Table des matières

1 Introduction

Le calcul intégral trouve son origine et sa motivation dans les problèmes géométriques du calcul des aires des figures plans curvilignes, des volumes des corps solides ronds, etc. Habituellement on interprète l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles comme l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction. L'idée de Riemann a été de repartir de cette évaluation de l'aire en montrant qu'elle pouvait se faire même pour les fonctions non continue. bien que la théorie d'intégration de Riemann permet de calculer l'intégrale d'une très grande classe de fonctions et elle possède de nombreux atouts dont : la facilité de construction, interprétation visuelle immédiate, puissance d'utilisation (toutes les fonctions usuelles sont Riemann intégrable, théorèmes puissants) mais elle a aussi d'autres inconvénients, car on ne peut intégrer que des fonctions bornées, et les théorèmes sont souvent disponibles sous des hypothèses souvent trop fortes. Deux types de théorèmes sont peu satisfaisants : les théorèmes d'intégration d'une suite de fonction, le théorème fondamental de l'analyse.

Le premier inconvénient a été résolu par une autre théorie d'intégration fondée par Lebesgue en 1901, cette théorie est développée à partir de la théorie de la mesure introduite par Borel. Un atout supplémentaire de cette théorie concerne sa généralisation à des espaces abstraits. L'intégrale de Lebesgue a marqué un net progrès par rapport à l'intégrale de Riemann. Elle s'est révélée capable d'intégrer une classe plus étendue de fonctions et a résolu le problème des primitives pour les fonctions bornées. Elle a permis aussi d'énoncer des théorèmes de convergence très efficaces. Elle Concède néanmoins plusieurs inconvénients : la mise en place d'une théorie lourde ou l'intuition est souvent prise en défaut, la difficulté d'intégrer certaines fonctions oscillantes, elle ne peut intégrer toutes les fonction dérivées et le théorème fondamental de l'analyse n'est pas satisfaisant.

Dans les années soixante, Kurzweil et Henstock ont présentés, séparément, une autre théorie d'intégration plus puissante que celle de Lebesgue, il s'agit d'une généralisation de la théorie de Riemann. Bien que la définition soit un peu plus complexe, elle garde l'aspect intuitif de l'intégrale de Riemann tout en résolvant les problèmes de la théorie de Lebesgue. Dans mon mémoire j'ai consacré les deux premiers chapitres aux théories de Riemann et de Lebesgue. Le troisième chapitre sera consacré au sujet principal de mémoire : L'intégrale de Kurzweil-Henstock. ses propriétés, ses résultats et les théorèmes de convergence assurés par cet intégrale . Le dernier paragraphe sera une étude comparative des trois théories précitées, en donnant quelques exemples des fonctions intégrables au sens de l'intégrale de Kurzweil-Henstock sans l'être au sens des deux intégrales de Riemann et de Lebesgue.

2 Intégrale de Riemann

2.1 Construction

2.1.1 Intégrale de Riemann définie à partir des fonctions en escalier

Dans toute la suite, $[a, b]$ désigne un intervalle fermé borné dans $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a, b]$, toute suite finie de points du type $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

Définition 2.1. Une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est appelée fonction en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{k-1}, x_k[$, $k = 1, \ldots, n$.

Remarque 2.1. Si on désigne par $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble A définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases},$$

alors une fonction en escalier f peut s'écrire sous la forme suivante

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{]x_{k-1}, x_k[}, \quad \text{et de valeurs} \quad f(x_i) \quad \text{aux points de subdivision.}$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Pour chaque subdivision $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ associée à f, posons

$$I(f, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k.$$

où c_k désigne la valeur constante de f sur l'intervalle ouvert $]x_{k-1}, x_k[$. Alors $I(f, \Delta)$ ne dépend que de f et non du choix de la subdivision Δ associée à f.

Remarque 2.2. Toute fonction en escalier ainsi définie sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

En effet pour tout x dans $[a, b]$, $f(x)$ appartient à l'ensemble
$\{c_1, \ldots, c_n\} \cup \{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ qui est borné. Alors f est bornée sur $[a, b]$.

Définition 2.2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'élément de $\mathbb{R}$, noté $\int_a^b f(x)dx$ et défini par

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k$$

où $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ désigne une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ associée à f et c_k la valeur constante de f sur l'intervalle ouvert $]x_{k-1}, x_k[$.

Définition 2.3 (Intégrale d'une fonction numérique)**.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un couple (g, h) de fonctions en escalier sur $[a, b]$, vérifiant

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

pour tout $x \in [a, b]$ et

$$\int_a^b (h(x) - g(x))dx \leq \varepsilon.$$

De cette définition, il résulte que toute fonction intégrable sur $[a, b]$ est nécessairement bornée sur $[a, b]$ puisque les fonctions en escalier sont elles-mêmes bornées. À chaque fonction numérique f, définie sur $[a, b]$ on associe les ensembles $\mathcal{E}_-(f)$ et $\mathcal{E}_+(f)$ ainsi définis

(i) $\mathcal{E}_-(f)$ est l'ensemble des fonctions numériques g, en escalier sur $[a, b]$ et minorant f (i.e $g(x) \leq f(x)$) pour tout $x \in [a, b]$.

(ii) $\mathcal{E}_+(f)$ est l'ensemble des fonctions numériques h, en escalier sur $[a, b]$ et majorant f (i.e. $f(x) \leq h(x)$) pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 2.4. *À chaque fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on associe les ensembles $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ et on pose*

$$I_-(f) = \sup_{g \in \mathcal{E}_-(f)} \int_a^b g(x)dx.$$

$$I_+(f) = \inf_{h \in \mathcal{E}_+(f)} \int_a^b h(x)dx.$$

Pour que f soit intégrable sur $[a, b]$, il faut et il suffit que l'on ait $I_-(f) = I_+(f)$.

Démonstration. Supposons que f est intégrable et soit $\varepsilon > 0$, alors il existe deux fonctions en escalier g_ε et h_ε définies sur $[a, b]$ telles que $g_\varepsilon \in \mathcal{E}_-(f)$ et $h_\varepsilon \in \mathcal{E}_+(f)$ et

$$\int_a^b (h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x))dx \leq \varepsilon.$$

Remarquons que

$$\int_a^b g_\varepsilon(x)dx \leq \sup_{g \in \mathcal{E}_-(f)} \int_a^b g(x)dx \leq \inf_{h \in \mathcal{E}_+(f)} \int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b h_\varepsilon(x)dx$$

et

$$-\int_a^b h_\varepsilon(x)dx \leq -\inf_{h \in \mathcal{E}_-(f)} \int_a^b h(x)dx \leq -\sup_{g \in \mathcal{E}_+(f)} \int_a^b g(x)dx \leq -\int_a^b g_\varepsilon(x)dx.$$

alors

$$I_+(f) - I_-(f) = \inf_{h \in \mathcal{E}_+(f)} \int_a^b h(x)dx - \sup_{g \in \mathcal{E}_-(f)} \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x))dx < \varepsilon.$$

Ceci étant, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où

$$I_-(f) = I_+(f).$$

Montrons maintenant la condition suffisante. Soit pour cela $\varepsilon > 0$. D'après la propriété de la borne supérieure, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{E}_-(f)$ et $h_\varepsilon \in \mathcal{E}_+(f)$ telles que

$$I_-(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b g_\varepsilon(x)dx \leq I_-(f)$$

et

$$I_+(f) \leq \int_a^b h_\varepsilon(x)dx < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\int_a^b (h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x))dx < I_+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - I_-(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Définition 2.5. Les notations étant celles du théorème précédent, l'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrable sur $[a, b]$ est le nombre $I(f) = I_-(f) = I_+(f)$. On le note

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Proposition 2.6. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. La fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si, il existe suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = 0. \tag{1}$$

Dans ce cas

$$I(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx.$$

Démonstration. Si f est Riemann-intégrable, prenons $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Donc, on peut trouver, des fonctions en escalier φ_n et ψ_n telles que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et

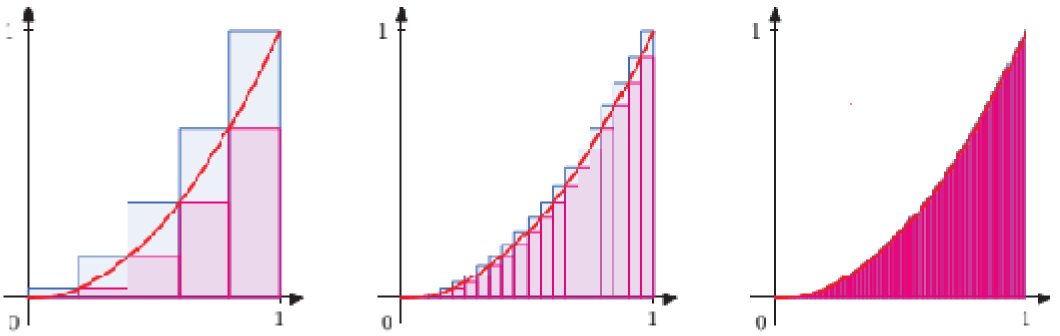
$$0 \leq \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx < \frac{1}{n}.$$

D'où
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\psi_n(x)-\varphi_n(x))dx = 0.$$
Inversement, s'il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1), et si l'on se donne $\varepsilon > 0$, en prenant $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, on obtient le résultat. □

Exemple 2.1. On souhaite calculer l'intégrale de la fonction carrée f entre 0 et 1. On pense à donner un encadrement de cette intégrale par des aires des rectangles (qu'on peut assimiler à des intégrales des fonctions en escalier φ_n et ψ_n minorants et majorants respectivement f sur $[0,1]$) construits en dessous et au dessus de la courbe de f.

