Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon superviseur, le professeur Javad Mashreghi, pour avoir dirigé mes travaux. Ses nombreux conseils, ainsi que ses exposés sur les RKHS, m'ont énormément aidé à comprendre et apprécier cette théorie très élégante.

Je remercie également le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et le Fond de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQNT) pour leur support financier.

Finalement, je remercie mes parents Thomas Ransford et Line Baribeau pour avoir lu mon mémoire et suggéré des corrections, mais surtout pour m'avoir introduit à la beauté des mathématiques et pour leur soutien inconditionnel.

Introduction

Un espace de Hilbert à noyau reproduisant H sur X est un espace de Hilbert de fonctions de $X \to \mathbb{C}$ pour lequel l'évaluation en chaque point de X est continue. Les espaces de fonctions jouent un rôle clé en analyse, et pour la plupart d'entre eux, l'évaluation en un point est continue. Avec la structure additionnelle d'espace de Hilbert, on peut en déduire l'existence d'un noyau $K : X \times X \to \mathbb{C}$ tel que pour chaque $f \in H$,

$$f(x) = \langle f, K(\cdot, x) \rangle_H.$$

Ce mémoire portera sur l'étude de leurs propriétés ainsi que leurs applications en analyse complexe.

Dans le premier chapitre, nous donnerons quelques définitions et propriétés de base et étudierons trois espaces de fonctions analytiques importants, soit l'espace de Hardy H^2, l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ et l'espace de Bergman A^2. Nous introduirons ensuite la notion de fonctions semi-définies positives et verrons que celles-ci caractérisent complètement les noyaux d'espaces de Hilbert à noyau reproduisant. La formule ci-dessus indique clairement que le noyau K décrit toute la structure de l'espace H, et la positivité semi-définie de celui-ci jouera un rôle clé dans le développement de la théorie.

Le deuxième chapitre porte sur le problème d'interpolation de Pick. Étant donné des points $x_1, \ldots, x_n \in X$ distincts et aussi des nombres complexes $y_1, \ldots, y_n \in \overline{\mathbb{D}}$, il s'agit de déterminer sous quelles conditions on peut trouver un multiplicateur ϕ de norme inférieure où égale à 1 tel que $\phi(x_j) = y_j$ pour tout j. Il y a une jolie condition nécessaire très simple à énoncer et démontrer : la matrice

$$((1 - y_i \overline{y_j}) K(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

doit être semi-définie positive. Cependant, cette condition n'est en général pas suffisante, et donc le reste du chapitre est dédié à la recherche d'un critère suffisant pour que le problème d'interpolation ait une solution. On y introduit entre autre la propriété de Pick complète, et on démontre le théorème de Leech, duquel on déduit que, si la fonction

$$1 - \frac{u(x)\overline{u(y)}}{K(x, y)}$$

est semi-définie positive pour une certaine fonction $u : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors K a la propriété de Pick complète, et *a fortiori*, la propriété de Pick (i.e., la condition nécessaire ci-haut est aussi suffisante). On obtient par la suite une collection d'espaces de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ qui ont cette propriété. Celle-ci inclut l'espace de Hardy et l'espace de Dirichlet, mais pas l'espace de Bergman.

Le dernier chapitre porte sur un théorème de type Gleason–Kahane–Żelazko pour l'espace de Dirichlet : toute fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}$ qui ne s'annule pas aux fonctions sans zéros est un multiple d'une évaluation en un point. Ce résultat était la motivation principale pour ce mémoire, et figure dans l'article [11] publié par l'auteur avec Javad Mashreghi et Thomas Ransford dans le *Journal of Functional Analysis*.

Ce résultat était déjà connu pour les espaces H^p, mais la preuve reposait sur deux propriétés de factorisation de ces espaces, soit que chaque fonction $f \in H^p$ possède des représentations de la forme $f = Bu$ et $f = g/h$, où B est un produit de Blaschke, u une fonction dans H^p sans zéros, et g et h sont holomorphes et bornées sur le disque unité. Cette deuxième représentation peut être obtenue dans le cas particulier de H^2 en invoquant le théorème d'Aleman, Hartz, McCarthy et Richter et le fait que c'est un espace de Hilbert à noyau reproduisant avec la propriété de Pick complète. Comme l'espace de Dirichlet possède aussi cette propriété, on en déduit un résultat similaire pour ce dernier. Bien que l'existence d'une factorisation de la première forme demeure encore ouverte pour $\mathcal{D}$, on obtient tout de même un résultat un peu plus faible qui suffit pour nos besoins, soit que chaque $f \in \mathcal{D}$ peut être écrite comme une combinaison linéaire finie de produits de multiplicateurs avec des fonctions dans $\mathcal{D}$ sans zéros. Comme application de notre théorème, nous obtenons une caractérisation des opérateurs de multiplication à poids sur $\mathcal{D}$ comme étant précisément les applications linéaires qui envoient des fonctions sans zéros vers des fonctions sans zéros.

On termine en mentionnant d'autres espaces pour lesquels notre argument fonctionne, dont entre autre l'espace de Dirichlet à poids surharmonique. On émet aussi une conjecture, soit que chaque fonction f dans un espace de Hilbert à noyau reproduisant avec la propriété de Pick complète possède une factorisation de la forme $f = \phi g$ où ϕ est un multiplicateur et g est une fonction sans zéros dans l'espace.

Chapitre 1

Espaces de Hilbert à noyau reproduisant

Dans ce chapitre, nous allons introduire l'objet principal d'étude de ce travail, soit les espaces de Hilbert à noyau reproduisant. Nous donnerons quelques propriétés de base et étudierons trois exemples importants en analyse complexe. Finalement, nous obtiendrons une caractérisation des fonctions semi-définies positives : ce sont les noyaux d'espaces de Hilbert à noyau reproduisant. Nous nous baserons principalement sur les livres [1, 13].

1.1 Définition et exemples simples

Définition 1.1. Soit X un ensemble non vide. Un *espace de Hilbert à noyau reproduisant sur* X est un espace de Hilbert de fonctions sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$ tel que pour chaque $x \in X$, la fonctionnelle d'évaluation $f \mapsto f(x)$ est continue.

Dorénavant, nous abrégerons espace de Hilbert à noyau reproduisant par RKHS (acronyme pour la terminologie anglophone *reproducing kernel Hilbert space*).

Soit H un RKHS sur X. Par le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert, il existe, pour chaque $x \in X$, une unique fonction $k_x \in H$ telle que

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle$$

pour chaque $f \in H$. La fonction $K : X \times X \to \mathbb{C}$ définie par $K(x, y) := k_y(x)$ est appelée le *noyau reproduisant de* H.

Exemple 1.2. L'espace euclidien $\mathbb{C}^n$ peut être vu comme un espace de fonctions sur l'ensemble $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Le vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ correspond à la fonction $f : X \to \mathbb{C}$ définie par $f(j) := x_j$. Comme $\mathbb{C}^n$ est de dimension finie, toutes les fonctionnelles linéaires sont continues, et par conséquent, $\mathbb{C}^n$ est un RKHS. On a, pour chaque $x \in \mathbb{C}^n$, et pour $1 \leq j \leq n$,

$$x_j = \langle x, e_j \rangle,$$

où e_j est le vecteur contenant un 1 en position j et des 0 ailleurs. Donc $k_j = e_j$, et

$$K(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Exemple 1.3. Plus généralement, soit X un ensemble non-vide quelconque et soit $H = \ell^2(X)$. Rappelons que $\ell^2(X)$ est défini comme l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sum_{x \in X} |f(x)|^2 < \infty.$$

Pour chaque $x \in X$ et pour chaque $f \in \ell^2(X)$, on a

$$|f(x)| = \sqrt{|f(x)|^2} \leq \Big(\sum_{y \in X} |f(y)|^2 \Big)^{1/2} = \|f\|_{\ell^2},$$

et donc la fonctionnelle d'évaluation en x est bornée. Ainsi, $\ell^2(X)$ est un RKHS. Pour chaque $f \in \ell^2(X)$ et pour chaque $x \in X$, on a

$$f(x) = \langle f, e_x \rangle,$$

où $e_x : X \to \mathbb{C}$ est la fonction définie par

$$e_x(y) := \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x. \end{cases}$$

Donc $k_x = e_x$, et

$$K(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Notons que l'exemple précédent est simplement un cas particulier de celui-ci (où on prend $X = \{1, 2, \ldots, n\}$).

1.2 L'espace de Hardy

Nous introduisons maintenant un des trois espaces de fonctions holomorphes principaux que nous étudierons. Les résultats présentés ici sont standards et peuvent être trouvés dans [4, 10].

Définition 1.4. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. On définit sa *norme* H^2 par

$$\|f\|_{H^2} := \sup_{0<r<1} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \Big)^{1/2}.$$

L'espace de Hardy, dénoté par H^2, est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles la norme H^2 est finie.

Il suit immédiatement de l'inégalité de Minkowski que H^2 est un espace vectoriel et que la norme H^2 est bel et bien une norme sur H^2.

Supposons que la série de Taylor centrée en 0 de f est donnée par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors par la formule de Parseval, on a pour chaque $0 < r < 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\Big|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

En prenant le supremum sur les $r < 1$ et en appliquant le théorème de la convergence monotone, on obtient alors

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Ainsi, $f \in H^2$ si et seulement si sa suite de coefficients de Taylor est carré-sommable. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans ℓ^2, alors celle-ci est bornée, et donc la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

possède un rayon de convergence d'au moins 1, et ainsi elle définit une fonction holomorphe f sur $\mathbb{D}$. Les calculs précédents montrent que la norme H^2 de f est égale à la norme ℓ^2 de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, et donc $f \in H^2$. Bref, H^2 est isométriquement isomorphe à ℓ^2, et donc il hérite certaines propriétés de ce dernier.

Proposition 1.5. *H^2 est un espace de Hilbert.*

L'isométrie entre H^2 et ℓ^2 énoncée ci-haut nous donne une formule pour le produit scalaire dans H^2 en terme des coefficients de Taylor des fonctions. Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

alors

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

La propriété la plus importante de H^2 pour nous est le fait qu'il s'agit d'un RKHS.

Proposition 1.6. *H^2 est un RKHS sur $\mathbb{D}$, et pour tout $z, w \in \mathbb{D}$,*

$$K(z,w) = \frac{1}{1 - z\overline{w}}.$$

Démonstration. Fixons $w \in \mathbb{D}$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$
\begin{aligned}
|f(w)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n w^n| \leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |w|^{2n}\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\frac{1}{1-|w|^2}\Big)^{1/2} \|f\|_{H^2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'évaluation en w est une fonctionnelle bornée. Finalement, on note que

$$
\begin{aligned}
\langle f, k_w \rangle = f(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \Big\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{w}^n z^n \Big\rangle \\
&= \Big\langle f, \frac{1}{1 - z\overline{w}} \Big\rangle,
\end{aligned}
$$

d'où $k_w(z) = 1/(1 - z\overline{w})$ et

$$K(z, w) = k_w(z) = \frac{1}{1 - z\overline{w}}. \qquad \square$$

Le noyau $K(z, w) = 1/(1 - z\overline{w})$ est appelé le *noyau de Szegő*.

Nous terminons en mentionnant une autre façon d'interpréter l'espace H^2. Si $F \in L^2(\mathbb{T})$ et ses coefficients de Fourier négatifs sont tous nuls, alors *l'intégrale de Poisson* de F

$$f(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} F(e^{it}) dt$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, dont les coefficients de Taylor sont les coefficients de Fourier de F. Ces derniers sont carré-sommables par la formule de Parseval, et donc $f \in H^2$, avec $\|f\|_{H^2} = \|F\|_{L^2(\mathbb{T})}$. Réciproquement, si on commence avec $f \in H^2$, alors par le théorème de Fatou (voir [10, Chapitre 1, section D]), f possède des limites radiales presque partout, et la fonction limite est dans $L^2(\mathbb{T})$, ses coefficients de Fourier négatifs sont nuls, et f est son intégrale de Poisson. Bref, H^2 est isométriquement isomorphe au sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$ des fonctions dont les coefficients de Fourier négatifs sont nuls. On a aussi la formule suivante pour le produit scalaire : si $f, g \in H^2$ et F, G sont leurs limites radiales respectivement, alors

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = \langle F, G \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(e^{it}) \overline{G(e^{it})} dt.$$

1.3 L'espace de Dirichlet

Le prochain espace à l'étude est l'espace de Dirichlet. Ce dernier possède plusieurs propriétés semblables à celles de H^2, mais elles sont de manière générale plus difficiles à obtenir. Les résultats qui suivent sont tirés de la monographie [5].

Définition 1.7. Soit f, une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. On définit son *intégrale de Dirichlet* par

$$\mathcal{D}(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z),$$

où dA est la mesure d'aire sur le disque. *L'espace de Dirichlet*, dénoté par $\mathcal{D}$, est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles l'intégrale de Dirichlet est finie.

Supposons que la série de Taylor centrée en 0 de f est donnée par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors en utilisant les coordonnées polaires et la formule de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}\Big|^2 r d\theta dr \\
&= 2\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2n-1}\Big) dr \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(n^2 |a_n|^2 \int_0^1 2r^{2n-1} dr\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $f \in \mathcal{D}$ si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty. \tag{1.1}$$

De plus, (1.1) implique clairement que $\mathcal{D} \subseteq H^2$. Malgré le fait que la fonction $f \mapsto \mathcal{D}(f)^{1/2}$ satisfasse l'inégalité triangulaire, la racine de l'intégrale de Dirichlet n'est pas une norme, car $\mathcal{D}(C) = 0$ pour toute constante C. On doit modifier cette expression pour obtenir une norme.

Définition 1.8. Pour $f \in \mathcal{D}$, on définit sa *norme de Dirichlet* par

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 := \mathcal{D}(f) + \|f\|_{H^2}^2.$$

Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ est bien une norme, et que celle-ci est induite par le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)} dA(z) + \langle f, g\rangle_{H^2}$$

où $\langle \cdot, \cdot\rangle_{H^2}$ dénote le produit scalaire sur H^2. De plus, les formules pour $\mathcal{D}(f)$, $\|f\|_{H^2}$ et $\langle f, g\rangle_{H^2}$ en termes des coefficients de Taylor nous donnent

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|a_n|^2$$

et

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n \overline{b_n}$$

si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. De ces formules, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.9. *$(\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Les formules ci-dessus montrent que $\mathcal{D}$ est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N},(n+1))$, l'espace ℓ^2 à poids :

$$\ell^2(\mathbb{N},(n+1)) := \Big\{(a_n) : \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|a_n|^2\Big\}.$$

Ce dernier est complet, et donc $\mathcal{D}$ l'est aussi. $\square$

L'espace de Dirichlet est aussi un exemple important de RKHS.

Proposition 1.10. *$\mathcal{D}$ est un RKHS sur $\mathbb{D}$, et pour tout $z, w \in \mathbb{D}$,*

$$K(z,w) = \frac{1}{z\overline{w}}\log\Big(\frac{1}{1-z\overline{w}}\Big).$$

Démonstration. Le fait que l'évaluation en un point est bornée suit immédiatement du fait que H^2 est un RKHS et $\|f\|_{H^2} \leq \|f\|_{\mathcal{D}}$ pour tout $f \in \mathcal{D}$. Ensuite, si $w \in \mathbb{D}$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors

$$\begin{aligned} f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n\frac{w^n}{n+1} = \Big\langle f, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{w}^n}{n+1}z^n\Big\rangle \\ &= \Big\langle f, \frac{1}{z\overline{w}}\log\Big(\frac{1}{1-z\overline{w}}\Big)\Big\rangle. \end{aligned}$$

$\square$

1.4 L'espace de Bergman

L'espace de Bergman agira comme contre-exemple pour divers résultats qui ne tiennent pas pour les RKHS généraux. Encore une fois, tout ce qui se trouve dans cette section est classique et se trouve par exemple dans [3].

Définition 1.11. *L'espace de Bergman A^2* est défini comme étant

$$A^2 := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{A^2} < \infty\}$$

où

$$\|f\|_{A^2}^2 := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2 dA(z).$$

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors on a, par la formule de Parseval et le théorème de la convergence monotone,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2 dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta}\Big|^2 r\,d\theta\,dr &= 2\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n+1}dr \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f \in A^2$ si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} < \infty.$$

En comparant A^2 avec un espace ℓ^2 à poids encore une fois, on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.12. *A^2 est un espace de Hilbert.*

Un calcul similaire à celui qui précède nous permet de déduire que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sont dans A^2, alors

$$\langle f, g \rangle_{A^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b_n}}{n+1}.$$

Avec cette relation, on peut maintenant montrer que A^2 est un RKHS et identifier son noyau.

Proposition 1.13. *A^2 est un RKHS et son noyau est donné par*

$$K(z, w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}.$$

Démonstration. Soit $w \in \mathbb{D}$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A^2$. Alors par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} |f(w)| &= \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n\Big| \leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|w|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}\Big)^{1/2} \\ &= \Big(\frac{1}{(1-|w|^2)^2}\Big)^{1/2} \|f\|_{A^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonctionnelle d'évaluation en w est bornée, et A^2 est un RKHS. Aussi,

$$\begin{aligned} \langle f, k_w \rangle_{A^2} = f(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{(n+1)\overline{w}^n}}{n+1} = \Big\langle f, \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z\overline{w})^n \Big\rangle_{A^2} \\ &= \Big\langle f, \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} \Big\rangle_{A^2}. \end{aligned}$$

□

1.5 Fonctions semi-définies positives

Nous rappelons d'abord une notion clé d'algèbre linéaire.

Définition 1.14. Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite *semi-définie positive* si pour tout $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i,j} a_{ij} z_j \overline{z_i} \geq 0. \tag{1.2}$$

On écrit alors $A \geq 0$.

Il n'est pas trop difficile de voir que le fait que $A \geq 0$ revient à dire que $\langle Az, z\rangle \geq 0$ pour tout choix de vecteur $z \in \mathbb{C}^n$ (où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dénote le produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$). Cette formulation se généralise facilement au contexte des espaces de dimension infinie ; un opérateur (borné) A sur un espace de Hilbert H est *semi-défini positif* si $\langle Az, z\rangle_H \geq 0$ pour tout $z \in H$.

