Introduction

L'algèbre linéaire est la branche des mathématiques concernant les espaces vectoriels et les applications linéaires entre ces espaces.

C'est l'étude des sous-espaces et leurs intersections en utilisant l'algèbre. L'Algèbre linéaire affecte des vecteurs comme les coordonnées de points dans un espace, de sorte que les opérations sur les vecteurs définissent les opérations sur les points dans l'espace.

L'ensemble des points de coordonnées qui satisfont à une équation linéaire forme un hyperplan dans un espace à n dimensions. Les conditions dans lesquelles un ensemble de n hyperplans se coupent en un seul point est un point important dans l'étude de l'algèbre linéaire.

Une telle enquête est d'abord motivée par un système d'équation linéaire à plusieurs inconnues. Ces équations sont naturellement représentées en utilisant le formalisme des matrices et des vecteurs.

L'algèbre linéaire est au centre de mathématiques à la fois pures et appliquées. Par exemple, l'algèbre abstraite se pose en relaxant les axiomes d'un espace vectoriel, ce qui conduit à un certain nombre de généralisations. L'analyse fonctionnelle étudie la version de dimension infinie de la théorie des espaces vectoriels. Combiné avec le calcul, l'algèbre linéaire facilite la solution des systèmes linéaires d'équations différentielles. Les techniques de l'algèbre linéaire sont également utilisées dans la géométrie analytique, de l'ingénierie, la physique, les sciences naturelles, l'informatique, l'animation par ordinateur, et les sciences sociales (en particulier dans l'économie). Parce que l'algèbre linéaire est une théorie bien développée, des modèles mathématiques non-linéaires sont parfois approchés par les modèles linéaires.

Bref, bien que l'algèbre linéaire est un sujet relativement neuf par rapport à d'autres disciplines mathématiques, ses utilisations sont très répandues.

Le projet vise à donner un bref aperçu de l'histoire de l'algèbre linéaire et ses célèbres résultats dés l’antiquité jusqu’aujourd’hui.

L’histoire de l’algèbre linéaire

I. L’antiquité

I.1 Les initiateurs de l’algèbre linéaire

Il y a environ 4000 ans, le peuple de Babylone savait comment résoudre un système de 2X2 simple des équations linéaires à deux inconnues. Les Babyloniens ont étudié les problèmes qui conduisent à des équations linéaires simultanées et certaines d'entre elles sont conservées dans des tablettes d'argile qui survivent. Par exemple, une tablette babylonienne datant d'environ 300 avant JC contient le problème suivant:

« Il y a deux domaines dont la superficie totale est de 1800 " mètres carrés ". On produit du grain au taux de 2/3 d'un boisseau par " yard carré" tandis que l'autre produit des céréales au taux de 1/2 boisseau par "mètre carré". Si le rendement total est de 1100 boisseaux, qui est la taille de chaque champ ? ».

Résolution :

Soient x et y les inconnues de ce problème.
x : la taille de domaine dans lequel produit du grain.
y : la taille de domaine dans lequel produit la céréale.

On sait que la taille de deux domaines est de 1800 mètres carrés donc
On aura l’équation suivante :

$$x + y = 1800$$

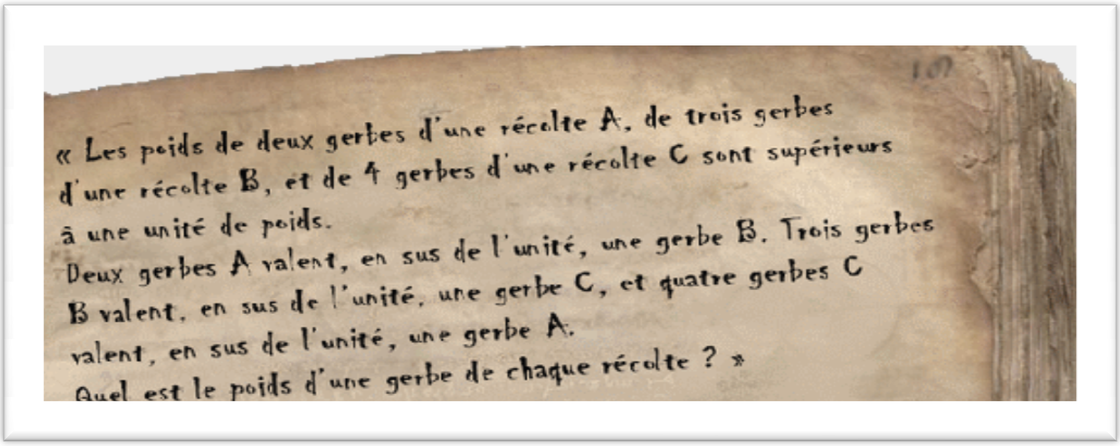
Et la production totale est :

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 1100$$

Donc on aura le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 1100 \\ x + y = 1800 \end{cases}$$

L'équation simple de ax + b = 0 est une question ancienne travaillé par des gens de tous les horizons. Autour de 200 avant JC, les Chinois ont publié *« **neuf chapitres de l'art mathématique** »*, ils ont fait preuve de la capacité à résoudre un système d'équations de 3X 3. Les chinois connaissaient des méthodes pour résoudre les systèmes linéaires proches de notre méthode des combinaisons linéaires. Ils employaient également la méthode de fausse position.


« Les poids de deux gerbes d'une récolte A, de trois gerbes
d'une récolte B, et de 4 gerbes d'une récolte C sont supérieurs
à une unité de poids.
Deux gerbes A valent, en sus de l'unité, une gerbe B. Trois gerbes
B valent, en sus de l'unité, une gerbe C, et quatre gerbes C
valent, en sus de l'unité, une gerbe A.
Quel est le poids d'une gerbe de chaque récolte ? »

Extrait du manuscrit chinois « Neuf chapitres sur l'art du calcul », Ier siècle

Le problème revient aujourd'hui à résoudre le système d'équations :

2x = 1 + y

3y = 1 + z

4z = 1+ x

x, *y* et *z* étant les poids respectifs d'une gerbe de chaque récolte.

La méthode de fausse position : c'est une méthode de calcul pour résoudre des problèmes de premier degré elle est à la fois très simple et très élégante et puis très facile à utiliser. Elle consiste devant un de ces problèmes à imaginer une solution dont nous savons qu'elle est fausse, on regarde ce que ça donne on regarde le résultat qu'on obtient on sait qu'il est faux mais en comparant le résultat faux qu'on a obtenu avec le résultat qu'on devait obtenir on fait la règle de trois et on trouve le résultat.

Donc l'histoire de l'algèbre a commencé dans l'Egypte ancienne et Babylone, où les gens ont appris à résoudre les équations linéaire ($ax = b$) et quadratique ($ax^2 + bx = c$), ainsi que les équations indéterminées telles que $x^2 + y^2 = z^2$, où plusieurs inconnues sont impliquées.

Les mathématiciens d'Alexandrie Héron et Diophante ont continué les traditions de l'Egypte et de Babylone, mais le livre de Diophante « ***Arithmétique*** » a un niveau beaucoup plus élevé et donne de nombreuses solutions surprenantes à des équations indéterminées difficiles.