On subdivise l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$.

On note u_n la somme des des aires des rectangles inférieurs (intégrale de la fonction en escalier φ_n) et v_n la somme des des aires des rectangles supérieurs (intégrale de la fonction en escalier ψ_n).



La suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in N^*}$ est décroissante. Alors plus les valeurs de n augmentent plus l'encadrement obtenu sera plus fin. Et les valeurs des u_n et v_n peuvent s'exprimer comme suit
$$u_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$
et
$$v_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$
la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est croissante et majorée par $\int_0^1 f(x)dx$. Donc elle converge. La suite $(v_n)_{n\in N^*}$ est décroissante et minorée par $\int_0^1 f(x)dx$. Donc elle converge aussi.

De plus on $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0. Ainsi ces deux suites ont une même limite qui ne peut être que $\int_0^1 f(x)dx$.

2.1.2 L'intégrale de Riemann définie à partir des sommes de Darboux

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et soit $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. Pour une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on définit ses sommes de Darboux inférieure $\mathbb{S}_\Delta(f)$ et supérieure $\mathbb{S}^\Delta(f)$ par

$$\mathbb{S}_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{]x_{k-1},x_k[} f$$

$$\mathbb{S}^\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{]x_{k-1},x_k[} f.$$

Les intégrales de Riemann inférieure $\mathbb{I}_*(f)$ et supérieure $\mathbb{I}^*(f)$ sont respectivement définies par

$$\mathbb{I}_*(f) = \sup_{\Delta} \mathbb{S}_\Delta(f)$$

$$\mathbb{I}^*(f) = \inf_{\Delta} \mathbb{S}^\Delta(f).$$

Définition 2.7. On dit qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si $\mathbb{I}_*(f) = \mathbb{I}^*(f)$. Dans ce cas on définit son intégrale au sens de Riemann sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(x)dx = \mathbb{I}_*(f) = \mathbb{I}^*(f)$$

2.1.3 Intégrale de Riemann définie à partir des sommes de Riemann

Définition 2.8. On appelle subdivision pointée de l'intervalle fermé borné $[a,b]$ la donnée des $n+1$ points $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et n points $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tels que $x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$, $k = 1, \ldots, n$.
Cette subdivision pointée sera notée $D = ((x_i)_{0\leq i\leq n}, (c_j)_{1\leq j\leq n})$.

Définition 2.9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $D = ((x_i)_{0\leq i\leq n}, (c_j)_{1\leq j\leq n})$ une subdivision pointée de $[a,b]$. La somme

$$S(D,f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(c_k)$$

est appelée somme de Riemann associée à f sur $[a,b]$ relativement à la subdivision pointée D.

Si lorsque n tend vers l'infini, de sorte que le plus grand des pas $h_k = x_k - x_{k-1}$ tende vers 0, la somme $S(D, f)$ admet une limite finie pour toute subdivision pointée choisie, on dit que f est intégrable au sens de Riemann. Cette limite est appelée intégrale de f sur $[a, b]$ au sens de Riemann et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} S(D, f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ce qui équivaut formellement à la définition suivante.

Définition 2.10. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann s'il existe un réel A, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$, tel que pour toute subdivision pointée $D = ((x_i)_{0\leq i\leq n}, (c_j)_{1\leq j\leq n})$ on ait

$$h_j = x_j - x_{j-1} \leq \delta \Rightarrow |S(D, f) - A| \leq \varepsilon.$$

Le nombre réel A est appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et noté

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

2.1.4 L'équivalence entre les trois définitions précitées

Dans ce paragraphe, on montre l'équivalence des trois définitions (2.3), (2.7) et (2.10) de l'intégrabilité au sens de Riemann d'une application f définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.3 $\Rightarrow$ Définition 2.7.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, intégrable au sens de la définition 2.3. La fonction f est bornée sur $[a, b]$. De plus d'après la proposition 2.6, il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, b]$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = 0.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \mathbb{S}_\Delta(f) \leq \mathbb{S}^\Delta(f) \leq \int_a^b \psi_n(x)dx,$$

D'où

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \mathbb{I}_*(f) \leq \mathbb{I}^*(f) \leq \int_a^b \psi_n(x)dx$$

et par conséquent

$$\mathbb{I}^*(f) - \mathbb{I}_*(f) \leq \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient

$$\mathbb{I}^*(f) = \mathbb{I}_*(f)$$

Définition 2.7 $\Rightarrow$ Définition 2.3.
Supposons que $\inf_\Delta \mathbb{S}^\Delta(f) = \mathbb{I}^*(f) = \mathbb{I}_*(f) = \sup_\Delta \mathbb{S}_\Delta(f)$.
Notons $I_n = \mathbb{S}^{\Delta(n)}(f)$ et $J_n = \mathbb{S}_{\Delta(n)}(f)$, avec $\Delta(n)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $\delta \leq \frac{b-a}{n}$.
Les suite $(I_n)_{n\geq 1}$ et $(J_n)_{n\geq 1}$ sont respectivement décroissante et croissante de limite $\mathbb{I}^*(f) = \mathbb{I}_*(f)$.
$(I_n)_{n\geq 1}$ et $(J_n)_{n\geq 1}$ sont donc adjacentes.
Comme $I_n = \mathbb{S}^{\Delta(n)}(f)$ et $J_n = \mathbb{S}_{\Delta(n)}(f)$ sont deux sommes de Darboux, et les sommes de Darboux sont des intégrales de fonctions en escalier, alors à I_n et J_n on peut associer deux fonctions en escalier φ_n et ψ_n respectivement définies sur $[a, b]$ par

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{]x_{k-1},x_k[} \inf_{x\in]x_{k-1},x_k[} f(x).$$

$$\psi_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{]x_{k-1},x_k[} \sup_{x\in]x_{k-1},x_k[} f(x).$$

avec

$$\varphi_n(x_k) = \psi(x_k) = f(x_k), \quad \text{pour} \quad k = 0 \dots n.$$

On a donc $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ sur $[a, b]$ et :

$$I_n = \int_a^b \psi_n(x)dx$$

$$J_n = \int_a^b \varphi_n(x)dx$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = \lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0.$$

La proposition 2.6 permet de conclure.

Définition 2.7 $\Rightarrow$ Définition 2.10.
Évident, car la somme de Riemann est comprise entre les deux sommes de Darboux.

Définition 2.10 $\Rightarrow$ Définition 2.7.
Montrons tout d'abord que f est bornée.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$, tel que pour toute subdivision pointée $D = ((x_i)_{0\leq i\leq n}, (c_j)_{1\leq j\leq n})$ on ait

$$h_j = x_j - x_{j-1} \leq \delta \Rightarrow |S(D, f) - A| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Soit $N \geq \dfrac{b-a}{\delta}$ et $h = \dfrac{b-a}{N}$. On a $h \leq \delta$. Pour toute subdivision pointée $D = ((x_i)_{0\leq i\leq N}, (c_j)_{1\leq j\leq N})$ de pas constant h, on a d'après (2)

$$|S(D, f) - A| \leq \varepsilon, \tag{3}$$

donc

$$|S(D, f)| = \left|\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\right| \leq |A| + \varepsilon.$$

D'où

$$\left|\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\right| \leq \frac{N}{b-a}(|A| + \varepsilon).$$

Soit $x \in [a, b]$ et D comme dans (3). il existe $j \in \{1, \ldots, N\}$ tel que

$$x \in [x_{j-1}, x_j].$$

On prend $c_j = x$ et $c_i = x_i$ pour $i \neq j$. La nouvelle subdivision pointée D' vérifie aussi (3). Il s'ensuit que

$$|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{N} |f(x_i)| + \frac{N}{b-a}(|A| + \varepsilon).$$

Ce qui montre que f est bornée.

