

Sommaire

Résumé	i
Sommaire	iv
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Principales notations	vii
Introduction générale	1
Chapitre I : Equations de mouvement d'un arbre tournant soumis à l'effet d'un gradient thermique	
I-1 Introduction	4
I-2 L'énergie de déformation de la poutre	4
I-3 Energie de déformation due a gradient thermique	7
I-4 Energie cinétique de la poutre	7
I- 5 Equations de mouvement	9
CAHPITRE II : Méthode de transformation différentielle	
II-1 Introduction	11
II-2 Méthode de transformation différentielle	11
II-2.1 Définition	11
II-3 Propriétés d'opérations de la transformation différentielle	12
II-4 Application de la DTM dans le cas d'un arbre tournant	12
II-5 Conditions aux limites	14
CHAPITRE III : Organisation et programmation	
III-1 Introduction	17
III-2 Organigramme	17
III-3 Programme principale	17
III-4 Description du programme	19
IV-7 CHAPITRE IV : Validations, comparaisons et analyse de cas	
IV-1 Inroduction	21
IV-2 Validation et comparaison des résultats dans le cas stationnaire	21
IV-2.1 Arbre sans l'effet du gradient de température à section circulaire	21
IV-2.2 Arbre sans l'effet du gradient de température à section rectangulaire ($I_{yy} = 100I_{zz}$)	25
IV 2 Diagramme de Campbell	28
IV-3 Arbre avec l'effet du gradient de température	30
Conclusion générale	32
Références bibliographie	34

Liste des figures

- 1.1 Poutre en rotation
- 1.2 Déformation de la poutre
- 3.1 Schéma de calcul global
- 4.1 Diagramme de Campbell dans le cas de poutre E-L avec $I_{yy} = I_{zz}$
- 4.2 Diagramme de Campbell dans le cas de poutre Appuyée-Appuyée avec $I_{yy} = I_{zz}$
- 4.3 Diagramme de Campbell dans le cas de poutre Encastré-Libre avec $I_{yy} = 100I_{zz}$.
- 4.4 Variation de la première fréquence propre en fonction de la température d'un arbre E-L soumis de l'effet gradient thermique dans le cas stationnaire .
- 4.5 Variation de la première fréquence propre en fonction de la température d'un arbre E-L soumis de l'effet gradient thermique en mouvement de rotation .

Liste des tableaux

- 2.1 Théorèmes de base utilisés dans la DTM
- 2.2 Conditions aux limites
- 4.1 Convergence dans le cas d'une poutre Appuyée-Appuyée :
 $\Omega^* = 0$
- 4.2 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 0$
- 4.3 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 2$
- 4.4 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 3.5$
- 4.5 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 4$
- 4.6 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 8$
- 4.7 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 1.1$
- 4.8 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 2$
- 4.9 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 4$
- 4.10 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 6$
- 4.11 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 7.1$
- 4.12 Convergence dans le cas d'une Poutre Encastré –Libre $\Omega^* = 8$.

Principales notations

Ω	Vitesse de rotation
γ_{xz}	Déformation angulaire
φ	Rotation suivant l'axe z
γ	Rotation suivant l'axe y
θ	Rotation suivant l'axe x
ω	Fréquence propre
α	Coefficient de dilatation thermique
ΔT	Variation de température
ρ	Masse volumique
ε	Déformation longitudinale du point P
σ	Contrainte normale
I_{yy}	Moment d'inertie suivant l'axe y
I_{zz}	Moment d'inertie suivant l'axe z
I_o	Moment d'inertie polaire
A	Section droite de la poutre
T	Energie cinétique de l'arbre
U	Energie de déformation
U^T	Energie de déformation provoquée par le gradient thermique
E	Module de Young
S	Matrice de rigidité
V	Déplacement suivant l'axe y
W	Déplacement suivant l'axe z
N	Nombre des itérations
N^T	Effort normal provoqué par le gradient thermique

Introduction Générale

Introduction

Les arbres tournants sont des éléments de machines très utilisés en mécanique, leurs rôles est de transmettre de la puissance d'un organe moteur vers un organe récepteur. Les arbres tournants sont aux cœurs des équipements industriels :

- Dans la fabrication mécanique : arbres tournants des machines outils.
- Dans la transformation d'énergie : arbres d'alternateurs des centrales électriques.
- Dans le transport : arbres de transmission des véhicules et engins , roulants , arbres d'hélice des sous marins , des méthaniers et des grands bateaux pour le transport de gaz et des marchandises.
- Dans l'aéronautiques : arbres des réacteurs d'avions et arbres multi rotor concentriques.
- Dans le nucléaire ; arbres des centrifugeuses nucléaires

Le comportement vibratoire des arbres tournants a un grand intérêt pratique dans l'industrie, notamment pour les concepteurs et les ingénieurs en maintenance qui doivent prédire exactement les paramètres vibratoires tels que les fréquences propres, modes propres, réponse dynamique, etc. En effet, les défauts d'alignement, les défauts d'usinage, le frottement, les fissures et le balourd d'origine thermique sont les causes principales des vibrations dans les machines tournantes. Lorsque les rotors ne sont pas homogènes, ou lorsque la température n'est pas répartie de façon uniforme, les rotors se déforment sous l'effet de contraintes thermiques. S'ils se déforment de façon dissymétrique, les centres de gravité se déplacent et les efforts varient. Un exemple concret est celui des rotors d'alternateurs ou de moteurs électriques, en raison de l'énergie importante dissipée par effet Joule ou par hystérésis, il est nécessaire de refroidir les rotors. Toute dissymétrie de débit (canaux de ventilation bouchés ou pertes de charge différentes) se traduira automatiquement par des vibrations.

Le comportement dynamique des arbres tournants a fait l'objet de plusieurs études, beaucoup d'auteurs ont contribué au développement de modèles mathématiques et numériques de ce comportement. On peut citer entre autres,

Bauer [1] qui fut le premier à étudier le comportement vibratoire d'une poutre d'Euler-Bernoulli en mouvement de rotation par rapport à son axe. Zu et al [2] ont étudié l'effet des conditions aux limites sur les fréquences propres des arbres tournants. L'effet gyroscopique et le couplage entre mouvements rigides et élastiques a été étudié par Hu et al [3] en utilisant la méthode des éléments finis. Nelson et al [4] ont utilisé la méthode des éléments finis pour l'étude d'un arbre composé de disques et de paliers. D'autres chercheurs ont étudiés le comportement dynamique en associant d'autres paramètres tels que les matériaux composites, stabilité, excitation sismique, impact, etc, voir en particulier [5-10].

Dans cette étude la méthode de transformation différentielle « Differential Transform Method » est utilisée pour prédire les fréquences propres d'un arbre tournant soumis à un gradient thermique. La méthode de transformation différentielle est une méthode analytique, basée sur le développement en série de Taylor utilisée pour résoudre les équations différentielles. Elle a été utilisée pour la première fois par Zhou [11] pour résoudre les problèmes de circuits électriques. Pour plus de détails sur la méthode le lecteur pourra consulter [12]. Chen et Ho [13] sont les premiers à utiliser cette méthode aux problèmes aux valeurs propres. Beaucoup de problèmes d'engineering ont été résolus par la suite en utilisant cette méthode, pour plus de précision, le lecteur pourra consulter les références suivantes [14-19].

Notre travail consiste à étudier l'influence du gradient thermique sur les fréquences propres des arbres tournants en utilisant la méthode de transformation différentielle « DTM ».

Le travail est présenté en quatre chapitres :

Introduction : Une revue bibliographique qui illustre les développements et les recherches actuels dans le domaine des vibrations des arbres tournants, ainsi que la méthode de transformation différentielle.

Chapitre 1 : on présente la théorie des poutres d'Euler- Bernoulli, et les expressions des énergies de déformation et cinétique de l'arbre en mouvement de rotation sous l'effet d'un gradient thermique. Les équations de mouvement de l'arbre sont déterminées.

Chapitre 2 : on détaille la formulation par la méthode de transformation différentielle, les équations de mouvement ainsi que les conditions aux limites associées transformées sont déterminées.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre est décrit le programme de calcul avec ses différentes étapes.

Chapitre 4 : Les résultats obtenus sont comparés avec d'autres résultats de la littérature, une étude de convergence est faite. L'influence de la vitesse de rotation, des conditions aux limites et du gradient thermique sur les fréquences propres est étudiée en dernier lieu.

