

Table des matières

Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
Table des matières.....	v
Liste des figures.....	vi
Liste des tableaux.....	vii
Remerciements.....	viii
Chapitre 1 Introduction.....	1
Chapitre 2 Concepts théoriques préalables au modèle.....	4
2.1 Sommes de renouvellement sans escompte.....	4
2.2 Sommes de renouvellement avec réclamations escomptées.....	8
2.3 Mesures de risque.....	11
2.4 Processus de réserve et probabilité de ruine.....	15
2.5 Taux de défaillance et dominance stochastique.....	17
2.5.1 Taux de défaillance.....	17
2.5.2 Dominance stochastique.....	18
Chapitre 3 Accroissements du total des réclamations escomptées avec conditionnement sur l'expérience.....	20
3.1 Évaluation des premiers moments conditionnels simples et conjoints.....	20
3.2 Transformée de Laplace de la distribution des accroissements conditionnels.....	41
3.3 Fonction de répartition des accroissements conditionnels.....	47
3.4 Accroissements conditionnels dans un contexte avec dépendance entre X_k et τ_k	49
Chapitre 4 Applications.....	61
4.1 Mesures de risque.....	61
4.1.1 Value at Risk.....	61
4.1.2 Tail Value at Risk.....	63
4.1.3 Prime d'écart-type.....	65
4.1.4 Prime de Wang.....	66
4.2 Processus de réserve et de ruine.....	68
4.2.1 Simulation du processus de réserve et de la probabilité de ruine.....	69
4.2.2 Borne de type Lundberg.....	72
Chapitre 5 Conclusion.....	77
Bibliographie.....	79
Annexe.....	81

Liste des figures

Figure 1 : $E[Z_{t,n}(h)]$ pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X_i \sim \exp(1)$, $t=3$, $h=1$ et $\delta=5\%$	81
Figure 2 : $E[Z_{t,n}(h)]$ pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=1)$, $X_i \sim \exp(1)$, $t=3$, $h=1$ et $\delta=5\%$	81
Figure 3 : $E[Z_{t,n}^2(h)]$ pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X_i \sim \exp(1)$, $t=3$, $h=1$ et $\delta=5\%$	82
Figure 4 : $E[Z_{t,n}^2(h)]$ pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=1)$, $X_i \sim \exp(1)$, $t=3$, $h=1$ et $\delta=5\%$	82
Figure 5: Fonctions de répartition, approximée (rouge) et simulée, (bleu) des accroissements conditionnels du processus pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=0.05)$, $X_i \sim \exp(1)$ et $t=1$, $h=1$, $t_n=0.5$, $\delta=5\%$	83
Figure 6: Fonctions de répartition approximée (rouge) et simulée (bleu) des accroissements conditionnels du processus pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=0.05)$, $X_i \sim \exp(1)$ et $t=1$, $h=1$, $t_n=0.5$, $\delta=20\%$	83
Figure 7 : $\text{VaR}_{0.9}$ en fonction de l'âge à $t=1$ pour trois distributions différentes, en conditionnant sur l'expérience	84
Figure 8 : $\text{VaR}_{0.9}$ en fonction de l'âge à $t=1$ pour trois distributions différentes, en conditionnant sur l'expérience	84

Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Moments conditionnels simulés et théoriques (avec $t - t_n = 0.1596282$)	32
Tableau 3.2 : Moments conditionnels simulés et théoriques (avec $t - t_n = 0.8817105$)	33
Tableau 3.3 : Comparaison des valeurs obtenues pour les premiers moments	33
Tableau 3.4 : Premier moment conjoint des accroissements conditionnels	40
Tableau 3.5 : Premier moment des accroissements conditionnels du processus avec dépendance (temps exponentiels)	58
Tableau 3.6 : Premier moment des accroissements conditionnels du processus avec dépendance (temps Erlang)	59
Tableau 3.7 : Deuxième moment des accroissements conditionnels du processus avec dépendance	60
Tableau 4.1 : VaR pour différents quantiles κ , pour un âge $t - t_n = 0.85$	62
Tableau 4.2 : VaR pour différents quantiles κ , avec différents âges	62
Tableau 4.3 : TVaR pour différents quantiles κ , pour un âge $t - t_n = 0.85$	63
Tableau 4.4 : TVaR pour différents quantiles κ , avec différents âges	64
Tableau 4.5 : Prime d'écart-type pour différents chargements c , pour un âge $t - t_n = 0.15$	65
Tableau 4.6 : Prime d'écart-type pour différents chargements c , pour différents âges	66
Tableau 4.7 : Transformée PH pour différents paramètres ε et différents âges	67
Tableau 4.8 : Mesure de risques de Wang et prime d'écart-type pour un âge de 0.5	68
Tableau 4.9 : Probabilité de ruine simulée avec la prime d'écart-type (5 périodes)	70
Tableau 4.10 : Probabilité de ruine simulée avec la prime d'écart-type (2 périodes)	71
Tableau 4.11 : Probabilité de ruine simulée avec la prime VaR _{0.9}	72

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mon directeur Ghislain Léveillé et mon co-directeur Ilie Radu Mitric pour leur soutien et leur encadrement, leurs idées et leurs corrections, qu'ils ont fournis lors de mes études, mes recherches et ma rédaction.

Je remercie aussi la Chaire de recherche en actuariat de l'Université Laval pour son aide financière.

Finalement, je tiens à souligner l'importance du soutien que m'ont apporté ma famille et mes amis lors de ces trois années.

Chapitre 1 Introduction

Dans les débuts de la recherche actuarielle, les seuls processus de comptage étudiés furent ceux utilisant différentes versions de la distribution Poissonnienne, avec des réclamations non-escomptées. Pourtant, de nombreuses situations actuarielles requièrent des modèles plus fidèles à la réalité. C'est pour cela qu'ont été progressivement introduits des distributions plus complexes pour les temps entre les événements successifs et des modèles de taux d'intérêt, d'abord constants puis stochastiques, afin d'obtenir des processus de renouvellement et de sommes escomptées. Une étape supplémentaire visant à améliorer la fiabilité des modèles précédents, sur laquelle nous nous pencherons dans ce mémoire, est la prise en compte non seulement des prévisions mais aussi de l'expérience. Dans ce premier chapitre, nous revenons brièvement sur l'historique des processus de renouvellement avant de présenter les objectifs du mémoire.

L'historique des processus de renouvellement remonte au début du vingtième siècle avec la description des premiers processus de dénombrement, à commencer par le processus de Poisson. Celui-ci est décrit formellement en 1909 par Agner Krarup Erlang, ainsi que Rutherford et Geiger (1910) et Campbell (1909, 1910), simultanément. Il n'est pas appliqué immédiatement à des problèmes actuariels, mais est utilisé dans de nombreuses autres disciplines (biologie, physique, médecine, etc.). À la même époque, Filip Lundberg (1903) développe une première mouture du modèle collectif du risque classique dans sa thèse de doctorat, *Approximations of the Probability Function/Reinsurance of Collective Risks*, sans que ses découvertes ne rayonnent à leur juste valeur en raison de l'absence de traduction du suédois.

Jusqu'au milieu du vingtième siècle, on utilise uniquement des temps indépendants et exponentiels entre les événements. C'est Sparre Andersen, avec deux articles présentés en 1946 et 1957, qui propose le premier d'utiliser les processus de renouvellement pour modéliser le temps entre les événements successifs, dans un contexte actuariel. Ceux-ci permettent de mieux représenter de nombreuses situations rencontrées dans le milieu de l'assurance, en complexifiant néanmoins des expressions auparavant simples pour les

moments et pour la fonction génératrice de moments. Nous assistons ainsi à la naissance de la théorie des sommes de renouvellement, sur laquelle se pencheront entre autres Thorin (1975) et Janssen (1981).

L'idée de considérer la somme des réclamations escomptées, afin de présenter une estimation plus réaliste de coûts, est présentée par Taylor (1979) puis Delbaen & Haezendonck (1987) ainsi que Willmot (1989), sans toutefois que soient obtenus des résultats très poussés, hormis dans des cas simples (i.e. Poisson). Ce sont Léveillé & Garrido (2001a) qui obtiennent des identités pour les deux premiers moments, à l'aide d'arguments de renouvellement, avant de proposer une formule récursive pour le calcul des moments (Léveillé & Garrido, 2001b) dans le cas où les réclamations ont une distribution à « queue légère ». Léveillé *et al.* (2010) obtiennent aussi finalement une expression générale pour la fonction génératrice des moments applicable dans tous les cas où la distribution du temps entre les événements appartient à la famille des distributions Phase-type, une famille de distributions dense dans l'ensemble des distributions à support sur les réels positifs.

De nouveaux développements du modèle des sommes de réclamations escomptées sont apportés par Léveillé & Adékambi, d'abord en 2010, en proposant une expression pour la covariance puis une expression récursive pour les moments conjoints du processus des sommes de renouvellement avec réclamations escomptées, et ensuite en 2012, par l'extension du modèle avec escompte à taux déterministe à un modèle avec escompte à taux stochastique. Des expressions générales sont développées pour les identités usuelles (premiers moments, fonction génératrice de moments, etc.) puis résolues avec deux modèles simples de taux d'intérêt (Ho-Lee-Merton et Vasicek). Plus récemment, Wang *et al.* (2016) examinent encore plus en profondeur les distributions de ces sommes ainsi que certaines mesures de risque dans un contexte de renouvellement et de taux d'intérêt constants.

Si, comme nous le constatons avec ce bref historique, on a traité des sommes de renouvellement escomptées à de nombreuses reprises et développé de nombreuses identités sur une période de temps, on n'a jamais essayé d'utiliser dynamiquement l'expérience du modèle pour prédire le comportement futur des accroissements de ce processus, dans un

contexte autre que celui de la théorie de la crédibilité. Cette dernière approche, résumée dans Bühlmann & Giser (2005), adopte une méthode plus statistique, alors que nous nous proposons dans ce mémoire d'utiliser une approche purement stochastique. En conditionnant sur toute l'information accumulée par le processus durant une première période, nous étudions le comportement du processus durant la période suivante. Nous développons ainsi des identités pour les premiers moments simples et conjoints du processus escompté conditionnel, puis nous présentons une expression pour la transformée de Laplace du processus (et, conséquemment, sa fonction génératrice de moments). Cette transformée nous permet de décrire, par inversion, la distribution du processus conditionnel dans certains cas spécifiques. Par la suite, nous comparons analytiquement et numériquement les résultats obtenus avec et sans conditionnement, afin de constater et quantifier la plus-value apportée par notre approche. Finalement, nous étudions l'incidence de notre modèle sur quelques applications classiques du modèle non conditionnel escompté, entre autres sur les mesures de risques les plus populaires, le processus de réserve et la probabilité de ruine.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les concepts préalables à l'établissement du modèle. Nous définissons les processus de renouvellement, les identités reliées, le processus de réserve et les mesures de risque que nous emploierons ultérieurement. Au troisième chapitre, nous présentons le modèle sur des périodes successives, développé par conditionnement sur l'expérience, et nous établissons plusieurs identités reliées aux moments et transformées. Dans le quatrième chapitre, nous présentons les conséquences de l'utilisation de notre modèle sur diverses applications reliées à l'actuariat; mesures de risque, ruine, processus de réserve. Finalement au cinquième chapitre, nous concluons en résumant les différents résultats obtenus et en proposant des pistes pour des recherches ultérieures.

Chapitre 2 Concepts théoriques préalables au modèle

Ce chapitre permet d'introduire les différents concepts mathématiques et actuariels en rapport avec les processus de renouvellement et les mesures de risque dont nous ferons usage dans les chapitres 3 et 4. Nous débutons par la présentation des différentes composantes de base d'un processus de réclamation classique, incluant les équations et propriétés qui y sont reliées, puis nous ajoutons la notion de taux d'escompte constant pour l'actualisation des réclamations. Nous continuons cette section en présentant les différents types et caractéristiques des mesures de risque qui seront utilisées dans ce mémoire. Enfin, nous décrivons le processus de réserve, en définissant la probabilité de ruine et en introduisant les concepts de taux de défaillance et de dominance stochastique.

2.1 Sommes de renouvellement sans escompte

Dans le modèle classique du risque, les deux composantes de base du processus sont la sévérité de chacune des réclamations et le temps écoulé entre chacune des réclamations, temps qui régit aussi le processus du nombre de réclamations dans une période donnée. Nous pouvons ainsi écrire les différentes variables aléatoires comme suit :

- τ_k représente le temps entre les $(k-1)$ -ième et k -ième réclamations, $k \in N^* = \{1, 2, \dots\}$
- $\{\tau_k, k \in N^*\}$ forme une suite de variables aléatoires positives i.i.d., avec fonction de répartition commune $F_\tau(x) = F_{\tau_k}(x)$.
- T_k représente le moment où se produit la k -ième réclamation, $T_k = T_{k-1} + \tau_k$, $T_0 = 0$.
- X_k représente la sévérité de la k -ième réclamation, sans inflation.
- $\{X_k, k \in N^*\}$ est une suite de variables aléatoires positives i.i.d., et indépendantes du processus de dénombrement.

Avec les variables précédentes, nous pouvons maintenant décrire le processus de renouvellement ordinaire $\{N(t); t \geq 0\}$ en définissant $N(t)$ comme suit :

$$N(t) = \sup \{k \in \mathbb{N}^*, T_k \leq t\}.$$

Nous définissons aussi le total des réclamations dans l'intervalle de temps $[0, t]$, soit $S(t)$, comme suit :

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, & N(t) \geq 1 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

Le lien entre le nombre d'événements dans l'intervalle $[0, t]$ et les temps où se produisent les événements est rendu explicite par l'identité suivante :

$$P(N(t) \geq k) = P(T_k \leq t) = F_{T_k}(t) = F_{\tau}^{*k}(t).$$

Cette dernière relation nous permet de définir le premier moment du processus de dénombrement, aussi appelé *fonction de renouvellement*, et noté $m(t)$, de la façon suivante :

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{T_k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{\tau}^{*k}(t).$$

Comme les sommes de convolutions de la dernière partie de l'équation sont souvent difficiles à calculer, nous notons que $m(t)$ satisfait aussi une équation de type renouvellement, i.e. lorsque nous conditionnons l'espérance du nombre de renouvellements sur le temps d'occurrence du premier événement, nous obtenons

$$E[N(t)] = \int_0^{\infty} E[N(t) | \tau = x] dF_{\tau}(x),$$

où,

$$E[N(t) | \tau = x] = \begin{cases} 1 + E[N(t-x)], & x \leq t \\ 0, & x > t \end{cases}$$

Cette dernière identité nous permet d'exprimer $m(t)$ comme étant la solution de l'équation de renouvellement suivante :

$$m(t) = \int_0^t [1 + m(t-x)] dF_\tau(x) = F_\tau(t) + \int_0^t m(t-x) dF_\tau(x) .$$

En itérant l'identité précédente, il est aisé de retrouver l'expression de $m(t)$ de cette façon :

$$\begin{aligned} m(t) &= F_\tau(t) + \int_0^t m(t-x) dF_\tau(x) \\ &= F_\tau(t) + F_\tau^{*2}(t) + \int_0^t \int_x^t m(t-x-y) dF_\tau(y) dF_\tau(x) \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_\tau^{*k}(t) . \end{aligned}$$

Néanmoins, si nous pouvons parfois résoudre l'équation de renouvellement précédente dans des cas simples, ce n'est pas toujours possible. Une manière plus efficace de trouver l'expression de $m(t)$ est d'utiliser la transformée de Laplace d'une fonction (intégrable), soit

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt .$$

D'une manière similaire, pour la fonction de renouvellement, nous définissons sa transformée de Laplace comme suit :

$$\hat{m}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} m(t) dt .$$

En utilisant l'équation de renouvellement précédente et les propriétés de la transformée de Laplace, nous pouvons démontrer la relation biunivoque entre la fonction de densité et la fonction de renouvellement

$$\hat{f}_\tau(s) = \frac{\hat{m}(s)}{\hat{m}(s) + \frac{1}{s}} ,$$

ou, de façon équivalente,

$$\hat{m}(s) = \frac{\hat{f}_\tau(s)}{s(1 - \hat{f}_\tau(s))}.$$

Nous arrivons alors à l'expression de l'équation de renouvellement en inversant la transformée obtenue par cette identité, quand cela est possible. Par exemple, pour $\tau_1 \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$, nous obtenons

$$\hat{m}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^2 \Bigg/ s \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^2 \right) \Rightarrow m(t) = \frac{\lambda t}{2} - \frac{(1 - e^{-2\lambda t})}{4}.$$

Pour des inversions plus complexes, nous aurons recours au logiciel Maple.

En ce qui concerne la somme des réclamations non-escomptées, les formules des deux premiers moments s'avèrent importantes. Ainsi,

$$E[S(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} X_k\right] = E[N(t)]E[X],$$

$$\text{Var}[S(t)] = \text{Var}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} X_k\right] = E[N(t)]\text{Var}[X] + E^2[X]\text{Var}[N(t)].$$

Finalement, un dernier résultat intéressant en rapport avec un processus de renouvellement ordinaire est la distribution marginale du temps d'occurrence du k -ième événement conditionnellement au nombre d'événements dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Ces résultats seront utiles dans le chapitre présent et dans le suivant. Nous retrouvons les preuves dans Léveillé & Adékambi (2011) :

- $f_{T_k|N(t)}(x|n) = \frac{f_{T_k}(x)P(N(t-x) = n-k)}{P(N(t) = n)}, \quad k \leq n$
- $f_{T_k, T_j|N(t)}(x, y|n) = \frac{f_{T_k}(x) f_{T_{j-k}}(y-x)P(N(t-y) = n-j)}{P(N(t) = n)}, \quad k < j \leq n.$

Il est à noter que ces identités généralisent les identités obtenues dans le cas Poisson avec la méthode des statistiques d'ordre.

2.2 Sommes de renouvellement avec réclamations escomptées

Dans cette section, nous présentons différentes identités reliées aux sommes des réclamations escomptées issues d'un processus de renouvellement ordinaire et où une force constante d'intérêt net est appliquée au montant de chacune des réclamations. Des identités sont obtenues pour les premiers moments simples et conjoints, et une expression intégrable est aussi présentée pour la transformée de Laplace.

Toujours en utilisant les mêmes variables aléatoires qu'à la section précédente, la somme des réclamations escomptées est généralement écrite comme suit :

$$Z(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} D(T_k) X_k & , N(t) \geq 1 \\ 0 & , N(t) = 0 \end{cases}$$

où $D(T_k) = \exp\left(-\int_0^{T_k} \delta(t) dt\right)$ est le facteur d'actualisation au temps $t = 0$, et $\delta(t) = \varphi(t) - \alpha(t)$

est une force d'intérêt net intégrable presque partout, $\varphi(t)$ étant une force d'intérêt et $\alpha(t)$ une force d'inflation.

Alors, puisque nous travaillons dans ce texte uniquement avec une force constante d'intérêt net $\delta > 0$, nous pouvons réécrire l'expression précédente de la façon suivante :

$$Z(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k} X_k .$$

Les identités permettant de calculer les premiers moments de ce processus ont été développées par Léveillé et Garrido (2001a) en utilisant directement des arguments de renouvellement.

Théorème 2.1 *Pour le processus de risque présenté plus haut, avec une force constante d'intérêt net $d > 0$, $E[X] = \mu_1$ et $E[X^2] = \mu_2$, nous avons*

- $E[Z(t)] = \mu_1 \int_0^t e^{-\delta v} dm(v)$
- $E[Z^2(t)] = \mu_2 \int_0^t e^{-2\delta v} dm(v) + 2\mu_1^2 \int_0^t \int_0^{t-v} e^{-\delta(2v+u)} dm(u) dm(v)$

Preuve : Voir Lévêillé et Garrido (2001a).

Si les moments des réclamations existent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des formules récursives permettant d'obtenir ces premiers moments et les moments d'ordres supérieurs, tout comme les moments conjoints, sont obtenues.

Théorème 2.2 *Pour le processus de risque présenté plus haut, avec une force constante d'intérêt net $d > 0$ et dont tous les moments de X existent, nous avons pour $n, m \in \mathbb{N}^*$,*

- $E[Z^n(t)] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E[X^{n-k}] \int_0^t e^{-n\delta v} E[Z^k(t-v)] dm(v)$
- $E[Z^n(t)Z^m(t+h)] = \sum_{k=1}^{n+m} E[X^k] \sum_{i=\lfloor k-m \rfloor_+}^{\min(k,n)} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \times \int_0^t e^{-(n+m)\delta v} E[Z^{n-i}(t-v)Z^{m-(k-i)}(t+h-v)] dm(v).$

Preuve : Voir Lévêillé & Garrido (2001b) et Lévêillé & Adékambi (2012).

Plus tard, la fonction génératrice des moments de $Z(t)$ fut obtenue sous forme d'une expression intégrable de type renouvellement par Lévêillé *et al.* (2010), et, à partir de celle-ci, une formule intégrable explicite pour la transformée de Laplace de $Z(t)$ pu également être trouvée. Ceci facilite habituellement l'obtentions des divers moments du processus.

Théorème 2.3 Pour le processus de risque présenté plus haut, avec une force constante d'intérêt net $d > 0$ et avec fonction génératrice des moments du montant de la réclamation $M_X(s)$, définie dans le voisinage du point $s = 0$, nous avons

$$M_{Z(t)}(s) = \bar{F}_\tau(t) + \int_0^t M_X(se^{-\delta v}) M_{Z(t-v)}(se^{-\delta v}) dF_\tau(v).$$

Preuve : Voir Léveillé et al. (2010).

Mentionnons qu'à partir de ces expressions, il est possible de retrouver, pour certaines distributions de temps entre les réclamations successives (notamment celles appartenant à la famille Phase-type) combinées à certaines distributions de sévérité, des expressions analytiques pour la fonction génératrice de moments. Par exemple, si $\tau \sim \exp(\lambda)$ et $X \sim \exp(\theta)$, nous obtenons (voir Léveillé et al., 2010)

$$M_{Z(t)}(s) = \exp \left[\lambda \int_0^t [M_X(se^{-\delta v}) - 1] dv \right] = \left[\frac{\theta - se^{-\delta t}}{\theta - s} \right]^{\frac{\lambda}{\delta}}.$$

Et si $\tau \sim \text{Erlang}(2, 0.02)$, $X \sim \exp(1)$ et $d = 0.02$, nous avons

$$M_{Z(t)}(s) = \frac{1}{s^2} \left\{ (s-1) [se^{-0.02t} - 2] \ln \left(\frac{1-s}{1-se^{-0.02t}} \right) + se^{-0.02t} (s-2) + 2s \right\}.$$

Pour terminer cette section, mentionnons la possibilité qu'il existe une certaine dépendance entre le temps séparant les réclamations successives et la sévérité de celles-ci. Lorsque cela sera nécessaire, pour caractériser cette dépendance, nous utiliserons des copules, qui expriment la distribution conjointe de ces variables aléatoires en fonction de leurs marginales. Par exemple, pour deux variables aléatoires continues X et Y , la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern de paramètre ω induit la densité conjointe suivante :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \{1 + \omega [1 - 2F_X(x)][1 - 2F_Y(y)]\}.$$

Il suffit alors de sélectionner un paramètre oméga adapté pour modéliser adéquatement la relation de dépendance étudiée. Pour une étude plus en profondeur des copules, il est possible de consulter Nelsen et al. (2006).

2.3 Mesures de risque

Dans cette section, nous présentons les différentes mesures de risque dont nous étudierons le comportement au chapitre 4, à la lumière du modèle développé au chapitre 3. Nous commençons d'abord par énumérer les caractéristiques que doit posséder une mesure de risque « cohérente », avant de décrire les mesures de risque en fonction de ces caractéristiques.

Dans un contexte actuariel, le but d'employer une mesure de risque est de comparer divers risques entre eux afin d'établir une prime optimale, de prévoir des réserves suffisantes ou, simplement, de choisir lesquels endosser. Un très grand nombre de mesures de risque ont été développées dans la littérature actuarielle, si bien qu'il est nécessaire d'effectuer un choix concernant celles qu'il serait préférable d'employer. Une des qualités les plus importantes que peut posséder une mesure de risque est la cohérence. Pour qu'une mesure de risque soit cohérente, il faut qu'elle soit à la fois monotone, invariante par translation, homogène positive et sous-additive. D'autres qualités souhaitables sont l'invariance en loi, l'additivité comonotone et le chargement non-négatif. Nous les énumérons ci-après.

- Monotonie

Pour une mesure de risque ρ , et toutes variables aléatoires X et Y telles que $P(X \leq Y) = 1$, nous dirons que la mesure est monotone si

$$\rho(X) \leq \rho(Y) .$$

Ainsi, si nous avons la certitude que la perte reliée à X est inférieure à celle reliée à Y , il est logique que le risque mesuré soit également inférieur pour X .

- Invariance par translation

Pour une mesure de risque ρ , une variable aléatoire quelconque X et une constante c , nous dirons que la mesure est invariante par translation si

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c .$$

Ainsi, l'ajout d'une quantité fixe à la perte reliée à un risque entraînera un changement identique dans la mesure.