Le monde islamique lui aussi était intéressé par la résolution des équations, Cette ancienne connaissance était connue comme la science de la restauration et l'équilibrage. (Le mot arabe pour la restauration est al - jabre qui est la racine du mot algèbre.) Au 9ème siècle, par le mathématicien arabe *al –Khawarizmi* qui est d'origine du khawarezm, une province de l'Ouzbékistan.

Le principal ouvrage mathématique d'al Khawarizmi est « ***al kitab al mukhtasar fi hisab al jabr wa-l-muqabala*** ». Rédigé à l'époque d'al Mamoun, l'ouvrage traite des équations du second degré liant les nombres, les racines et les carrés. Al Khawarizmi a l'idée de les classer en six types différents, toujours en phrases comme : Racines et carrés égaux à des nombres, Carrés et nombres égaux à des racines, Racines et nombres égaux à des carrés, autrement dit $ax^2+bx=c$, $ax^2 + c = bx$, $c +bx= ax^2$,avec $a,b,c>0$.

Il montre comment les résoudre sur les exemples : $x^2+10x= 39$, $x^2 + 21 = 10x$, $3x + 4 = x^2$ (il préfère toujours se ramener au cas ou a=1), al khawarizmi explique, dans un problème du type $x^2 + c = bx$, si$(b|2)^2> c$,il y a deux solutions , si $(b|2)^2<c$ le problème est impossible et si $(b|2)^2 = c$,la solution est $\frac{b}{2}$.

Il faut souligner l'importance de cette partie du travail d'al Khawarizmi : c'est la première fois qu'on considère qu'une équation du second degré peut avoir deux racines et le critère d'existence à l'aide du discriminant de l'équation est donné.

Al Khawarizmi passe de l'équation : $4x^2 - 2x + 3 = 3x^2 + 2$

à l'équation : $4x^2 + 3 = 3x^2 + 2x + 2$

Parmi les mathématiciens arabes on peut aussi citer *Omar Khayyâm* qui vivait à l'époque de guerre entre les turcs seldjoukides, convertis à l'Islam sunnite. Il est astronome, mathématicien comme c'étais dit au début philosophe et poète.
Le sujet du traité d'algèbre est l'étude détaillée des équations du troisième degré .Omar Khayyâm cite al khazin (vers 900-971) qui aurait résolu cette équation avec des sections coniques.

Ne considérant que des coefficients strictement positifs, Omar Khayyâm distingue 25 cas dont 11 se ramènent à des équations de degré inférieur (équations de degré inférieur ou égal à 2 et équations sans termes constants). Il reste 14 cas où Omar Khayyâm obtient les solutions positives par intersection de coniques : cercles, parabole ou hyperboles.
Par exemple, pour $x^3 + ax = b$, Omar Khayyâm obtient la solution comme longueur d'un segment construit à l'aide de l'intersection (distincte de 0) de la parabole $y = {x^2}/{\sqrt{a}}$ et du cercle $x\left(x - \frac{b}{a}\right) + y^2 = 0$.

II. La Renaissance :

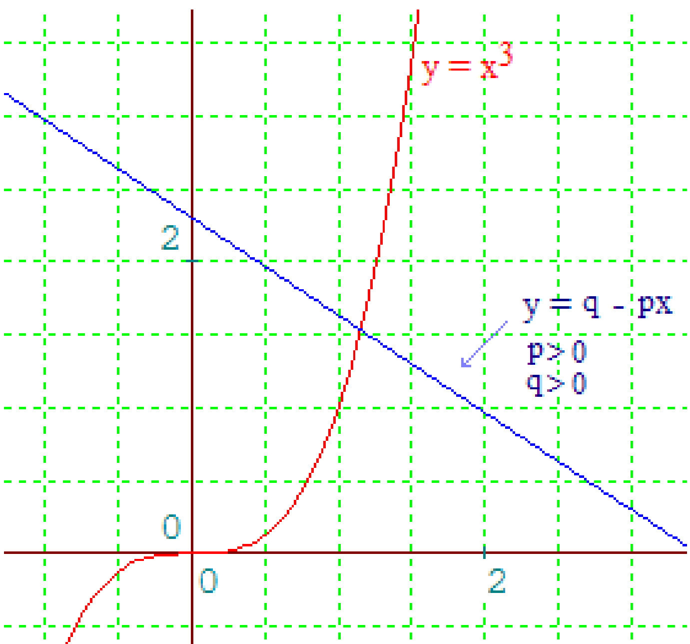
II .1. L'Europe :

II .1 .1 Les équations :

Vers 1450, Johannes Gutenberg invente l'imprimerie, permettant dés le début du XVI siècle de diffuser les documents écrits à une large échelle .A travers l'impression des textes de Léonard De Pise dit *Fibonacci* ou encore de Luca Pacioli, l'Italie a accès à l'essentiel du savoir arabe et les mathématiciens d'alors se passionnent pour l'algèbre et surtout, pour le problème encore laissé ouvert : trouver une méthode générale et exacte de résolution de l'équation cubique.

Nous avons vu qu'Omar Khayyâm n'avait pu trouver de solution algébrique aux équations du troisième degré. Personne ne fit mieux pendant les siècles suivants c'est jusqu'au début du 16ème siècle que Scipione Del Ferro qui y parvint enfin en 1515. Cette découverte qui a attendu si longtemps tient en une simple astuce de calcul .Il ne faut pas oublier qu'à cette époque le calcul littéral n'existait pas et qu'on écrivait, quand les cubes et les inconnues sont égaux à des nombres, une équation de la forme $x^3 + px = q$ et qu'on ne discutait que des exemples numériques.

Une interprétation graphique montre immédiatement que si p et q sont positifs, la cubique x^3 rencontre la droite d'équation y = q - px en un unique point d'abscisse positive.



Les résultats de Scipione Del Ferro seront repris (ou plutôt piratés...) et ses calculs seront améliorés par Tartaglia, puis *Cardan*, *Ferrari* et *Bombelli.*

Jérôme Cardan prend connaissance des travaux de Scipione Del Ferro en 1539 il explique la résolution de l'équation du troisième degré, l'idée de résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$, avec nos notations algébriques, un 0 dans le second membre, toutes choses qui n'existaient pas en 1540 n'est pas difficile à comprendre : on pose
$x = u + v$, avec $3uv + p = 0$, ce qui conduit à un système qui donne u^3 et v^3 comme solutions d'une équation du second degré, puis à la formule :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Une chose est vraiment choquante avec cette formule : quand on cherche à l'appliquer à des équations ayant trois racines réelles, on s'aperçoit que la quantité $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est toujours négative ; la formule propose donc l'extraction d'une racine carrée de nombre négatif, ce qui paraît absurde. Ce cas est appelé le cas irréductible. Quand Cardan donne un exemple de ce cas, " il triche ", il devine l'une des solutions et arrive à une équation du second degré pour les deux autres. Mais il a du y réfléchir, car il propose un exercice très curieux.
Il s'agit de la recherche de deux nombres de somme 10, de produit 40, ce qui conduit à l'équation $x^2 - 10x + 40 = 0$; Cardan reconnait l'impossibilité de satisfaire l'équation, mais propose une solution *sophistiquée* : $5 \pm \sqrt{-15}$.