Nous clôturerons évidemment cette étude par un ensemble de conclusions et de perspectives de recherche.

Chapitre I :

Equations de mouvement d'un arbre tournant soumis
à un gradient thermique

CHAPITRE I

Equations de mouvement d'un arbre tournant soumis à un gradient thermique

I-1.Introduction

Dans ce chapitre les équations de mouvement d'un arbre tournant seront déterminées en utilisant le principe de Hamilton. Pour cela l'énergie cinétique et de déformation dans le cas du modèle d'Euler-Bernoulli sont utilisées.

I-2.Energie de déformation de la poutre

Un arbre tournant est assimilé à une poutre de section circulaire ou rectangulaire ayant une ligne moyenne passant par le centre de surface des sections droites, voir (figure 1.1).

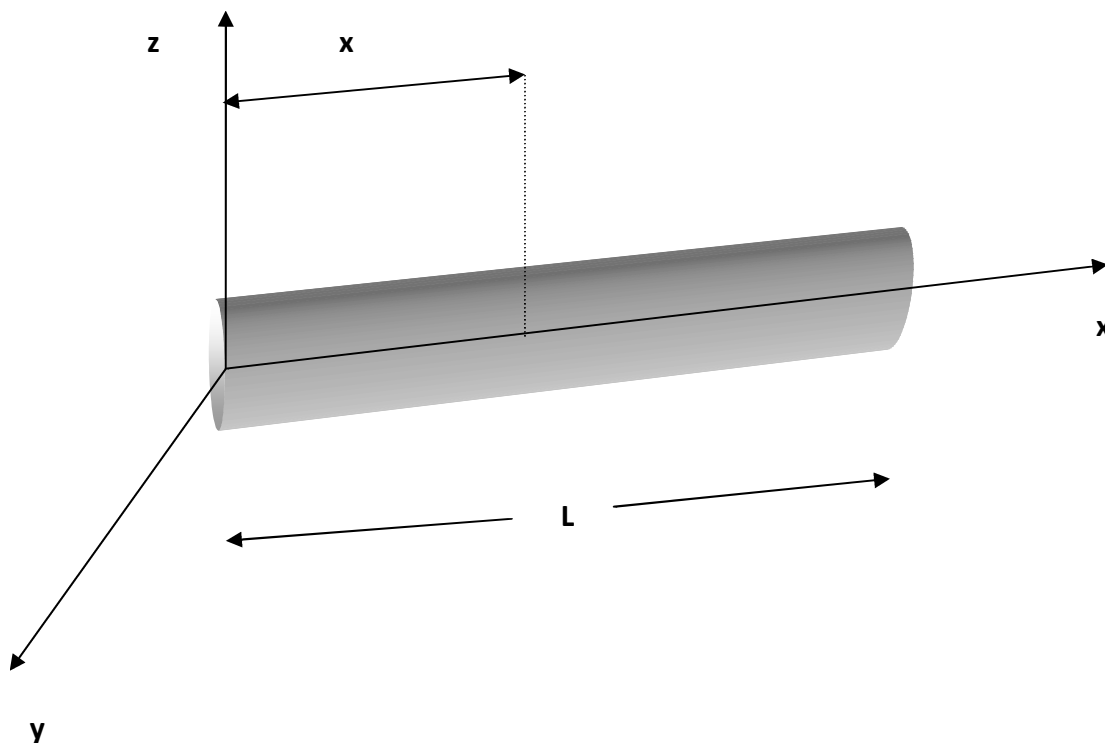


Figure 1.1 : Poutre en rotation.

La théorie d'Euler-Bernoulli est utilisée quand le rapport longueur sur diamètre équivalent est supérieure à vingt. D'après les hypothèses d'Euler-Bernoulli, la déformation due cisaillement transversale n'est pas prise en compte, en plus toute section droite reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation, voir (figure 1.2). Dans notre cas l'effet de torsion est négligeable [6]. Ces hypothèses se traduisent par la relation suivante :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi = 0 \tag{1.1}$$

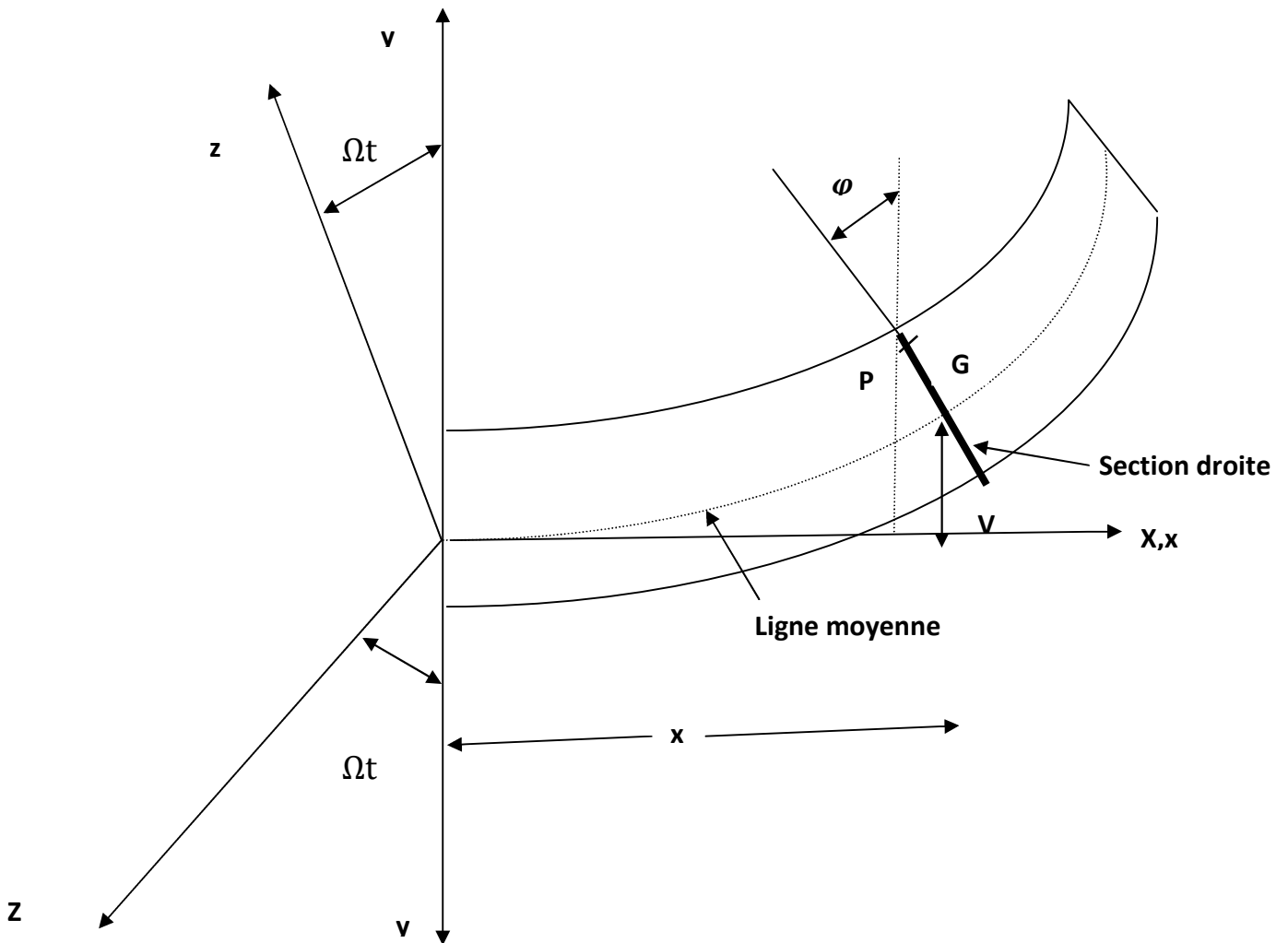


Figure 1.2 : Déformation de la poutre

Où w est le déplacement transversal de la poutre suivant l'axe z , γ_{xz} est la déformation angulaire.

$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi$: est la rotation de la section droite de la poutre.