- Homogénéité positive

Pour une mesure de risque ρ , une variable aléatoire quelconque X et une constante $c > 0$, nous dirons que la mesure est homogène positive si

$$\rho(cX) = c\rho(X).$$

Ainsi, le fait de multiplier le risque par une constante (par exemple, par un taux de change) modifiera la mesure dans la même proportion.

- Sous-additivité

Pour une mesure de risque ρ , et toutes variables aléatoires X et Y , nous dirons que la mesure est sous-additive si

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Ainsi, l'addition de deux risques réduira la mesure du risque conjoint, par rapport à l'addition des deux mesures.

Il est aisé de voir pour quelles raisons les quatre caractéristiques précédentes sont importantes. Elles facilitent de nombreuses manipulations mathématiques en plus de permettre la diversification des risques. Les mesures de risque peuvent néanmoins posséder de nombreuses autres caractéristiques. Nous en présentons quelques-unes ci-après.

- Invariance en loi

Pour une mesure de risque ρ , et toutes variables aléatoires X et Y telles que $X \stackrel{d}{=} Y$, nous dirons que la mesure est invariante en loi si

$$\rho(X) = \rho(Y).$$

Cette propriété est primordiale mais aussi quasiment toujours présente. Si deux risques sont identiques en distribution, il est logique que la mesure des risques, basée sur des distributions identiques, donne le même résultat.

- Additivité comonotone

Pour une mesure de risque ρ , et deux variables aléatoires X et Y , nous dirons que la mesure est additive comonotone si

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y) .$$

pour toutes les variables X et Y comonotones.

Cette propriété est donc semblable à la sous-additivité, si ce n'est que la fusion des deux risques n'entraînera aucun changement à la mesure, plutôt qu'une diminution de celle-ci.

- Chargement non-négatif

Pour une mesure de risque ρ , et une variable aléatoire quelconque X , nous dirons que la mesure a un chargement non-négatif si

$$\rho(X) \geq E[X] .$$

Dans un contexte actuariel, nous ne souhaitons pas charger moins que l'espérance.

Les mesures de risque que nous emploierons ne satisfont pas à toutes ces propriétés. Néanmoins, elles remplissent toutes une fonction et sont toutes plus ou moins utilisées dans le monde actuariel. Il sera donc intéressant, au chapitre 4, de s'attarder sur les effets de notre modèle sur les mesures de risque les plus populaires. Nous les présentons ici.

- Value at Risk (VaR)

Pour un risque X et un niveau de confiance κ , nous avons

$$\rho_1(X, \kappa) = \text{VaR}_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf \{x; F_X(x) \geq \kappa\} .$$

La VaR possède les propriétés d'invariance par translation, de monotonie et d'homogénéité positive, mais elle n'est pas cohérente car non sous-additive. On l'utilise cependant très souvent en raison de sa simplicité. Il suffit de connaître la fonction de répartition de la variable aléatoire pour l'évaluer et, même si celle-ci est inconnue, nous pouvons facilement approcher la valeur de la VaR par la simulation. Elle sert aussi de base à la TVaR.

- Tail Value at Risk (TVaR)

Pour un risque X et un niveau de confiance κ , nous avons

$$\rho_2(X, \kappa) = TVaR_\kappa(X) = E[X | X > VaR_\kappa(X)] = \frac{1}{1-\kappa} \int_{VaR_\kappa(X)}^{\infty} xf(x) dx.$$

Contrairement à la VaR, la TVaR est une mesure de risque cohérente puisque sous-additive. Il est cependant souvent plus difficile de l'obtenir analytiquement. De plus, les valeurs calculées avec la TVaR servent surtout à mieux apprécier et prévoir la réserve dans un contexte d'assurance, mais pas nécessairement à calculer la prime d'assurance.

- Prime d'écart-type

Pour un risque X avec $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$ et un chargement $c > 0$, nous avons

$$\rho_3(X, c) = E[X] + c\sqrt{Var(X)} = \mu + c\sigma.$$

Bien que la prime d'écart-type soit invariante par translation, monotone et homogène positive, il ne s'agit pas d'une mesure cohérente puisqu'elle n'est pas sous-additive. Elle n'est pas non plus additive comonotone, mais est invariante en loi et a un chargement non-négatif.

- Mesure de risque de Wang

Les mesures de risques de Wang forment une catégorie particulière et importante des mesures de risque. Elles ont la forme suivante :

$$\rho_g(X) = \int_0^{\infty} g(\bar{F}_X(x)) dx,$$

où g est une fonction non-décroissante telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Ainsi, il est possible de choisir une fonction g de façon à obtenir, comme cas particuliers, plusieurs mesures de risque populaires (notamment la VaR et la TVaR).

En ce qui nous concerne, nous utiliserons un cas spécifique de ces mesures, en prenant une fonction $g(x) = 1 - (1-x)^\varepsilon$ telle que

$$\rho_4(X, \varepsilon) = \int_0^\infty [1 - F_x^\varepsilon(x)] dx .$$

Lorsque ε est compris entre 0 et 1, cette mesure est appelée la transformée PH (*proportional hazard*). Elle est aussi homogène positive, monotone et invariante par translation, mais n'est pas sous-additive, ce qui l'exclue des mesures cohérentes.

Pour approfondir la connaissance de ces diverses mesures de risques et de leurs caractéristiques, on pourra consulter Denuit *et al.* (2008).

2.4 Processus de réserve et probabilité de ruine

Dans la plupart des contextes ayant recours à un processus de sommes, escomptées ou non, une prime d'assurance sera aussi calculée d'une période à l'autre afin de sécuriser la réserve initiale et permettre à l'assureur de faire face à ses obligations. Nous présentons donc dans cette section un modèle simple pour décrire le processus de réserve en temps continu, en plus d'évoquer certaines identités en rapport avec la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que la réserve devienne négative à un moment donné dans le futur.

Nous définissons ainsi le processus de réserve au temps t , sans inflation ni intérêt, comme étant la quantité $U(t)$, telle que

$$U(t) = u + \Pi(t) - S(t).$$

Dans cette équation, u représente la valeur initiale de la réserve, $\Pi(t)$ représente les primes perçues jusqu'au temps t et $S(t)$ est le processus des sommes décrit précédemment (et donc, les pertes assurées et indemnisées par l'assureur).

Dans le cas de sommes escomptées, il suffira d'appliquer le taux d'escompte aux différents éléments du processus de réserve. La réserve au temps t sera alors

$$U_{\delta}(t) = ue^{\varphi t} + \Pi_{\delta}(t) - Z(t)e^{\delta t}.$$

Le terme $\Pi_{\delta}(t)$ représente cette fois-ci les primes perçues et accumulées jusqu'au temps t . De plus, seule la force d'intérêt φ est appliquée à la réserve initiale u , puisqu'elle n'est pas affectée par la force d'inflation incluse dans la force d'intérêt net δ . Pour un cas où la force d'inflation est considérée nulle, nous aurons $\varphi = \delta$.

Dans un contexte sans intérêt ni inflation, la fonction $\Pi(t)$ est établie de diverses manières, habituellement en prenant en compte le comportement de $S(t)$. Par exemple, nous pouvons prévoir une prime dépendant de l'espérance de la façon suivante

$$\Pi(t) = (1+c)E[S(t)],$$

ou dépendant de l'espérance et de l'écart-type de la façon suivante

$$\Pi(t) = E[S(t)] + c\sqrt{\text{Var}(S(t))}.$$

Le chargement c pourrait être calculé de façon à atteindre un niveau de probabilité de ruine « acceptable » pour l'assureur. Cette probabilité de ruine, sur un horizon de temps fini, habituellement notée $\Psi(u, t)$, est définie comme suit :

$$\Psi(u, t) = P(\exists s \in [0, t], U_{\delta}(s) < 0).$$

Sur un horizon de temps infini, cette probabilité devient :

$$\Psi(u) = P(\exists s \geq 0, U_{\delta}(s) < 0).$$

Pour une durée t finie, ou même sur un horizon de temps infini, il n'est pas commun de trouver des probabilités exactes pour des processus de dénombrement autres que Poissonniens. Il est néanmoins possible de borner la probabilité de ruine à l'aide de diverses inégalités, notamment la *borne de Lundberg*.

Cette borne spécifie que, pour un coefficient d'ajustement r , nous avons l'inégalité suivante :

$$\Psi(u) \leq e^{-ru}, u \geq 0 .$$

Dans le cas purement Poissonien sans escompte (i.e. $\tau_i \sim \exp(\lambda), X_i \sim \exp(\theta), \delta = 0$), nous pouvons montrer que :

$$r = \frac{\lambda\theta}{1+\lambda} .$$

Dans des situations plus complexes, il faudra souvent se contenter d'approximations ou de la simulation afin d'obtenir des valeurs numériques.

2.5 Taux de défaillance et dominance stochastique

Nous présentons dans cette section, en quelques paragraphes, deux principes théoriques ayant trait aux distributions de variables aléatoires que nous utiliserons dans ce mémoire pour dériver certains résultats. Nous discutons d'abord du taux de défaillance (*failure rate*), que nous utiliserons par la suite avec le concept de dominance stochastique.

2.5.1 Taux de défaillance

Le taux de défaillance (noté $h(t)$) d'une distribution représente le taux instantané auquel se produisent des événements au temps t . Il est défini comme :

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} .$$

Nous pouvons l'interpréter comme étant la probabilité qu'un événement se produise dans un intervalle de temps infinitésimal après le temps t , sachant qu'aucun événement ne s'est produit jusqu'au temps t .

Il est important de noter que les distributions de variables aléatoires, qu'elles s'appliquent au temps entre les réclamations ou à leur sévérité, peuvent être classées dans deux grandes catégories : celles à taux de défaillance croissant (*increasing failure rate* ou IFR) ou celles à taux de défaillance décroissant (*decreasing failure rate* ou DFR).

Formellement, nous différencions ces deux catégories en examinant les fonctions de survie $\bar{F}(x)$ des distributions qu'elles contiennent. Ainsi, si $\bar{F}(x)$ est log-concave, alors la distribution associée est IFR et, si $\bar{F}(x)$ est log-convexe, la distribution est DFR. Par exemple, les distributions normale et Weibull (avec paramètre de forme $\beta > 1$) sont IFR alors que les distributions Pareto et Weibull (avec paramètre de forme $\beta < 1$) sont DFR. De plus, la distribution gamma est IFR lorsque $\alpha > 1$ alors qu'elle est DFR lorsque $\alpha < 1$. Pour $\alpha = 1$, nous retrouvons la distribution exponentielle qui a un taux de défaillance constant, ce qui lui confère sa propriété sans-mémoire.

Il est utile de savoir dans quelle catégorie se retrouvent les différentes distributions auxquelles nous aurons recours plus en avant, puisque leurs comportements diffèrent grandement, notamment dans un contexte de conditionnement sur l'expérience.

2.5.2 Dominance stochastique

La dominance stochastique revêt un intérêt particulier. Une condition suffisante pour établir la dominance stochastique d'une distribution non-négative par rapport à une autre est que la fonction de survie de la première distribution est plus élevée en tout point à celle de la seconde distribution. En termes plus spécifiques, pour deux variables aléatoires X et Y , nous dirons que

$$X \preceq_{st} Y \Leftrightarrow \bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^+.$$

Une condition équivalente pour la dominance stochastique entre deux distributions est que, pour toute fonction positive et non-décroissante w , nous ayons

$$E[w(X)] \leq E[w(Y)].$$

Notons que la dominance stochastique nous permet de proposer une autre définition pour caractériser la différence entre distributions IFR et DFR. Ainsi une variable aléatoire X aura une distribution IFR si

$$\{X - x | X > x\} \preceq_{st} \{X - x' | X > x'\}, \quad \forall x' \geq x,$$

et une distribution DFR si

$$\{X - x | X > x\} \preceq_{st} \{X - x | X > x'\}, \forall x' \geq x.$$

Nous pouvons interpréter ces dernières définitions en observant que, pour une distribution IFR, l'espérance de vie résiduelle d'une variable aléatoire diminue avec son âge alors que le contraire se produit dans le cas d'une distribution DFR.

À l'aide des concepts que nous avons présentés dans ce chapitre, nous sommes maintenant en mesure d'introduire le processus de coûts escomptés avec conditionnement sur l'expérience à la section suivante.

Chapitre 3 Accroissements du total des réclamations escomptées avec conditionnement sur l'expérience

Comme nous l'avons constaté au chapitre 1, le processus de la somme des réclamations escomptées n'a pas réellement été étudié d'une manière dynamique. Après avoir présenté les éléments théoriques nécessaires, en rapport avec les sommes de réclamations escomptées au chapitre 2, nous sommes en mesure de développer un modèle prenant en compte l'expérience des périodes précédentes pour prédire le comportement futur du processus. Dans ce chapitre, nous examinons le comportement de l'accroissement de la somme des réclamations escomptées sur une deuxième période, en fonction du comportement du processus durant la première période. Dans ce qui suit, nous présentons donc les principaux résultats obtenus pour les premiers moments simples et conjoints, ainsi que la transformée de Laplace et la fonction de répartition de ces accroissements conditionnels, illustrés par des exemples dans des cas simples. Nous montrons ces résultats à la fois dans le cas où τ et X sont indépendants, et dans le cas où une certaine dépendance existe entre ces composantes.

3.1 Évaluation des premiers moments conditionnels simples et conjoints

Nous présentons dans cette section des formules analytiques obtenues pour les premiers moments simples et conjoints du processus des accroissements conditionnels, actualisés au temps t , ainsi que plusieurs comparaisons aux identités obtenues dans les cas sans conditionnement, illustrées par quelques exemples numériques.

Introduisons d'abord certaines notations utiles. Ainsi, nous posons:

- $\Sigma_{t,n}$: ensemble de toute l'information connue sur le déroulement du processus dans la période $[0, t]$, ceci incluant les temps d'occurrence des n réclamations ainsi que la sévérité et la taille de celles-ci.
- $Z(t, n)$: somme des réclamations escomptées encourues jusqu'au temps t actualisé à 0, lorsque n réclamations se sont produites.

- $Z_{t,n}(h)$: l'accroissement du processus dans la période $]t, t+h]$, connaissant son comportement durant l'intervalle de temps $[0, t]$, et actualisé à t . Formellement, nous avons $Z_{t,n}(h) = e^{\delta t} [Z(t+h) - Z(t) | \Sigma_{t,n}]$.
- t_n : temps où s'est produit la n -ième réclamation, dernière réclamation dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

Ainsi, l'âge du processus au temps t est défini comme étant $t - t_n$. Par conséquent, avec les hypothèses du chapitre 2, il est clair que seul l'âge du processus aura une influence sur le comportement de l'accroissement du processus sur la période $]t, t+h]$. Tous ces éléments nous permettent de proposer le théorème suivant, pour le premier moment de l'accroissement de la somme des réclamations escomptées sur la période $]t, t+h]$, où $h > 0$ en conditionnant sur l'information obtenue durant la période $[0, t]$.

Théorème 3.1 *Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini au chapitre 2. Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$, le premier moment de l'accroissement $Z_{t,n}(h)$ est donné par*

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}(h)] &= e^{\delta t} E[Z(t+h) - Z(t) | \Sigma_{t,n}] \\ &= E[X] \int_0^h e^{-\delta x} \left(1 + \int_0^{h-x} e^{-\delta y} dm(y) \right) \frac{f_\tau(x+t-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Preuve : Nous avons

$$\begin{aligned} E[Z(t+h) - Z(t) | \Sigma_{t,n}] &= E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} X_k \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t \right] \\ &= E[X] E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t \right]. \end{aligned}$$

En conditionnant sur le temps d'occurrence de la $(n+1)$ -ième réclamation, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t \right] \\
&= E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t+h \right] P(T_{n+1} > t+h | T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t) \\
&+ E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h \right] \\
&\quad \times P(t < T_{n+1} \leq t+h | T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t) \\
&= \int_t^{t+h} E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} = x \right] \frac{f_\tau(x-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} dx .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E[Z(t+h) - Z(t) | \Sigma_{t,n}] &= E[X] \int_t^{t+h} e^{-\delta x} E \left[1 + \sum_{k=N(t)+2}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} \middle| T_{n+1} = x \right] \frac{f_\tau(x-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} dx \\
&= E[X] \int_t^{t+h} e^{-\delta x} \left(1 + E \left[\sum_{k=1}^{N(t+h-x)} e^{-\delta T_k} \right] \right) \frac{f_\tau(x-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} dx \\
&= E[X] \int_t^{t+h} e^{-\delta x} \left(1 + \int_0^{t+h-x} e^{-\delta y} dm(y) \right) \frac{f_\tau(x-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} dx .
\end{aligned}$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned}
E[Z_{t,n}(h)] &= e^{\delta t} E[X] \int_t^{t+h} e^{-\delta x} \left(1 + \int_0^{t+h-x} e^{-\delta y} dm(y) \right) \frac{f_\tau(x-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} dx \\
&= E[X] \int_0^h e^{-\delta x} \left(1 + \int_0^{h-x} e^{-\delta y} dm(y) \right) \frac{f_\tau(x+t-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} dx . \quad \square
\end{aligned}$$

Pour alléger la notation des équations présentées dans le reste de ce texte, nous posons

$\tau^* = \tau_{n+1} - (t - t_n) | \tau_{n+1} > t - t_n$ afin d'obtenir

$$f_{\tau^*}(v) = \frac{f_\tau(v + t - t_n)}{\bar{F}_\tau(t - t_n)}, \quad v > 0.$$

C'est-à-dire que τ^* représente le temps écoulé du temps t jusqu'à l'occurrence de la $(n+1)$ -ième réclamation, sachant que n réclamations ont été observées jusqu'au temps t .

L'identité du théorème 3.1 nous permet de voir clairement la différence qu'entraîne le conditionnement sur l'expérience dans les valeurs calculées, et se calcule facilement lorsque la fonction de renouvellement $m(t)$ est connue.

Corollaire 3.1 *Selon les hypothèses du théorème précédent, nous obtenons :*

$$1. E[Z(t+h)|\Sigma_{t,n}] = Z(t,n) + e^{-\delta t} \left[E[X] \int_0^h e^{-\delta x} \left(1 + \int_0^{h-x} e^{-\delta y} dm(y) \right) f_{\tau^*}(x) dx \right] \quad (3.2)$$

2. Lorsque $h \rightarrow \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}(\infty)] &= e^{\delta t} E[Z(\infty) - Z(t) | \Sigma_{t,n}] \\ &= E[X] \int_0^\infty e^{-\delta x} f_{\tau^*}(x) \left[1 + \int_0^\infty e^{-\delta y} dm(y) \right] dx \\ &= E[X] \int_0^\infty e^{-\delta x} f_{\tau^*}(x) \left[1 + \frac{L_\tau(\delta)}{1 - L_\tau(\delta)} \right] dx \\ &= \frac{E[X]}{[1 - L_\tau(\delta)]} \int_0^\infty e^{-\delta x} f_{\tau^*}(x) dx \\ &= \frac{E[X] L_{\tau^*}(\delta)}{[1 - L_\tau(\delta)]}, \end{aligned}$$

$$\text{où } L_\tau(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta v} f_\tau(v) dv.$$

Preuve : La première identité suit aisément puisque $E[Z(t)|\Sigma_{t,n}] = Z(t,n)$. La deuxième identité est obtenue en posant $h = \infty$ et en utilisant la définition de la transformée de Laplace ainsi que les formules présentées au chapitre 2 mettant en relation les transformées de Laplace de la fonction de densité du temps d'inter-occurrence et de la fonction de renouvellement. $\square$

Par conséquent, l'espérance de l'accroissement conditionnel de notre processus de risque sur $]t, t+h]$ n'est modifiée que par l'âge du processus, ce qui est très bien reflété dans l'identité (3.1). Nous observons la même situation lorsque nous cherchons à obtenir une expression du deuxième moment du processus.

Théorème 3.2 *Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini précédemment. Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$, le deuxième moment de $Z_{n,t}(h)$ est donné par*

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}^2(h)] &= E[X^2] \int_0^h e^{-2\delta x} \left(1 + \int_0^{h-x} e^{-2\delta y} dm(y) \right) f_{\tau^*}(x) dx \\ &\quad + 2E^2[X] \int_0^h e^{-2\delta x} \left(\int_0^{h-x} e^{-\delta v} dm(v) + \int_0^{h-x} \int_0^{h-x-u} e^{-\delta(v+2u)} dm(v) dm(u) \right) f_{\tau^*}(x) dx . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Preuve : Nous avons,

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}^2(h)] &= e^{2\delta t} E\left[[Z(t+h) - Z(t)]^2 \mid \Sigma_{t,n} \right] \\ &= e^{2\delta t} \left\{ E[Z^2(t+h) \mid \Sigma_{t,n}] - 2Z(t,n) E[Z(t+h) \mid \Sigma_{t,n}] + Z^2(t,n) \right\} . \end{aligned}$$

Nous développons le premier terme comme suit,

$$\begin{aligned} E[Z^2(t+h) \mid \Sigma_{t,n}] &= E\left[\left[Z(t,n) + \sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} X_k \right]^2 \mid \Sigma_{t,n} \right] \\ &= Z^2(t,n) + 2Z(t,n) E[X] E\left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} \mid \Sigma_{t,n} \right] + E\left[\left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} X_k \right]^2 \mid \Sigma_{t,n} \right] . \end{aligned}$$

Du théorème 3.1, nous avons

$$E\left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} \mid \Sigma_{t,n} \right] = \int_t^{t+h} e^{-\delta x} \left(1 + \int_0^{t+h-x} e^{-\delta y} dm(y) \right) f_{\tau^*}(x-t) dx .$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 E \left[\left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} X_k \right]^2 \middle| \Sigma_{t,n} \right] &= E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-2\delta T_k} X_k^2 \middle| \Sigma_{t,n} \right] + 2E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} X_k X_j \middle| \Sigma_{t,n} \right] \\
 &= E[X^2] E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} e^{-2\delta T_k} \middle| \Sigma_{t,n} \right] + 2E^2[X] E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| \Sigma_{t,n} \right].
 \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme de l'identité précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t \right] \\
 &= E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t+h \right] \\
 &\quad \times P(T_{n+1} > t+h | T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t) \\
 &+ E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} \leq t+h \right] \\
 &\quad \times P(T_{n+1} \leq t+h | T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t) \\
 &= E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h \right] \\
 &\quad \times P(T_{n+1} \leq t+h | T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t) \\
 &= \int_t^{t+h} E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h, T_{n+1} = x \right] dx \\
 &\quad \times P(T_{n+1} \leq t+h | T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h) \\
 &= \int_t^{t+h} E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h, T_{n+1} = x \right] f_{\tau^*}(x-t) dx.
 \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les identités à la fin de la section 2.1, nous avons

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h, T_{n+1} = x \right] \\
&= \sum_{m=n+2}^{\infty} E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h, T_{n+1} = x, N(t+h) = m \right] \\
&\quad \times P(N(t+h) = m | T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h, T_{n+1} = x) \\
&= \sum_{m=n+2}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^m e^{-2\delta x} E \left[e^{-\delta[(\tau_{n+2}+\dots+\tau_k)+(\tau_{n+2}+\dots+\tau_k)]} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h, \right. \\
&\quad \left. T_{n+1} = x, N(t+h) = m \right] \times P(N(t+h-x) = m-(n+1)).
\end{aligned}$$

Cette dernière expression devient,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h)} e^{-\delta(T_k+T_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, t < T_{n+1} \leq t+h, T_{n+1} = x \right] \\
&= \sum_{m=n+2}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^m e^{-2\delta x} E \left[e^{-\delta(T_{k-(n+1)}+T_{j-(n+1)})} \middle| N(t+h-x) = m-(n+1) \right] \\
&\quad \times P(N(t+h-x) = m-(n+1)) \\
&= \sum_{m=n+2}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^m e^{-2\delta x} \int_0^{t+h-x} \int_u^{t+h-x} e^{-\delta(u+v)} f_{T_{k-(n+1)}, T_{j-(n+1)} | N(t+h-x)=m-(n+1)}(u, v) dv du \\
&\quad \times P(N(t+h-x) = m-(n+1)) \\
&= \sum_{m=n+2}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{m-1} \sum_{j=k+1}^m e^{-2\delta x} \int_0^{t+h-x} \int_u^{t+h-x} e^{-\delta(u+v)} f_{T_{j-k}}(v-u) f_{T_{k-(n+1)}}(u) P(N(t+h-x-v) = m-j) dv du \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} e^{-2\delta x} \int_0^{t+h-x} \int_0^{t+h-x-u} e^{-\delta(w+2u)} dF_{\tau}^{*(j-k)}(w) dF_{\tau}^{*(k-(n+1))}(u) \\
&= e^{-2\delta x} \left(\int_0^{t+h-x} e^{-\delta v} dm(v) + \int_0^{t+h-x} \int_0^{t+h-x-u} e^{-\delta(v+2u)} dm(v) dm(u) \right).
\end{aligned}$$

Le regroupement de toutes les identités précédentes nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned} E\left[\left[Z(t+h)-Z(t)\right]^2 \mid \Sigma_{t,n}\right] &= E\left[X^2\right] \int_t^{t+h} e^{-2\delta x} \left(1 + \int_0^{t+h-x} e^{-2\delta y} dm(y)\right) f_{\tau^*}(x-t) dx \\ &\quad + 2E^2[X] \int_t^{t+h} e^{-2\delta x} \left(\int_0^{t+h-x} e^{-\delta v} dm(v) + \int_0^{t+h-x} \int_0^{t+h-x-u} e^{-\delta(v+2u)} dm(v) dm(u)\right) f_{\tau^*}(x-t) dx. \end{aligned}$$

En actualisant plutôt au temps t et en faisant le changement de variables approprié, nous obtenons l'identité (3.3). $\square$

Corollaire 3.2 *Selon les hypothèses du théorème précédent, nous obtenons :*

$$\begin{aligned} 1. E\left[Z(t+h)^2 \mid \Sigma_{t,n}\right] &= Z^2(t,n) \\ &\quad + e^{-\delta t} 2Z(t,n) E[X] \int_0^h e^{-\delta x} \left[1 + \int_0^{h-x} e^{-\delta y} dm(y)\right] f_{\tau^*}(x) dx \\ &\quad + e^{-2\delta t} \left\{ E[X^2] \int_0^h e^{-2\delta x} \left[1 + \int_0^{h-x} e^{-2\delta y} dm(y)\right] f_{\tau^*}(x) dx \right. \\ &\quad \left. + 2E^2[X] \int_0^h e^{-2\delta x} \left[\int_0^{h-x} e^{-\delta v} dm(v) + \int_0^{h-x} \int_0^{h-x-u} e^{-\delta(v+2u)} dm(v) dm(u)\right] f_{\tau^*}(x) dx \right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

2. Lorsque $h \rightarrow \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} E\left[Z_{t,n}^2(\infty) \mid \Sigma_{t,n}\right] &= \left\{ E[X^2] + \frac{2E^2[X] L_{\tau}(\delta)}{[1 - L_{\tau}(\delta)]} \right\} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\delta x} f_{\tau^*}(x)}{[1 - L_{\tau}(2\delta)]} dx \\ &= \left\{ E[X^2] + \frac{2E^2[X] L_{\tau}(\delta)}{[1 - L_{\tau}(\delta)]} \right\} \frac{e^{2\delta t}}{[1 - L_{\tau}(2\delta)]} \int_0^{\infty} e^{-2\delta x} f_{\tau^*}(x) dx \\ &= \left\{ E[X^2] + \frac{2E^2[X] L_{\tau}(\delta)}{[1 - L_{\tau}(\delta)]} \right\} \frac{e^{2\delta t} L_{\tau^*}(2\delta)}{[1 - L_{\tau}(2\delta)]}. \end{aligned}$$

Encore une fois, nous constatons que le deuxième moment de l'accroissement conditionnel est une fonction de l'âge du processus.