Supposons la convergence des sommes de Riemann vers une limite finie A.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision pointée $D = ((x_i)_{0\leq i\leq n}, (c_i)_{1\leq i\leq n})$ telle que

$$|S(D, f) - A| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Notons

$$m_k = \inf_{x\in]x_{k-1},x_k[} f(x).$$

et

$$M_k = \sup_{x\in]x_{k-1},x_k[} f(x).$$

D'après la propriété de la borne supérieure, il existe $t_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tel que

$$M_k - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq f(t_k) \leq M_k.$$

Multiplions par $x_k - x_{k-1}$ et sommons les différentes inégalités. On obtient

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

ce qui donne pour $c_i = t_i$ $(i = 1 \dots n)$,

$$\mathbb{S}^D(f) - \frac{\varepsilon}{4} \leq S(D, f) \leq \mathbb{S}^D(f).$$

D'où

$$|S(D, f) - \mathbb{S}^D(f)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Par conséquent,

$$|\mathbb{S}^D(f) - A| \leq |\mathbb{S}^D(f) - S(D, f)| + |S(D, f) - A| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le même calcul avec la borne inférieure va donner également

$$|\mathbb{S}_D(f) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$|\mathbb{S}^D(f) - \mathbb{S}_D(f)| \leq |\mathbb{S}^D(f) - A| + |A - \mathbb{S}_D(f)| \leq \varepsilon.$$

Et puisque

$$\mathbb{S}_D(f) \leq \mathbb{I}_* \leq \mathbb{I}^* \leq \mathbb{S}^D(f).$$

Alors f est intégrable au sens de la définition 2.7. De plus on a

$$\mathbb{S}_D(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \mathbb{S}^D(f).$$

Alors

$$\mathbb{S}_D(f) - A \leq \int_a^b f(x)dx - A \leq \mathbb{S}^D(f) - A,$$

et donc

$$\left| \int_a^b f(x)dx - A \right| \leq \max(|\mathbb{S}_D(f) - A|), |\mathbb{S}^D(f) - A|) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$\int_a^b f(x)dx = A.$$

2.2 Propriétés de fonctions Riemann-intégrables

Proposition 2.11 (Intégrabilité d'une fonction monotone)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est monotone sur $[a, b]$, elle est Riemann intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. Supposons que f est croissante (sinon, on remplace f par $-f$).
Alors
$$\inf_{x\in]x_{k-1},x_k[} f(x) \geq f(x_{k-1}) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in]x_{k-1},x_k[} f(x) \leq f(x_k).$$
Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, si l'on choisit une subdivision Δ dont le pas $\delta(\Delta)$ est plus petit que ε, on a
$$\begin{array}{rcl} 0 \leq \mathbb{S}^{\Delta}(f) - \mathbb{S}_{\Delta}(f) & \leq & \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ & \leq & \varepsilon \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \varepsilon(f(b) - f(a)) \end{array}$$
puisque ε est arbitraire alors $\mathbb{S}^{\Delta}(f) = \mathbb{S}_{\Delta}(f)$. La définition 2.7 permet de conclure. □

Proposition 2.12 (Intégrabilité d'une fonction continue)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, elle est Riemann intégrable sur $[a, b]$. De plus si F est une primitive de f sur $[a, b]$,*
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le compact $[a, b]$, f y est uniformément continue (Théorème de Heine). Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, x' \in [a, b]$, on ait
$$|x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon.$$
Ainsi, si Δ est une subdivision dont le pas $\delta(\Delta) \leq \delta$, on aura $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ pour tout $x, x' \in [x_{k-1}, x_k]$, puisqu'alors $|x - x'| \leq x_k - x_{k-1} \leq \delta(\Delta) \leq \delta$.
On a donc
$$0 \leq \sup_{x\in]x_{k-1},x_k[} f(x) - \inf_{x'\in]x_{k-1},x_k[} f(x') \leq \varepsilon,$$
de sorte que
$$\begin{array}{rcl} 0 \leq \mathbb{S}^{\Delta}(f) - \mathbb{S}_{\Delta}(f) & = & \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})(\sup_{x\in]x_{k-1},x_k[} f(x) - \inf_{x'\in]x_{k-1},x_k[} f(x')) \\ & \leq & \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\varepsilon = (b - a)\varepsilon. \end{array}$$
alors $\mathbb{S}^{\Delta}(f) = \mathbb{S}_{\Delta}(f)$ puisque c'est vrai pour tout ε. La définition 2.7 permet de conclure.
□

Proposition 2.13. *Toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée sur $[a, b]$ et continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points est Riemann intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. Nous nous contenterons de le montrer dans le cas où f présente un seul point de discontinuité $c \in]a, b[$, la généralisation se fait de manière similaire. L'adaptation de ce qui suit au cas $c = a$ ou $c = b$ est aussi immédiate.
Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ assez petit pour que $[c - \eta, c + \eta] \subset]a, b[$ et dont le choix en fonction de ε sera précisé ultérieurement. Soit Δ une subdivision de $[a, b]$ ayant comme points consécutifs $c - \eta$ et $c + \eta$ (i.e. $x_{k_0} = c - \eta$ et $x_{k_0+1} = c + \eta$ pour un certain indice k_0). Cette subdivision Δ peut se construire comme réunion d'une subdivision quelconque Δ_1 de $[a, c - \eta]$ et d'une subdivision quelconque Δ_2 de $[c + \eta, b]$. Comme f est continue sur $[a, c - \eta]$ et $[c + \eta, b]$, elle est Riemann intégrable sur chacun de ces deux segments (Prop 2.12), ce qui assure l'existence de Δ_1 et Δ_2 telles que

$$0 \leq \mathbb{S}^{\Delta_1}(f) - \mathbb{S}_{\Delta_1}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathbb{S}^{\Delta_2}(f) - \mathbb{S}_{\Delta_2}(f) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Notons m et M, m_η et M_η, les bornes inférieure et supérieure de f sur respectivement $[a, b]$ et $[c - \eta, c + \eta]$. On a $m \leq m_\eta \leq M_\eta \leq M$, d'où $2\eta(M_\eta - m_\eta) \leq 2\eta(M - m)$, de sorte qu'en choisissant

$$\eta < \frac{\varepsilon}{6(M - m)}$$

on ait

$$2\eta(M_\eta - m_\eta) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

Avec le choix de Δ opéré ci-dessus, nous avons

$$\mathbb{S}^{\Delta}(f) = \mathbb{S}^{\Delta_1}(f) + 2\eta M_\eta + \mathbb{S}^{\Delta_2}(f)$$

$$\mathbb{S}_{\Delta}(f) = \mathbb{S}_{\Delta_1}(f) + 2\eta m_\eta + \mathbb{S}_{\Delta_2}(f),$$

d'où compte-tenu de (4) et (5),

$$0 \leq \mathbb{S}^{\Delta}(f) - \mathbb{S}_{\Delta}(f) \leq \mathbb{S}^{\Delta_1}(f) - \mathbb{S}_{\Delta_1}(f) + 2\eta(M_\eta - m_\eta) + \mathbb{S}^{\Delta_2}(f) - \mathbb{S}_{\Delta_2}(f) < \varepsilon.$$

On en déduit que $0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$, puis en faisant tendre ε vers 0 on obtient $I^*(f) = I_*(f)$, i.e. que f est Riemann intégrable sur $[a, b]$. $\square$

Nous allons maintenant établir que la Riemann intégrabilité se conserve par convergence uniforme sur $[a, b]$. Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 2.14. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Soit $E \subset \mathbb{R}$. On suppose que chaque fonction f_n est bornée sur E et que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f uniformément sur E. Alors f est bornée sur E et*

$$m_n = \inf_{x \in E} f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \inf_{x \in E} f(x) = m(E).$$

$$M_n = \sup_{x\in E} f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup_{x\in E} f(x) = M(E).$$

Plus précisément, si pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on a pour tout $x \in E, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, alors

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ |m_n(E) - m(E)| \leq \varepsilon \ \textit{ et } \ |M_n(E) - M(E)| \leq \varepsilon. \tag{6}$$

Démonstration. La convergence uniforme de (f_n) vers f sur E, s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{7}$$

En réécrivant cette inégalité sous la forme $f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$ on en déduit

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in E,\ m_n(E) - \varepsilon < f(x) < M_n + \varepsilon$$

puis en prenant l'infimum et le supremum en $x \in E$ dans cette double inégalité

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ m_n(E) - \varepsilon \leq m(E) \ \text{ et } \ M(E) \leq M_n(E) + \varepsilon. \tag{8}$$

En choisissant un n particulier, par exemple $n = n_\varepsilon$, on en déduit que f est bornée sur E ($-\infty < m_n(E) - \varepsilon \leq m(E) \leq M(E) \leq M_n(E) + \varepsilon < +\infty$). En réécrivant l'inégalité 7 sous la forme $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$, on obtient de la même façon

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ m(E) - \varepsilon \leq m_n(E) \ \text{ et } \ M_n(E) \leq M(E) + \varepsilon. \tag{9}$$

En regroupant (8 et 9), on voit ainsi que pour tout $n \geq n_\varepsilon$,

$$m(E) - \varepsilon \leq m_n(E) \leq m(E) + \varepsilon \ \text{ et } \ M(E) - \varepsilon \leq M_n(E) \leq M(E) + \varepsilon.$$

ce qui nous donne (6) et donc les convergences de $m_n(E)$ et $M_n(E)$ vers respectivement $m(E)$ et $M(E)$ puisque $\varepsilon > 0$ est ici arbitraire. □

Proposition 2.15. *Si f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$, alors f est elle-même Riemann intégrable.*

Démonstration. D'abord, f est bornée sur $[a, b]$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions bornées (lemme 2.14 avec $E = [a, b]$). On peut donc bien définir les sommes de Darboux $\mathbb{S}_\Delta(f)$ et $\mathbb{S}^\Delta(f)$ pour toute subdivision Δ de $[a, b]$.
Par convergence uniforme de f_n vers f sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

En appliquant le lemme 2.14, on a alors (avec le même n_ε),

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall E \subset [a, b],\ |m_n(E) - m(E)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \ \text{ et } \ |M_n(E) - M(E)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{10}$$

Soit $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision quelconque de $[a, b]$. En appliquant (10) avec pour E égal à chacun des intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ de la subdivision, on vérifie immédiatement que

$$\forall \Delta, \forall n \geq n_\varepsilon, \mathbb{S}_\Delta(f_n) - \varepsilon \leq \mathbb{S}_\Delta(f) \leq \mathbb{S}^\Delta(f) \leq \mathbb{S}^\Delta(f_n) + \varepsilon. \tag{11}$$