Le champ de déplacement définissant les déplacements d'un point de la poutre dans le repère (x, y, z) est donné par

$$\begin{cases} U^*(x, y, z) = -y \frac{\partial v(x)}{\partial x} + z \frac{\partial w(x)}{\partial x} \\ V^*(x, y, z) = v(x) \\ W^*(x, y, z) = w(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

U^* , V^* et W^* représentent les déplacements suivant les trois axes x , y et z d'un point quelconque de la poutre, alors que v et w sont les déplacements du centre géométrique G suivant les axes y et z (dans le repère de la poutre).

La déformation longitudinale d'un point quelconque de la poutre de coordonnées y et z dans le repère lié à l'arbre s'écrit

$$\varepsilon = \frac{\partial U^*}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

La relation liant la contrainte normale et la déformation longitudinale est donnée par la loi de Hooke. Sous l'hypothèse de petites déplacements et déformations, pour un matériau homogène, linéaire et isotrope, la loi de comportement s'exprime par

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.4)$$

où

σ : est la contrainte normale dans la poutre et E le module d'Young.

L'expression générale de l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon \, dv \quad (1.5)$$

$$= \frac{1}{2} E \int_L \left(-y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1.6)$$

$$U = \frac{1}{2} E \int_L \left(I_{zz} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_{yy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2I_{yz} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) dx \quad (1.7)$$

Avec I_{yy} , I_{zz} les moments d'inertie de la poutre suivant les axes y et z, I_{yz} représente le produit d'inertie.

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA \quad (1.8)$$

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA \quad (1.9)$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (1.10)$$

dv : est l'élément de volume.

$$dv = Adx \quad (1.11)$$

Avec A la section de la poutre.

Lorsque la section de la poutre est symétrique I_{yz} est nul.

I-3. Energie de déformation due au gradient thermique

L'énergie de déformation due au gradient thermique est donnée par l'expression suivante [7]

$$U^T = \frac{1}{2} \int_L N^T \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (1.12)$$

Avec N^T l'effort normal provoqué par le gradient thermique, et qui est donné par

$$N^T = \int E\alpha\Delta T dA \quad (1.13)$$

α est le coefficient de dilatation thermique, ΔT représente le gradient thermique.

I-4. Energie cinétique de la poutre

\vec{V}_G Représente le vecteur vitesse du point G centre de surface de la section droite située à une distance x de l'origine du repère fixe, et $\vec{\Omega}$ est la vitesse de rotation instantanée de la section droite. La vitesse d'un point P quelconque de la poutre est donnée par

$$\vec{V}_P = \vec{V}_G + \vec{\Omega}^* \wedge \vec{GP} \quad (1.14)$$

\vec{V}_G Représente le vecteur vitesse du point G centre de surface de la section droite située à une distance x de l'origine du repère fixe, et $\vec{\Omega}^*$ est la vitesse de rotation instantanée de la section droite.

Le vecteur vitesse du point G est donné par :

$$\vec{V}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt}_{R_0} + \vec{\Omega}' \wedge \vec{OG} \quad (1.15)$$

Ce qui nous donne

$$\vec{V}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{v} - w\Omega \\ \dot{w} + \Omega v \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Une fois V_G calculée, on peut par la suite déterminer la vitesse du point P

$$\vec{V}_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \\ \dot{v} - w\Omega + \Omega - \Omega \frac{\partial w}{\partial x} \\ \dot{w} + v\Omega + \Omega + \Omega \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Une fois la vitesse du point P déterminée, l'énergie cinétique peut être calculée et qui est donnée par la relation suivante

$$T = \frac{1}{2} \rho \int \vec{V}_P^2 dv \quad (1.18)$$

En injectant (1.17), dans (1.18) on obtient

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L ((\dot{v})^2 + (\dot{w})^2) + I_o 2\Omega^2 + \left(\Omega \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\Omega \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.19)$$

I-5. Equations de mouvement

Les équations de mouvement sont déterminées à partir du principe de la moindre action de Hamilton, exprimé par

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U - U^T) dt = 0 \quad (1.20)$$

L'intervalle $[t_1, t_2]$ représente le temps de l'action de Hamilton.

δ : Opérateur variationnel.

En remplaçant les énergies par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} & \left(\frac{1}{2} \rho A \int_0^L ((\dot{v})^2 + (\dot{w})^2) + I_o 2\Omega^2 + \left(-\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \Omega \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(-\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \Omega \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right. \\ & \left. - E \int_0^L \left(I_{zz} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_{yy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2I_{yz} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^l N^T \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Après intégration par partie les équations de mouvement suivantes sont obtenues

$$\left\{ \begin{aligned} EI_{zz} \frac{\partial v^4}{\partial x^4} - m\Omega^2 v + m\ddot{v} - 2m\Omega\dot{w} - N^T \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} EI_{yy} \frac{\partial w^4}{\partial x^4} + m\ddot{w} - m\Omega^2 w + 2m\Omega\dot{v} - N^T \left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1.23)$$

Avec $m = \rho A$

Avec les conditions aux limites associées suivantes

$$EI_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \Big|_0^L = 0 \quad (1.24)$$

$$\left[EI_{yy} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - N^T \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (1.25)$$

$$EI_{yy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \Big|_0^L = 0 \quad (1.26)$$

$$\left[EI_{zz} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - N^T \frac{\partial v}{\partial x} \right] \delta v \Big|_0^L = 0 \quad (1.27)$$

On suppose que le mouvement est harmonique

$$v(x, t) = V(x)e^{\omega t} \quad (1.28)$$

$$w(x, t) = W(x)e^{\omega t} \quad (1.29)$$

Les équations de mouvement deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_{zz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N^T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - m\Omega^2 V - m\omega^2 V + 2m\Omega\omega V = 0 \end{array} \right. \quad (1.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_{yy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - m\Omega^2 W - m\omega^2 W - 2m\Omega\omega W = 0 \end{array} \right. \quad (1.31)$$

Où le terme $m\Omega^2 V$ caractérise l'effet centrifuge, le terme $2m\Omega\omega V$ représente l'effet gyroscopique et les termes $N^T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$, $N^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ représentant l'effet de la température.

Chapitre II :

Méthode de transformation différentielle

Chapitre II

Méthode de transformation différentielle

II-1 Introduction

Avec le développement de l'outil informatique et le calcul symbolique les méthodes de résolution analytique sont devenues très pratiques, parmi les techniques et les approches on trouve la méthode de la transformation différentielle qui permet d'analyser des systèmes très complexes.

II-2 Méthode de transformation différentielle

II-2.1 Définition

Soit $f(x)$ une fonction analytique dans un domaine D , soit $x = x_0$ un point quelconque du domaine D . La fonction $f(x)$ est représentée par une série de centre x_0 . La transformation différentielle de $f(x)$ est donnée par [7] :

$$F(k) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (2.1)$$

où $F(k)$ est la fonction transformée de la fonction originale $f(x)$.

La transformation inverse est définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k F(k) \quad (2.2)$$

En injectant l'équation (2.1) dans (2.2), on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (2.3)$$

D'après cette équation on remarque que le concept de la transformation différentielle est basé sur le développement en série de Taylor de la fonction $f(x)$.

L'équation (2.3) peut être écrite comme suite si on limite le nombre de séries à N séries.

$$f(x) = \sum_{k=0}^N (x - x_0)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (2.4)$$

Le nombre N est défini en fonction du critère de convergence de la solution.