L'identité du deuxième moment contient deux fois plus de termes que celle du premier moment, ce qui entraîne des calculs plus longs. Cependant, de nouveau, lorsque les premier et deuxième moments de la distribution de la sévérité des réclamations existent et que la fonction de renouvellement est connue et intégrable, il est possible d'obtenir des valeurs exactes et des formules analytiques pour ces moments.

Afin de rendre plus explicites les changements apportés par le conditionnement sur la période précédente, nous présentons maintenant deux exemples qui montrent les différences qui apparaissent (ou pas) lorsque les formules (3.1) et (3.3) sont utilisées. Dans le premier cas, nous avons choisi une distribution exponentielle du temps entre les réclamations, avec paramètre $\lambda > 0$, et dans le deuxième cas, nous avons choisi une distribution Erlang de paramètres $\alpha = 2$ et $\lambda > 0$.

Exemple 3.1 Supposons que $\tau \sim \exp(\lambda)$, $E[X] = \mu_1$ et $E[X^2] = \mu_2$. Alors, pour le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini précédemment, nous obtenons :

- Selon (3.1), le premier moment sur l'intervalle $]t, t+h]$ de l'accroissement conditionnel, soit

$$\begin{aligned}
 E[Z_{t,n}(h)] &= \mu_1 \int_0^h e^{-\delta x} \left(1 + \int_0^{h-x} e^{-\delta y} \lambda dy \right) \frac{\lambda e^{-\lambda(x+t-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} dx \\
 &= \mu_1 \int_0^h e^{-\delta x} \left(1 + \frac{\lambda}{\delta} (1 - e^{-\delta(h-x)}) \right) \frac{\lambda e^{-\lambda(x+t-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} dx \\
 &= \lambda \mu_1 \left\{ \frac{\lambda + \delta}{\delta} \int_0^h e^{-(\lambda+\delta)x} dx - \frac{\lambda}{\delta} e^{-\delta h} \int_0^h e^{-\lambda x} dx \right\} \\
 &= \lambda \mu_1 \left\{ \frac{1 + e^{-(\lambda+\delta)h}}{\delta} - \frac{e^{-\delta h}}{\delta} (1 - e^{-\lambda h}) \right\} \\
 &= \frac{\lambda \mu_1}{\delta} \{1 - e^{-\delta h}\} .
 \end{aligned}$$

- Selon (3.3), le deuxième moment sur l'intervalle $]t, t+h]$ de l'accroissement conditionnel, soit

$$\begin{aligned}
E[Z_{t,n}^2(h)] &= \mu_2 \int_0^h e^{-2\delta x} \left(1 + \int_0^{h-x} e^{-2\delta y} \lambda dy \right) \frac{\lambda e^{-\lambda(x+t-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} dx \\
&\quad + 2\mu_1^2 \int_0^h e^{-2\delta x} \left(\int_0^{h-x} e^{-\delta v} \lambda dv + \int_0^{h-x} \int_0^{h-x-u} e^{-\delta(v+2u)} \lambda^2 dv du \right) \frac{\lambda e^{-\lambda(x+t-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} dx \\
&= \frac{\lambda \mu_2}{2\delta} [1 - e^{-2\delta h}] \\
&\quad + 2 \frac{\mu_1^2 \lambda^2}{\delta} \int_0^h e^{-(2\delta+\lambda)x} \left([1 - e^{-\delta(h-x)}] + \frac{\lambda}{2\delta} [1 - e^{-\delta(h-x)}]^2 \right) dx \\
&= \frac{\lambda \mu_2}{2\delta} [1 - e^{-2\delta h}] + \left[\frac{\lambda \mu_1 (1 - e^{-\delta h})}{\delta} \right]^2.
\end{aligned}$$

Remarques : Pour cet exemple, nous notons que :

- (1) $E[Z_{t,n}(h)] = E[Z(h)]$.
- (2) $E[Z_{t,n}(\infty)] = \frac{\lambda \mu_1}{\delta} = E[Z(\infty)]$.
- (3) $E[Z_{t,n}^2(h)] = E[Z^2(h)]$.
- (4) $E[Z_{t,n}^2(\infty)] = \frac{\lambda}{\delta} \left[\frac{\mu_2}{2} + \frac{\lambda \mu_1^2}{\delta} \right] = E[Z^2(\infty)]$.
- (5) $Var(Z_{t,n}(h)) = \frac{\lambda \mu_2}{2\delta} [1 - e^{-2\delta h}] = Var(Z(h))$.

Ainsi, nous remarquons dans cet exemple que l'âge du processus est absent de toutes les expressions finales obtenues. Ces expressions sont aussi identiques à celles obtenues sans conditionnement par les identités classiques développées par Lévêillé et Garrido (2001a). Ces observations découlent évidemment du fait que les accroissements d'un processus de Poisson sont indépendants et stationnaires, puisque la distribution exponentielle du temps entre les événements successifs est sans-mémoire. De ce fait, les identités que nous avons développées n'utilisent aucune information additionnelle et ne sont pas modifiées en fonction de celle-ci, ce qui montre bien leur cohérence.

Dans le prochain exemple, nous vérifions que les résultats obtenus sans conditionnement sont altérés par l'introduction du conditionnement sur la période précédente.

Exemple 3.2 Supposons que $\tau \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$, $E[X] = \mu_1$ et $E[X^2] = \mu_2$. Pour le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini précédemment, nous obtenons :

- Selon (3.1), le premier moment sur l'intervalle $]t, t+h]$ de l'accroissement conditionnel, soit

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}(h)] &= \frac{\mu_1}{[1 + \lambda(t - t_n)]e^{-\lambda(t - t_n)}} \\ &\quad \times \int_0^h e^{-\delta x} \left(1 + \int_0^{h-x} e^{-\delta y} \left[\frac{\lambda}{2}(1 - e^{-2\lambda y}) \right] dy \right) \lambda^2 (x + t - t_n) e^{-\lambda(x + t - t_n)} dx \\ &= \mu_1 \left[\frac{\lambda}{2\delta(\delta + 2\lambda)[1 + \lambda(t - t_n)]} \right] \times \left\{ [2\lambda - (\delta + 2\lambda)e^{-\delta h} + \delta e^{-(\delta + 2\lambda)h}] \right. \\ &\quad \left. + [\lambda(t - t_n)[2(\delta + \lambda) - (\delta + 2\lambda)e^{-\delta h} + \delta e^{-(\delta + 2\lambda)h}]] \right\}. \end{aligned}$$

- Selon (3.3), le deuxième moment sur l'intervalle $]t, t+h]$ de l'accroissement conditionnel, soit

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}^2(h)] &= \frac{\mu_2}{e^{-\lambda(t - t_n)}[1 + \lambda(t - t_n)]} \times \\ &\quad \left\{ \int_0^h e^{-2\delta x} \left[1 + \int_0^{h-x} e^{-2\delta y} \frac{\lambda}{2}(1 - e^{-2\lambda y}) dy \right] \lambda^2 (x + t - t_n) e^{-\lambda(x + t - t_n)} dx \right\} \\ &\quad + \frac{2\mu_1^2}{e^{-\lambda(t - t_n)}[1 + \lambda(t - t_n)]} \times \int_0^h e^{-2\delta x} \left\{ \int_0^{h-x} e^{-\delta v} \frac{\lambda}{2}(1 - e^{-2\lambda v}) dv \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{h-x} \int_0^{h-x-u} e^{-\delta(v+2u)} \left[\frac{\lambda^2}{4}(1 - e^{-2\lambda v})(1 - e^{-2\lambda u}) \right] dv du \right\} \lambda^2 (x + t - t_n) e^{-\lambda(x + t - t_n)} dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& E[Z_{t,n}^2(h)] \\
&= \frac{\lambda\mu_2 \times \left\{ \left[\lambda - (\delta + \lambda)e^{-2\delta h} - \delta e^{-2(\delta+\lambda)h} \right] + \lambda(t-t_n) \left[(2\delta + \lambda) - (\delta + \lambda)e^{-2\delta h} - \delta e^{-2(\delta+\lambda)h} \right] \right\}}{2\delta(\delta + \lambda)(1 + \lambda(t-t_n))} \\
&+ \frac{\lambda^2\mu_1^2}{2\delta^2(\delta + \lambda)(1 + \lambda(t-t_n))} \times \left\{ \frac{\lambda}{\delta^2 - 4\lambda^2} \times \left[\left[\delta\lambda - 2\lambda^2 + (-2\delta^2 + 2\delta\lambda + 4\lambda^2)e^{-\delta h} \right. \right. \right. \\
&- (\delta^2 + 3\delta\lambda + 2\lambda^2)e^{-2\delta h} + 2(\delta^2 + \delta\lambda)e^{-(\delta+2\lambda)h} + (\delta^2 - 2\delta\lambda)e^{-2(\delta+\lambda)h} \left. \right] \\
&+ (t-t_n) \left[2\delta^2\lambda - 3\delta\lambda^2 - 2\lambda^3 + (-2\delta^3 + 6\delta\lambda^2 + 4\lambda^3)e^{-\delta h} - (\delta^2\lambda + 3\delta\lambda^2 + 2\lambda^3)e^{-2\delta h} \right. \\
&\left. \left. + 2(\delta^3 - \delta\lambda^2)e^{-(\delta+2\lambda)h} + (-\delta^2\lambda + 2\delta\lambda^2)e^{-2(\delta+\lambda)h} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Remarques : Pour cet exemple, nous avons :

$$\begin{aligned}
(1) \quad E[Z_{t,n}(h)] &= \frac{E[Z(h)]}{1 + \lambda(t-t_n)} \\
&+ \frac{\lambda^2\mu_1(t-t_n)}{2(\delta + 2\lambda)[1 + \lambda(t-t_n)]} \left[2(\delta + \lambda) - (\delta + 2\lambda)e^{-\delta h} - \delta e^{-(\delta+2\lambda)h} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad E[Z_{t,n}^2(h)] &= 2E[Z^2(h)] \\
&- \left\{ \frac{\mu_2\lambda}{(\delta + \lambda)(1 + \lambda(t-t_n))} + \frac{(\mu_1\lambda)^2}{\delta(\delta^2 - 4\lambda^2)(\delta + \lambda)(1 + \lambda(t-t_n))} \right. \\
&\quad \times \left[\delta\lambda - 2\lambda^2 + (-\delta^2 + \delta\lambda + 2\lambda^2)e^{-\delta h} + (\delta^2 - \delta\lambda - \lambda^2)e^{-(\delta+2\lambda)h} + (-\delta\lambda + 2\lambda^2)e^{-2(\delta+\lambda)h} \right] \\
&+ \frac{(\mu_1\lambda)^2}{2\delta^2(\delta^2 - 4\lambda^2)(\delta + \lambda)} \times \left[\delta^3 - \delta^2\lambda - \delta\lambda^2 - 2\lambda^3 - 2(\delta^2\lambda + \delta\lambda^2)e^{-\delta h} \right. \\
&\quad \left. + (-\delta^3 + 3\delta\lambda^2 + 2\lambda^3)e^{-2\delta h} + 2(\delta^2\lambda + \delta\lambda^2)e^{-(\delta+2\lambda)h} + (\delta^2\lambda - 2\delta\lambda^2)e^{-2(\delta+\lambda)h} \right] \\
&\left. + (\mu_1\lambda)^2 \times \left(\frac{2\lambda e^{-\delta h}}{\delta(\delta + 2\lambda)} \bar{a}_{h|2\lambda} - \frac{1}{(\delta + 2\lambda)} \bar{a}_{h|2\delta} - \frac{2\lambda}{\delta(\delta + 2\lambda)} \bar{a}_{h|2(\delta+\lambda)} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\text{où } \bar{a}_{h|\delta} = \frac{1 - e^{-\delta h}}{\delta}.$$

$$(3) \quad E[Z_{t,n}(\infty)] = \left[\frac{\lambda^2 \mu_1}{\delta(\delta + 2\lambda)} \right] \left[\frac{1 + \delta(\delta + \lambda)(t - t_n)}{1 + \lambda(t - t_n)} \right].$$

$$(4) \quad E[Z_{t,n}^2(\infty)] = \left[\frac{\lambda^2}{4\delta(\delta + \lambda)} \right] \left[\frac{1 + (2\delta + \lambda)(t - t_n)}{1 + \lambda(t - t_n)} \right] \left[\mu_2 + \frac{2\mu_1^2 \lambda^2}{\delta(\delta + 2\lambda)} \right].$$

Nous constatons, dans cet exemple, que l'âge du processus apparaît dans les diverses identités obtenues. Les différents moments tiennent compte de cette information et s'en trouvent modifiés, puisque la distribution Erlang n'est pas sans-mémoire. Les formules obtenues, bien que relativement lourdes, sont faciles à appliquer dans des cas concrets, puisque les intégrales sont toutes résolubles. Voyons un exemple numérique.

Exemple 3.3 Supposons que $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha = 2, \lambda = 10)$, $X \sim \exp(\theta = 1)$, et soit $\delta = 5\%$, $t = 1$ et $h = 1$. Nous posons d'abord, arbitrairement, un âge pour le processus au temps t (dans ce cas 0.1596282). Par la suite, nous simulons le reste du processus sur $]t, t + h]$ à 10 000 reprises, de façon à obtenir le premier et le second moment échantillonnal de l'accroissement conditionnel du processus.

Nous pouvons ensuite comparer ces valeurs à celles obtenues à l'aide des identités (3.1) et (3.3). Ces valeurs sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau 3.1 : Moments conditionnels simulés et théoriques (avec $t - t_n = 0.1596282$)

	$E[Z_{t,n}(h)]$	$E[Z_{t,n}^2(h)]$	$\sigma(Z_{t,n}(h))$
Valeurs simulées	4.95849	32.11626	2.74402
Valeurs théoriques	4.93433	31.65784	2.70374

Ce tableau corrobore très bien, par simulation, que les valeurs théoriques obtenues analytiquement sont suffisamment précises.

Le degré de précision est le même si l'âge du processus est plus grand. Si nous reprenons le même exemple que précédemment, en utilisant cette fois-ci un âge de départ de 0.8817105, afin de voir l'effet non seulement sur les valeurs simulées, mais aussi sur les valeurs théoriques, nous obtenons le tableau suivant :

Tableau 3.2 : Moments conditionnels simulés et théoriques (avec $t - t_n = 0.8817105$)

	$E[Z_{t,n}(h)]$	$E[Z_{t,n}^2(h)]$	$\sigma(Z_{t,n}(h))$
Valeurs simulées	5.06541	33.16702	2.74019
Valeurs théoriques	5.07563	33.17739	2.72312

Dans ce cas aussi, les valeurs simulées restent très près des valeurs calculées en tenant compte de l'expérience, et ne semblent pas en être plus éloignées que dans le cas précédent.

Nous pouvons aussi comparer les valeurs théoriques obtenues en conditionnant sur l'expérience aux valeurs théoriques obtenues avec les formules classiques qui ne prennent pas en compte l'âge du processus au temps t (ce qui est équivalent à utiliser les formules que nous avons développées en y utilisant un âge nul). Nous présentons ces comparaisons dans le tableau suivant :

Tableau 3.3 : Comparaison des valeurs obtenues pour les premiers moments

	Premier moment	Deuxième moment	Écart-type
Valeurs théoriques avec âge = 0.1596282	4.93433	31.65784	2.70374
Valeurs théoriques avec âge = 0.8817105	5.07563	33.17739	2.72312
Valeurs théoriques sans tenir compte de l'âge	4.62768	30.72730	3.05154

Ainsi, dans le cas des deux premiers moments, le fait de ne pas prendre en compte l'âge du processus au temps t entraîne une estimation erronée des risques, par rapport aux formules qui utilisent toute l'information disponible.

Plus l'âge du processus au temps t est élevé, plus la différence entre les deux valeurs est marquée. Nous pouvons donc affirmer que les identités (3.1) et (3.3) traduisent plus

fidèlement le comportement du processus des accroissements lorsque l'expérience est prise en compte que lorsqu'elle ne l'est pas.

Nous constatons aussi, à partir des tableaux précédents, que toutes les valeurs théoriques des deux premiers moments ont augmentés avec l'âge, un fait que nous étudions graphiquement. Nous considérons le même processus $\{Z(t); t \geq 0\}$, avec $t = 3$, $h = 1$ et $\delta = 5\%$, et nous établissons deux graphiques en annexe montrant l'évolution de l'accroissement conditionnel du processus en fonction de l'âge de ce dernier au temps t .

Dans le premier graphique (figure 1), $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha = 2, \lambda = 10)$ et $X \sim \exp(1)$, alors que dans le second graphique (figure 2), $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha = 2, \lambda = 1)$ et la distribution de X est inchangée. La ligne rouge représente dans chacun des graphiques la valeur maximale que pourraient atteindre l'espérance, pour un âge $t - t_n = \infty$ au temps t (ce qui n'est bien sûr pas une possibilité lorsque $t = 3$). Nous constatons que, peu importe le paramètre lambda, plus l'âge augmente, plus l'espérance augmente elle aussi d'une manière concave jusqu'à éventuellement atteindre une asymptote. Nous observons une situation semblable dans le cas du deuxième moment de l'accroissement conditionnel du processus. En examinant les figures 3 et 4, qui montrent l'évolution du deuxième moment en fonction de l'âge du processus au temps t (avec les mêmes conditions que les figures 1 et 2), nous constatons encore une fois que le deuxième moment augmente en fonction de l'âge au temps t et que ses valeurs tendent aussi vers une asymptote.

Notons qu'il est possible de montrer que les conclusions précédentes sont valides pour toutes les distributions de temps entre les réclamations de type IFR. Le contraire sera vrai dans le cas des distributions DFR, c'est-à-dire que les valeurs tendront à atteindre un minimum lorsque l'âge maximal sera atteint.

Maintenant, après avoir évalué les premiers moments simples des accroissements, nous présentons ci-après un théorème sur les moments conjoints du processus qui nous permettra d'obtenir ultérieurement les moments conjoints des accroissements conditionnels.

Théorème 3.3 Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini précédemment et tel qu'observé jusqu'au temps t . Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$ et pour $0 \leq u < v$, nous avons

$$\begin{aligned}
E[Z(t+u)Z(t+v) | \Sigma_{t,n}] &= E[Z(t+u)^2 | \Sigma_{t,n}] \\
&+ Z(t,n)E[X] \int_t^{t+u} e^{-\delta x} \left[\int_{t+u-x}^{t+v-x} e^{-\delta y} dm(y) \right] f_{\tau^*}(x-t) dx \\
&+ Z(t,n)E[X] \int_{t+u}^{t+v} e^{-\delta x} \left[1 + \int_0^{t+v-x} e^{-\delta y} dm(y) \right] f_{\tau^*}(x-t) dx \\
&+ E^2[X] \int_t^{t+u} e^{-2\delta x} \left[\int_{t+u-x}^{t+v-x} e^{-\delta y} dm(y) + \int_0^{t+u-x} \int_{t+u-x-z}^{t+v-x-z} e^{-\delta(y+2z)} dm(y) dm(z) \right] f_{\tau^*}(x-t) dx.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Preuve : Nous avons,

$$\begin{aligned}
E[Z(t+u)Z(t+v) | \Sigma_{t,n}] &= E[Z(t+u)^2 | \Sigma_{t,n}] + Z(t,n)E[X]E\left[\sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta T_j} \middle| \Sigma_{t,n}\right] \\
&+ E^2[X]E\left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+u)} e^{-\delta T_k} \sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta T_j} \middle| \Sigma_{t,n}\right].
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{\delta T_j} \middle| \Sigma_{t,n}\right] &= e^{-\delta t_n} \left\{ E\left[\sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta(\tau_{n+1} + \dots + \tau_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} > t+v \right] \right. \\
&\quad \times P(T_{n+1} > t+v | \Sigma_{t,n}) \\
&+ E\left[\sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta(\tau_{n+1} + \dots + \tau_j)} \middle| T_1 = t_1, \dots, T_n = t_n \leq t, T_{n+1} \leq t+u \right] \times P(T_{n+1} \leq t+u | \Sigma_{t,n}) \\
&\left. + E\left[\sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta(\tau_{n+1} + \dots + \tau_j)} \middle| \Sigma_{t,n}, t+u < T_{n+1} \leq t+v \right] \times P(t+u < T_{n+1} \leq t+v | \Sigma_{t,n}) \right\}.
\end{aligned}$$

Puisque le premier terme de cette équation est égal à 0, nous nous concentrons sur les deux autres termes.