C'est *Raffaelle Bombelli*, un ingénieur qui s'occupe de grands projets d'assèchement de marais, qui comprend comment manier les nombres complexes. Il introduit le module, le conjugué, les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe.

Le principe de résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$ de Bombelli

Pour l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

On calcule

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

Et on étudie son signe si Δ est positif on pose :

$$u = \sqrt[3]{\frac{27q + 3\sqrt{3}\sqrt{\Delta}}{2}}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{-27q - 3\sqrt{3}\sqrt{\Delta}}{2}}$$

La seule solution réelle est alors $x_1 = \frac{1}{3}(u + v)$

Il existe aussi deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre

$$x_2 = \frac{1}{3}(ju + \bar{j}\,v)$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(\bar{j}u + jv)$$

Où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si Δ est négatif il existe un complexe *u* qui soit une racine cubique de

$$\frac{-27q + 3i\sqrt{3}\sqrt{-\Delta}}{2}$$

L'équation possède alors trois solutions réelles

$$x_1 = \frac{1}{3}(u + \bar{u})$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(ju + \bar{j}\bar{u})$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(j^2u + \bar{j}^2\bar{u})$$

Bombelli montre l'utilité de ces nombres imaginaires pour la résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$

Pour laquelle la formule de Cardan donne : $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, en trouvant que a=2, b=1 son tels que $a + ib = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ en déduisant $x = (2+i) + (2-i) = 4$, ce qui est tout de même plus agréable que la valeur initiale.

La résolution de l'équation cubique, c'est-à-dire du troisième degré par les mathématiciens italiens de la Renaissance découvrent la nécessité d'enrichir l'ensemble des nombres en lui adjoignant des nombres imaginaires. Cette découverte permet la résolution des équations du troisième et quatrième degré.

II-1-2 les systèmes d'équations linéaires

Une autre famille d'équations est traitée par l'algèbre : celle des équations linéaires. Ce sont les équations de la forme $a(x) + b = 0$, où a est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, b un vecteur de F et x une variable qui décrit l'ensemble E. Si les espaces E et F sont de dimension finie, notés n pour E et m pour F, le choix d'une base de E et de F, permet d'exprimer a sous la forme d'une matrice $(a_{j,k})$, x sous la forme d'un vecteur colonne à n coordonnées (x_k) et b d'un vecteur colonne à m coordonnées (b_j).

$$(2) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases}$$

Histoire

A la fin du 17ème siècle. *Lagrange*, a développé ce qui concerne les multiplicateurs de Lagrange, un moyen de « caractériser les fonctions multi variées maxima et minima. Plus de cinquante ans plus tard, *Cramer* a présenté ses idées de systèmes de résolution d'équations linéaires basées sur les déterminants plus de 50 ans après *Leibnitz.* , Cramer n'a fourni aucune preuve pour résoudre un système nxn.

Car En 1750, *Gabriel Cramer* publie son « *Introduction à l'Analyse des Courbes Algébriques* ». Si on exclut une lettre de *Gottfried Wilhelm Leibniz* au Marquis de l'Hôspital, datée du 28 avril 1693, mais qui ne sera publiée et connue qu'en 1850 c'est dans ce texte de *Cramer* qu'on trouve une des premières notations permettant d'écrire un système d'équations linéaires avec des coefficients indéterminés :

Soient *z, y, x, v les inconnues* de système suivant :

$$A1 = Z1z + Y1y + X1x + V1v.$$
$$A2 = Z2z + Y2y + X2x + V2v.$$
$$A3 = Z3z + Y3y + X3x + V3v.$$
$$A4 = Z4z + Y4y + X4x + V4v.$$

Où les lettres *A1, A2, A3, A4.* ne marquent pas comme à l'ordinaire, les puissances d'*A*, mais le premier membre, supposé connu, de la première, seconde, troisième, quatrième. équation. De même *Z1, Z2.* Sont les coefficients de *z* ; *Y1, Y2.* Ceux de *y* ; *X1, X2.* Ceux de *x* ; *V1, V2.* Ceux de *v*. dans la première, seconde, équation la résolution dans le cas n=3, il induit l'énoncé d'une règle générale de calcul permettant de trouver la solution d'un système carré, à l'aide de ce qu'on appellera plus tard les déterminants.

Donc l'algèbre linéaire est devenue plus pertinente depuis l'émergence du calcul, même si c'est l'équation fondamentale de ax + b = 0, remonte à plusieurs siècles.

Dans son texte intitulé, *Sur une « Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes »*, datant de 1750, *Euler* traite du paradoxe dit de *Cramer*. L'étude du problème le mène à remettre en cause le fait qu'un système de n équations linéaires en n inconnues détermine toujours une solution unique, fait qui, semble-t-il, était à l'époque implicitement admis de tous. *Euler* commence par examiner ce problème pour n=2 ; il donne comme exemple les deux équations :

$3x - 2y = 5$ et $4y = 6x - 10$;
Voici ce qu'il en dit :

"On verra qu'il n'est pas possible d'en déterminer les deux inconnues x et y, puisqu'en éliminant l'une x, l'autre s'en va d'elle-même et on obtient une équation identique, dont on est en état de déterminer rien. La raison de cet accident saute d'abord aux yeux, puisque la seconde équation se change en $6x - 4y = 10$, qui n'étant que la première $3x - 2= 5$ doublée, n'en diffère point. "

Il ne s'agit pas ici de croire que ce que dit *Euler* est une révélation pour les mathématiciens de l'époque. Mais le fait que deux équations puissent être identiques, cet "accident" pour reprendre le terme employé par *Euler*, n'était pas digne d'intérêt. Jusque là on n'avait pas cherché à faire une théorie des équations linéaires, mais à mettre en place des techniques pratiques de résolution. C'est en cela que le texte d'*Euler* est une nouveauté, il porte sur les équations linéaires, mais n'a pas pour but d'en donner de résolution, il propose une approche plutôt descriptive et qualitative.

Regardons maintenant de plus près ce que dit *Euler*. Ce qui nous semble important, c'est que, bien qu'elle "saute d'abord aux yeux", ce n'est pas l'identité des équations qui est le critère pour signifier l'indétermination du système, mais une résolution par élimination. Ce qui prouve que la résolution reste la préoccupation majeure.

Pour n=3, *Euler* donne deux exemples : un, où deux équations sont identiques et un autre, où une équation est le double de la somme des deux autres. Dans les deux cas, il n'y a pas de tentative de résolution, et *Euler* conclut :

"Ainsi quand on dit que pour déterminer trois inconnues, il suffit d'avoir trois équations, il y faut ajouter cette restriction, que ces trois équations diffèrent tellement entre elles, qu'aucune ne soit déjà comprise dans les autres."