Le théorème suivant nous donne deux autres formulations équivalentes de la propriété de positivité semi-définie, qui nous seront utiles pour plus tard.

Théorème 1.15. *Soit A une matrice $n \times n$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *A est semi-définie positive.*
2. *A est auto-adjointe et ses valeurs propres sont toutes non négatives.*
3. *Il existe B, une matrice $n \times n$ telle que $A = BB^*$.*

Démonstration. $(1 \Rightarrow 2)$: Comme $A \geq 0$, on a en particulier que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, et donc

$$\langle (A - A^*)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \overline{\langle Ax, x\rangle} = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. Par la formule de polarisation, on a alors, pour tout x, y,

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle - \langle A^*x, y\rangle = \langle (A - A^*)x, y\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle (A-A)^*(x + i^k y), x + i^k y\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc A est auto-adjointe. Finalement, si x est un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre λ, alors

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda.$$

Ainsi, toutes les valeurs propres de A sont non négatives.

$(2 \Rightarrow 3)$: Par le théorème spectral, A peut être écrite sous la forme $A = UDU^*$ où U est une matrice unitaire et D est une matrice diagonale dont les entrées sur la diagonale sont les valeurs propres de A. Soit $\widetilde{D}$, la matrice diagonale dont les entrées sur la diagonale sont les racines carrées de celles de D (ce sont des nombres réels non-négatifs car les valeurs propres de A le sont). On définit alors $B := U\widetilde{D}U^*$. Comme les entrées de la diagonale de $\widetilde{D}$ sont réelles, B est auto-adjointe, et on a $A = B^2 = BB^*$.

$(3 \Rightarrow 1)$: Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Alors on a

$$\langle Ax, x\rangle = \langle BB^*x, x\rangle = \|B^*x\|^2 \geq 0. \qquad \square$$

Dans le cas où $n = 2$, la condition 2 du théorème 1.15 équivaut au fait que $\det(A) \geq 0$ et $\mathrm{Tr}(A) \geq 0$, ce qui est très rapide à vérifier.

Il est clair que si A et B sont semi-définies positives et si a et b sont des constantes réelles non négatives, alors $aA + bB \geq 0$. Cependant, en général, il est faux que $AB \geq 0$. Par contre, il existe un produit pour lequel la propriété d'être semi-définie positive est préservée.

Définition 1.16. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, deux matrices $m \times n$. Alors leur *produit de Schur* est la matrice $A \circ B := (a_{ij}b_{ij})$.

Autrement dit, le produit de Schur de A et B est la matrice dont l'entrée i, j est le produit de l'entrée i, j de A avec l'entrée i, j de B.

Théorème 1.17 (Schur)**.** *Si $A \geq 0$ et $B \geq 0$, alors $A \circ B \geq 0$.*

Démonstration. En vertu du théorème 1.15, on peut écrire A sous la forme $A = U^*DU$, où U est unitaire et D est diagonale, avec les entrées de la diagonale étant non-négatives, disons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dénotons par a_{ij}, b_{ij}, u_{ij} et u^*_{ij}, l'entrée i, j de A, B, U et U^* respectivement. Alors on a

$$a_{jk} = \sum_{\ell=1}^{n} u^*_{j\ell}\lambda_\ell u_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \overline{u_{\ell j}} u_{\ell k}.$$

Ainsi, pour chaque $z \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}\langle (A \circ B)z, z\rangle_{\mathbb{C}^n} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{jk}z_k\overline{z_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \overline{u_{\ell j}} u_{\ell k} b_{jk} z_k \overline{z_j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{jk} u_{\ell k} z_k \overline{u_{\ell j} z_j} = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \langle By^\ell, y^\ell\rangle_{\mathbb{C}^n},\end{aligned}$$

où y^ℓ est le vecteur dont la k^e composante est $u_{\ell k}z_k$. Cette dernière somme est plus grande ou égale à 0, car $B \geq 0$ et $\lambda_\ell \geq 0$ pour tout ℓ. □

Définition 1.18. Soit X un ensemble, et $F : X \times X \to \mathbb{C}$, une fonction. On dit que F est *semi-définie positive* si pour tout n, et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in X$, la matrice $(F(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ est semi-définie positive. On écrit alors $F \succeq 0$.

Notons que si F et G sont deux fonctions semi-définies positives, alors leur produit (point par point) FG est semi-défini positif aussi, par le théorème de Schur.

Proposition 1.19. *Soit H un RKHS sur X avec noyau K. Alors $K \succeq 0$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} K(x_i, x_j) z_j \overline{z_i} = \sum_{i,j} k_{x_j}(x_i) z_j \overline{z_i} &= \sum_{i,j} \langle k_{x_j}, k_{x_i} \rangle z_j \overline{z_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\langle \sum_{j=1}^{n} z_j k_{x_j}, k_{x_i} \Big\rangle \overline{z_i} = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} z_j k_{x_j}, \sum_{i=1}^{n} z_i k_{x_i} \Big\rangle \\ &= \Big\| \sum_{j=1}^{n} z_j k_{x_j} \Big\|^2 \geq 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Nous verrons que la réciproque de la proposition précédente est vraie aussi, i.e., que toute fonction semi-définie positive est le noyau d'un RKHS. Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 1.20. $\operatorname{span}\{k_x, x \in X\}$ *est dense dans* H.

Démonstration. Soit $f \in \operatorname{span}\{k_x, x \in X\}^{\perp}$. Alors pour tout $x \in X$,

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle = 0.$$

Donc $f = 0$. Ainsi, $\operatorname{span}\{k_x, x \in X\}^{\perp} = \{0\}$, et $\operatorname{span}\{k_x, x \in X\}$ est dense dans H. $\square$

Lemme 1.21. *Soit H_1 et H_2 deux RKHS sur X et supposons qu'ils ont le même noyau K. Alors $H_1 = H_2$, i.e., H_1 et H_2 contiennent les mêmes fonctions, et leur normes sont égales.*

Démonstration. Comme H_1 et H_2 ont le même noyau, on a que $\|g\|_{H_1} = \|g\|_{H_2}$ pour tout $g \in \operatorname{span}\{k_x, x \in X\}$. En effet, si

$$g = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_{x_j},$$

alors

$$\begin{aligned}\|g\|_{H_1}^2 &= \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_{x_j}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_{x_i} \Big\rangle_{H_1} \\ &= \sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} \langle k_{x_j}, k_{x_i} \rangle_{H_1} = \sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} K(x_i, x_j),\end{aligned}$$

et de même pour $\|g\|_{H_2}^2$. Soit maintenant $f \in H_1$. Par le Lemme 1.20, il existe une suite $f_n \in \operatorname{span}\{k_x, x \in X\}$ telle que $f_n \to f$ dans H_1. La suite (f_n) converge, donc elle est une suite de Cauchy. Mais pour tout n, m, on a

$$\|f_n - f_m\|_{H_1} = \|f_n - f_m\|_{H_2}.$$

Ainsi, (f_n) est Cauchy dans H_2, donc converge vers un certain $g \in H_2$ car H_2 est complet. Mais la convergence dans un RKHS implique la convergence simple. Ainsi, $f_n \to f$ simplement et $f_n \to g$ simplement. Donc $f = g$ et $f \in H_2$. Par le même raisonnement, toute fonction dans H_2 est dans H_1 aussi. Finalement, on a

$$\|f\|_{H_1} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{H_1} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{H_2} = \|f\|_{H_2}. \qquad \square$$

Théorème 1.22 (Moore)**.** *Soit X un ensemble et $K : X \times X \to \mathbb{C}$ une fonction semi-définie positive. Alors il existe un unique RKHS sur X dont le noyau est K.*

Démonstration. L'unicité découle immédiatement du Lemme 1.21. Posons, pour $x, y \in X$, $k_y(x) := K(x, y)$ et

$$W := \operatorname{span}\{k_x, x \in X\}.$$

Si $g = \sum_{i=1}^n a_i k_{x_i}$ et $h = \sum_{j=1}^m b_j k_{y_j}$, alors on définit

$$\langle g, h\rangle := \sum_{i,j} a_i \overline{b_j} K(y_j, x_i).$$

On doit d'abord vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini. Supposons que

$$g = \sum_{i=1}^n a_i k_{x_i} = \sum_{i=1}^n a_i' k_{x_i'}$$

$$h = \sum_{j=1}^m b_j k_{y_j} = \sum_{j=1}^m b_j' k_{y_j'}$$

sont deux représentations différentes pour g et h (on peut supposer qu'il y a le même nombre de termes dans les représentations en rajoutant des coefficients nuls si nécessaire). Alors pour chaque $x \in X$, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i k_{x_i}(x) = \sum_{i=1}^n a_i' k_{x_i'}(x)$$

$$\sum_{j=1}^m b_j k_{y_j}(x) = \sum_{j=1}^m b_j' k_{y_j'}(x),$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} a_i \overline{b_j} K(y_j, x_i) &= \sum_{j=1}^m \overline{b_j}\Big(\sum_{i=1}^n a_i k_{x_i}(y_j)\Big) = \sum_{j=1}^m \overline{b_j}\Big(\sum_{i=1}^n a_i' k_{x_i'}(y_j)\Big) \\
&= \sum_{i,j} a_i' \overline{b_j}\ \overline{K(x_i', y_j)} = \sum_{i=1}^n a_i' \overline{\Big(\sum_{j=1}^m b_j k_{y_j}(x_i')\Big)} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i' \overline{\Big(\sum_{j=1}^m b_j' k_{y_j'}(x_i')\Big)} = \sum_{i,j} a_i' b_j' K(y_j', x_i').
\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini. On vérifie que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et anti-symétrique. De plus, comme $K \succeq 0$, on a $\langle f, f\rangle \geq 0$ pour tout $f \in W$. Notons que pour tout $f \in W$, on a $\langle f, k_x \rangle = f(x)$.

Maintenant, supposons que $\langle f, f \rangle = 0$. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz (qui est valide pour les formes bilinéaires anti-symétriques semi-définies positives),

$$|\langle f, k_x \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle k_x, k_x \rangle = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in X$,

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle = 0.$$

Donc $f = 0$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

On définit H comme étant la complétion de W par rapport au produit scalaire. On peut voir H comme un espace de fonctions sur X. En effet, si $f \in H$, alors on lui associe la fonction $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f}(x) := \langle f, k_x \rangle.$$

Ceci définit uniquement $\hat{f}$ car W est dense dans H. L'ensemble

$$V := \{\hat{f} : f \in H\}$$

est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ des fonctions sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Celui-ci est isomorphe (comme espace vectoriel) à H. Donc H est un RKHS avec noyau K. $\square$

Chapitre 2

Interpolation de Pick

Le problème d'interpolation de Pick est un des problèmes centraux de la théorie des RKHS. Il consiste à déterminer sous quelles conditions on peut trouver un multiplicateur qui interpole une paire de suites finies de points donnés. Nous commencerons d'abord en définissant et donnant quelques propriétés des multiplicateurs. Ensuite, nous parlerons du produit tensoriel sur les espaces de Hilbert afin d'introduire les RKHS à valeurs vectorielles. Ceux-ci nous permettront de formuler la notion de noyau de Pick complet, qui nous donnera une solution complète au problème d'interpolation de Pick. Comme application, le théorème très récent d'Aleman, Hartz, Richter et McCarthy montrera que chaque fonction dans un RKHS avec la propriété de Pick complète peut s'écrire comme un quotient de deux multiplicateurs. Finalement, nous reviendrons à l'analyse complexe et identifierons quels espaces de fonctions analytiques ont la propriété de Pick complète.

Tout au long de ce chapitre, H est un RKHS sur X avec noyau K. On supposera aussi que H contient les constantes. Nous allons aussi supposer que K satisfait les deux propriétés suivantes

1. Pour chaque $x, y \in X$, on a $K(x, y) \neq 0$
2. K est une fonction définie positive.

La première condition est simplement là car nous aurons besoin de diviser par $K(x, y)$. La deuxième condition nécessite un peu plus de justifications. D'abord, une matrice est *définie positive* si elle satisfait la définition donnée de matrice semi-définie positive mais avec une inégalité stricte lorsque les λ_j ne sont pas tous nuls. De même, une fonction $F : X \times X \to \mathbb{C}$ est *définie positive* si elle satisfait la définition de fonction semi-définie positive mais avec « semi-définie positive » remplacé par « définie positive ». Il n'est pas trop difficile de voir que cette condition est équivalente au fait que les fonctions $k_x, (x \in X)$ sont linéairement indépendantes. En effet, ceci suit de la formule suivante

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_{x_j} \right\|^2 = \sum_{i,j} \overline{\lambda_j} \lambda_i K(x_i, x_j).$$

Cette propriété nous sera utile car elle nous permettra de construire des opérateurs bornés sur H en les définissant sur chaque k_x, en les prolongeant par linéarité sur $\text{span}\{k_x : x \in X\}$ et puis en prolongeant sur H par densité et continuité.

Notons que les trois espaces de fonctions analytiques qui nous intéressent, soient $H^2, \mathcal{D}$ et A^2 satisfont ces propriétés.

2.1 Les multiplicateurs

Un des objets les plus importants associés à un RKHS est son algèbre des multiplicateurs. Nous étudierons ses propriétés dans cette section. Les résultats se trouvent dans [1].

Définition 2.1. Un *multiplicateur* est une fonction $\phi : X \to \mathbb{C}$ telle que pour chaque $f \in H$, on a $\phi f \in H$. L'ensemble de tous les multiplicateurs sera noté par $\text{Mult}(H)$.

Comme H contient les constantes, il est clair que $\text{Mult}(H) \subseteq H$. Si ϕ est un multiplicateur, alors on peut lui associer un opérateur de multiplication $M_\phi : H \to H$ défini par

$$M_\phi f := \phi f.$$

Celui-ci est clairement linéaire.

Proposition 2.2. *M_ϕ est borné.*

Démonstration. Supposons que $f_n \to f$ et $M_\phi f_n \to g$. La convergence dans un RKHS implique la convergence simple, et donc $f_n \to f$ simplement, et $M_\phi f_n \to g$ simplement. Mais alors, $\phi f_n \to \phi f$ simplement. Par unicité des limites simples, il suit que $g = \phi f = M_\phi f$. Donc par le théorème du graphe fermé, M_ϕ est borné. □

Pour $\phi \in \text{Mult}(H)$, on définit

$$\|\phi\|_{\text{Mult}(H)} := \|M_\phi\|.$$

Observons que l'on a

$$\|\phi\|_{\text{Mult}(H)} = \sup_{\|f\|_H=1} \|\phi f\|_H \geq \frac{\|\phi\|_H}{\|1\|_H}.$$

$\text{Mult}(H)$ est clairement une sous-algèbre de $B(H)$. Le prochain résultat montre que c'est une sous-algèbre fermée, et donc $(\text{Mult}(H), \|\cdot\|_{\text{Mult}(H)})$ est une algèbre de Banach.

Proposition 2.3. $\text{Mult}(H)$ *est fermé dans* $B(H)$.

Démonstration. Supposons que (ϕ_n) est une suite de multiplicateurs telle que $M_{\phi_n} \to T$ dans $B(H)$. Pour tout n, m, on a

$$\|\phi_n - \phi_m\|_H \leq \|1\|_H \|M_{\phi_n - \phi_m}\| = \|1\|_H \|M_{\phi_n} - M_{\phi_m}\|.$$

Ainsi, (ϕ_n) est une suite de Cauchy dans H, donc converge vers $\phi \in H$ disons. Comme la convergence dans H implique la convergence simple, on a $\phi_n \to \phi$ simplement, et donc $\phi_n f \to \phi f$ simplement pour tout $f \in H$. D'autre part, puisque $M_{\phi_n} \to T$, on a $M_{\phi_n} f \to Tf$ pour tout $f \in H$. Ainsi, $\phi_n f \to Tf$ simplement pour tout $f \in H$. Par unicité des limites simples, il suit que

$$\phi f = Tf \in H$$

pour tout $f \in H$. Ainsi, ϕ est un multiplicateur et $M_\phi = T$. Donc $\mathrm{Mult}(H)$ est fermé. □

La prochaine proposition est simple, mais extrêmement importante pour la suite.

Proposition 2.4. *Soit $\phi \in \mathrm{Mult}(H)$ et $w \in X$. Alors k_w est un vecteur propre de M_ϕ^* avec valeur propre $\overline{\phi(w)}$.*

Démonstration. Pour tout $f \in H$, on a

$$\langle f, M_\phi^* k_w \rangle = \langle \phi f, k_w \rangle = \phi(w) f(w) = \phi(w) \langle f, k_w \rangle = \langle f, \overline{\phi(w)} k_w \rangle.$$

Donc $M_\phi^* k_w = \overline{\phi(w)} k_w$. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.5. *Soit $\phi \in \mathrm{Mult}(H)$. Alors ϕ est bornée et*

$$\sup_{x \in X} |\phi(x)| \leq \|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H)}.$$

Démonstration. Soit $x \in X$. Comme $\overline{\phi(x)}$ est une valeur propre de M_ϕ^*, on a

$$|\phi(x)| = |\overline{\phi(x)}| \leq \rho(M_\phi^*) \leq \|M_\phi^*\| = \|M_\phi\| = \|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H)},$$

où $\rho(M_\phi^*)$ dénote le rayon spectral de M_ϕ^*. Le résultat suit. □

Exemple 2.6. On définit H^∞ comme étant l'ensemble des fonctions holomorphes et bornées sur $\mathbb{D}$. C'est une algèbre de Banach avec la norme

$$\|f\|_{H^\infty} := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Nous allons montrer que $\mathrm{Mult}(H^2) = H^\infty$, et que les normes sont égales. D'abord, comme $\mathrm{Mult}(H^2) \subseteq H^2$, chaque multiplicateur est holomorphe, et par le corollaire 2.5, chaque multiplicateur est borné. Donc $\mathrm{Mult}(H^2) \subseteq H^\infty$ et par le corollaire 2.5 encore, on a aussi que $\|\phi\|_{H^\infty} \leq \|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H^2)}$.