D'abord,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+u \right] \\
&= E \left[\sum_{j=N(t_n)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} - \sum_{j=N(t_n)+1}^{N(t+u)} e^{-\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+u \right] \\
&= \int_t^{t+u} e^{-\delta(x-t_n)} \left\{ \left(1 + E \left[\sum_{j=N(t_n)+2}^{N(t+v)} e^{-\delta(\tau_{n+2}+\dots+\tau_j)} \right] \right) - \left(1 + E \left[\sum_{j=N(t_n)+2}^{N(t+u)} e^{-\delta(\tau_{n+2}+\dots+\tau_j)} \right] \right) \right\} \frac{f_\tau(x-t_n)}{F_\tau(t+u)-F_\tau(t)} dx \\
&= \int_t^{t+u} e^{-\delta(x-t_n)} \left\{ \left(1 + E \left[\sum_{j=1}^{N(t+v-x)} e^{-\delta T_j} \right] \right) - \left(1 + E \left[\sum_{j=1}^{N(t+u-x)} e^{-\delta T_j} \right] \right) \right\} f_{\tau^*}(x) dx \\
&= \int_t^{t+u} e^{-\delta(x-t_n)} \left\{ \int_{t+u-x}^{t+v-x} e^{-\delta y} dm(y) \right\} f_{\tau^*}(x) dx .
\end{aligned}$$

De façon similaire, nous avons

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} \middle| \Sigma_{t,n}, t+u \leq T_{n+1} \leq t+v \right] \\
&= \int_{t+u}^{t+v} e^{-\delta(x-t_n)} \left\{ 1 + \int_0^{t+v-x} e^{-\delta y} dm(y) \right\} f_{\tau^*}(x) dx .
\end{aligned}$$

Nous avons aussi,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+u)} e^{\delta T_k} \sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{\delta T_j} \middle| \Sigma_{t,n} \right] = E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+u)} e^{\delta T_k} \sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{\delta T_j} \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} > t+v \right] P(T_{n+1} > t+v | \Sigma_{t,n}) \\
&+ E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+u)} e^{\delta T_k} \sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{\delta T_j} \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+u \right] P(T_{n+1} \leq t+u | \Sigma_{t,n}) \\
&+ E \left[\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+u)} e^{\delta T_k} \sum_{j=N(t+u)+1}^{N(t+v)} e^{\delta T_j} \middle| \Sigma_{t,n}, t+u < T_{n+1} \leq t+v \right] P(t+u < T_{n+1} \leq t+v | \Sigma_{t,n}) \\
&= E \left[\sum_{k=N(t_n)+1}^{N(t+u)} e^{\delta T_k} \left(\sum_{j=N(t_n)+1}^{N(t+v)} e^{\delta T_j} - \sum_{j=N(t_n)+1}^{N(t+u)} e^{\delta T_j} \right) \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+u \right] P(T_{n+1} \leq t+u | \Sigma_{t,n}) .
\end{aligned}$$

Finalement, nous développons cette dernière espérance comme suit,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=N(t_n)+1}^{N(t+u)} e^{-\delta T_k} \left(\sum_{j=N(t_n)+1}^{N(t+v)} e^{-\delta T_j} - \sum_{j=N(t_n)+1}^{N(t+u)} e^{-\delta T_j} \right) \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+u \right] \\
&= e^{-2\delta t_n} E \left[\sum_{k=N(t_n)+1}^{N(t+u)} e^{-\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_k)} \left(\sum_{j=N(t_n)+1}^{N(t+v)} e^{\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} - \sum_{j=N(t_n)+1}^{N(t+u)} e^{\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} \right) \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+u \right] \\
&= \int_t^{t+u} e^{-2\delta x} \left\{ E \left[\left(1 + \sum_{j=N(t_n)+2}^{N(t+u)} e^{-\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} \right) \left(1 + \sum_{j=N(t_n)+2}^{N(t+v)} e^{-\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - E \left[\left(1 + \sum_{j=N(t_n)+2}^{N(t+u)} e^{-\delta(\tau_{n+1}+\dots+\tau_j)} \right)^2 \right] \right\} f_{\tau^*}(x) dx \\
&= \int_t^{t+u} e^{-2\delta x} \left\{ E \left[\sum_{j=1}^{N(t+u-x)} e^{-\delta T_j} + \sum_{j=1}^{N(t+v-x)} e^{-\delta T_j} + \sum_{j=1}^{N(t+u-x)} e^{-\delta T_j} \sum_{k=1}^{N(t+v-x)} e^{-\delta T_k} \right] \right. \\
&\quad \left. - E \left[2 \sum_{j=1}^{N(t+u-x)} e^{-\delta T_j} + \left(\sum_{j=1}^{N(t+u-x)} e^{-\delta T_j} \right)^2 \right] \right\} f_{\tau^*}(x) dx \\
&= \int_t^{t+u} e^{-2\delta x} E \left[\sum_{j=N(t+u-x)+1}^{N(t+u-x)} e^{-\delta T_j} + \sum_{j=1}^{N(t+u-x)} e^{-\delta T_j} \sum_{k=N(t+u-x)+1}^{N(t+v-x)} e^{-\delta T_k} \right] f_{\tau^*}(x) dx \\
&= \int_t^{t+u} e^{-2\delta x} \left\{ \int_{t+u-x}^{t+v-x} e^{-\delta y} dm(y) + \int_0^{t+u-x} \int_{t+u-x-z}^{t+v-x-z} e^{-\delta(y+2z)} dm(y) dm(z) \right\} f_{\tau^*}(x) dx .
\end{aligned}$$

Nous retrouvons donc l'équation (3.5) en mettant en commun ces différentes identités et en simplifiant les dénominateurs des différentes intégrales. $\square$

Remarques : Ayant obtenu l'identité (3.5), il est maintenant possible de présenter une formule pour le premier moment conjoint des accroissements conditionnels et de retrouver diverses identités à partir de cette équation. Nous obtenons ainsi les identités suivantes :

(1) Pour $u = 0$, nous retrouvons,

$$\begin{aligned}
E \left[Z(t) Z(t+v) \middle| \Sigma_{t,n} \right] &= Z(t, n) E \left[Z(t+v) \middle| \Sigma_{t,n} \right] + Z^2(t, n) \\
&= Z^2(t, n) + Z(t, n) E[X] \int_t^{t+v} e^{-\delta x} \left[1 + \int_0^{t+v-x} e^{-\delta y} dm(y) \right] f_{\tau^*}(x-t) dx .
\end{aligned}$$

- (2) Pour $u = v$, nous retrouvons l'équation (3.4) pour le second moment du processus.
- (3) Pour $u < v$, le premier moment conjoint des accroissements conditionnels actualisé à t est

$$\begin{aligned}
E[Z_{t,n}(u)Z_{t,n}(v)] &= e^{2\delta t} \left\{ E[Z(t+u)Z(t+v)|\Sigma_{t,n}] \right. \\
&\quad \left. - Z(t,n)E[Z(t+u)+Z(t+v)|\Sigma_{t,n}] + Z^2(t,n) \right\} \\
&= E[Z_{t,n}^2(u)] \\
&\quad + E^2[X] \int_0^u e^{-2\delta x} \left[\int_{u-x}^{v-x} e^{-\delta y} dm(y) + \int_0^{u-x} \int_{v-x-z}^{v-x} e^{-\delta(y+2z)} dm(y) dm(z) \right] f_{\tau^*}(x) dx. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Les équations développées pour le premier moment conjoint sont très semblables aux équations précédentes, ce qui indique encore une fois que l'âge du processus influence généralement les espérances conjointes conditionnelles. Nous pouvons illustrer l'influence du conditionnement en reprenant les mêmes distributions de temps entre les événements que précédemment pour un nouvel exemple portant sur les moments conjoints.

Exemple 3.4

- Considérons les distributions de l'exemple 3.1, avec $u < v$. En appliquant (3.5), nous obtenons,

$$\begin{aligned}
&E[Z(t+u)Z(t+v)|\Sigma_{t,n}] \\
&= E[Z^2(t+u)|\Sigma_{t,n}] + Z(t,n) \frac{\mu_1 \lambda}{\delta e^{-\lambda t}} \int_t^{t+u} e^{-\lambda x} (e^{-\delta(t+u)} - e^{-\delta(t+v)}) dx \\
&\quad + Z(t,n) \frac{\mu_1}{e^{-\lambda t}} \int_{t+u}^{t+v} e^{-\delta x} \left[1 + \frac{\lambda}{\delta} (1 - e^{-\delta(t+v-x)}) \right] \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&\quad + \frac{\lambda \mu_1^2}{e^{-\lambda t}} \int_t^{t+u} e^{-(\lambda+2\delta)x} \left[\frac{e^{-\delta(t+u-x)} - e^{-\delta(t+v-x)}}{\delta} + \frac{\lambda^2 (e^{-\delta(t+u-x)} + e^{-\delta(2t+u-x)} - e^{-\delta(t+v-x)} e^{-\delta(2t+2u-x-v)})}{\delta^2} \right] dx. \\
&= Z^2(t,n) + Z(t,n) e^{-\delta t} \frac{\mu_1 \lambda}{\delta} [(1 - e^{-\delta u}) + (1 - e^{-\delta v})] + \frac{\mu_2 \lambda}{2\delta} e^{-2\delta t} (1 - e^{-2\delta u}) \\
&\quad + \left(\frac{\mu_1 \lambda e^{-\delta t} (1 - e^{-\delta u})}{\delta} \right)^2 + \frac{\mu_1^2 \lambda e^{-2\delta t}}{\delta^2 (\delta + \lambda)} [\lambda^2 (e^{-\delta(t+u)} - e^{-\delta(t+2u-v)} + e^{-\delta u} - e^{-\delta v} + e^{-\delta(u+v)} \\
&\quad - e^{-\delta(t+2u)-\lambda u} + e^{-\delta(t+3u-v)-\lambda u} - e^{-2\delta u - \lambda u}) + \delta (e^{-\delta u} - e^{-\delta v} + e^{-\delta(u+v)-\lambda u} - e^{-2\delta u - \lambda u})].
\end{aligned}$$

Remarque : Pour cet exemple, nous avons

$$\begin{aligned}
& E[Z_{t,n}(u)Z_{t,n}(v)] \\
&= e^{2\delta t} \left\{ E[Z(t+u)Z(t+v)|\Sigma_{t,n}] - Z(t,n)E[Z(t+u)+Z(t+v)|\Sigma_{t,n}] + Z^2(t,n) \right\} \\
&= e^{2\delta t} \left\{ E[Z(t+u)Z(t+v)|\Sigma_{t,n}] - \left(Z^2(t,n) + Z(t,n)e^{-\delta t} \frac{\lambda\mu_1}{\delta} (1-e^{-\delta u}) + Z(t,n)e^{-\delta t} \frac{\lambda\mu_1}{\delta} (1-e^{-\delta v}) \right) \right\} \\
&= e^{2\delta t} \left\{ \frac{\mu_2\lambda}{2\delta} e^{-2\delta t} (1-e^{-2\delta u}) + \left(\frac{\mu_1\lambda e^{-\delta t} (1-e^{-\delta u})}{\delta} \right)^2 + \frac{\mu_1^2\lambda e^{-2\delta t}}{\delta^2(\delta+\lambda)} \left[\lambda^2 (e^{-\delta(t+u)} - e^{-\delta(t+2u-v)} + e^{-\delta u} - e^{-\delta v} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-\delta(u+v)} - e^{-\delta(t+2u)-\lambda u} + e^{-\delta(t+3u-v)-\lambda u} - e^{-2\delta u-\lambda u} \right) + \delta (e^{-\delta u} - e^{-\delta v} + e^{-\delta(u+v)-\lambda u} - e^{-2\delta u-\lambda u}) \right] \right\} \\
&= \frac{\mu_2\lambda}{2\delta} (1-e^{-2\delta u}) + \frac{\mu_1^2\lambda^2}{\delta^2} (1-e^{-\delta u})(1-e^{-\delta v}) \\
&= E[Z(u)Z(v)] .
\end{aligned}$$

Ainsi, comme attendu, l'âge du processus n'intervient pas dans l'obtention du moment conjoint lorsque le processus de dénombrement est Poissonnien.

• *Considérons maintenant les distributions de l'exemple 3.2, avec $u < v$. En appliquant (3.5), nous obtenons*

$$\begin{aligned}
& E[Z(t+u)Z(t+v)|\Sigma_{t,n}] = E[Z^2(t+u)|\Sigma_{t,n}] \\
&+ Z(t,n) \frac{\mu_1}{[1+\lambda(t-t_n)]e^{-\lambda(t-t_n)}} \int_t^{t+u} e^{-\delta x} \left[\int_{t+u-x}^{t+v-x} e^{-\delta y} \left[\frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\lambda y}) \right] dy \right] \lambda^2 (x-t_n) e^{-\lambda(x-t_n)} dx \\
&+ Z(t,n) \frac{\mu_1}{[1+\lambda(t-t_n)]e^{-\lambda(t-t_n)}} \int_{t+u}^{t+v} e^{-\delta x} \left[1 + \int_0^{t+v-x} e^{-\delta y} \left[\frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\lambda y}) \right] dy \right] \lambda^2 (x-t_n) e^{-\lambda(x-t_n)} dx \\
&+ \frac{\mu_1^2}{[1+\lambda(t-t_n)]e^{-\lambda(t-t_n)}} \int_t^{t+u} e^{-2\delta x} \left\{ \int_{t+u-x}^{t+v-x} e^{-\delta y} \left[\frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\lambda y}) \right] dy \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t+u-x} \int_{t+u-x-z}^{t+v-x-z} e^{-\delta(y+2z)} \left[\frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\lambda y}) \right] dy \left[\frac{\lambda}{2} (1-e^{-2\lambda z}) \right] dz \right\} \lambda^2 (x-t_n) e^{-\lambda(x-t_n)} dx .
\end{aligned}$$

Lorsque nous observons plutôt ce qui se produit lorsque la distribution du temps entre les réclamations est une $Erlang(2, \lambda)$, l'expression devient beaucoup plus lourde.

Cette expression intégrable, une fois résolue, est d'une telle longueur qu'il ne nous a pas semblé utile de la présenter. Nous notons toutefois, à nouveau, que l'âge du processus se retrouve à de nombreuses reprises dans l'expression, et qu'il est impossible de l'éliminer de celle-ci.

Si l'identité obtenue est loin d'être intuitive, il est tout de même aisé de l'utiliser pour obtenir des valeurs numériques, lorsque les paramètres sont connus. Nous comparons dans l'exemple suivant les valeurs théoriques et simulées des accroissements conjoints conditionnels.

Exemple 3.5 Supposons que $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X \sim \exp(\theta=1)$ et soit $\delta=5\%$, $t=1$, $u=0.3$ et $v=0.6$. Nous simulons d'abord le processus jusqu'au temps t et obtenons un âge de 0.1484837 et $Z(t, 4) = 2.966728$. Par la suite, nous simulons le reste du processus sur $]t, t+h]$ à 10 000 reprises, de façon à obtenir le premier moment conjoint des accroissements conditionnels, puis le coefficient de corrélation conditionnel. Nous pouvons ensuite comparer ces valeurs à celles obtenues à l'aide de l'identité (3.6) et de la définition du coefficient de corrélation. Ces valeurs sont présentées dans le tableau suivant, où $\rho(X, Y)$ désigne le coefficient de corrélation entre X et Y :

Tableau 3.4 : Premier moment conjoint des accroissements conditionnels

	$E[Z_{t,n}(u)Z_{t,n}(v)]$	$\rho(Z_{t,n}(u), Z_{t,n}(v))$
Valeurs théoriques	6.94340	0.70692
Valeurs simulées	6.92727	0.70398

Nous constatons de nouveau que les valeurs simulées sont très proches des valeurs théoriques. De plus, la corrélation est positive et très forte, ce qui indique que même pour des temps relativement éloignés comme 0.3 et 0.6, l'influence de ce qui se passe durant la deuxième période est très grande sur ce qui se passe durant une troisième période. Ainsi, malgré les expressions complexes qui sont obtenues dans le cas Erlang, nous pouvons tout de même obtenir des prévisions précises et utiles qui permettent de mieux décrire le comportement du processus.

Il serait sans doute possible d'obtenir des équations théoriques générales pour les moments simples et conjoints d'ordres supérieurs, mais comme nous le constatons, ces équations deviennent rapidement très lourdes et complexes, lorsque nous procédons directement à l'aide d'arguments de renouvellement. Dans bien des cas, il est plus facile de procéder avec la transformée de Laplace, ce que nous verrons dans la section suivante.

3.2 Transformée de Laplace de la distribution des accroissements conditionnels

Dans cette section, nous étudions la transformée de Laplace des accroissements conditionnels associés au processus de la somme des réclamations escomptées. Ceci nous amène ensuite à présenter une formule récursive permettant le calcul des moments simples, issue de cette transformée de Laplace. Finalement, nous présentons divers exemples, avec des distributions de temps entre les événements de type exponentiel et Erlang.

Pour débiter, nous construisons tout d'abord une équation intégrale permettant d'obtenir la transformée de Laplace des accroissements conditionnels du processus de sommes escomptées.

Théorème 3.4 *Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini précédemment et tel qu'observé jusqu'au temps t . Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$ et $s \in \Omega$, Ω étant le domaine de convergence de la transformée de Laplace, nous avons*

$$L_{Z_{t,n}(h)}(s) = \left\{ \bar{F}_{\tau^*}(h) + \int_0^h L_X(se^{-\delta x}) L_{Z(h-v)}(se^{-\delta x}) f_{\tau^*}(x) dx \right\}, \quad (3.7)$$

$$\text{où } \bar{F}_{\tau^*}(v) = \frac{\bar{F}_{\tau}(v + t - t_n)}{\bar{F}_{\tau}(t - t_n)}.$$

Preuve : De par les hypothèses sur notre processus, nous avons

$$\begin{aligned} L_{Z_{t,n}(h)}(s) &= E \left[e^{-se^{\delta t}(Z(t+h)-Z(t))} \middle| \Sigma_{t,n} \right] \\ &= E \left[e^{-s \left(\sum_{k=n+1}^{N(t+h)} e^{-\delta((\tau_{n+1}-t)+\tau_{n+2}+\dots+\tau_k)} X_k \right)} \middle| \Sigma_{t,n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ E \left[e^{\left(-s \sum_{k=n+1}^{N(t+h)} e^{-\delta((\tau_{n+1}-t)+\tau_{n+2}+\dots+\tau_k)} X_k \right)} \right] \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} > t+h \right] P(T_{n+1} > t+h | \Sigma_{t,n}) \\
&\quad + E \left[e^{\left(-s \sum_{k=n+1}^{N(t+h)} e^{-\delta((\tau_{n+1}-t)+\tau_{n+2}+\dots+\tau_k)} X_k \right)} \right] \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+h \right] P(T_{n+1} \leq t+h | \Sigma_{t,n}) \right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
L_{Z_{t,n}(h)}(s) &= \frac{\bar{F}_\tau(t+h-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} \\
&+ P(T_{n+1} \leq t+h | \Sigma_{t,n}) \int_0^h E \left[e^{\left(-s \sum_{k=n+1}^{N(t+h)} e^{-\delta((\tau_{n+1}-t)+\tau_{n+2}+\dots+\tau_k)} X_k \right)} \right] \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+h \right] f_{T_{n+1} | \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+h}(x) dx \\
&= \bar{F}_{\tau^*}(h) + \int_0^h E \left[\prod_{k=n+1}^{N(t+h)} L_X(se^{-\delta T_k}) \right] \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+h, T_{n+1} = x+t \right] f_{\tau^*}(x) dx \\
&= \bar{F}_{\tau^*}(h) + \int_0^h E \left[\prod_{k=n+1}^{N(t+h)} L_X((se^{-\delta x}) e^{-\delta(\tau_{n+2}+\dots+\tau_k)}) \right] \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+h, \tau^* = x+t-t_n \right] f_{\tau^*}(x) dx \\
&= \bar{F}_{\tau^*}(h) + \int_0^h L_X(se^{-\delta x}) E \left[\prod_{k=n+2}^{N(t+h)} L_X((se^{-\delta x}) e^{-\delta(\tau_{n+2}+\dots+\tau_k)}) \right] \middle| \Sigma_{t,n}, T_{n+1} \leq t+h, \tau^* = x+t-t_n \right] f_{\tau^*}(x) dx \\
&= \bar{F}_{\tau^*}(h) + \int_0^h L_X(se^{-\delta x}) E \left[\prod_{k=1}^{N(h-x)} L_X((se^{-\delta x}) e^{-\delta T_k}) \right] f_{\tau^*}(x-t) dx.
\end{aligned}$$

Finalement, tel qu'obtenu dans Lévillé et Garrido (2001b), nous avons

$$E \left[\prod_{k=1}^{N(h-v)} L_X((se^{-\delta v}) e^{-\delta T_k}) \right] = L_{Z(h-v)}(se^{-\delta v}),$$

d'où l'expression cherchée,

$$\begin{aligned}
L_{Z_{t,n}(h)}(s) &= \bar{F}_{\tau^*}(h) + \int_0^h L_X(se^{-\delta x}) E \left[\prod_{k=1}^{N(h-x)} L_X((se^{-\delta x}) e^{-\delta T_k}) \right] f_{\tau^*}(x) dx \\
&= \bar{F}_{\tau^*}(h) + \int_0^h L_X(se^{-\delta x}) L_{Z(h-x)}(se^{-\delta x}) f_{\tau^*}(x) dx.
\end{aligned}$$

□

Nous avons donc une équation intégrale pour la transformée de Laplace de l'accroissement conditionnel de notre processus de risque. Cette transformée existe en autant que la transformée de Laplace de la sévérité des réclamations existe. Encore une fois, nous pouvons obtenir diverses identités intéressantes et retrouver certaines équations présentées plus haut à partir de (3.7), ce que nous montrons dans la prochaine remarque.

Remarques : En nous basant sur l'expression (3.7), nous pouvons montrer que :

(1) Lorsque $h = 0$,

$$L_{Z_{t,n}(0)}(s) = \frac{\bar{F}_\tau(t-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} = 1.$$

(2) Lorsque $s = 0$,

$$\begin{aligned} L_{Z_{t,n}(h)}(0) &= \frac{\bar{F}_\tau(t+h-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} + \frac{1}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} \int_0^h f_\tau(x+t-t_n) dx \\ &= \frac{\bar{F}_\tau(t+h-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} + \frac{\bar{F}_\tau(t-t_n) - \bar{F}_\tau(h+t-t_n)}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) Les moments des accroissements conditionnels du processus développés à la section 3.1 s'obtiennent à partir de (3.7). Pour retrouver l'identité (3.1), nous changeons s par $-s$ dans l'expression (3.7) afin d'obtenir la fonction génératrice de moments. Nous la dérivons ensuite par rapport à s pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} M_{Z_{t,n}(h)}(s) &= \frac{1}{\bar{F}_\tau(t-t_n)} \int_0^h \left\{ e^{-\delta x} E \left[\prod_{k=1}^{N(h-x)} M_X \left((se^{-\delta x}) e^{-\delta T_k} \right) \right] \frac{d}{ds} M_X(se^{-\delta x}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\delta x} M_X(se^{-\delta x}) E \left[\sum_{k=1}^{N(h-x)} e^{-\delta T_k} \frac{d}{ds} M_X \left((se^{-\delta x}) e^{-\delta T_k} \right) \prod_{j=1, k \neq j}^{N(h-x)} M_X \left((se^{-\delta x}) e^{-\delta T_k} \right) \right] \right\} f_\tau(x+t-t_n) dx, \end{aligned}$$

et nous évaluons enfin cette expression à $s = 0$ pour retrouver le premier moment, i.e.,

$$\left. \frac{d}{ds} M_{Z_{t,n}(h)}(s) \right|_{s=0} = E[X] \int_0^h e^{-\delta x} \left[1 + \int_0^{h-x} e^{-\delta y} dm(y) \right] f_{\tau^*}(x) dx.$$

Nous pouvons donc retrouver chacun des moments de l'accroissement conditionnel de notre processus en dérivant la fonction génératrice de moments un nombre approprié de fois. L'expression des différents moments gagnera en longueur à chaque dérivation successive, mais il sera possible d'utiliser ces expressions sans devoir passer par les mêmes étapes que pour les premiers moments présentés plus haut à la section 3.1.

De plus, il est possible de transformer l'expression des moments simples obtenue par dérivation de la fonction génératrice de moments en une formule qui utilise les moments récurrents de $Z(t)$, ce que nous présentons dans le prochain théorème.

Théorème 3.5 *Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini précédemment et tel qu'observé jusqu'au temps t . Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$ et un entier $m > 0$,*

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}^m(h)] &= M_{Z_{t,n}(h)}^{(m)}(0) \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} M_X^{(j)}(0) \int_0^h e^{-m\delta x} M_{Z(h-x)}^{(m-j)}(0) f_{\tau^*}(x) dx, \quad m \in N^*, \end{aligned}$$

$$\text{où } M_{Z(u)}^k(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} M_X^{(k-j)}(0) \int_0^u e^{-k\delta x} M_{Z(u-x)}^{(j)}(0) dm(x), \quad k \in N^*, u > 0.$$

Preuve : La preuve suit facilement en obtenant l'expression de la fonction génératrice de moments à partir de l'identité (3.7), puis en la dérivant de façon successive afin d'obtenir

$$M_{Z_{t,n}(h)}^{(m)}(s) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} M_X^{(j)}(se^{-\delta x}) \int_0^h e^{-m\delta x} M_{Z(t+h-x)}^{(m-j)}(se^{-\delta x}) f_{\tau^*}(x) dx, \quad m \in N^*,$$

et en évaluant ensuite l'expression à $s = 0$. □

La formule précédente repose donc à la fois sur les dérivées de la fonction génératrice des moments du processus conditionnel mais aussi du processus non-conditionnel. Il est donc nécessaire de connaître les moments récurrents de $Z(t)$ jusqu'à l'ordre m afin d'obtenir le m -ième moment des accroissements conditionnels.

Si nous pouvons nous attendre à ce que la transformée de Laplace dans le cas d'une distribution exponentielle des temps entre les événements soit encore une fois exempte de termes liés à l'âge, nous pensons que cette transformée peut être intéressante dans des cas plus complexes. Nous présentons donc en exemple, comme précédemment, les cas exponentiel et Erlang.

Exemple 3.6 Supposons que $\tau \sim \exp(\lambda)$ et $X \sim \exp(\theta)$, et considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini précédemment et observé jusqu'au temps t . Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$, l'identité (3.7) donne dans ce cas

$$\begin{aligned} L_{Z_{t,n(h)}}(s) &= \frac{e^{-\lambda(t+h-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} + \frac{1}{e^{-\lambda(t-t_n)}} \int_0^h \left[\frac{\theta}{\theta + se^{-\delta x}} \right] \left[\frac{\theta + se^{-\delta h}}{\theta + se^{-\delta x}} \right]^{\frac{\lambda}{\delta}} \lambda e^{-\lambda(x+t-t_n)} dx \\ &= e^{-\lambda h} + \lambda \theta \left[\theta + se^{-\delta h} \right]^{\frac{\lambda}{\delta}} \int_0^h \left[\theta + se^{-\delta x} \right]^{-\frac{\lambda+\delta}{\delta}} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda h} + \lambda \theta \left[\theta + se^{-\delta h} \right]^{\frac{\lambda}{\delta}} \left(\frac{1}{\lambda \theta} \left\{ \left[\frac{1}{\theta + s} \right]^{\frac{\lambda}{\delta}} - \left[\frac{e^{-\delta h}}{\theta + s} \right]^{\frac{\lambda}{\delta}} \right\} \right) \\ &= \left[\frac{\theta + se^{-\delta h}}{\theta + s} \right]^{\frac{\lambda}{\delta}}. \end{aligned}$$

Comme nous pouvions nous y attendre, la transformée de Laplace de l'accroissement du processus avec conditionnement est similaire à celle de l'accroissement d'un processus sans conditionnement dans le cas exponentiel. Dans le cas plus complexe de la distribution $Erlang(2, \lambda)$, il est nécessaire d'avoir recours à des techniques d'intégration numérique pour obtenir une approximation de la fonction de génératrice de moments.