La fonction f_{n_ε} étant par hypothèse Riemann intégrable sur $[a, b]$, il existe une subdivision Δ_ε telle que

$$\mathbb{S}_{\Delta_\varepsilon}(f_{n_\varepsilon}) > \mathbb{S}^{\Delta_\varepsilon}(f_{n_\varepsilon}) - \varepsilon. \tag{12}$$

En choisissant dans (11) $n = n_\varepsilon$ et $\Delta = \Delta_\varepsilon$ et en combinant l'encadrement ainsi obtenu avec l'inégalité (12), il vient

$$\mathbb{S}^{\Delta_\varepsilon}(f_{n_\varepsilon}) - 2\varepsilon < \mathbb{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) \leq \mathbb{S}^{\Delta_\varepsilon}(f) \leq \mathbb{S}^{\Delta_\varepsilon}(f_{n_\varepsilon}) + \varepsilon,$$

d'où l'on tire $0 \leq \mathbb{S}^{\Delta_\varepsilon}(f) - \mathbb{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) < 3\varepsilon$, puis $0 \leq I^*(f) - I_*(f) < 3\varepsilon$. ε étant arbitraire, on en déduit $I^*(f) = I_*(f)$, ce qui établit la Riemann intégrabilité de f. □

Théorème 2.16. *Soit f Riemann intégrable sur $[a, b]$. Alors elle est aussi Riemann intégrable sur $[a, x]$ pour tout $x \in [a, b]$, ce qui permet de définir l'application $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

1. *F est continue sur $[a, b]$ et même lipschitzienne.*
2. *Si f a une limite l au point c de $[a, b]$ (resp une limite à droite, resp une limite à gauche), F est dérivable au point c (resp à droite, resp à gauche), et $F'(c) = l$.*
3. *Si f est continue sur $[a, b]$, F est dérivable sur $[a, b]$ et a pour fonction dérivée f. C'est l'unique primitive de f sur $[a, b]$, qui s'annule en a.*

Démonstration.

1. Soit $C = \sup_{t \in [a,b]} | f(t) |$. En utilisant la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale, on a pour tous $a \leq x \leq y \leq b$,

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq \int_x^y Cdt = C|y - x|.$$

   Ceci montre que F est lipschitzienne de rapport C sur $[a, b]$ et donc fortiori continue.

2. Commençons par noter que pour tout $x \neq c$ dans $[a, b]$,

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t)dt, \quad \text{et} \quad l = \frac{1}{x - c} \int_c^x ldt. \tag{13}$$

Comme f a pour limite l au point c, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 \leq \mid t - c \mid \leq \mid x - c \mid < \delta \Rightarrow \mid f(t) - l \mid < \varepsilon. \tag{14}$$

en combinant (13) et (14) , on voit que pour tout $x \in [a, b]$ vérifiant $\mid x - c \mid < \delta$,

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - l \right| = \left| \frac{1}{x - c} \int_c^x (f(t) - l) dt \right| \leq \frac{1}{\mid x - c \mid} \int_c^x \mid f(t) - l \mid dt \leq \varepsilon.$$

ce qui montre que F est dérivable au point c, de nombre dérivé $F'(c) = l$. L'adaptation au cas d'une limite à droite et ou à gauche (avec dérivée à droite ou à gauche) est immédiate.

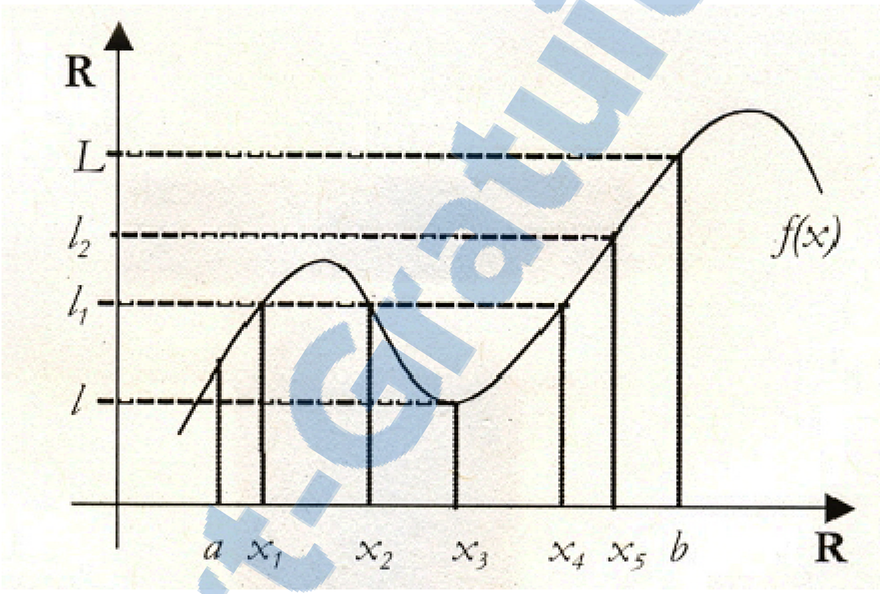
3. Si f est continue sur $[a, b]$, elle a pour limite $f(c)$ en tout point c de $[a, b]$ et donc d'après 2, F est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(c) = f(c)$. Cette dernière égalité ayant lieu pour tout $c \in [a, b]$, on a $F' = f$, autrement dit F est une primitive de f sur $[a, b]$. On sait que toutes les primitives de f sur l'intervalle $[a, b]$ différentes entre elles d'une constante (une conséquence de la formule des accroissements finis), il y en a donc une seule qui s'annule au point a, c'est F.

□

3 Intégrale de Lebesgue

L'objectif de cette section est de donner les résultats principaux de la théorie d'intégration de Lebesgue, sans entrer dans tous les détails de certaines démonstrations.

Rappelons que l'idée de Lebesgue est de considérer la partition non plus du domaine de la fonction, mais de son image. Soit f une fonction réelle à valeurs réelles bornée, alors il existe deux nombre réels l et L tels que $l \leq f(x) \leq L$, pour tout x dans $[a, b]$. Soit $\{l = l_0, l_1, \dots, l_n = L\}$ une partition de l'image de f.



On construit les ensembles $A_i = \{x, l_{i-1} \leq f(x) \leq l_i\}$ qui forme une partition de domaine de f. Comme dans la figure ci-dessus

$$A_1 = \{x, l = l_0 \leq f(x) < l_1\} = [a, x_1[\cup]x_2, x_4[$$
$$A_2 = \{x, l_1 \leq f(x) < l_2\} = [x_1, x_2] \cup [x_4, x_5[$$
$$A_3 = \{x, l_2 \leq f(x) < l_3 = L\} = [x_5, b[$$

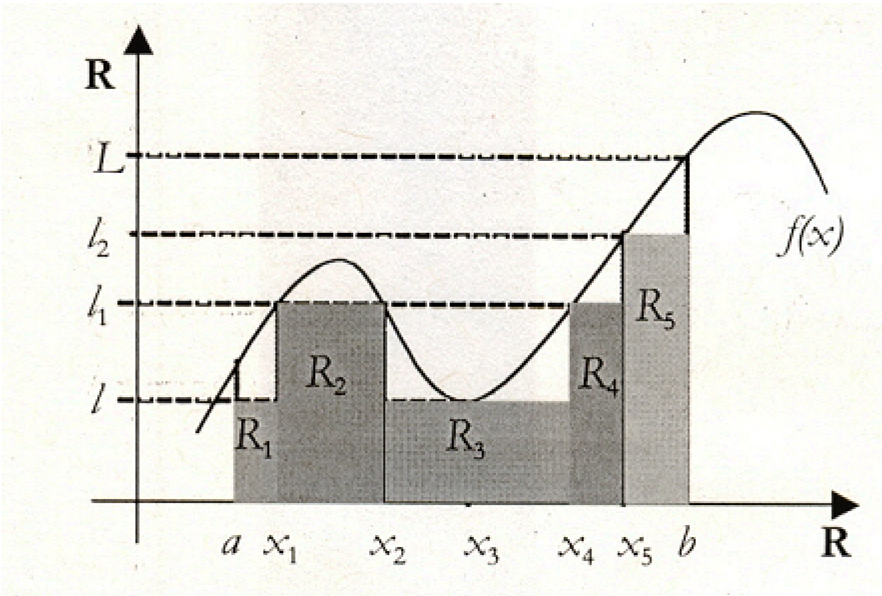
En utilisant la fonction caractéristique d'un ensemble pour former les trois fonctions suivantes

$$s_1(x) = l_0 \mathbb{1}_{A_1}(x)$$
$$s_2(x) = l_1 \mathbb{1}_{A_2}(x)$$
$$s_3(x) = l_2 \mathbb{1}_{A_3}(x)$$

les fonction s_i sont faciles à intégrer, car il s'agit d'une somme des aires des rectangle. En posant $\lambda(A_1) = (x_1 - a) + (x_4 - x_2)$, nous obtenons

$$\int_a^b s_1 dx = l_0 \lambda(A_1)$$

il est de même pour les autres fonctions s_2 et s_3.



si on raffine la partition de l'image, on s'approchera de la valeur de l'aire sous la courbe, c'est-à-dire que les rectangles s'approcheront de la courbe $y = f(x)$ et à la limite, ainsi nous obtiendrons la surface de l'aire sous la courbe. D'où une fonction réelle bornée f est intégrable au sens de Lebesgue si la limite des somme suivantes existe

$$\lim_n \sum_{i=1}^{n} l_{i-1} \lambda(A_i).$$

3.1 Construction

Dans toute la suite on se donne un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ (c-à-d la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$). Pour tout intervalle I (ou plus généralement pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) (ou $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$), on appelle tribu borélienne de I (respectivement de A) et on note $\mathcal{B}(I)$ (respectivement $\mathcal{B}(A)$) la tribu induite par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur I (respectivement sur A). On obtient ainsi une sous-tribu de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$).