II-3. Propriétés d'opérations de la transformation différentielle

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions quelconques et soit $F(k)$ et $G(k)$ les fonctions transformées des deux fonctions originales, les Propriétés d'opérations de la transformation différentielle sont donnée par tableaux (2.1)

Tableaux 2.1 : Théorèmes de base utilisés dans la DTM [12]

Fonction originale	DTM
$f(x) = h(x) \pm g(x)$	$F(k) = H(k) \pm G(k)$
$f(x) = \beta g(x)$	$F(k) = \beta G(k)$
$f(x) = h(x).g(x)$	$F(k) = H(k) \sum_{l=0}^k (k-l)G(l)$
$f(x) = \left[\frac{dg(x)^n}{d(x)^n} \right]$	$F(k) = [(k+n)!] G(K+n).$
$f(x) = x^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$

II-4 Application de la DTM dans le cas d'un arbre tournant

En utilisant les propriétés de la DTM on peut transformer les équations de mouvement obtenues au chapitre précédant. Nous réécrivons ces équations pour pouvoir les transformer

$$\begin{cases} EI_{zz} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial^4 x} \right) - m(\Omega^2 + \omega^2)V(x) - 2m\Omega\omega W(x) - N^T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} \right) = 0 & (2.5) \\ EI_{yy} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial^4 x} \right) - m(\omega^2 + \Omega^2)W(x) + 2m\Omega\omega V(x) - N^T \left(\frac{\partial^2 W}{\partial^2 x} \right) = 0 & (2.6) \end{cases}$$

En utilisant la coordonnée adimensionnelle $\xi = \frac{x}{L}$, où $0 \leq \xi \leq 1$ on obtient

$$\begin{cases} \frac{EI_{zz}}{L^4} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial^4 \xi} \right) - m(\Omega^2 + \omega^2)V(\xi) - 2m\Omega\omega W(\xi) - \frac{N^T}{L^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 \xi} \right) = 0 & (2.7) \\ \frac{EI_{yy}}{L^4} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial^4 \xi} \right) - m(\omega^2 + \Omega^2)W(\xi) + 2m\Omega\omega V(\xi) - \frac{N^T}{L^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial^2 \xi} \right) = 0 & (2.8) \end{cases}$$

Les transformées de chaque terme des équations de mouvement sont données par :

$$\begin{cases} V(\xi) = F(k) & (2.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(\xi) = G(k) & (2.10) \end{cases}$$

Où $F(k)$ et $G(k)$ sont les transformées de $V(\xi)$ et $W(\xi)$, respectivement.

De même pour les dérivées de ces deux fonctions

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial^2 \xi} \right) = (k+1)(k+2)F(k+2) & (2.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial^2 \xi} \right) = (k+1)(k+2)G(k+2) & (2.12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial^4 \xi} \right) = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)F(k+4) & (2.13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial^4 \xi} \right) = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)G(k+4) & (2.14) \end{cases}$$

En remplaçant les équations (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) et (2.14) dans les équations (2.7), (2.8) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{EI_{zz}}{L^4} (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)F(k+4)(-m(\Omega^2 + \omega^2))F(k) \\ -2m\Omega\omega G(k) + \frac{N^T}{L^2} (k+1)(k+2)F(k+2) = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{EI_{yy}}{L^4} (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)G(k+4)(-m(\Omega^2 + \omega^2))G(k) \\ +2m\Omega\omega F(k) + \frac{N^T}{L^2} (k+1)(k+2)G(k+2) = 0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

II-5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites dans le cas général sont explicitées dans le tableau suivant

Tableaux 2. : Conditions aux limites

$\xi = 0$	
$V(0) = 0$	$F(0) = 0$
$W(0) = 0$	$G(0) = 0$
$\frac{\partial V(0)}{\partial \xi} = 0$	$F(1) = 0$
$\frac{\partial W(0)}{\partial \xi} = 0$	$G(1) = 0$
$\frac{\partial^2 V(0)}{\partial \xi^2} = 0$	$F(2) = 0$
$\frac{\partial^2 W(0)}{\partial \xi^2} = 0$	$G(2) = 0$
$\frac{EI_{zz}}{L^2} \frac{\partial^3 V(0)}{\partial \xi^3} - N^T \left(\frac{\partial V(0)}{\partial \xi} \right) = 0$	$\frac{EI_{zz}}{L^2} F(3) - N^T F(1) = 0$
$\frac{EI_{yy}}{L^2} \frac{\partial^3 W(0)}{\partial \xi^3} - N^T \frac{\partial W(0)}{\partial \xi} = 0$	$\frac{EI_{yy}}{L^2} G(3) - N^T G(1) = 0$

$$\xi = 1$$

$V(1) = 0$	$F(k) = 0$
$W(1) = 0$	$G(k) = 0$
$\frac{\partial V(1)}{\partial \xi} = 0$	$\sum_{k=0}^N k[(k-1)] F(k) = 0$
$\frac{\partial W(1)}{\partial \xi} = 0$	$\sum_{k=0}^N k[(k-1)] G(k) = 0$
$\frac{\partial^2 V(1)}{\partial \xi^2} = 0$	$\sum_{k=0}^N k[(k-1)] F(k) = 0$
$\frac{\partial^2 W(1)}{\partial \xi^2} = 0$	$\sum_{k=0}^N k[(k-1)] G(k) = 0$
$\frac{EI_{zz}}{L^2} \frac{\partial^3 V(1)}{\partial \xi^3} - N^T \left(\frac{\partial V(1)}{\partial \xi} \right) = 0$	$\sum_{k=0}^N \frac{EI_{zz}}{L^2} k[(k-1)(k-2)] F(k) - N^T k F(k) = 0$
$\frac{EI_{yy}}{L^2} \frac{\partial^3 W(1)}{\partial \xi^3} - N^T \frac{\partial W(1)}{\partial \xi} = 0$	$\sum_{k=0}^N \frac{EI_{yy}}{L^2} k[(k-1)(k-2)] G(k) - N^T k G(k) = 0$

En remplaçant les conditions aux limites dans (2.15) et (2.16) le système d'équations obtenu sera de la forme :

$$A_{j1}^N(\omega)c_1 + A_{j2}^N(\omega)c_2 + A_{j3}^N(\omega)c_3 + A_{j4}^N(\omega)c_4 = 0, \quad j = 1, 2, 3 \dots N \quad (2.17)$$

où $A_{j1}^N(\omega)$, $A_{j2}^N(\omega)$ sont des fonctions polynômiales correspondant au nième terme. Le système d'équations sous forme matricielle est donné par :

$$\begin{bmatrix} A_{11}^N(\omega) & A_{12}^N(\omega) & A_{13}^N(\omega) & A_{14}^N(\omega) \\ A_{21}^N(\omega) & A_{22}^N(\omega) & A_{23}^N(\omega) & A_{24}^N(\omega) \\ A_{31}^N(\omega) & A_{32}^N(\omega) & A_{33}^N(\omega) & A_{34}^N(\omega) \\ A_{41}^N(\omega) & A_{42}^N(\omega) & A_{43}^N(\omega) & A_{44}^N(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

Où c_1 , c_2 , c_3 , et c_4 dépendent des conditions aux limites choisies.

L'équation caractéristique du système est déterminée à partir du déterminant du système d'équations précédant

$$\begin{vmatrix} A_{11}^N(\omega) & A_{12}^N(\omega) & A_{13}^N(\omega) & A_{14}^N(\omega) \\ A_{21}^N(\omega) & A_{22}^N(\omega) & A_{23}^N(\omega) & A_{24}^N(\omega) \\ A_{31}^N(\omega) & A_{32}^N(\omega) & A_{33}^N(\omega) & A_{34}^N(\omega) \\ A_{41}^N(\omega) & A_{42}^N(\omega) & A_{43}^N(\omega) & A_{44}^N(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

La valeur de N est obtenue en fonction du critère de convergence suivant

$$|\omega_j^{(N)} - \omega_j^{(N-1)}| \leq Tol \quad (2.20)$$

où *Tol* est la tolérance exigée.

Chapitre III :

organisation de la programmation

Chapitre III

Organisation de la programmation

III-1 Introduction :

Dans ce chapitre les étapes de calcul sont éclairées. Un programme en MATHCAD est réalisé pour déterminer les fréquences propres du système.

III-2 Organigramme :

L'organigramme suivant montre toutes les étapes de calcul réalisées de la lecture des données jusqu'à l'affichage des résultats.