Exemple 3.7 Supposons maintenant que $\tau \sim \text{Erlang}(2, 0.05)$ et $X \sim \exp(1)$, et considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini précédemment et observé jusqu'au temps t . Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta = 0.05$, l'identité (3.7) donne dans ce cas

$$L_{Z_{t,n}(h)}(s) = \frac{(1 + 0.05(t + h - t_n))e^{-0.05(t+h-t_n)}}{(1 + 0.05(t - t_n))e^{-0.05(t-t_n)}} + \frac{1}{(1 + 0.05(t - t_n))e^{-0.05(t-t_n)}} \int_0^h \lambda^2(x + t - t_n) e^{-\lambda(x+t-t_n)} \left(\frac{1}{1 + se^{-0.05x}} \right) \frac{1}{(se^{-0.05x})^2} \times \left\{ (-se^{-0.05x} - 1) [-se^{-0.05h} - 2] \ln \left(\frac{1 + se^{-0.05x}}{1 + se^{-0.05h}} \right) + se^{-0.05h} (se^{-0.05x} - 2) - 2se^{-0.05x} \right\} dx.$$

Nous obtenons donc une expression intégrale relativement difficile à évaluer directement. Nous la traitons donc numériquement en posant $t = 1$, $h = 1$ et $t_n = 0.5$, et en évaluant cette expression pour onze valeurs de s prises dans un intervalle allant de -0.5 à 0.5 . Nous interpolons ensuite ces points en ayant recours à un interpolant de Thiele (et au logiciel Maple) pour obtenir une approximation de la transformée de Laplace (qui vaut bien 1 à $s = 0$), soit

$$L_{Z_{t,n}(h)}(s) \approx \frac{0.00768 + 0.08635s + 0.05947s^2 - 1.16426s^3 - 2.14194s^4 - 0.99763s^5}{0.00768 + 0.08637s + 0.05965s^2 - 1.16430s^3 - 2.14458s^4 - s^5}.$$

Nous pouvons ainsi utiliser cet interpolant de Thiele pour approximer, en l'inversant, les quantités voulues; moments, fonctions de densité de probabilité et de répartition ou encore mesures de risque. Si cette méthode a le mérite de simplifier grandement les calculs, il est à noter que la formule obtenue n'est valide que pour une situation précise, et qu'il est nécessaire de refaire l'approximation à chaque fois qu'on l'on change les valeurs des paramètres ou le nombre de points d'interpolation.

Pour compléter notre analyse, il nous reste maintenant à obtenir la fonction de répartition de l'accroissement conditionnel de notre processus de risque, fonction souvent essentielle si nous voulons évaluer certaines mesures de risques par exemple. En général il est difficile d'obtenir une expression analytique exacte de cette fonction et nous devons plus souvent qu'autrement l'approximer, comme ce fut le cas pour de la transformée de Laplace qui précède.

3.3 Fonction de répartition des accroissements conditionnels

Obtenir la fonction de répartition d'un processus aléatoire a de nombreuses utilités. Il est nécessaire de la connaître pour obtenir la valeur exacte de nombreuses mesures de risque. De plus, si la fonction obtenue est inversible, elle pourra grandement faciliter la simulation du processus. Par conséquent, nous avons tenté de retrouver la fonction de répartition exacte ou approximée du processus $Z_{t,n}(h)$ dans les cas les plus simples et nous la comparons à la fin de cette section avec les fonctions de répartition du processus obtenues par simulation.

La façon usuelle de procéder afin de trouver la fonction de répartition d'un processus tel que celui que nous étudions est de passer par sa transformée de Laplace (ou sa fonction génératrice de moments). Une inversion à l'aide d'outils informatiques tels que Maple peut alors être effectuée. Dans le cas des temps entre les événements exponentiellement distribués, nous retrouvons une fonction de répartition indépendante de l'âge du processus au temps t . Nous avons alors

$$F_{Z_{t,n}(h)}(x) = F_{Z(h)}(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dans les cas plus complexes, comme le cas $Erlang(2, \lambda)$, il n'est pas aisé d'inverser directement la transformée. Nous privilégions donc dans ces cas une approche différente. Nous approximations la transformée elle-même, puis inversons cette approximation pour obtenir un estimé de la fonction de (sous-)densité de probabilité de l'accroissement conditionnel. Il ne reste alors qu'à intégrer cette fonction pour obtenir une approximation de la fonction de répartition.

Par exemple, dans le cas de l'approximation de la transformée de Laplace de l'accroissement conditionnel obtenue à l'exemple 3.7, nous obtenons, toujours avec Maple, pour $0 \leq x < \infty$:

$$\begin{aligned} F_{Z_{t,n}(h)}(x) \approx & 0.9999999992 - 0.0009727599569e^{-1.046580723x} - 0.001396384689e^{-1.017076257x} \\ & + 0.0000000001054498269e^{-0.1137485776x} - 0.00000000004445363876e^{0.2687755100x}. \end{aligned}$$

Nous pouvons facilement comparer cette fonction de répartition à celle obtenue par simulation. La figure 5, en annexe, présente la fonction de répartition des accroissements conditionnels du processus présentée plus haut. En rouge, nous avons la fonction approximée avec la méthode de la section 3.2, alors qu'en bleu, nous avons la fonction de répartition obtenue à l'aide 10 000 simulations du processus sur $]t, t+h]$. Nous voyons que les deux fonctions sont très rapprochées, même si notre approximation semble légèrement sous-estimer la véritable fonction de répartition. En raison de la grande probabilité qu'aucun événement ne se produise entre t et $t+h$ (malgré l'âge assez élevé utilisé), nous observons aussi une grande masse de probabilité à zéro; au-dessus de 0.99! Néanmoins, nous notons que notre approximation rend bien la forme et l'échelle de la fonction de répartition.

Si nous changeons légèrement les paramètres, i.e. $\tau \sim \text{Erlang}(2, 0.20)$, $X \sim \exp(1)$ et $\delta = 0.20$ (et donc réapproximons la transformée de Laplace puis la fonction de répartition), nous obtenons la figure 6 avec notre nouvelle approximation en rouge et 10 000 nouvelles simulations en bleu. Nous voyons que le poids à zéro est plus réduit, puisque plus d'événements se produisent. Que ce soit avec la simulation ou l'approximation, nous arrivons à une probabilité d'environ 0.967 que $Z_{t,n}(h)$ soit égal à zéro. Nul doute qu'en utilisant un paramètre d'échelle plus grand pour la distribution Erlang ou en considérant des périodes plus longues, nous pourrions obtenir des fonctions de répartition ayant un poids à zéro plus réduit et une forme plus étirée. Finalement, dans le cas de cette dernière figure, nous constatons que la courbe issue de l'approximation sous-estime la fonction de répartition pour les valeurs intermédiaires, mais la surestime dans les valeurs extrêmes.

Ainsi, il nous est possible de reproduire assez fidèlement la fonction de répartition (ou de densité) de $Z_{t,n}(h)$ sans avoir recours uniquement à la simulation. Par conséquent, au chapitre 4, nous utiliserons souvent notre approximation de la fonction de répartition dans les diverses applications où elle apparaît.

3.4 Accroissements conditionnels dans un contexte avec dépendance entre X_k et τ_k

Jusqu'à présent, le modèle que nous avons présenté suppose l'indépendance entre la sévérité d'une réclamation et le délai qui la sépare de la précédente. Dans cette section, nous étudions la possibilité que la sévérité d'une réclamation soit dépendante du temps écoulé depuis la dernière réclamation. En d'autres termes, nous supposons maintenant que les paires $\{(X_k, \tau_k); k \in \mathbb{N}^*\}$ forment une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. Cette possibilité a déjà été étudiée, notamment par Albrecher & Teugels (2006), Woo & Chung (2013) et Bargès *et al.* (2011). Ces derniers auteurs, par une méthode basée sur les transformées de Laplace, ont obtenu des formules analytiques pour les transformée de Laplace des moments d'un processus de risque Poissonnien avec escompte (sans conditionnement), avec plusieurs applications dont le calcul de primes et l'approximation de la distribution de ce processus de risque. En utilisant une méthode différente basée uniquement sur des arguments de renouvellement, Léveillé & Hamel (2017) ont obtenu, quant à eux, des formules récursives de ces moments, dans le cas renouvellement. Ces formules plus générales s'appliquent à des cas autres que Poissonniens et ne dépendent pas autant de la copule utilisée pour établir la dépendance entre X_k et τ_k . De plus, elles ne demandent pas d'inversions de transformées de Laplace, qui peuvent devenir numériquement complexes. Nous présentons donc une extension de notre modèle avec conditionnement sur l'expérience en introduisant la dépendance, en nous basant sur ces travaux.

Dans ce qui suit, nous exhibons uniquement les deux premiers moments de notre modèle dans ce nouveau contexte. Auparavant, nous introduisons un lemme qui présente les deux premiers moments de notre processus de risque avec dépendance mais sans conditionnement sur l'expérience. Vu l'importance de ce lemme, les preuves de ces identités données par Léveillé & Hamel (2017) sont présentées.

Lemme 3.1 Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que décrit précédemment, et supposons que $\{(X_k, \tau_k); k \in \mathbf{N}^*\}$ forme une suite de variables aléatoires i.i.d. avec fonction de répartition conjointe $F_{X,\tau}(x, y)$. Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$, les deux premiers moments de ce processus de risque sont donnés par

$$\begin{aligned} \bullet \quad E[Z(t)] &= \int_0^t e^{-\delta u} E[X | \tau = u] \left\{ 1 + \int_0^{t-u} e^{-\delta v} dm(v) \right\} dF_\tau(u) \\ \bullet \quad E[Z^2(t)] &= \int_0^t e^{-2\delta u} E[X^2 | \tau = u] \left\{ 1 + \int_0^{t-u} e^{-2\delta v} dm(v) \right\} dF_\tau(u) \\ &\quad + 2 \int_0^t e^{-2\delta u} E[X | \tau = u] \left\{ E[Z(t-u)] + \int_0^{t-u} e^{-2\delta v} E[Z(t-u-v)] dm(v) \right\} dF_\tau(u). \end{aligned}$$

Preuve : Pour ces deux identités, nous utiliserons les techniques de renouvellement énoncées à la section 2.1.

Pour la première identité, nous avons

$$E[Z(t)] = E\left[E[Z(t) | T_1, T_2, \dots, T_{N(t)}, N(t)]\right] = E\left[\sum_{j=1}^{N(t)} e^{-\delta T_j} E[X_j | \tau_j]\right].$$

En conditionnant sur $N(t)$, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{j=1}^{N(t)} e^{-\delta T_j} E[X_j | \tau_j]\right] &= E\left[E\left[\sum_{j=1}^{N(t)} e^{-\delta T_j} E[X_j | \tau_j]\right] | N(t)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \int_0^t \int_0^t E\left[e^{-\delta u} E[X_j | \tau_j = u-v]\right] dF_{T_{j-1}, T_j | N(t)}(v, u | n) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} \int_0^t \int_0^t E\left[e^{-\delta u} E[X_1 | \tau_1 = u-v]\right] P(N(t-u) = n-j) dF_{\tau_1}(u-v) dF_{T_{j-1}}(v) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^t E\left[e^{-\delta u} E[X | \tau = u-v]\right] dF_\tau(u-v) dF_\tau^{*(j-1)}(v) \\ &= \int_0^t e^{-\delta u} E[X | \tau = u] dF_\tau(u) + \int_0^t \int_0^t e^{-\delta u} E[X | \tau = u-v] dF_\tau(u-v) dm(v). \end{aligned}$$

En permutant l'ordre d'intégration, nous obtenons notre premier résultat.

Pour la seconde identité, nous avons

$$\begin{aligned}
E[Z^2(t)] &= E \left[E \left[\sum_{j=1}^{N(t)} e^{-2\delta T_j} X_j^2 \middle| T_1, T_2, \dots, T_{N(t)}, N(t) \right] \right] \\
&\quad + 2E \left[E \left[\sum_{j=1}^{N(t)-1} \sum_{k=j+1}^{N(t)} e^{-\delta(T_j+T_k)} X_j X_k \middle| T_1, T_2, \dots, T_{N(t)}, N(t) \right] \right] \\
&= E \left[\sum_{j=1}^{N(t)} e^{-2\delta T_j} E[X_j^2 | \tau_j] \right] + 2E \left[\sum_{j=1}^{N(t)-1} \sum_{k=j+1}^{N(t)} e^{-\delta(T_j+T_k)} E[X_j | \tau_j] E[X_k | \tau_k] \right].
\end{aligned}$$

Similairement à l'identité précédente, la première sommation donne

$$E \left[\sum_{j=1}^{N(t)} e^{-2\delta T_j} E[X_j^2 | \tau_j] \right] = \int_0^t e^{-2\delta u} E[X^2 | \tau = u] \left\{ 1 + \int_0^{t-u} e^{-2\delta v} dm(v) \right\} dF_\tau(u),$$

et la seconde sommation donne

$$\begin{aligned}
&E \left[\sum_{j=1}^{N(t)-1} \sum_{k=j+1}^{N(t)} e^{-\delta(T_j+T_k)} E[X_j | \tau_j] E[X_k | \tau_k] \right] \\
&= E \left[E \left[\sum_{j=1}^{N(t)-1} \sum_{k=j+1}^{N(t)} e^{-\delta(T_j+T_k)} E[X_j | \tau_j] E[X_k | \tau_k] \middle| N(t) \right] \right] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t e^{-\delta(z+u)} E[X_j | \tau_j = u-v] E[X_k | \tau_k = z-w] \\
&\quad \times dF_{T_{j-1}, T_j, T_{k-1}, T_k | N(t)}(v, u, w, z | n) P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t e^{-\delta(z+u)} E[X | \tau = u-v] E[X | \tau = z-w] \\
&\quad \times P(N(t-z) = n-k) dF_\tau(z-w) dF_{T_{k-1-j}}(w-u) dF_\tau(u-v) dF_{T_{j-1}}(v) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^t \int_0^{t-v} \int_0^{t-v-\gamma} e^{-\delta(\alpha+2(\gamma+v))} E[X | \tau = \gamma] E[X | \tau = \alpha] \\
&\quad \times P(N(t-z) = n-j-1) dF_\tau(\alpha) dF_\tau(\gamma) dF_\tau^{*(j-1)}(v) \\
&\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=j+2}^n \int_0^t \int_0^{t-v} \int_0^{t-v-\gamma} \int_0^{t-v-\gamma-\beta} e^{-\delta(\alpha+\beta+2(\gamma+v))} E[X | \tau = \gamma] E[X | \tau = \alpha] \\
&\quad \times P(N(t-z) = n-k) dF_\tau(\alpha) dF_\tau^{*(k-1-j)}(\beta) dF_\tau(\gamma) dF_\tau^{*(j-1)}(v).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{j=1}^{N(t)-1} \sum_{k=j+1}^{N(t)} e^{-\delta(T_k+T_j)} E[X_j | \tau_j] E[X_k | \tau_k] \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t-v} \int_0^{t-v-\gamma} e^{-\delta(\alpha+2(\gamma+v))} E[X | \tau = \gamma] \\
& \quad \times E[X | \tau = \alpha] P(N(t-z) = n-j-1) dF_{\tau}(\alpha) dF_{\tau}(\gamma) dF_{\tau}^{*(j-1)}(v) \\
& \quad + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j+2}^{\infty} \sum_{n=k}^n \int_0^t \int_0^{t-v} \int_0^{t-v-\gamma} \int_0^{t-v-\gamma-\beta} e^{-\delta(\alpha+\beta+2(\gamma+v))} E[X | \tau = \gamma] E[X | \tau = \alpha] \\
& \quad \times P(N(t-z) = n-k) dF_{\tau}(\alpha) dF_{\tau}^{*(k-1-j)}(\beta) dF_{\tau}(\gamma) dF_{\tau}^{*(j-1)}(v) \\
& = \int_0^t \int_0^{t-\gamma} e^{-\delta(\alpha+2\gamma)} E[X | \tau = \gamma] E[X | \tau = \alpha] dF_{\tau}(\alpha) dF_{\tau}(\gamma) \\
& \quad + \int_0^t \int_0^{t-v} \int_0^{t-v-\gamma} e^{-\delta(\alpha+2(\gamma+v))} E[X | \tau = \gamma] E[X | \tau = \alpha] dF_{\tau}(\alpha) dF_{\tau}(\gamma) dm(v) \\
& \quad + \int_0^t \int_0^{t-\gamma} \int_0^{t-\gamma-\beta} e^{-\delta(\alpha+\beta+2\gamma)} E[X | \tau = \gamma] E[X | \tau = \alpha] dF_{\tau}(\alpha) dm(\beta) dF_{\tau}(\gamma) \\
& \quad + \int_0^t \int_0^{t-v} \int_0^{t-v-\gamma} \int_0^{t-v-\gamma-\beta} e^{-\delta(\alpha+\beta+2(\gamma+v))} E[X | \tau = \gamma] E[X | \tau = \alpha] dF_{\tau}(\alpha) dm(\beta) dF_{\tau}(\gamma) dm(v) \\
& = \int_0^t e^{-2\delta\gamma} E[X | \tau = \gamma] \left\{ \int_0^{t-\gamma} e^{-\delta\alpha} E[X | \tau = \alpha] \left\{ 1 + \int_0^{t-\gamma-\alpha} e^{-\delta\beta} dm(\beta) \right\} dF_{\tau}(\alpha) \right\} dF_{\tau}(\gamma) \\
& \quad + \int_0^t \int_0^{t-v} e^{-2\delta(\gamma+v)} E[X | \tau = \gamma] \left\{ \int_0^{t-v-\gamma} e^{-\delta\alpha} E[X | \tau = \alpha] \left\{ 1 + \int_0^{t-v-\gamma-\alpha} e^{-\delta\beta} dm(\beta) \right\} dF_{\tau}(\alpha) \right\} dm(v) dF_{\tau}(\gamma).
\end{aligned}$$

En permutant l'ordre d'intégration entre γ et v dans le second terme, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{j=1}^{N(t)-1} \sum_{k=j+1}^{N(t)} e^{-\delta(T_k+T_j)} E[X_j | \tau_j] E[X_k | \tau_k] \right] \\
& = \int_0^t e^{-2\delta\gamma} E[X | \tau = \gamma] E[Z(t-\gamma)] dF_{\tau}(\gamma) \\
& \quad + \int_0^t \int_0^{t-\gamma} e^{-2\delta(\gamma+v)} E[X | \tau = \gamma] E[Z(t-v-\gamma)] dm(v) dF_{\tau}(\gamma) \\
& = \int_0^t e^{-2\delta\gamma} E[X | \tau = \gamma] \left\{ E[Z(t-\gamma)] + \int_0^{t-\gamma} e^{-2\delta v} E[Z(t-v-\gamma)] dm(v) \right\} dF_{\tau}(\gamma).
\end{aligned}$$

La seconde identité suit aisément en additionnant les quantités appropriées. $\square$

Maintenant que ce lemme a été établi, nous sommes en mesure de présenter des expressions semblables aux identités (3.1) et (3.3) permettant de calculer les premier et deuxième moments du processus des accroissements avec dépendance entre X_k et τ_k .

Théorème 3.6 Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que décrit à la section 3.1, et supposons que $\{(X_k, \tau_k); k \in \mathbb{N}^*\}$ forme une suite de variables aléatoires i.i.d. avec fonction de répartition conjointe $F_{X,\tau}(x, y)$. Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$, les deux premiers moments de l'accroissement conditionnel $Z_{t,n}(h)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \bullet E[Z_{t,n}(h)] &= \int_0^h e^{-\delta v} E[X | \tau = v + t - t_n] f_{\tau^*}(v) dv \\ &\quad + \int_0^h e^{-\delta v} \int_0^{h-v} e^{-\delta u} E[X | \tau = u] \left[1 + \int_0^{h-v-u} e^{-\delta w} dm(w) \right] f_{\tau}(u) du f_{\tau^*}(v) dv. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \bullet E[Z_{t,n}^2(h)] &= \int_0^h e^{-2\delta v} E[X^2 | \tau = v + t - t_n] f_{\tau^*}(v) dv \\ &\quad + 2 \int_0^h e^{-2\delta v} E^2[X | \tau = v + t - t_n] \left\{ \int_0^{h-v} e^{-\delta u} dm(u) \right\} f_{\tau^*}(v) dv \\ &\quad + \int_0^h e^{-2\delta v} E[Z(h-v)^2] f_{\tau^*}(v) dv. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Preuve : Nous avons, en conditionnant sur τ^*

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}(h)] &= E_{\tau_{n+1}} \left[e^{-\delta \tau^*} E[X_{n+1} | \tau_{n+1}] + e^{-\delta \tau^*} \sum_{k=2}^{N(t+h)-N(t)} e^{-\delta(\tau_{n+2}+\dots+\tau_{n+k})} X_{n+k} \right] \\ &= E \left[e^{-\delta \tau^*} E[X_{n+1} | \tau_{n+1}] \right] + E \left[e^{-\delta \tau^*} \sum_{k=2}^{N(h)} e^{-\delta(\tau_{n+2}+\dots+\tau_{n+k})} X_{n+k} | \tau_{n+1} \right] \\ &= \int_0^h e^{-\delta v} E[X_{n+1} | \tau_{n+1} = v + t - t_n] f_{\tau^*}(v) dv \\ &\quad + \int_0^h e^{-\delta v} E \left[\sum_{k=2}^{N(t+h)-N(t)} e^{-\delta(\tau_{n+2}+\dots+\tau_{n+k})} X_{n+k} | \tau_{n+1} = v + t - t_n \right] f_{\tau^*}(v) dv \\ &= \int_0^h e^{-\delta v} E[X | \tau = v + t - t_n] f_{\tau^*}(v) dv \\ &\quad + \int_0^h e^{-\delta v} E \left[\sum_{k=1}^{N(h-v)} e^{-\delta T_k} X_k \right] f_{\tau^*}(v) dv. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant le Lemme 3.1 (et la preuve l'accompagnant) pour obtenir la première identité, soit

$$\begin{aligned}
E[Z_{t,n}(h)] &= \int_0^h e^{-\delta v} E[X | \tau = v + t - t_n] f_{\tau^*}(v) dv \\
&\quad + \int_0^h e^{-\delta v} E[Z(h-v)] f_{\tau^*}(v) dv. \\
&= \int_0^h e^{-\delta v} E[X | \tau = v + t - t_n] f_{\tau^*}(v) dv \\
&\quad + \int_0^h e^{-\delta v} \int_0^{h-v} e^{-\delta u} E[X | \tau = u] \left[1 + \int_0^{h-v-u} e^{-\delta w} dm(w) \right] f_{\tau}(u) du f_{\tau^*}(v) dv.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième identité, nous avons

$$\begin{aligned}
E\left[\left(Z(t+h) - Z(t)\right)^2 \mid \Sigma_{t,n}\right] &= E\left[\left(\sum_{k=n+1}^{N(t+h)} e^{-\delta T_k} X_k\right)^2 \mid \Sigma_{t,n}\right] \\
&= e^{-2\delta t} E\left[\left(e^{-\delta \tau^*} X_{n+1} + e^{-\delta \tau^*} \sum_{k=n+2}^{N(t+h)} e^{-\delta(\tau_{n+2} + \dots + \tau_k)} X_k\right)^2 \mid \Sigma_{t,n}\right] \\
&= e^{-2\delta t} E\left[e^{-2\delta \tau^*} X_{n+1}^2 + 2e^{-2\delta \tau^*} X_{n+1} \sum_{k=n+2}^{N(t+h)} e^{-\delta(\tau_{n+2} + \dots + \tau_k)} X_k\right. \\
&\quad \left. + e^{-2\delta \tau^*} \left(\sum_{k=n+2}^{N(t+h)} e^{-\delta(\tau_{n+2} + \dots + \tau_k)} X_k\right)^2 \mid \Sigma_{t,n}\right].
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la preuve du lemme 3.1 et en conditionnant de nouveau sur τ^* , nous obtenons

$$\begin{aligned}
E\left[\left(Z(t+h) - Z(t)\right)^2 \mid \Sigma_{t,n}\right] &= \int_t^{t+h} e^{-2\delta v} E[X_{n+1}^2 | \tau_{n+1} = v - t_n] f_{\tau^*}(v-t) dv \\
&\quad + 2 \int_t^{t+h} e^{-2\delta v} E^2[X_{n+1} | \tau_{n+1} = v - t_n] \left\{ \int_0^{t+h-v} e^{-\delta u} dm(u) \right\} f_{\tau^*}(v-t) dv \\
&\quad + \int_t^{t+h} e^{-2\delta v} E\left[\left(\sum_{k=n+2}^{N(t+h)} e^{-\delta(\tau_{n+2} + \dots + \tau_k)} X_k\right)^2 \mid \tau_{n+1} = v - t_n\right] f_{\tau^*}(v-t) dv.
\end{aligned}$$