Définition 3.1. Soit f une fonction définie de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. f est dite mesurable si, $\forall a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$

Définition 3.2. Une application $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (i.e. $f(E)$ est fini). Dans ce cas, f s'écrit

$$f = \sum_{a \in f(E)} a \mathbb{1}_{\{f=a\}}$$

Définition 3.3 (Intégrale d'une application étagée positive)**.** Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une application étagée mesurable positive. On appelle intégrale de f par rapport à μ le nombre défini par

$$\int_E f d\mu = \sum_{a \in f(E)} a\mu(\{f = a\}) \in [0, +\infty]$$

avec la convention $0 \times \infty = 0$.

Définition 3.4. L'intégrale sur l'espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ d'une application mesurable f à valeurs dans $[0, +\infty]$ est définie par

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E g d\mu : \; g \text{ fonction mesurable étagée positive } \leq f \right\}.$$

Définition 3.5. 1. Une application mesurable positive f est dite intégrable si

$$\int_E f d\mu < +\infty.$$

2. Une application mesurable f de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ est dite intégrable si l'application mesurable positive $|f|$ est intégrable (ou ce qui équivalent, si les applications mesurables positives f^+ et f^- sont intégrables). Dans ce cas l'intégrale de f est le nombre réel défini par

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \in]-\infty, +\infty[.$$

Dans tout ce qui suit E désigne un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Théorème 3.6. *Soit A un sous-ensemble mesurable de E et soit f une fonction intégrable sur E. Alors f est intégrable sur A et*

$$\int_A f d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A d\mu.$$

Démonstration. On a $\int_A |f|\, d\mu \leq \int_E |f|\, d\mu < +\infty$, ce qui montre l'intégrabilité de f sur le sous-ensemble A. D'autre part, notons A^c la complémentaire du sous-ensemble A dans E, alors

$$\int_E f \mathbb{1}_A d\mu = \int_{A\cup A^c} f \mathbb{1}_A d\mu = \int_A f \mathbb{1}_A d\mu + \int_{A^c} f \mathbb{1}_A d\mu = \int_A f d\mu.$$

□

Définition 3.7 (fonctions égales presque partout)**.** Soit f et g deux fonctions définies sur un borélien $E \subset \mathbb{R}$. On dit que f et g sont égales presque partout sur E si $\{x \in E, f(x) \neq g(x)\}$ est un ensemble négligeable.

Théorème 3.8. *Soit f une fonction intégrable sur E, et $A \subset E$ un ensemble mesurable de mesure nulle. Alors f est intégrable sur A et*

$$\int_A f d\mu = 0.$$

Démonstration. D'après le théorème 3.6 on a l'intégrabilité de f sur A et

$$\int_A f d\mu = \int_E f \mathbb{1}_A d\mu$$

alors il suffit de remarquer que la fonction $f\mathbb{1}_A$ est nulle presque partout, alors elle est d'intégrale nulle. (la chose qu'on va démontrer plus tard) □

Proposition 3.9. *Une fonction positive nulle presque partout est d'intégrale nulle.*

Démonstration. f égale à 0 presque partout, alors pour toute fonction étagée $h \leq f$, h est nulle presque partout, en utilisant la définition de l'intégrale d'une fonction étagée, on en déduit que $\int h d\mu = 0$ d'où $\int f d\mu = 0$. □

Théorème 3.10. *Soient f et g deux fonctions positives intégrables sur E, égales presque partout sur E. Alors*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

Démonstration. $f = g$ presque partout, notons $h_+ = \max(f, g)$ et $h_- = \min(f, g)$(point par point). h_+ et h_- sont mesurables, $h_+ = h_-$ presque partout et $h_- \leq f, g \leq h_+$. Or

$$\int h_+ d\mu = \int h_- d\mu + \int (h_+ - h_-) d\mu = \int h_- d\mu.$$

($\int (h_+ - h_-) d\mu = 0$ d'après la proposition précédente) □

Théorème 3.11. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur E, égales presque partout sur E. Alors*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

Démonstration. $f = g$ presque partout sur E , alors $f^+ = g^+$ presque partout sur E et $f^- = g^-$ presque partout E donc $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$. □

Corollaire 3.12. *Une fonction nulle presque partout sur E est d'intégrale nulle.*

Théorème 3.13 (intégrale et primitive)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$. et F une primitive de f, alors, pour tout*

$x \in [a,b]$ on a

$$\int_a^x f d\mu = F(x) - F(a).$$

Démonstration. F est continue sur $[a,b]$ (car dérivable), donc mesurable. Les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$f_n(t) = n\left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right).$$

sont donc elles aussi mesurables, et convergent simplement vers f par définition de la dérivée. On en déduit que f est mesurable. D'autre part, pour tout $n > 0$, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction dérivable F assure de l'existence de $\theta_n \in]0,1[$ tel que

$$f_n(t) = n\left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right) = f(t + \frac{\theta_n}{n}).$$

f étant bornée, on en déduit que

$$\forall n > 0, \forall t \in [a,b], |f_n(t)| \leq \| f \|_\infty,$$

avec $\| f \|_\infty$ est intégrable (fonction constante) puisque $[a,b]$ est un intervalle borné. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée sur $[a,b]$, donc aussi sur $[a,x]$ avec $x \in [a,b]$

$$\int_{[a,x]} f(t)d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,x]} f_n(t)d\mu = n\int_{[a,x]} \left(F\left(t + \frac{1}{n}\right) - F(t)\right) d\mu.$$

Or F est continue donc on peut appliquer successivement un changement de variable et la relation de Chasles, ce qui donne

$$\int_{[a,x]} f_n(t)d\mu = n\left(\int_{[x,x+\frac{1}{n}]} F(t)d\mu - \int_{[a,a+\frac{1}{n}]} F(t)\right) d\mu.$$

Il reste à appliquer le théorème de la moyenne à la fonction continue F : il existe des réels $\theta'_n \in [0,1]$ et $\theta''_n \in [0,1]$ tel que

$$\int_{[a,x]} f_n(t)d\mu = F\left(x + \frac{\theta'_n}{n}\right) - F\left(a + \frac{\theta''_n}{n}\right) \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} F(x) - F(a).$$

On a donc bien établit que $x \in [a,b]$ on a

$$\int_a^x f d\mu = F(x) - F(a).$$

□

Proposition 3.14 (Lien Riemann-Lebesgue). *Soit f une application borélienne bornée de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. Alors si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, la fonction $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ Lebesgue-intégrable et les deux intégrales coïncident*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f\mathbb{1}_{]a,b[}d\lambda.$$

Démonstration. Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable Riemann-intégrable.

Au sens da la définition 2.6 on peut trouver, des fonctions en escalier φ_n et ψ_n telles que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ tq

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} \int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx = 0.$$

Notons que si f est en escalier, alors f est étagée, et donc Lebesgue-intégrable. En effet, si $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f, il existe des scalaires $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ tel que

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{]x_{i-1},x_i[}, \quad \text{et de valeur } f(x_i) \quad \text{aux points de subdivision.}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(]x_{i-1},x_i[) = \int f\mathbb{1}_{[a,b]}d\lambda.$$

Et puisque $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$, alors f est intégrable et

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_a^b \psi_n(x)dx.$$

De plus

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\rightarrow+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\rightarrow+\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx.$$

et donc

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

$\square$

4 Intégrale de Kurzweil-Henstock

4.1 Définition de l'intégrale de Kurzweil-Henstock sur un intervalle $[a, b]$

Exemple 4.1. Considérons une situation où la fonction f n'est pas bornée. On prend $[a, b] = [0, 1]$ et f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

On introduit une subdivision pointée $D = ((x_k)_{0 \leq k \leq n}, (c_j)_{1 \leq j \leq n})$ telle que

$$x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \text{ pour } k = 0, \ldots, n$$

et on pose

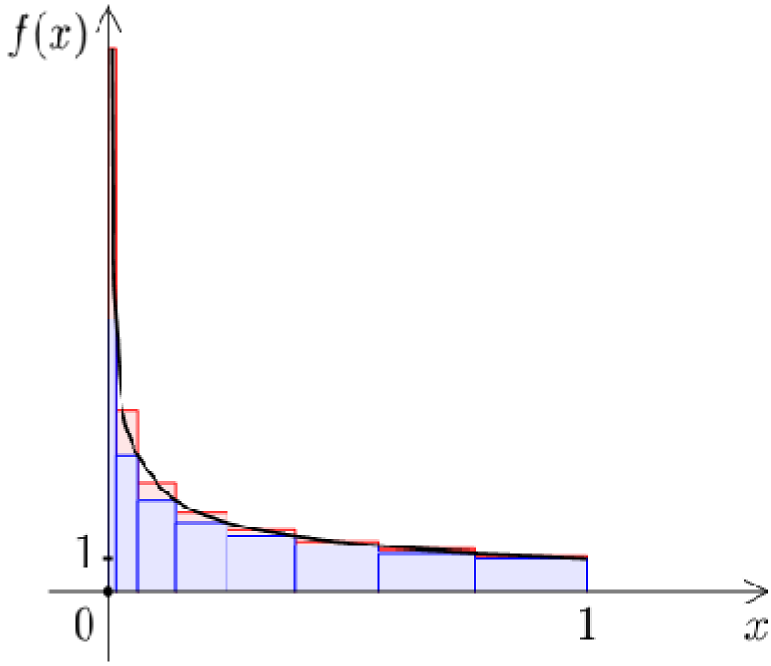
$$c_k = \left(\frac{t_k}{n}\right)^2 \text{avec } t_k \in [k, k+1].$$