III-3 Programme principal :

Le programme principal pour la résolution des équations de mouvement transformées et les différentes étapes utilisées sont décrites dans la suite de cette étude :

1. Lecture des données physiques et géométriques de l'arbre
2. Introduction des la condition aux limites
3. Calcul des fonctions transformées
4. Formation du système d'équations algébrique
5. Calcul du déterminant de la matrice
6. Résolution de l'équation caractéristique du système
7. Affichage des fréquences propres

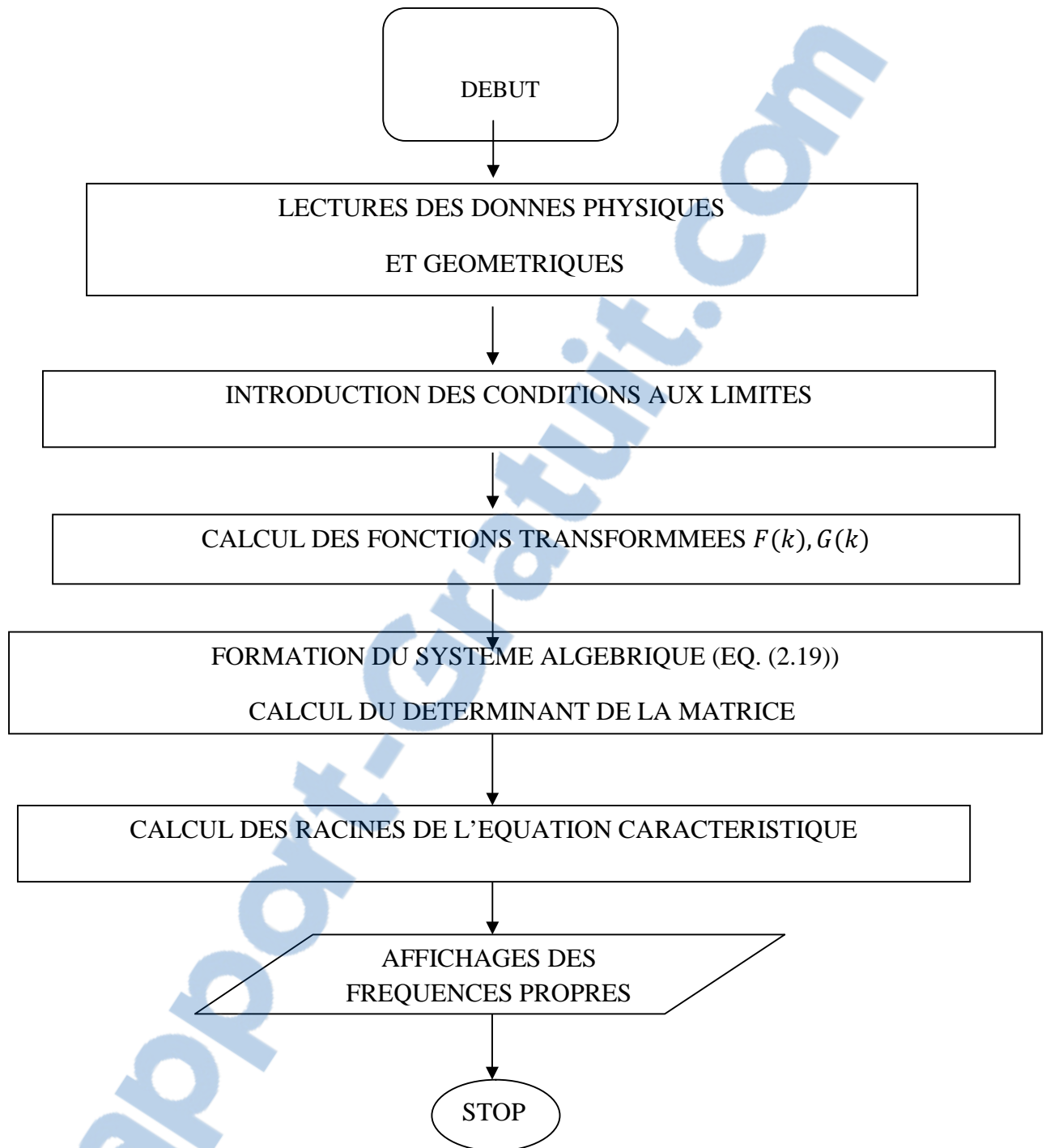


Figure 3.1 : Schéma de calcul global

III-4 Description du programme :

1. Fichier de données

Tous les paramètres les données physiques et géométriques utilisés, décrivant l'arbre, sont données dans un fichier « DONNEES.txt » au début du programme

Les données du problème sont:

E : Modulus d'élasticité

A : Section droite de l'arbre

L : Longueur de l'arbre

N : Nombre de terme.

ρ : Masse volumique

Ω : Vitesses de rotation de l'arbre

I_{yy} : Moment d'inertie de l'arbre suivant l'axe y

I_{zz} : Moment d'inertie de l'arbre suivant l'axe z

α : Coefficient de la dilatation thermique

ΔT : Gradient thermique

2. Sous-programme pour le calcul des fonctions transformées

3. Après avoir introduit les données nécessaires l'étape suivante consiste à calculer :

$F(k)$: Le déplacement suivant l'axe y

$G(k)$: Le déplacement suivant l'axe z

En introduisant les conditions aux limites. Le sous-programme développé est appelé « TRANSF.xmcd »

4. Formation du système algébrique et calcul du déterminant

La formation de la matrice du système est obtenue à partir des conditions aux limites et des fonctions transformées de chaque cas, finalement nous obtenons le système algébrique suivant :

$$\begin{bmatrix} A_{11}^N(\omega) & A_{12}^N(\omega) & A_{13}^N(\omega) & A_{14}^N(\omega) \\ A_{21}^N(\omega) & A_{22}^N(\omega) & A_{23}^N(\omega) & A_{24}^N(\omega) \\ A_{31}^N(\omega) & A_{32}^N(\omega) & A_{33}^N(\omega) & A_{34}^N(\omega) \\ A_{41}^N(\omega) & A_{42}^N(\omega) & A_{43}^N(\omega) & A_{44}^N(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

Le calcul du déterminant de la matrice est obtenue en utilisant la fonction **déterminant** de MATHCAD.

$$\begin{vmatrix} A_{11}^N(\omega) & A_{12}^N(\omega) & A_{13}^N(\omega) & A_{14}^N(\omega) \\ A_{21}^N(\omega) & A_{22}^N(\omega) & A_{23}^N(\omega) & A_{24}^N(\omega) \\ A_{31}^N(\omega) & A_{32}^N(\omega) & A_{33}^N(\omega) & A_{34}^N(\omega) \\ A_{41}^N(\omega) & A_{42}^N(\omega) & A_{43}^N(\omega) & A_{44}^N(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

Le sous- programme développé est appelé « DETER.xmcd »

5. Résolution de l'équation caractéristique du système :

Résolution de l'équation caractéristique du système se fait numériquement pour déterminer à la fin les fréquences propres du système, en utilisant la fonction **polyroots** de Mathcad . Le sous programme est appelé « FREQ.xmcd ». Les résultats obtenus sont les fréquences propres du système.

6. Affichage des fréquences propres

Les résultats obtenus sont affichés dans un fichier de sortie appelé « RESULTS.txt ».

Chapitre IV :

Validations , comparaisons
et analyse de cas

Chapitre IV

Validations, comparaisons et analyse de cas

IV-1 Introduction

Nous présenterons dans ce chapitre une analyse dynamique d'un arbre tournant soumis à un gradient de température provoqué par les conditions de l'environnement. La première partie de ce chapitre met en évidence la validité du programme développé, ainsi une étude comparative est faite avec des travaux de différents auteurs. La deuxième partie fait l'objet d'une étude d'un arbre tournant soumis à un gradient thermique,

IV-2 Validations et comparaisons des résultats dans le cas stationnaire :

Les résultats obtenus seront validés avec des résultats de la littérature. Différentes conditions aux limites sont considérées.

IV-2.1 Arbre sans l'effet du gradient de température à section circulaire ($I_{yy} = I_{zz} = I$)

- **Cas stationnaire**

Dans ce cas l'arbre est dans un état stationnaire $\Omega = \mathbf{0}$, il n'est soumis à aucun effet de température, les résultats du paramètre de fréquence obtenu par calcul en utilisant la méthode de transformation différentielle sont validés avec ceux obtenus par la solution exacte, pour différentes conditions aux limites. Les paramètres de fréquence et de vitesse utilisés dans ce cas sont donné par

$$\omega^* = \omega L^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.1)$$

$$\Omega^* = \Omega L^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.2)$$

Tableau 4.1 : convergence dans le cas d'une poutre Appuyée-Appuyée :
 $\Omega^* = 0$

N	mode			
	1	2	3	4
10	9.672	-	-	-
20	9.867	39.398	-	-
30	9.867	39.459	88.737	-
40	9.866	39.459	88.752	157.754
50	9.866	39.478	88.826	157.913
Solution	9.866	39.478	88.826	157.913
Exacte	9.986	39.478	88.826	157.913

Tableau 4.2 : Convergence dans le cas d'une poutre Encasté –libre:
 $\Omega^* = 0$

N	mode			
	1	2	3	4
10	3.507	-	-	-
20	3.516	22.034	-	-
30	3.516	22.034	61.697	
40	3.516	22.034	61.697	120.902
Solution	3.516	22.034	61.697	120.902
Exacte	3.516	22.034	61.697	120.902

Les tableaux (4.1) et (4.2) montrent que la convergence des quatre premiers modes est assurée en faisant augmenter le nombre N jusqu'à 40 pour une poutre Encastée-Libre et 50 termes pour une poutre Appuyée-Appuyée. Les résultats obtenus sont identiques aux résultats de la solution exacte.