Nous retrouvons ensuite l'expression du deuxième moment en observant que

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\sum_{k=n+2}^{N(t+h)} e^{-\delta(\tau_{n+2} + \dots + \tau_k)} X_k \right)^2 \middle| \tau_{n+1} = v - t_n \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{k=1}^{N(t+h-v)} e^{-\delta T_k} X_k \right)^2 \right] \\
&= E \left[Z(t+h-v)^2 \right] \\
&= E \left[\sum_{k=1}^{N(t+h-v)} e^{-2\delta \tau_k} X_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N(t+h-v)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h-v)} e^{-\delta(T_k + T_j)} X_k X_j \right] \\
&= \int_0^{t+h-v} e^{-2\delta u} E[X_1^2 | \tau_1 = u] f_{\tau_1}(u) du + 2E \left[E \left[\sum_{k=1}^{N(t+h-v)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h-v)} e^{-\delta(T_k + T_j)} X_k X_j \middle| \tau_1 \right] \right] \\
&= \int_0^{t+h-v} e^{-2\delta u} E[X_1^2 | \tau_1 = u] f_{\tau_1}(u) du + 2E \left[E \left[e^{-2\delta \tau_1} X_1 \sum_{j=2}^{N(t+h-v)} e^{-\delta(T_j - \tau_j)} X_j \middle| \tau_1 \right] \right] \\
&\quad + 2E \left[E \left[e^{-2\delta \tau_1} \sum_{k=2}^{N(t+h-v)-1} \sum_{j=k+1}^{N(t+h-v)} e^{-2\delta(\tau_2 + \dots + \tau_k) - \delta(\tau_{k+1} + \dots + \tau_j)} X_k X_j \middle| \tau_1 \right] \right] \\
&= \int_0^{t+h-v} e^{-2\delta u} E[X_1^2 | \tau_1 = u] f_{\tau_1}(u) du + 2 \int_0^{t+h-v} e^{-2\delta v} E^2[X_1 | \tau_1 = u] \left\{ \int_0^{t+h-v-u} e^{-\delta w} dm(w) \right\} f_{\tau_1}(u) du \\
&\quad + \int_0^{t+h-v} e^{-2\delta v} \left\{ E[X_1^2 | \tau_1 = u] \int_0^{t+h-v-u} e^{-2\delta w} dm(w) \right. \\
&\quad \left. + 2E^2[X_1 | \tau_1 = v] \int_0^{t+h-v-u} \int_0^{t+h-v-u-w} e^{-\delta(2w+z)} dm(z) dm(w) \right\} f_{\tau_1}(u) du .
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant à nouveau

$$E[Z_{t,n}^2(h)] = e^{2\delta t} E[(Z(t+h) - Z(t))^2 | \Sigma_{t,n}]$$

et en modifiant les bornes des intégrales et les termes que ces intégrales contiennent, nous obtenons l'identité (3.9). □

Remarque : Si nous éliminons la relation de dépendance entre X_k et τ_k , nous retrouvons aisément les identités des théorèmes 3.1 et 3.2. Dans le cas du premier moment, nous avons

$$\int_0^{h-v} e^{-\delta u} \left[1 + \int_0^{h-v-u} e^{-\delta w} dm(w) \right] dF_\tau(u) = \int_0^{h-v} e^{-\delta u} dm(u),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}(h)] &= \int_0^h e^{-\delta v} E[X_{n+1} | \tau_{n+1} = v + t - t_n] f_{\tau^*}(v) dv \\ &\quad + \int_0^h e^{-\delta v} \int_0^{h-v} e^{-\delta u} E[X | \tau = u] \left[1 + \int_0^{h-v-u} e^{-\delta w} dm(w) \right] f_\tau(u) du f_{\tau^*}(v) dv \\ &= E[X] \int_0^h e^{-\delta v} \left[1 + \int_0^{h-v} e^{-\delta u} dm(u) \right] f_{\tau^*}(v) dv. \end{aligned}$$

Dans le cas du deuxième moment, nous avons

$$\begin{aligned} E[Z_{t,n}^2(h)] &= \int_0^h e^{-2\delta v} E[X_{n+1}^2 | \tau_{n+1} = v + t - t_n] f_{\tau^*}(v) dv \\ &\quad + 2 \int_0^h e^{-2\delta v} E[X_{n+1} | \tau_{n+1} = v + t - t_n] \left\{ \int_0^{h-v} e^{-\delta u} dm(u) \right\} f_{\tau^*}(v) dv \\ &\quad + \int_0^h e^{-2\delta v} E[Z(t+h-v)^2] f_{\tau^*}(v) dv \\ &= E[X^2] \int_0^h e^{-2\delta x} f_{\tau^*}(x) dx \\ &\quad + 2E^2[X] \int_0^h e^{-2\delta x} \left(\int_0^{h-x} e^{-\delta v} dm(v) + \int_0^{h-x} \int_0^{h-x-u} e^{-\delta(v+2u)} dm(v) dm(u) \right) f_{\tau^*}(x) dx \\ &\quad + E[X^2] \int_0^h e^{-2\delta x} \left(\int_0^{h-x} e^{-2\delta y} dm(y) \right) f_{\tau^*}(x) dx \\ &= E[X^2] \int_0^h e^{-2\delta x} \left(1 + \int_0^{h-x} e^{-2\delta y} dm(y) \right) f_{\tau^*}(x) dx \\ &\quad + 2E^2[X] \int_0^h e^{-2\delta x} \left(\int_0^{h-x} e^{-\delta v} dm(v) + \int_0^{h-x} \int_0^{h-x-u} e^{-\delta(v+2u)} dm(v) dm(u) \right) f_{\tau^*}(x) dx. \end{aligned}$$

L'expression du deuxième moment fait intervenir plus de termes mais demeure calculable dans de très nombreux cas. Les deux formules présentent un net avantage sur celles obtenues par Bargès *et al.* (2011). Nos formules étant très générales, nous pouvons les utiliser dans de nombreux contextes, et pour de nombreuses copules. En utilisant la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern décrite au chapitre 2, nous sommes en mesure de mettre en évidence les effets de l'introduction d'une relation de dépendance dans les exemples qui suivent.

Exemple 3.8 Supposons que $\tau \sim \exp(\lambda)$, $X \sim \exp(\theta)$ et considérons le processus $\{Z(t); t > 0\}$ tel que défini dans cette section, avec fonction de densité conjointe du vecteur (X_k, τ_k) donné par la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern de paramètre $\omega \in [-1, 1]$. Alors, pour un taux constant d'intérêt net $\delta > 0$, nous obtenons le premier moment sur l'intervalle $]t, t+h]$ de l'accroissement conditionnel, suivant (3.8), soit

$$\begin{aligned}
E[Z_{t,n}(h)] &= \int_0^h e^{-\delta v} \int_0^\infty x \frac{\theta e^{-\theta x} \lambda e^{-\lambda(v+t-t_n)} \left\{ 1 + \omega \left[1 - 2(1 - e^{-\theta x}) \right] \left[1 - 2(1 - e^{-\lambda(v+t-t_n)}) \right] \right\}}{\lambda e^{-\lambda(v+t-t_n)}} dx \\
&\quad \times \frac{\lambda e^{-\lambda(v+t-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} dv \\
&+ \int_0^h e^{-\delta v} \int_0^{h-v} e^{-\delta u} \int_0^\infty x \frac{\theta e^{-\theta x} \lambda e^{-\lambda(v+t-t_n)} \left\{ 1 + \omega \left[1 - 2(1 - e^{-\theta x}) \right] \left[1 - 2(1 - e^{-\lambda(v+t-t_n)}) \right] \right\}}{\lambda e^{-\lambda(v+t-t_n)}} dx \\
&\quad \times \left[1 + \int_0^{h-v-u} e^{-\delta w} \lambda dw \right] \lambda e^{-\lambda u} du \frac{\lambda e^{-\lambda(v+t-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} dv \\
&= \int_t^{t+h} e^{-\delta v} \left[\frac{e^{-\lambda(v-t_n)} \left((2 + \omega) e^{\lambda(v-t_n)} - 2\omega \right)}{2\theta} \right] \frac{\lambda e^{-\lambda(v-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} dv \\
&+ \int_0^h e^{-\delta v} \int_0^{h-v} e^{-\delta u} \left[\frac{e^{-\lambda(v+t-t_n)} \left((2 + \omega) e^{\lambda(v+t-t_n)} - 2\omega \right)}{2\theta} \right] \left[1 + \int_0^{h-v-u} e^{-\delta w} \lambda dw \right] \lambda e^{-\lambda u} du \frac{\lambda e^{-\lambda(v+t-t_n)}}{e^{-\lambda(t-t_n)}} dv \\
&= \frac{\lambda}{\delta(4\lambda + 2\delta)\theta} \left[\delta\omega \left(1 + 2e^{-\lambda(t-t_n+2h)-\delta h} - e^{-(2\lambda+\delta)h} - 2e^{-\lambda(t-t_n)} \right) + (4\lambda + 2\delta)(1 - e^{-\delta h}) \right].
\end{aligned}$$

Remarque : Lorsque nous posons $\omega=0$ (et, donc, que les X_k et τ_k sont indépendants), nous retrouvons facilement l'expression du premier moment présentée à l'exemple 3.1,

$$E[Z_{t,n}(h)] = \frac{\lambda}{\delta(4\lambda + 2\delta)\theta} [(4\lambda + 2\delta)(1 - e^{-\delta h})] = \frac{\lambda}{\delta\theta} (1 - e^{-\delta h}).$$

Nous constatons que, contrairement aux exemples précédents utilisant un temps entre les réclamations successives distribué exponentiellement, l'âge du processus a une influence sur le premier moment de l'accroissement. En effet, il est impossible de faire disparaître le terme t_n de l'expression finale. Par conséquent, le fait de changer l'âge du processus aura une influence sur la taille espérée des sinistres subséquents, et donc sur l'espérance des accroissements conditionnels de notre processus de risque. L'âge influencera aussi de la même manière tous les moments d'ordres supérieurs, même s'il ne nous a pas semblé pertinent de les présenter.

Les deux exemples suivant montrent cependant que, malgré une certaine lourdeur, il est possible, même en utilisant des distributions moins simples, d'obtenir des valeurs numériques suffisamment précises pour ces moments.

Exemple 3.9 Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini dans cette section, avec fonction de densité conjointe du vecteur (X_k, τ_k) donné par la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern de paramètre ω , et supposons que $\tau \sim \exp(\lambda=5)$, $X \sim \exp(\theta=1)$, $t=1$, $h=1$ et $\delta=0.05$. Les valeurs obtenues par l'application de (3.8) pour différents âges et paramètres ω sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau 3.5 : Premier moment des accroissements conditionnels du processus avec dépendance (temps exponentiels)

	$t - t_n = 0$	$t - t_n = 0.15$	$t - t_n = 0.50$	$t - t_n = 0.85$
$\omega = 1.0$	4.62832	4.89081	5.08497	5.11870
$\omega = 0.5$	4.75268	4.88392	4.98102	4.99788
$\omega = 0$	4.87706	4.87706	4.87706	4.87706

Nous voyons tout d'abord que, dans un contexte sans dépendance ($\omega=0$), l'âge n'a toujours pas d'influence sur le premier moment du processus. Cependant, lorsqu'on que nous introduisons une dépendance modérée ($\omega=0.5$) ou forte ($\omega=1$), les valeurs du premier moment varient en fonction de l'âge. Dans les trois colonnes de droite, nous notons que l'augmentation de la dépendance entraîne aussi une augmentation du premier moment, tout simplement parce qu'un long temps avant la $(n+1)$ -ième réclamation aura pour cause d'augmenter la sévérité de cette réclamation. Dans la colonne de gauche, c'est une diminution du premier moment qui va de pair avec de grandes valeurs de ω , une situation que l'on observe jusqu'à un âge d'environ 0.13, et qui dépend grandement des paramètres du processus. Puisque la distribution exponentielle est sans-mémoire, de petits âges combinés à la relation de dépendance et à la copule FGM auront pour effet de réduire l'espérance de la sévérité de la $(n+1)$ -ième réclamation. Nous observons, en somme, le même phénomène qu'à l'exemple 3.8, à savoir que l'ajout d'une relation de dépendance entre les deux composantes du processus lie le comportement de celui-ci à son âge, même dans le cas Poissonnien.

Dans l'exemple suivant, nous voyons ce qui se produit lorsque nous utilisons plutôt une distribution Erlang pour la distribution des temps entre les réclamations, pour les premier et deuxième moments.

Exemple 3.10 *Considérons le processus $\{Z(t); t \geq 0\}$ tel que défini dans cette section, avec fonction de densité conjointe du vecteur (X_k, τ_k) donné par la copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern de paramètre ω , et supposons que $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X \sim \text{Exp}(\theta=1)$ et $t=1$, $h=1$ et $\delta=0.05$. Les valeurs obtenues par l'utilisation des identités (3.8) et (3.9), pour différents âges et paramètres ω , sont présentées dans les tableaux suivants :*

Tableau 3.6 : Premier moment des accroissements conditionnels du processus avec dépendance (temps Erlang)

	$t - t_n = 0$	$t - t_n = 0.15$	$t - t_n = 0.50$	$t - t_n = 0.85$
$\omega = 1.0$	4.44112	4.96031	5.33477	5.38468
$\omega = 0.5$	4.53440	4.94361	5.18904	5.22931

Tableau 3.7 : Deuxième moment des accroissements conditionnels du processus avec dépendance

	$t - t_n = 0$	$t - t_n = 0.15$	$t - t_n = 0.50$	$t - t_n = 0.85$
$\omega = 1.0$	35.44803	40.01545	42.30888	42.76711
$\omega = 0.5$	31.21335	35.02851	36.77078	37.15663

Pour chacun de ces moments, nous notons à nouveau que les valeurs calculées augmentent en fonction de l'âge. Encore une fois, la différence est plus marquée lorsqu'on passe d'un âge de 0.15 à 0.5 que lorsqu'on passe de 0.5 à 0.85. Le plus intéressant est cependant de remarquer que les valeurs diminuent aussi de concert avec le paramètre ω (peu importe l'âge étudié), cela reflétant le fait qu'une plus grande valeur (positive) de ω représente une plus grande corrélation (positive) entre le temps entre les réclamations et la taille de celles-ci. Ainsi, plus l'âge du processus sera élevé, plus le temps avant le $(n+1)$ -ième sera grand et plus sa taille le sera aussi, ce qui augmentera à la fois la valeur du premier et du deuxième moment. Pour un oméga positif, nous retrouvons donc des valeurs plus élevées que celles calculées à l'exemple 3.3, alors qu'un ω négatif nous amènerait à des valeurs moindres (puisque les deux variables aléatoires seraient alors négativement corrélées).

Dans ce chapitre, nous avons donc décrit un modèle intégrant toute l'information recueillie sur le comportement du processus de sommes escomptées dans une période de temps et utilisant cette information pour prédire ce comportement sur une deuxième période. Nous avons obtenu des identités permettant de calculer, dans de nombreux cas, les différents moments, transformées de Laplace, fonctions génératrices de moments et fonctions de répartition. Au chapitre suivant, nous verrons comment ces résultats viennent modifier différentes applications des processus de sommes escomptées habituels.

Chapitre 4 Applications

Maintenant que les assises et les principaux résultats de notre modèle ont été présentés, nous pouvons montrer l'impact qu'il aura sur des applications concrètes. Dans ce chapitre, nous appliquons à notre modèle les différents concepts présentés à la fin du chapitre 2, c'est-à-dire les mesures de risque, les processus de réserve, la probabilité de ruine et une borne de type Lundberg. À l'aide d'exemples numériques, nous comparons les résultats obtenus avec le modèle classique sans conditionnement aux résultats obtenus à l'aide d'identités issues de notre modèle avec conditionnement.

4.1 Mesures de risque

Dans cette section, nous reprenons les différentes mesures de risque mentionnées à la section 2.3 et nous comparons les valeurs obtenues selon le modèle employé. Dans les cas où il n'est pas possible (ou trop complexe) d'utiliser des formules analytiques pour compléter les exemples numériques, nous utilisons la simulation ou l'approximation de la fonction de répartition (tel que vu à la section 3.3) pour en arriver à une valeur numérique. Les mesures de risque sont présentées dans le même ordre qu'au chapitre 2.

4.1.1 Value at Risk

Comme nous l'avons déjà indiqué, cette mesure n'est pas cohérente. Toutefois, celle-ci est encore très largement employée, en actuariat comme en finance, ne serait-ce que pour son utilité dans le calcul la TVaR. Pour obtenir la VaR, il nous faudrait évaluer exactement ou approximer de très près la fonction de répartition, ce qui est généralement difficile. Néanmoins, pour les exemples qui suivent, nous emploierons la simulation afin d'utiliser les mêmes paramètres que ceux des exemples numériques précédents.

Dans les tableaux qui suivent, nous supposons que $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X \sim \text{Exp}(\theta=1)$, $\delta=5\%$, $t=1$, $h=1$ et $t_n=0.15$. Le tableau 4.1 montre la VaR évaluée pour différents quantiles et à un âge fixe, avec ou sans conditionnement.

Tableau 4.1 : *VaR* pour différents quantiles κ , pour un âge $t - t_n = 0.85$

κ	$VaR_{\kappa}(e^{\delta t}(Z(t+h) - Z(t)))$	$VaR_{\kappa}(Z_{t,n}(h))$
0.900	8.99978	9.64132
0.950	10.62754	11.17660
0.975	11.98250	12.47953
0.990	13.60069	14.15484

À la lumière des résultats obtenus dans les exemples du chapitre 3, nous pouvions nous attendre à ce que les valeurs de la VaR soient systématiquement plus élevées lorsqu'on conditionne, par rapport à l'absence de conditionnement. C'est effectivement ce qui se produit dans le cas étudié, et ce qui se produirait aussi si on changeait l'âge du processus. Néanmoins, pour des valeurs de κ élevées (0.95 et 0.99), qu'on retrouve habituellement dans des cas concrets (mais pas nécessairement réalistes) d'évaluation de réserve, la différence reste relativement petite, ce qui montre que l'emploi du conditionnement n'entraînera pas nécessairement une « explosion » de la VaR (du moins pour les distributions étudiées).

Nous pouvons aussi comparer ces valeurs à celles obtenues lorsque nous faisons passer l'âge du processus à $t=1$ de 0.15 à 0.50, puis à 0.85. Les nouvelles valeurs de la VaR, avec conditionnement sur l'expérience, sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau 4.2 : *VaR* pour différents quantiles κ , avec différents âges

κ	$t - t_n = 0.15$	$t - t_n = 0.50$	$t - t_n = 0.85$
0.900	9.31013	9.59945	9.64132
0.950	10.83073	11.07674	11.17660
0.975	12.16992	12.44055	12.47953
0.990	14.09388	14.14764	14.15484

Nous constatons que, pour un même κ , plus l'âge sera élevé, plus la VaR le sera aussi. Puisque l'âge maximal est de 1, il est sans doute possible pour la VaR d'atteindre des valeurs encore plus grandes pour un même seuil de risque (avec un âge approchant 1), même s'il semble que la VaR se rapproche fortement de l'asymptote avec un âge de 0.85.

S'il est pertinent de comparer les VaR lorsque nous prenons en compte ou pas l'expérience, nous pouvons aussi comparer celles-ci pour diverses distributions du temps entre les réclamations, avec conditionnement sur l'expérience. Dans la figure 9, en annexe, nous plaçons côte à côte les $VaR_{0.9}$ en fonction de l'âge du processus pour des distributions de même espérance mais de variances différentes, en supposant $X_k \sim \exp(\theta=1)$, $t=1$, $h=1$ et $\delta=0.05$. En rouge, nous trouvons les valeurs lorsque $\tau_k \sim \exp(\lambda=5)$, en bleu lorsque $\tau_k \sim Erlang(\alpha=2, \lambda=10)$ et en vert lorsque $\tau_k \sim Erlang(\alpha=3, \lambda=15)$.

Par conséquent, l'espérance de ces distributions des temps entre les événements est la même, soit 0.2, mais leur variance est décroissante (0.04, 0.02, puis 0.0133), ce qui explique que, dans le graphique, les valeurs de la VaR en rouge sont plus élevées que celles en bleu, elles-mêmes plus grandes que celles en vert. Nous remarquons, dans les deux cas Erlang (bleu et vert), que les valeurs de la VaR augmentent avec l'âge et se rapprochent des valeurs obtenues dans le cas exponentiel (rouge). Cette situation s'explique par le fait que, plus l'âge du processus au temps t augmente, plus le temps, en moyenne, entre t et la $(n+1)$ -ième réclamation sera court, ce qui entraînera les valeurs des accroissements à la hausse.

4.1.2 Tail Value at Risk

Après avoir discuté de la VaR, nous passons maintenant à la TVaR qui est, elle, une mesure cohérente. Dans le tableau suivant, nous utilisons à nouveau la simulation pour obtenir les valeurs recherchées et les comparer.

Tableau 4.3 : TVaR pour différents quantiles κ , pour un âge $t-t_n=0.85$

κ	$TVaR_{\kappa}(e^{\delta t}(Z(t+h)-Z(t)))$	$TVaR_{\kappa}(Z_{t,n}(h))$
0.900	11.08952	11.78114
0.950	12.45237	13.25388
0.975	13.75028	14.60282
0.990	15.55445	16.25168

Nous constatons pour cette deuxième mesure de risque des résultats très similaires à ceux obtenus avec la première. Prendre en compte l'âge du processus au temps t entraîne une hausse de la TVaR, peu importe le paramètre κ .

Comme en 4.1.1, nous pouvons aussi effectuer plus de comparaisons, pour des âges différents à $t=1$ et avec conditionnement sur l'expérience. Nous présentons dans le tableau suivant des valeurs de la TVaR, obtenues dans les mêmes conditions qu'à la sous-section précédente :

Tableau 4.4 : TVaR pour différents quantiles κ , avec différents âges

κ	$t - t_n = 0.15$	$t - t_n = 0.50$	$t - t_n = 0.85$
0.900	11.36327	11.49649	11.78114
0.950	12.73207	12.83211	13.25388
0.975	14.04101	14.05613	14.60282
0.990	15.71560	14.69015	16.25168

Nous observons, sans surprise, que la TVaR augmente avec l'âge du processus (à une exception près, en raison de l'approche par simulation et du petit échantillon lorsque le seuil est fixé à 0.99). Il semble cependant que cette augmentation continue d'être assez importante même lorsqu'on approche de l'âge maximal de 1, contrairement à ce que nous constatons avec la VaR.

De plus, comme dans le cas de la VaR, nous présentons aussi en annexe un graphique montrant les différentes valeurs de $TVaR_{0.9}$ du processus sur deux périodes en fonction de son âge, pour trois distributions avec les mêmes paramètres qu'en 4.1.1. La figure 10 montre que les comportements des trois distributions sont similaires à ceux de la figure 9. Comme nous pouvions nous y attendre, les points des distributions Erlang (en bleu et vert) sont relativement plus éloignés de la distribution exponentielle que dans la figure précédente, même avec un âge aussi élevé que possible (approchant 1). Cela signifie qu'il faudrait sans doute utiliser des périodes plus longues pour observer une proximité semblable à celle de la figure 9.

4.1.3 Prime d'écart-type

La prime d'écart-type est très simple à calculer. Puisque nous avons déjà obtenu les expressions du premier et du deuxième moment, nous pouvons évaluer facilement cette prime, une fois le paramètre c choisi. Nous présentons ici les valeurs obtenues avec les mêmes hypothèses qu'utilisées précédemment, à savoir $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X \sim \exp(\theta=1)$, $\delta=5\%$, $t=1$, $h=1$ et un âge de 0.15 pour différents chargements c :

Tableau 4.5 : Prime d'écart-type pour différents chargements c , pour un âge $t-t_n=0.15$

Chargement c	$\rho_3(e^{\delta t}(Z(t+h)-Z(t)), c)$	$\rho_3(Z_{t,n}(h), c)$
0.5	6.15345	6.27820
1.0	7.67922	7.62945
1.5	9.20498	8.98072
2.0	10.73076	10.33198

Nous constatons que, pour un chargement faible, la prime est plus grande lorsqu'on conditionne sur l'expérience que lorsqu'on ne le fait pas. Cependant, plus le chargement augmente plus la prime d'écart-type dans le cas avec conditionnement se rapproche de celle dans le cas sans conditionnement, jusqu'à éventuellement devenir inférieure! Nous en arrivons donc au résultat contre-intuitif suivant : même si le premier et le deuxième moment de la distribution de $Z_{t,n}(h)$ augmentent avec l'âge du processus, à partir d'un certain chargement c nous obtenons une prime d'écart-type plus petite que celle obtenue sans conditionner sur l'expérience. Même si nous ne présentons pas de tableaux comparatifs pour d'autres âges, ceci reste vrai pour n'importe quel âge sur l'intervalle $[0, t]$, qu'il soit supérieur ou inférieur à 0.15. Cela s'explique par le fait que la taille de la prime d'écart-type dépend de deux facteurs : l'espérance et l'écart-type du processus. Lorsque le chargement est petit, l'influence de l'espérance sur la valeur totale est plus grande et, lorsque le chargement est élevé, c'est l'écart-type qui détermine en majeure partie cette valeur. Étant donné que, comme nous l'avons constaté aux exemples 3.2 et 3.3 (et dans le tableau 3.3), la moyenne du processus dans le cas Erlang considéré est plus élevée lorsqu'on conditionne mais l'écart-type est plus petit, nous nous retrouvons avec deux forces contraires qui influencent la taille de la prime d'écart-type

avec conditionnement par rapport à celle sans conditionnement. En somme, si prendre en compte l'expérience augmente (ou diminue) les coûts espérés, cela réduit aussi l'incertitude, et donc les primes très conservatrices qui tentent de les juguler.