Ensuite, soit $\phi \in H^\infty$ et $f \in H^2$. Pour chaque $r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(re^{i\theta}) f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|\phi\|_{H^\infty}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \|\phi\|_{H^\infty}^2 \|f\|_{H^2}^2.$$

En prenant le supremum sur les $r < 1$, on obtient alors

$$\|\phi f\|_{H^2} \leq \|\phi\|_{H^\infty} \|f\|_{H^2} < \infty.$$

Comme ceci est valide pour tout $f \in H^2$, cela montre que $\phi \in \mathrm{Mult}(H^2)$ et $\|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H^2)} \leq \|\phi\|_{H^\infty}$. Bref, $\mathrm{Mult}(H^2) = H^\infty$ et $\|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H^2)} = \|\phi\|_{H^\infty}$ pour tout $\phi \in \mathrm{Mult}(H^2)$.

Exemple 2.7. Soit A^2 l'espace de Bergman. Alors $\mathrm{Mult}(A^2)$ est aussi isométriquement isomorphe à H^∞. En effet, comme pour H^2, le corollaire 2.5 implique que $\mathrm{Mult}(A^2) \subseteq H^\infty$ et $\|\phi\|_{H^\infty} \leq \|\phi\|_{\mathrm{Mult}(A^2)}$. D'autre part, si $\phi \in H^\infty$ et $f \in A^2$, alors $\phi f \in L^2(\mathbb{D})$, et comme le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe, on a $\phi f \in A^2$. Ainsi, $H^\infty \subseteq \mathrm{Mult}(A^2)$. Il est clair aussi que $\|\phi f\|_{A^2} \leq \|\phi\|_{H^\infty} \|f\|_{A^2}$, d'où $\|\phi\|_{\mathrm{Mult}(A^2)} \leq \|\phi\|_{H^\infty}$.

Exemple 2.8. Prenons $H = \mathcal{D}$. On a bien sûr $\mathrm{Mult}(\mathcal{D}) \subseteq H^\infty \cap \mathcal{D}$. Il est naturel de penser qu'on a l'inclusion inverse aussi. Cependant, cela est faux ; il existe des fonctions dans $\mathcal{D}$ qui sont bornées mais ne sont pas des multiplicateurs. Voir [5, Théorème 5.1.6] pour un exemple. Il existe une caractérisation de $\mathrm{Mult}(\mathcal{D})$, mais celle-ci est assez complexe, et nous ne nous en servirons pas pour la suite.

Nous terminons en donnant une caractérisation des multiplicateurs qui sont de norme inférieure ou égale à 1.

Théorème 2.9 (Caractérisation des multiplicateurs)**.** *Soit $\phi : X \to \mathbb{C}$ une fonction. Alors ϕ est un multiplicateur avec $\|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H)} \leq 1$ si et seulement si pour tout choix de points $x_1, \ldots, x_n \in X$, la matrice*

$$((1 - \phi(x_i)\overline{\phi(x_j)})K(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est semi-définie positive.

Démonstration. Supposons d'abord que ϕ est un multiplicateur de norme plus petite ou égale à 1. Soit $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Alors par la proposition 2.4,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i}(1 - \phi(x_i)\overline{\phi(x_j)})K(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} k_{x_j}(x_i) - \sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} \phi(x_i)\overline{\phi(x_j)} k_{x_j}(x_i) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} \langle k_{x_j}, k_{x_i} \rangle - \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda_j} \phi(x_i) M_\phi^*(k_{x_j})(x_i) \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j k_{x_j}, \sum_{i=1}^n \lambda_i k_{x_i} \right\rangle - \sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} \langle \phi M_\phi^*(k_{x_j}), k_{x_i} \rangle
\end{aligned}$$

$$= \Big\|\sum_{j=1}^n \lambda_j k_{x_j}\Big\|^2 - \Big\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j M_\phi^*(k_{x_j}), \sum_{i=1}^n \lambda_i M_\phi^*(k_{x_i})\Big\rangle$$
$$= \Big\|\sum_{j=1}^n \lambda_j k_{x_j}\Big\|^2 - \Big\|M_\phi^*\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j k_{x_j}\Big)\Big\|^2 \geq 0$$

car $\|M_\phi^*\| = \|M_\phi\| \leq 1$.

Supposons maintenant que pour tout choix de points $x_1, \ldots, x_n \in X$, la matrice

$$((1 - \phi(x_i)\overline{\phi(x_j)})K(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

est semi-définie positive. Alors pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i}(1 - \phi(x_i)\overline{\phi(x_j)})K(x_i, x_j) \geq 0,$$

et donc

$$\sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i}\phi(x_i)\overline{\phi(x_j)}K(x_i, x_j) \leq \sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} K(x_i, x_j).$$

Des calculs similaires à ceux faits plus haut montrent que

$$\sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} K(x_i, x_j) = \Big\|\sum_{j=1}^n \lambda_j k_{x_j}\Big\|^2$$

et

$$\sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i}\phi(x_i)\overline{\phi(x_j)}K(x_i, x_j) = \Big\|\sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{\phi(x_j)} k_{x_j}\Big\|^2.$$

Ainsi, si $W = \text{span}\{k_x : x \in X\}$, alors l'application $T : W \to H$ donnée par

$$T\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j k_{x_j}\Big) := \sum_{j=1}^n \lambda_j \overline{\phi(x_j)} k_{x_j}$$

est une application linéaire bien définie (car les k_x sont linéairement indépendantes) qui est bornée, avec $\|T\| \leq 1$. On peut alors prolonger T à H au complet par densité, et la norme demeure la même. Observons que pour chaque $x \in X$, on a $T(k_x) = \overline{\phi(x)} k_x$. Ainsi, pour tout $f \in H$, on a

$$(T^* f)(x) = \langle T^* f, k_x \rangle = \langle f, T k_x \rangle = \langle f, \overline{\phi(x)} k_x \rangle = \phi(x)\langle f, k_x \rangle = \phi(x) f(x).$$

Donc $\phi f = T^* f \in H$, et ϕ est un multiplicateur. Ce calcul montre aussi que $M_\phi = T^*$, et donc

$$\|\phi\|_{\text{Mult}(H)} = \|M_\phi\| = \|T^*\| = \|T\| \leq 1. \qquad \square$$

2.2 Le problème d'interpolation de Pick

Le problème d'interpolation de Pick classique est le suivant. Étant donné $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ distincts et $w_1, \dots, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$, peut-on trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ telle que $f(z_j) = w_j$ pour $1 \leq j \leq n$? Quelles conditions doivent satisfaire les z_j et les w_j ? Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 2.10 (Nevanlinna–Pick). *Il existe une fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ avec $f(z_j) = w_j$ pour $1 \leq j \leq n$ si et seulement si la matrice*

$$\left(\frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \tag{2.1}$$

est semi-définie positive.

L'idée de la démonstration classique va comme suit. D'abord, le cas $n = 1$ est trivial. En effet, d'une part, la matrice 1×1 est toujours semi-définie positive car $z_1 \in \mathbb{D}$ et $w_1 \in \overline{\mathbb{D}}$. D'autre part, le problème d'interpolation à un point a toujours une solution : pour chaque $a \in \mathbb{D}$, la fonction

$$\psi_a(z) := \frac{a - z}{1 - \overline{a} z}$$

est un automorphisme du disque qui envoie 0 sur a. Alors $f := \psi_{w_1} \circ \psi_{z_1}^{-1}$ fait l'affaire. Pour le cas général, on procède par induction. En composant par des automorphismes du disque ψ_a comme ci-haut, on peut supposer sans perte de généralité que $z_n = w_n = 0$. Par le lemme de Schwarz, on devrait alors avoir que $g(z) := f(z)/z$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{D}}$. Aussi, g serait une solution au problème d'interpolation $g(z_j) = \widetilde{w}_j$ pour $j = 1, \dots, n-1$, où $\widetilde{w}_j := w_j / z_j$. On se ramène ainsi au cas $n - 1$, et avec un peu de travail, on peut montrer que la matrice (2.1) est semi-définie positive si et seulement si celle avec les z_j et les $\widetilde{w}_j$ l'est. Pour plus de détails, voir [6, Théorème 2.2].

Notre approche sera plutôt basée sur la théorie des RKHS. Nous allons en fait étudier un problème beaucoup plus général. Soit X un ensemble non vide, H un RKHS sur X avec noyau K et $\mathrm{Mult}(H)$, son algèbre des multiplicateurs. Étant donné des points $x_1, \dots, x_n \in X$ distincts et $y_1, \dots, y_n \in \overline{\mathbb{D}}$, peut-on trouver un multiplicateur ϕ tel que $\|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H)} \leq 1$ et $\phi(x_j) = y_j$ pour $1 \leq j \leq n$? Si on prend H^2 comme RKHS, alors on voit qu'on se ramène au problème d'interpolation de Pick classique. On voudrait cependant un résultat plus général que le théorème de Nevanlinna–Pick. Il suit immédiatement du théorème de caractérisation des multiplicateurs que si une telle ϕ existe, alors il faut nécessairement que la matrice

$$((1 - y_i \overline{y_j}) K(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

soit semi-définie positive. Notons que cette condition est la même que celle qui intervient dans le théorème de Nevanlinna–Pick classique lorsqu'on prend $H = H^2$. Cette condition est-elle suffisante dans le cas général ? La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.11. Soit $H = A^2$, l'espace de Bergman et prenons $z_1 = 0$, $z_2 = 2/3$, $w_1 = 0$ et $w_2 = 3/4$. Alors, en dénotant le noyau de A^2 par K_{A^2}, on a

$$\begin{aligned} ((1 - w_i\overline{w_j})K_{A^2}(z_i, z_j))_{1\le i,j\le 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-(3/4)^2}{(1-(2/3)^2)^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{567}{400} \end{pmatrix} \ge 0. \end{aligned}$$

Or, par le lemme de Schwarz, si $f(0) = 0$, alors $|f(z)| \le |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Mais $|w_2| > |z_2|$. Donc il n'existe pas de $f \in H^\infty = \mathrm{Mult}(A^2)$ telle que $\|f\|_{H^\infty} \le 1$ et $f(0) = 0, f(2/3) = 3/4$.

Ceci motive la définition suivante.

Définition 2.12. Un noyau K a la *propriété de Pick* (ou est un *noyau de Pick*) si la condition

$$((1 - y_i\overline{y_j})K(x_i, x_j))_{1\le i,j\le n} \ge 0$$

implique qu'il existe un $\phi \in \mathrm{Mult}(H)$ tel que $\|\phi\|_{\mathrm{Mult}(H)} \le 1$ et $\phi(x_j) = y_j$ pour tout $1 \le j \le n$. On dit aussi que H est un *espace de Pick* si son noyau est un noyau de Pick.

Ainsi, le noyau de Szegő est un noyau de Pick par le théorème de Nevanlinna–Pick, alors que le noyau de Bergman ne l'est pas par l'exemple 2.11. Le noyau de Dirichlet est-il un noyau de Pick ? Nous verrons plus tard que oui, mais cela n'est pas du tout évident. Notre but pour les sections qui suivent est d'obtenir un critère suffisant pour que K soit un noyau de Pick.

2.3 Le produit tensoriel

Le produit tensoriel est un outil extrêmement utile dans l'étude des RKHS. Nous allons commencer en rappelant la construction et les propriétés du produit tensoriel pour les espaces vectoriels (complexes) généraux. Bien sûr, les résultats qui suivent se retrouvent dans de nombreux textes d'algèbre, mais nous utiliserons plutôt l'approche dans [18, Appendice T].

Définition 2.13. Soit V et W deux espaces vectoriels complexes. Leur *produit tensoriel* est l'espace vectoriel $V \otimes W := X/R$ où

- X est l'espace vectoriel engendré par les symboles $e_{x,y}$ où $x \in V$ et $y \in W$,
- R est le sous-espace de X engendré par les éléments de la forme
  1. $e_{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2,\, y} - \lambda_1 e_{x_1,y} - \lambda_2 e_{x_2,y}, \quad x_1, x_2 \in V,\ y \in W,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,
  2. $e_{x,\, \lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2} - \lambda_1 e_{x,y_1} - \lambda_2 e_{x,y_2}, \quad x \in V,\ y_1, y_2 \in W,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

On utilisera $x\otimes y$ pour dénoter la classe d'équivalence de $e_{x,y}$. Alors chaque élément $z \in V\otimes W$ possède une représentation de la forme

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i,$$

où les $x_i \in V$ et les $y_i \in W$, mais cette représentation n'est pas unique.

Proposition 2.14 (Propriété universelle des produits tensoriels)**.** *Soit U un espace vectoriel et $B : V \times W \to U$ une application bilinéaire. Alors il existe une unique application linéaire $L : V \otimes W \to U$ telle que pour chaque $x \in V, y \in W$, on a $L(x \otimes y) = B(x, y)$.*

Démonstration. Les éléments $\{e_{x,y} : x \in V, y \in W\}$ forment une base de l'espace vectoriel X dans la définition 2.13. Ainsi, l'application $\widetilde{L} : X \to U$ définie par $\widetilde{L}(e_{x,y}) := B(x, y)$ est une application linéaire. Comme B est bilinéaire, on a

$$\begin{aligned}&\widetilde{L}(e_{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2,y} - \lambda_1 e_{x_1,y} - \lambda_2 e_{x_2,y})\\ &= B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) - \lambda_1 B(x_1, y) - \lambda_2 B(x_2, y) = 0\end{aligned}$$

pour chaque $x_1, x_2 \in V,\ y \in W,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. De même, on a

$$\begin{aligned}&\widetilde{L}(e_{x,\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2} - \lambda_1 e_{x,y_1} - \lambda_2 e_{x,y_2})\\ &= B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 B(x, y_1) - \lambda_2 B(x, y_2) = 0\end{aligned}$$

pour chaque $x \in V,\ y_1, y_2 \in W,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Ainsi, $\widetilde{L}$ s'annule sur le sous-espace R de la définition 2.13, et donc l'application $L : V \otimes W \to U$ définie par

$$L\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\Big) := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{L}(e_{x_i,y_i})$$

est bien définie et satisfait $L(x \otimes y) = B(x, y)$. Ceci montre l'existence. Finalement, l'unicité suit du fait que les éléments $x \otimes y$ engendrent $V \otimes W$, ce qui termine la démonstration. □

Un corollaire de la propriété universelle est le résultat suivant.

Corollaire 2.15. *Soit V_1, V_2, W_1 et W_2 des espaces vectoriels complexes et $T_1 : V_1 \to W_1$, $T_2 : V_2 \to W_2$, des applications linéaires. Alors il existe une unique application linéaire $T_1\otimes T_2 : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ telle que pour chaque $x \in V_1, y \in V_2$, on a $T_1 \otimes T_2(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y)$.*

Démonstration. On applique la propriété universelle à l'application bilinéaire $B : V_1 \times V_2 \to W_1 \otimes W_2$ définie par $B(x, y) := T_1(x) \otimes T_2(y)$. □

Supposons maintenant que H et K sont des espaces de Hilbert. Peut-on munir l'espace vectoriel $H \otimes K$ d'une structure d'espace de Hilbert qui tient compte des produits scalaires de H et K ? Le théorème suivant répond à cette question.

Théorème 2.16. *Soit H et K deux espaces de Hilbert. Alors il existe un unique produit scalaire sur $H \otimes K$ tel que*

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_H \langle y_1, y_2 \rangle_K$$

pour chaque $x_1, x_2 \in H,\ y_1, y_2 \in K$.

Remarque. On a entre autres que $\|x \otimes y\| = \|x\|_H \|y\|_K$.

Afin de démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.17. *Soit $w \in H \otimes K$. Alors w possède une représentation de la forme*

$$w = \sum_{j=1}^{n} z_j \otimes e_j$$

où les e_j sont orthonormés, i.e.,

$$\langle e_i, e_j \rangle_K = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j. \end{cases}$$

Démonstration. L'élément w possède une décomposition de la forme $w = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j$. On peut alors appliquer le procédé de Gram–Schmidt pour obtenir un système orthonormé $\{e_1, \dots, e_n\}$ dans K tel que

$$\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_m\}.$$

Ainsi, pour chaque $1 \leq j \leq m$, on a $y_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_i$ pour certains $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$. Ainsi,

$$w = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} x_j\Big) \otimes e_i. \qquad \square$$

Démonstration du théorème. L'unicité suit du fait que les éléments de la forme $x \otimes y$ engendrent $H \otimes K$. Fixons $x_1 \in H$ et $y_1 \in K$, et définissons $B_{x_1,y_1} : H \times K \to \mathbb{C}$ par

$$B_{x_1,y_1}(x_2, y_2) := \overline{\langle x_1, x_2 \rangle_H \langle y_1, y_2 \rangle_K}.$$

Alors B_{x_1,y_1} est bilinéaire, et donc par la propriété universelle, il existe une unique application linéaire $L_{x_1,y_1} : H \otimes K \to \mathbb{C}$ telle que pour chaque $x_2 \in H$ et $y_2 \in K$,

$$L_{x_1,y_1}(x_2 \otimes y_2) = \overline{\langle x_1, x_2 \rangle_H \langle y_1, y_2 \rangle_K}.$$

Soit $L^*(H \otimes K, \mathbb{C})$, l'espace vectoriel des applications anti-linéaires de $H \otimes K$ dans $\mathbb{C}$. Comme l'application $(x_1, y_1) \mapsto \overline{L_{x_1,y_1}}$ est bilinéaire, on peut déduire de la propriété universelle encore qu'il existe une unique application linéaire $L : H \otimes K \to L^*(H \otimes K, \mathbb{C})$ telle que pour chaque $x_1 \in H$ et $y_1 \in K$,

$$L(x_1 \otimes y_1) = \overline{L_{x_1,y_1}}.$$

On définit $\langle w, z\rangle := (L(w))(z)$, pour $w, z \in H \otimes K$. Cette forme est linéaire à gauche car L est linéaire, et elle est anti-linéaire à droite car $L(w) \in L^*(H \otimes K, \mathbb{C})$ pour tout $w \in H \otimes K$, par définition de L. Pour chaque $x_1, x_2 \in H$ et $y_1, y_2 \in K$, on a

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2\rangle = (L(x_1 \otimes y_1))(x_2 \otimes y_2) = \overline{L_{x_1,x_2}}(x_2 \otimes y_2) = \langle x_1, x_2\rangle_H \langle y_1, y_2\rangle_K.$$

Comme les éléments $x \otimes y$ engendrent $H \otimes K$, et les produits scalaires de H et de K sont anti-symétriques, il suit par la sesquilinéarité montrée ci-dessus que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est anti-symétrique. Il reste maintenant à montrer que $\langle w, w\rangle \geq 0$ pour tout $w \in H \otimes K$, avec égalité si et seulement si $w = 0$. Soit $w = \sum_{j=1}^n x_j \otimes e_j$ où les e_j sont orthonormés (une telle représentation existe par le lemme 2.17). Alors on a

$$\langle w, w\rangle = \sum_{i,j} \langle x_j \otimes e_j, x_i \otimes e_i\rangle = \sum_{i,j} \langle x_j, x_i\rangle_H \langle e_j, e_i\rangle_K = \sum_{j=1}^n \|x_j\|_H^2 \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $x_j = 0$ pour chaque j, i.e., avec égalité si et seulement si $w = 0$. □

En général, la norme induite par ce produit scalaire n'est pas complète. On notera désormais par $H \otimes K$ la complétion du produit tensoriel entre H et K par rapport au produit scalaire ci-dessus, alors que le produit tensoriel algébrique (tel que dans la définition 2.13) sera dénoté par $H \odot K$.

