons également en une famille de bases spécifiques. On trouve une formule explicite et une relation de récurrence des polynômes r-Dowling ordonnés, on donne une relation lie les polynômes r-Dowling ordonnés aux polynômes r-Bell ordonnés.

On étudie aussi les nombres et polynômes r-Eulériens de Dowling et on déduit que les polynômes r-Dowling ordonnés sont liés aux nombres r-Eulériens de Dowling.

2.1 Nombres r-Whitney de première et de seconde espèce

Dans cette partie, on étudie les nombres r-Whitney de deux espèces. Mezö [79] et Cheon [39] ont défini ces nombres et ont donné leurs propriétés.

Définition 2.1. Le nombre r-Whitney de première espèce, $w_{m,r}(n,k)$, est donné par :

$$w_{m,r}(n,k) := \sum_{\substack{c_0+c_1+\cdots+c_{n-1}=n-k \\ c_i\in\{0,1\}}} r^{c_0}(r+m)^{c_1}\cdots(r+(n-1)m)^{c_{n-1}}. \tag{2.1}$$

Les nombres r-Whitney de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante [67] [79] :

$$w_{m,r}(n,k) = w_{m,r}(n-1,k-1) + (r+(n-1)m)w_{m,r}(n-1,k). \tag{2.2}$$

Définition 2.2. Le nombre r-Whitney de seconde espèce, $W_{m,r}(n,k)$, est défini par :

$$W_{m,r}(n,k) := \sum_{\substack{c_0+c_1+\cdots+c_k=n-k \\ c_i\in\{0,1,\ldots,n-k\}}} r^{c_0}(r+m)^{c_1}\ldots(r+km)^{c_k}. \tag{2.3}$$

Les nombres r-Whitney de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante [67] [79] :

$$W_{m,r}(n,k) = W_{m,r}(n-1,k-1) + (r+km)W_{m,r}(n-1,k). \tag{2.4}$$

Exemples et tables

On donne les premières valeurs des nombres r-Whitney de première et de seconde espèces.

nk	0	1	2	3
0	1			
1	r	1		
2	$mr+r^2$	$m+2r$	1	
3	$2m^2r+3mr^2+r^3$	$2m^2+6mr+3r^2$	$3m+3r$	1

TABLE 2.1 – Nombres r-Whitney de première espèce.

nk	0	1	2	3	4
0	1				
1	r	1			
2	r^2	$m+2r$	1		
3	r^3	$m^2+3rm+3r^2$	$3m+3r$	1	
4	r^4	$m^3+4rm^2+6r^2m+4r^3$	$7m^2+12rm+6r^2$	$6m+4r$	1

TABLE 2.2 – Nombres r-Whitney de seconde espèce.

Voici quelques valeurs particulières de $W_{m,r}(n,k)$ et $w_{m,r}(n,k)$:

$$w_{m,r}(n,0) = \prod_{i=1}^{n}((i-1)m+r),$$

$$W_{m,r}(n,0) = r^n,$$

$$w_{m,r}(n,n-1) = W_{m,r}(n,n-1) = m\binom{n}{2} + rn.$$

2.1.1 Fonctions génératrices

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres r-Whitney de première espèce est donnée par (voir [42], [45], [47] et [79]) :

$$\sum_{n=k}^{\infty} w_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{(1+mz)^{-r/m}\ln^k(1+mz)}{k!m^k}. \tag{2.5}$$

La fonction génératrice mixte est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} w_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!}x^k = (1+mz)^{(x-r)/m}. \tag{2.6}$$

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres r-Whitney de seconde espèce est donné par [39] :

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}(n,k)z^n = \frac{z^k}{(1-rz)(1-(m+r)z)(1-(2m+r)z)\cdots(1-(km+r)z)} \tag{2.7}$$

et la fonction génératrice exponentielle est donnée par (voir [42], [45], [47] and [79] :

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^k. \tag{2.8}$$

La fonction génératrice mixte est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!}x^k = \exp\{rz + x\frac{e^{mz}-1}{m}\}. \tag{2.9}$$

2.1.2 Orthogonalité

Les nombres r-Whitney des deux espèces vérifient les relations d'orthogonalité suivantes (voir [67]),

$$\sum_{k=p}^{n} W_{m,r}(n,k)w_{m,r}(k,p) = \sum_{k=p}^{n} w_{m,r}(n,k)W_{m,r}(k,p) = \delta_{np}. \tag{2.10}$$

Elles sont équivalentes aux relations inverses suivantes :

$$a_n = \sum_k w_{m,r}(n,k)b_k \Longleftrightarrow b_n = \sum_k W_{m,r}(n,k)a_k. \tag{2.11}$$

2.1.3 Identités combinatoires

Théorème 2.1. *[39] Les nombres r-Whitney de première espèce sont liés aux nombres r-Stirling de première espèce par la relation suivante :*

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}m^{i-k}\left\langle r(1-m)|m\right\rangle_{n-i} s_r(i+r,k+r). \tag{2.12}$$

Théorème 2.2. *[39] Les nombres r-Whitney de seconde espèce sont liés aux nombre r-Stirling de seconde espèce par la relation suivante :*

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}m^{j-k}(r-rm)^{n-j}S_r(j+r,k+r). \tag{2.13}$$

Théorème 2.3. *[39] Les nombres r-Whitney de première espèce (resp. de seconde espèce) sont liés aux nombres de Stirling de première espèce (resp. de seconde espèce) par la relation suivante :*

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} m^{n-j} r^{j-k} s(n,j), \tag{2.14}$$

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} m^{n-j} (r|m)_{j-k} S(n,j). \tag{2.15}$$

Pour $m = 1$ on retrouve les résultats

$$s(n+r,k+r) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} r^{j-k} s(n,j), \tag{2.16}$$

$$W_{1,r}(n,k) = S_r(n+r,k+r) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (r)_{j-k} S(j,k), \tag{2.17}$$

donnés par Charalambides [38]

L'identité suivante lie les nombres r-Whitney de première espèce aux nombres de Stirling de première espèce et la factorielle ascendante généralisée.

Théorème 2.4. *[39] Les nombres $w_{m,r}(n,k)$ vérifient l'identité suivante :*

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} m^{i-k} \langle r|m \rangle_{n-i} s(i,k). \tag{2.18}$$

L'identité relative aux nombres $W_{m,r}(n,k)$ est donnée par :

Théorème 2.5. *[39]*

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} r^{n-j} S(j,k). \tag{2.19}$$

Théorème 2.6. *Les nombres $W_{m,r}(n,k)$ vérifient l'identité suivante :*

$$W_{m,r}(n+1,k) = rW_{m,r}(n,k) + \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} m^{n-j} W_{m,r}(j,k-1). \tag{2.20}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k-1} W_{m,r}(n+1,k)\frac{z^n}{n!} &= \frac{d}{dz}\sum_{n\geq k} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!} \\ &= r\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^k + \frac{e^{(m+r)z}}{(k-1)!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^{k-1}. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

En appliquant la propriété fondamentale des matrices $e-$Riordan, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{e^{(m+r)z}}{(k-1)!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^{k-1} &= \left\langle e^{(m+r)z},z\right\rangle \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^{k-1} \\ &= \langle e^{mz},z\rangle \langle e^{rz},z\rangle \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{n\geq k-1}\sum_{j=k-1}^{n} m^{n-j}\binom{n}{j}W_{m,r}(j,k-1)\frac{z^n}{n!}. \qquad (2.22)\end{aligned}$$

Alors on déduit de (2.8), (2.21) et (2.22) que :

$$\sum_{n\geq k-1} W_{m,r}(n+1,k)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq k-1}\left(rW_{m,r}(n,k) + \sum_{j=k-1}^{n}\binom{n}{j}m^{n-j}W_{m,r}(j,k-1)\right)\frac{z^n}{n!},$$

donc le résultat est obtenu. □

Les nombres $W_{m,r}(n,k)$ vérifient aussi l'identité suivantes :

Proposition 2.7.

$$W_{m,r}(n+1,k) = rW_{m,r}(n,k) + W_{m,m+r}(n,k-1). \qquad (2.23)$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq k-1} W_{m,r}(n+1,k)\frac{z^n}{n!} &= \frac{d}{dz}\sum_{n\geq k} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!} \\ &= r\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^k + \frac{e^{(m+r)z}}{(k-1)!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^{k-1} \\ &= r\sum_{n\geq k-1} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geq k-1} W_{m,r+m}(n,k-1)\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

Donc le résultat est obtenu. □

Les nombres r-Whitney de première espèce sont liés aux nombres s-Whitney de première espèce et $(r-m)$-Whitney de première espèce respectivement.

Théorème 2.8. *[39] Les nombres $w_{m,r}(n,k)$ satisfont les identités suivantes :*

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \langle r-s|m\rangle_{n-i}\, w_{m,s}(i,k),\ \ (r \geq s), \tag{2.24}$$

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!} m^{n-i} w_{m,r-m}(i,k),\ \ (r \geq m). \tag{2.25}$$

Les nombres r-Whitney de seconde espèce sont liés aux nombres s-Whitney de seconde espèce et $(r-1)$-Whitney de seconde espèce respectivement.

Théorème 2.9. *[39] Les nombres $W_{m,r}(n,k)$ satisfont les identités suivantes :*

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (r-s)^{n-i} W_{m,s}(i,k),\ r \geq s, \tag{2.26}$$

et

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} W_{m,r-1}(i,k),\ ,r \geq 1. \tag{2.27}$$

Théorème 2.10. *[74] Les nombres r-Whitney de première espèce sont liés aux nombres r-Stirling de première espèce et nombres s-Whitney de première espèce respectivement.*

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (-m)^{n-j} (mr-r)^{j-k} s_r(n+r,j+r), \tag{2.28}$$

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} (s-r)^{j-k} w_{m,s}(n,j). \tag{2.29}$$

Théorème 2.11. *[79] Les nombres r-Whitney de première espèce vérifient la relation suivante*

$$m^n (x)_n = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)(-1)^{n-k}(mx+r)^k. \tag{2.30}$$

De façon équivalente à la relation (2.30) on a :

$$m^n \langle x\rangle_n = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)(mx-r)^k. \tag{2.31}$$

Théorème 2.12. *[79] L'identité relative aux nombres r-Whitney de seconde espèce est donnée par :*

$$(mx+r)^n = \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k)(x)_k,\ n \geq 0, \tag{2.32}$$

ou de façon équivalente :

$$(mx-r)^n = \sum_{k=0}^{n} m^k (-1)^{n-k} W_{m,r}(n,k) \langle x \rangle_k . \tag{2.33}$$

Les nombres r-Whitney de seconde espèce vérifient l'identité suivante [79] :

$$W_{m,r}(n,k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (m(k-j)+r)^n. \tag{2.34}$$

Cette formule peut être écrite de la façon suivante :

$$W_{m,r}(n,k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (mj+r)^n. \tag{2.35}$$

On retrouve à partir de (2.31) et (1.48) la relation suivante :

Théorème 2.13.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} w_{m,r}(n,k) W_m(k,i) W_m(k,j) \left(\frac{x-1}{m}\right)_i \left(\frac{y-1}{m}\right)_j &= \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)(xy)^k \\ &= m^n \left\langle \frac{xy+r}{m} \right\rangle_n , \end{aligned}$$

et plus généralement :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,\cdots,i_s=0}^{k} w_{m,r}(n,k) \prod_{j=1}^{s} \left(W_m(n,i_j) \left(\frac{x-1}{m}\right)^{\underline{i_j}} \right) = m^n \left\langle \frac{x_{i_1} \ldots x_{i_s} + r}{m} \right\rangle_n . \tag{2.36}$$

L'identité suivante lie les nombres de Stirling de seconde espèce aux nombres r-Whitney de première espèce.

Théorème 2.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} m^{n-j} S(n,j) w_{m,r}(j,k) = \binom{n}{k} r^{n-k}. \tag{2.37}$$

Preuve Sachant que :

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} m^{n-j} r^{j-k} s(n,j),$$

et en appliquant la relation d'inversion (1.37) en prenant $a_n = (-1)^n w_{m,r}(n,k) m^{-n}$ et $b_j = (-1)^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} m^{-j} r^{j-k}$ on obtient le résultat. □

La relation suivante relie les nombres de Stirling de première espèce aux nombres r-Whitney de seconde espèce.

Théorème 2.15. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} m^{n-j} s(n,j) W_{m,r}(j,k) = \binom{n}{k} (r|m)_{n-k}. \tag{2.38}$$

Preuve Sachant que :

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} m^{n-j} (r|m)_{j-k} S(n,j),$$

et en appliquant la relation d'inversion (1.37) en prenant $b_n = W_{m,r}(n,k) m^{-n}$ et $a_j = \binom{j}{k} m^{-j} (r|m)_{j-k}$ on obtient le résultat. □

Grâce à l'orthogonalité des nombres r-Whitney et des formules d'inversion (2.11), on obtient les identités suivantes qui lient les deux types des nombres r-Whitney aux coefficients binomiaux

Théorème 2.16. *Les deux types des nombres r-Whitney satisfont*

$$\sum_{i,j} w_{m,r}(n,i) W_{m,r}(i,j) \binom{n}{j} = 1, \tag{2.39}$$

$$\sum_{i,j} W_{m,r}(n,i) w_{m,r}(i,j) \binom{n}{j} = 1, \tag{2.40}$$

$$\sum_{i,j} S(i,j) w_{m,r}(j,k) \binom{n}{i} m^{i-j} r^{n-i} = \delta_{n,k}, \tag{2.41}$$

$$\sum_{i,j} s(n,i) W_{m,r}(j,k) (-1)^{i-j} m^{n-i} \binom{i}{j} r^{i-j} = \delta_{n,k}. \tag{2.42}$$

Preuve Les identités (2.39) et (2.40) sont des conséquences de (2.10), en effet :

$$\sum_i W_{m,r}(n,i)w_{m,r}(i,j) = \sum_i w_{m,r}(n,i)W_{m,r}(i,j) = \delta_{n,j},$$

et comme on a : $\sum_j \binom{n}{j}\delta_{n,j} = \binom{n}{n} = 1$ alors

$$\sum_{i,j} W_{m,r}(n,i)w_{m,r}(i,j)\binom{n}{j} = \sum_{i,j} w_{m,r}(n,i)W_{m,r}(i,j)\binom{n}{j} = \sum_j \binom{n}{j}\delta_{n,j} = 1.$$

Pour prouver l'identité (2.41) on utilise (2.10) et (2.19), dans (2.10) on remplace p par j et d'après (2.19), on obtient

$$\sum_j W_{m,r}(n,j)w_{m,r}(j,k) = \sum_j \sum_i \binom{n}{i} m^{i-j} S(i,j) w_{m,r}(j,k) r^{n-i} = \delta_{n,k}.$$

De la même façon on utilise (2.10) et (2.14) pour prouver (2.42). □

2.2 Nombres et Polynômes r- Dowling

Dans ce qui suit, on peut retrouver les identités citées dans [39].

Définition 2.3. Le nombres r-Dowling, noté $D_{m,r}(n)$, est donné par (voir [39]) :

$$D_{m,r}(n) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k). \tag{2.43}$$

Le polynôme r-Dowling est donné par :

$$D_{m,r}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)x^k. \tag{2.44}$$

On a $D_{m,r}(n,1) = D_{m,r}(n)$.

Pour $r = 1$ (resp. $m = 1$), on retrouve le nombre de Dowling, $D_m(n)$, (resp. les nombres r-Bell), (voir [25], [80]).

Les polynômes r-Dowling sont obtenus récursivement grâce à la relation suivante :

$$D_{m,r+1}(n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_{m,r}(j). \tag{2.45}$$

Il suffit d'appliquer les relations (2.43) et (2.27) et on obtient le résultat.

On a aussi ces deux récurrences qui font intervenir la dérivée des polynômes r-Dowling :

$$D_{m,r}(n,x) = mx\frac{d}{dx}D_{m,r}(n-1,x) + (x+r)D_{m,r}(n-1,x), \tag{2.46}$$

$$x^{r-1}e^{x}D_{m,r}^{m-1}(n-1,x)D_{m,r}(n,x) = \frac{d}{dx}\left(x^{r}e^{x}D_{m,r}^{m}(n-1,x)\right). \tag{2.47}$$

Exemples et tables

Pour $n = 3$ et $r = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{m,2}(3) &= W_{m,2}(3,0) + W_{m,2}(3,1) + W_{m,2}(3,2) + W_{m,2}(3,3) \\ &= 8 + (m^2 + 6m + 12) + (3m + 6) + 1 \\ &= m^2 + 9m + 27 \end{aligned}$$

Dans les tables suivantes, on donne les premières valeurs des nombres r-Dowling, par la relation (2.45) ainsi que les premiers des polynômes r-Dowling :

n	$D_{m,r}(n)$
0	1
1	$r+1$
2	$r^2+2r+m+1$
3	$r^3+3r^2+(3m+3)r+m^2+3m+1$
4	$r^4+4r^3+(6m+6)r^2+(4m^2+12m+4)r+m^3+7m^2+6m+1$

TABLE 2.3 – Nombres r-Dowling.

2.2.1 Fonctions génératrices

On donne la fonction génératrice ordinaire et la fonction génératrice exponentielle.

n	$D_{m,r}(n,x)$
0	1
1	$r+x$
2	$r^2+(m+2r)x+x^2$
3	$r^3+(m^2+3rm+3r^2)x+(3m+3r)x^2+x^3$
4	$r^4+(m^3+4rm^2+6r^2m+4r^3)x+(7m^2+12rm+6r^2)x^2+(6m+4r)x^3+x^4$

TABLE 2.4 – Polynômes r-Dowling.