Pour n=4, *Euler* rajoute que, dans certains cas, deux inconnues peuvent rester indéterminées, et il donne l'exemple des quatre équations suivantes :

$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$
$2x -3y + 5z - 6v - 20 = 0$
$x + 13y - 14z + 15v +16= 0$
$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$

Elles ne vaudraient que deux. Car ayant tiré de la troisième la valeur de

$x = - 13y + 14z - 15v – 16$

Et l'ayant substituée dans la seconde pour avoir :

$y = \frac{33z-3v-52}{29}$ et $x = \frac{-23Z+33V+212}{29}$

Ces deux valeurs de *x* et de *y* étant substituées dans la première et la quatrième équation conduiront à des équations identiques, de sorte que les quantités *z* et *v* resteront indéterminées.
Ici donc, à nouveau, la démonstration repose sur une résolution par élimination et substitution. Euler ne mentionne pas les relations linéaires entre les équations, pourtant assez apparentes : (1) - (2) = (4) et (1) - 2x(2) = (3) (par exemple). Pour finir, il conclut par un énoncé général :

"Quand on soutient que pour déterminer *n* quantités inconnues il suffit d'avoir *n* équations qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette restriction que toutes les équations soient différentes entre elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit renfermée dans les autres."

Donc Euler a mis en lumière l'idée qu'un système d'équations ne doit pas nécessairement avoir une solution.

Le travail initial jusqu'à cette période principalement portait avec le concept de solutions uniques et des matrices carrées où le nombre d'équations correspondait au nombre d’inconnues.

Avec le tournant dans le 19ème siècle *Gauss* a introduit une procédure à suivre pour résoudre un système d'équations linéaires. Ses efforts traitent les équations de nombres et de variables différentes, ainsi que les œuvres traditionnelles pré- 19ème siècle d’*Euler*, *Leibnitz*, et *Cramer*.

Les travaux de *Gauss* sont maintenant résumés « ***la** méthode d’élimination de Gauss* ». La méthode du *« pivot de Gauss »*, ou « *élimination de Gauss-Jordan* », est un algorithme efficace permettant de résoudre lorsque c'est possible un système d'équations linéaires. Contrairement à la méthode de Cramer, le pivot de Gauss ne requiert pas la connaissance des matrices (sauf pour sa démonstration) et donne même des solutions lorsque le système n'est pas de *Cramer*.

Numériquement, l'implémentation sur ordinateur de cet algorithme donne généralement de *mauvais* résultats (même s'il est rapide) : les erreurs d'arrondi se cumulent et faussent généralement la solution. Néanmoins, il n'utilise que des additions et multiplications, ce qui en fait le meilleur du point de vue du rapport simplicité/efficacité disponible en calcul manuel.

Principe de l'élimination de Gauss-Jordan

L'objectif du pivot de Gauss est de ramener le système d'équations linéaires à un système *étagé* (dont on sait qu'il est soluble), c'est-à-dire de la forme « triangulaire » suivante :

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 3 \\ \quad 5y - 3z = 4 \\ \qquad 7z = 2 \end{cases}$$

Il suffit en effet d'en déduire *z* avec la dernière ligne, de le remplacer par sa valeur dans la ligne au-dessus, d'en déduire *y*, de le remplacer par sa valeur dans la ligne au-dessus, d'en déduire *x... et c'est fini ! La résolution est complètement* machinale *une fois que le système est mis sous cette forme.*

Comme cela a été mentionné précédemment, les travaux de Gauss permettent de résoudre des équations linéaires et cela sans utiliser le formalisme des matrices.

Remarque :

Règle de cramer

La règle de Cramer (ou méthode de Cramer) est un théorème nommée d'après Gabriel Cramer qui donne la solution d'un **système de Cramer**, c'est-à-dire un système d'équations linéaires avec autant d'équations que d'inconnues et dont le déterminant de la matrice de coefficients est non nul, en termes de quotients de déterminants.

En calcul, la méthode est moins efficace que la méthode de résolution de Gauss pour des grands systèmes (à partir de 4 équations) dont les coefficients dans le premier membre est explicitement donnée. Cependant, elle est d'importance théorique pour la raison qu'elle donne une expression explicite pour la solution du système, et elle s'applique dans des systèmes où par exemple les coefficients du premier membre dépendent de paramètres, ce qui peut rendre la méthode de Gauss inapplicable.

Principe

Pour pouvoir résoudre un système d'équations, il faut et il suffit que le nombre d'équations (linéairement indépendantes) dont on dispose égale le nombre d'inconnues du problème.

Soit le système de Cramer d'ordre n :

$$AX = B$$

Notons A_i la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa i-ème colonne par B. Alors l'unique solution est le n-uplet $(x1, x2, x3, \dots, xn)$ défini par:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

Exemple: Considérons le système :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad (S)$$

Sa matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0.$$

Le système est donc de Cramer dont la solution est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 5 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = -2.$$

II-1-3 Déterminant et Matrice:

Le **déterminant** fut initialement introduit en algèbre, pour résoudre un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues. Il se révèle un outil très puissant dans de nombreux domaines. Il intervient ainsi dans l'étude des endomorphismes, la recherche de leurs valeurs propres, les propriétés d'indépendance linéaire de certaines familles de vecteurs, mais aussi dans le calcul différentiel, par exemple dans la formule de changement de variables dans les intégrales multiples.

Comme pour de nombreuses opérations, le déterminant peut être défini par une collection de propriétés (axiomes) qu'on résume par le terme « forme n-linéaire alternée ». Cette définition permet d'en faire une étude théorique complète et d'élargir encore ses champs d'applications. Mais le déterminant peut aussi se concevoir comme une généralisation à l'espace de dimension *n* de la notion de surface ou de volume orientés.

Un domaine spécifique de l'algèbre est consacré à l'étude du déterminant et de ses généralisations : il s'agit de l'algèbre multilinéaire.

Les déterminants furent introduits en Occident à partir du XVI^{e} siècle, soit bien avant les matrices, qui n'apparaissent qu'au XIX^{e} siècle. Il convient de rappeler que les Chinois furent les premiers à utiliser des tableaux de nombres et à appliquer un algorithme maintenant connu sous le nom de procédé d'élimination de Gauss-Jordan.

Les Chinois, entre 200 avant JC et 100 avant JC, sont devenus beaucoup plus " proches " des matrices que les Babyloniens. Car ils traitent d'abord un problème similaire à celui des babylonien citer précédemment.

« Il existe trois types de maïs, dont les trois faisceaux de la première, deux de la seconde, et une troisième de la faire 39 mesures. Deux de la première, trois de la deuxième et un de la troisième de la faire 34 mesures. Et l'un de la première, deux de la seconde et de la troisième trois font 26 mesures. Combien de mesures de maïs sont contenus d'un paquet de chaque type? » Extrait de " *neuf chapitres de l'art mathématique* ".

Maintenant l'auteur fait quelque chose de tout à fait remarquable. Il met en place les coefficients du système de trois équations linéaires à trois inconnues que d'une table sur un « panneau de comptage ».

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Les méthodes du 20ème siècle ne considèrent que lignes des matrices plutôt que les colonnes ; mais bien sûr, la méthode est identique.