On a alors

$$x_{k+1} - x_k = \frac{2k+1}{n^2} \quad \text{et} \quad f(c_k) = \frac{n}{t_k} \quad \text{si } t_k \neq 0.$$

D'où

$$S(D, f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0, t_k \neq 0}^{n-1} \frac{2k+1}{t_k}.$$



Le choix le plus simple est $t_k = k + \frac{1}{2}$, qui donne $\frac{2k+1}{t_k} = 2$ et donc $S(D, f) = 2$.
Si on choisit plutôt $t_k = k + 1$, on obtient la valeur minimale possible pour $S(D, f)$ car f est décroissante. De plus, comme

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{2k+1}{k+1} = 2,$$

le théorème de Césaro entraîne que

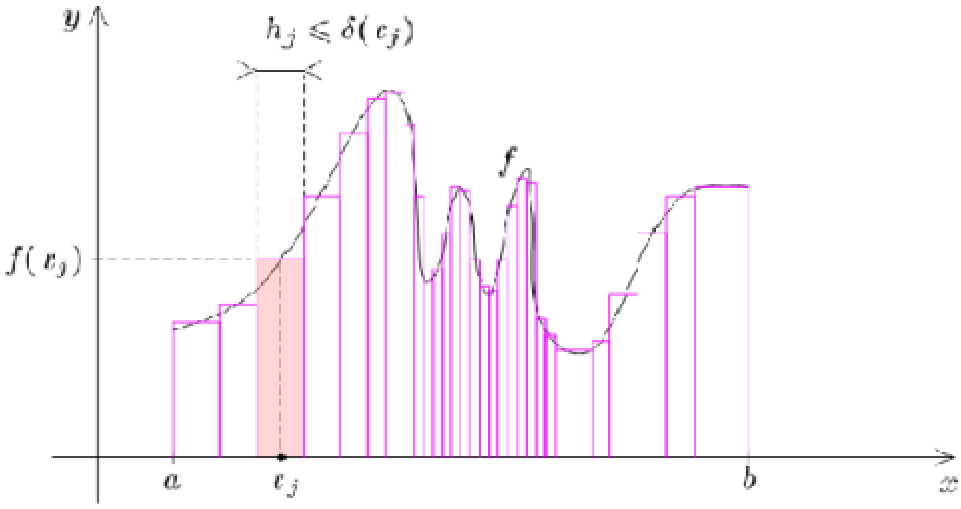
$$\lim_{n \to +\infty} S(D, f) = 2.$$

Et comme $x_{k+1} - x_k \leq \frac{(2n-1)}{n^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, ce calcul amène à penser que l'aire du domaine non borné, défini par $0 < x \leq 1$ et $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ est bien finie et égale à 2.

Remarque 4.1.

1. Dans la définition de l'intégrale de Riemann, la restriction que f soit bornée est gênante, puisqu'on a vu à l'exemple précédent qu'il existait des fonctions non bornées pour lesquelles l'aire située sous le graphe peut être approximativement calculable.

2. D'autre part, on peut être amené à faire des calculs d'aires pour des fonctions bornées qui oscillent plus à certains endroits qu'à d'autres. Dans ce cas, on sent bien intuitivement que l'on a intérêt à resserrer davantage les pas h_j aux endroits où f oscille davantage. Plutôt que de supposer que $h_j \leq \delta$ où δ est un réel positif fixé, il vaudra donc mieux demander que les pas h_j satisfassent une condition $h_j \leq \delta(c_j)$ où $\delta(c_j)$ est une quantité positive assez petite dépendant de l'endroit où l'on prend le rectangle de hauteur $f(c_j)$. On choisira alors des fonctions $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ positives qui serviront à majorer les pas h_j. Une telle fonction sera appelée une jauge sur $[a,b]$.



Définition 4.1. soit $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction positive. Une subdivision pointée $D = ((x_i)_{0\leq i\leq n}, (c_j)_{1\leq j\leq n})$ de $[a,b]$ est dite δ-fine si pour tout $j = 1, \ldots, n$

$$h_j = x_j - x_{j-1} \leq \delta(c_j).$$

Soient δ et δ_* deux jauges telles que $\delta_* \leq \delta$, alors toute subdivision δ_*-fine est aussi δ-fine ($\star$).

Lemme 4.2 (Cousin). *soit δ une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe une subdivision pointée δ-fine de $[a,b]$.*

Démonstration. le lemme peut se démonter par l'absurde, par une méthode de dichotomie. Supposons qu'il n'existe pas de telle p-subdivision ; on considère les deux moitiés du segment I, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. L'un au moins de ces deux segments n'admet pas de p-subdivision δ-fine. On l'appelle I_1 et on lui applique le même raisonnement. On obtient ainsi une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés pour lesquels il n'existe aucune p-subdivision δ-fine. Ces segments ont en commun un point c. La longueur du segment I_n est $\frac{b-a}{2^n}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{2^m} \leq \delta(c)$: La p-subdivision de I_m constituée du seul segment I_m pointée par c est δ-fine, ce qui contredit l'affirmation précédente, selon laquelle il n'existerait aucune p-subdivision δ-fine pour aucun des I_n. $\square$

Définition 4.3. Une fonction f est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a, b]$ s'il existe un tel réel λ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une application $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant que pour toute subdivision pointée $D = ((x_i)_{0\leq i\leq n}, (c_j)_{1\leq j\leq n})$ de $[a, b]$ δ-fine on ait

$$| S(D, f) - \lambda | \leq \varepsilon.$$

la jauge δ et la subdivision D sont dites ε-adaptées à f.

Remarque 4.2. Un tel réel λ est unique, c'est par définition l'intégrale de f sur $[a, b]$ que l'on note $\displaystyle\int_a^b f dx$.

Démonstration. Supposons donc que f ait deux intégrales, S_1 et S_2. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de S_1, il existe une jauge δ_1 telle-que, pour toute subdivision δ_1-fine D_1 on ait

$$| S(D_1, f) - S_1 | \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe une autre jauge δ_2 telle-que, pour toute subdivision δ_2-fine D_2 on ait

$$| S(D_2, f) - S_2 | \leq \varepsilon.$$

Trouvons maintenant une jauge δ^* telle que toute subdivision D^* qui soit δ^*-fine soit aussi δ_1-fine et δ_2-fine. En prenant alors une telle subdivision D^* on aurait, en additionnant les deux inégalités ci-dessus,

$$| S_2 - S_1 | \leq | S(D^*, f) - S_1 | + | S(D^*, f) - S_2 | \leq 2\varepsilon.$$

et, comme cette inégalité est vraie pour tout ε, l'unicité serait démontrée, $S_1 = S_2$. En fait, une jauge telle que δ^* existe toujours c'est une conséquence de ($\star$) et de lemme de Cousin vu précédemment.(voir 4.2) $\square$

Remarque 4.3. La définition 4.3 est de façon évidente plus générale que celle de Riemann, par conséquent toute fonction intégrable au sens de Riemann est aussi intégrable au sens de Kurzweil-Henstock.

4.2 Les propriétés élémentaires de l'intégrale de Kurzweil-Henstock

L'intégrale de Kurzweil-Henstock conserve toutes les propriétés usuelles de l'intégration. Commençons par établir certaines propriétés classiques.

Pour démontrer des résultats plus généraux, il est indispensable de disposer d'un critère d'intégrabilité qui ne fasse pas appel à la valeur de l'intégrale. Pour la convergence des suites de nombres réels, un tel critère existe, c'est le critère de Cauchy. Celui-ci permet souvent de démontrer qu'une suite converge sans que l'on connaisse à priori sa limite. Nous disposons ici d'un outil analogue.

Lemme 4.4 (Critère de Cauchy). *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ_ε telle que, si D_1 et D_2 sont deux subdivisions δ_ε-fines, alors*

$$|S(D_1, f) - S(D_2, f)| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Si f est intégrable, fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons une jauge δ telle que pour toutes subdivisions δ-fines D_1 et D_2, on ait

$$\left| S(D_1, f) - \int_a^b f dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

et

$$\left| S(D_2, f) - \int_a^b f\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $|S(D_1, f) - S(D_2, f)| \leq \varepsilon$, et le critère de Cauchy est vérifié.