Théorème 2.17. *La fonction génératrice ordinaire de la suite des polynômes r-Dowling est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{m,r}(n,x)z^n = \frac{-1}{rz-1}e^{-x}\ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} \frac{rz-1}{mz} \\ \frac{rz+mz-1}{mz} \end{array}\middle|\ \frac{x}{m}\right). \tag{2.48}$$

Preuve On a

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}(n,k)z^n = \frac{z^k}{(1-rz)\,(1-(m+r)\,z)\,(1-(2m+r)\,z)\cdots(1-(km+r)\,z)},$$

et

$$\begin{aligned} & (1-rz)\,(1-(m+r)\,z)\,(1-(2m+r)\,z)\cdots(1-(km+r)\,z) \\ = \ & z^{k+1}\left(\ 1/z-r\ \middle|\ m\ \right)_{k+1} \\ = \ & z^{k+1}m^{k+1}\left(\frac{1-rz}{mz}\right)_{k+1}. \end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-rz}{mz}\right)_{k+1} &= (-1)^{k+1}\left\langle -\frac{1-rz}{mz}\right\rangle_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1}\left(-\frac{1-rz}{mz}\right)\left\langle -\frac{1-rz}{mz}+1\right\rangle_{k}, \end{aligned}$$

alors

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}(n,k)z^n = \frac{-1}{rz-1}\frac{(-1)^k}{m^k\left\langle\frac{rz+mz-1}{mz}\right\rangle_k}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{m,r}(n,x)z^n = \frac{-1}{rz-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-x}{m}\right)^k}{\left\langle\frac{rz+mz-1}{mz}\right\rangle_k} = \frac{-1}{rz-1}\ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{rz+mz-1}{mz} \end{array}\middle|\ \frac{-x}{m}\right).$$

En appliquant la formule de Kummer [1]

$$e^{-x}\ {}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} a & \\ & x \\ b & \end{array}\right) = {}_1F_1\left(\begin{array}{c|c} b-a & \\ & -x \\ b & \end{array}\right),$$

avec $b = \frac{rz+mz-1}{mz}$ et $a = \frac{rz-1}{mz}$, on conclut le résultat. □

Théorème 2.18. *[39] La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r-Dowling est donnée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!} = \exp\left\{rz + x\frac{e^{mz}-1}{m}\right\}. \tag{2.49}$$

Remarque 2.1. La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r-Dowling n'est autre que la fonction génératrice mixte de la suite des nombres r-Whitney de seconde espèce.

2.2.2 Quelques identités

L'identité suivante nous permet de calculer les polynômes r-Dowling grâce aux polynômes r-Dowling précédents.

Théorème 2.19. *[39] Les polynôme r-Dowling vérifient la formule de récurrence suivante :*

$$D_{m,r}(n+1,x) = (x+r)D_{m,r}(n,x) + x\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}m^i D_{m,r}(n-i,x). \tag{2.50}$$

L'identité (2.50) s'écrit de la façon suivante :

$$D_{m,r}(n+1,x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}m^i(x+r\delta_{i,0})D_{m,r}(n-i,x). \tag{2.51}$$

Théorème 2.20. *Les nombres r-Dowling satisfont l'identité suivante :*

$$D_{m,r}(n+1) = rD_{m,r}(n) + D_{m,r+m}(n). \tag{2.52}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} D_{m,r}(n+1)\frac{z^n}{n!} &= \frac{d}{dz}\sum_{n\geq 0} D_{m,r}(n)\frac{z^n}{n!}\\
&= (r+e^{mz})\exp\left\{rz+\frac{e^{mz}-1}{m}\right\}\\
&= r\sum_{n\geq 0} D_{m,r}(n)\frac{z^n}{n!}+\exp\left((m+r)z+\frac{e^{mz}-1}{m}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}\left(rD_{m,r}(n)+D_{m,m+r}(n)\right)\frac{z^n}{n!},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 2.21. *Les polynômes r-Dowling satisfont l'identité :*

$$D_{m,r}(n,x) = e^{\frac{-x}{m}}\sum_{k\geq 0}\frac{(mk+r)^n}{k!m^k}x^k. \tag{2.53}$$

Par conséquent, les nombres r-Dowling sont générés par :

$$D_{m,r}(n) = e^{\frac{-1}{m}}\sum_{k\geq 0}\frac{(mk+r)^n}{k!m^k}. \tag{2.54}$$

Preuve Pour tout entier p, en appliquant la relation (2.32), on a

$$\frac{(mp+r)^n}{p!} = \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k)\frac{1}{(p-k)!}.$$

On multiple par $\frac{x^p}{m^p}$ et on additionne de p à ∞, alors

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(mp+r)^n}{p!}\frac{x^p}{m^p} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{p-k}}{m^{p-k}(p-k)!}W_{m,r}(n,k)x^k = e^{\frac{x}{m}}\left(\sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)x^k\right).$$

On peut exprimer les nombres r-Dowling à l'aide des nombres r-Whitney de seconde espèce et à l'aide des nombres r-Whitney de première espèce.

Théorème 2.22. *Les nombres r-Dowling vérifient les identités suivante :*

$$D_{m,r}(n+k) = \sum_{j=0}^{k} W_{m,r}(k,j)D_{m,r+jm}(n), \tag{2.55}$$

$$D_{m,r+km}(n) = \sum_{j=0}^{k} w_{m,r}(k,j)D_{m,r}(n+j). \tag{2.56}$$

Preuve La preuve se fait par induction sur k. On a d'après l'identité (2.52),

$$D_{m,r}(n+1) = rD_{m,r}(n) + D_{m,m+r}(n),$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{1} W_{m,r}(1,j)D_{m,r+jm}(n) &= W_{m,r}(1,0)D_{m,r}(n) + W_{m,r}(1,1)D_{m,r+m}(n)\\ &= rD_{m,r}(n) + D_{m,m+r}(n).\end{aligned}$$

On suppose que la relation (2.55) est vraie pour k et on prouve qu'elle est vraie pour $k+1$.

En appliquant l'identité (2.23) on retrouve

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k+1} W_{m,r}(k+1,j)D_{m,r+jm}(n) &= \sum_{j=0}^{k+1} \left(rW_{m,r}(k,j) + W_{m,m+r}(k,j-1)\right) D_{m,r+jm}(n)\\ &= r\sum_{j=0}^{k} W_{m,r}(k,j)D_{m,r+jm}(n)\\ &+ \sum_{j=0}^{k} W_{m,m+r}(k,j)D_{m,r+m+jm}(n)\\ &= rD_{m,r}(n+k) + D_{m,m+r}(n+k)\\ &= D_{m,r}(n+k+1).\end{aligned}$$

Pour l'identité (2.56), il suffit d'appliquer la relation d'orthogonalité inverse (2.11) dans l'identité (2.55) en prenant $b_k = D_{m,r}(n+k)$ et $a_j = D_{m,r+jm}(n)$. □

Théorème 2.23. *[39] On exprime les polynômes r-Dowling à l'aide des polynômes de Dowling et vice versa*

$$D_{m,r}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} D_m(k,x), \tag{2.57}$$

$$D_m(k,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(r-1)^{n-k} D_{m,r}(k,x). \tag{2.58}$$

Preuve En appliquant la proposition 1.2 par en prenant $a_n^0 = \left(\frac{D_m(n,x)}{(r-1)^n}\right)_{n\geq 0}$, on obtient

$$\overline{A}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = e^t A(t,x) \quad = \quad e^t \exp\left(\frac{t}{r-1} + x\frac{e^{m\frac{t}{r-1}} - 1}{m}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left(r\frac{t}{r-1} + x\frac{e^{m\frac{t}{r-1}}-1}{m} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,r}(n,x)}{(r-1)^n}\frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

En appliquant les deux équations (1.24) et (1.25) avec l'équation (2.59), on obtient (2.57) et (2.58) respectivement. □

Proposition 2.24. *On a*

$$D_{m,mr+1}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k B_{k,r}(\frac{x}{m}), \tag{2.60}$$

$$m^n B_{n,r}\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} D_{m,mr+1}(k,x). \tag{2.61}$$

Preuve Soit $(a_n^0)_{n\geq 0} = \left(m^n B_{n,r}\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n\geq 0}$ la suite initiale de la matrice d'Euler-Seidel.

D'après la proposition 1.2 on a

$$\begin{aligned} \overline{A}(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} \\ &= e^t A(t,x) \\ &= e^t e^{mrt+\frac{x}{m}(e^{mt}-1)} \\ &= \exp\left((mr+1)t + x\frac{e^{mt}-1}{m} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,mr+1}(n,x)\frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

En appliquant les deux équations (1.24) et (1.25) avec l'équation (2.62), on obtient (2.60) et (2.61) respectivement. □

Le polynôme r-Dowling peut exprimer en termes de polynômes de Bell et vice versa.

Théorème 2.25. *Le polymôme r-Dowling est relié au polynôme de Bell par les relations suivantes :*

$$D_{m,r}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} m^k B_k\left(\frac{x}{m}\right), \tag{2.63}$$

$$m^n B_n\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} r^{n-k} D_{m,r}(k,x). \tag{2.64}$$

Preuve On prend $(a_n^0)_{n\geq 0} = \left(\left(\frac{m}{r}\right)^n B_n\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n\geq 0}$, d'aprés la proposition 1.2 on a

$$\begin{aligned}
\overline{A}(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} \\
&= e^t A(t,x) \\
&= e^t e^{\frac{x}{m}\left(e^{\frac{m}{r}t}-1\right)} \\
&= \exp\left(t + x\frac{e^{\frac{m}{r}}t-1}{m}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,r}(n,x)}{r^n}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

En appliquant les deux équations (1.24) et (1.25) à l'équation (2.65), on obtient (2.63) et (2.64) respectivement. □

Théorème 2.26. *Le polynôme r-Dowling est relié au polynôme r-Bell et vice versa :*

$$D_{m,r}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k (r-mr)^{n-k} B_{k,r}\left(\frac{x}{m}\right), \tag{2.66}$$

$$\sum_{k=0}^{n} m^n B_{n,r}\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (r-mr)^{n-k} D_{m,r}(k,x). \tag{2.67}$$

Preuve On prend $(a_n^0)_{n\geq 0} = \left(\left(\frac{m}{r-mr}\right)^n B_{n,r}\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n\geq 0}$, en appliquant la proposition 1.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{A}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = e^t A(t,x) &= e^t \exp\left(r\frac{mt}{r-mr} + x\frac{e^{\frac{mt}{r-mr}}-1}{m}\right) \\
&= \exp\left(r\frac{t}{r-mr} + x\frac{e^{m\frac{t}{r-mr}}-1}{m}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,r}(n,x)}{(r-mr)^n}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Donc $a_0^n = \frac{D_{m,r}(n,x)}{(r-mr)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{m}{r-mr}\right)^k B_{k,r}\left(\frac{x}{m}\right)$, le résultat (2.66) est obtenu. En appliquant aussi (1.25) et (2.66) on obtient (2.67). □

Le théorème suivant exprime le polynôme r-Dowling en termes de polynômes s-Dowling.

Théorème 2.27. *On a*

$$D_{m,r}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r-s)^{n-i} D_{m,s}(k,x). \tag{2.68}$$

Pour $s = 1$ dans (4.41) on retrouve (2.57).

Preuve En appliquant la proposition 1.2, en prenant $(a_n^0)_{n\geq 0} = \left(\frac{D_{m,s}(n,x)}{(r-s)^n}\right)_{n\geq 0}$, on retrouve

$$\begin{aligned}
\overline{A}(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} \\
&= e^t A(t,x) \\
&= e^t \exp\left(s\frac{t}{r-s} + x\frac{e^{m\frac{t}{r-s}} - 1}{m}\right) \\
&= \exp\left(r\frac{t}{r-s} + x\frac{e^{m\frac{t}{r-s}} - 1}{m}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,r}(n,x)}{(r-s)^n}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

D'après les relations (1.24) et (2.69), le résultat est obtenu. □

Théorème 2.28. *Soient r et p des entiers, alors*

$$D_{m,mp+r}(n,x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (mp)^{n-i} D_{m,r}(i,x). \tag{2.70}$$

Preuve En utilisant (2.49), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} D_{m,mp+r}(n,x)\frac{z^n}{n!} &= \exp\left((mp+r)\,z + x\frac{e^{mz}-1}{m}\right) \\
&= e^{(mp)z} \exp\left(rz + x\frac{e^{mz}-1}{m}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(mpz)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{(mp)^j}{j!}\frac{D_{m,r}\,(i,x)}{i!}\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (mp)^{n-i} D_{m,r}(i,x)\right)\frac{z^n}{n!},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Plusieurs relations de récurrence sur les nombres et polynôme de Bell sont données par Spivey [91] et d'autres relations par Sun and Wu [96]. En outre, Belbachir et Mihoubi [11] ont étendu ces relations de récurrences aux nombres et polynômes r-Bell. On les étend aux nombres et polynômes r-Dowling en utilisant la méthode de Gould et Quaintance [63].

Le théorème suivante lie les polynômes r-Dowling aux nombres r-Whitney de seconde espèce et polynômes r-Dowling précédents.

Théorème 2.29. *Les polynômes r-Dowling satisfont la relation de récurrence*

$$D_{m,r}(n+k,x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} W_{m,r}(k,j)\binom{n}{i}(mj)^{n-i}\,x^j D_{m,r}(i,x). \tag{2.71}$$

Preuve Soit $f(z,x)$ la fonction génératrice exponentielle des polynômes r-Dowling, d'une part, d'après le Théorème de Taylor, on a

$$f(u+z,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(u,x)\frac{z^k}{k!}, \tag{2.72}$$

où $f^{(k)}(z,x)$ est la dérivée d'ordre k de f et en utilisant (2.49) on obtient :

$$f(u+z,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} D_{m,r}(n+k,x)\frac{z^k}{k!}\frac{u^n}{n!}. \tag{2.73}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f(u+z,x) &= \exp\left((u+z)r + x\frac{e^{m(u+z)}-1}{m}\right) \qquad (2.74)\\ &= f(u,x)e^{rz}\exp\left(\frac{x}{m}e^{mu}(e^{mz}-1)\right)\\ &= f(u,x)\sum_{j=0}^{\infty} x^j e^{muj} e^{rz}\frac{(e^{mz}-1)^j}{j!m^j}\\ &= f(u,x)\sum_{j=0}^{\infty} x^j e^{muj}\sum_{k=0}^{\infty} W_{m,r}(k,j)\frac{z^k}{k!}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty} D_{m,r}(i,x)\frac{u^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x^j W_{m,r}(k,j)\frac{z^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(muj)^n}{n!}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x^j W_{m,r}(k,j)\frac{z^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(mj)^{n-i}D_{m,r}(i,x)\frac{u^n}{n!}, \end{aligned}$$

donc

$$f(u+z,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D_{m,r}(i,x)\sum_{j=0}^{k} x^j W_{m,r}(k,j)(mj)^{n-i}\right)\frac{z^k}{k!}\frac{u^n}{n!}. \tag{2.75}$$

En comparant (2.80) et (2.75) on obtient le résultat. □

Dans ce théorème, on utilise l'équation (2.71) pour obtenir de nouvelles identités relatives à $D_{m,r}(n,x)$. En utilisant l'équation (2.71) on obtient des nouveaux résultats pour $D_{m,r}(n,x)$.

Théorème 2.30. *Soit $p \geq 0$, $n \geq 0$, des entiers, on a*

$$\sum_{k=0}^{p} D_{m,r}(n+k,x)\, w_{m,r}(p,k) = x^p \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{m,r}(n-i,x)\,(mp)^i . \tag{2.76}$$

Preuve Utilisons (2.71), on remplace i par $n-i$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{p} D_{m,r}(n+k,x)\, w_{m,r}(p,k) \\
= &\sum_{i=0}^{n} m^i \binom{n}{i} D_{m,r}(n-i,x) \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{k} W_{m,r}(k,j) w_{m,r}(p,k) x^j j^i \\
= &\sum_{i=0}^{n} m^i \binom{n}{i} D_{m,r}(n-i,x) \sum_{j=0}^{k} x^j j^i \sum_{k=j}^{p} w_{m,r}(p,k) W_{m,r}(k,j).
\end{aligned}$$

D'aprés (2.10), on retrouve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} D_{m,r}(n+k,x)\, w_{m,r}(p,k) &= \sum_{i=0}^{n} m^i \binom{n}{i} D_{m,r}(n-i,x) \sum_{j=0}^{k} x^j j^i \delta_{j,p} \\
&= x^p \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{m,r}(n-i,x)\,(mp)^i .
\end{aligned}$$

En utilisant (2.76), nous exprimons de nouvelles identités pour $D_{m,r}(n,x)$ liés aux nombres r-Whitney de première espèce.

Théorème 2.31. *Soient $n \geq 0$ et $p \geq 0$, des entiers*

$$D_{m,r}(n,x) = x^{-p} \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} w_{m,r}(p,k) \binom{n}{i} (-1)^{n-i} (mp)^{n-i} D_{m,r}(i+k,x). \tag{2.77}$$

Preuve Dans la relation (2.76), on remplace i par $n-i$, alors

$$(mp)^{-n} \sum_{k=0}^{p} D_{m,r}(n+k,x) w_{m,r}(p,k) = x^p \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{m,r}(i,x)\,(mp)^{-i} . \tag{2.78}$$

En appliquant la transformée binomiale d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ à l'équation (2.78), avec $a_n = (mp)^{-n} \sum_{k=0}^{p} D_{m,r}(n+k,x) w_{m,r}(p,k)$ et $b_i = x^p D_{m,r}(i,x)\,(mp)^{-i}$, alors l'équation (2.78) implique

$$x^p D_{m,r}(n,x)\,(mp)^{-n} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (mp)^{-i} \sum_{k=0}^{p} D_{m,r}(i+k,x) w_{m,r}(p,k), \tag{2.79}$$

donc le résultat est obtenu. □

Les polynômes r-Dowling satisfont

Théorème 2.32. *Soient n et $p \geq 0$, des entiers, on a*

$$D_{m,r}(n+k,x) = \sum_{j=0}^{k} W_{m,r}(k,j) D_{m,mj+r}(n,x)x^j, \tag{2.80}$$

$$D_{m,mk+r}(n,x) = x^{-k} \sum_{j=0}^{k} w_{m,r}(k,j) D_{m,r}(n+j,x), \tag{2.81}$$

$$D_{m,r}(n+k,x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} W_{m,r}(k,j) \binom{n}{i} (mj+r-1)^{n-i} x^j D_m(i,x). \tag{2.82}$$

Preuve Pour l'identité (2.80), dans la relation (2.71), on remplace $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (mj)^{n-i} D_{m,r}(i,x)$ par $D_{m,mj+r}(n,x)$.

Pour l'identité (2.81), on écrit l'équation (2.76) comme suit $\sum_{j=0}^{k} D_{m,r}(n+j,x) w_{m,r}(k,j) = x^k \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{m,r}(n-i,x) (mk)^i$ et en remplaçant $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{m,r}(n-i,x) (mk)^i$ par $D_{m,mk+r}(n,x)$, on obtient le résultat.