En multipliant la colonne du milieu par 3 et soustraire la colonne de droite autant de fois que possible, le même se fait alors en soustrayant la colonne de droite autant de fois que possible à partir de 3 fois la première colonne. Cela donne

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

Suivant la colonne la plus à gauche est multipliée par 5, puis la colonne du milieu est soustrait le nombre de fois que possible. Cela donne

0	0	3
0	5	2
36	1	1

99 24 39

à partir de laquelle la solution peut être trouvée pour le troisième type de maïs, puis à la deuxième, puis la première par substitution en arrière. Cette méthode, maintenant connu comme l'élimination de Gauss, ne deviendrait pas bien connue jusqu'au début du 19e siècle.

Dans son sens original, le déterminant *détermine* l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. Il fut introduit dans le cas de la taille 2 par Cardan en 1545 dans son *Ars Magna*, sous forme d'une *règle* pour la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues. Cette première formule porte le nom de *regula de modo*. Ou réglementation de mode et qui s'appelle la mère de règles! Cette règle donne ce qui est essentiellement la règle de Cramer pour la résolution d'un système 2× 2 mais *Cardan* ne fait pas l'étape finale. Donc *Cardan* n'atteint pas à la définition d'un déterminant mais, avec l'avantage du recul, nous pouvons voir que sa méthode ne conduit à la définition.
L'apparition des déterminants de taille supérieure demande ensuite plus de cent ans. Curieusement, le Japonais Kowa Seki et l'Allemand Leibniz en donnèrent les premiers exemples presque simultanément.

En 1683 Seki écrit « ***Méthode de résoudre les problèmes dissimulés*** »qui contient des méthodes matricielles écrites sous forme de tableaux.

Sans avoir un mot qui correspond à «déterminant» Seki introduit les déterminants il a donné des méthodes générales pour les calculer à partir d'exemples. Utilisant son déterminant Seki a réussi à trouver les déterminants de 2× 2, 3×3, 4×4 et 5× 5 matrices et les appliqués à la résolution d'équations, mais pas des systèmes d'équations linéaires.

La première apparition d'un déterminant en Europe est apparue exactement dans la même année 1683. Cette année-là *Leibniz* écrit l'Hôspital. Il a expliqué que le système d'équations

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

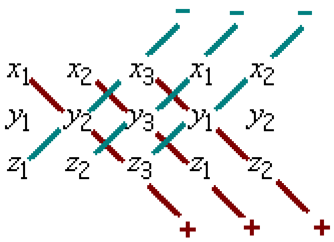
$30 + 31x + 32y = 0$

à une solution car

$$10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 = 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30.$$

Il précise que cette égalité, est la condition de possibilité de résolution du système.
Ceci correspond en fait au développement du déterminant 3×3 avec la régle dite de *SARRUS* .

La règle de Sarrus est une règle pour calculer un déterminant 3×3.
Elle consiste à écrire les 3 colonnes du déterminant, puis à répéter les deux premières. Pour chacune des 6 diagonales qui apparaissent, on effectue le produit des termes qui y apparaissent, puis on ajoute ces quantités en les affublant d'un signe suivant le schéma suivant :



Leibniz étudie de nombreux systèmes d'équations linéaires. En l'absence de notation matricielle, il représente les coefficients inconnus par un couple d'indices : il note ainsi *ij* pour $a_{i,\,j}$. En 1678, il s'intéresse à un système de trois équations et trois inconnues et donne, sur cet exemple, la formule de développement suivant une colonne. La même année, il écrit un déterminant de taille 4, correct aux signes près. Leibniz ne publie pas ces travaux, qui semblent avoir été oubliés avant que les résultats soient redécouverts indépendamment une cinquantaine d'années plus tard.
Leibniz a utilisé le mot «résultante» pour certaines sommes combinatoires des termes d'un déterminant. Il a prouvé des différents résultats sur résultantes, y compris ce qui est essentiellement la règle de *Cramer*. Il savait aussi qu'un facteur déterminant pourrait être étendu en utilisant une colonne, ce qu'on appelle aujourd'hui *l'expansion de Laplace.*

L’expansion de Laplace

L'utilisation la plus importante de cofacteurs est de calculer des grands déterminants de manière récursive. En utilisant ce que l'on appelle une expansion de Laplace, vous pouvez exprimer un facteur déterminant en termes de petits déterminants, ce qui peut à son tour peut être exprimé en termes de petits déterminants, ainsi de suite ... tout en bas à 2 x 2 déterminants, qui sont alors facile à calculer.
Pour trouver l'expansion de Laplace d'un déterminant le long d'une ligne ou colonne.

- Trouver les cofacteurs de chaque numéro dans cette ligne ou colonne
- Multipliez chaque numéro de la ligne ou la colonne par son cofacteur
- Additionnez les résultats.

Il peut être prouvé que, peu importe quelle ligne ou colonne que vous choisissez, vous obtenez toujours le déterminant de la matrice à la suite.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Ainsi que l'étude des systèmes de coefficients d'équations qui l'ont conduit à des déterminants, Leibniz a également étudié les systèmes de coefficients de formes quadratiques qui ont conduit naturellement vers la théorie de la matrice.

Dans les années 1730 *Maclaurin* a écrit " Traité d'Algèbre " mais il n'a pas été publié jusqu'en 1748, deux ans après sa mort. Il contient les premiers résultats publiées sur les déterminants prouvant la règle de *Cramer* pour 2× 2 et 3× 3 systèmes et indiquant comment 4×4 pourrait fonctionner. *Cramer* a donné la règle générale pour n×n systèmes dans un document « ***Introduction à l'analyse des courbes algébriques*** »(1750). Il est né d'un désir de trouver l'équation d'une courbe plane passant par un certain nombre de points donnés. La règle apparaît en annexe au document, mais aucune preuve n'est donnée:

On retrouve la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de permutations de n éléments.

Cramer explique comment on calcule ces termes que les produits de certains coefficients dans les équations et comment on détermine le signe. Il dit aussi comment les n numérateurs des fractions peuvent être trouvés en remplaçant certains coefficients dans ce calcul en termes constants du système.

"L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations et des inconnues étant *n*, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant *n* fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de *n* choses différentes. Chaque terme est composé des lettres ZYXV, &c., toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue, comme exposants, les *n* prémiers chiffres rangés en toutes les maniéres possibles. Ainsi, lorsqu'on a trois inconnues, le dénominateur a [$1 \times 2 \times 3 =$] 6 termes, composés des trois lettres ZYX, qui reçoivent successivement les exposants 123, 132, 213, 231, 312, 321. On donne à ces termes les signes + ou −, selon la Règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un *dérangement*.

Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements: s'il est pair ou nul, le terme aura le signe +; s'il est impair, le terme aura le signe −. Par ex. dans le terme $Z^1Y^2X^3$ il n'y a aucun dérangement; ce terme aura donc le signe +. Le terme $Z^3Y^1X^2$ a aussi le signe +, parce qu'il a deux dérangements, 3 avant 1 et 3 avant 2. Mais le terme $Z^3Y^2X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, et 2 avant 1, aura le signe −.

"Le dénominateur commun étant ainsi formé, on aura la valeur de *z* en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous ces termes, Z en A. Et la valeur d'*y* est la fraction qui a le même dénominateur et pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une manière semblable la valeur des autres inconnues."