• **Cas d'un arbre en mouvement de rotation**

Le problème traité concerne un arbre en mouvement de rotation. La solution obtenue en faisant varier Ω dans le cas d'une poutre

Encasté – Libre et comparée avec la solution exacte [6].

Tableau 4.3 : Convergence dans le cas d'une poutre Encasté – libre : $\Omega^* = 2$

N	mode					
	1	2	3	4	5	6
10	1.507	5.507	-	-	-	-
20	1.516	5.516	-	-	-	-
30	1.516	5.516	22.034	24.034	59.696	-
40	1.516	5.516	22.034	24.034	59.696	63.697
solution	1.516	5.516	20.034	24.034	59.697	63.697
Exacte	1.516	5.516	20.034	24.034	59.697	63.697

Tableau 4.3 : Convergence dans le cas d'une poutre Encasté – libre :

$$\Omega^* = 3.5$$

N	mode					
	1	2	3	4	5	6
10	7.007	-	-	-	-	-
20	0.001	7.016	18.534	-	-	-
30	0.001	7.016	18.534	25.534	-	-
40	0.001	7.016	18.534	25.534	58.697	65.697
Solution	0.000	7.016	18.534	25.534	58.697	65.697
Exacte	0	7.016	18.534	25.534	58.697	65.697

Tableau4.5 : Convergence dans le cas d’une poutre Encastré –libre :
 $\Omega^* = 4$

N	mode					
	1	2	3	4	5	6
10	0.049	7.507	-	-	-	-
20	0.048	7.516	18.034	26.034	-	-
30	0.048	7.516	18.035	26.034	57.697	-
40	0.001	7.016	18.034	26.034	57.697	65.697
solution	0	7.016	18.034	26.034	57.697	65.697
Exacte	0	7.516	18.034	26.034	57.697	65.697

Tableau4.6 : Convergence dans le cas d’une poutre Encastre-libre :
 $\Omega^* = 8$

N	mode					
	1	2	3	4	5	6
10	-	11.507	-	-	-	-
20	-	11.516	14.034	30.034	-	-
30	-	11.516	14.034	30.034	53.696	-
40	-	11.516	14.034	30.034	53.696	69.697
solution	-	11.516	14.034	30.034	53.697	69.697
Exacte	-	11.516	14.034	30.034	53.697	69.697

Les tableaux (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) montrent que la convergence est assurée en faisant augmenter le nombre des itérations, 40 itérations sont suffisantes pour assurer la convergence des six premiers modes. Les résultats obtenus sont identiques aux résultats de la solution exacte donnée par [6].

IV-2.2 Arbre sans l'effet du gradient de température à section rectangulaire ($I_{yy} = 100I_{zz}$)

- **Cas d'un arbre en mouvement de rotation**

Le problème traité concerne un arbre en mouvement de rotation de section rectangulaire. La solution obtenue en faisant varier Ω dans le cas d'une poutre Encastre – libre est comparée avec la solution exacte [6].

Tableau4.7 : Convergence dans le cas d'une poutre Encastre – libre :
 $\Omega^* = 1.1$

N	mode			
	1	2	3	4
10	0	-	-	-
20	0	6.886	-	-
30	0	6.886	11.307	19.473
solution	0	6.886	11.307	19.473
Exacte	0	6.866	11.307	19.473

Tableau4.8 : Convergence dans le cas d'une poutre Encastre – libre:
 $\Omega^* = 2$

N	mode			
	1	2	3	4
10	-	-	-	-
20	-	6.663	-	-
30	-	6.663	11.632	19.404
solution	-	6.663	11.632	19.404
Exacte	-	6.663	11.632	19.404

Tableau4.9 : Convergence dans le cas d'une poutre Encastre –libre :

$$\Omega^* = 4$$

N	mode			
	1	2	3	4
10	-	-	-	-
20	-	5.667	-	-
30	-	5.667	12.900	19.080
solution	-	5.667	12.900	19.080
Exacte	-	5.667	12.900	19.080

Tableau4.10 : Convergence dans le cas d'une poutre Encastre –libre:

$$\Omega^* = 6$$

N	mode			
	1	2	3	4
10	-	-	-	-
20	-	3.490	14.536	-
30	-	3.491	14.536	18.530
solution	-	3.491	14.543	18.530
Exacte	-	3.491	14.536	18.530

Tableau4.11 : Convergence dans le cas d'une poutre Encastre –libre:

$$\Omega^* = 7.1$$

N	mode			
	1	2	3	4
10	-	-	-	-
20	-	0	-	-
30	-	0	15.526	-
solution	-	0	15.526	18.118
Exacte	-	0	15.526	18.118

Tableau4.12 : Convergence dans le cas d'une poutre Encastre –libre:
 $\Omega^* = 8$

N	mode			
	1	2	3	4
10	-	-	-	-
20	-	-	-	-
30	-	-	16.336	-
solution	-	-	16.336	17.734
[6]	-	-	16.336	17.734

Les tableaux (4.7) ,(4.8) ,(4.9) ,(4.10) ,(4.11) ,(4.12) montrent que la convergence est assurée en faisant augmenter le nombre des itérations, 30 itérations sont suffisantes pour assurer la convergence des quatre premiers modes. Les résultats obtenus sont identiques aux résultats de la solution exacte donnée par [6].

IV-2.Diagramme de Campbell :

Les graphes qui suivent donnent la variation du paramètre de fréquence en fonction de la variation de la vitesse de rotation, appelés diagramme de Campbell. Différentes conditions aux limites sont considérées pour deux types de sections : circulaire et rectangulaire.

Les figures (4.1), (4.2) et (4.3) montrent respectivement la variation du paramètre de fréquence ω^* en fonction du paramètre de vitesse de rotation Ω^* (diagramme de Campbell) dans le cas des poutres avec les conditions aux limites E-L, et A-A en prenant en compte deux sections différentes : une circulaire et l'autre rectangulaire. Ces figures montrent l'influence de la vitesse de rotation sur les fréquences propres d'un arbre tournant. Dans le cas où nous avons $I_{yy} = I_{zz}$, on remarque que pour chaque vitesse de rotation, il existe deux fréquences, il y a des valeurs croissantes en fonction de la vitesse de rotation appelées modes en précession directe ; et d'autres décroissantes appelées modes rétrogrades.

Ce phénomène est provoqué par l'effet gyroscopique. En effet, on remarque aussi qu'il existe une variation proportionnelle entre la vitesse de rotation et la fréquence propre provoquée par la rigidification centrifuge. On constate aussi qu'il existe une vitesse critique une à $\Omega^* = 3.5$ dans le cas E-L et une autre à $\Omega^* = 10.1$ dans le cas A-A.

Dans le cas où nous avons $I_{yy} = 100I_{zz}$, on remarque que le comportement est complètement différent du premier cas. La première, la deuxième et la quatrième fréquence diminue avec la vitesse de rotation, par contre la troisième fréquence augmente avec cette dernière. Et ceci est dû au fait que les rigidités de la poutre suivant les deux axes sont différentes (I_{yy} est largement supérieure à I_{zz}). On constate qu'il existe deux vitesses critiques une à $\Omega^* = 1.1$ et l'autre à $\Omega^* = 7.1$.