Pour l'identité (2.82), dans (2.80), on remplace $D_{m,mj+r}(n,x)$ par $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (mj+r-1)^{n-i} D_m(i,x)$. □

2.3 Nombres et polynômes r-Dowling ordonnés

Dans cette partie, on donne des résultats concernant les nombres et polynômes r-Dowling ordonnés.

Définition 2.4. Le nombre r-Dowling ordonné est défini par :

$$\mathcal{D}_{m,r}(n) = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! W_{m,r}(n,k). \tag{2.83}$$

Le polynôme r-Dowling ordonné est défini par la relation suivante :

$$\mathcal{D}_{m,r}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! W_{m,r}(n,k) x^k. \tag{2.84}$$

Voici les premières valeurs des polynômes r-Dowling ordonnés :

Pour $x = 1$, on obtient les valeurs des nombres r-Dowling ordonnés suivantes :

n	$\mathcal{D}_{m,r}(n,x)$
0	1
1	$r!r + (r+1))!x$
2	$r!r^2 + (r+1)!(m+2r)x + (r+2)!x^2$
3	$r!r^3 + (r+1)!(m^2+3rm+3r^2)x + (r+2)!(3m+3r)x^2 + (r+3)!x^3$
4	$r!r^4 + (r+1)!(m^3+4rm^2+6r^2m+4r^3)x$ $+(r+2)!(7m^2+12rm+6r^2)x^2 + (r+3)!(6m+4r)x^3 + (r+4)!x^4$

TABLE 2.5 – Polynômes r-Dowling ordonnés.

n	$\mathcal{D}_{m,r}(n)$
0	1
1	$r!r + (r+1))!$
2	$r!r^2 + (r+1)!(m+2r) + (r+2)!$
3	$r!r^3 + (r+1)!(m^2+3rm+3r^2) + (r+2)!(3m+3r) + (r+3)!$
4	$r!r^4 + (r+1)!(m^3+4rm^2+6r^2m+4r^3)$ $+(r+2)!(7m^2+12rm+6r^2) + (r+3)!(6m+4r) + (r+4)!$

TABLE 2.6 – Nombres r-Dowling ordonnés.

2.3.1 Fonctions génératrices

Théorème 2.33. *La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r-Dowling ordonnés est donnée par :*

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{D}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!} = \frac{r!e^{rz}}{\left(1 - x\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^{r+1}}. \tag{2.85}$$

Preuve En utilisant l'identité (2.84) et la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres r-Whitney de seconde espèce, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \mathcal{D}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}(k+r)!W_{m,r}(n,k)x^k\frac{z^n}{n!} \\ &= e^{rz}r!\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r}{k}\left(x\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^k,\end{aligned}$$

et sachant que $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$, on obtient le résultat. □

2.3.2 Identités combinatoires

Dans ce qui suit, on donne des identités pour les polynômes r-Dowling ordonnés

Théorème 2.34. *Les polynômes r-Dowling ordonnés satisfont l'identité suivante :*

$$\mathcal{D}_{m,r}\left(n,\frac{x}{1-\frac{x}{m}}\right) = \left(1-\frac{x}{m}\right)^{r+1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(mp+r)^n(p+r)!}{m^p p!}x^p. \tag{2.86}$$

Preuve En appliquant l'identité (2.32), on obtient

$$\frac{(mp+r)^n}{p!} = \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k)\frac{1}{(p-k)!},$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(mp+r)^n(p+r)!}{m^p p!}x^p &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(k+r)!W_{m,,r}(n,k)x^k\frac{(p+r)!}{(k+r)!(p-k)!}\left(\frac{x}{m}\right)^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+r)!W_{m,,r}(n,k)x^k\sum_{p=k}^{\infty}\binom{p+r}{k+r}\left(\frac{x}{m}\right)^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+r)!W_{m,,r}(n,k)x^k\sum_{p=0}^{\infty}\binom{p+k+r}{k+r}\left(\frac{x}{m}\right)^{p} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+r)!W_{m,,r}(n,k)x^k\sum_{p=0}^{\infty}\binom{p+k+r}{p}\left(\frac{x}{m}\right)^{p} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+r)!W_{m,,r}(n,k)x^k\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-(k+r+1)} \\
&= \left(1-\frac{x}{m}\right)^{-(r+1)}\mathcal{D}_{m,r}\left(n,\frac{x}{1-\frac{x}{m}}\right),
\end{aligned}$$

donc le résultat est obtenu. □

La formule explicite des polynômes r-Dowling ordonnés est donnée par :

Théorème 2.35. *Pour $m \geq 1$ et $x > -\frac{m}{2}$, On a*

$$\mathcal{D}_{m,r}(n,x) = m^{r+1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(mp+r)^n(p+r)!}{(m+x)^{p+r+1}p!}x^p. \tag{2.87}$$

Par conséquent, les nombres r-Dowling ordonnés sont générés par :

$$\mathcal{D}_{m,r}(n) = m^{r+1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(mp+r)^n(p+r)!}{(m+1)^{p+r+1}p!}. \tag{2.88}$$

Preuve L'identité (2.86) est équivalente à l'identité (2.87), en remplaçant $\frac{x}{1-\frac{x}{m}}$ par y. $\square$

Théorème 2.36. *Le polynôme r-Dowling ordonné vérifie la relation de récurrence suivante :*

$$\mathcal{D}_{m,r}(n+1,x) = r\mathcal{D}_{m,r}(n,x) + x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}\mathcal{D}_{m,r+1}(k,x). \tag{2.89}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_{m,r}(n+1,x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_{m,r}(n,x)\frac{t^n}{n!} \\
&= r\frac{r!e^{rt}}{\left(1-x\frac{e^{mt}-1}{m}\right)^{r+1}} + xe^{(m-1)t}\frac{(r+1)!e^{(r+1)t}}{\left(1-x\frac{e^{mt}-1}{m}\right)^{r+2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(r\mathcal{D}_{m,r}(n,x) + x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}\mathcal{D}_{m,r+1}(k,x)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Donc le résultat est obtenu. $\square$

Théorème 2.37. *On a la récurrence*

$$\mathcal{D}_{m,r}(n+1,x) = r\mathcal{D}_{m,r}(n,x) + \frac{1}{x^{r-1}}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}x^{r+1}\mathcal{D}_{m,r}(k,x). \tag{2.90}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{m,r}(n+1,x) &= \int_0^{+\infty} D_{m,r}(n+1,\lambda x)\lambda^r e^{-\lambda}d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} rD_{m,r}(n,\lambda x)\lambda^r e^{-\lambda}d\lambda + x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}D_{m,r}(k,\lambda x)\lambda^r e^{-\lambda}d\lambda \\
&= r\mathcal{D}_{m,r}(n,x) + x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}\sum_{i=0}^{k}W_{m,r}(k,i)x^i\int_0^{+\infty}\lambda^{r+i+1}e^{-\lambda}d\lambda \\
&= r\mathcal{D}_{m,r}(n,x) + x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}\sum_{i=0}^{k}W_{m,r}(k,i)x^i(r+i+1)! \\
&= r\mathcal{D}_{m,r}(n,x) + \frac{1}{x^{r-1}}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}x^{r+1}\mathcal{D}_{m,r}(k,x).
\end{aligned}$$

Corollaire 2.38. *On a*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}\mathcal{D}_{m,r+1}(k,x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}((r+1)\mathcal{D}_{m,r}(k,x) + x\mathcal{D}'(k,x)). \tag{2.91}$$

Preuve D'après (2.89) et (2.90) on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}\mathcal{D}_{m,r+1}(k,x) &= \frac{1}{x^r}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}x^{r+1}\mathcal{D}_{m,r}(k,x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}((r+1)\mathcal{D}_{m,r}(k,x)+x\mathcal{D}'(k,x)).\end{aligned}$$

Théorème 2.39. *Le polynôme r-Dowling ordonné est relié au polynôme r-Bell ordonné*

$$\mathcal{D}_{m,r}(n,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{k}(r-mr)^{n-k}\mathcal{B}_{k,r}\left(\frac{x}{m}\right), \tag{2.92}$$

$$\sum_{k=0}^{n}m^{n}\mathcal{B}_{n,r}\left(\frac{x}{m}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(r-mr)^{n-k}\mathcal{D}_{m,r}(k,x). \tag{2.93}$$

Preuve On prend $(a_n^0)_{n\geq 0}=\left(\left(\frac{m}{r-mr}\right)^n\mathcal{B}_{n,r}\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n\geq 0}$, en appliquant la proposition 1.2, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{A}(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_0^n\frac{t^n}{n!}=e^tA(t,x) &= e^t\frac{r!e^{r\frac{mt}{r-mr}}}{\left(1-x\frac{e^{\frac{mt}{r-mr}}-1}{m}\right)^{r+1}}\\ &= \frac{r!e^{r\frac{t}{r-mr}}}{\left(1-x\frac{e^{m\frac{t}{r-mr}}-1}{m}\right)^{r+1}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathcal{D}_{m,r}(n,x)}{(r-mr)^n}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{2.94}$$

En appliquant (1.24) et (1.25) avec (2.94), on obtient (2.92) et (2.93) respectivement. □

2.4 Nombres et polynômes r-Eulériens de Dowling

Définition 2.5. Le polynôme r-Eulérien de Dowling $\mathcal{A}_{m,r}(n,x)$ est défini par

$$\mathcal{A}_{m,r}(n,x) = \sum_{i=0}^{n}(i+r)!W_{m,r}(n,i)(x-1)^{n-i} \tag{2.95}$$

$$= (x-1)^n\mathcal{D}_{m,r}(n,\frac{1}{x-1}). \tag{2.96}$$

On a

$$\mathcal{A}_{m,r}(n,x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-i}{k}(i+r)!W_{m,r}(n,i)(-1)^{n-i-k}x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i-k}\binom{n-i}{k}(i+r)!W_{m,r}(n,i)\right)x^k.$$

Alors on définit le nombre r-Eulérien de Dowling $a_{m,r}(n,k)$ par :

$$a_{m,r}(n,k)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i-k}\binom{n-i}{k}(i+r)!W_{m,r}(n,i). \tag{2.97}$$

Pour $m=1$ et $r=0$, on obtient les polynômes Euleriens.

Théorème 2.40. *La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r-eulériens de Dowling est donné par*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!}=\frac{r!(m(x-1))^{r+1}e^{r(x-1)z}}{(m(x-1)+1-e^{m(x-1)z})^{r+1}}. \tag{2.98}$$

Preuve En utilisant (2.95) et (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_{m,r}(n,x) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{n=i}^{\infty}W_{m,r}(n,i)(i+r)!(x-1)^{n-i}\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+r)!}{(x-1)^i}\sum_{n=i}^{\infty}W_{m,r}(n,i)\frac{((x-1)z)^n}{n!}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+r)!}{(x-1)^i}\frac{e^{r(x-1)z}}{i!}\left(\frac{e^{m(x-1)z}-1}{m}\right)^i\\
&= r!e^{r(x-1)z}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+r}{r}\left(\frac{e^{m(x-1)z}-1}{m(x-1)}\right)^i\\
&= r!e^{r(x-1)z}\frac{1}{\left(1-\frac{e^{m(x-1)z}-1}{m(x-1)}\right)^{r+1}},
\end{aligned}$$

le résultat est obtenu. □

Théorème 2.41. *Les polynômes r-Dowling ordonnés sont liés aux nombres r-eulériens de Dowling par l'identité suivante :*

$$\mathcal{D}_{m,r}(n,x)=\sum_{k=0}^{n}a_{m,r}(n,k)(1+x)^k x^{n-k}. \tag{2.99}$$

Preuve En utilisant la relation (2.96), on obtient

$$\mathcal{D}_{m,r}(n,x) = x^n\mathcal{A}_{m,r}\left(n,\frac{x+1}{x}\right) \tag{2.100}$$

$$= x^n\sum_{k=0}^{n}a_{m,r}(n,k)\left(\frac{x+1}{x}\right)^k. \tag{2.101}$$

□

Chapitre 3

Transformé binomiale et nombres r-Whitney

Dans ce chapitre, on se propose de donner des extensions de résultats obtenus par Boyadzhiev (2009, [32]) pour les nombres r-Whitney.

L'identité (2.35) montre que les suites $(k!m^k W_{m,r}(n,k))_k$ et $((mk+r)^n)_n$ sont liées par la transformée binomiale inverse. La formule d'inversion entraîne :

$$(mk+r)^n = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} j! m^j W_{m,r}(n,j), \tag{3.1}$$

qui est un cas particulier de (2.32) pour tout entier k.

Le théorème suivant est une généralisation à poids des sommes de Faulhaber adaptée aux progressions arithmétiques.

Théorème 3.1. *Soient $c_1, c_2, \ldots$ une suite de nombres complexes, alors pour tout entier positif p, on a*

$$\sum_{k=o}^{p} (mk+r)^n c_k = \sum_{j=0}^{p} j! m^j W_{m,r}(n,j) \sum_{k=j}^{p} \binom{k}{j} c_k. \tag{3.2}$$

La relation (3.2) nous permet d'obtenir plusieurs identités.

Proposition 3.2. *Pour tout p entier, on a :*

$$\sum_{k=0}^{p} (mk+r)^n x^k = \sum_{j=0}^{p} j! m^j W_{m,r}(n,j) x^j \sum_{t=0}^{p-j} \binom{t+j}{j} x^t. \tag{3.3}$$

Preuve On prend $c_k = x^k$, en appliquant l'identité (3.2), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p}(mk+r)^n x^k = \sum_{j=0}^{p} j!m^j W_{m,r}(n,j) \sum_{k=j}^{p}\binom{k}{j}x^k,$$

avec

$$\sum_{k=j}^{p}\binom{k}{j}x^k = x^j\sum_{t=0}^{p-j}\binom{t+j}{j}x^t,$$

d'où le résultat. □

Remarque 3.1. Pour $x = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{p}(mk+r)^n = \sum_{j=0}^{p} j!m^j W_{m,r}(n,j)\binom{p+1}{j+1}, \tag{3.4}$$

et en comparant avec l'identité (1.18), on obtient la relation suivante :

$$\sum_{j=0}^{p} j!m^j W_{m,r}(n,j)\binom{p+1}{j+1} = (mp+r)^n + \frac{m^n}{n+1}\left[\beta_{n+1}\left(\frac{r}{m}+p\right) - \beta_{n+1}\left(\frac{r}{m}\right)\right]. \tag{3.5}$$

Proposition 3.3. *Pour tout p entier, on a :*

$$\sum_{k=0}^{p}(mk+r)^n(-1)^k = \sum_{j=0}^{p} j!m^j W_{m,r}(n,j)\sum_{k=j}^{p}\binom{k}{j}(-1)^k. \tag{3.6}$$

Preuve On prend $c_k = (-1)^k$ et on applique l'identité (3.2). □

Proposition 3.4. *Pour tout p entier, on a :*

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(mk+r)^n x^k = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j} j!m^j W_{m,r}(n,j)x^j(1+x)^{p-j}. \tag{3.7}$$

Preuve On pose $c_k = \binom{p}{k}x^k$ et on applique (3.2), on a alors :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(mk+r)^n x^k = \sum_{j=0}^{p} j!m^j W_{m,r}(n,j)\sum_{k=j}^{p}\binom{p}{k}\binom{k}{j}x^k,$$

avec

$$\sum_{k=j}^{p}\binom{p}{k}\binom{k}{j}x^k = \binom{p}{j}x^j(1+x)^{p-j},$$

le résultat est ainsi obtenu. □

Remarque 3.2. Pour $x = 1$, on a l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (mk + r)^n = \sum_{j=0}^{p} (p)_j m^j 2^{p-j} W_{m,r}(n,j), \tag{3.8}$$

et pour $x = -1/2$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (mk + r)^n (-1)^k 2^{p-k} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j (p)_j m^j W_{m,r}(n,j). \tag{3.9}$$

L'identité suivante relie les nombres r-Whitney de seconde espèce aux nombres de Whitney de première espèce

Proposition 3.5. *Pour tout p entier, on a :*

$$\sum_{k=0}^{p} (mk + r)^n s(p,k) m^{p-k} (-1)^k = \sum_{j=0}^{p} j!(-1)^j m^j W_{m,r}(n,j) w_m(p,j). \tag{3.10}$$

Preuve Le résultat est obtenu en appliquant l'identité (3.2) pour $c_k = s(p,k)m^{p-k}(-1)^k$ et la relation (1.40). $\square$

L'identité suivante relie les nombres r-Whitney des deux espèces aux nombres de Stirling de première espèce.

Proposition 3.6. *Pour tout p entier, on a*

$$\sum_{k=0}^{p} (mk + r)^n (-1)^k s(p,k) r^k m^{p-k} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j j! r^j m^j W_{m,r}(n,j) w_{m,r}(p,j) \tag{3.11}$$

Preuve En prenant $c_k = s(p,k)(-1)^k r^k m^{p-k}$ et en appliquant (2.14), on obtient le résultat. $\square$

Les deux identités suivantes relient les nombres r-Whitney des deux types aux nombres r-Stirling de première espèce.

Proposition 3.7. *Pour touts p,r entiers, on a*

$$\sum_{k=0}^{p} (mk + r)^n s_r(p + r,k + r)(mr - r)^k (-m)^{p-k} = \sum_{j=0}^{p} j! m^j (mr - r)^j W_{m,r}(n,j) w_{m,r}(p,j). \tag{3.12}$$

Preuve On prend $c_k = s_r(p+r,k+r)(-m)^{p-k}(mr-r)^k$ et en applique (2.28), donc le résultat est obtenu. □

L'identité suivante lie les nombres s-Whitney de première espèce aux nombres r-Whitney.

Proposition 3.8. *Pour tout entier $r \leq s$, on a*

$$\sum_{k=0}^{p}(mk+r)^n w_{m,s}(p,k)(s-r)^k = \sum_{j=0}^{p} j!m^j(s-r)^j W_{m,r}(n,j)w_{m,r}(p,j). \tag{3.13}$$

Preuve On pose $c_k = w_{m,s}(p,k)(s-r)^k$ et on utilise (2.29). □

Les deux identités suivantes lient les nombres r-Whitney de seconde espèce aux nombres harmoniques et hyperharmoniques.