Le travail avec les déterminants commençait à devenir connu et utilisé. En 1764 Bézout explique alors ce qu'il propose, c'est-à-dire ce que nous appellerions une règle de construction du déterminant, qu'il énonce sans la démontrer : au lieu de compter pour chaque terme les « dérangements » et en déduire son signe, comme le proposait Cramer, il indique qu’il « réduit le travail à n'exiger d'autre attention que celle qu'il faut pour écrire des lettres ». Ce n'est pas la résolution d’un système quelconque qui intéresse Bézout ; mais, un système homogène étant donné, il se propose de trouver la condition pour qu'il ait des solutions non toutes nulles. Il énonce sa règle dans le lemme 1 : Soient a, b, c, d. les coefficients de ces inconnues dans la première équation.

a', b', c', d', les coefficients de ces inconnues dans la seconde équation

a'', b'', c'', d''. Ceux de la troisième et ainsi de suite.

Formez les deux permutations ab et ba et écrivez ab – ba ; avec ces deux permutations et la lettre c formez toutes les permutations possibles en observant de changer de signe toutes les fois que c changera de place dans ab et la même chose à l'égard de ba ; vous aurez

abc – acb + cab – bac + bca – cba6.

6. On accole c à ab en 3e position, puis on le fait remonter en 2e (avec le signe –), puis en 1e (avec le signe +).

Avec ces six permutations et la lettre d, formez toutes les permutations possibles, en observant de changer de signe à chaque fois que d changera de place dans un même terme ; et ainsi de suite jusqu'à ce que vous ayez épuisé tous les coefficients de la première équation.

Alors conservez les lettres qui occupent la première place ; donnez à celles qui occupent la seconde, la même marque qu'elles ont dans la seconde équation ; à celles qui occupent la troisième, la même marque qu'elles ont dans la troisième équation, et ainsi de suite ; égalez enfin le tout à zéro et vous aurez l'équation de condition cherchée.

Traduit en termes actuels, cet énoncé affirme qu'un système homogène a des solutions non nulles si et seulement si son déterminant est égal à zéro. Bézout met ensuite ces conditions sous la forme :

$ab' – a'b = 0,$

$(ab' – a'b)c'' + (a''b – ab'')c' + (a'b'' – a''b')c = 0 \dots$

Cette nouvelle forme à deux avantages Le premier, de rendre les substitutions à venir, plus commodes ; le deuxième c'est d'offrir une règle encore plus simple pour la formation de ces formules.

En effet, il est facile de remarquer :

1° que le premier terme de l'une quelconque de ces équations, est formé du premier membre de l'équation précédente, multiplié par la première des lettres qu'elle ne renferme point, cette lettre étant affectée de la marque qui suit immédiatement la plus haute de celles qui entrent dans ce même membre ;
2° Le deuxième terme se forme du premier, en changeant dans celui-ci la plus haute marque en celle qui est immédiatement au–dessous.

3° Le troisième, se forme du premier, en changeant dans celui-ci la plus haute marque en celle de deux numéros au–dessous.

4° Le quatrième, se forme du premier, en changeant dans celui-ci la plus haute marque en celle de trois numéros au-dessous .

Il ajoute en corollaire :
Chacun des termes de l'équation de condition a donc essentiellement le même nombre de facteurs, et ces facteurs sont tellement combinés que jamais, dans un même terme, il ne s'y en rencontre deux qui appartiennent à une même inconnue.

Il faut remarquer que la recherche de *Cramer* sur les systèmes linéaires, l'amène à calculer ce que Gauss appellera en 1801 « le déterminant », en tant que dénominateur commun des solutions. Celle de *Bézout*, nous l'avons vu, l'amène au déterminant comme objet dont l'annulation exprime la condition pour qu'un système linéaire homogène ait d'autres solutions que la solution nulle. Il cherche les conditions d'existence de telles solutions pour un système, ce que représente la résultante dans le cas général.
Sa règle d'écriture a deux caractéristiques, elle donne en même temps les termes et leurs signes et elle procède par récurrence sur le nombre d'inconnues et donc de coefficients d'une équation. Il est remarquable que sa règle non démontrée – sans doute obtenue par induction à partir des cas $n = 2, 3, 4$ –, en plus de sa simplicité, donne les mises en forme suivantes que *Bézout* présente très clairement :

1°) $$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = (ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c$$

2°) $$\begin{aligned} & ab'c''d''' - ab'd''c''' + ad'b''c''' - da'b''c''' - ac'b''d''' + ac'd''b''' \\ & - ad'c''b''' + da'c''b''' + ca'b''d''' - ca'd''b''' + cd'a''b''' - dc'a''b''' \\ & - ba'c''d''' + ba'd''c''' - bd'a''c''' + db'a''c''' + bc'a''d''' - bc'd''a''' \\ & + bd'c''a''' - db'c''a''' - cb'a''d''' + cb'd''a''' - cd'b''a''' + dc'b''a''' = \\ & [(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c]d''' \end{aligned}$$

+ [(a'b – ab')c''' + (ab''' – a'''b)c' + (a'''b' – a'b''')c]d''
+ [(a'''b – ab''')c'' + (ab'' – a''b)c''' + (a''b''' – a'''b'')c]d'
+ [(a'b''' – a'''b')c'' + (a'''b'' – a''b''')c' + (a'''b' – a'b'')c''']d.

On reconnaît ce que l'on appelle actuellement le développement d'un déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne, faisant apparaître les déterminants mineurs correspondants.

Calcul d'un déterminant avec ses déterminants mineurs

Le déterminant d'ordre 3 (appellation et notations modernes) se calcule ainsi :

Det (X, X', X'')= $\begin{vmatrix} x & x' x'' \\ y & y' y'' \\ z & z' z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$

On retrouve la formule de *Bézout* ci-dessus pour un système de trois équations à trois inconnues.

Le calcul d'un déterminant d'ordre 4 se fait par induction de la même manière, faisant intervenir des déterminants d'ordre 3, et aboutissant à la formule de Bézout d'ordre 4.

Vandermonde en 1771 introduit le déterminant d'ordre n rencontré, par exemple, dans les problèmes d'interpolation polynomiale. Les a_i désignant des scalaires réels ou complexes ($1 \leq i \leq n$), son expression et sa valeur sont :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & & a_3^{n-1} \\ \dots & & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i)$$

En 1772, *Laplace* a affirmé que les méthodes introduites par *Cramer* et *Bézout* étaient inapplicables et, dans un article où il a étudié les orbites des planètes intérieures, il a discuté la solution des systèmes linéaire des équations sans vraiment calculer, à l'aide de déterminants. Plutôt surprenant

Laplace a utilisé le mot «résultante» pour ce que nous appelons maintenant le déterminant: surprenant puisque c'est le même mot utilisé par *Leibniz* encore *Laplace* doit avoir connaissance de l'œuvre de Leibniz. *Laplace* a donné l'expansion d'un facteur qui porte maintenant son nom.