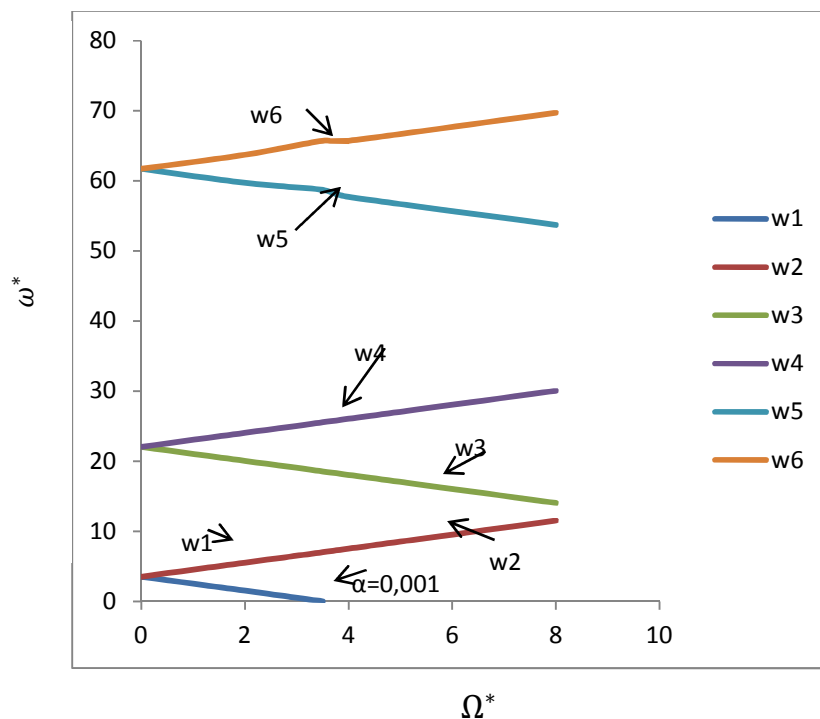


Figure 4.1 : Diagramme de Campbell dans le cas de poutre E-L avec $I_{yy} = I_{zz}$

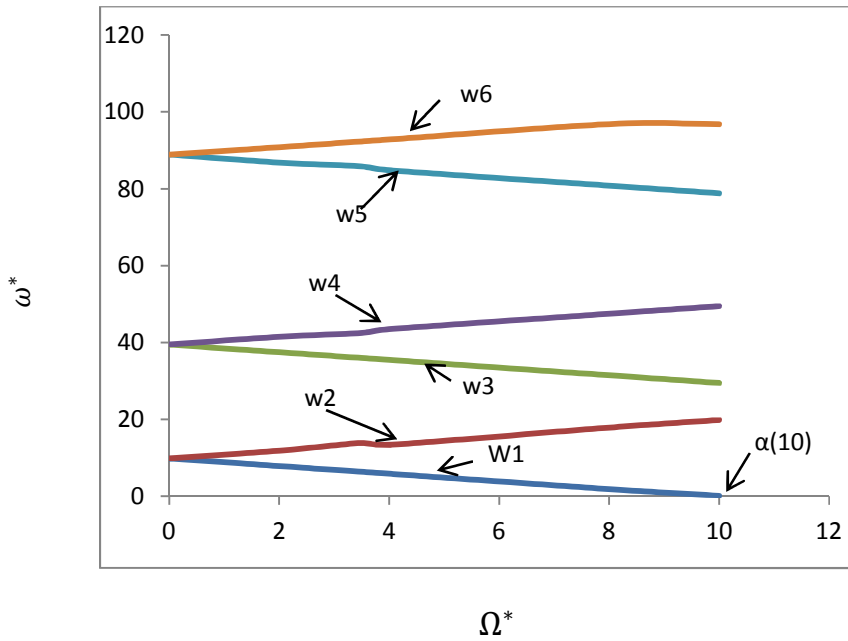


Figure 4.2 : Diagramme de Campbell dans le cas de poutre Appuyée-Appuyée avec $I_{yy} = I_{zz}$

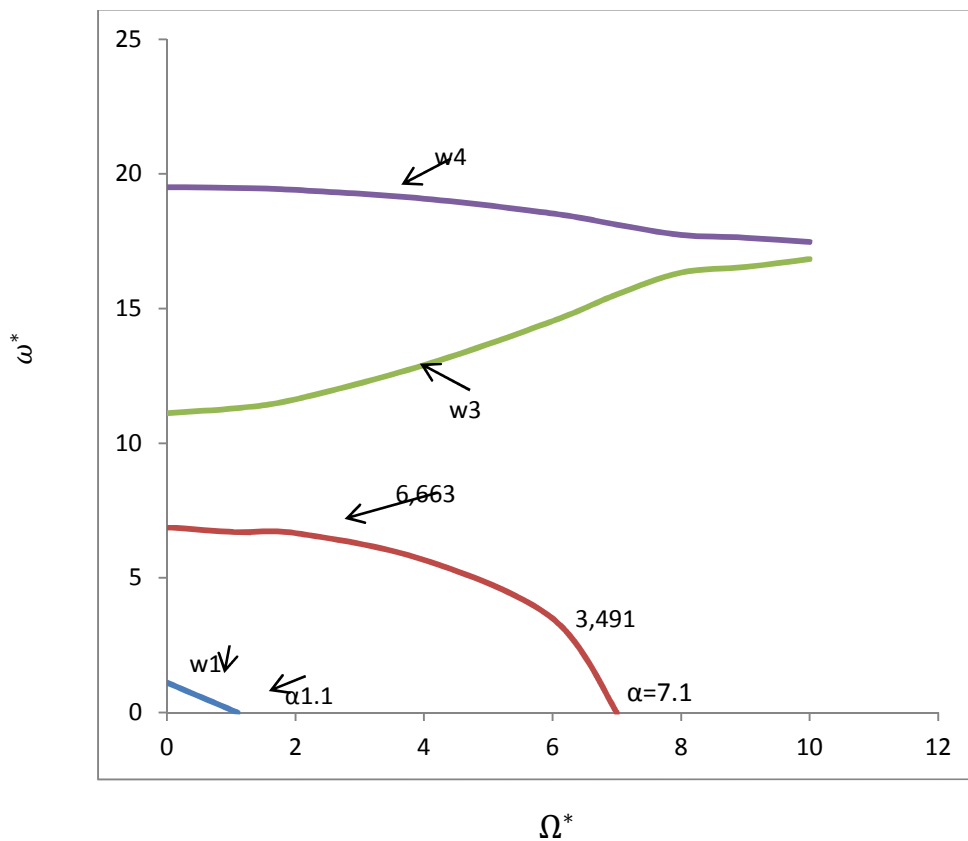


Figure 4.3 : Diagramme de Campbell dans le cas de poutre Encasturé-Libre avec $I_{yy} = 100I_{zz}$.

IV-3. Arbre avec l'effet du gradient de température

Les graphes qui suivent donnent la variation du paramètre de fréquence en fonction du gradient thermique dans le cas stationnaire et en rotation d'une poutre ayant $I_{yy} = I_{zz}$.

Les figures (4.4), (4.5) montrent respectivement la variation du paramètre de fréquence ω^* en fonction du gradient thermique d'une poutre E-L dans le cas stationnaire et en rotation. On constate que la première fréquence augmente avec le gradient thermique.

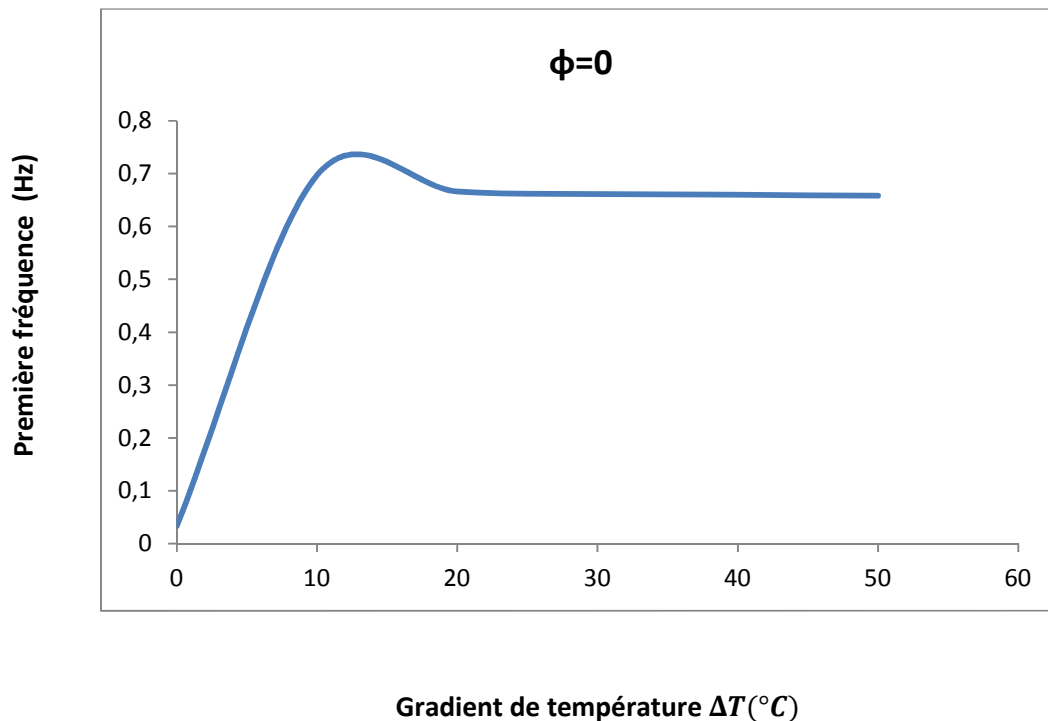


Figure 4.4 : Variation de la première fréquence en fonction de la température propre d'un arbre E-L soumis de l'effet gradient thermique