Proposition 3.9. *Pour tout p entier on a*

$$\sum_{k=0}^{p}(mk+r)^n H_k = \sum_{j=0}^{p} j!m^j W_{m,r}(n,j)\binom{p+1}{j+1}\left(H_{p+1}-\frac{1}{j+1}\right), \tag{3.14}$$

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{(mk+r)^n}{p-k+1} = \sum_{j=0}^{p} j!m^j W_{m,r}(n,j)H_{p-j+1}^{(j+1)}. \tag{3.15}$$

Preuve Le résultat est obtenu grâce à (3.2) en prenant respectivement $c_k = H_k$ et $c_k = \frac{1}{p-k+1}$ et en utilisant les sommes suivantes :

$$\sum_{k=j}^{p}\binom{k}{j}H_k = \binom{p+1}{j+1}\left(H_{p+1}-\frac{1}{j+1}\right),$$

$$\sum_{k=j}^{p}\binom{k}{j}\frac{1}{p-k+1} = \binom{p+1}{j}\left(H_{p+1}-H_j\right).$$

et la relation (1.17). □

Chapitre 4

Nombres r-Whitney s-associés et nombres et polynômes r-Dowling s-associés

Dans ce chapitre, on présente quelques propriétés des nombres r-Whitney s-associés et des nombres et polynômes r-Dowling s-associés.

4.1 Nombres r-Whitney s-associés

Dans cette partie, on étudie les nombres r-Whitney s-associés. On donne des formules de récurrence, des formes explicites et quelques identités combinatoires.

Définition 4.1. On introduit la suite des nombres r-Whitney s-associés de seconde espèce par la fonction génératrice exponentielle suivante :

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right)^k. \tag{4.1}$$

Pour $r = 1$ et $m = 1$, on obtient les nombres de Whitney s-associés, $W_m^{(s)}(n,k)$ et les nombres r-Stirling s-associés, $S_r^{(s)}(n+r,k+r)$, respectivement (voir [6]). On retrouve les nombres de Stirling s-associés, $S^{(s)}(n,k)$ pour $m = 1$ et $r = 0$ [66].

Théorème 4.1. *La fonction génératrice mixte des nombres r-Whitney s-associés de seconde espèce est donnée par :*

$$\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!}x^k = \exp\left\{rz + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right\}. \tag{4.2}$$

Preuve On change l'ordre de la sommation et on utilise l'équation (4.1) pour obtenir le résultat. □

4.1.1 Relations de récurrence et expressions explicites

L'identité suivante nous permet de calculer les nombres r-Whitney s-associés grâce aux nombres r-Whitney s-associés précédents.

Théorème 4.2. *La suite des nombres r-Whitney s-associés de seconde espèce vérifie la formule de récurrence suivante*

$$W_{m,r}^{(s)}(n,k) = (mk+r)W_{m,r}^{(s)}(n-1,k) + m^{s-1}\binom{n-1}{s-1}W_{m,r}^{(s)}(n-s,k-1). \tag{4.3}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n+1,k)\frac{z^n}{n!} &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!}\right)\\
&= \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k\right)\\
&= r\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k + k\frac{e^{rz}}{k!}\left(e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^{j-1}}{(j-1)!}\right)\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^{k-1}\\
&= r\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} + mk\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k\\
&+ \frac{(mz)^{s-1}}{(s-1)!}\frac{e^{rz}}{(k-1)!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^{k-1}\\
&= (mk+r)\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} + \frac{m^{s-1}}{(s-1)!}\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k-1)\frac{z^{n+(s-1)}}{n!}\\
&= (mk+r)\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} + \frac{m^{s-1}}{(s-1)!}\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n-(s-1),k-1)\frac{z^n}{(n-(s-1))!},
\end{aligned}$$

ainsi le résultat est obtenu. □

Pour $s = 1$, on retrouve la relation (2.4), pour $r = 1$, on a le corollaire suivant :

Corollaire 4.3. *Les nombres de Whitney s-associés de seconde espèce vérifient la formule de récurrence suivante*

$$W_m^{(s)}(n,k) = (mk+1)W_m^{(s)}(n-1,k) + m^{s-1}\binom{n-1}{s-1}W_m^{(s)}(n-s,k-1),$$

où $W_m^{(s)}(n,k)$ est le nombre de Whitney s-associé de seconde espèce.

Théorème 4.4. *On a la relation de récurrence*

$$W_{m,r}^{(s)}(n+1,k) = rW_{m,r}^{(s)}(n,k) + \sum_{i=0}^{n} m^{n-i}\binom{n}{i}W_{m,r}^{(s)}(i,k-1) - \sum_{i=0}^{s-2} m^{n-i}\binom{n}{i}W_{m,r}^{(s)}(i,k-1),$$

cette relation peut être écrite aussi

$$W_{m,r}^{(s)}(n+1,k) - rW_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=0}^{n} m^{n-i}\binom{n}{i}W_{m,r}^{(s)}(i,k-1)\left(1-[i \leq s-2]\right),$$

où $[i \leq a] = 1$ pour $i \leq a$ et 0 sinon, pour la notation voir [64].

Preuve

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n+1,k)\frac{z^n}{n!} &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{s}(n,k)\frac{z^n}{n!}\right) \\
&= r\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k \\
&+ \frac{e^{rz}}{(k-1)!}\left(e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-2}\frac{(mz)^j}{j!}\right)\left(\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(rW_{m,r}^{(s)}(n,k) + \sum_{i=0}^{n} m^{n-i}\binom{n}{i}W_{m,r}^{(s)}(i,k-1)\right)\frac{z^n}{n!} \\
&- \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{s-2} m^{n-i}\binom{n}{i}W_{m,r}^{(s)}(i,k-1)\right)\frac{z^n}{n!},
\end{aligned}$$

ainsi on obtient le résultat. □

Pour $r = 1$, on a le corollaire suivante

Corollaire 4.5. *Les nombres de Whitney s-associés de seconde espèce satisfont*

$$W_m^{(s)}(n+1,k) = W_m^{(s)}(n,k) + \sum_{i=0}^{n} m^{n-i}\binom{n}{i} W_m^{(s)}(i,k-1)\left(1-[i\leq s-2]\right).$$

Théorème 4.6. *Les nombres r-Whitney s-associés sont écrits en termes des nombres $(r+m)$-Whitney s-associés*

$$W_{m,r}^{(s)}(n+1,k) = rW_{m,r}^{(s)}(n,k) + W_{m,r+m}^{(s)}(n,k-1) - \sum_{i=0}^{s-2} m^{n-i}\binom{n}{i} W_{m,r}^{(s)}(i,k-1).$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n+1,k)\frac{z^n}{n!} &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{s}(n,k)\frac{z^n}{n!}\right) \\
&= r\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k \\
&+ \frac{e^{rz}}{(k-1)!}\left(e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-2}\frac{(mz)^j}{j!}\right)\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^{k-1} \\
&= r\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k + \frac{e^{(r+m)z}}{(k-1)!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^{k-1} \\
&- \sum_{j=0}^{s-2}\frac{(mz)^j}{j!}\frac{e^{rz}}{(k-1)!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(rW_{m,r}^{(s)}(n,k) + W_{m,r+m}^{(s)}(n,k-1)\right)\frac{z^n}{n!} \\
&- \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{s-2} m^{n-i}\binom{n}{i} W_{m,r}^{(s)}(i,k-1)\right)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Les nombres r-Whitney s-associés sont écrits en termes de nombres de Whitney s-associés

Théorème 4.7. *On a*

$$W_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(r-1)^i W_m^{(s)}(n-i,k). \tag{4.4}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} &= e^{(r-1)z}\frac{e^z}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i+j=n}\frac{(r-1)^i}{i!}\frac{W_m^{(s)}(j,k)}{j!}\right)z^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(r-1)^i W_m^{(s)}(n-i,k)\right)\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

Théorème 4.8. *Les nombres r-Whitney s-associés vérifient les relations de récurrence longitudinale.*

$$W_{m,r+1}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}W_{m,r}^{(s)}(i,k), \tag{4.5}$$

$$W_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}W_{m,r+1}^{(s)}(i,k). \tag{4.6}$$

Preuve Pour l'identité (4.5), on a

$$\begin{aligned}e^z\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} &= \frac{e^{(r+1)z}}{k!}\left(\frac{e^{z}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k \\ &= \sum_{n\geq 0} W_{m,r+1}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!},\end{aligned}$$

ainsi le résultat est obtenu.

Pour l'identité (4.6), on utilise la transformée binomiale. □

Théorème 4.9. *Les nombres r-Whitney s-associés vérifient les identités*

$$W_{m,r+p}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^{n-i}W_{m,r}^{(s)}(i,k), \tag{4.7}$$

$$W_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-p)^{n-i}W_{m,r+p}^{(s)}(i,k). \tag{4.8}$$

Preuve Pour l'identité (4.7), on a

$$\sum_{n\geq 0} W_{m,r+p}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^{(r+p)z}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{pz}\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(pz)^n}{n!}\sum_{n\geq 0}W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i+j=n}\frac{p^j}{j!}\frac{W_{m,r}^{(s)}(i,k)}{i!}\right)z^n.
\end{aligned}
$$

Pour l'identité (4.8), on utilise la transformée binomiale. □

Théorème 4.10. *Les nombres r-Whitney s-associés sont écrits en termes de nombres r-Whitney $(s-1)$-associés et vice versa*

$$
W_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{j=0}^{k}\frac{m^{(s-2)j}(-1)^j n!}{((s-1)!)^j j!(n-(s-1)j)!}W_{m,r}^{(s-1)}(n-(s-1)j,k-j), \tag{4.9}
$$

$$
W_{m,r}^{(s-1)}(n,k) = \sum_{j=0}^{k}\frac{m^{(s-2)j} n!}{(s-1)!)^j j!(n-(s-1)j)!}W_{m,r}^{(s)}(n-(s-1)j,k-j). \tag{4.10}
$$

Preuve Pour l'identité (4.9), on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!} &= \frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^k \\
&= \frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-2}\frac{(mz)^j}{j!}-\frac{(mz)^{s-1}}{(s-1)!}}{m}\right)^k \\
&= \frac{e^{rz}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-2}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^{k-j}\left(-\frac{(mz)^{s-1}}{m(s-1)!}\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{n\geq 0}W_{m,r}^{(s-1)}(n,k-j)\frac{(-1)^j m^{(s-2)j}}{j!((s-1)!)^j}\frac{z^{n+(s-1)j}}{n!} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{n\geq 0}W_{m,r}^{(s-1)}(n-(s-1)j,k-j)\frac{(-1)^j m^{(s-2)j}}{j!((s-1)!)^j}\frac{z^n}{(n-(s-1)j)!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{m^{(s-2)j}(-1)^j n!}{j!((s-1)!)^j(n-(s-1)j)!}W_{m,r}^{(s-1)}(n-(s-1)j,k-j)\right)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Pour l'identité (4.10), on a

$$
\sum_{n\geq 0}W_{m,r}^{(s-1)}(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}+\frac{(mz)^{s-1}}{(s-1)!}}{m}\right)^k
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{rz}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right)^{k-j}\left(\frac{(mz)^{s-1}}{m(s-1)!}\right)^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k-j)\frac{z^n}{n!}\right)\frac{(mz)^{(s-1)j}}{m^j j!((s-1)!)^j} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k-j)\frac{m^{(s-2)j}}{j!((s-1)!)^j}\frac{z^{n+(s-1)j}}{n!} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n-(s-1)j,k-j)\frac{m^{(s-2)j}}{j!((s-1)!)^j}\frac{z^{n}}{(n-(s-1)j)!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{m^{(s-2)j}n!}{j!((s-1)!)^j(n-(s-1)j)!}W_{m,r}^{(s)}(n-(s-1)j,k-j)\right)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Corollaire 4.11. *Les nombres de Whitney s-associés sont écrits en termes de nombres de Whitney $(s-1)$-associés et vice versa*

$$W_m^{(s)}(n,k) = \sum_{j=0}^{k}\frac{m^{(s-2)j}(-1)^j n!}{((s-1)!)^j j!(n-(s-1)j)!}W_m^{(s-1)}(n-(s-1)j,k-j),$$

$$W_m^{(s-1)}(n,k) = \sum_{j=0}^{k}\frac{m^{(s-2)j} n!}{((s-1)!)^j j!(n-(s-1)j)!}W_m^{(s)}(n-(s-1)j,k-j).$$

En particulier, pour $m = 1$, on trouve les identités (4.6) et (4.5) respectivement, données dans [66].

4.1.2 Identités combinatoires

Théorème 4.12. *Les nombres r-Whitney s-associés de seconde espèce sont liés aux nombres r-Stirling s-associés de seconde espèce par la relation suivante :*

$$W_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}m^{i-k}(r-rm)^{n-i}S_r^{(s)}(i+r,k+r). \tag{4.11}$$

Preuve Soit $W^{2,r,s}$ la matrice e-Riordan des nombres r-Whitney s-associés de seconde espèce, $W^{2,r,s} = \left[W_{m,r}^{(s)}(n,k)\right]_{n,k\geq 0}$ alors d'après la formule (4.1) on obtient

$$W^{2,r,s} = \left\langle e^{rz}, \frac{e^{mz}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m}\right\rangle. \tag{4.12}$$

Pour $m = 1$, on retrouve

$$\left\langle e^{rz}, e^{z} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(z)^j}{j!} \right\rangle = \left[S_r^{(s)}(n+r,k+r)\right]_{n,k\geq 0}. \tag{4.13}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} W^{2,r,s} &= \left\langle e^{(r-rm)z}, z\right\rangle \left\{ \langle 1, mz\rangle \left\langle e^{rz}, e^{z} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(z)^j}{j!} \right\rangle \langle 1, mz\rangle^{-1} \right\} \\ &= \left[(r-rm)^{n-k}\binom{n}{k}\right]_{n,k\geq 0} \left[m^{n-k} S_r^{(s)}(n+r,k+r)\right]_{n,k\geq 0}, \end{aligned}$$

ainsi le résultat est obtenu en utilisant (4.13). □

Théorème 4.13. *Les nombres r-Whitney s-associés de seconde espèce sont liés aux nombres de Stirling s-associés de seconde espèce par les relations suivantes :*

$$W_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=0}^{n} r^{n-i}\binom{n}{i} m^{i-k} S^{(s)}(i,k). \tag{4.14}$$

Preuve Pour l'identité (4.14), on a

$$W^{2,r,s} = \langle e^{rz}, z\rangle \left\langle 1, \frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{(s-1)} (mz)^j/j!}{m} \right\rangle,$$

donc $\left[W_{m,r}^{(s)}(n,k)\right]_{n,k\geq 0} = \left[r^{n-k}\binom{n}{k}\right]_{n,k\geq 0} \left[m^{n-k} S^{(s)}(n,k)\right]_{n,k\geq 0}$.

Pour $m = 1$, on retrouve l'identité suivante qui lient les nombres r-Stirling s-associés aux nombres de Stirling s-associés.

$$S_r^{(s)}(n+r,k+r) = \sum_{i=0}^{n} r^{n-i}\binom{n}{i} S^{(s)}(i,k). \tag{4.15}$$

Théorème 4.14. *Les nombres $W_{m,r}^{(s)}(n,k)$ satisfont les identités suivantes :*

$$W_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (r-t)^{n-i} W_{m,t}^{(s)}(i,k),\ r \geq t, \tag{4.16}$$

$$W_{m,r}^{(s)}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} W_{m,r-1}^{(s)}(i,k),\ r \geq 1. \tag{4.17}$$

Preuve Pour l'identité (4.16)

$$W^{2,r,s} = \left\langle e^{(r-t)z}, z\right\rangle \left\langle e^{tz}, \frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{z^j}{j!}}{m} \right\rangle.$$

Pour l'identité (4.17) on utilise l'identité (4.16) pour $t = r - 1$. □

4.2 Polynômes r-Dowling s-associés

Dans cette section, on étend quelques résultats pour les polynômes r-Dowling s-associés.

Définition 4.2. Les polynômes r-Dowling s-associés $D_{m,r}^{(s)}(n,x)$ sont définis par

$$D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}^{(s)}(n,k)x^k. \tag{4.18}$$

Le nombre r-Dowling s-associé est donné par :

$$D_{m,r}^{(s)}(n) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}^{(s)}(n,k). \tag{4.19}$$

Pour $r = 1$ (resp. $s = 1$), on retrouve le polynôme de Dowling s-associés $D_m^{(s)}(n,x)$, (resp. le polynôme r-Dowling $D_{m,r}(n,x)$).

Pour $m = 1$, on obtient le polynôme r-Bell s-associé, $B_r^{(s)}(x)$, (voir [6]). On retrouve le polynôme de Bell s-associé, $B^{(s)}(x)$ pour $m = 1$ et $r = 1$.

4.2.1 Fonctions génératrices

Théorème 4.15. *La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes r-Dowling s-associés est donnée par :*

$$\sum_{n\geq 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} = e^{rz}\exp\left\{x\left(\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right)\right\}. \tag{4.20}$$

Preuve En appliquant (4.18) et (4.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} W_{m,r}^{(s)}(n,k)x^k\right)\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{n\geq 0} W_{m,r}^{(s)}(n,k)\frac{z^n}{n!}\right)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right)^k x^k \\
&= e^{rz}\sum_{k=0}^{n}\left(x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right)^k /k!,
\end{aligned}$$

donc le résultat est obtenu. $\square$

4.2.2 Relations de récurrence et expressions explicites

L'identité suivante nous permet de calculer les polynômes r-Dowling s-associés grâce aux polynômes r-Dowling s-associés précédents.

Théorème 4.16. *Les polynômes r-Dowling s-associés satisfont la formule de récurrence*

$$\begin{aligned} D_{m,r}^{(s)}(n+1,x) &= rD_{m,r}^{(s)}(n,x) + x\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}m^i D_{m,r}^{(s)}(n-i,x) \\ &- x\sum_{i=0}^{\min(s-2,n)} m^i\binom{n}{i}D_{m,r}^{(s)}(n-i,x), \end{aligned} \tag{4.21}$$

qui peut être écrite aussi

$$D_{m,r}^{(s)}(n+1,x) - rD_{m,r}^{(s)}(n,x) = x\sum_{i=0}^{n} m^i\binom{n}{i}D_{m,r}^{(s)}(n-i,x)(1-[i\le s-2]). \tag{4.22}$$

Preuve De la relation (4.20), on a

$$\begin{aligned} &\sum_{n\ge 0} D_{m,r}^{(s)}(n+1,x)\frac{z^n}{n!} \\ =\ & \frac{d}{dz}\sum_{n\ge 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} \\ =\ & \left(r + x\frac{me^{mz} - m\sum_{j=0}^{s-2}(mz)^j/j!}{m}\right)\exp\left\{rz + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right\} \\ =\ & r\sum_{n\ge 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} + xe^{mz}\sum_{n\ge 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} \\ -\ & x\sum_{j=0}^{s-2}\frac{(mz)^j}{j!}\sum_{n\ge 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} \\ =\ & \sum_{n\ge 0}\left(rD_{m,r}^{(s)}(n,x) + x\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}m^i D_{m,r}^{(s)}(n-i,x)\right)\frac{z^n}{n!} \\ -\ & \sum_{n\ge 0} x\sum_{i=0}^{\min(s-2,n)} m^i\binom{n}{i}D_{m,r}^{(s)}(n-i,x)\frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $z^n/n!$, on obtient le résultat.