Comme dans les deux sous-sections précédentes, nous pouvons aussi comparer les primes pour des âges différents dans le tableau suivant :

Tableau 4.6 : Prime d'écart-type pour différents chargements c , pour différents âges

Chargement c	$t - t_n = 0.15$	$t - t_n = 0.50$	$t - t_n = 0.85$
0.5	6.27820	6.40299	6.43540
1.0	7.62945	7.76266	7.79687
1.5	8.98072	9.12233	9.15833
2.0	10.33198	10.48200	10.51979

Dans ce dernier tableau, nous notons que, encore une fois, une diminution de l'âge du processus est accompagnée d'une diminution de la prime d'écart-type. Il est tout de même pertinent de noter que la différence est plus marquée dans le cas de grands âges avec petits chargements, ainsi que dans le cas de petits âges avec grands chargements.

Finalement, comme nous l'avons mentionné au chapitre 3, dans le cas de distributions DFR, nous obtiendrions des résultats différents et arriverions à des conclusions inverses, puisque l'augmentation de l'âge du processus se traduirait par une diminution des premier et deuxième moments du processus.

4.1.4 Prime de type Wang

Puisque nous avons développé une méthode permettant d'obtenir, en les approximant, la transformée de Laplace puis la fonction de répartition des accroissements conditionnels de notre processus de sommes escomptées, il nous est aussi possible de calculer la transformée PH décrite au chapitre 2. Si nous reprenons les paramètres de l'exemple 3.7, en plus de spécifier que $t = 1$ et $h = 1$, nous pouvons comparer les valeurs de cette mesure de risque pour différents âges et paramètres ε . Ces valeurs sont regroupées dans le tableau suivant :

Tableau 4.7 : Transformée PH pour différents paramètres ε et différents âges

	$\varepsilon = 0.25$	$\varepsilon = 0.50$	$\varepsilon = 0.75$
$t - t_n = 0$	0.00029	0.00059	0.00088
$t - t_n = 0.5$	0.00058	0.00115	0.00173
$t - t_n = 0.75$	0.00071	0.00142	0.00213
$t - t_n = 1$	0.00085	0.00169	0.00254

Nous observons, comme nous pouvions nous y attendre, des valeurs très faibles pour tous les âges, en raison de l'important poids à zéro des distributions de $Z_{t,n}(h)$. Nous constatons aussi que les valeurs de la transformée PH sont très éloignées du maximum atteint par nos distributions (environ 2), ce qui montre que, peu importe la valeur ε , la transformée PH n'est pas trop influencée par les valeurs extrêmes, de l'âge ou du processus. De plus, nous remarquons une augmentation des valeurs de la transformée PH qui coïncide à la fois avec l'augmentation du paramètre ε et avec l'augmentation de l'âge du processus. Puisque plus de réclamations risquent d'être observées lorsque l'âge du processus augmente, et que celles-ci le seront plus tôt, il est logique que la mesure de risque augmente également. Finalement, nous voyons que, comme dans le cas de la plupart des autres mesures de risque, la valeur de la transformée PH est augmentée lorsqu'on introduit le conditionnement.

Malgré tout, cette mesure reste peu utile dans un contexte d'assurance, puisqu'on obtient, en l'utilisant, des valeurs inférieures à l'espérance. Lorsque le paramètre ε est supérieur à 1, un phénomène contraire se produit, comme on peut le voir dans le prochain tableau, qui compare diverses valeurs en fonction de l'âge et de la mesure de risque (avec les paramètres de l'exemple 3.7).

Tableau 4.8 : Mesure de risques de Wang et prime d'écart-type pour un âge de 0.5

	Mesure de Wang avec $\varepsilon = 0.5$	Mesure de Wang avec $\varepsilon = 10$	Prime d'écart-type avec $c = 0.5$	Prime d'écart-type avec $c = 4.0$
Sans conditionnement	0.00059	0.01167	0.02496	0.19146
Avec conditionnement	0.00115	0.02290	0.03573	0.26975

Ce tableau nous permet de constater à quel point la prime d'écart-type est conservatrice par rapport à la mesure de Wang que nous utilisons. En effet, même en prenant des valeurs très élevées pour le paramètre ε , nous n'atteignons pas une prime d'écart-type avec un chargement c minime (mais cet effet est amplifié par le grand poids à zéro, qui affecte plus la variance du processus que la transformée PH). Malgré tout, nous voyons que le fait de passer d'un ε inférieur à 1 à un paramètre supérieur à 1 entraîne une forte augmentation de la mesure de risque (et la rend supérieure à l'espérance).

En somme, nous constatons que les mesures de risque usuelles sont modifiées lorsque le conditionnement sur l'expérience est introduit. Il nous semble donc pertinent que les assureurs (et autres acteurs du milieu) prennent en compte l'âge du processus dans leur tarification et leurs prévisions, d'une manière plus rigoureuse tenant compte de toutes les composantes du processus.

4.2 Processus de réserve et de ruine

Après avoir évalué différentes primes, il serait maintenant intéressant d'étudier le processus de réserve associé à notre processus des sommes escomptées dans un contexte de conditionnement sur l'expérience. L'étude de la probabilité de ruine, que ce soit par simulation ou à travers une borne de type Lundberg, nous montrera les différences qui apparaissent lorsque nous conditionnons, ou pas, sur l'expérience et utilisons différents types de primes.

4.2.1 Simulation du processus de réserve et de la probabilité de ruine

Comme nous l'avons vu à la section précédente, la prime d'écart-type est celle qui produit les résultats les plus intéressants, et c'est donc sur celle-ci que nous nous concentrons en particulier dans les paragraphes qui suivent. Nous comparons d'abord les probabilités de ruine sur un temps fini lorsque les primes d'écart-type sont calculées en prenant ou en ne prenant pas en compte l'âge du processus, pour différents chargements. Pour ce faire, nous avons suivi les étapes suivantes lors de nos simulations :

1. Simuler, pendant une période de 5 années, un processus de sommes escomptées avec ces hypothèses : $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X \sim \exp(\theta=1)$, $\delta = \varphi = 5\%$ et aucune dépendance entre les variables X et τ .
2. Diviser en 5 périodes d'un an le processus, en notant quel est l'âge du processus à la fin de chacune de ces périodes.
3. Au début de chaque période, calculer la prime d'écart-type qui s'applique à la période en question. S'il s'agit de la prime sans conditionnement, nous la gardons identique à chaque période. Si on utilise l'âge du processus dans les calculs, la prime changera à chaque période, puisque l'espérance et l'écart-type de la valeur escomptée des réclamations sera modifiée en fonction de l'âge.
4. Pour chaque réclamation qui s'est produite, soustraire sa taille de la réserve accumulée jusqu'au moment de son occurrence (comprenant les primes, qu'on suppose cumulées continûment, et la réserve initiale)
5. Si la valeur de la réserve devient négative, alors la ruine s'est produite. Le noter.
6. Refaire les étapes 1 à 5 un nombre n de fois, pour obtenir un estimé de la probabilité de ruine.

Nous avons ainsi réalisé $n = 10\,000$ simulations du processus sur 5 ans et nous avons observé à quelle fréquence la ruine se produisait, selon les différents chargements c et avec une réserve initiale $u = 5$. En se rappelant que $\Psi(u, t)$ désigne la probabilité de ruine sur un horizon de temps t pour une réserve initiale u , nous obtenons le tableau qui suit :

Tableau 4.9 : Probabilité de ruine simulée avec la prime d'écart-type (5 périodes)

Chargement c	$\Psi(5,5)$	$\Psi(5,5 \Sigma_{t,n})$
0.5	0.0915	0.0832
4.0	0.0013	0.0014

Nous constatons que, pour un chargement faible, alors que la prime d'écart-type est plus élevée lorsqu'on conditionne sur l'expérience, la probabilité de ruine est conséquemment plus faible par près de la moitié d'un point de pourcentage. Nous pouvions certainement nous y attendre, puisque le fait d'avoir une prime plus élevée réduit le risque de ruine. Cependant, puisque la différence de primes n'est pas très grande (même pour un âge élevé), il est intéressant de constater une différence notable dans la probabilité de ruine. Pour un chargement très conservateur ($c = 4.0$), nous notons que cette fois-ci, en ne conditionnant pas, on obtient une probabilité de ruine plus faible, puisque c'est maintenant dans ce cas qu'on perçoit une prime plus élevée à chacune des périodes (comme nous l'avons observé à la sous-section 4.1.3). La différence absolue entre les deux probabilités est néanmoins beaucoup plus faible dans ce cas plutôt que lorsqu'on prend un chargement de 0.5. Ainsi, pour un chargement faible, en décrivant plus adéquatement les coûts à venir, la prime d'écart-type avec conditionnement permet de mieux prévenir la ruine alors que, pour un chargement élevé, le fait de ne pas prendre en compte l'âge du processus entraîne la facturation d'une prime bien trop grande qui a, au moins, l'avantage de protéger un peu plus contre la ruine un assureur déjà peut-être trop conservateur.

Il est aussi possible d'étudier le processus sur des périodes plus longues, avec des modifications de primes moins fréquentes. Dans l'exemple suivant, nous utilisons un protocole très semblable au précédent sauf que nous simulerons cette fois le processus des sommes escomptées sur une période de 10 ans et nous divisons en 2 périodes de 5 ans le processus, en notant l'âge du processus à la fin de chaque période de 5 ans.

Nous avons effectué les simulations un nombre $n=10\,000$ de fois, et nous avons conservé une réserve initiale $u=5$ afin de faciliter les comparaisons. Nous présentons dans le tableau suivant les résultats obtenus, pour différents chargements :

Tableau 4.10 : Probabilité de ruine simulée avec la prime d'écart-type (2 périodes)

Chargement c	$\Psi(5,10)$	$\Psi(5,10 \Sigma_{t,n})$
0.5	0.0927	0.0910
4.0	0.0016	0.0016

Nous constatons tout d'abord que les probabilités de ruine entre les temps 5 et 10 sont de tailles semblables à celle de l'exemple précédent, malgré le fait que nous observions le processus sur une période de temps plus longue. Le fait de ne pas recalculer la prime à une aussi haute fréquence entraîne ainsi une protection moindre contre la ruine, mais pas de façon dramatique. Nous observons malgré tout le même phénomène qu'auparavant, à savoir que, pour un chargement plus réduit, le fait de prendre en compte l'expérience permet de réduire le risque de ruine. Le contraire se produit encore une fois pour un chargement plus grand. En somme, dans les conditions étudiées, il n'est pas nécessairement très avantageux de recalculer la prime à une fréquence annuelle, puisque les gains en termes de probabilité de ruine, bien que présents, sont assez réduits.

En ce qui concerne les autres primes étudiées auparavant, puisqu'elles sont systématiquement plus élevées lorsqu'on conditionne sur l'expérience, il est logique que, peu importe la situation, la probabilité de ruine du processus de réserve soit plus faible lorsque nous tenons compte du conditionnement sur l'expérience. Le fait d'utiliser plus d'informations dans la tarification permettra donc de mieux se prémunir de la ruine, mais pourrait aussi entraîner une hausse des primes en contrepartie.

Pour confirmer et illustrer ceci, nous présentons un tableau obtenu de façon similaire au tableau 4.7, mais en utilisant cette fois-ci la prime basée sur la VaR (obtenue elle-même à partir de simulations) et un nombre $n=1000$ (plus réduit, parce que le calcul de la prime implique plus d'opérations) :

Tableau 4.11 : Probabilité de ruine simulée avec la prime VaR

κ	$\Psi(5,5)$	$\Psi(5,5 \Sigma_{t,n})$
0.90	0.035	0.033
0.95	0.018	0.016

Nous constatons que, pour chacun des deux seuils étudiés, les probabilités de ruine sont plus faibles que lorsqu'on utilise la prime d'écart-type, avec les chargements c que nous avons employés. Les κ utilisés entraînent donc une très bonne protection contre la ruine, surtout avec la réserve initiale que nous avons choisie. Par ailleurs, comme nous nous y attendions, la probabilité de ruine est plus faible lorsqu'on conditionne sur l'âge (puisque la prime de VaR est alors plus élevée), et elle diminue lorsqu'on augmente le seuil kappa. Une situation semblable serait évidemment observée peu importe la réserve initiale, les κ , les paramètres des distributions ou la durée de l'étude du processus choisis et ce, même si la VaR était remplacée par la TVaR.

4.2.2 Borne de type Lundberg

Comme nous l'avons montré dans la sous-section précédente, il est toujours possible d'estimer la probabilité de ruine sur un horizon de temps fini en ayant recours à la simulation. Cependant, la simulation reste toujours un outil d'appoint, qui peut devenir difficile à utiliser dans certaines situations. Il peut alors être intéressant, à défaut d'obtenir une valeur exacte, de vouloir borner la probabilité de ruine de notre processus. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la borne de Lundberg nous apparaît appropriée. Néanmoins, il est souvent ardu de l'obtenir dans les cas où le temps entre les réclamations n'est pas Poissonnien, justement un cas où l'application de notre modèle n'est pas particulièrement utile. Malgré tout, dans cette sous-section, nous sommes en mesure de présenter une borne de type Lundberg qui s'applique à la forme générale de notre processus et qui tient compte de l'âge du processus

Nous commençons d'abord par présenter l'équation classique de la ruine, obtenue en conditionnant sur la taille et le temps d'occurrence de la première réclamation (après t), et en supposant une force d'inflation nulle (i.e. $\varphi = \delta$). Comme auparavant, nous avons, pour un taux constant de prime c ,

$$U_{\delta}(t+h) = U_{\delta}(t)e^{\delta h} + c\bar{s}_{h|\delta} + (Z(t+h) - Z(t))e^{\delta(t+h)}, \text{ où } \bar{s}_{n|\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta},$$

ce qui nous amène à l'équation intégrale suivante

$$\Psi(U_{\delta}(t)|\Sigma_{t,n}^+) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{U_{\delta}(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta}} \Psi(U_{\delta}(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta} - w) dF_X(w) + \int_{U_{\delta}(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta}}^{\infty} 1 dF_X(w) \right] f_{\tau^*}(v) dv,$$

avec

$$\Sigma_{t,n}^+ = \Sigma_{t,n} \cap \{U_{\delta}(v) \geq 0; 0 \leq v \leq t\}.$$

Il s'agit donc de l'équation intégrale habituelle, si ce n'est que, à la première itération, la probabilité de ruine est calculée en prenant en compte l'âge que le processus a atteint au temps t . Après la $(n+1)$ -ième réclamation, la probabilité de ruine n'est plus influencée par l'information obtenue jusqu'au temps t , mais seulement par la taille du surplus immédiatement après le $(n+1)$ -ième réclamation.

Nous introduisons maintenant le coefficient d'ajustement (ζ), qui nous permet d'obtenir une inégalité et, donc, une borne. Pour un certain coefficient ζ (qui n'est pas nécessairement le coefficient r mentionné au chapitre 2), nous avons, de façon analogue à Cai & Dickson (2003),

$$\Psi(U_{\delta}(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta} - w) \leq \beta e^{-\zeta(U_{\delta}(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta} - w)} = \beta e^{-\zeta U_{\delta}(t+v)},$$

et

$$1 \leq \beta e^{-\zeta(U_{\delta}(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta} - w)}, \text{ pour } w < U_{\delta}(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta},$$

avec

$$\beta^{-1} = \inf_{x \geq 0} \int_x^{\infty} \left[\frac{e^{\zeta v}}{e^{\zeta x} \bar{F}_X(X)} \right] dF_X(v).$$

Ceci nous permet de créer une inégalité à partir de l'intégrale précédente :

$$\begin{aligned}
\Psi(U_\delta(t)|\Sigma_{t,n}^+) &\leq \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \beta e^{-\varsigma(U_\delta(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta} - w)} dF_X(w) \right. \\
&\quad \left. + \int_{U_\delta(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta}}^\infty \beta e^{-\varsigma(U_\delta(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta} - w)} dF_X(w) \right] f_{\tau^*}(v) dv \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \beta e^{-\varsigma(U_\delta(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta} - w)} f_X(w) dw \right] f_{\tau^*}(v) dv \\
&= \int_0^\infty \beta e^{-\varsigma(U_\delta(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta})} \left[\int_0^\infty e^{\varsigma w} f_X(w) dw \right] f_{\tau^*}(v) dv \\
&= \int_0^\infty \beta e^{-\varsigma(U_\delta(t)e^{\delta v} + c\bar{s}_{v|\delta})} [M_X(\varsigma)] f_{\tau^*}(v) dv .
\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes de cette inégalité, il est finalement possible d'obtenir

$$\begin{aligned}
\Psi(U_\delta(t)|\Sigma_{t,n}^+) &\leq M_X(\varsigma) e^{-\varsigma U_\delta(t)} \int_0^\infty \beta e^{-\varsigma(U_\delta(t)e^{\delta v} - U(t) + c\bar{s}_{v|\delta})} f_{\tau^*}(v) dv \\
&= M_X(\varsigma) e^{-\varsigma U_\delta(t)} \int_0^\infty \beta e^{-\varsigma(U_\delta(t)\delta + c)\bar{s}_{v|\delta}} f_{\tau^*}(v) dv .
\end{aligned}$$

Cette expression, une fois l'intégrale résolue, nous permet de borner la probabilité de ruine en conditionnant sur l'expérience. Bien que la présence d'une exponentielle dans une exponentielle à l'intérieur de l'intégrale rende les calculs exacts complexes, nous pouvons étudier cette borne dans une multitude de cas.

Par exemple, dans le cas très simple où $\delta = 0$, nous obtenons aisément

$$\begin{aligned}
\Psi(U_0(t)|\Sigma_{t,n}^+) &\leq M_X(\varsigma) e^{-\varsigma U_0(t)} \int_0^\infty \beta e^{-\varsigma(U_0(t)*0 + c)\bar{s}_{v|0}} f_{\tau^*}(v) dv \\
&= M_X(\varsigma) e^{-\varsigma U_0(t)} \int_0^\infty \beta e^{-\varsigma cv} f_{\tau^*}(v) dv \\
&= M_X(\varsigma) e^{-\varsigma U_0(t)} \beta M_{\tau^*}(-\varsigma c) \\
&= \beta e^{-\varsigma U_0(t)} E[e^{\varsigma(X - c\tau^*)}] .
\end{aligned}$$

Si nous poursuivons l'étude de ce cas en ajoutant l'hypothèse supplémentaire voulant que $\tau \sim \exp(\lambda)$, nous avons alors $\tau^* \sim \tau$ et, puisque $E[e^{\varsigma(X - c\tau^*)}] = 1$ dans le cas de la borne de Lundberg, nous retrouvons la borne de Lundberg classique

$$\begin{aligned}\Psi(U_\delta(t) | \Sigma_{t,n}^+) &\leq e^{-\varsigma U_0(t)} \beta E[e^{\varsigma(X - c\tau^*)}] \\ &\leq e^{-\varsigma U_0(t)}.\end{aligned}$$

Dans le cas avec escompte, mais où $t - t_n = 0$, un phénomène similaire se produit, puisqu'alors $\tau^* \sim \tau$. Ayant $(U_\delta(t)\delta + c)\bar{s}_{t\delta} \geq ct$ pour tout $t > 0$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\Psi(U_\delta(t) | \Sigma_{t,n}^+) &\leq M_X(\varsigma) e^{-\varsigma U_\delta(t)} \int_0^\infty \beta e^{-\varsigma(U_\delta(t)\delta + c)\bar{s}_{t\delta}} f_{\tau^*}(v) dv \\ &= e^{-\varsigma U_\delta(t)} \beta E[e^{\varsigma X}] E[e^{-\varsigma(U_\delta(t)\delta + c)\bar{s}_{t\delta}}] \\ &\leq e^{-\varsigma U_\delta(t)} \beta E[e^{\varsigma X}] E[e^{-\varsigma c\tau}] \\ &= e^{-\varsigma U_\delta(t)} \beta E[e^{\varsigma(X - c\tau)}].\end{aligned}$$

Il s'agit ici d'une des bornes de type Lundberg développées par Cai et Dickson en 2003 et, si ς correspond au coefficient d'ajustement de Lundberg, nous revenons facilement à la borne de Lundberg classique.

Finalement, dans un cas très général, nous pouvons aussi montrer un résultat intéressant découlant de la différence entre les distributions DFR et les distributions IFR. Nous partons le même point de départ pour en arriver à

$$\begin{aligned}\Psi(U_\delta(t) | \Sigma_{t,n}^+) &\leq e^{-\varsigma U_\delta(t)} E[e^{\varsigma X}] \beta E[e^{-\varsigma(U_\delta(t)\delta + c)\bar{s}_{t\delta}}] \\ &= e^{-\varsigma U_\delta(t)} E[e^{\varsigma X}] \beta E[e^{-\varsigma(U_\delta(t)\delta + c)\bar{s}_{t_{n+1} - (t - t_n)\delta}}] \\ &= e^{-\varsigma U_\delta(t)} g(t - t_n),\end{aligned}$$

où $g(t - t_n) = E[e^{\varsigma X}] \beta E[e^{-\varsigma(U_\delta(t)\delta + c)\bar{s}_{t_{n+1} - (t - t_n)\delta}}]$ est une fonction positive et non-décroissante.

De plus, pour une distribution du temps entre les sinistres DFR, nous avons aussi que

$$\{\tau_{n+1} - (t - t_n) | \tau_{n+1} > (t - t_n)\} \succeq_{st} \{\tau_{n+1} - (t - t_n') | \tau_{n+1} > (t - t_n')\}, t \geq t_n' \geq t_n.$$

Par conséquent, nous pouvons alors affirmer que

$$E[g(t - t_n)] \leq E[g(t - t_n')] \Leftrightarrow g(t - t_n) \leq g(t - t_n'), t \geq t_n' \geq t_n,$$

et, puisque nous avons aussi, dans le cas du coefficient d'ajustement de Lundberg,

$$g(t - t_n) \leq g(0) = E[e^{\zeta X}] E[e^{-\zeta(U_\delta(t)\delta + c)\bar{S}_{n\delta}}] \leq E[e^{\zeta X}] E[e^{-\zeta c\tau}] = 1,$$

nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\Psi(U_\delta(t) | \Sigma_{t,n}^+) \leq e^{-\zeta U_\delta(t)} g(t - t_n) \leq e^{-\zeta U_\delta(t)} g(0) = e^{-\zeta U_\delta(t)}.$$

Ainsi, dans le cas de distributions DFR du temps entre les réclamations, la borne obtenue sur la probabilité de ruine avec conditionnement grâce au coefficient d'ajustement de Lundberg est plus petite que la borne obtenue sans conditionnement. Il est aussi possible d'arriver au résultat inverse dans le cas de distribution IFR. La borne obtenue avec conditionnement sera donc, pour ces dernières distributions, plus grande que celle sans conditionnement, ce qui concorde avec les différents exemples numériques des chapitres 3 et 4.

Dans ce chapitre, nous avons été en mesure de présenter plusieurs résultats numériques et théoriques relatifs à différentes applications du modèle présenté au chapitre 3. Nous avons montré l'influence sur les mesures de risque du conditionnement sur l'expérience. Nous avons aussi présenté une borne de type Lundberg et des valeurs obtenues par simulation pour la probabilité de ruine d'un processus de réserve incorporant notre modèle. De nombreuses autres applications de notre modèle sont sans doute possibles, et nous en discutons au chapitre suivant, dans notre conclusion.

Chapitre 5 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons proposé un modèle prenant en compte l'expérience passée pour étudier le comportement futur d'un processus de sommes escomptées avec taux d'intérêt net constant sur plusieurs périodes. En utilisant les résultats obtenus par Léveillé et Adékambi, et Léveillé, Garrido et Wang concernant les processus des sommes escomptées, nous avons pu obtenir des expressions théoriques pour les premiers moments simples et conjoints, la transformée de Laplace et la fonction de répartition de la somme de réclamations escomptées du processus conditionnel. De plus, nous avons été en mesure de présenter, en guise d'exemple, des formules analytiques dans le cas de certaines distributions simples pour le temps entre les réclamations. Celles-ci nous ont permis à la fois de corroborer la véracité de notre modèle et de constater son applicabilité dans des cas concrets. Différentes simulations ont été aussi effectuées, portant sur les moments simples et conjoints, et les fonctions de répartitions, afin de constater l'utilité de notre modèle en le comparant au modèle n'employant pas le conditionnement sur l'expérience. Nous avons aussi pu confirmer que, malgré les formules complexes obtenues à l'aide de notre modèle, il est possible de calculer facilement des valeurs concrètes à partir de celui-ci, même dans les situations où une relation de dépendance existe entre le temps entre les réclamations et leur sévérité, et que ces valeurs reproduisent plus fidèlement le comportement réel du processus de sommes escomptées.