Proposition 2.18. *Soit E et F des bases orthonormées de H et K respectivement. Alors $\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$ est une base orthonormée de $H \otimes K$.*

Démonstration. Il est clair que $\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$ est un système orthonormé, et donc il reste à montrer que son span est dense. Comme les éléments de la forme $x \otimes y$ engendrent $H \odot K$, qui est dense dans $H \otimes K$, il suffit de montrer qu'on peut approximer chaque élément de cette forme par des combinaisons linéaires finies de $\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$. Soit $\epsilon > 0$. Choisissons $\delta > 0$ assez petit pour que

$$\delta\|y\|_K + \delta\|x\|_H + \delta^2 \leq \epsilon.$$

Comme E est une base orthonormée de H, il existe des $e_1, \ldots, e_n \in E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\Big\|x - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\Big\|_H \leq \delta.$$

De même, il existe $f_1, \ldots, f_m \in F$ et $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$ tels que

$$\Big\| y - \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i \Big\|_K \leq \delta.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\Big\| x \otimes y - \sum_{i,j} \lambda_j \mu_i e_j \otimes f_i \Big\| &= \Big\| \Big(x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \Big) \otimes y + x \otimes \Big(y - \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i \Big) \\ &\quad - \Big(x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \Big) \otimes \Big(y - \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i \Big) \Big\| \\ &\leq \delta \|y\|_K + \delta \|x\|_H + \delta^2 \leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Voici une application de la proposition précédente.

Exemple 2.19. Soit H un espace de Hilbert et X, un ensemble non vide. Alors $H \otimes \ell^2(X)$ est isométriquement isomorphe à $\ell^2(X, H)$, où

$$\ell^2(X, H) := \Big\{ f : X \to H : \sum_{x \in X} \|f(x)\|_H^2 < \infty \Big\},$$

et le produit scalaire dans cet espace est défini par

$$\langle f, g \rangle_{\ell^2(X,H)} := \sum_{x \in X} \langle f(x), g(x) \rangle_H.$$

En effet, soit E une base orthonormée de H et pour chaque $x \in X$, définissons $\delta_x : X \to \mathbb{C}$ par

$$\delta_x(y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Clairement, $\{\delta_x : x \in X\}$ forme une base orthonormée de $\ell^2(X)$, et donc par la proposition 2.18, l'ensemble $\{e \otimes \delta_x : e \in E, x \in X\}$ forme une base orthonormée de $H \otimes \ell^2(X)$. Ainsi, chaque $v \in H \otimes \ell^2(X)$ possède une unique décomposition de la forme

$$v = \sum_{x \in X} \sum_{e \in E} a_{x,e} e \otimes \delta_x.$$

Pour v de cette forme, on définit $T : H \otimes \ell^2(X) \to \ell^2(X, H)$ par

$$Tv := f_v,$$

où $f_v : X \to H$ est la fonction

$$f_v(x) := \sum_{e \in E} a_{x,e} e.$$

Notons que f_v est bien définie et appartient à $\ell^2(X,H)$ car

$$\sum_{x\in X}\|f_v(x)\|_H^2=\sum_{x\in X}\sum_{e\in E}|a_{x,e}|^2=\|v\|^2_{H\otimes\ell^2(X)}<\infty.$$

Ceci montre aussi que T est une isométrie. Il est clair que T est linéaire. Finalement, si $f\in\ell^2(X,H)$, alors pour tout $x\in X$, $f(x)$ possède une décomposition dans la base E, disons $f(x)=\sum_{e\in E}a_{x,e}e$, et on a

$$\sum_{x\in X}\sum_{e\in E}|a_{x,e}|^2=\sum_{x\in X}\|f(x)\|_H^2=\|f\|^2_{\ell^2(X,H)}<\infty,$$

et donc

$$v:=\sum_{x\in X}\sum_{e\in E}a_{x,e}e\otimes\delta_x$$

définit un élément de $H\otimes\ell^2(X)$ tel que $Tv=f$. Bref, T est surjective, et donc $H\otimes\ell^2(X)$ est bel et bien isométriquement isomorphe à $\ell^2(X,H)$. En particulier, ceci implique que

$$H\otimes\mathbb{C}^n\simeq H^n$$

et

$$H\otimes\mathbb{C}\simeq H.$$

Le prochain résultat est un renforcement du corollaire 2.15, dans le cas des espaces de Hilbert.

Proposition 2.20. *Soit H_1,H_2,K_1 et K_2 des espaces de Hilbert et supposons que $T_1:H_1\to K_1$ et $T_2:H_2\to K_2$ sont des opérateurs bornés. Alors il existe un unique opérateur borné $T_1\otimes T_2:H_1\otimes K_1\to H_2\otimes K_2$ tel que*

$$(T_1\otimes T_2)(x\otimes y)=T_1(x)\otimes T_2(y)$$

pour chaque $x\in H_1,y\in K_1$. De plus, $\|T_1\otimes T_2\|=\|T_1\|\|T_2\|$.

Démonstration. Par le corollaire 2.15, on a déjà l'existence et l'unicité d'une application linéaire $T_1\otimes T_2:H_1\odot K_1\to H_2\odot K_2$. Il suffit alors de montrer que $T_1\otimes T_2$ est borné sur $H_1\odot K_1$ avec $\|T_1\otimes T_2\|=\|T_1\|\|T_2\|$, et on peut alors prolonger par continuité. Supposons tout d'abord que $K_1=K_2$, et que $T_2=I$, l'identité sur K_1. Soit $w\in H_1\odot K_1$. Par le lemme 2.17, w possède une représentation de la forme $w=\sum_{j=1}^n x_j\otimes e_j$, où les e_j sont orthonormés dans K_1. On a alors

$$\|w\|^2=\langle w,w\rangle=\sum_{j=1}^n\|x_j\|_{H_1}^2$$

et

$$\begin{aligned}\|T_1\otimes I(w)\|^2&=\Big\|\sum_{j=1}^n T_1(x_j)\otimes e_j\Big\|^2=\sum_{j=1}^n\|T_1(x_j)\|_{H_2}^2\le\sum_{j=1}^n\|T_1\|^2\|x_j\|_{H_1}^2\\&=\|T_1\|^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $T_1 \otimes I$ est borné, et $\|T_1 \otimes I\| \leq \|T_1\|$. Le même raisonnement montre que si $H_1 = H_2$ et $T_1 = I$, l'identité sur H_2, alors $I \otimes T_2$ est borné et $\|I \otimes T_2\| \leq \|T_2\|$. Ainsi, la composition $(I_{H_2} \otimes T_2)(T_1 \otimes I_{K_1})$ est bornée, avec $\|(I_{H_2} \otimes T_2)(T_1 \otimes I_{K_1})\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$. Mais pour tout $x \in H_1$ et $y \in K_1$, on a

$$(I_{H_2} \otimes T_2)(T_1 \otimes I_{K_1})(x \otimes y) = (I_{H_2} \otimes T_2)(T_1(x) \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y).$$

Par l'unicité dans le corollaire 2.15, il suit que $(I_{H_2} \otimes T_2)(T_1 \otimes I_{K_1}) = T_1 \otimes T_2$, et donc on a $\|T_1 \otimes T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|$. Finalement, pour montrer l'inégalité inverse, prenons $\epsilon > 0$. Alors il existe $x \in H_1$ et $y \in K_1$ de norme 1 tels que

$$\|T_1(x)\| \geq \|T_1\| - \epsilon, \quad \|T_2(y)\| \geq \|T_2\| - \epsilon.$$

Ainsi, on a $\|x \otimes y\| = \|x\|\|y\| = 1$ et

$$\begin{aligned}\|(T_1 \otimes T_2)(x \otimes y)\| &= \|T_1(x) \otimes T_2(y)\| = \|T_1(x)\|\|T_2(y)\| \\ &\geq (\|T_1\| - \epsilon)(\|T_2\| - \epsilon).\end{aligned}$$

Comme ϵ est arbitraire, on conclut que $\|T_1 \otimes T_2\| \geq \|T_1\|\|T_2\|$. $\square$

2.4 Les RKHS à valeurs vectorielles

Nous allons maintenant introduire la notion de RKHS vectoriel. Ceci nous permettra de formuler la propriété de Pick complète pour les RKHS, et nous verrons une condition sur le noyau K qui nous permettra de déterminer quand un RKHS a la propriété de Pick complète. Nous verrons plus tard que les espaces H^2 et $\mathcal{D}$ ont cette propriété.

On commence avec un RKHS H sur X et avec noyau $K : X \times X \to \mathbb{C}$. Soit L un espace de Hilbert quelconque. On peut voir $H \otimes L$ comme un espace de fonctions sur X à valeurs dans L. En effet, tout espace de Hilbert est isomorphe à $\ell^2(S)$ pour un certain ensemble S (S peut être par exemple un ensemble d'indices pour une base orthonormée). Donc $L \simeq \ell^2(S)$ pour un certain ensemble S, et

$$H \otimes L \simeq \ell^2(S, H),$$

par l'exemple 2.19. Donc chaque $F \in H \otimes L$ est de la forme $F = (f_s)_{s \in S}$, où les $f_s \in H$ sont des fonctions de $X \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{s \in S} \|f_s\|_H^2 < \infty$. Alors F est la fonction définie par

$$F(x) := (f_s(x))_{s \in S} \in \ell^2(S) = L.$$

Ceci nécessite par contre de connaître l'ensemble S, et en général, son existence est seulement garantie par le lemme de Zorn. Nous allons donc utiliser une approche un peu différente.

Pour un $F \in H \otimes L$, on définit $F : X \to L$ par

$$F(x) := (E_x \otimes I_L)(F),$$

où $E_x : H \to \mathbb{C}$ est la fonctionnelle d'évaluation en x, et I_L est l'identité sur L. Le produit tensoriel d'opérateurs et défini comme à la section précédente. Notons qu'en fait, $E_x \otimes I_L$ est à valeur dans $\mathbb{C} \otimes L$, mais ce dernier est isomorphe à L. Si $F = h \otimes \ell$, alors

$$F(x) = (E_x \otimes I_L)(h \otimes \ell) = h(x) \otimes \ell = h(x)\ell.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant plus tard.

Lemme 2.21. *Soit $F \in H \otimes L$.*

1. *Pour tout $x \in X$, on a $\|F(x)\|_L \leq \|k_x\|_H \|F\|_{H\otimes L}$.*
2. *Pour tout $x \in X, \ell \in L$, on a $\langle F(x), \ell\rangle_L = \langle F, k_x \otimes \ell\rangle_{H\otimes L}$.*
3. *Si $F(x) = 0$ pour tout $x \in X$, alors $F = 0$.*

Démonstration. 1. On a, par la proposition 2.20,

$$\begin{aligned}\|F(x)\|_L &= \|(E_x \otimes I_L)(F)\|_L \leq \|E_x \otimes I_L\|\|F\|_{H\otimes L} = \|E_x\|\|I_L\|\|F\|_{H\otimes L} \\ &= \|k_x\|_H\|F\|_{H\otimes L}.\end{aligned}$$

2. D'abord, si F est de la forme $F = h \otimes m$, alors

$$\begin{aligned}\langle F(x), \ell\rangle_L &= \langle h(x)m, \ell\rangle_L = h(x)\langle m, \ell\rangle_L = \langle h, k_x\rangle_H \langle m, \ell\rangle_L \\ &= \langle h \otimes m, k_x \otimes \ell\rangle_{H\otimes L} = \langle F, k_x \otimes \ell\rangle_{H\otimes L}.\end{aligned}$$

Par linéarité, on obtient le résultat pour chaque $F \in H \odot L$, et par densité, on obtient le résultat pour chaque $F \in H \otimes L$.

3. Soit $W := \mathrm{span}\{k_x : x \in X\}$. Nous avons vu dans le lemme 1.20 que W est dense dans H. Alors $W \odot L$ est dense dans $H \otimes L$. En effet, pour un élément de la forme $h \otimes m$, il existe une suite $(h_n) \in W$ telle que $h_n \to h$ dans H. On a alors

$$\|h \otimes m - h_n \otimes m\|_{H\otimes L} = \|(h - h_n) \otimes m\|_{H\otimes L} = \|h - h_n\|_H\|m\|_L \to 0.$$

Donc $W \odot L$ contient $H \odot L$ dans sa fermerture, et comme celui-ci est dense, il suit que $W \odot L$ l'est aussi. Finalement, par le point 2, on a, pour tout $x \in X$ et pour tout $\ell \in L$,

$$\langle F, k_x \otimes \ell\rangle_{H\otimes L} = \langle F(x), \ell\rangle_L = 0.$$

Comme $W \odot L$ est dense, il suit que $F = 0$. □

Nous allons maintenant introduire les multiplicateurs pour les RKHS vectoriels.

Définition 2.22. Soit L_1, L_2 des espaces de Hilbert et $\Phi : X \to B(L_1, L_2)$, une application. Pour une fonction $F : X \to L_1$, on définit $\Phi F : X \to L_2$ par

$$\Phi F(x) := \Phi(x)(F(x)).$$

On dit que Φ est un *multiplicateur* si pour chaque $F \in H \otimes L_1$, on a $\Phi F \in H \otimes L_2$. L'ensemble de tous les multiplicateurs est dénoté par $\mathrm{Mult}(H \otimes L_1, H \otimes L_2)$. On définit aussi l'application $M_\Phi : H \otimes L_1 \to H \otimes L_2$ par

$$M_\Phi F := \Phi F.$$

Proposition 2.23. *M_Φ est un opérateur borné.*

Démonstration. Supposons que $F_n \to F$ dans $H \otimes L_1$ et $\Phi F_n \to G$ dans $H \otimes L_2$. Comme les opérateurs $E_x \otimes I_{L_1}$ et $E_x \otimes I_{L_2}$ sont bornés sur $H \otimes L_1$ et $H \otimes L_2$ respectivement, on a, pour tout $x \in X$,

$$F_n(x) = (E_x \otimes I_{L_1})F_n \xrightarrow{L_1} (E_x \otimes I_{L_1})F = F(x),$$
$$\Phi F_n(x) = (E_x \otimes I_{L_2})\Phi F_n \xrightarrow{L_2} (E_x \otimes I_{L_2})G = G(x).$$

D'autre part, on a $\Phi(x) \in B(L_1, L_2)$ pour tout $x \in X$. Ainsi,

$$\Phi F_n(x) = \Phi(x)(F_n(x)) \xrightarrow{L_2} \Phi(x)(F(x)) = \Phi F(x).$$

On a donc $\Phi F(x) = G(x)$ pour tout $x \in X$, et, par le point 3 du lemme 2.21, ceci implique que $\Phi F = G$. Donc M_Φ est borné, par le théorème du graphe fermé. $\square$

Pour un multiplicateur Φ, on peut alors définir sa norme

$$\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}(H\otimes L_1, H\otimes L_2)} := \|M_\Phi\|.$$

On abrégera souvent celle-ci par $\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}}$. Comme pour la proposition précédente, on a un analogue de la proposition 2.4 pour les RKHS vectoriel.

Proposition 2.24. *Pour tout $x \in X, \ell \in L_2$, on a*

$$M_\Phi^*(k_x \otimes \ell) = k_x \otimes \Phi(x)^*\ell.$$

Démonstration. Soit $F \in H \otimes L_1$. Alors par le lemme 2.21, on a

$$\begin{aligned}
\langle M_\Phi^*(k_x \otimes \ell), F\rangle_{H\otimes L_1} &= \langle k_x \otimes \ell, M_\Phi F\rangle_{H\otimes L_2} = \overline{\langle \Phi F, k_x \otimes \ell\rangle}_{H\otimes L_2} \\
&= \overline{\langle \Phi(x)F(x), \ell\rangle}_{L_2} = \overline{\langle F(x), \Phi(x)^*\ell\rangle}_{L_1} \\
&= \overline{\langle F, k_x \otimes \Phi(x)^*\ell\rangle}_{H\otimes L_1} = \langle k_x \otimes \Phi(x)^*\ell, F\rangle_{H\otimes L_1}.
\end{aligned}$$

Ceci tient pour tout $F \in H \otimes L_1$. Donc le résultat suit. $\square$

De même, on a un analogue du théorème sur la caractérisation des multiplicateurs. Nous avons d'abord besoin d'une définition.

Définition 2.25. Soit X un ensemble, L un espace de Hilbert, et $F : X \times X \to B(L)$ une fonction. On dit que F est *semi-définie positive* si pour tout n, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in X$, et pour tout $\ell_1, \ldots, \ell_n \in L$,

$$\sum_{i,j} \langle F(x_i, x_j)\ell_j, \ell_i \rangle_L \geq 0.$$

Autrement dit, l'opérateur à blocs $(F(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ sur $L \otimes \mathbb{C}^n \simeq L^n$ est semi-défini positif. On écrit alors $F \succeq 0$.