La relation de récurrence suivante est satisfaite

Théorème 4.17.

$$D_{m,r}^{(s)}(n+1,x) = rD_{m,r}^{(s)}(n,x) + xD_{m,r+m}^{(s)}(n,x) - x\sum_{i=0}^{\min(s-2,n)}\binom{n}{i}m^i D_{m,r}^{(s)}(n-i,x).$$

Preuve De la relation (4.20), on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r}(n+1,x)\frac{z^n}{n!}\\
=\ & \frac{d}{dz}\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!}\\
=\ & \left(r + x\frac{me^{mz} - m\sum_{j=0}^{s-2}(mz)^j/j!}{m}\right)\exp\left\{rz + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right\}\\
=\ & r\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!} + x\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r+m}(n,x)\frac{z^n}{n!} - x\sum_{j=0}^{s-2}\frac{(mz)^j}{j!}\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!}\\
=\ & \sum_{n\geq 0}\left(rD^{(s)}_{m,r}(n,x) + xD^{(s)}_{m,r+m}(n,x)\right)\frac{z^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} x \sum_{i=0}^{\min(s-2,n)} m^i\binom{n}{i},D^{(s)}_{m,r}(n-i,x)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $z^n/n!$, on obtient le résultat.

Théorème 4.18. *Les polynômes r-Dowling s-associés vérifient la relation de récurrence*

$$\begin{aligned}
D^{(s)}_{m,r}(n,x) &= rD^{(s)}_{m,r}(n-1,x) + x\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(m-1)^i D^{(s)}_{m,r+1}(n-i-1,x)\\
&- x\sum_{i=0}^{\min(s-2,n-1)}\binom{n-1}{i} m^i D^{(s)}_{m,r}(n-i-1,x).
\end{aligned}$$

Preuve En utilisant (4.20), on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r}(n+1,x)\frac{z^n}{n!}\\
=\ & \frac{d}{dz}\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!}\\
=\ & \left(r + x\frac{me^{mz} - m\sum_{j=0}^{s-2}(mz)^j/j!}{m}\right)\exp\left\{rz + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right\}\\
=\ & r\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!} + xe^{(m-1)z}\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r+1}(n,x)\frac{z^n}{n!} - x\sum_{j=0}^{s-2}(mz)^j/j!\sum_{n\geq 0} D^{(s)}_{m,r}(n,x)\frac{z^n}{n!}\\
=\ & \sum_{n\geq 0}\left(rD^{(s)}_{m,r}(n,x) + x\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(m-1)^i D^{(s)}_{m,r+1}(n-i,x)\right)\frac{z^n}{n!}\\
-\ & \sum_{n\geq 0} x \sum_{i=0}^{\min(s-2,n)}\binom{n}{i} m^i D^{(s)}_{m,r}(n-i,x)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Théorème 4.19. *Les polynômes r-Dowling s-associés sont écrits en termes des polynômes de Dowling s-associés et vice versa.*

$$D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (r-1)^{n-i} D_m^{(s)}(i,x), \tag{4.23}$$

$$D_m^{(s)}(n,x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (r-1)^{n-i} D_{m,r}^{(s)}(i,x). \tag{4.24}$$

Preuve On utilise (4.20) pour l'identité (4.23), on a ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} &= e^{(r-1)z}\exp\left\{z + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right\} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i+j=n}\frac{(r-1)^j}{j!}\frac{D_m^{(s)}(i,x)}{i!}\right) z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(r-1)^{n-i}D_m^{(s)}(i,x)\right)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Pour l'identité (4.19), on utilise la transformée binomiale pour $a_n = \frac{D_{m,r}^{(s)}(n,x)}{(r-1)^n}$ et $b_n = \frac{D_m^{(s)}(n,x)}{(r-1)^n}$. $\square$

Théorème 4.20. *Les polynômes r-Dowling s-associés sont liés aux polynômess* $(r+1)$*-Dowling s-associés*

$$D_{m,r+1}^{(s)}(n,x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{m,r}^{(s)}(i,x), \tag{4.25}$$

$$D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} D_{m,r+1}^{(s)}(i,x). \tag{4.26}$$

Preuve Pour l'identité (4.25), on utilise (4.20), on obtient ainsi

$$e^z \sum_{n\geq 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} = \exp\left\{(r+1)z + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right\}.$$

Pour l'identité (4.26), on utilise la transformée binomiale. $\square$

Théorème 4.21. *Les polynômes r-Dowling s-associés vérifient*

$$D_{m,r+p}^{(s)}(n,x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i D_{m,r}^{(s)}(n-i,x), \tag{4.27}$$

et

$$D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-p)^i D_{m,r+p}^{(s)}(n-i,x). \tag{4.28}$$

Preuve Pour l'identité (4.27), on utilise (4.20), on obtient

$$e^{pz} \sum_{n\geq 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x) \frac{z^n}{n!} = \exp\left\{(r+p)z + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right\}.$$

Pour l'identité (4.28), on utilise la transformée binomiale. □

Théorème 4.22. *Les polynômes r-Dowling s-associés sont écrits en termes des polynômes r-Dowling (s − 1)-associés et vice versa*

$$D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{s-1} \rfloor} \binom{n}{(s-1)i} \frac{((s-1)i)!(-x)^i m^{(s-2)i}}{i!((s-1)!)^i} D_{m,r}^{(s-1)}(n-(s-1)i,x) \tag{4.29}$$

$$D_{m,r}^{(s-1)}(n,x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{s-1} \rfloor} \binom{n}{(s-1)i} \frac{((s-1)i)! x^i m^{(s-2)i}}{i!((s-1)!)^i} D_{m,r}^{(s)}(n-(s-1)i,x) \tag{4.30}$$

Preuve Pour l'identité (4.29), en utilisant (4.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} &= \exp\left\{rz + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-2}(mz)^j/j!}{m}\right\} e^{-\frac{x}{m}\frac{(mz)^{s-1}}{(s-1)!}} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{(s-1)i+j=n} \frac{D_{m,r}^{(s-1)}(j,x)}{j!} \frac{(-x)^i m^{(s-2)i}}{i!((s-1)!)^i}\right) z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{s-1} \rfloor} \frac{D_{m,r}^{(s-1)}(n-(s-1)i,x)}{(n-(s-1)i)!} \frac{(-x)^i m^{(s-2)i}}{i!((s-1)!)^i}\right) z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{s-1} \rfloor} \binom{n}{(s-1)i} \frac{((s-1)i)!(-x)^i m^{(s-2)i}}{i!((s-1)!)^i} D_{m,r}^{(s-1)}(n-(s-1)i,x)\right)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

.

Pour l'identité (4.30), nous utilisons (4.20), ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} D_{m,r}^{(s-1)}(n,x)\frac{z^n}{n!} &= \exp\left\{rz + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}(mz)^j/j!}{m}\right\} e^{\frac{x}{m}\frac{(mz)^{s-1}}{(s-1)!}} \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{(s-1)i+j=n} \frac{D_{m,r}^{(s)}(j,x)}{j!} \frac{x^i m^{(s-2)i}}{i!((s-1)!)^i}\right) z^n
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{s-1}\rfloor} \frac{D_{m,r}^{(s)}(n-(s-1)i,x)}{(n-(s-1)i)!}\frac{x^i m^{(s-2)i}}{i!((s-1)!)^i}\right) z^n$$
$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{s-1}\rfloor} \binom{n}{(s-1)i}\frac{((s-1)i)!x^i m^{(s-2)i}}{i!((s-1)!)^i} D_{m,r}^{(s)}(n-(s-1)i,x)\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Corollaire 4.23. *On a la relation de récurrence pour les polynômes r-Dowling s-associés*

$$D_{m,r}^{(s)}(n+1,x) = rD_{m,r}^{(s)}(n,x)+xm^{s-1}\binom{n}{s-1}D_{m,r}^{(s)}(n-(s-1),x)+mx\frac{d}{dx}D_{m,r}^{(s)}(n,x). \quad (4.31)$$

Preuve En utilisant (4.3), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n+1} W_{m,r}^{(s)}(n+1,k)x^k = \sum_{k=0}^{n+1}(mk+r)W_{m,r}^{(s)}(n,k)x^k+m^{s-1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{s-1}W_{m,r}^{(s)}(n-(s-1),k-1)x^k,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} W_{m,r}^{(s)}(n+1,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} rW_{m,r}^{(s)}(n,k)x^k + xm^{s-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{s-1}W_{m,r}^{(s)}(n-(s-1),k)x^k$$
$$+mx\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} W_{m,r}^{(s)}(n,k)x^k,$$

le résultat est obtenu en utilisant (4.18). □

Corollaire 4.24. *Pour r fixé, on a*

$$D_{m,r}^{(s)}(n,0) = r^n,$$

et la dérivée d'un polynôme r-Dowling s-associé est donnée par

$$\frac{d}{dx}D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \frac{D_{m,r}^{(s)}(n+1,x)}{mx} - \frac{rD_{m,r}^{(s)}(n,x)}{mx} - m^{s-2}\binom{n}{s-1}D_{m,r}^{(s)}(n-(s-1),x).$$

Proposition 4.25. *On a*

$$D_{m,mr+1}^{(s)}(n,x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^k B_{k,r}^{(s)}(\frac{x}{m}), \quad (4.32)$$

$$m^n B_{n,r}^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}D_{m,mr+1}^{(s)}(k,x). \quad (4.33)$$

Preuve Soit $(a_n^0)_{n\geq 0} = \left(m^n B_{n,r}^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n\geq 0}$ la suite initiale de la matrice d'Euler-Seidel.

D'après la proposition 1.2 on a

$$\begin{aligned}
\overline{A}(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} \\
&= e^t A(t,x) \\
&= e^t e^{mrt+\frac{x}{m}\left(e^{mt}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mt)^j}{j!}\right)} \\
&= \exp\left((mr+1)t + x\frac{e^{mt}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mt)^j}{j!}}{m}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,mr+1}^{(s)}(n,x)\frac{t^n}{n!}. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

En appliquant les deux équations (1.24) et (1.25) avec l'équation (4.34), on obtient (4.32) et (4.33). □

Théorème 4.26. *Le polymôme r-Dowling s-associé est relié au polynôme de Bell s-associé par les relations suivantes :*

$$D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{n-k} m^k B_k^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right), \qquad (4.35)$$

$$m^n B_n^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} r^{n-k} D_{m,r}^{(s)}(k,x). \qquad (4.36)$$

Preuve On prend $(a_n^0)_{n\geq 0} = \left(\left(\frac{m}{r}\right)^n B_n^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n\geq 0}$. D'après la proposition 1.2 on a

$$\begin{aligned}
\overline{A}(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} \\
&= e^t A(t,x) \\
&= e^t e^{\frac{x}{m}\left(e^{\frac{m}{r}t}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mt)^j}{r^j j!}\right)} \\
&= \exp\left(t + x\frac{e^{\frac{m}{r}}t-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mt)^j}{r^j j!}}{m}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,r}^{(s)}(n,x)}{r^n}\frac{t^n}{n!}. \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

En appliquant les deux équations (1.24) et (1.25) avec l'équation (4.37), on obtient (4.35) et (4.36). □

Théorème 4.27. *Le polynôme r-Dowling s-associé est lié au polynôme r-Bell s-associé et vice versa*

$$D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k (r-mr)^{n-k} B_{k,r}^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right), \tag{4.38}$$

$$\sum_{k=0}^{n} m^n B_{n,r}^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(r-mr)^{n-k} D_{m,r}^{(s)}(k,x). \tag{4.39}$$

Preuve On prend $(a_n^0)_{n\geq 0} = \left(\left(\frac{m}{r-mr}\right)^n B_{n,r}^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n\geq 0}$ et en appliquant la proposition 1.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{A}(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} \\
&= e^t A(t,x) \\
&= e^t \exp\left(r\frac{mt}{r-mr} + x\frac{e^{\frac{mt}{r-mr}} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(mt)^j}{(r-rm)^j j!}}{m} \right) \\
&= \exp\left(r\frac{t}{r-mr} + x\frac{e^{m\frac{t}{r-mr}} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(mt)^j}{(r-rm)^j j!}}{m} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,r}^{(s)}(n,x)}{(r-mr)^n} \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Donc $a_0^n = \frac{D_{m,r}^{(s)}(n,x)}{(r-mr)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{m}{r-mr}\right)^k B_{k,r}^{(s)}\left(\frac{x}{m}\right)$, ainsi le résultat (4.38) est obtenu. En appliquant aussi (1.25) et (4.40) on obtient (4.39). $\square$

Le polynôme de Dowling s-associé est écrit en terme de polynôme l-Dowling s-associé.

Théorème 4.28. *On a*

$$D_{m,r}^{(s)}(n,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (r-l)^{n-k} D_{m,l}^{(s)}(k,x). \tag{4.41}$$

Preuve En appliquant la proposition 1.2 en prenant $(a_n^0)_{n\geq 0} = \left(\frac{D_{m,l}^{(s)}(n,x)}{(r-l)^n}\right)_{n\geq 0}$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{A}(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} \\
&= e^t A(t,x) \\
&= e^t \exp\left(l\frac{t}{r-l} + x\frac{e^{m\frac{t}{r-l}} - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(mt)^j}{(r-l)^j j!}}{m} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(r\frac{t}{r-l} + x\frac{e^{m\frac{t}{r-l}} - \sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{(r-l)^j j!}}{m} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{m,r}^{(s)}(n,x)}{(r-l)^n}\frac{t^n}{n!}. \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

D'après les relations (1.24) et (4.42), le résultat est obtenu. □

Théorème 4.29. *Soient r et p des entiers, alors*

$$D_{m,mp+r}^{(s)}(n,x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (mp)^{n-i} D_{m,r}^{(s)}(i,x). \qquad (4.43)$$

Preuve En utilisant (4.20), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} D_{m,mp+r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} &= \exp\left((mp+r)\,z + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m} \right) \\
&= e^{(mp)z}\exp\left(rz + x\frac{e^{mz} - \sum_{j=0}^{s-1}\frac{(mz)^j}{j!}}{m} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(mpz)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} D_{m,r}^{(s)}(n,x)\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{(mp)^j}{j!}\frac{D_{m,r}^{(s)}(i,x)}{i!} \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (mp)^{n-i} D_{m,r}^{(s)}(i,x) \right) \frac{z^n}{n!},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Chapitre 5

Formes explicites pour le polynôme de Frobenius-Euler généralisé d'ordre supérieur

5.1 Introduction

Nous proposons des formes explicites pour les polynômes de Frobenius-Euler généralisés d'ordre α en termes de nombres de Whitney généralisés de seconde espèce et en termes des nombres de Whitney translatés généralisés de seconde espèce.

Définition 5.1. Soit α un nombre réel, les polynômes de Bernoulli généralisés $\beta_n^{(m)}(x,\alpha)$ et les polynômes d'Euler généralisés $E_n^{(m)}(x,\alpha)$ de paramètre m sont donnés respectivement par les fonctions génératrices suivantes, pour $|z| < 2\pi/m$

$$\left(\frac{z}{e^{mz}-1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(m)}(x,\alpha)\frac{z^n}{n!}, \tag{5.1}$$

et

$$\left(\frac{2}{e^{mz}+1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)}(x,\alpha)\frac{z^n}{n!}. \tag{5.2}$$

Pour $m = 1$, on retrouve le polynôme de Bernoulli généralisé $\beta_n(x,\alpha)$ et le polynôme d'Euler généralisé $E_n(x,\alpha)$, voir par exemple [93, 69].

Pour $x = 0$, on obtient le nombre de Bernoulli généralisés $\beta_n^{(m)}(\alpha)$ et le nombres d'Euler généralisé $E_n^{(m)}(\alpha)$.

Définition 5.2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \neq 1$, les polynômes de Frobenius-Euler généralisés $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$, $n \geq 0$, d'ordre α, $\alpha \in \mathbb{R}$, sont définis par la fonction génératrice, pour $|z| < 2\pi/m$

$$\left(\frac{1-\lambda}{e^{mz}-\lambda}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)\frac{z^n}{n!}. \tag{5.3}$$

Pour $x = 0$, on retrouve le nombre de Frobenius-Euler généralisé d'ordre α, $H_n^{(m)}(0,\alpha|\lambda) = H_n^{(m)}(\alpha|\lambda)$.

On a la relation suivante

$$H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_n^{(m)}(\alpha|\lambda)x^{n-k}.$$

Pour $m = 1$, on retrouve le polynôme de Frobenius-Euler $H_n(x,\alpha|\lambda)$, d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, voir [93] et les références qui y figurent.
Pour $\lambda = -1$, on a

$$E_n^{(m)}(x,\alpha) = H_n^{(m)}(x,\alpha|-1).$$

Dans le cas particulier $\alpha = m = 1$, on a le polynôme de Frobenius-Euler donné par $H_n^{(1)}(x,1|\lambda) = H_n(x,\lambda)$. Pour plus d'informations nous nous référons à [37, 69, 70].