Réciproquement, supposons que f vérifie le critère de Cauchy. Soit (δ_n) une suite de jauges telles que si D_1, D_2 sont δ_n-fines, alors

$$|S(D_1, f) - S(D_2, f)| \leq \frac{1}{n}.$$

Quitte à prendre le minimum des δ_i, $i = 1, \ldots, n$ on peut supposer (δ_n) décroissante. Choisissons, pour chaque n, une subdivision D_n qui soit δ_n-fine. Pour tout $m > n$, D_m est aussi δ_n-fine. De plus $|S(D_m, f) - S(D_n, f)| \leq \frac{1}{n}$. : la suite $(S(D_n, f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc vers une limite, que nous noterons $\mathcal{S}$. Fixons maintenant un $\varepsilon > 0$, et prenons $n > \frac{2}{\varepsilon}$, ainsi qu'une jauge D qui soit δ_n-fine. Alors

$$|S(D, f) - \mathcal{S}| \leq |S(D, f) - S(D_n, f)| + |S(D_n, f) - \mathcal{S}| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon,$$

Ce qui montre que f est intégrable sur $[a, b]$. □

Théorème 4.5. *Une fonction f est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions KH-intégrables(Kurzweil-Henstock intégrables) $f_{-\varepsilon}$ et $f_{+\varepsilon}$ telle que*

$$f_{-\varepsilon} \leq f \leq f_{+\varepsilon}$$

et

$$\left| \int_a^b f_{+\varepsilon}\, dx - \int_a^b f_{-\varepsilon}\, dx \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Si f est intégrable, elle vérifie clairement les conclusions du théorème, en prenant $f_{-\varepsilon} = f = f_{+\varepsilon}$. Supposons maintenant que f vérifie la condition d'encadrement ci-dessus. Si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on trouve $f_{-\varepsilon}$ et $f_{+\varepsilon}$ ainsi que des jauges δ_- et δ_+ pour ces deux fonctions, qui sont telles que pour toute subdivision $\delta_\pm$-fine D on ait

$$\left| S(D, f_\pm) - \int_a^b f_\pm \, dx \right| < \varepsilon.$$

On pose $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$. Pour toute subdivision pointée D, on a

$$S(D, f_{-\varepsilon}) \le S(D, f) \le S(D, f_{+\varepsilon})$$

Si donc D_1 et D_2 sont δ-fines, alors

$$\int_a^b f_{-\varepsilon} \, dx - \varepsilon \le S(D_1, f) \le \int_a^b f_{+\varepsilon} \, dx + \varepsilon.$$

et

$$-\int_a^b f_{+\varepsilon} \, dx - \varepsilon \le -S(D_2, f) \le -\int_a^b f_{-\varepsilon} \, dx + \varepsilon,$$

ce qui implique, vues les hypothèses sur $f_\pm$, que

$$|S(D_1, f) - S(D_2, f)| \le \int_a^b (f_{+\varepsilon} - f_{-\varepsilon}) \, dx + 2\varepsilon \le 3\varepsilon.$$

La fonction f vérifie donc le critère de Cauchy, alors elle est intégrable. □

Corollaire 4.6. *Une fonction continue sur $[a, b]$ est KH-intégrable (et même Riemann intégrable).*

Théorème 4.7. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a, b]$ alors elle l'est aussi sur tout segment $[r, s]$ inclus dans $[a, b]$.*

Démonstration. montrons d'abord que f est intégrable sur $[a, s]$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit δ une jauge ϵ-adaptée à f sur $[a, b]$ et D_1, D_2 deux subdivision δ-fines de $[a, s]$ et D_3 une subdivision δ-fine de $[s, b]$, alors la concaténation de D_1 et D_2 avec D_3 forme deux subdivisions de $[a, s] \cup [s, b] = [a, b]$ δ-fines, que l'on note D_1^*, D_2^* respectivement.

Puisque f est intégrable sur $[a, b]$, alors le critère de Cauchy est vérifié et on a alors

$$|S(D_1^*, f) - S(D_2^*, f)| \le \varepsilon.$$

en décomposant les deux sommes $S(D_1^*, f)$ et $S(D_1^*, f)$ pour avoir

$$|S(D_1,f)+S(D_3,f)-S(D_2,f)-S(D_3,f)|=|S(D_1,f)-S(D_2,f)|\leq\varepsilon.$$

Et alors le critère de Cauchy est vérifié sur le sous-intervalle $[a,s]$, d'où l'intégrabilité de f sur cet intervalle.

De la même manière, en choisissant cette fois deux subdivisions δ-fines D_1 et D_2 de $[r,s]$ et une subdivision D_3 δ-fine de $[s,b]$ on monte que f est intégrable sur $[r,s]$. □

Ce théorème permet de définir sur $[a,b]$ la fonction intégrale indéfinie d'une application Kurzweil-Henstock intégrable sur $[r,s]$.

Théorème 4.8 (Relation de Chasles). *Soit $a<r<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dont les restrictions à $[a,r]$ et $[r,b]$ sont Kurzweil-Henstock intégrables. Alors f est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f\,dx=\int_a^r f\,dx+\int_r^b f\,dx.$$

Démonstration. Posons

$$A_1=\int_a^r f\,dx.$$

$$A_2=\int_r^b f\,dx.$$

et

$$A=A_1+A_2.$$

Par hypothèse, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta_1>0$ fine sur $[a,r]$ et $\delta_2>0$ sur $[r,b]$ telles que pour toutes subdivisions pointées δ_1-fine D_1 de $[a,r]$ et D_2 δ_2-fine de $[r,b]$ on ait $|S(D_1,f)-A_1|\leq\varepsilon$ et $|S(D_2,f)-A_2|\leq\varepsilon$. Le but est de trouver une majoration de $|S(D,f)-A|$ lorsque D est une subdivisions pointée quelconque de $[a,b]$. Si D contient $x_k=r$ comme l'un des points intermédiaires, D induit des subdivisions D_1 de $[a,r]$ et D_2 de $[r,b]$ telle que $S(D,f)=S(D_1,f)+S(D_2,f)$. On peut encore se ramener à cette situation dans le cas où l'un des intervalles $[x_{k-1},x_k]$ contient r dans son intérieur ($r\in\,]x_{k-1},x_k[$) tout en étant pointé par $c_k=r$. En effet on peut alors découper $([x_{k-1},x_k],c_{k-1})$ en les deux intervalles pointés $([x_{k-1},r],r)$ et $([r,x_k],r)$ ce qui ne change pas la somme de Riemann $S(D,f)$. On construit une jauge $\delta:[a,b]\to\mathbb{R}_*^+$ en posons

$$\delta(t)=\begin{cases}\min(\delta_1(t),r-t) & \text{si } a\leq t<r\\ \min(\delta_1(t),\delta_2(t)) & \text{si } t=r\\ \min(\delta_2(t),t-r) & \text{si } r\leq t<b\end{cases}$$

Soit D une subdivision pointée de $[a, b]$ δ-fine. On a alors

$$c_k \in [a, r[\Rightarrow x_k \leq c_k + \delta(c_k) \leq c_k + (b - c_k) = b \Rightarrow [x_{k-1}, x_k] \subset [a, r]$$

$$c_k \in]r, b] \Rightarrow x_{k-1} \geq c_k - \delta(c_k) \geq c_k - (c_k - b) = b \Rightarrow [x_{k-1}, x_k] \subset [r, b].$$

Ceci montre que le seul intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ pouvant contenir r lorsque $c_k = r$, ce qui induit un découpage $S(D, f) = S(D_1, f) + S(D_2, f)$.
Les subdivisions $((x_0, ..., x_{k-1}, c_k), (c_1, ..., c_k))$ et $((c_k, x_k, ..., x_n), (c_k, ..., c_n))$ sont δ_1-fine (respectivement δ_2). On en déduit alors

$$\mid S(D, f) - \int_a^r f\, dx - \int_r^b f\, dx \mid \leq \varepsilon,$$

ce qui termine la démonstration. □

Théorème 4.9. *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, et si λ est un nombre réel, alors $f + g$ et λf sont intégrables, et l'on a les identités*

$$\int_a^b (f + g)\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx.$$

et

$$\int_a^b \lambda f\, dx = \lambda \int_a^b f\, dx.$$

Démonstration. (i) Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe deux jauges δ_1, δ_2 telles que pour toute subdivision D qui soit δ_1-fine (respectivement δ_2-fine), on ait

$$\mid S(D, f) - \int_a^b f\, dx \mid \leq \varepsilon.$$

respectivement

$$\mid S(D, g) - \int_a^b g\, dx \mid \leq \varepsilon.$$

On pose alors $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, qui est encore une jauge, et l'on note que si D est δ-fine, elle est aussi δ_1-fine et δ_2-fine. On conclut alors.

(ii) f est intégrable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on dispose d'une jauge δ_ε, telle que pour tout subdivision D ε-adaptée à f, on ait $\mid S(D, f) - \int_a^b f dx \mid \leq \varepsilon$.
Alors

$$\left|S(D, \lambda f) - \lambda \int_a^b f\, dx\right| = \left|\lambda S(D, f) - \lambda \int_a^b f\, dx\right| = |\lambda| \left|S(D, f) - \int_a^b f\, dx\right| \leq |\lambda|\, \varepsilon.$$

D'où λf est intégrable et

$$\int_a^b \lambda f\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx.$$

$\square$

Théorème 4.10. *Si f et g sont Kurzweil-Henstock intégrables vérifient $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f\,dx \geq \int_a^b g\,dx.$$

En particulier, si f est Kurzweil-Henstock intégrable vérifie $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f\,dx \geq 0.$$

Démonstration. Pour toute subdivision pointée D de l'intervalle $[a,b]$, $S(D,g) \leq S(D,f)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soient δ_1 une jauge ε-adaptée à f et δ_2 une jauge ε-adaptée à g. Alors la jauge $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ est ε-adaptée à la fois à f et à g. Soit D^* une subdivision δ-fine. Posons

$$A = \int_a^b f\,dx.$$

et

$$B = \int_a^b g\,dx.$$

Alors $B \leq S(D^*,g)+\varepsilon$ et $S(D^*,f) \leq A+\varepsilon$, comme $S(D^*,g) \leq S(D^*,f)$, on obtient

$$B \leq S(D^*,g) + \varepsilon \leq S(D^*,f) + \varepsilon \leq (A+\varepsilon) + \varepsilon.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, $B \leq A + 2\varepsilon$ ce qui entraîne $B \leq A$.