Théorème 2.26 (Caractérisation des multiplicateurs vectoriels)**.** *Soit $\Phi : X \to B(L_1, L_2)$ une application. Alors $\Phi \in \mathrm{Mult}(H \otimes L_1, H \otimes L_2)$ avec $\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$ si et seulement si on a $(I_{L_2} - \Phi(x)\Phi(y)^*)K(x,y) \succeq 0$.*

Démonstration. Supposons d'abord que Φ est un multiplicateur de norme plus petite ou égale à 1. Alors $\|M_\Phi^*\| = \|M_\Phi\| = \|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$, et donc par la proposition 2.24, on a, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in X$ et pour tout $\ell_1, \ldots, \ell_n \in L_2$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \langle (I_{L_2} - \Phi(x_i)\Phi(x_j)^*)\ell_j, \ell_i \rangle_{L_2} K(x_i, x_j) \\
&\quad = \sum_{i,j} \langle \ell_j, \ell_i \rangle_{L_2} \langle k_{x_j}, k_{x_i} \rangle_H - \langle \Phi(x_j)^*\ell_j, \Phi(x_i)^*\ell_i \rangle_{L_2} \langle k_{x_j}, k_{x_i} \rangle_H \\
&\quad = \sum_{i,j} \langle k_{x_j} \otimes \ell_j, k_{x_i} \otimes \ell_i \rangle_{H \otimes L_2} - \langle k_{x_j} \otimes \Phi(x_j)^*\ell_j, k_{x_i} \otimes \Phi(x_i)^*\ell_i \rangle_{H \otimes L_2} \\
&\quad = \sum_{i,j} \langle k_{x_j} \otimes \ell_j, k_{x_i} \otimes \ell_i \rangle_{H \otimes L_2} - \langle M_\Phi^*(k_{x_j} \otimes \ell_j), M_\Phi^*(k_{x_i} \otimes \ell_i) \rangle_{H \otimes L_1} \\
&\quad = \Big\| \sum_{j=1}^n k_{x_j} \otimes \ell_j \Big\|_{H \otimes L_2}^2 - \Big\| \sum_{j=1}^n M_\Phi^*(k_{x_j} \otimes \ell_j) \Big\|_{H \otimes L_1}^2 \\
&\quad \geq \Big\| \sum_{j=1}^n k_{x_j} \otimes \ell_j \Big\|_{H \otimes L_2}^2 - \|M_\Phi^*\| \Big\| \sum_{j=1}^n k_{x_j} \otimes \ell_j \Big\|_{H \otimes L_2}^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant la réciproque. Alors, par les trois premières lignes du calcul ci-dessus, on a

$$\sum_{i,j} \langle k_{x_j} \otimes \ell_j, k_{x_i} \otimes \ell_i \rangle_{H \otimes L_2} \geq \sum_{i,j} \langle k_{x_j} \otimes \Phi(x_j)^*\ell_j, k_{x_i} \otimes \Phi(x_i)^*\ell_i \rangle_{H \otimes L_2}.$$

Donc

$$\Big\| \sum_{j=1}^n k_{x_j} \otimes \Phi(x_j)^*\ell_j \Big\|_{H \otimes L_1} \leq \Big\| \sum_{j=1}^n k_{x_j} \otimes \ell_j \Big\|_{H \otimes L_2}.$$

Ainsi, l'application $T : \mathrm{span}\{k_x \otimes \ell, x \in X, \ell \in L_2\} \to H \otimes L_1$ définie par

$$T\Big(\sum_{j=1}^n k_{x_j} \otimes \ell_j \Big) := \sum_{j=1}^n k_{x_j} \otimes \Phi(x_j)^*\ell_j$$

est bien définie et est un opérateur borné avec $\|T\| \leq 1$. Comme le sous-espace

$$\mathrm{span}\{k_x \otimes \ell : x \in X, \ell \in L_2\}$$

est dense dans $H \otimes L_2$, on peut alors prolonger cet opérateur de manière unique à $H \otimes L_2$ au complet avec la même norme.

Soit maintenant $F \in H \otimes L_1$. Bien sûr, on a $T^*F \in H \otimes L_2$. Mais pour tout $x \in X, \ell \in L_2$, on a, par le lemme 2.21,

$$\begin{aligned}\langle T^*F(x), \ell\rangle_{L_2} &= \langle T^*F, k_x \otimes \ell\rangle_{H\otimes L_2} = \langle F, T(k_x \otimes \ell)\rangle_{H\otimes L_1} \\ &= \langle F, k_x \otimes \Phi(x)^*\ell\rangle_{H\otimes L_1} = \langle F(x), \Phi(x)^*\ell\rangle_{L_1} = \langle \Phi(x)F(x), \ell\rangle_{L_2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\Phi F = T^*F \in H \otimes L_2$, et donc Φ est un multiplicateur, et

$$\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} = \|M_\Phi\| = \|T^*\| = \|T\| \leq 1. \qquad \square$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème.

Corollaire 2.27. *Soit $x_1, \dots, x_n \in X$ et $W_1, \dots, W_n \in B(L_1, L_2)$. S'il existe un élément $\Phi \in \mathrm{Mult}(H \otimes L_1, H \otimes L_2)$ tel que $\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$ et $\Phi(x_j) = W_j$ pour tout j, alors l'opérateur à blocs $((I_{L_2} - W_iW_j)K(x_i, x_j))_{1\leq i,j\leq n} : L_2 \otimes \mathbb{C}^n \to L_2 \otimes \mathbb{C}^n$ est semi-défini positif.*

2.5 Noyaux de Pick complets et le théorème de Leech

Par analogie avec les noyaux de Pick, on définit les noyaux de Pick complets comme étant ceux pour lesquels la réciproque du corollaire précédent est vrai, pour tout L_1 et L_2 de dimension finie.

Définition 2.28. On dit que K a la *propriété de Pick complète* (ou bien K est un *noyau de Pick complet*) si pour toute paire d'entiers $s, t \geq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$ et pour toutes matrices $W_1, \dots, W_n$ de taille $s \times t$ satisfaisant

$$((I_{s\times s} - W_iW_j^*)K(x_i, x_j))_{1\leq i,j\leq n} \succeq 0,$$

il existe un $\Phi \in \mathrm{Mult}(H \otimes \mathbb{C}^t, H \otimes \mathbb{C}^s)$ avec $\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$ et $\Phi(x_j) = W_j$ pour tout j.

Bien sûr, tout noyau de Pick complet est un noyau de Pick (il suffit de prendre $s = t = 1$). Cependant, il existe un exemple dû à Quiggin d'un noyau de Pick qui n'est pas un noyau de Pick complet. On peut trouver cet exemple dans sa thèse [14, Section 5.3].

La propriété de Pick complète peut être reformulée d'une autre manière, grâce au théorème suivant.

Théorème 2.29 (McCullough–Quiggin)**.** *Supposons que pour tout $x, y \in X$, on a $K(x,y) \neq 0$. Alors K est un noyau de Pick complet si et seulement si pour tout $z \in X$,*

$$(x,y) \mapsto 1 - \frac{K(x,z)K(z,y)}{K(x,y)K(z,z)} \succeq 0.$$

Nous allons seulement montrer la nécessité ici ; la suffisance sera en fait une conséquence du théorème de Leech que nous verrons plus tard. Il est possible de montrer la suffisance directement ici, voir [1, Théorème 7.6].

Démonstration. Pour simplifier la notation, on écrit $K(x_i, x_j) := K_{ij}$. Il faut donc montrer que pour tout choix de points $x_1, \ldots, x_n \in X$, la matrice

$$\left(1 - \frac{K_{in}K_{nj}}{K_{ij}K_{nn}}\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}$$

est semi-définie positive. Nous allons procéder par induction sur n. Pour $n = 2$, ceci équivaut à montrer que

$$1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}} \geq 0.$$

Ceci découle immédiatement de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. En effet,

$$\begin{aligned} K_{12}K_{21} &= |\langle k_{x_1}, k_{x_2} \rangle|^2 \leq \langle k_{x_1}, k_{x_1} \rangle \langle k_{x_2}, k_{x_2} \rangle \\ &= K_{11}K_{22}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour un certain $n \geq 2$. Soit $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$. Posons

$$g_{ij} := 1 - \frac{K_{in}K_{nj}}{K_{ij}K_{nn}}.$$

Par l'hypothèse d'induction, la matrice $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$ est semi-définie positive. Aussi, on a $g_{in} = g_{nj} = 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Ainsi, la matrice $G := (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est aussi semi-définie positive (en rajoutant une ligne de zéros et une colonne de zéros, la matrice est encore auto-adjointe, et les valeurs propres de la nouvelle matrice sont celles de l'ancienne avec $\lambda = 0$ ajoutée). Il existe alors une matrice W telle que $G = WW^*$. Si on dénote par W_i le vecteur correspondant à la i^e ligne de W, alors on a $g_{ij} = W_i W_j^*$ pour tout i et j. Observons que, pour chaque i, j, on a

$$(1 - W_i W_j^*)K(x_i, x_j) = (1 - g_{ij})K_{ij} = \frac{K_{in}K_{nj}}{K_{nn}}.$$

Cette dernière matrice est semi-définie positive. En effet, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, alors

$$\sum_{i,j} \overline{\lambda_i}\lambda_j \frac{K_{in}K_{nj}}{K_{nn}} = \frac{1}{K_{nn}} \sum_{i,j} \overline{\lambda_i K_{ni}} \lambda_j K_{nj} = \frac{1}{K_{nn}} \Big| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j K_{nj} \Big|^2 \geq 0,$$

car $K_{nn} = \langle k_{x_n}, k_{x_n}\rangle > 0$. Comme K est un noyau de Pick complet, il existe alors un multiplicateur $\Phi \in \mathrm{Mult}(H \otimes \mathbb{C}^n, H \otimes \mathbb{C})$ tel que $\Phi(x_j) = W_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$, avec $\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$. Par la proposition 2.24, on a donc

$$M_\Phi^* k_{x_j} = k_{x_j} \otimes W_j^*.$$

Soit P la projection orthogonale sur $\{k_{x_{n+1}}\}^\perp$, et écrivons

$$\widetilde{k}_{x_j} := Pk_{x_j} = k_{x_j} - \frac{\langle k_{x_j}, k_{x_{n+1}}\rangle}{\langle k_{x_{n+1}}, k_{x_{n+1}}\rangle} k_{x_{n+1}} = k_{x_j} - \frac{K_{n+1,j}}{K_{n+1,n+1}} k_{x_{n+1}}.$$

Alors pour chaque $1 \leq j \leq n$, on a

$$(P \otimes I_n) M_\Phi^* \widetilde{k}_{x_j} = \widetilde{k}_{x_j} \otimes W_j^*.$$

Aussi,

$$\|(P \otimes I_n) M_\Phi^*\| \leq \|P \otimes I_n\| \|M_\Phi^*\| = \|P\| \|I_n\| \|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1.$$

Ainsi, par exactement le même calcul que celui fait dans la preuve du théorème de caractérisation des multiplicateurs vectoriels, la matrice

$$((1 - W_i W_j^*)\langle \widetilde{k}_{x_j}, \widetilde{k}_{x_i}\rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$$

est semi-définie positive. En remplaçant $W_i W_j^*$ par g_{ij}, on trouve, après simplifications,

$$\Big(\frac{K_{in}K_{nj}}{K_{nn}}\Big(1 - \frac{K_{i,n+1}K_{n+1,j}}{K_{ij}K_{n+1,n+1}}\Big)\Big)_{1 \leq i,j \leq n} \geq 0.$$

D'autre part, le calcul fait pour montrer que

$$\Big(\frac{K_{in}K_{nj}}{K_{nn}}\Big)_{1 \leq i,j \leq n} \geq 0$$

s'applique aussi bien à la matrice

$$\Big(\frac{K_{nn}}{K_{in}K_{nj}}\Big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Ainsi, par le théorème de Schur,

$$\Big(1 - \frac{K_{i,n+1}K_{n+1,j}}{K_{ij}K_{n+1,n+1}}\Big) = \Big(\frac{K_{nn}}{K_{in}K_{nj}}\Big) \circ \Big(\frac{K_{in}K_{nj}}{K_{nn}}\Big(1 - \frac{K_{i,n+1}K_{n+1,j}}{K_{ij}K_{n+1,n+1}}\Big)\Big) \geq 0.$$

Ceci complète la démonstration. □

Fixons un $z \in X$ quelconque, et posons $u(x) := K(x,z)/\sqrt{K(z,z)}$. Alors $u(x) \neq 0$ pour tout x, et on a

$$1 - \frac{u(x)\overline{u(y)}}{K(x,y)} = 1 - \frac{K(x,z)K(z,y)}{K(x,y)K(z,z)} \succeq 0.$$

L'expression à gauche est un peu plus facile à manier, et sera notre hypothèse principale pour le théorème de Leech. De toute façon, le théorème impliquera qu'un noyau satisfaisant

$$1 - \frac{u(x)\overline{u(y)}}{K(x,y)} \succeq 0.$$

pour une fonction $u : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est automatiquement un noyau de Pick complet, et donc cette condition est équivalente à celle dans le théorème de McCullough–Quiggin.

Nous sommes maintenant prêts à énoncer un des théorèmes les plus importants de la théorie de l'interpolation de Pick.

Théorème 2.30 (Leech)**.** *Supposons que $K(x,y) \neq 0$ pour tout $x, y \in X$ et qu'il existe une fonction $u : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que*

$$1 - \frac{u(x)\overline{u(y)}}{K(x,y)} \succeq 0. \tag{2.2}$$

Soit $Z \subseteq X$, soit L_1, L_2, L_3 des espaces de Hilbert et soit $A : Z \to B(L_2, L_3)$ et $B : Z \to B(L_1, L_3)$, des applications. Alors les énoncés suivants sont équivalents.

1. *$(A(z)A(w)^* - B(z)B(w)^*)K(z,w) \succeq 0$ sur $Z \times Z$.*
2. *Il existe $\Phi : X \to B(L_1, L_2)$ tel que $\Phi \in \mathrm{Mult}(H \otimes L_1, H \otimes L_2)$, $\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$ et $B(z) = A(z)\Phi(z)$ pour tout $z \in Z$.*

Ce théorème très puissant nous permet d'obtenir immédiatement la réciproque au théorème de McCullough–Quiggin.

Corollaire 2.31. *Supposons que $K(x,y) \neq 0$ pour tout $x, y \in X$, et qu'il satisfait (2.2) pour une certaine $u : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors K est un noyau de Pick complet.*

Démonstration. Étant donné des entiers s, t avec $s, t \geq 1$, on applique le théorème de Leech avec $Z = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $L_1 = \mathbb{C}^t$, $L_2 = \mathbb{C}^s$, $L_3 = \mathbb{C}^s$, $A(x) = I_{s \times s}$ et $B(x_j) = W_j$. □

Bien sûr, ce corollaire implique aussi que K est un noyau de Pick. Bref, si on est capable de montrer que K peut être écrit sous la forme

$$K(x,y) = \frac{u(x)\overline{u(y)}}{1 - F(x,y)}$$

pour une certaine fonction définie positive F, alors K est un noyau de Pick complet, et donc *a fortiori*, un noyau de Pick. Cette condition est assez facile à vérifier lorsqu'on a une formule explicite pour K. Nous verrons plus tard que les noyaux de H^2 et $\mathcal{D}$ ont cette forme, ce qui nous donne une solution complète au problème d'interpolation de Pick pour ces espaces !

Afin de démontrer le théorème de Leech, nous aurons d'abord besoin du lemme suivant.

Lemme 2.32. *Soit L un espace de Hilbert et $F : X \times X \to B(L)$ une fonction semi-définie positive. Alors il existe un espace de Hilbert J et une application $G : X \to B(J, L)$ telle que pour tout $x, y \in X$,*

$$F(x, y) = G(x)G(y)^*.$$

Démonstration. Fixons E, une base orthonormée de L et posons $\tilde{X} := X \times E$. Soit $\tilde{F} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\tilde{F}((x, e), (y, f)) := \langle F(x, y)f, e\rangle_L.$$

Alors $\tilde{F} \succeq 0$. En effet, soit $(x_j, e_j) \in \tilde{X}$ et $\lambda_j \in \mathbb{C}$ pour $1 \leq j \leq n$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \overline{\lambda_i}\lambda_j \tilde{F}((x_i, e_i), (x_j, e_j)) &= \sum_{i,j} \overline{\lambda_i}\lambda_j \langle F(x_i, x_j)e_j, e_i\rangle_L \\ &= \sum_{i,j} \langle F(x_i, x_j)\lambda_j e_j, \lambda_i e_i\rangle_L \geq 0,\end{aligned}$$

car $F \succeq 0$. Par le théorème de Moore, il existe un RKHS J sur $\tilde{X}$ dont le noyau est $\tilde{F}$. Pour $(x, e) \in \tilde{X}$, dénotons par $\tilde{f}_{x,e}$ l'unique élément de J tel que pour tout $g \in J$,

$$g(x, e) = \langle g, \tilde{f}_{x,e}\rangle_J.$$

Fixons $x \in X$, et définissons $T_x : \operatorname{span}(E) \to J$ par

$$T_x\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\Big) := \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{f}_{x,e_j}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\Big\|T_x\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\Big)\Big\|_J^2 = \Big\|\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{f}_{x,e_j}\Big\|_J^2 &= \sum_{i,j} \overline{\lambda_i}\lambda_j \langle \tilde{f}_{x,e_j}, \tilde{f}_{x,e_i}\rangle_J \\ &= \sum_{i,j} \overline{\lambda_i}\lambda_j \tilde{F}((x, e_j), (x, e_i)) = \sum_{i,j} \overline{\lambda_i}\lambda_j \langle F(x, x)e_j, e_i\rangle_L \\ &= \Big\langle F(x, x)\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\Big\rangle_L \\ &\leq \|F(x, x)\|^2 \Big\|\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\Big\|_L^2,\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans la dernière ligne. Ainsi, T_x est borné, et comme $\operatorname{span}(E)$ est dense dans L, et que J est complet, T_x se prolonge à un unique opérateur dans $B(L, J)$, que nous nommerons aussi T_x. On pose $G(x) := T_x^*$. On a $G(x)^*e = \tilde{f}_{x,e}$ pour tout $x \in X$ et $e \in E$, et donc pour tout $x, y \in X$ et $e, f \in E$,

$$\langle G(x)G(y)^*f, e\rangle_L = \langle \tilde{f}_{y,f}, \tilde{f}_{x,e}\rangle_J = \tilde{F}((x, e), (y, f)) = \langle F(x, y)f, e\rangle_L.$$

Il suit que $F(x, y) = G(x)G(y)^*$. $\square$

Remarque. L'espace J n'est pas unique ; voir la remarque après la démonstration du théorème de Leech.