Srivastava et *al*. [93] ont introduit le polynôme de Stirling généralisé de seconde espèce par,

$$S_n^k(x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n, \tag{5.4}$$

On introduit les polynômes de Whitney généralisés $W_{m,n}^k(x)$ et les nombres de Whitney généralisés $W_{m,n}^k$ de seconde espèce par :

$$W_{m,n}^k(x) = \frac{1}{k!m^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(mj+x+1)^n, \tag{5.5}$$

$$W_{m,n}^k = W_{m,n}^k(0).$$

La fonction génératrice correspondante est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,n}^{k}(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!m^k}e^{(x+1)z}(e^{mz}-1)^k, \tag{5.6}$$

Les polynômes de Whitney généralisés de seconde espèce satisfont la relation de récurrence suivante

$$W_{m,n+1}^{k}(x) = W_{m,n}^{(k-1)}(x) + (x+mk+1)W_{m,n}^{k}(x) \qquad (1 \leq k \leq n). \tag{5.7}$$

En conséquence, de l'identité (5.6), on peut déduire les résultats suivants,

$$W_{m,n}^{k}(x) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}W_m(j,k)x^{n-j} \ , \tag{5.8}$$

$$W_{m,n}^{k}(0) = W_m(n,k) \ , \tag{5.9}$$

$$W_{m,n}^{k}(r-1) = W_{m,r}(n,k) \ , \tag{5.10}$$

$$W_{m,n}^{k}(mr-1) = m^{n-k}S_r(n+r,k+r), \tag{5.11}$$

et

$$W_{m,n}^{k}(x) = m^{n-k}S_n^k\left(\frac{x+1}{m}\right). \tag{5.12}$$

5.1.1 Les premières valeurs des polynômes de Whitney généralisés de seconde espèce.

n	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
0	1					
1	$x+1$	1				
2	$(x+1)^2$	$2x+3$	1			
3	$(x+1)^3$	$3x^2+9x+7$	$3x+6$	1		
4	$(x+1)^4$	$4x^3+18x^2+28x+15$	$6x^2+24x+25$	$4x+10$	1	
5	$(x+1)^5$	$5x^4+30x^3+70x^2+75x+13$	$10x^3+60x^2+125x+90$	$10x^2+50x+65$	$5x+15$	1

TABLE 5.1 – Les premières valeurs des polynômes de Whitney généralisés pour $m=1$

n	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
0	1					
1	$x+1$	1				
2	$(x+1)^2$	$2x+4$	1			
3	$(x+1)^3$	$3x^2+12x+13$	$3x+9$	1		
4	$(x+1)^4$	$4x^3+24x^2+52x+40$	$6x^2+36x+58$	$4x+16$	1	
5	$(x+1)^5$	$5x^4+40x^3+130x^2+200x+121$	$10x^3+90x^2+290x+330$	$10x^2+80x+170$	$5x+25$	1

TABLE 5.2 – Les premières valeurs des polynômes de Whitney généralisés pour $m=2$

n	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
0	1					
1	$x+1$	1				
2	$(x+1)^2$	$2x+5$	1			
3	$(x+1)^3$	$3x^2+15x+21$	$3x+12$	1		
4	$(x+1)^4$	$4x^3+30x^2+84x+85$	$6x^2+48x+105$	$4x+22$	1	
5	$(x+1)^5$	$5x^4+50x^3+210x^2+425x+341$	$10x^3+120x^2+525x+820$	$10x^2+110x+325$	$5x+35$	1

TABLE 5.3 – Les premières valeurs des polynômes de Whitney généralisés pour $m=3$

5.2 Formule explicite pour le polynôme de Bernoulli généralisé de paramètre m

On commence par établir une formule explicite pour le polynôme de Bernoulli généralisé de paramètre m en termes de polynômes de Whitney généralisés $W^k_{m,n}(x)$ de seconde espèce.

Théorème 5.1. *On a l'identité suivante*

$$\beta_n^{(m)}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} m^k W^k_{m,n+k}(x-1). \tag{5.13}$$

Preuve On procède comme dans la preuve de la formule explicite de Srivastava and Todorov [95],

$$\begin{aligned}&\beta_n^{(m)}(x,\alpha)\\ = &\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{n}{p+k} \frac{(p+k)!}{(p+2k)}(x-1)^{n-k-p} k! m^k W^k_{m,p+2k} \sum_{l=0}^{p} \binom{\alpha+k+l-1}{l}.\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{l=0}^{n-k} \binom{\alpha+k+l-1}{l} = \binom{n+\alpha}{n-k},$$

on obtient

$$\beta_n^{(m)}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\binom{\alpha+k-1}{k}\binom{n+\alpha}{n-k}}{\binom{n+k}{k}} m^k \sum_{j=0}^{n+k} \binom{n+k}{j}(x-1)^{n+k-j} W^k_{m,j},$$

en utilisant (5.8), le résultat (5.13) est obtenu. □

En utilisant (5.12), pour $m = 1$ on obtient, voir [30],

$$\beta_n^{(1)}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} S^k_{n+k}(x),$$

Posons $\alpha = -k$ (k un entier) dans (5.13) et utilisons (5.12) on a

$$\beta_n^{(m)}(x, -k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^j \binom{n+j}{j}^{-1} \binom{n-k}{j-k} \binom{-k+j-1}{j} m^n S_{n+j}^{j}(\frac{x}{m}).$$

Pour $x = r$ dans (5.13), on obtient

$$\beta_n^{(m)}(r,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} m^k W_{m,r}(n+k,k). \tag{5.14}$$

En posant $x = r$ et $\alpha = 1$ dans le théorème 5.1, on obtient

$$\begin{aligned} \beta_n^{(m)}(r,1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{n+1}{k+1} m^k W_{m,r}(n+k,k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{2n}{n-k}}{(k+1)C_n} m^k W_{m,r}(n+k,k) \\ &= \frac{1}{C_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{2n}{n-k} m^k W_{m,r}(n+k,k). \end{aligned}$$

Pour $m = 1$, on obtient le résultat obtenu dans [30, Remark 2.5].

Posons $x = \alpha$ dans la fonction génératrice (5.1), on a la fonction génératrice

$$\left(\frac{z}{e^{(m-1)z} - e^{-z}}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(m)}(\alpha,\alpha) \frac{z^n}{n!},$$

et la formule explicite correspondante est donnée par

$$\beta_n^{(m)}(\alpha,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} m^k W_{m,n+k}^{k}(\alpha - 1).$$

Pour $m = 2$, on a le résultat suivant

Théorème 5.2. *On a l'identité suivante*

$$\left(\frac{z/2}{\sinh\ z}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(2)}(\alpha,\alpha) \frac{z^n}{n!}.$$

Pour $\alpha = 1$, on génère le coefficient du nombre de cosécante hyperbolique en termes du nombre de Bernoulli généralisé.

Corollaire 5.3. *On a l'identité suivante*

$$z \operatorname{csc} h\ z = \sum_{n=0}^{\infty} 2\beta_n^{(2)}(1,1) \frac{z^n}{n!}.$$

5.3 Formule explicite pour le polynôme d'Euler généralisé

On donne une formule explicite pour les polynômes d'Euler généralisés en termes de polynômes de Whitney généralisés de seconde espèce.

Théorème 5.4. *On a la relation suivante :*

$$E_n^{(m)}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k \, m^k W_{m,n}^k(x-1). \tag{5.15}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k \, m^k W_{m,n}^k(x)\right)\frac{z^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k \, m^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,n}^k(x)\frac{z^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k \, m^k e^{(x+1)z} \frac{(e^{mz}-1)^k}{m^k k!} \\
&= e^{(x+1)z} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k}\left(\frac{1-e^{mz}}{2}\right)^k \\
&= e^{(x+1)z}\left(1-\frac{1-e^{mz}}{2}\right)^{-\alpha} \\
&= \left(\frac{2}{e^{mz}+1}\right)^{\alpha} e^{(x+1)z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)}(x+1,\alpha)\frac{z^n}{n!},
\end{aligned}$$

on termine la preuve par identification. □

En utilisant l'identité (5.12), on a la formule explicite

$$E_n^{(m)}(x,\alpha) = m^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k \, S_n^k(\frac{x}{m}).$$

En particulier, pour $m = 1$, on a la relation (3.3) donnée dans [30], et en posant $x = r$ pour m fixé dans (5.15), on obtient

$$E_n^{(m)}(r,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k \, m^k W_{m,r}(n,k). \tag{5.16}$$

Pour $m = 1$ dans (5.16), on a

$$E_n(r,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle\alpha\rangle_k S_r(n+r,k+r).$$

Pour $x = \alpha$ dans la fonction génératrice (5.2), on a la fonction génératrice

$$\left(\frac{2}{e^{(m-1)z} + e^{-z}}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)}(\alpha,\alpha) \frac{z^n}{n!}.$$

et donnée explicitement par

$$E_n^{(m)}(\alpha,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle\alpha\rangle_k m^k W_{m,n}^k(\alpha-1).$$

Pour $m = 2$, on obtient l'identité suivante

$$\left(\frac{1}{\cosh\ z}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(2)}(\alpha,\alpha) \frac{z^n}{n!}.$$

Pour $\alpha = 1$, on génère le coefficient du nombre de sécante hyperbolique en termes des nombres d'Euler généralisés.

Corollaire 5.5. *On a l'identité suivante*

$$sech\ z = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(2)}(1,1) \frac{z^n}{n!}.$$

5.4 Formule explicite pour le polynôme de Frobenius-Euler généralisé

On traite maintenant les polynômes de Frobenius-Euler généralisés $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$ d'ordre α dans $\mathbb{C}$ avec $\lambda \neq 1$ que nous exprimons en termes de Polynômes de Whitney généralisés de seconde espèce.

Théorème 5.6. *On a l'identité suivante*

$$H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k W_{m,n}^k(x-1). \tag{5.17}$$

Preuve De (5.6), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^kW_{m,n}^k(x)\right)\frac{z^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^k\left(\sum_{n=k}^{\infty}W_{m,n}^k(x)\frac{z^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^ke^{(x+1)z}\frac{(e^{mz}-1)^k}{m^kk!}\\
&= e^{(x+1)z}\sum_{k=0}^{\infty}\langle\alpha\rangle_k\frac{1}{k!}\left(\frac{e^{mz}-1}{\lambda-1}\right)^k.\\
&= e^{(x+1)z}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}\left(\frac{e^{mz}-1}{\lambda-1}\right)^k\\
&= e^{(x+1)z}\left(1-\frac{e^{mz}-1}{\lambda-1}\right)^{-\alpha}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(m)}(x+1,\alpha|\lambda)\frac{z^n}{n!},
\end{aligned}$$

le résultat est obtenu par identification. □

Posons $m=1$, on a

$$H_n(x,\alpha|\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k}S_n^k(x),$$

ce qui donne [93, Eq. (7)].

Pour $x=1$ et $\alpha=s$ (s un entier positif) dans (5.17) donne

$$H_n^{(m)}(1,s|\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle s\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^kW_m(n,k).$$

En remplaçant $\alpha=1$ dans (5.17), on a

$$H_n^{(m)}(x,1|\lambda)=H_n^{(m)}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{(\lambda-1)^k}m^kW_{m,n}^k(x-1).$$

Pour $x=r$ in (5.17), on a

$$H_n^{(m)}(r,\alpha|\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^kW_{m,r}(n,k).$$

En particulier, pour $m = 1$ on a

$$H_n(r,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k} S_r(n+r,k+r),$$

qui est donné dans [93, Remark 3].

Posons $\lambda = -1$, on obtient la formule (5.15) pour le polynôme d'Euler généralisé $E_n^{(m)}(x,\alpha)$,

En particulier, pour $m = 1$, on a

$$E_n(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle\alpha\rangle_k S_n^k(x).$$

qui est donné dans [30, Eq. 3.3].

Posons $x = \alpha$ dans la fonction génératrice (5.3), on a

$$\left(\frac{1-\lambda}{e^{(m-1)z} - \lambda e^{-z}}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(m)}(\alpha,\alpha|\lambda)\frac{z^n}{n!}.$$

qui donne la formule explicite

$$H_n^{(m)}(\alpha,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k W_{m,n}^k(\alpha-1).$$

De (5.17) et (5.5), on a, pour $m > 0$,

Proposition 5.7.

$$\begin{aligned}
H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (mj+x)^n \\
&= \sum_{\substack{0\le j\le k\le n \\ 0\le i\le n}} \frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k} \frac{(-1)^{k-j}}{k!} \binom{k}{j} \binom{n}{i} (mj)^{n-i} x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} m^{n-i} \left(\sum_{0\le j\le k\le n} \frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k} \frac{(-1)^{k-j}}{k!} \binom{k}{j} j^{n-i} \right) x^i.
\end{aligned}$$

Quelques valeurs de $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$ pour $m = 1$ selon (5.17) et (5.5)

$$H_n^{(1)}(x,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\alpha\rangle_k}{k!(\lambda-1)^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (j+x)^n.$$

.

$H_0^{(1)}(x,\alpha|\lambda) = 1,$
$H_1^{(1)}(x,\alpha|\lambda) = x + \frac{1}{\lambda-1}\alpha,$
$H_2^{(1)}(x,\alpha|\lambda) = x^2 + \frac{1}{\lambda-1}\left(2\alpha x + \frac{1}{\lambda-1}\alpha(\lambda+\alpha)\right),$
$H_3^{(1)}(x,\ \alpha|\lambda) = x^3 + \frac{1}{\lambda-1}\left(3\alpha x^2 + \frac{1}{\lambda-1}\left(3\alpha(\lambda+\alpha)x + 4\alpha(\lambda+3\alpha+2)\right) + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\right),$
$H_4^{(1)}(x,\alpha|\lambda) = x^4 + \frac{1}{\lambda-1}\left(4\alpha x^3 + \frac{1}{\lambda-1}6\alpha(\lambda+\alpha)x^2 + \frac{1}{(\lambda-1)^2}4\alpha(\lambda-1)\ (\lambda+3\alpha+2)\right)$
$\quad + \frac{1}{\lambda-1}\left(4\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)x + \alpha + 7\alpha(\alpha+1)(\lambda-1)^2\right)$
$\quad + \frac{1}{1-\lambda}\left(6\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\lambda-1) + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\right).$

Quelques valeurs de $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$ pour $m = 2$.

$$H_n^{(2)}(x|\lambda,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\alpha\rangle_k}{k!(\lambda-1)^k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (2j+x)^n.$$

$H_0^{(2)}(x,\alpha|\lambda) = 1,$
$H_1^{(2)}(x,\alpha|\lambda) = x + \frac{1}{\lambda-1}2\alpha,$
$H_2^{(2)}(x,\alpha|\lambda) = x^2 + \frac{1}{\lambda-1}\left(4\alpha x + \frac{1}{\lambda-1}4\alpha(\lambda+\alpha)\right),$
$H_3^{(2)}(x,\alpha|\lambda) = x^3 + \frac{1}{\lambda-1}\left(6\alpha x^2 + \frac{1}{\lambda-1}12\alpha(\lambda+\alpha)x\right)$
$\quad + \frac{1}{\lambda-1}\left(\frac{1}{(\lambda-1)^2}8\alpha(\lambda-1)^2 + 12\alpha(\alpha+1)(\lambda-1) + 8\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\right).$

5.5 Formule explicite pour le polynôme de Frobenius-Genocchi d'ordre supérieur

On donne une formule explicite pour le polynôme de Frobenius-Genocchi introduit par Yaşar et Őzarslan [100], par la fonction génératrice suivante :

$$\frac{(1-\lambda)\,z}{e^z-\lambda}e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x|\lambda)\frac{z^n}{n!}.$$

On définit la généralisation de polynôme de Frobenius-Genocchi par la fonction génératrice suivante

$$\left(\frac{(1-\lambda)\,z}{e^{mz}-\lambda}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)\frac{z^n}{n!}. \tag{5.18}$$

Pour $x = 0$, $G_n^{(m)}(0,\alpha|\lambda) = G_n^{(m)}(\alpha|\lambda)$, on obtient les nombres de Frobenius-Genocchi d'ordre α. Les polynômes de Genocchi généralisés $G_n^{(m)}(x,\alpha)$, donnés par $G_n^{(m)}(x,\alpha) =$

$G_n^{(m)}(x,\alpha|-1)$ sont définis par la fonction génératrice suivante

$$\left(\frac{2z}{e^{mz}+1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(x,\alpha)\frac{z^n}{n!}. \tag{5.19}$$

Posons $\alpha = m = 1$ dans (5.19), on obtient les polynômes de Genocchi $G_n(x) = G_n^{(1)}(x,1)$.

On a

$$G_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} G_n^{(m)}(\alpha|\lambda)x^{n-k}.$$

De (5.3), (5.18) et (5.17), on a le corollaire

Corollaire 5.8. *On a la formule explicite suivante*

$$\begin{aligned} G_n^{(m)}(x,l|\lambda) &= \frac{n!}{(n-l)!}H_{n-l}^{(m)}(x,l|\lambda) \\ &= \frac{n!}{(n-l)!}\sum_{k=0}^{n-l}\frac{\langle l\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^k W_{m,n-l}^k(x-1). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Posons $m = 1$, le corollaire 5.8 est réduit à [30, Eq. 12].

En remplaçant $x = 1$ dans (5.20), on obtient la formule explicite suivante en terme de nombres de Whitney de seconde espèce.

$$G_n^{(m)}(1,l|\lambda) = \frac{n!}{(n-l)!}\sum_{k=0}^{n-l}\frac{\langle l\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^k W_m(n-l,k).$$

Pour $x = r$, le corollaire 5.8 donne

$$G_n^{(m)}(r,l|\lambda) = \frac{n!}{(n-l)!}\sum_{k=0}^{n-\alpha}\frac{\langle l\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^k W_{m,r}(n-l,k).$$

Posons $\lambda = -1$ dans (5.20), la formule explicite pour les polynômes de Genocchi généralisés $G_n^{(m)}(x,l)$ d'ordre l est comme suit :

$$G_n^{(m)}(x,l) = \frac{n!}{(n-l)!}\sum_{k=0}^{n-l}\frac{(-1)^k}{2^k}\langle l\rangle_k\, m^k W_{m,n-l}^k(x-1).$$

En posant $x = \alpha$ dans la fonction génératrice (5.18), on a

$$\left(\frac{(1-\lambda)\,z}{e^{(m-1)z}-\lambda e^{-z}}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(\alpha,\alpha|\lambda)\frac{z^n}{n!},$$

qui donne la formule explicite

$$G_n^{(m)}(\alpha,\alpha|\lambda) = \frac{n!}{(n-\alpha)!}\sum_{k=0}^{n-\alpha}\frac{\langle\alpha\rangle_k}{(\lambda-1)^k}m^k W_{m,n-\alpha}^k(\alpha-1).$$

5.6 Qu'en est-il des nombres de Whitney translatés

Comme extension de [5], on introduit les polynômes de Whitney translatés généralisés de seconde espèce par :

$$\mathcal{W}_n^{k,m}(x) = \frac{1}{k!m^k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+mj)^n,$$

La fonction génératrice exponentielle de $\mathcal{W}_n^{k,m}(x)$ est donnée par

$$\sum_{n=k}^{\infty}\mathcal{W}_n^{k,m}(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!m^k}e^{xz}(e^{mz}-1)^k, \tag{5.21}$$

et les polynômes de Whitney translatés généralisés de seconde espèce $\mathcal{W}_n^{k,m}(x)$ satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\mathcal{W}_{n+1}^{k,m}(x) = \mathcal{W}_n^{k-1,m}(x) + (x+mk)\mathcal{W}_n^{k,m}(x),\ (1 \le k \le n).$$

De (5.21), on a

$$\mathcal{W}_n^{k,m}(x+1) = W_n^{k,m}(x) \qquad (1 \le k \le n).$$

Pour $m=1$, on obtient les nombres de Stirling généralisés de seconde espèce $S_n^k(x)$.
Pour $x=0$, on obtient les nombres de Whitney translatés de seconde espèce $\mathcal{W}^m(n,k)$, voir [5].
Pour $x=r$, on obtient les nombres r-Whitney translatés de seconde espèce $\mathcal{W}_r^m(n+r,k+r)$, voir aussi [5].
Cette partie est présentée sans preuve (elles sont similaires à celles des sections 5.1, 5.2).