Par la suite, au chapitre 4, nous avons présenté certaines applications possibles de notre modèle. L'effet du conditionnement sur diverses mesures de risque (VaR, TVaR, prime d'écart-type, prime de Wang) et sur la probabilité de ruine (estimée à l'aide de simulations et d'une borne de type Lundberg) a été étudié. S'il est évident que notre modèle est applicable dans de nombreuses situations d'assurances, notamment en IARD, il est également possible de penser à d'autres domaines employant des processus de sommes escomptées, comme le milieu de la finance ou de la retraite, et qu'il serait d'intérêt d'étudier les effets de l'utilisation de notre modèle dans ces contextes.

Il est à noter que, dans sa forme présente, notre modèle s'apparente grandement à l'étude d'un processus de sommes escomptées avec délai. Cependant, nous croyons que la façon dont les

différentes identités et les preuves sont présentées permet de faciliter les calculs (notamment en ce qui a trait à la fonction de renouvellement) et de mieux exprimer les relations entre les différents paramètres, en faisant ainsi un modèle plus attrayant et intuitif. Qui plus est, nous pensons qu'il sera possible d'intégrer diverses extensions au modèle prenant elles aussi en compte l'expérience. Par ailleurs, à notre avis et comme mentionné dans l'introduction, notre modèle peut être vu comme complémentaire à la théorie de la crédibilité usuelle, utilisant elle aussi l'expérience du processus mais avec une approche plus statistique. Alors que les méthodes basées sur cette théorie utilisent l'expérience pour augmenter la connaissance d'une distribution sous-jacente, notre modèle permet d'utiliser l'expérience et cette connaissance à son plein potentiel, pour prédire le comportement futur d'un processus.

Finalement, il nous est possible d'entrevoir certaines extensions possibles à notre modèle. La plus évidente est l'utilisation de taux d'intérêt stochastiques, puisque nous n'avons jusqu'à présent qu'employé un taux d'intérêt net constant dans nos calculs. Il serait intéressant de voir comment le conditionnement sur le comportement passé non seulement du processus, mais aussi des taux d'intérêt modifiera les formules obtenues sans conditionnement avec des modèles de taux d'intérêt classiques (Vasicek, Ho-Lee-Merton, etc.). Par ailleurs, nous pourrions aussi étudier d'autres applications de notre modèle, que nous n'avons pas abordées dans ce mémoire. Qu'il s'agisse de l'analyse de mesures de risque plus complexes, d'applications de notre fonction de répartition approximée ou de la recherche de bornes plus précises pour la probabilité de ruine d'un processus de réserve avec conditionnement, il est certain que l'emploi de notre modèle dans des contextes concrets aura de nombreuses applications. En somme, nous pensons que l'étude d'un processus de sommes escomptées et de ses accroissements sur plusieurs périodes avec conditionnement sur l'expérience ouvre la porte à de nombreux développements actuariels.

Bibliographie

1. Albrecher, H. & Teugels, J. L. (2006). Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *Journal of Applied Probabilities*, 43 (1), 257-273.
2. Andersen, E. S. (1957). On the collective theory of risk in case of contagion between claims. *Transaction of the 15th International Congress of Actuaries*, 2 (16), 219-229.
3. Bargès, M., Cossette, H., Loisel, S. and Marceau, É. (2011). On the moments of the aggregate discounted claims with dependence introduced by a FGM copula. *ASTIN Bulletin*, 41 (1), 215-238.
4. Bühlmann, H. & Gisler, A. (2005). A course in credibility theory and its applications. Springer, New York.
5. Cai, J. & Dickson, D. C. M. (2003). Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with interest. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32 (1), 61-71.
6. Campbell, N. (1909). The study of discontinuous phenomena, *Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 15, 117-136.
7. Campbell, N. (1910). Discontinuities in light emissions, *Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 15, 310-328.
8. Delbaen, F. & Haezendonck, J. (1987). Classical risk theory in an economic environment. *Insurance: Mathematics and Economics*, 6 (2), 85-116.
9. Denuit M., Goovaerts, M., Dhaene J. and Kaas, R. (2008). Modern Actuarial Risk Theory (2nd edition), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Germany.
10. Erlang, A K. (1909). The theory of probabilities and telephone conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, 20 (B), 33-39.
11. Janssen, J. (1981). Generalized Risk Models, *Cahiers du CERO*, 23, Bruxelles, 225-243.
12. Léveillé, G. & Garrido, J. (2001a). Moments of compound renewal sums with discounted claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 28, 217-231.
13. Léveillé, G. & Garrido, J. (2001b). Recursive moments of compound renewal sums with discounted claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001 (2), 98-110.
14. Léveillé, G. & Adékambi, F. (2010). Covariance of discounted compound renewal sums with a stochastic interest rate. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010 (2), 1-16.
15. Léveillé, G., Garrido, J. and Wang, Y. F. (2010). Moments generating functions of compound renewal sums with discounted claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2010 (3), 165-184.
16. Léveillé, G. & Adékambi, F. (2012). Joint Moments of discounted compound renewal sums. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012 (1), 40-55.

17. Léveillé, G. & Hamel, E. (2017). Compound trend renewal process with discounted claims. Soumis à *European Actuarial Journal*.
18. Lundberg, F. (1903). Approximations of the probability function/Reinsurance of Collective Risks (thèse de doctorat non-publiée), Uppsala University, Uppsala.
19. Nelsen, R. B. (2006). An Introduction to Copulas (2nd edition), Springer, New York.
20. Rutherford, E. & Geiger H. (1910). The probability variations in the distribution of α particles. *Philosophical Magazine*, 6 (20), 698-707.
21. Taylor, G. C. (1979). Probability of ruin under inflationary conditions or under experience rating. *Astin Bulletin*, 10, 149-162
22. Thorin, O. (1975). Stationarity aspect of the S. Andersen risk process and the corresponding ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1975 (2), 87-98.
23. Wang, Y.F., Garrido, J. and Léveillé, G. (2016). The distribution of discounted Compound PH-renewal processes. *Methodology and computing in applied probability*, 2016 (1), 1-28.
24. Willmot, G. (1989). The total claims distribution under inflationary conditions. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1989 (1), 1-12.
25. Woo, J. K. & Cheung, E. C. K. (2013). A note on discounted compound renewal sums under dependency. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52 (2), 170-179.

Annexe

Figure 1 : $E[Z_{t,n}(h)]$ pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X_i \sim \exp(1)$,
 $t=3$, $h=1$ et $\delta=5\%$

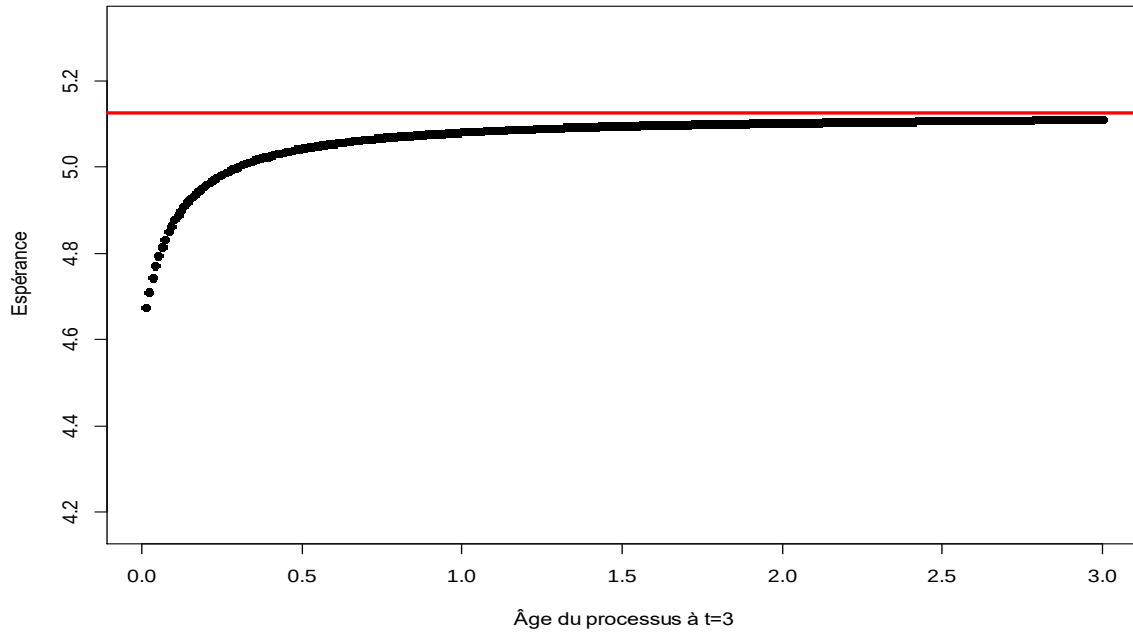


Figure 2 : $E[Z_{t,n}(h)]$ pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=1)$, $X_i \sim \exp(1)$,
 $t=3$, $h=1$ et $\delta=5\%$

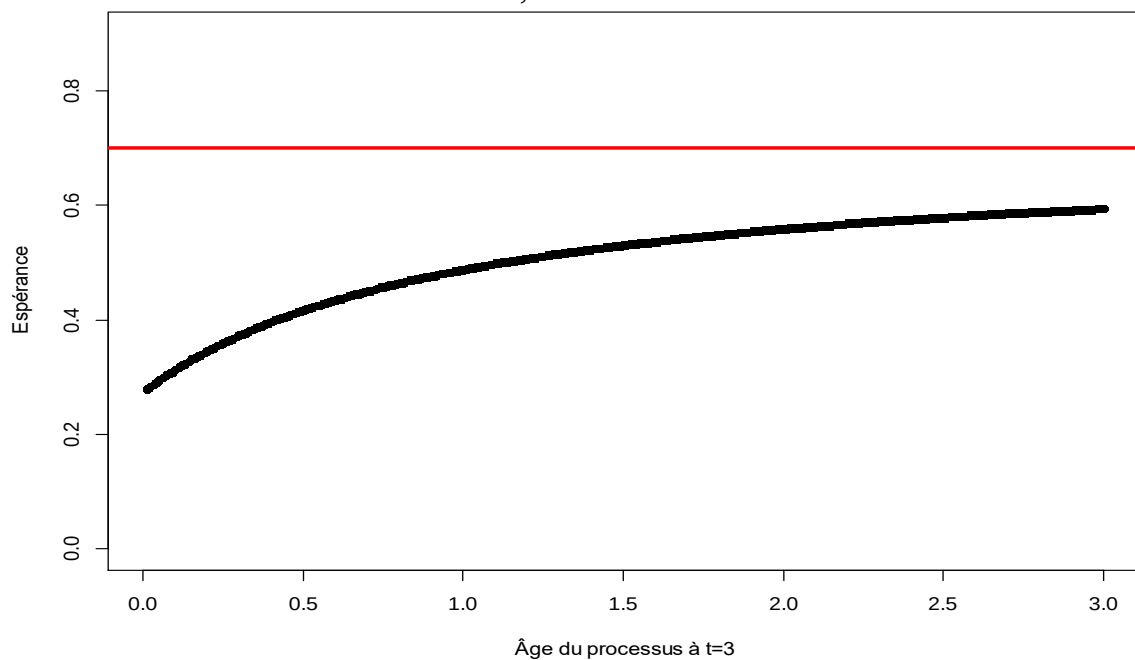


Figure 3 : $E[Z_{t,n}^2(h)]$ pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=10)$, $X_i \sim \exp(1)$,
 $t=3$, $h=1$ et $\delta=5\%$

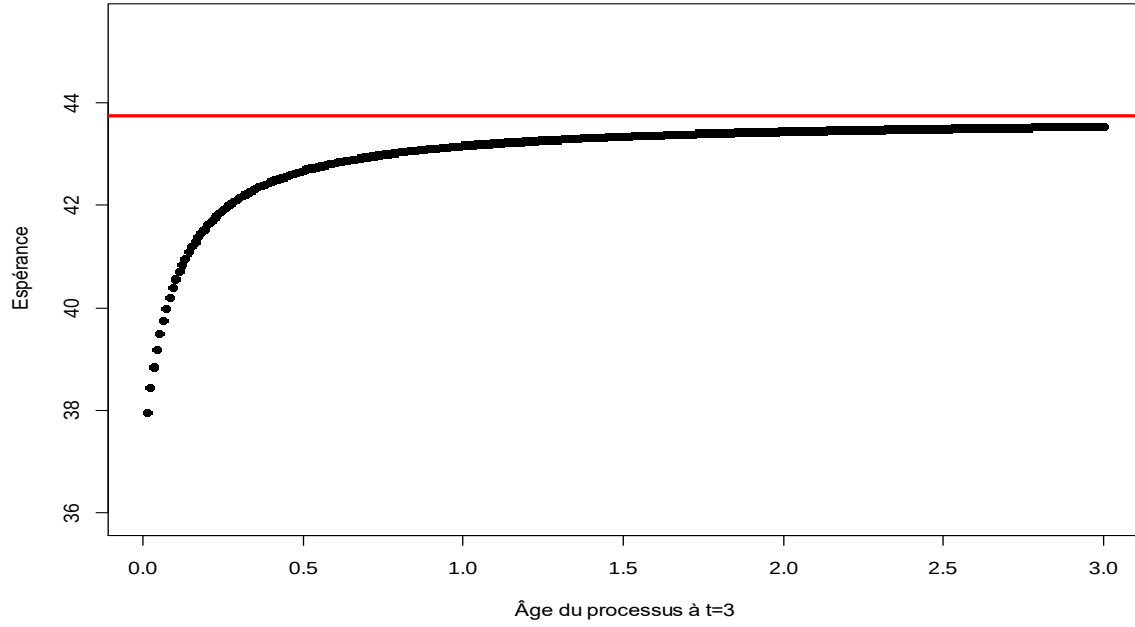


Figure 4 : $E[Z_{t,n}^2(h)]$ pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha=2, \lambda=1)$, $X_i \sim \exp(1)$,
 $t=3$, $h=1$ et $\delta=5\%$

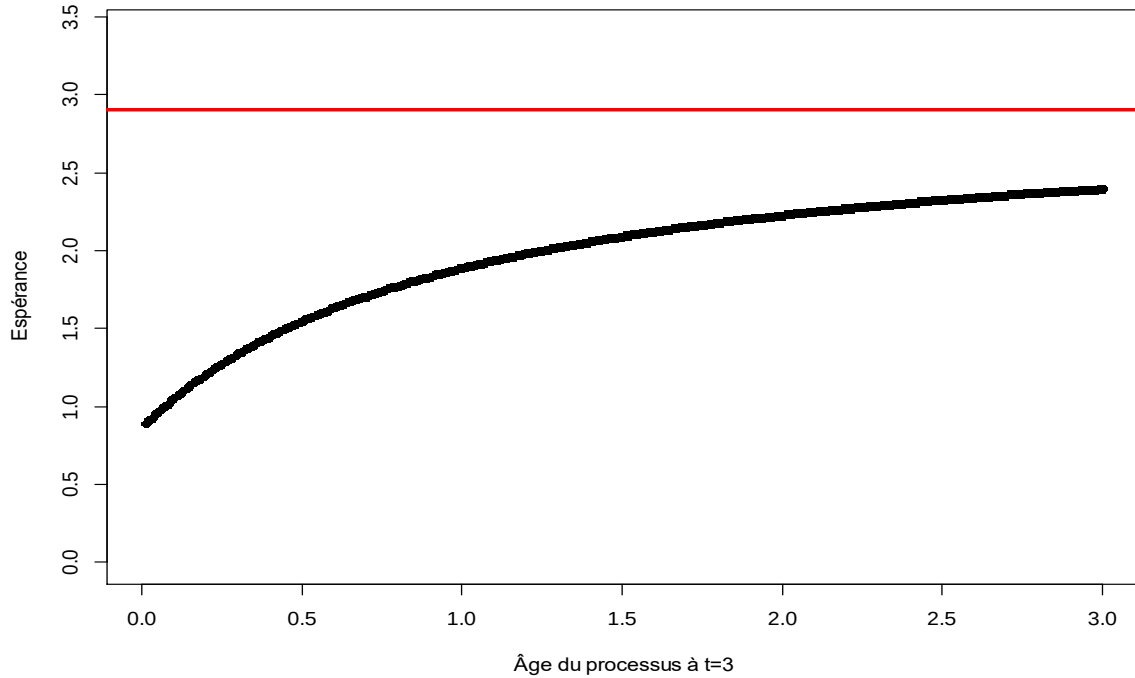


Figure 5: Fonctions de répartition approximée (rouge) et simulée (bleu) des accroissements conditionnels du processus pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha = 2, \lambda = 0.05)$, $X_i \sim \exp(1)$, $t = 1$, $h = 1$, $t_n = 0.5$ et $\delta = 5\%$

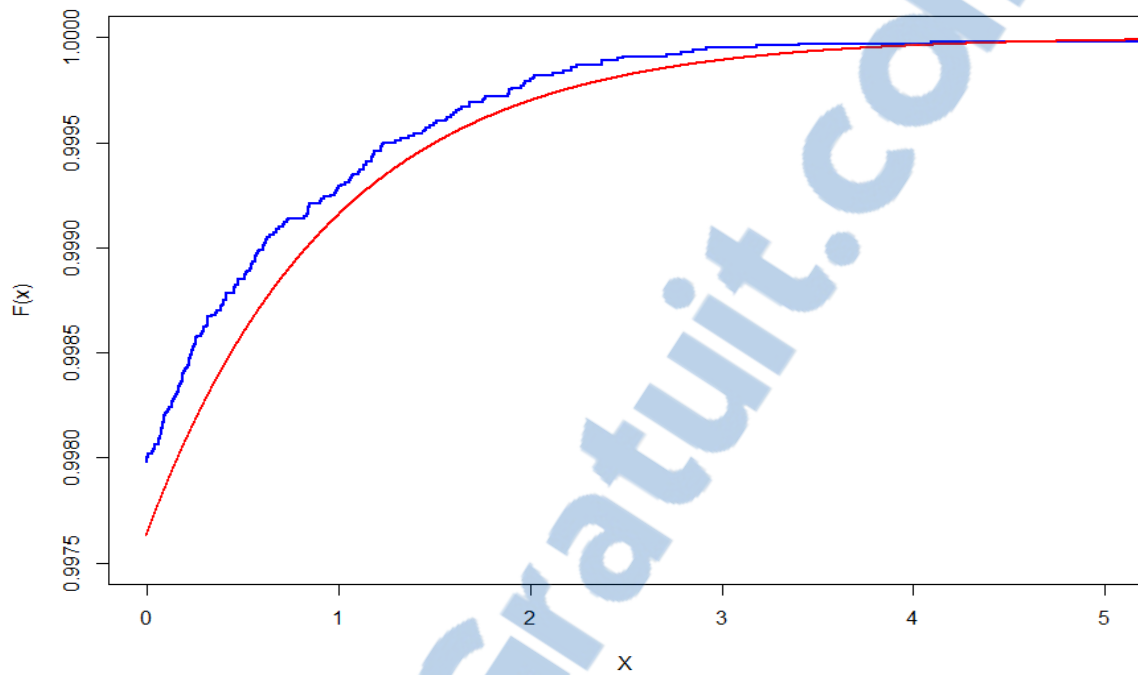


Figure 6 : Fonctions de répartition approximée (rouge) et simulée (bleu) des accroissements conditionnels du processus pour $\tau \sim \text{Erlang}(\alpha = 2, \lambda = 0.20)$, $X_i \sim \exp(1)$, $t = 1$, $h = 1$, $t_n = 0.5$ et $\delta = 20\%$

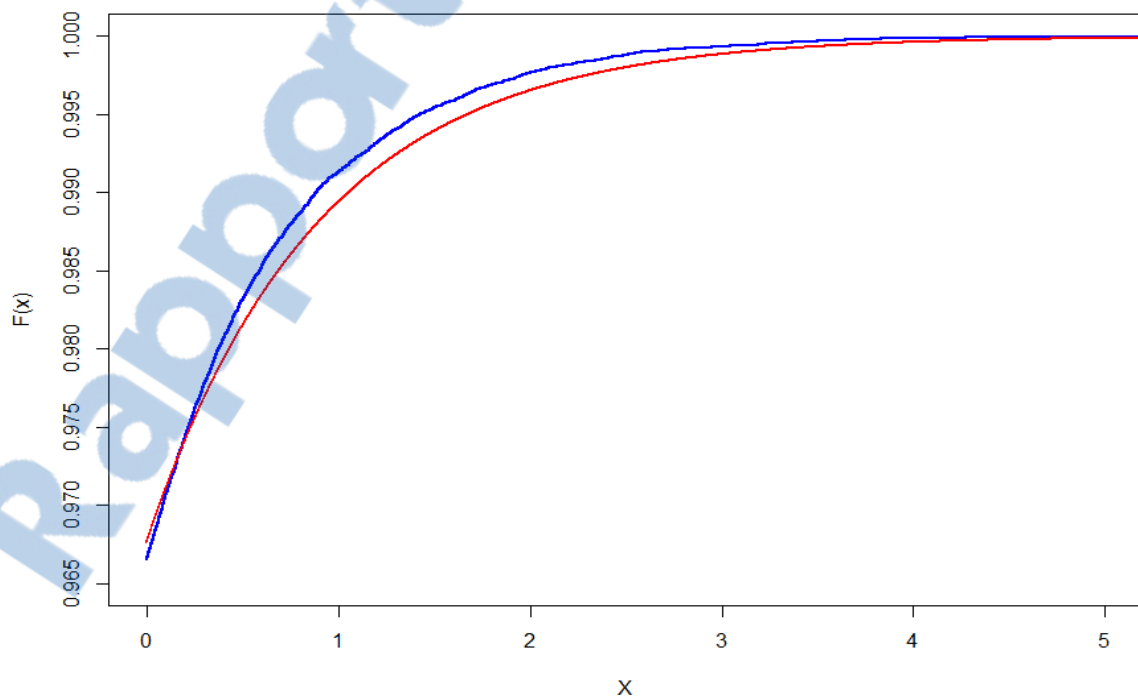


Figure 7 : $\text{VaR}_{0.9}$ en fonction de l'âge à $t = 1$ pour trois distributions différentes, en conditionnant sur l'expérience

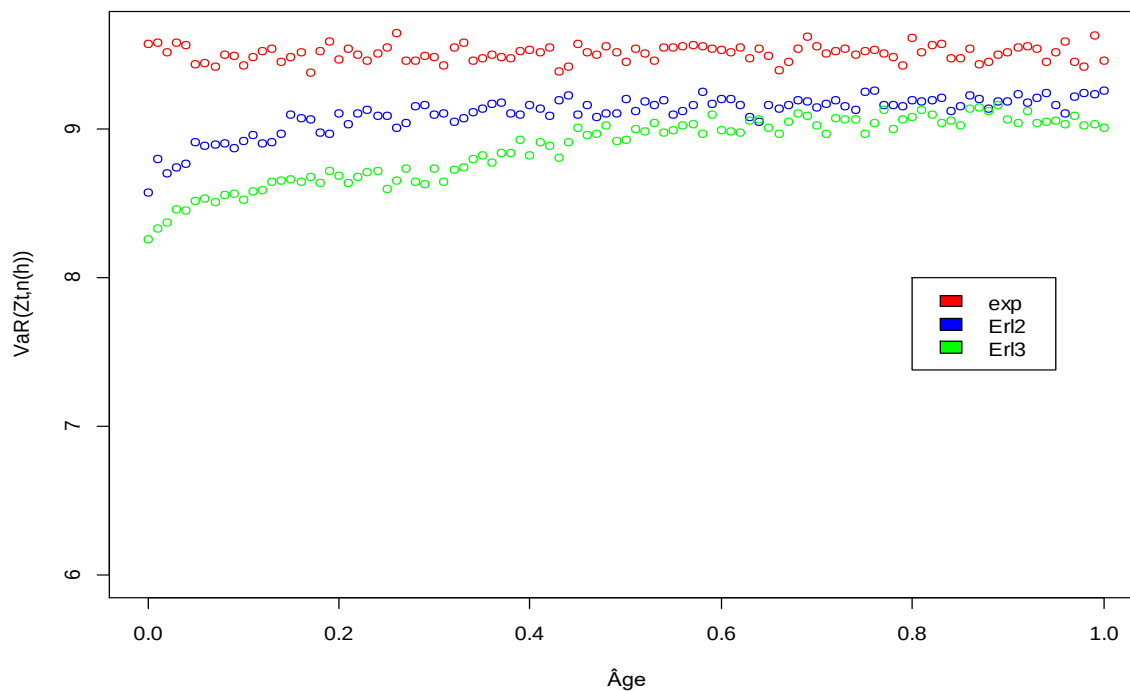


Figure 8 : $\text{TVaR}_{0.9}$ en fonction de l'âge à $t = 1$ pour trois distributions différentes, en conditionnant sur l'expérience