Démonstration du théorème de Leech. Supposons que la condition 2 est satisfaite. Alors pour $z, w \in Z$, on a

$$\begin{aligned}&(A(z)A(w)^* - B(z)B(w)^*)K(z,w)\\&= (A(z)A(w)^* - A(z)\Phi(z)\Phi(w)^*A(w)^*)K(z,w)\\&= A(z)(I_{L_2} - \Phi(z)\Phi(w)^*)K(z,w)A(w)^* \succeq 0,\end{aligned}$$

car $(I_{L_2} - \Phi(z)\Phi(w)^*)K(z,w) \succeq 0$ par le théorème 2.26. Donc la propriété 1 est satisfaite.

Supposons maintenant que la condition 1 est satisfaite. Par le théorème de Moore, il existe un RKHS J_1 sur X dont le noyau est

$$1 - \frac{u(x)\overline{u(y)}}{K(x,y)}.$$

Pour $x \in X$, dénotons par b_x l'unique élément de J_1 tel que pour tout $f \in J_1$, on a $f(x) = \langle f, b_x\rangle_{J_1}$. On a donc

$$1 - \frac{u(x)\overline{u(y)}}{K(x,y)} = \langle b_y, b_x\rangle_{J_1}$$

pour tout $x, y \in X$. En particulier, en prenant $x = y$, on a

$$\|b_x\|_{J_1}^2 = 1 - \frac{|u(x)|^2}{K(x,x)} < 1. \tag{2.3}$$

Ainsi,

$$K(x,y) = \frac{u(x)\overline{u(y)}}{1 - \langle b_y, b_x\rangle_{J_1}}. \tag{2.4}$$

Comme $(A(z)A(w)^* - B(z)B(w)^*)K(z,w) \succeq 0$, le lemme 2.32 implique qu'il existe un espace de Hilbert J_2 et une fonction $G : Z \to B(J_2, L_3)$ tel que pour tout $z, w \in Z$,

$$(A(z)A(w)^* - B(z)B(w)^*)K(z,w) = G(z)G(w)^*.$$

Par (2.4), ceci équivaut à

$$(A(z)A(w)^* - B(z)B(w)^*)u(z)\overline{u(w)} = G(z)G(w)^*(1 - \langle b_w, b_z\rangle_{J_1})$$

pour tout $z, w \in Z$. En réarrangeant les termes de cette équation, ceci nous donne

$$\begin{aligned}u(z)\overline{u(w)}A(z)A(w)^* + \langle b_w, b_z\rangle_{J_1}G(z)G(w)^* &= u(z)\overline{u(w)}B(z)B(w)^*\\&\quad + G(z)G(w)^*\end{aligned}$$

pour tout $z, w \in Z$. Soit $\ell, \ell' \in L_3$. En appliquant les deux membres de l'équation ci-dessus à ℓ' et en prenant le produit scalaire avec ℓ, on obtient

$$\begin{aligned}&\langle \overline{u(w)}A(w)^*\ell', \overline{u(z)}A(z)^*\ell\rangle_{L_2} + \langle b_w, b_z\rangle_{J_1}\langle G(w)^*\ell', G(z)^*\ell\rangle_{J_2}\\&= \langle \overline{u(w)}B(w)^*\ell', \overline{u(z)}B(z)^*\ell\rangle_{L_1} + \langle G(w)^*\ell', G(z)^*\ell\rangle_{J_2},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\langle \overline{u(w)}A(w)^*\ell', \overline{u(z)}A(z)^*\ell\rangle_{L_2} + \langle b_w \otimes (G(w)^*\ell'), b_z \otimes (G(z)^*\ell)\rangle_{J_1\otimes J_2}\\ &= \langle \overline{u(w)}B(w)^*\ell', \overline{u(z)}B(z)^*\ell\rangle_{L_1} + \langle G(w)^*\ell', G(z)^*\ell\rangle_{J_2}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

On définit maintenant

$$M := \operatorname{span}\{(\overline{u(z)}A(z)^*\ell, b_z \otimes (G(z)^*\ell)) : \ell \in L_3, z \in Z\}$$

et

$$N := \operatorname{span}\{(\overline{u(z)}B(z)^*\ell, G(z)^*\ell) : \ell \in L_3, z \in Z\}.$$

Alors M est un sous-espace de $L_2 \oplus (J_1 \otimes J_2)$ et N est un sous-espace de $L_1 \oplus J_2$. On définit ensuite $V : M \to N$ par

$$V((\overline{u(z)}A(z)^*\ell, b_z \otimes (G(z)^*\ell))) := (\overline{u(z)}B(z)^*\ell, G(z)^*\ell),$$

et en prolongeant sur M par linéarité. Si

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\overline{u(z_j)}A(z_j)^*\ell_j, b_{z_j} \otimes (G(z_j)^*\ell_j))$$

est une autre représentation de 0 dans M, alors par (2.5), on a

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\overline{u(z_j)}B(z_j)^*\ell_j, G(z_j)^*\ell_j)\Big\|^2_{L_1\oplus J_2}\\ &= \sum_{i,j}\Big(\langle \overline{u(z_i)}B(z_i)^*\ell_i, \overline{u(z_j)}B(z_j)^*\ell_j\rangle_{L_1} + \langle G(z_i)^*\ell_i, G(z_j)^*\ell_j\rangle_{J_2}\Big)\\ &= \sum_{i,j}\Big(\langle \overline{u(z_i)}A(z_i)^*\ell_i, \overline{u(z_j)}A(z_j)^*\ell_j\rangle_{L_2}\\ &\qquad + \langle b_{z_i} \otimes (G(z_i)^*\ell_i), b_{z_j} \otimes (G(z_j)^*\ell_j)\rangle_{J_1\otimes J_2}\Big)\\ &= \Big\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\overline{u(z_j)}A(z_j)^*\ell_j, b_{z_j} \otimes (G(z_j)^*\ell_j))\Big\|^2_{L_1\oplus(J_1\otimes J_2)} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, V est bien définie, et ce calcul montre aussi que V est une isométrie. On peut étendre V à une isométrie $V : L_2 \oplus (J_1 \otimes J_2) \to L_1 \oplus J_2$ (voir les explications dans la remarque suivant la démonstration). Écrivons V comme une matrice de blocs :

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix},$$

où $V_{ij} : H_j \to K_i$, avec $H_1 = L_2,\ H_2 = J_1 \otimes J_2,\ K_1 = L_1$ et $K_2 = J_2$. Pour $x \in X$, on définit $E_x : J_2 \to J_1 \otimes J_2$ par

$$E_x(v) := b_x \otimes v.$$

Avec la représentation matricielle pour V, on obtient alors le système d'équations

$$\overline{u(z)}V_{11}A(z)^* + V_{12}E_zG(z)^* = \overline{u(z)}B(z)^* \tag{2.6}$$
$$\overline{u(z)}V_{21}A(z)^* + V_{22}E_zG(z)^* = G(z)^* \tag{2.7}$$

pour tout $z \in Z$. Par (2.3), on a

$$\|E_x\| = \|b_x\|_{J_1} < 1,$$

et donc $I_{J_2} - V_{22}E_x$ est inversible pour tout $x \in X$. Par (2.7), on déduit que

$$G(z)^* = (I_{J_2} - V_{22}E_z)^{-1}\overline{u(z)}V_{21}A(z)^*$$

pour tout $z \in Z$. En substituant cela dans (2.6), on obtient

$$\overline{u(z)}V_{11}A(z)^* + V_{12}E_z(I_{J_2} - V_{22}E_z)^{-1}\overline{u(z)}V_{21}A(z)^* = \overline{u(z)}B(z)^*,$$

et après simplifications,

$$(V_{11} + V_{12}E_z(I_{J_2} - V_{22}E_z)^{-1}V_{21})A(z)^* = B(z)^*.$$

Ceci nous suggère de définir $\Phi : X \to B(L_1, L_2)$ par

$$\Phi(x) := (V_{11} + V_{12}E_x(I_{J_2} - V_{22}E_x)^{-1}V_{21})^*.$$

Ainsi, on a $\Phi(z)^*A(z)^* = B(z)^*$, et donc $B(z) = A(z)\Phi(z)$ pour tout $z \in Z$. Il reste à montrer que Φ est un multiplicateur avec $\|\Phi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$. Pour ce faire, nous allons appliquer le théorème de caractérisation des multiplicateurs vectoriels. Il faut alors montrer que pour chaque $x_1, \cdots, x_n \in X$ et pour tout $\ell_1, \cdots, \ell_n \in L_2$, on a

$$\sum_{i,j}\langle (I_{L_2} - \Phi(x_i)\Phi(x_j)^*)\ell_j, \ell_i\rangle_{L_2} K(x_i, x_j) \geq 0.$$

Puisque V est une isométrie, $V^*V = I_{L_2 \oplus (J_1 \otimes J_2)}$. Ainsi, on a les relations suivantes

$$V_{11}^*V_{11} + V_{21}^*V_{21} = I,$$
$$V_{12}^*V_{12} + V_{22}^*V_{22} = I,$$
$$V_{11}^*V_{12} + V_{21}^*V_{22} = 0,$$
$$V_{12}^*V_{11} + V_{22}^*V_{21} = 0.$$

Ainsi, pour $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned}
&I - \Phi(x)\Phi(y)^* \\
&= I - (V_{11}^* + V_{21}^*(I - E_x^* V_{22}^*)^{-1} E_x^* V_{12}^*)(V_{11} + V_{12} E_y (I - V_{22} E_y)^{-1} V_{21}) \\
&= I - V_{11}^* V_{11} - V_{21}^*(I - E_x^* V_{22}^*)^{-1} E_x^* V_{12}^* V_{11} - V_{11}^* V_{12} E_y (I - V_{22} E_y)^{-1} V_{21} \\
&\quad - V_{21}^*(I - E_x^* V_{22}^*)^{-1} E_x^* V_{12}^* V_{12} E_y (I - V_{22} E_y)^{-1} V_{21} \\
&= V_{21}^* V_{21} + V_{21}^*(I - E_x^* V_{22}^*)^{-1} E_x^* V_{22}^* V_{21} + V_{21}^* V_{22} E_y (I - V_{22} E_y)^{-1} V_{21} \\
&\quad - V_{21}^*(I - E_x^* V_{22}^*)^{-1} E_x^* (I - V_{22}^* V_{22}) E_y (I - V_{22} E_y)^{-1} V_{21} \\
&= V_{21}^*(I - E_x^* V_{22}^*)^{-1} [(I - E_x^* V_{22}^*)(I - V_{22} E_y) + E_x^* V_{22}^* (I - V_{22} E_y) \\
&\quad + (I - E_x^* V_{22}^*) V_{22} E_y - E_x^* (I - V_{22}^* V_{22}) E_y](I - V_{22} E_y)^{-1} V_{21} \\
&= V_{21}^*(I - E_x^* V_{22}^*)^{-1} [I - E_x^* E_y](I - V_{22} E_y)^{-1} V_{21}.
\end{aligned}$$

Posons $m_i := (I - V_{22} E_{x_i})^{-1} V_{21} \ell_i$. Alors on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \langle (I_{L_2} - \Phi(x_i)\Phi(x_j)^*)\ell_j, \ell_i \rangle_{L_2} K(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i,j} \langle (I - E_{x_i}^* E_{x_j}) m_j, m_i \rangle_{J_2} K(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i,j} (\langle m_j, m_i \rangle_{J_2} - \langle b_{x_j} \otimes m_j, b_{x_i} \otimes m_i \rangle_{J_1 \otimes J_2}) K(x_i, x_j) \\
&= \sum_{i,j} \langle m_j, m_i \rangle_{J_2} (1 - \langle b_{x_j}, b_{x_i} \rangle_{J_1}) K(x_i, x_j) = \sum_{i,j} \langle m_j, m_i \rangle_{J_2} u(x_i) \overline{u(x_j)} \\
&= \Big\| \sum_{j=1}^n \overline{u(x_j)} m_j \Big\|_{J_2}^2 \geq 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Remarque. Qu'est-ce qui justifie le fait qu'on peut prolonger V à une isométrie sur l'espace $L_2 \oplus (J_1 \otimes J_2)$? D'abord, le fait que V est borné implique qu'il peut être prolongé sans problème à $\overline{M}$, et que ce prolongement demeure une isométrie. Ensuite, on a $L_2 \oplus (J_1 \otimes J_2) = \overline{M} \oplus M^\perp$. En définissant V de sorte qu'il envoie $M^\perp$ sur $N^\perp$ isométriquement, on obtient, pour un élément $v = m_1 + m_2$ où $m_1 \in \overline{M}$ et $m_2 \in M^\perp$,

$$\begin{aligned}
\|V(v)\|^2 &= \|V(m_1) + V(m_2)\|^2 = \|V(m_1)\|^2 + \|V(m_2)\|^2 \\
&= \|m_1\|^2 + \|m_2\|^2 = \|v\|^2.
\end{aligned}$$

Le problème est qu'une isométrie $M^\perp \to N^\perp$ n'existera pas si $M^\perp$ est plus gros que $N^\perp$, dans le sens que la cardinalité d'une base orthonormée de $M^\perp$ est plus grande que celle de $N^\perp$. Pour régler ce problème, il suffit de grossir J_2 en le remplaçant par $J_2 \oplus \ell^2(S)$, où S est un ensemble de grande cardinalité. La seule chose importante sur J_2 est qu'il existe une fonction $G : Z \to B(J_2, L_3)$ telle que pour tout $z, w \in Z$,

$$(A(z)A(w)^* - B(z)B(w)^*)K(z, w) = G(z)G(w)^*.$$

Pour chaque z, on peut voir $G(z)$ comme un élément de $B(J_2 \oplus \ell^2(S), L_3)$ (on définit simplement $G(z)(v) := 0$ pour $v \in \ell^2(S)$). En inspectant les définitions de M et N, on voit que la cardinalité de leurs bases orthonormées ne changera pas si on grossit J_2. Il suffit alors de choisir S de cardinalité strictement plus grande que celles des bases orthonormées de $L_1, L_2, L_3, J_1, \overline{M}$ et $\overline{N}$. On aura alors que la cardinalité des bases orthonormées de $M^\perp$ et $N^\perp$ est la même que celle de J_2, et donc on peut construire une isométrie entre ces deux espaces.

2.6 Le théorème d'Aleman, Hartz, McCarthy et Richter

Nous allons maintenant montrer une autre application du théorème de Leech, soit que chaque fonction dans un RKHS avec la propriété de Pick complète peut s'écrire comme un quotient de multiplicateurs. Le résultat classique pour H^2 (et plus généralement pour la classe de Nevanlinna N) était déjà connu. La preuve classique utilise la caractérisation des fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$ comme étant les intégrales de Poisson par rapport à des mesures positives. Voir [16, Section 17.19] pour plus de détails. Nous présentons la démonstration telle que dans [2].

Théorème 2.33 (Aleman, Hartz, McCarthy, Richter)**.** *Soit H un RKHS sur X avec la propriété de Pick complète, et soit $f \in H$. Alors il existe $\phi, \psi \in \mathrm{Mult}(H)$, avec ψ sans zéros tels que*

$$f = \frac{\phi}{\psi}.$$

Démonstration. Soit K le noyau de H. Comme K est un noyau de Pick complet, il existe $u : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $F : X \times X \to \mathbb{C}$ tels que $F \succeq 0$ et

$$K(z, w) = \frac{u(z)\overline{u(w)}}{1 - F(z, w)}$$

pour tout $z, w \in X$. On peut supposer que $\|f\| \leq 1$. Par le théorème de Moore, on peut trouver un espace de Hilbert J et des $b_z \in J$ $(z \in X)$ tels que pour tout $z, w \in X$,

$$K(z, w) = \frac{u(z)\overline{u(w)}}{1 - \langle b_z, b_w \rangle_J}. \tag{2.8}$$

Dénotons la fonction $z \mapsto b_z$ par b. Alors (2.8) peut s'écrire sous la forme

$$K(z, w) = \frac{u(z)\overline{u(w)}}{1 - b(z)b(w)^*}.$$

On a donc

$$K(z, w)(1 - b(z)b(w)^*) = u(z)\overline{u(w)} \succeq 0,$$

et donc, par le théorème de caractérisation des multiplicateurs, on a que $b \in \mathrm{Mult}(H \otimes J, H \otimes \mathbb{C})$ et $\|b\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$. Soit $\Phi : X \to (\mathbb{C} \oplus J)^*$ définie par

$$\Phi(z) := (1, f(z)b(z))$$

(l'opérateur $\Phi(z)$ agit sur $\mathbb{C} \oplus J$ par multiplication comme vecteur ligne). On a alors

$$\begin{aligned} K(z,w)\Phi(z)\Phi(w)^* &= K(z,w)\begin{pmatrix} 1 & f(z)b(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{f(w)}b(w)^* \end{pmatrix} \\ &= K(z,w)(1 + f(z)\overline{f(w)}b(z)b(w)^*) \\ &= K(z,w) + f(z)\overline{f(w)}K(z,w)b(z)b(w)^* \\ &= K(z,w) + f(z)\overline{f(w)}(K(z,w) - 1) \\ &= K(z,w) + f(z)\overline{f(w)}K(z,w) - f(z)\overline{f(w)} \end{aligned}$$

pour tout $z, w \in X$. Ainsi, on a

$$K(z,w)(\Phi(z)\Phi(w)^* - f(z)\overline{f(w)}) = K(z,w) - f(z)\overline{f(w)} \succeq 0,$$

car $\|f\| \leq 1$. Par le théorème de Leech, il existe $\Psi \in \mathrm{Mult}(H \otimes \mathbb{C}, H \otimes (\mathbb{C} \oplus J))$ avec $\|\Psi\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$ tel que

$$\Phi(z)\Psi(z) = f(z)$$

pour tout $z \in X$. Notons que $\Psi : X \to B(\mathbb{C}, \mathbb{C} \oplus J)$, et donc celui-ci peut s'écrire sous forme matricielle

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \phi(z) \\ \widetilde{\Psi}(z) \end{pmatrix},$$

où $\phi : X \to \mathbb{C}$ et $\widetilde{\Psi} : X \to J$. Observons aussi que $\phi \in \mathrm{Mult}(H)$ et $\widetilde{\Psi} \in \mathrm{Mult}(H \otimes \mathbb{C}, H \otimes J)$. On a

$$f(z) = \Phi(z)\Psi(z) = \begin{pmatrix} 1 & f(z)b(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi(z) \\ \widetilde{\Psi}(z) \end{pmatrix} = \phi(z) + f(z)b(z)\widetilde{\Psi}(z),$$

et donc

$$f(z)(1 - b(z)\widetilde{\Psi}(z)) = \phi(z).$$

Posons $\psi(z) := 1 - b(z)\widetilde{\Psi}(z)$. Comme b et $\widetilde{\Psi}$ sont des multiplicateurs, on a $\psi \in \mathrm{Mult}(H)$. Aussi, $\|\widetilde{\Psi}\|_{\mathrm{Mult}} \leq 1$, et par la démonstration du théorème de Leech, $\|b\|_{\mathrm{Mult}} < 1$. Donc $\|b\widetilde{\Psi}\|_{\mathrm{Mult}} < 1$, et il suit que ψ n'a pas de zéros et

$$f = \frac{\phi}{\psi}. \qquad \square$$

Notons que ce résultat est faux en général si H ne satisfait pas la propriété de Pick. En effet, une telle représentation n'existe pas dans l'espace de Bergman A^2. On peut prendre par exemple une f de la forme

$$f(z) := \prod_{k=1}^{\infty}(1 - 2z^{n_k}),$$

pour une suite de nombres naturels (n_k) qui tend vers ∞ très rapidement. En utilisant l'inégalité $1 + x \leq e^x$ pour $x \geq 0$, on trouve

$$|f(re^{i\theta})| \leq \exp\Big(2\sum_{k=1}^{\infty} r^{n_k}\Big).$$

Par [3, Section 3.2, Lemme 2], il est possible de choisir la suite (n_k) pour faire tendre la série à droite de l'inégalité ci-dessus vers ∞ arbitrairement lentement lorsque $r \to 1$. On peut par exemple la choisir de sorte que

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{n_k} \leq \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{(1-r)^a}\right),$$

pour un $0 < a < 1/2$. Avec ce choix, on a alors

$$\int_{\mathbb{D}} |f(re^{i\theta})|^2 dA(z) \leq 2\pi \int_0^1 \frac{1}{(1-r)^{a/2}} dr = \frac{2\pi}{1-a/2} < \infty,$$

et donc $f \in A^2$.