5.6.1 Les polynômes de Bernoulli généralisés

Considérons les nombres de Whitney translatés généralisés de seconde espèce $\mathcal{W}_n^{k,m}(x)$, on déduit le résultat suivant concernant les polynômes de Bernoulli généralisés de paramètre m.

Théorème 5.9. *On a la relation suivante*

$$\beta_n^{(m)}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k-1}{k} m^k \mathcal{W}_{n+k}^{k,m}(x). \tag{5.22}$$

Posons $x = \alpha$ dans (5.22), on a ainsi

$$\beta_n^{(m)}(\alpha,\alpha) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k-1}{k} m^k \mathcal{W}_{n+k}^{k,m}(\alpha).$$

Pour $m = 1$, on obtient la formule explicite pour les polynômes de Bernoulli généralisés $\beta_n(x,\alpha)$ obtenus dans [30, Eq. 2.1].
Posons $x = 0$ dans le théorème 5.9, on obtient la formule explicite des nombres de Bernoulli généralisés $\beta_n^{(m)}(\alpha)$.

Pour $x = r$ et $\alpha = -k$ (k un entier) dans (5.22), on a

$$\beta_n^{(m)}(r,-k) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n+j}{j}^{-1}\binom{n-k}{j-k}\binom{-k+j-1}{j} \mathcal{W}_r^{m}(n+j,j).$$

En posant $x = r$ et $\alpha = 1$ dans (5.22), on a

$$\beta_n^{(m)}(r,1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1}\binom{n+1}{k+1} m^k \mathcal{W}_r^{m}(n+k,k).$$

5.6.2 Les polynômes d'Euler généralisés

Une formule explicite pour les polynômes d'Euler généralisés en termes de nombres de Whitney translatés est donnée par

Théorème 5.10. *On a la relation suivante*

$$E_n^{(m)}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle\alpha\rangle_k \, m^k \mathcal{W}_n^{k,m}(x). \tag{5.23}$$

En particulier, pour $m = 1$, on a la formule explicite donnée dans [30, Eq. (3.3)].

Pour $x = 0$, on a la formule explicite pour les nombres d'Euler généralisés

$$E_n^{(m)}(0,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k m^k \mathcal{W}^m(n,k).$$

En posant $x = r$ dans (5.23), on obtient

$$E_n^{(m)}(r,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k m^k \mathcal{W}_r^m(n+r,k+r).$$

Posons $x = \alpha$ dans (5.23), on a

$$E_n^{(m)}(\alpha,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k m^k \mathcal{W}_n^{k,m}(\alpha).$$

5.6.3 Les polynômes de Frobenius-Euler généralisés

Dans la section précédente, on a proposé une formule explicite pour les polynômes de Frobenius-Euler généralisés $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$: qu'en est-il des nombres de Frobenius-Euler $H_n^{(m)}(\alpha|\lambda)$? Alors mettons $\mathcal{W}_n^{k,m}(x)$ dans la formule (5.17), on obtient une formule explicite pour les polynômes de Frobenius-Euler $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$ en termes des polynômes de Whitney translatés généralisés.

Une formule explicite pour les polynômes de Frobenius-Euler généralisés $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$, est donnée par le théorème suivant.

Théorème 5.11. *On a*

$$H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \alpha \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}_n^{k,m}(x). \tag{5.24}$$

Pour $x = \alpha$, on a

$$H_n^{(m)}(\alpha,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \alpha \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}_n^{k,m}(\alpha).$$

Pour $m = 1$, on obtient

$$H_n^{(1)}(x,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \alpha \rangle_k}{(\lambda-1)^k} S_n^k(x),$$

qui est donnée par Boutiche et al. [93, Eq. (7)].

En posant $x = 0$ et $\alpha = s$ (s un entier positif) dans (5.24), on a la formule explicite pour les nombres de Frobenius-Euler généralisés $H_n^{(m)}(s|\lambda)$,

$$H_n^{(m)}(s|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle s \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}^m(n,k).$$

En remplaçant $\alpha = 1$ dans (5.24), on a

$$H_n^{(m)}(x,1|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}_n^{k,m}(x).$$

Pour $x = r$ dans (5.24), on a

$$H_n^{(m)}(r,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \alpha \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}_r^m(n+r,k+r).$$

En particulier, pour $m = 1$, on a

$$H_n^{(1)}(r,\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \alpha \rangle_k}{(\lambda-1)^k} \mathcal{S}_r(n+r,k+r),$$

qui est dans [93, Remark 3].

Posons $\lambda = -1$, la formule explicite pour les polynômes d'Euler généralisés $E_n^{(m)}(x,\alpha)$ satisfait

$$E_n^{(m)}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k m^k \mathcal{W}_n^{k,m}(x).$$

En particulier, pour $m = 1$, on obtient la formule explicite suivante pour les polynômes d'Euler généralisés.

$$E_n^{(1)}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle \alpha \rangle_k S_n^k(x),$$

qui est donné par Boutiche et al. [30, Eq. (3.3)].

Corollaire 5.12. *On a la formule explicite suivante pour les polynômes de Frobenius-Genocchi généralisés d'ordre l,*

$$\begin{aligned} G_n^{(m)}(x,l|\lambda) &= \frac{n!}{(n-l)!} H_{n-l}^{(m)}(x,l|\lambda) \\ &= \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{\langle l \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}_{n-l}^{k,m}(x). \end{aligned} \tag{5.25}$$

En posant $x = l$ dans (5.25), on a

$$G_n^{(m)}(l,l|\lambda) = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{\langle l \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}_{n-l}^{k,m}(l).$$

Posons $x = 0$ dans (5.25), on obtient la formule explicite suivante pour les nombres de Frobenius-Genocchi d'ordre l

$$G_n^{(m)}(l|\lambda) = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{\langle l \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}^m(n-l,k). \tag{5.26}$$

En particulier, pour $m = 1$ dans (5.26), on obtient

$$G_n^{(1)}(l|\lambda) = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{\langle l \rangle_k}{(\lambda-1)^k} S(n-l,k),$$

qui correspond à [93, Eq. (12)].

En posant $x = r$ dans le corollaire 5.12, on a

$$G_n^{(m)}(r,l|\lambda) = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{\langle l \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}_r^m(n-l+r,k+r). \tag{5.27}$$

En particulier, pour $m = 1$ dans (5.27), on obtient la formule explicite suivante :

$$G_n^{(1)}(r,l|\lambda) = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{\langle l \rangle_k}{(\lambda-1)^k} \mathcal{S}_r(n-l+r,k+r).$$

Posons $\lambda = -1$ dans le corollaire 5.12, on a la formule explicite pour les polynômes de Genocchi $G_n^{(l,m)}(x)$ d'ordre l

$$G_n^{(m)}(x,l) = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle l \rangle_k m^k \mathcal{W}_{n-l}^{k,m}(x). \tag{5.28}$$

Pour $m = 1$ dans (5.28), on obtient la formule explicite pour les polynômes de Genocchi $G_n^{(1)}(x,l)$ d'ordre l qui est donnée par Srivastava et *al.* [93, Eq. (12)].

Pour $x = 0$ dans (5.28), on obtient une formule explicite pour les nombres de Genocchi $G_n^{(m)}(l)$ d'ordre l.

$$G_n^{(m)}(l) = \frac{n!}{(n-l)!} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^k}{2^k} \langle l \rangle_k \, m^k \mathcal{S}^m(n-l,k).$$

5.7 Relation de récurrence pour les polynômes de Frobenius-Euler généralisés d'ordre supérieur

Dans cette section, on propose une relation de récurrence à trois termes pour calculer les polynômes de Frobenius-Euler généralisés $H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$ d'ordre α.

En posant $x = 0$ dans (5.24), on obtient la formule explicite des nombres de Frobenius-Euler suivante :

$$H_n^{(m)}(\alpha|\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \alpha \rangle_k}{(\lambda-1)^k} m^k \mathcal{W}^m(n,k).$$

De la transformation de Whitney translaté, on obtient

$$\frac{\langle \alpha \rangle_n}{(\lambda-1)^n} m^n = \sum_{k=0}^{n} w^m(n,k) H_k^{(m)}(\alpha|\lambda).$$

Par suite, on introduit la séquence $\left(A_{n,l}^{\lambda,m}(\alpha)\right)_{n,l\in\mathbb{N}}$ à deux indices comme suit :

$$A_{n,l} = A_{n,l}^{\lambda,m}(\alpha) = \frac{(\lambda-1)^l}{m^l \langle \alpha \rangle_l} \sum_{k=0}^{l} w^m(l,k) H_{n+k}^{(m)}(\alpha|\lambda), \tag{5.29}$$

avec $A_{0,l} = 1$, $A_{n,0} = H_n^{(m)}(\alpha|\lambda)$, où $w^m(n,k)$ est le nombre de Whitney translaté de première espèce, donné par

$$\langle x|m \rangle_n = \sum_{k=0}^{n} w^m(n,k) x^k,$$

et il satisfait la relation de récurrence (voir [5]),

$$w^m(n,k) = w^m(n-1,k-1) + m(n-1)w^m(n-1,k). \tag{5.30}$$

Théorème 5.13. *Le* $\left(A_{n,l}^{\lambda,m}(\alpha)\right)_{n,l\in\mathbb{N}}$ *satisfait la relation de récurrence*

$$A_{n+1,l} = \frac{m(l+\alpha)}{\lambda-1}A_{n,l+1} - mlA_{n,l}. \tag{5.31}$$

avec $A_{0,l} = 1$.

Preuve De (5.30) et (5.29), on a

$$\begin{aligned}
A_{n,l+1} &= \frac{(\lambda-1)^{l+1}}{m^{l+1}\left\langle\alpha\right\rangle_{l+1}}\sum_{k=0}^{l+1}\left(w^m(l,k-1)+mlw^m(l,k)\right)H_{n+k}^{(m)}\left(\alpha|\lambda\right)\\
&= \frac{(\lambda-1)^{l+1}}{m^{l+1}\left\langle\alpha\right\rangle_{l+1}}\sum_{k=1}^{l+1}w^m(l,k-1)H_{n+k}^{(m)}\left(\alpha|\lambda\right)\\
&\quad+\frac{(\lambda-1)^{l+1}}{m^{l+1}\left\langle\alpha\right\rangle_{l+1}}ml\sum_{k=0}^{l+1}w^m(l,k)H_{n+k}^{(m)}\left(\alpha|\lambda\right)\\
&= \frac{(\lambda-1)^{l+1}}{m^{l+1}\left\langle\alpha\right\rangle_{l+1}}\sum_{k=0}^{l}w^m(l,k)H_{n+1+k}^{(m)}\left(\alpha|\lambda\right)\\
&\quad+\frac{(\lambda-1)^{m+1}}{m^{l+1}\left\langle\alpha\right\rangle_{l+1}}ml\sum_{k=0}^{l}w^m(l,k)H_{n+k}^{(m)}\left(\alpha|\lambda\right)\\
&= \frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{n+1,l}+l\frac{(\lambda-1)}{\alpha+l}A_{n,l}.
\end{aligned}$$

5.7.1 Les premiers termes de $A_{n,l}^{\lambda,m}(\alpha)$

$A_{0,0}^{\lambda,m}(\alpha) = 1$
$A_{1,0}^{\lambda,m}(\alpha) = \frac{m\alpha}{\lambda-1}$
$A_{2,0}^{\lambda,m}(\alpha) = \frac{m^2\alpha(\alpha-\lambda+2)}{(\lambda-1)^2}$
$A_{3,0}^{\lambda,m}(\alpha) = \frac{m^3\alpha\left(\lambda^2-3\alpha\lambda-5\lambda+\alpha(\alpha+6)+6\right)}{(\lambda-1)^3}$

$A_{1,1}^{\lambda,m}(\alpha) = \frac{m(\alpha-\lambda+2)}{\lambda-1}$
$A_{2,1}^{\lambda,m}(\alpha) = \frac{m^2\left(\lambda^2-3\alpha\lambda-5\lambda+\alpha(\alpha+6)+6\right)}{(\lambda-1)^2}$
$A_{3,1}^{\lambda,m}(\alpha) = \frac{m^3\left(-\lambda^3+(7\alpha+10)\lambda^2-2\alpha(3\alpha+16)\lambda-29\lambda+\alpha(\alpha+6)^2+26\right)}{(\lambda-1)^3}$

$$\begin{aligned}
A_{2,2}^{\lambda,m}(\alpha) &= \tfrac{m^2\left(\alpha^2-5(\lambda-2)\alpha+2(\lambda-2)(2\lambda-5)\right)}{(\lambda-1)^2}\\
A_{3,2}^{\lambda,m}(\alpha) &= \tfrac{m^3\left(\alpha^3-9(\lambda-2)\alpha^2+(\lambda-2)(19\lambda-45)\alpha-2(\lambda-2)(\lambda(4\lambda-23)+31)\right)}{(\lambda-1)^3}\\
A_{3,3}^{\lambda,m}(\alpha) &= \tfrac{m^3\left(\alpha^3-12(\lambda-2)\alpha^2+(\lambda-2)(37\lambda-84)\alpha-3(\lambda-3)(\lambda-2)(9\lambda-19)\right)}{(\lambda-1)^3}
\end{aligned}$$

Enfin, on considère le polynôme $A_{n,l}^{(\lambda,m)}(x,\alpha)$ défini par

$$A_{n,l}(x) = A_{n,l}^{\lambda,m}(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k}, \tag{5.32}$$

avec $A_{0,l}^{\lambda,m}(x,\alpha) = 1$ et $A_{n,0}^{\lambda,m}(x,\alpha) = H_n^{(m)}(x,\alpha|\lambda)$.

Théorème 5.14. *Les polynômes $A_{n,l}^{(\lambda,m)}(x,\alpha)$ satisfont la relation de récurrence à trois termes suivante*

$$A_{n+1,l}(x) = (x-ml)A_{n,l}(x) + \frac{m(\alpha+l)}{\lambda-1}A_{n,l+1}(x), \tag{5.33}$$

avec la suite initiale donné par $A_{0,l}(x) = 1$.

Preuve De (5.31) et (5.32), on a

$$\begin{aligned}
A_{n,l+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_{k,l+1}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{k+1,l}^{\lambda,m}(\alpha) + l\frac{(\lambda-1)}{\alpha+l}A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)\right)x^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k+1} + l\frac{(\lambda-1)}{\alpha+l}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k}.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation de Pascal, on obtient

$$\begin{aligned}
A_{n,l+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k+1} - \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}\frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k+1}\\
&\quad + l\frac{(\lambda-1)}{\alpha+l}A_{n,l}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{k,l}^{\lambda,m}(\alpha)x^{n-k+1}\\
&\quad + l\frac{(\lambda-1)}{\alpha+l}A_{n,l}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{n+1,l}(x) - x\frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}A_{n,l}(x) + l\frac{(\lambda-1)}{\alpha+l}A_{n,l}(x) \\
&= \frac{\lambda-1}{m(\alpha+l)}\left(A_{n+1,l}(x) + (ml-x)A_{n,l}(x)\right).
\end{aligned}$$

donc

$$A_{n+1,l}(x) = (x-ml)A_{n,l}(x) + \frac{m(\alpha+l)}{\lambda-1}A_{n,l+1}(x). \qquad \square$$

Pour $x=\alpha$, on a

$$A_{n+1,l}(\alpha) = (\alpha-ml)A_{n,l}(\alpha) + \frac{m(\alpha+l)}{\lambda-1}A_{n,l+1}(\alpha).$$

La relation (5.33) permet d'écrire un algorithme qui génère tous les polynômes $A_{n,l}(x)$ en déterminant tous les coefficients de la matrice d'Euler-Seidel en utilisant les valeurs de la première colonne et de la première ligne.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a présenté quelques résultats théoriques sur les nombres r-Whitney associés aux treillis de Dowling, les nombres et polynômes r-Dowling, les nombres et polynômes r-Dowling ordonnés et les nombres et polynômes r-Eulérien de Dowling. Ces nombres ont une place importante dans le domaine de la combinatoire. Un autre type de nombres combinatoires que nous avons étudiés sont les nombres r-Whitney s-associés et les nombres et polynômes de Dowling s-associés. On a déduit une formule explicite pour les polynômes de Bernoulli généralisés et les polynômes d'Euler généralisés en termes des polynômes de Whitney généralisés de seconde espèce et en termes des polynômes de Whitney translatés de seconde espèce. Aussi, on a déduit une formule explicite pour les polynômes de Frobenius-Euler généralisés d'ordre supérieur et les polynômes de Frobenius-Genocchi en termes des polynômes de Whitney de seconde espèce généralisés et en termes de polynômes de Whitney translatés de seconde espèce. On a conclut une relation de récurrence pour calculer les polynômes de Frobenius-Euler généralisés d'ordre supérieur.

Dans les perspectives de notre travail, plusieurs axes de recherche ne semblent prometteurs. Nous proposons quelques problèmes :

- Zeros, log concavité et unimodalité des nombres r-Whitney s-associés.
- Les congriences $\mathrm{mod}(p^l)$, $l \geq r$, des polynômes r-Dowling s-associés $D^{(s)}_{m,mp+r}(n,x)$.
- Il serait d'étudier les différents propriétés des nombres de Lah-Whitney s-associés et des nombres de Lah r-Whitney s-associés.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun (editors), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (9th printing), New York : Dover, 1972.