Le terme «déterminant» a été introduit par *Gauss* dans « ***Disquisitiones arithmeticae*** » (1801) dans lequel Gauss traite les formes quadratiques. Il a utilisé le terme parce que le déterminant détermine les propriétés de la forme quadratique. Cependant, le concept n'est pas le même que celui de notre déterminant. Dans le même ouvrage Gauss présente les coefficients de ses formes quadratiques dans des tableaux rectangulaires. Il décrit la multiplication de matrices et l'inverse d'une matrice dans le contexte particulier des tableaux de coefficients de formes quadratiques.

Élimination de Gauss, qui est apparu dans le texte ***« Neuf chapitres sur l'art mathématique »*** écrite en 200 avant JC, a été utilisée par Gauss dans son travail qui a étudié l'orbite de l'astéroïde Pallas. À partir des observations de Pallas prises entre 1803 et 1809, Gauss a obtenu un système de six équations linéaires à six inconnues. Gauss a donné un procédé systématique pour la résolution de ces équations, qui est précisément l'élimination de Gauss sur la matrice de coefficients.

En 1812 Gauss a utilisé «déterminant» dans son sens moderne. Le travail de *Cauchy* est le plus complet des premiers travaux sur les déterminants. Il désapprouva les résultats antérieurs et il donna de nouveaux résultats à sa propre manière. Dans le document de 1812, le théorème de multiplication pour les déterminants est prouvé pour la première fois, bien que, à la même séance de l'Institut de France, Binet a également lu un papier qui contenait une démonstration du théorème de multiplication, mais il a été moins satisfait que celle donnée par *Cauchy*.

En 1826, *Cauchy*, dans le contexte des formes quadratiques en n variables, a utilisé le terme «tableau» pour la matrice des coefficients.

Pour préparer son enseignement à l'école polytechnique, le mathématicien français *Cauchy Augustin-Louis* reprend, en 1826, le problème de réduction

d'une quadrique à ses axes.
Cauchy étudie une quadrique (surface du second degré) dont le centre est pris comme origine.
Cette quadrique est d'équation : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = K$.

Cherchant à en déterminer les axes principaux, il obtient une équation exprimant qu'un certain déterminant Δ est nul.

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} A-s & F & E \\ F & B-s & D \\ E & D & C-s \end{vmatrix}$$

Ce Δ constitue le **polynôme caractéristique** de la matrice de la forme bilinéaire associée à la forme quadratique.
Il démontre que les racines de ce polynôme (i. e. les valeurs propres de la matrice) sont réelles. Puis il montre que ce polynôme est indépendant de tout changement d'axes rectangulaires (i.e. les transformations semblables ont même valeurs propres).

Donc Cauchy a trouvé les valeurs propres et il a donné les résultats sur une diagonalisation d'une matrice dans le contexte de la conversion d'une forme de la somme des carrés. Cauchy a également introduit l'idée de matrices similaires (mais pas le terme) et il a montré que si les deux matrices sont semblables, ils ont la même équation caractéristique. Il a également prouvé, toujours dans le cadre des formes quadratiques, que chaque matrice symétrique réelle est diagonalisable.
Jacques Sturm a donné une généralisation du problème de valeurs propres dans le cadre des systèmes d'équations différentielles ordinaires. En fait, le concept de valeur propre est apparu 80 années plus tôt, à nouveau dans le travail sur les systèmes d'équations différentielles linéaires, par D'Alembert a travers l'étude de mouvement d'une chaîne avec des masses qui sont attachés à des différents points.

Il convient de souligner que ni Cauchy ni Jacques Sturm n'ont arrivé a faire sortir au monde le concept de matrice. Jacobi en 1830 et puis Kronecker et Weierstrass dans les années 1850 et 1860 ont également examiné les résultats de la matrice mais encore dans un contexte particulier.

Cayley, également en 1841, a publié la première contribution anglaise à la théorie des déterminants. Dans cet article, il a utilisé deux lignes verticales de chaque côté du tableau pour désigner le déterminant, une notation qui est devenue la norme.

Dés ses premiers travaux sur la théorie des nombres en 1844, le mathématicien allemand *Eisenstein Ferdinand Gotthold Max* s'approprie et utilise le symbolisme du tableau de son compatriote *Gauss Carl Friedrich.*

La notation produit de deux matrices.

Eisenstein Ferdinand Gotthold Max va cependant plus loin puisqu'il note la composée des deux substitutions par le symbole commode SxT. Par exemple la composée des substitutions S et T est notée SxT.

$$S = \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \quad \text{soit avec la notation actuelle} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{matrix} d & e & f \\ d' & e' & f' \\ d'' & e'' & f'' \end{matrix}$$

$$S \times T = \begin{matrix} ad + bd' + cd'' & ae + be' + ce'' & af + bf' + cf'' \\ a'd + b'd' + c'd' & a'e + b'e' + c'e'' & a'f + b'f' + c'f'' \\ a''d + b''d' + c''d' & a''e + b''e' + c''e'' & a''f + b''f' + c''f'' \end{matrix}$$

Il précise que l'on peut généraliser ces notions et notations à un nombre quelconque de variables.
En outre il indique qu'il faut distinguer SxT et TxS, la non commutativité du produit matriciel est donc bien acquise.
Le mathématicien Binet Jacques Philippe Marie établit, sans le justifier correctement, l'expression du terme général du produit de deux matrices.

L'inverse d'une matrices.

Puis *Eisenstein* introduit la notation 1/S quand S a un déterminant non nul (la notion d'inverse de matrice).

L'addition de matrices.

Dans un papier de 1850, il indique que l'on peut additionner les substitutions linéaires mais il n'utilise pas cette notion (et ne donne aucune notation associée).

Ferdinand Eisenstein a donc pratiquement défini le concept de matrice carrée, d'ailleurs le mathématicien français *Hermite Charles* utilise à la même époque, dans ses travaux sur la Théorie des nombres et des fonctions abéliennes, le même symbolisme.

On considère souvent le mathématicien anglais *Cayley Arthur* comme l'inventeur des matrices.
Lorsqu'il les introduit, le déterminant existe déjà, noté en tableau depuis 1815 à l'initiative de Cauchy Augustin-Louis.
Cayley Et Sylvester James Joseph travaillent en collaboration pendant près de 30 ans.

Le terme de matrice.

Le terme de matrice est introduit par *Sylvester* en 1850 pour désigner un tableau rectangulaire de nombres (qu'il ne pouvait pas appeler déterminant).

Les matrices, une entité distincte des nombres.

Mais c'est avec la publication par *Cayley*, en 1858, d'un article des Philosophical Transactions (Londres) : « *A memoir on the Theory of Matrices* », que la notion de matrice prend tout son sens.
Les matrices deviennent alors une entité distincte du déterminant et elles sont étudiées indépendamment.

Les résultats de *Hamilton William Rowan* sur les quaternions incitent *Cayley* à discuter des propriétés caractéristiques des opérations sur les matrices (associativité, addition, condition de commutativité de la multiplication). Il traite également le cas des matrices rectangulaires et des cas ou leur produit est possible.

Il considère qu'une matrice n'est qu'une notation abrégée pour une substitution linéaire (comme pour *Gauss*).