D'autre part, il est clair que les zéros de f sont les racines n_k-ièmes de $1/2$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. Or, il est bien connu qu'une suite de nombres complexes (z_n) dans $\mathbb{D}$ est la suite des zéros d'une fonction de H^∞ si et seulement si elle satisfait la condition de Blaschke :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$$

(voir [4, 10]). Pour chaque $k \geq 0$, la fonction f possède n_k zéros de module $2^{-1/n_k}$. Un calcul élémentaire à l'aide de la règle de l'Hôpital montre que

$$\lim_{k \to \infty} n_k (1 - 2^{-1/n_k}) = \log 2 \neq 0,$$

et donc la suite des zéros de f ne satisfait pas la condition de Blaschke. Ainsi, il est impossible d'écrire f de la forme $f = g/h$ pour des fonctions $g, h \in H^\infty$, car les zéros de g devraient alors être les mêmes que ceux de f. En fait, le problème de caractériser les suites dans $\mathbb{D}$ qui sont les zéros d'une fonction dans A^2 est un problème difficile qui est encore ouvert à ce jour. Pour en savoir plus, consulter [3, 8].

2.7 Les espaces de fonctions analytiques avec la propriété de Pick complète

Nous allons maintenant revenir à un problème que nous avions mentionné plus tôt, soit le problème d'interpolation de Pick pour les espaces H^2 et $\mathcal{D}$.

Nous allons commencer en généralisant le problème à une plus grande classe d'espaces de fonctions analytiques sur le disque. Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels tels que $\alpha_n > 0$ pour tout n et

$$\limsup_{n \to \infty} \alpha_n^{1/n} = 1.$$

Soit H l'ensemble des fonctions holomorphes $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\alpha_n} < \infty.$$

Pour $f \in H$, on pose

$$\|f\|_H := \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\alpha_n}\Big)^{1/2}.$$

Proposition 2.34. *$\|\cdot\|_H$ est une norme sur H, et, muni de celle-ci, H est un RKHS sur $\mathbb{D}$ avec noyau*

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \overline{w}^n.$$

Démonstration. Pour $f, g \in H$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, on définit

$$\langle f, g\rangle_H := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b_n}}{\alpha_n}.$$

Alors il est facile de vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est un produit scalaire sur H qui engendre la norme $\|\cdot\|_H$. De plus, on remarque que H est isométriquement isomorphe à l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, 1/\alpha_n)$ des suites (a_n) telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\alpha_n} < \infty.$$

En effet, il est clair que l'application qui envoie $f \in H$ à sa suite de coefficients de Taylor dans $\ell^2(\mathbb{N}, 1/\alpha_n)$ est une isométrie. D'autre part, si on a $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N}, 1/\alpha_n)$, alors la suite $(|a_n|^2/\alpha_n)$ est bornée (disons par M), et donc

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} &\le \limsup_{n\to\infty} [(\sqrt{M})^{1/n}(\sqrt{\alpha_n})^{1/n}] \\
&\le \limsup_{n\to\infty} (\sqrt{M})^{1/n} \limsup_{n\to\infty} (\sqrt{\alpha_n})^{1/n} = 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la série entière $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ possède un rayon de convergence d'au moins 1, donc elle définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ appartenant à H. Bref, H et $\ell^2(\mathbb{N}, 1/\alpha_n)$ sont isométriquement isomorphes, et comme ce dernier est complet, il suit que H l'est aussi. Pour $w \in \mathbb{D}$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H$, on a, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|f(w)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{\alpha_n}} |w|^n \sqrt{\alpha_n} \le \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{\alpha_n}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |w|^{2n}\Big)^{1/2} = C\|f\|_H.$$

Notons que $C < \infty$ car le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ est 1, puisque $\limsup_{n\to\infty} (\alpha_n)^{1/n} = 1$. Ainsi, l'évaluation en w est une fonctionnelle linéaire bornée sur H, et donc H est un RKHS sur $\mathbb{D}$. Finalement, si on pose

$$k_w(z) := K(z,w) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \overline{w}^n,$$

alors on a, pour tout $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H$,

$$\langle f, k_w \rangle_H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{\alpha_n \overline{w}^n}}{\alpha_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = f(w).$$

Donc K est bel et bien le noyau de H. $\square$

Pour quelles suites (α_n) le RKHS correspondant H a-t-il la propriété de Pick complète ? Le théorème suivant donne une réponse partielle à cette question.

Théorème 2.35. *Si* $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \nearrow 1$*, alors* H *a la propriété de Pick complète.*

La démonstration de ce théorème est basée sur celle du théorème 7.33 dans [1] et du lemme suivant (voir [1, Lemme 7.38]).

Lemme 2.36 (Kaluza)**.** *Sous la même hypothèse que le théorème 2.35, on a que*

1. $f(\zeta) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n$ *définit une fonction holomorphe sur* $\mathbb{D}$*,*
2. $f(\zeta) \neq 0$ *pour tout* $\zeta \in \mathbb{D}$ *et*
3. *si*
$$1 - \frac{f(0)}{f(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^n,$$
alors $\beta_n \geq 0$ *pour tout* n*.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(0) = 1$. Notre hypothèse sur la suite (α_n) et le critère de D'Alembert impliquent que le rayon de convergence de la série définissant f est 1, et donc f est bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, ce qui démontre le point 1. Comme $f(0) = 1 > 0$, il existe par continuité de f un voisinage N de 0 tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in N$. Ainsi, la fonction $1 - 1/f(\zeta)$ est holomorphe sur N, et donc possède un développement en série de Taylor sur un disque centré à l'origine :

$$1 - \frac{1}{f(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^n.$$

Multiplions les séries de Taylor de f et $1/f$. On obtient alors

$$\Big(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n\Big) = 1.$$

En égalisant les coefficients, on trouve alors le système d'équations

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{n-j}\beta_j = \alpha_n, \quad n \geq 1. \tag{2.9}$$

D'une part, $\beta_1 = \alpha_1 \geq 0$. D'autre part, pour $n \geq 2$, on a

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n-j-1}\Big(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} - \frac{\alpha_{n-j}}{\alpha_{n-j-1}}\Big)\beta_j = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\alpha_{n-1} - (\alpha_n - \beta_n) = \beta_n. \tag{2.10}$$

Comme la suite (α_{n+1}/α_n) est croissante, que les α_j sont plus grands ou égaux à 0 et que $\beta_1 \geq 0$, il suit de (2.10) et l'induction que $\beta_n \geq 0$ pour tout n. Par (2.9) et le fait que $\alpha_0 = f(0) = 1$, on déduit que $\beta_n \leq \alpha_n$ pour tout n. Par le critère de comparaison, le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^n$ est donc au moins 1. Ainsi, par le principe d'identité, la relation

$$1 - \frac{1}{f(\zeta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^n$$

tient partout sur $\mathbb{D}$. Finalement, f ne peut pas avoir de zéros dans $\mathbb{D}$ car sinon, le membre de gauche ci-dessus aurait un pôle en ce zéro, alors que le membre de droite n'a pas de pôle dans $\mathbb{D}$. Ceci démontre 2 et 3. □

Démonstration du théorème 2.35. Par le corollaire 2.31, il suffit de montrer que $K(z,w) \neq 0$ pour tout $z, w \in \mathbb{D}$ et de trouver une fonction $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que

$$1 - \frac{u(z)\overline{u(w)}}{K(z,w)} \succeq 0.$$

Le fait que $K(z,w) \neq 0$ pour tout $z, w \in \mathbb{D}$ suit immédiatement de la partie 2 du lemme de Kaluza appliqué à $\zeta = z\overline{w}$. Finalement, avec $u(z) \equiv \sqrt{\alpha_0}$, on a, par la partie 3 du lemme de Kaluza,

$$1 - \frac{u(z)\overline{u(w)}}{K(z,w)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n \overline{w}^n.$$

Ce dernier est semi-défini positif. En effet, prenons $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ ainsi que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{i,j} \lambda_j \overline{\lambda_i} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z_j^n \overline{z_i}^n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sum_{i,j} \lambda_j z_j^n \overline{\lambda_i z_i^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j^n \Big)^2 \geq 0,$$

car $\beta_n \geq 0$ pour tout n. □

Exemple 2.37. Avec $\alpha_n = 1$ pour tout n, on obtient $H = H^2$. On a bien sûr $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \nearrow 1$, et donc par le théorème 2.35, H^2 a la propriété de Pick complète. Ainsi, en combinant cela avec le théorème de caractérisation des multiplicateurs, on obtient le théorème de Nevanlinna-Pick !

Exemple 2.38. Avec $\alpha_n = 1/(n+1)$, on obtient $H = \mathcal{D}$. Il est facile de vérifier que $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{n+1}{n+2} \nearrow 1$, et donc par le théorème 2.35, $\mathcal{D}$ a la propriété de Pick complète.

Exemple 2.39. Avec $\alpha_n = n+1$, on obtient $H = A^2$. Cependant, on a $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{n+2}{n+1}$, et cette suite n'est pas croissante. Donc le théorème 2.35 ne s'applique pas ici. En fait, on a vu dans l'exemple 2.11 que A^2 n'a même pas la propriété de Pick.

Chapitre 3

Le théorème de Gleason–Kahane–Żelazko

Le théorème de Gleason–Kahane–Żelazko classique donne une caractérisation des fonctionnelles linéaires multiplicatives sur une algèbre de Banach complexe. Dans ce chapitre, nous obtenons des généralisations de ce théorème pour les espaces H^p et l'espace de Dirichlet. Les démonstrations reposent sur le théorème d'Aleman, Hartz, McCarthy et Richter.

Pour la définition et le théorème qui suivent, A désignera une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$ avec élément neutre 1. On supposera que A est normalisé, i.e., $\|1\| = 1$.

Définition 3.1. Un *caractère* sur A est un homomorphisme d'algèbre $\chi : A \to \mathbb{C}$ non nul.

Les caractères jouent un rôle clé dans la théorie des algèbres de Banach et la théorie spectrale. Notons que si χ est un caractère, alors il est trivialement linéaire, et il satisfait les deux propriétés évidentes suivantes

1. $\chi(1) = 1$
2. $\chi(a) \neq 0$ pour tout $a \in A$ qui est inversible.

Ces deux conditions impliquent automatiquement que χ est une fonctionnelle linéaire bornée de norme 1. En effet, supposons qu'il existe $a \in A$ tel que $|\chi(a)| > \|a\|$. Alors l'élément $a/\chi(a)$ est de norme strictement plus petite que 1, et donc $1 - a/\chi(a)$ est inversible. Par la propriété 2, il suit que

$$\chi\left(1 - \frac{a}{\chi(a)}\right) \neq 0.$$

Or, par la propriété 1, on a

$$\chi\left(1 - \frac{a}{\chi(a)}\right) = \chi(1) - \frac{\chi(a)}{\chi(a)} = 0,$$

ce qui nous donne une contradiction. Donc $|\chi(a)| \leq \|a\|$ pour tout $a \in A$, d'où $\|\chi\| \leq 1$. D'autre part, on a $\chi(1) = 1 = \|1\|$, et donc $\|\chi\| = 1$.

Étant donné une fonctionnelle linéaire $\chi : A \to \mathbb{C}$, on a deux conditions nécessaires pour que χ soit un caractère. Le célèbre théorème de Gleason–Kahane–Żelazko nous dit qu'en fait, ces deux conditions sont suffisantes.

Théorème 3.2 (Gleason–Kahane–Żelazko)**.** *Soit $\chi : A \to \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire satisfaisant 1 et 2. Alors χ est un caractère.*

Gleason a obtenu ce résultat dans [7] en 1967, et indépendamment de lui, Kahane et Żelazko ont découvert ce théorème en 1968 dans [9]. Une démonstration simple peut être trouvée dans [15].

Dans [12], les auteurs ont obtenu une généralisation de ce théorème pour les modules. La voici :

Théorème 3.3. *Soit M un A-module à gauche, et soit $S \subseteq M$ un sous-ensemble ayant les propriétés suivantes*

1. *S engendre M en tant que module,*
2. *si $a \in A$ est inversible et $s \in S$, alors $as \in S$ et*
3. *pour tout $s_1, s_2 \in S$, il existe $a_1, a_2 \in A$ tels que $a_1 s \in S$, $a_2 s \in S$ pour tout $s \in S$ et $a_1 s_1 = a_2 s_2$.*

Soit $\Lambda : M \to \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire telle que $\Lambda(s) \neq 0$ pour tout $s \in S$. Alors il existe un unique caractère $\chi : A \to \mathbb{C}$ tel que

$$\Lambda(am) = \chi(a)\Lambda(m)$$

pour tout $a \in A$ et $m \in M$.

Remarque. Le théorème de Gleason–Kahane–Żelazko est un cas particulier de ce résultat (on prend $M = A$ et $S = \{$éléments inversibles de $A\}$). Cependant, le théorème de Gleason–Kahane–Żelazko est utilisé dans la démonstration du théorème 3.3.

Avec ce résultat, on obtient une caractérisation des fonctionnelles linéaires sur H^p qui ne s'annulent pas sur les fonctions sans zéros (H^p est définie comme H^2 mais avec un exposant p à la place ; c'est un espace de Banach, mais un espace de Hilbert seulement lorsque $p = 2$).

Théorème 3.4. *Soit $\Lambda : H^p \to \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire telle que $\Lambda(g) \neq 0$ pour tout $g \in H^p$ qui n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$. Alors il existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $w \in \mathbb{D}$ tels que*

$$\Lambda(f) = cf(w)$$

pour tout $f \in H^p$. En particulier, Λ est automatiquement continue.

Remarque. En fait, il suffit de supposer que $\Lambda(g) \neq 0$ pour toute fonction extérieure g. Rappelons que g est *extérieure* si elle a la forme

$$g(z) = \exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log G(e^{i\theta})d\theta\Big),$$

où G est une fonction non négative sur le cercle telle que $\log G \in L^1(\mathbb{T})$. Voir [4, Chapitre 2] pour plus de détails sur les fonctions extérieures.

L'idée derrière la démonstration de ce théorème est d'appliquer le théorème 3.3 avec $M = H^p$, $A = H^\infty$ et $S = \{\text{fonctions de } H^p \text{ sans zéros sur } \mathbb{D}\}$. Le fait que S satisfait les trois hypothèses du théorème 3.3 repose sur deux propriétés de factorisation clé dans les espaces H^p :

1. Toute fonction $f \in H^p$ peut s'écrire sous la forme $f = Bg$, où B est un produit de Blaschke et $g \in H^p$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$.
2. Toute fonction $f \in H^p$ peut s'écrire sous la forme $f = g/h$ où $g, h \in H^\infty$ et h n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$.

Ainsi, si on remplace H^p par un espace de Banach de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ satisfaisant des propriétés de factorisation similaires, alors le théorème 3.4 devrait être valide pour cet espace aussi.

L'espace que nous avons en tête est $\mathcal{D}$, l'espace de Dirichlet. Nous voulons appliquer le théorème 3.3. Naturellement, nous allons prendre $M = \mathcal{D}$, et $S = \{\text{fonctions de } \mathcal{D} \text{ sans zéros sur } \mathbb{D}\}$. On ne peut pas prendre $A = H^\infty$ par contre, car comme mentionné dans l'exemple 2.8, il n'est pas vrai en général que si $g \in H^\infty$, alors $gf \in \mathcal{D}$ pour tout $f \in \mathcal{D}$. Cependant, cette condition nous suggère de prendre à la place $A = \mathrm{Mult}(\mathcal{D})$, l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{D}$. Alors dans ce cas, tout fonctionne, et on a le résultat suivant.

Théorème 3.5. *Soit $\Lambda : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonctionnelle linéaire telle que $\Lambda(g) \neq 0$ pour tout $g \in \mathcal{D}$ qui n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$. Alors il existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $w \in \mathbb{D}$ tels que*

$$\Lambda(f) = cf(w)$$

pour tout $f \in \mathcal{D}$. En particulier, Λ est automatiquement continue.