[2] R. Ait Amrane, H. Belbachir, Are the hyperharmonics integral ? A partial answer via the small intervals containing primes. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 3-4, 115-117.

[3] R. Ait Amrane, H. Belbachir, Non-integerness of class of hyperharmonic numbers, Ann. Math. Inform. **37**(2010), 7-11.

[4] H. Belbachir, Determining the mode for convolution powers of discrete uniform distribution. Probab. Engrg. Inform. Sci. 25 (2011), no. 4, 469–475.

[5] H. Belbachir and I. E. Bousbaa, Translated Whitney and r-Whitney Numbers : A Combinatorial Approach, J. Inte. Seq. 16 (2013).

[6] H. Belbachir, I. E. Bousbaa, Associated Lah numbers and r-Stirling numbers, arXiv :1404.557

[7] H. Belbachir, F. Bencherif, L. Szalay, Unimodality of certain sequences connected with binomial coefficients, J. Integer Seq., Vol. 10, Art. 07.2.3. (2007).

[8] H. Belbachir, F. Bencherif, Unimodality of sequences associated to Pell numbers. Ars Combin. 102 (2011), 305–311.

[9] H. Belbachir, A. Khelladi, On a sum involving powers of reciprocals of an arithmetical progression, Annales Mathematicae et Informaticae **34**(2007), 29-31.

[10] H. Belbachir, M. Mihoubi, Generalized recurrence for Bell polynomials : an alternate approach to Spivey and Gould Qaintance formulas, European J. Combi. **30** (2009), 1254-1256.

[11] H. Belbachir, M. Mihoubi, Linear recurrences for r-Bell polynomials, J. Integer Seq. **17** (2014), Article 14.10.6.

[12] H. Belbachir, **N. Souddi**, M. Tigane. " Combinatorial properties of the r-Whitney numbers of Dowling lattices", acceptée, à paraitre dans **Ars Combinatoria** en décembre 2019 ou en Janvier 2020 (revue de catégorie A impactée).

[13] H. Belbachir, **N. Souddi**. " Some explicit formulas for the generalized Frobenius-Euler polynomials of higher orders", en révision dans **FILOMAT** (revue de catégorie A impactée).

[14] H. Belbachir, **N. Souddi**. " Linear Recurrences for r-Dowling Polynomials", soumis.

[15] H. Belbachir, **N. Souddi**. " Harmonic ordered Dowling polynomials and hyperharmonic ordered Dowling polynomials and numbers", soumis.

[16] H. Belbachir, **N. Souddi**. " Combinatorics of r-Dowling and associated r-Dowling polynomials", soumis.

[17] H. Belbachir, **N. Souddi**. " Combinatorics of s-ssociated r-Whitney numbers", soumis.

[18] H. Belbachir, L. Szalay, Unimodal rays in the regular and generalized Pascal pyramids. Electron. J. Combin. 18 (2011), no. 1, Paper 79, 9 pp.

[19] H. Belbachir, L. Szalay, Unimodal rays in the regular and generalized Pascal triangles, J. of Integer Seq., Vol. 11, Art. 08.2.4. (2008).

[20] E. T. Bell, Exponential polynomials, Ann. Math., 35, (1934), 258–277.

[21] E. T. Bell, Exponential numbers, Amer. Math. Monthly., 41, (1934) 411–419.

[22] E. A. Bender, Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration, J. of combinatorial Theory, A.15 (1973).

[23] A. T. Benjamin, D. Gaebler, R. Gaebler, A combinatorial approach to hyperharmonic numbers, INTEGERS : The electronic Journal of Combinatorial Number Theory, **3**(2003), A15.

[24] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, Proofs That Really Count, The Art of Combinatorial Proof. Dolciani Mathematical Expositions, 2003. 1.14, 2.1.8.

[25] M. Benoumhani, On Whitney numbers of Dowling lattices, *Discrete Math.* **159**(1996) 13-33.

[26] M. Benoumhani, On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattice, *Advenced in Applied Math.* **19** (1997) 106-116.

[27] M. Benoumhani, Log-concavity of Whitney numbers of Dowling Lattices, *Applied Math.* **22** (1999), 186-189.

[28] M. Benoumhani, A sequence of binomial coeficients related to Lucas and Fibonacci numbers, *J. Integer* Seq. **6** (2003), Article 03.2.1.

[29] J. Bernoulli, Ars conjectandi, Basel, (1713).

[30] M. A. Boutiche, M. Rahmani, H. M. Srivastava, Explicit Formulas Associated with Some Families of Generalized Bernoulli and Euler Polynomials, Mediterr. J. Math. (2017).

[31] K. N. Boyadzhiev, A Series transformation formula and related polynomials, Int. J. Math. Math. Sci., 23 (2005), 3849–3866.

[32] K. N. Boyadzhiev, Power sum identities whith generalized Stirling numbers, *Fibonacci Quart.*, 46/47(4) :326-331, 2008/2009.

[33] F. Brenti, Unimodal, log concave and Pólya frequency sequences in combinatorics, *Mem. Amer. Math.* Soc., 413 (1989).

[34] A. Z. Broder, The r-Stirling numbers, *Discrete Math.* **49** (1984), 241-259.

[35] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind – I, *Fibonacci Quart.* **18** (1980), 147-162.

[36] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind – II, *Fibonacci Quart.* **18** (1980), 242-257.

[37] L. Carlitz, Eulerian numbers and polynomials of higher order, Duke Math. J. 27 (1960), 401–423.

[38] C. A. Charalambides, Enumerative Combinatorics (Discrete Mathematics And its Applications). Chapman and Hall/CRC, 1 edition, 2002.

[39] G. S. Cheon, J. H. Jung, r-Whitney numbers of Dowling Lattices. Disc. Math. **312**, (2012), 2337-2348.

[40] L. Comtet, Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions, Revised and Enlarged Edition, D. Riedel Publishing Co., Dordrecht, 1974.

[41] J. H. Conway, R. K. Guy, The Book of Numbers, Springer-Verlag, 1996.

[42] R. B. Corcino, The $(r;\beta)$-Stirling numbers, Mindanao Forum, **14**(2) (1999), 91-100.

[43] R. B. Corcino, R. Aldema, Some combinatorial and statistical application of $(r;\beta)$ Stirling numbers, Matimyàs Mat. **25**(1) (2002), 19-29.

[44] R. B. Corcino, C. B. Corcino, On the maximum of generalized Stirling numbers, *Util. Math.* **86** (2011), 241-256.

[45] R. B. Corcino, C. B. Corcino, R. Aldema, Asymptotic normality of the $(r;\ \beta)$-Stirling numbers, Ars. Combin. **81**(2006), 81-96.

[46] R. B. Corcino, C. B. Corcino, M. Herrera, On the limiting form of the differences of the generalized factorial, Journal of Research for Science, Computing and Engineering, **2**(3) (2005), 1-7.

[47] R. B. Corcino, M. Herrera, Limit of the differences of the generalized factorial, its q- and p, q-analogue, Util. Math. **72** (2007), 33-94.

[48] F. Costabile, Expansions of real functions in Bernoulli polynomials and applications, Conf. Sem. Mat., Univ. Bari. **273**, (1999).

[49] B. Crstici, J. Sandor, D. S. Mitrinovic, Handbook of Number Theory. Kluwer Academic Publisher, 2004.

[50] J. N. Darroch, On the distribution of the number of successor in independent trials, *Ann. Math. Stat.*, **35** 1317-1321, 1964. 1.3.

[51] M. E. Dasef, S. M. Kautz, Some sums of some importance, College Math. J., 28 (1997), 52–55

[52] A. Dil, V. Kurt, Investigating Geometric and Exponential Polynomials with Euler-Seidel Matrices, Journal of Integer Sequences, Vol. 14 (2011).

[53] A. Dil, V. Kurt, Polynomials related to harmonic numbers and evaluation of harmonic number, serie I. arXiv :0912.1834v2, (2010).

[54] A. Dil, V. Kurt, M. Cenkci, Algorithms for Bernoulli and allied polynomials, J. Integer Seq. 10 (2007) Article 07.5.4.

[55] A. Dil, I. Mezö, A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers, Appl. Math. Comput. 206 (2008), 942–951.

[56] T. A. Dowling, A class of geometric lattice based on finite groups, *J. of combinatorial Theory,* series **B 14**(1973), 61-86. Erratum, *J. Combin. Theory* , Ser.B 15 (1973), 211.

[57] D. Dumont, Matrices d'Euler-Siedel, Sem. Loth. Comb., (1981).

[58] P. Erdös, On a conjecture of Hammersely, Pro. *J. London Math.* Ser.28 (1952), 235-239.

[59] L. Euler, De Transformatione Serierum, Opera Omnia, series prima, Vol. X, Teubner, 1913.

[60] C. J. Feng, F. Z. Zhao, Some results for generalized harmonic numbers. INTEGERS, 9 :605-619, 2009. 1.14.

[61] H. Göral, D. C. Sertbas. "Almost all hyperharmonic numbers are not integers."Journal of Number Theory **171** (2017) 495-526.

[62] H. W. Gould, Bell and Catalan Numbers - Research Bibliography of Two Special Number Sequences, 6th Edition, Morgantown, WV, 1985.

[63] H. W. Gould, J. Quaintance, Implications of Spivey's Bell number formula. J. Integer Seq. **11** (2008), Article 08.3.7.

[64] G. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science, Addison-Wesley Professional. New York, 1994.

[65] O. A. Gross, Preferential arrangements. Amer. Math. Monthly, 69 (1962), 4–8.

[66] F. T. Howard, Associated Stirling numbers. Fibonacci Quart., 18(4) :303–315, 1980.

[67] L. C. Hsu, P. J. S. Shiue, A unified approach to generalized Stirling numbers, Adv. Appl. Math. **20** (1998), 366-384.

[68] L. C. Hsu, Some identities involving three kinds of counting numbers, arXiv. org :0911.0279, 2009.

[69] D. S. Kim, T. Kim, Higher-order Frobenius-Euler and poly-Bernoulli mixed-type polynomials, Adv. Difference Equ. 2013 (2013), Article ID 251, 1–13.

[70] B. Kurt, Y. Simsek, On the generalized Apostol-type Frobenius-Euler polynomials, Adv. Difference Equ. 2013 (2013), Article ID 1, 1–9.

[71] D. H. Lehmer, A new approch to Bernoulli polynomials, Amer. Math. Monthly. **95** (1988), 905-911.

[72] E. H. Lieb, Concavity properties and a generating function for Stirling numbers. J. Comb. Theory **5** (1968), 203-206.

[73] E. Lucas, Théorie des nombres, Paris, (1891).

[74] M. Merca, A note on the r-Whitney numbers of Dowling lattices, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **351**(17-18) (2013), 649-655.

[75] I. Mezö, About the non -integer property of hyperharmonic numbers, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Math. **50**(2007), 13-20.

[76] I. Mezö, On the maximum of r-Stirling numbers, Adv. *in Appl. Math.* **41** (3) (2008) 293-306.

[77] I. Mezö, r-Stirling numbers, Whitney numbers and their common generalization. In The 61st Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Portugal, 2008. 2.4.3, 3.4.2.

[78] I. Mezö, The r-Bell numbers. arXiv.org :0909.4417, 2009. 3.3.

[79] I. Mezö, A new Formula for the Bernoulli polymomials, Results Math. **58** (2010), 329-335.

[80] I. Mezö, The dual of Spivey's Bell number formula. J. Integer Seq. **15** (2012), Article 12.2.4.

[81] I. Mezö, A. Dil, A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers, Applied Mathematics and computation **206**, (2008) 942-951.

[82] I. Mezö, A. Dil, Euler-Seidel method for certain combinatorial numbers and a new characterization of Fibonacci sequence, Cent. Eur. J. Math. 7 (2009), 310–321.

[83] M. Mihoubi, M. S. Maamra. Touchard polynomials, partiel Bell polynomials and polynomials of binomial type. J. Integer Seq. **14** (2011), Article 11.3.1

[84] A. Rucinsky, Proving normality in combinatorics in random Graphs, vol. 2, Wiley Interscience, 1992, p. 215-231.

[85] R. Suter, Two analogues of a classical sequence, J. Integer Seq., 3 (2000) Article 00.1.8.

[86] M. Rahmani, Some results on Whitney numbers of Dowling Lattice, Arab J. of Math. Sciences. **20**(1) (2014), 11-24.

[87] J. Riordan, Combinatorial Analysis, Wiley, 1958.

[88] L. Seidel, Über eine einfache Enstehungweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, Sitzungsber. der Münch. Akad. Math. 4 (1877), 157–187.

[89] L. W. Shapiro, S. Getu, W. J. Woan, L. Woodson, The Riordan group, *discrete Appl. Math.* **34**(1991), 229-239.

[90] R. Sprugnoli, Riordan arrays and combinatorial sums, *Discrete Math.* **132** (1994), 267-290.

[91] M. Z. Spivey, A generalized recurrence for Bell numbers. J. Integer Seq. **11** (2008), Article 08.2.5.

[92] H. M. Srivastava, Generating relations and other results associated with some families of the extended Hurwitz-Lerch Zeta functions, SpringerPlus 2 (2013), Article ID 2 : 67, 1–14.

[93] H. M. Srivastava, M. A. Boutiche, M. Rahmani, Some explicit formulas for the Frobenius- Euler polynomials of higher order, Appl. Math. Inf. Sci. 11, No. 2, (2017) 621-626.

[94] H. M. Srivastava, M. A. Boutiche, M. Rahmani, A class of Frobenius-type Eulerian polynomials, Rocky Mountain J. Math. **48**(3), (2018) 1003-1013.

[95] H. M., Srivastava, P. G., Todorov, An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials. J. Math. Anal. Appl 130(2),(1988) 509-513.

[96] Y. Sun, X. Wu, The largest singletons of set partitions. European J. Combin. **32** (2011), 369-382.

[97] R. Suter, Two analogues of a classical sequence, *J. Integer Seq.,* **3** (2000) Article 00.1.8.

[98] S. Tanny, M. Zuker, On a unimodality sequence of binomial coeficient, *Discrete Math.* **9** (1974), 79-89.

[99] H. S. Wilf, Generating functionology, Academic Press, 1994.

[100] B. Yiłmaz Yaşar and M. A. Özarslan, Frobenius-Euler and Frobenius-Genocchi polynomials and their differential equations, New Trends Math. Sci. 3 (2015), 172–180.

Résumé

Cette thèse présente une synthèse des principaux résultats obtenus par cheon et jung sur les nombres r-Whitney de deux espèces. Ainsi, on donne des extensions de résultats obtenus par K. Boyadzhiev pour les nombres r-Whitney en utilisant la transformée binomiale et nous donnons une expression explicite pour les polynômes r-Dowling en utilisant la méthode de la fonction génératrice donnée par Gould et Quaintance. Nous nous sommes aussi intéressés aux nombres r-Whitney s-associés et nombres et polynômes r-Dowling s-associés et leurs principals properiétés. Ainsi, on exprime une formule explicite pour les polynômes de Bernoulli généralisés, les polynômes d'Euler généralisés et les polynômes de Frobenius-Euler généralisés en termes de polynômes de Whitney généralisés et en termes de polynômes de Whitney généralisés translatés et on trouve également un algorithme pour calculer les polynômes de Frobenius-Euler généralisés.

Abstract

This thesis presents a synthesis of the main results obtained by cheon and jung for the r-Whitney numbers of two kinds. Also, we give an extensions of results obtained by Boyadziev for the r-Whitney numbers using the binomial transform. We give an explicit formula of the r-Dowling polynômials using the technique of generating functions from Gould and Quaintance. We were also interested the s-associated r-Whitney numbers of the second kind and the s-associated Dowling polynomials and the different properties concerning them. We derive an explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials, the généralized Euler polynomials and the généralized Frobenius-Euler polônomials in terms of the généralised Whitney polynomials and in terms of the généralized translated Whitney polynomials. On propose an algorithm for calculating the generalized Frobenius-Euler polynômials.

الملخص

تقدم هذه الرسالة مجموعة من النتائج الرئيسية على اعداد ار ويتني من النوعين التي تم الحصول عليها بواسطة شيو ن و جونغ وتعطي امتداد لنتائج بويادشيف على اعداد ار ويتني باستخدام طريقة التحويل الثنائي. تقدم أيضا صيغة لكثير الحدود داولينغ باستخدام طريقة الدالة المولدة المعطاة من طرف قولد و كانتونس كما اهتممنا باعداد ار ويتنى اس اسوسيي واعطينا خصائصها الرئيسية، نعبر ايضا عن كثيرات الحدود برنولي المعممة وكثيرات الحدود اوليرالمعممة وفروبنيوس اولرالمعممة بدلالة كثير حدود ويتني المعمم وبدلالة كثير حدود ويتني مترجم ووجدنا خوارزمية لحساب كثير حدود فروبنيوس اولر المعممة.

Mots Clés :

Treillis de Dowling ; nombres r-Whitney ; polynômes r-Dowling ; fonction génératrice ; formule explicite ; nombres r-Whitney s-associés ; polynômes r-Dowling s-associés ; polynômes de Bernoulli, polynômes d'Euler, polynômes de Frobenius-Euler.

Résumé

Cette thèse présente une synthèse des principaux résultats obtenus par cheon et jung sur les nombres *r*-Whitney de deuxespèces. Ainsi, on donne des extensions de résultats obtenus par K. Boyadzhiev pour les nombres *r*-Whitney en utilisant latransformée binomiale et nous donnons une expression explicite pour les polynômes *r*-Dowling en utilisant la méthode de lafonction génératrice donnée par Gould et Quaintance. Nous nous sommes aussi intéressés aux nombres *r*-Whitney *s*-associés et nombres et polynômes *r*-Dowling*s*-associés et leurs principales propriétés. Ainsi, on exprime une formule explicite pour lespolynômes de Bernoulli généralisés, les polynômes d'Euler généralisés et les polynômes de Frobenius-Euler généralisés en termesde polynômes de Whitney généralisés et en termes de polynômes de Whitney généralisés translatés et on trouve également unalgorithme pour calculer les polynômes de Frobenius-Euler généralisés.

Mots Clés:

Treillis de Dowling; Nombres *r*-Whitney; Polynômes *r*-Dowling; Fonction génératrice; Formule explicite; Nombres *r*-Whitney *s*-associés; Polynômes *r*-Dowling *s*-associés; Polynômes de Bernoulli; Polynômes d'Euler; Polynômes de Frobenius-Euler.