Il construit ainsi formellement de nouvelles entités (qui ne sont pas des nombres) et qui ont des propriétés particulières.

Cayley se contente dans un premier temps d'étudier les matrices (2,2) et (3,3), mais affirme que tout cela s'étend aux matrices rectangulaires d'ordre (p, n). Il définit la somme et le produit de deux matrices, la transposée, donne l'inverse d'une matrice (3,3) à l'aide des cofacteurs et introduit les matrices symétriques et antisymétriques.

Equation et polynôme caractéristiques.

Cayley introduit l'équation caractéristique d'une matrice, énonce ce que nous appelons maintenant le théorème de Cayley-Hamilton. Dans ce théorème, il exprime le fait qu'une matrice carrée A vérifie l'équation polynomiale X(A) = 0 ou X(λ) = det (A - λId) est le polynôme caractéristique de A. Il ne démontre ce théorème que pour n=2 et n=3

Il semble toutefois que ce travail soit resté dans l'ombre jusqu'à 1880, tout comme celui de *Laguerre Edmond Nicolas* en 1867 qui propose une théorie des matrices similaire à celle de *Cayley*.

En 1870, la forme canonique Jordan est apparue dans Traité de substitutions et des équations algébriques par Jordan. Il apparaît dans le contexte d'une forme canonique des substitutions linéaires sur le champ fini d'ordre d'un nombre premier.

Frobenius, en 1878, à fait un important travail sur les matrices concernant les substitutions linéaires et les formes bilinéaires bien qu'il ne semblait pas connaître le travail de Cayley. Cependant, il s'est avéré des résultats importants sur les matrices canoniques. Il cite *Kronecker* et *Weierstrass* comme ayant examiné des cas particuliers de ses résultats en 1874 et 1868 respectivement. Frobenius a également prouvé le résultat général qu'une matrice satisfait son équation caractéristique. Ce papier 1878 par Frobenius contient également la définition du rang d'une matrice qu'il a utilisé dans son travail sur les formes canoniques et la définition des matrices orthogonales.

II-1-4 Les espaces vectoriels:

Les principales structures de l'algèbre linéaire sont les espaces vectoriels. Un espace vectoriel sur un corps F est un ensemble V avec deux opérations binaires. les éléments de V sont appelés vecteurs et des éléments de F sont appelés scalaires. La première opération, l'addition de vecteurs, prend tout deux vecteurs v et w et sort un troisième vecteur v + w. La deuxième opération prend tout scalaire a et tout vecteur v et délivre un nouveau vecteur av.

Les opérations d'addition et de multiplication dans un espace vectoriel satisfont les axiomes suivants.

Soient u, v et w des vecteurs arbitraires en V, et un scalaires b dans F.

Les axiomes :

Associativité de l'addition u + (v + w) = (u + v) + w

Commutativité de plus u + v = v + u

Élément d'identité de plus il existe un élément 0 ∈ V , appelé le vecteur nul , tel que v + 0 = v pour tout v ∈ V.

Des éléments d'addition inverse Pour chaque v ∈ V , il existe un élément -v ∈ V , appelé inverse additif de v, tel que v + (-v) = 0

Distributivité de la multiplication scalaire par rapport à l'addition de vecteur a (u + v) = au + av

Distributivité de la multiplication scalaire par rapport à l'addition de domaine (a + b) v = av + bv

Compatibilité de la multiplication scalaire avec le champ multiplication un (bv) =(ab) v

Élément de l'identité de la multiplication scalaire 1v = v , où 1 désigne l'identité multiplicatif dans F.

Éléments d'un vecteur général espace V peuvent être des objets de toute nature, par exemple, les fonctions polynômes, des vecteurs ou des matrices. L'algèbre linéaire est préoccupé par l'étude des propriétés communes de tous les espaces vectoriels.

STRUCTURES ALGEBRIQUES

Groupes finis

La classification des groupes finis est une vaste question, encore objet de recherche. Si le groupe contient un petit nombre d'éléments, les théorèmes de *Sylow* peuvent suffire pour en déterminer la structure.

Une méthode beaucoup plus puissante est nécessaire dans le cas général. *Georg Frobenius*, à la suite de travaux de *Richard Dedekind*, développe une nouvelle théorie en 1896. Elle se fonde sur l'idée que l'ensemble des symétries d'un espace vectoriel possède une structure de groupe. Il est toujours possible de *représenter* un groupe fini par des symétries bien choisies sur un espace vectoriel de dimension suffisante. Un groupe est ainsi incarné par des transformations géométriques simples. Une telle incarnation prend le nom de *représentation d'un groupe*.

Anneau

Un exemple célèbre d'anneau disposant aussi d'une structure d'espace vectoriel est celui des polynômes à coefficients dans un corps. Cet espace vectoriel, de dimension infinie, est largement utilisé en algèbre linéaire, à travers par exemple le polynôme minimal ou caractéristique.

Le morphisme canonique entre les polynômes et les applications linéaires d'un espace vectoriel est à l'origine d'une structure d'algèbre qui est un anneau, si la multiplication externe est *oubliée*.
Cette méthode permet d'élucider la structure de certains anneaux. Tout anneau est un espace vectoriel sur ceux de ses sous-anneaux qui sont des corps. L'espace vectoriel ressemble à la structure développée par *Grassman*.

Cette remarque est utilisée au début du XXe siècle, en particulier par *Emil Artin et Emmy Noether,* pour élucider cette structure dans le cas des anneaux artiniens et noethériens, qui sont des copies de sous-algèbres sur un espace vectoriel construit sur sous-anneau qui s'avère être un corps.

Un exemple est la généralisation d'un théorème de *Wedderburn* par Artin et portant maintenant le nom de théorème d'Artin-Wedderburn. Il est important en algèbre non commutative. Ce théorème permet, par exemple, de construire le corps des quaternions à l'aide d'une représentation du groupe associé sur un espace vectoriel réel de dimension 4.

Théorie de Galois

La théorie de Galois contient de nombreux exemples d'espaces vectoriels. Elle consiste à étudier un corps comme un espace vectoriel sur un sous-corps. Ainsi chaque sous-corps permet de considérer la structure initiale comme un espace vectoriel particulier. Un exemple d'application est celui des figures constructible à la règle et au compas. Ces points forment un corps disposant d'une structure d'espace vectoriel sur les nombres rationnels.

Il est de dimension infinie et, pour chaque point, le plus petit sous-corps le contenant est de dimension finie égale à une puissance de 2. Un tel sous-corps est appelé une tour d'extensions quadratiques. Cette propriété de ces espaces vectoriels permet de résoudre d'antiques conjectures comme la duplication du cube, la trisection de l'angle ou la construction d'un polygone régulier.

L'exemple historique de la théorie est celui de la résolution d'une équation polynomiale. Le théorème d'*Abel* donne une condition nécessaire et suffisante de résolution par radicaux.

Les espaces vectoriels utilisés ont pour éléments ceux du plus petit corps L contenant tous les coefficients du polynôme ainsi que ses racines et le corps sous-jacent et un sous-corps K du premier contenant tous les coefficients. Le groupe de Galois est composé des automorphismes du corps L et laissant invariant le corps K.