Ce théorème figure dans l'article [11] qui a récemment été publié dans le *Journal of Functional Analysis* par l'auteur en collaboration avec Javad Mashreghi et Thomas Ransford. Il s'agit du résultat principal de ce mémoire qui a motivé notre étude des RKHS et des propriétés de l'espace de Dirichlet. Le point essentiel est le fait qu'on puisse représenter une fonction dans $\mathcal{D}$ comme un quotient de deux multiplicateurs, et pour obtenir cela, nous avons eu besoin de la théorie de l'interpolation de Pick. Avant de démontrer le théorème 3.5, nous avons d'abord besoin d'un lemme.

Lemme 3.6. *Soit $f \in \mathcal{D}$ et $w \in \mathbb{D}$. Posons*

$$g(z) := \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

Alors $g \in \mathcal{D}$.

Démonstration. Clairement, g possède une singularité enlevable en w, et donc $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. En particulier, ceci implique que g' est continue sur $\mathbb{D}$, et donc si $r > 0$ est suffisamment petit, alors g' est bornée sur $\overline{D}(w, r)$. Ainsi,

$$g' \cdot 1_{\overline{D}(w,r)} \in L^\infty(\mathbb{D}) \subseteq L^2(\mathbb{D}).$$

D'autre part, pour $z \neq w$, on a

$$g'(z) = \frac{f'(z)(z-w) - (f(z) - f(w))}{(z-w)^2} = \frac{f'(z)}{z-w} - \frac{f(z) - f(w)}{(z-w)^2}.$$

Donc

$$\|g' \cdot 1_{\mathbb{D} \setminus \overline{D}(w,r)}\|_{L^2} \leq \frac{\|f'\|_{L^2}}{r} + \frac{\|f\|_{L^2} + |f(w)|\sqrt{\pi}}{r^2} < \infty,$$

car $f' \in L^2(\mathbb{D})$ (puisque $f \in \mathcal{D}$) et $f \in L^2(\mathbb{D})$ (puisque $\mathcal{D} \subseteq H^2 \subseteq A^2$). Donc $g' \in L^2(\mathbb{D})$, i.e., $g \in \mathcal{D}$. □

Démonstration du théorème 3.5. Comme indiqué plus haut, nous allons appliquer le théorème 3.3 avec $M = \mathcal{D}$, $A = \mathrm{Mult}(\mathcal{D})$ et

$$S = \{\text{fonctions de } \mathcal{D} \text{ sans zéros sur } \mathbb{D}\}.$$

Vérifions que S satisfait les 3 conditions du théorème 3.3.

1. Si $f \in \mathcal{D}$, alors par la formule de changement de variables,

   $$\mathrm{Aire}(f(\mathbb{D})) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z) < \infty.$$

   Ainsi, $\mathcal{D}$ ne contient aucune fonction surjective. Donc étant donné $f \in \mathcal{D}$, on choisit $\lambda \neq 0$ qui n'est pas dans l'image de f. On a alors $f = 1 \cdot (f - \lambda) + \lambda$, et ceci montre que S engendre $\mathcal{D}$.

2. Il est clair qu'un élément inversible de $\mathrm{Mult}(\mathcal{D})$ ne peut pas avoir de zéros, et le produit de deux fonctions sans zéros n'a pas de zéros.

3. Soit $s_1, s_2 \in S$. Par le théorème de Aleman, Hartz, McCarthy et Richter, il existe $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathrm{Mult}(\mathcal{D})$, tous sans zéros sur $\mathbb{D}$, tels que

   $$s_1 = \frac{g_1}{h_1}, \quad s_2 = \frac{g_2}{h_2}.$$

   Posons $a_1 := h_1 g_2$ et $a_2 := h_2 g_1$. Alors $a_1, a_2 \in \mathrm{Mult}(\mathcal{D})$, $a_1 s \in S$ et $a_2 s \in S$ pour tout $s \in S$ (car a_1 et a_2 n'ont pas de zéros sur $\mathbb{D}$), et $a_1 s_1 = a_2 s_2$.

Donc le théorème 3.3 s'applique, et il existe un caractère $\chi : \mathrm{Mult}(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ tel que

$$\Lambda(fg) = \chi(g)\Lambda(f)$$

pour tout $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathrm{Mult}(\mathcal{D})$. On pose $c := \Lambda(1)$ et $w := \chi(u)$, où u est la fonction $u(z) := z$. Notons que $c \neq 0$, car 1 ne s'annule pas. Soit $\lambda \notin \mathbb{D}$. Alors $u - \lambda$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{D}$. Donc

$$0 \neq \Lambda(u - \lambda) = \chi(u - \lambda)\Lambda(1) = c(w - \lambda).$$

Ainsi, $w \neq \lambda$. Ceci est valide pour tout $\lambda \notin \mathbb{D}$. Donc $w \in \mathbb{D}$. Soit maintenant $f \in \mathcal{D}$, et posons

$$g(z) := \frac{f(z) - f(w)}{z - w}.$$

Par le lemme 3.6, $g \in \mathcal{D}$. On a $f = g \cdot (u - w) + f(w) \cdot 1$, et donc

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= \Lambda(g \cdot (u - w) + f(w) \cdot 1) \\ &= \chi(u - w)\Lambda(g) + \chi(f(w) \cdot 1)\Lambda(1) = cf(w). \end{aligned} \qquad \square$$

Une conséquence intéressante du théorème 3.5 est le résultat suivant.

Théorème 3.7. *Soit $T : \mathcal{D} \to \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ une application linéaire telle que pour tout $f \in \mathcal{D}$ sans zéros sur $\mathbb{D}$, Tf n'a pas de zéros sur $\mathbb{D}$. Alors il existe des fonctions holomorphes $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ et $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ telles que pour tout $f \in \mathcal{D}, z \in \mathbb{D}$,*

$$Tf(z) = \psi(z) \cdot f(\phi(z)).$$

Démonstration. Posons $\psi := T(1)$ et $\phi := T(u)/\psi$, où u est la fonction $u(z) = z$. Alors ψ et ϕ sont des fonctions holomorphes, et ψ n'a pas de zéros. Fixons $z \in \mathbb{D}$ et posons

$$\Lambda_z(f) := Tf(z)/\psi(z).$$

Alors Λ_z est une fonctionnelle linéaire qui ne s'annule pas sur les fonctions sans zéros et satisfait $\Lambda_z(1) = 1$. Donc par le théorème 3.5, il existe $w \in \mathbb{D}$ tel que $\Lambda_z(f) = f(w)$ pour tout $f \in \mathcal{D}$. En prenant $f = u$, on trouve

$$\phi(z) = \frac{Tu(z)}{\psi(z)} = \Lambda_z(u) = u(w) = w,$$

et donc l'image de ϕ est contenue dans $\mathbb{D}$. Aussi,

$$Tf(z) = \Lambda_z(f)\psi(z) = f(w)\psi(z) = \psi(z) \cdot f(\phi(z)). \qquad \square$$

Si H est un RKHS de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ avec la propriété de Pick complète, alors toute fonction de H peut s'écrire comme un quotient de deux multiplicateurs, par le théorème de Aleman, Hartz, McCarthy et Richter. Cette propriété implique que 3 est satisfait dans le théorème 3.3, avec $S = \{$fonctions sans zéros sur $\mathbb{D}\}$. Le point 2 du théorème 3.3 est trivialement vérifié aussi. Ainsi, le seul point problématique est le point 1. Pour l'espace de Dirichlet, on a utilisé une astuce pour montrer que S engendre $\mathcal{D}$, soit le fait que $\mathcal{D}$ ne contient aucune fonction surjective. Si c'était le cas pour H aussi, alors le même argument s'appliquerait à H, et on aurait une version des théorèmes 3.5 et 3.7 pour H. Un tel exemple de H est l'espace de Dirichlet à poids surharmonique $\mathcal{D}_w$ borné inférieurement. Il s'agit de l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\mathcal{D}_w(f) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 w(z)dA(z) < \infty,$$

où w est une fonction surharmonique telle que $w(z) \geq c$ sur $\mathbb{D}$, où c est une certaine constante strictement positive. La norme dans cet espace est

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_w} := \mathcal{D}_w(f) + \|f\|^2_{H^2}.$$

Il est clair que

$$\mathcal{D}_w(f) \geq c\mathcal{D}(f),$$

et donc $\mathcal{D}_w \subseteq \mathcal{D}$, et $\mathcal{D}_w$ ne contient pas de fonction surjective. Le fait que $\mathcal{D}_w$ a la propriété de Pick complète (qui est vrai aussi même si on suppose seulement que w est surharmonique et $w(z) > 0$ sur $\mathbb{D}$) est un résultat profond et hautement non-trivial dû à Shimorin (voir [17]). En le prenant pour acquis, on obtient la généralisation des théorèmes 3.5 et 3.7 pour $\mathcal{D}_w$.

Il y a cependant peu d'espaces de fonctions holomorphes intéressants qui n'ont pas de fonction surjective, à cause du théorème suivant (voir [11, Lemme 3.1]).

Théorème 3.8. *Soit X un espace de Banach de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ tel que la convergence dans X implique la convergence localement uniforme. Supposons qu'il existe une fonction $h \in X$ satisfaisant les propriétés suivantes*

1. *h est bornée et non constante,*
2. *$h(0) = 0$ et*
3. *il existe des automorphismes ϕ_n $(n \geq 1)$ de $\mathbb{D}$ tels que $h \circ \phi_n \in X$ pour tout n et $h \circ \phi_n \to 0$ dans X.*

Alors X contient une fonction surjective.

Si $w > 0$ n'est pas bornée inférieurement (i.e., $\inf_{\mathbb{D}} w(z) = 0$), alors $\mathcal{D}_w$ contient des fonctions surjectives. En effet, pour une telle w, il existe une suite (a_n) dans $\mathbb{D}$ telle que $w(a_n) \to 0$. En remplaçant (a_n) par une sous-suite, on peut supposer que $a_n \to a$, pour un certain $a \in \overline{\mathbb{D}}$. On a nécessairement que $a \in \mathbb{T}$, car sinon, par le fait que w est semi-continue inférieurement, on aurait $w(a) \leq \liminf_{n\to\infty} w(a_n) = 0$, ce qui contredit le fait que $w > 0$ sur $\mathbb{D}$. Prenons maintenant $h(z) := z(z-a)$ et $\phi_n(z) := (a_n - z)/(1 - \overline{a_n}z)$. Alors $h \in \mathcal{D}_w$ est bornée et non constante sur $\mathbb{D}$, $h(0) = 0$ et les ϕ_n sont des automorphismes de $\mathbb{D}$. Pour chaque $z \in \mathbb{T} \setminus \{a\}$, on a

$$\phi_n(z) = \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} = a_n \frac{a_n - z}{a_n - |a_n|^2 z} \to a,$$

et $|\phi_n(z)| = 1$. Ainsi, par le théorème de la convergence dominée,

$$\|h \circ \phi_n\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi_n(e^{it})(a - \phi_n(e^{it}))|^2 dt \to 0.$$

D'autre part, $|h'(\zeta)| = |a - 2\zeta| \leq 3$ pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, et donc puisque w est surharmonique,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_w(h \circ \phi_n) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |h'(\phi_n(z))|^2 w(z) dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |h'(\zeta)|^2 w(\phi_n^{-1}(\zeta)) dA(\zeta) \\ &\leq \frac{9}{\pi} w(\phi_n^{-1}(0)) = \frac{9}{\pi} w(a_n) \to 0.\end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème 3.8, $\mathcal{D}_w$ contient une fonction surjective. En particulier, comme H^2 contient $\mathcal{D}_w$, et une telle w existe (par exemple $w(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$ fonctionne), il suit que H^2 contient des fonctions surjectives. On ne peut donc pas utiliser l'argument décrit ci-haut pour montrer le théorème 3.4 dans le cas de H^2. Là, on utilise plutôt le fait que chaque $f \in H^p$ peut s'écrire de la forme $f(z) = B(z)g(z)$, où B est un produit de Blaschke et $g \in H^p$ est une fonction sans zéros. Comme $B \in H^\infty = \mathrm{Mult}(H^2)$, on a bien que l'ensemble des fonctions sans zéros dans H^2 engendre H^2 comme $\mathrm{Mult}(H^2)$-module. On a même qu'une combinaison linéaire avec un seul élément suffit ! Il semble naturel qu'on devrait avoir la généralisation suivante.

Conjecture 3.9. *Soit H un RKHS sur X avec la propriété de Pick complète. Alors chaque $f \in H$ peut s'écrire de la forme $f = gh$, où $g \in \mathrm{Mult}(H)$ et $h \in H$ n'a pas de zéros sur X.*

Cette conjecture demeure ouverte, même dans le cas de l'espace de Dirichlet. Notons que l'on n'a pas de telle factorisation $f = gh$ pour une f dans l'espace de Bergman, pour la même raison qu'une fonction dans A^2 ne peut pas en général être écrite comme un quotient de deux fonctions dans H^∞ ; les zéros de f devraient être les mêmes que ceux de g, et ces derniers satisfont la condition de Blaschke alors que nous avons vu qu'il y a des fonctions dans A^2 dont les zéros ne satisfont pas cette condition.

Conclusion

À la lumière de ce mémoire, on voit que la théorie des RKHS est un outil fort utile et extrêmement puissant dans la théorie de l'interpolation et en analyse complexe. Elle permet de ramener plusieurs problèmes difficiles de ces disciplines à un problème plus simple d'algèbre linéaire, soit de déterminer si une certaine matrice est semi-définie positive. Cette connexion importante entre les fonctions semi-définies positives et les RKHS est donnée par le théorème de Moore.

Le théorème de Leech implique que si le noyau d'un RKHS H possède une forme particulière, alors H est un espace de Pick complet. On peut ainsi obtenir énormément d'information sur divers espaces de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ tels que H^2 et $\mathcal{D}$ grâce à la structure de leur noyau. Par exemple, le théorème d'Aleman, Hartz, McCarthy et Richter stipule que toute fonction dans un espace de Pick complet (dont entre autres H^2 et $\mathcal{D}$) peut être écrite comme le quotient de deux multiplicateurs.

Le théorème de Gleason–Kahane–Żelazko donne une caractérisation simple des fonctionnelles linéaires multiplicatives sur une algèbre de Banach complexe : il s'agit des fonctionnelles linéaires qui valent 1 à l'identité et qui ne s'annulent pas aux éléments inversibles. Nous avons obtenu une version de ce théorème pour l'espace de Dirichlet, caractérisant les fonctionnelles linéaires sur $\mathcal{D}$ qui ne s'annulent pas sur les fonctions sans zéros comme étant les multiples d'évaluation en un point du disque. Le point essentiel de la démonstration est le fait que chaque fonction dans $\mathcal{D}$ peut s'écrire comme un quotient de deux multiplicateurs, et ceci nécessite de passer par la théorie des RKHS et d'établir la propriété de Pick complète de $\mathcal{D}$.

Afin d'obtenir un résultat de ce genre pour d'autres espaces de fonctions analytiques H ayant la propriété de Pick complète, il reste encore un autre point important à établir, soit que l'ensemble des fonctions de H sans zéros engendre H comme $\mathrm{Mult}(H)$-module. Pour l'espace de Hardy, cette propriété se déduit par le fait qu'il est possible de factoriser les zéros d'une fonction dans H^2 dans un produit de Blaschke, alors que pour l'espace de Dirichlet, elle se déduit du fait que $\mathcal{D}$ ne contient pas de fonction surjective. Cette propriété de $\mathcal{D}$ semble être rarement satisfaite pour les espaces de fonctions analytiques classiques. Cependant, on pense que la propriété de factorisation de H^2, i.e. qu'il est possible de sortir les zéros d'une fonction dans un multiplicateur, devrait aussi être vérifiée pour les espaces avec la propriété de Pick complète. Ce problème reste ouvert à ce jour, et il serait une avenue intéressante de recherche pour le futur.

Bibliographie

[1] Jim Agler and John E. McCarthy. *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, volume 44 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] Alexandru Aleman, Michael Hartz, John E. McCarthy, and Stefan Richter. The Smirnov class for spaces with the complete Pick property. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 96(1) :228–242, 2017.

[3] Peter Duren and Alexander Schuster. *Bergman spaces*, volume 100 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[4] Peter L. Duren. *Theory of H^p spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. Academic Press, New York-London, 1970.

[5] Omar El-Fallah, Karim Kellay, Javad Mashreghi, and Thomas Ransford. *A primer on the Dirichlet space*, volume 203 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[6] John B. Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 236 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, first edition, 2007.

[7] Andrew M. Gleason. A characterization of maximal ideals. *J. Analyse Math.*, 19 :171–172, 1967.

[8] Charles Horowitz. Zeros of functions in the Bergman spaces. *Duke Math. J.*, 41 :693–710, 1974.

[9] J.-P. Kahane and W. Żelazko. A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras. *Studia Math.*, 29 :339–343, 1968.

[10] Paul Koosis. *Introduction to H_p spaces*, volume 115 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998. With two appendices by V. P. Havin [Viktor Petrovich Khavin].

[11] Javad Mashreghi, Julian Ransford, and Thomas Ransford. A Gleason–Kahane–Żelazko theorem for the Dirichlet space. *J. Funct. Anal.*, 274(11) :3254–3262, 2018.

[12] Javad Mashreghi and Thomas Ransford. A Gleason-Kahane-Żelazko theorem for modules and applications to holomorphic function spaces. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 47(6) :1014–1020, 2015.

[13] Vern I. Paulsen and Mrinal Raghupathi. *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces*, volume 152 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[14] Peter Quiggin. *Generalisations of Pick's Theorem to Reproducing Kernel Hilbert Spaces*. PhD thesis, Lancaster University, 1994.

[15] M. Roitman and Y. Sternfeld. When is a linear functional multiplicative ? *Trans. Amer. Math. Soc.*, 267(1) :111–124, 1981.

[16] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[17] Serguei Shimorin. Complete Nevanlinna-Pick property of Dirichlet-type spaces. *J. Funct. Anal.*, 191(2) :276–296, 2002.

[18] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-algebras*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. A friendly approach.