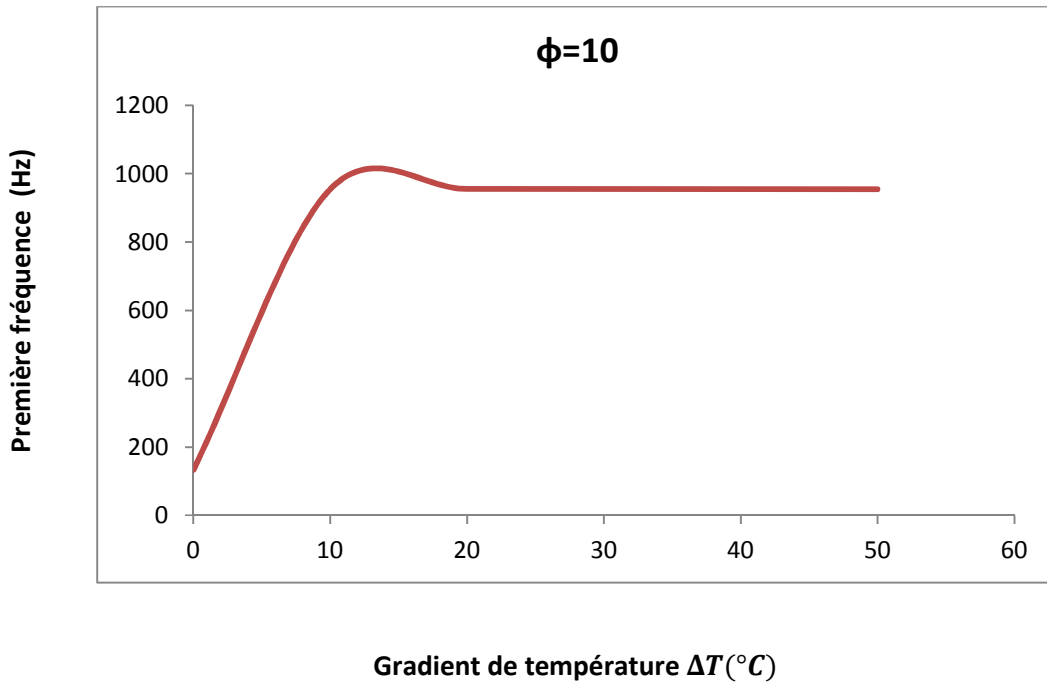


Figure 4.5: Variation de la première fréquence en fonction de la température propre d'un arbre E-L soumis de l'effet gradient thermique

Conclusion générale

Conclusion

Le travail réalisé est une étude sur la prédiction des fréquences propres d'un arbre tournant soumis à un gradient thermique. Une étude théorique a permis la détermination des équations de mouvement de l'arbre. La méthode de transformation différentielle a été utilisée pour déterminer les fréquences propres du système en faisant varier la vitesse de rotation, les conditions aux limites, ainsi que le gradient thermique.

Cette étude nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

- Pour différentes conditions aux limites, dans le cas stationnaire et en rotation, la convergence de la solution est assurée en faisant augmenter N le nombre de terme de la série. Les résultats sont en concordance avec les solutions exactes dans le cas stationnaire et en rotation.
- L'effet gyroscopique provoque un couplage des déplacements orthogonaux ce qui a pour conséquence de séparer les fréquences propres en deux branches : mode en précession directe et mode rétrograde.
- La variation de la vitesse de rotation provoque une rigidification de l'arbre dans le cas des modes en précession directe qui se traduit par une croissance de la fréquence avec la vitesse de rotation.
- Les arbres tournants traversent plusieurs vitesses critiques en mode rétrograde.
- L'effet de température a un effet rigidifiant, la fréquence propre du système augmente avec le gradient thermique.

Les perspectives d'études qui peuvent être menée à la suite de ce travail sont: intégration d'un matériau composite, prise en compte des supports

élastiques et leurs mouvements dans le cas d'un rotor embarqué comme le cas des réacteurs d'avion, analyse des vibrations forcées, etc....

References Bibliographies

References Bibliographies

- [1]H.F.Bauer,Vibration of a rotating uniform beam, part I: orientation in the axis of rotation. J Sound Vib (1980) ;72:177–89.
- [2]J.Wu, Zheng.Zu and P.S Ray.Han, Natural frequencies and normal modes of spinning Timoshenko beams with general boundary conditions, Journal of applied mechanics, June (1992) , vol.59, 197-204.
- [3] Hu. K., NVlahopoulos. and Z.P Mourelatos, A finite element formulation for coupling rigid and flexible body dynamics of rotating beams, J. Sound Vib.(2002) ; 253(1), 903-630.
- [4] H.D. Nelson and J.M. McVaugh, The dynamics of rotor bearing systems using finite elements, ASME J. Engng. Ind.(1976) ; 98, 593-600.
- [5]B.J.Gaganis,A.K.Zisimopoulos,P.G.Nikolakopoulos,C.A.Papadopoulos,Modal analysis of rotor on piecewise linear journal bearings under seismic excitation, Journal of vibration and acoustics.(1999) ; vol.121.
- [6]J.R. Banerjee, H. Su development of a dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of spinning beams Computers and Structures 82 (2004) 2189-2197.
- [7]Y.M.Huang, M.L.Yang Dynamic analysis of a rotating beam subjected to repeating axial and transverse forces for simulating a lathing process International Journal of Mechanical Sciences 51(2009)256-268.
- [8]Mohammed F.Abdul Azeez, Alexander F.Vakakis, Numerical and experimental analysis of a continuous overhung rotor undergoing vibro-impact, International journal of non-linear mechanics.(1999) , 34(1999)415-435.
- [9]HP.Lee, Dynamic stability of spinning beams of unsymmetrical cross-section with distinct end conditions. J Sound Vib (1996);189:161-71.
- [10]A. Boukhalifa, A. Hadjoui, SM Hamza-Cherif Free vibration analysis of a rotating composite shaft by using the Fourier p-version of the finite element method, International journal of rotating machinery Volume (2008) ID : 753062, 2008.
- [11]J.K. Zhou, Differential Transformation and its Application for Electric Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, P. R. China, (1986) (in Chinese).

- [12] C. Bervillier, Status of the differential transformation method *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 10158-10170.
- [13] M.J. Jang, C.L. Chen, Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transformation technique, *Applied Mathematics and Computation* 88 (1997) 137-151.
- [14] M. Malik, H.H. Dang, Vibration analysis of continuous systems by differential transformation, *Applied Mathematics and Computation* 96 (1998) 17-26.
- [15] C.K. Chen, S.H. Ho, Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko beam under axial loading using differential transform, *International Journal of Mechanical Sciences* 41 (1999) 1339-1356.
- [16] M. Malik, M. Allali, Characteristic equations of rectangular plates by differential transformation, *Journal of Sound and Vibration* 233 (2) (2000) 359-366.
- [17] H. Zeng, C.W. Bert, Vibration analysis of a tapered bar by differential transformation, *Journal of Sound and Vibration* 242 (2) (2000) 737-739.
- [18] P. Schiavone, C. Costanda, A. Mioduchowski (Eds.), *Integral Methods in Science and Engineering*, Birkhauser, Boston, (2002), pp. 173-178.
- [19] Sundaramoorthy Rajasekaran Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature methods, *Applied Mathematical Modelling*, 37 (2013) 4440-4463.