Pour prouver la première inégalité il suffit de prendre g égale à la fonction nulle sur $[a,b]$. $\square$

Remarque 4.4. Nous avons présenté l'intégrale de Kurzweil-Henstock indépendamment de la théorie de la mesure, ce qui expulse le fait de penser si le théorème précédent reste-il vrai dans le cas des hypothèses vérifiées presque partout.

4.3 Intégrales et primitives

Théorème 4.11 (Théorème fondamental de l'analyse). *Soit f une fonction de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $[a,b]$ (en a et b, il s'agit de dérivées à droite et à gauche respectivement). Alors f' est Kurzweil-Henstock intégrable et on a*

$$\int_a^b f'\,dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$. l'existence de

$$f'(x) = \lim_{y\to x, y\neq x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

signifie par définition que pour tout $x \in [a,b]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta(x) > 0$ tel que

$$y \in [a,b], 0 <\mid y-x \mid \leq \delta(x) \Rightarrow \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(x) \right| \leq \varepsilon.$$

et donc

$$y \in [a,b], y \in [x-\delta(x), x+\delta(x)] \Rightarrow \mid f(y) - f(x) - (y-x)f'(x) \mid \leq \varepsilon \mid y-x \mid$$

(puisque l'inégalité est vraie aussi pour $y = x$). Prenons une subdivision pointée D δ-fine c'est-à dire telle que $h_k = x_k - x_{k-1} \leq \delta(c_k)$
En appliquant l'égalité ci-dessus à $x = c_k$ et $y = x_{k-1}$ ou $y = x_k$, il vient

$$\mid f(x_{k-1}) - f(c_k) - (x_{k-1} - c_k)f'(c_k) \mid \leq \varepsilon \mid x_{k-1} - c_k \mid = \varepsilon(c_k - x_{k-1}).$$

$$\mid f(x_k) - f(c_k) - (x_k - c_k)f'(c_k) \mid \leq \varepsilon \mid x_k - c_k \mid = \varepsilon(x_k - c_k).$$

En faisant la différence, à l'aide de l'inégalité $\mid u - v \mid \leq \mid u \mid + \mid v \mid$ on obtient

$$\mid f(x_k) - f(x_{k-1}) - (x_k - x_{k-1})f'(c_k) \mid \leq \varepsilon(x_k - x_{k-1}).$$

La sommation de ces inégalités pour $k = 1, \ldots, n$ donne

$$\mid f(b) - f(a) - S(D, f') \mid \leq \varepsilon(b-a).$$

d'où le résultat. □

Ce théorème affirme que toute fonction dérivée est Kurweil-Henstock intégrable. C'est un résultat très particulier de la théorie Kurzweil-Henstock, que même la théorie de Lebesgue ne permet pas d'obtenir. Car on a vu qu'elle exige l'hypothèse supplémentaire que f' est intégrable.considérons par exemple $x \to x^2 \sin(1/x^2)$ sur $[0,1]$. avec son prolongement par continuité en 0 et dérivable de dérivée non bornée donc non Lebesgue-intégrable.

Théorème 4.12. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un ensemble fini $E = \{u_i, i \leq 1 \leq p\}$ tel que f soit dérivable sur $[a, b]\backslash E$. Alors f' (prolongé arbitrairement aux points u_i) est intégrable sur $[a, b]$ et on a*

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration. Supposons pour simplifier f' définie par $f'(u_i) = 0$ aux points oú f n'est pas dérivable. On reprend la démonstration du théorème 4.11 La dérivabilité de f sur $[a, b]\backslash E$ implique l'existence d'une fonction $\delta : [a, b]\backslash E \to \mathbb{R}_*^+$ telle que

$$y \in [a, b], y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow \mid f(y) - f(x) - (y - x)f'(x) \mid \leq \varepsilon \mid y - x \mid$$

pour tout tout $x \in [a, b]\backslash E$, ce qui donne

$$\mid f(x_k) - f(x_{k-1}) - (x_k - x_{k-1})f'(c_k) \mid \leq \varepsilon \mid x_k - x_{k-1} \mid .$$

pour toute subdivision pointée D δ-fine, lorsque $c_k \in [a, b]\backslash E$. D'autre part, $c_k = u_i$, la continuité de f au point u_i entraine l'existence d'un δ_i tel que tout point $x \in [u_i - \delta_i, u_i + \delta_i]$ satisfasse $\mid f(x) - f(u_i) \mid \leq \varepsilon 2^{-i}$. On pose alors $\delta(u_i) = \delta_i$. Dans ce cas il vient $\mid f(x_k) - f(x_{k-1}) \mid \leq 2\varepsilon 2^{-i}$. si $c_k = u_i$, ce qui donne

$$\mid f(x_k) - f(x_{k-1}) - (x_k - x_{k-1})f'(c_k) \mid \leq 2\varepsilon 2^{-i}.$$

En sommant toutes ces inégalités, il vient

$$\mid f(b) - f(a) - S(D, f') \mid \leq \varepsilon(b - a) + 2\varepsilon.$$

(car $\sum_{i=1}^{p} 2\varepsilon 2^{-i} \leq 2\varepsilon$), ce qui démontre le théorème.

Rmq : Dans le cas ou $f'(u_i) \neq 0$ on peut minimiser le pas autant qu'on veut pour tuer ces valeurs. □

Théorème 4.13. *Soient F et G deux fonctions dérivables sur $[a, b]$. Alors $F'G$ est intégrable si et seulement si FG' l'est. Dans ce cas, on la formule*

$$\int_a^b F'(x)G(x)\, dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)G'(x)\, dx.$$

Démonstration. Comme F et G sont dérivables, FG l'est aussi et

$$(FG)' = F'G + FG'.$$

Le théorème 4.11 dit par ailleurs que $(FG)'$ est intégrable, et le théorème s'en déduit. □

Théorème 4.14 (Changement de variable). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet comme primitive F, en posant $x = \varphi(t)$ pour une certaine fonction $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ dérivable telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. On alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Démonstration. On a

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [Fo\varphi(t)]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (Fo\varphi)'(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

d'où le résultat souhaité. □

Théorème 4.15 (Formule de la moyenne). *Soient f, g deux fonctions définies sur $[a, b]$. On suppose f, g et fg intégrables, g positive, et f bornée. Alors*

$$\left(\inf_{x\in[a,b]} f(x)\right) \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \left(\sup_{x\in[a,b]} f(x)\right) \int_a^b g(x)dx.$$

Si de plus f est continue, alors il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x).$$

Démonstration. Soit m (respectivement M) la borne inférieure (respectivement supérieure) de f sur $[a, b]$. Grâce à la positivité de g on a, pour tout $x \in [a, b]$

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x).$$

et la première partie du théorème découle de la positivité de l'intégrale. et la deuxième du théorème des valeurs intermédiaires.

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, alors l'encadrement précédent assure que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et le choix de $f(c) = \frac{m+M}{2}$ convient par exemple.

Sinon $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ est un élément de $[m, M]$, alors si f est continue, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un point $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ ce qui démontre le théorème. □

Corollaire 4.16. *Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in \,]a, b[$ telle que*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-c)f(c).$$

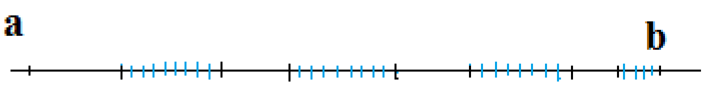
Démonstration. Résultat du théorème précédent avec $g = 1$. □

4.4 Les théorèmes de convergence

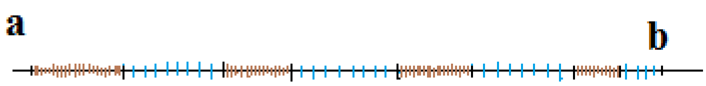
Lemme 4.17 (Lemme de Henstock)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une application Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a, b]$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit δ une application ε-adaptée à f. Alors, pour toute D' subdivision partielle (ne recouvre par tout l'intervalle $[a, b]$) δ-fine, on a*

$$\left| S(D', f) - \sum_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration.



il existe une jauge $\delta^* < \delta$ qui correspond à une erreur $\eta << \varepsilon$. On complète la subdivision partielle D' par des subdivisons D_s^* δ^*-fine des k intervalles manquants pour avoir une subdivision D δ-fine de $[a, b]$ tout entier.



$$\left| S(D, f) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon.$$

f est integrable sur chaque $[x_{s-1}, x_s]$, $s \in \{1, \ldots, k\}$ donc par définition

$$\left| S(D_s^*, f) - \int_{x_{s-1}}^{x_s} f \right| \leq \eta.$$

alors

$$\left|S(D',f)-\sum_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} f\right| = \left|S(D,f)-\int_a^b f - \left(\sum_{s=1,\dots,k} S(D_s^*,f)-\int_{x_{s-1}}^{x_s} f\right)\right| \leq \varepsilon + k\eta.$$

Le choix de η est arbitraire alors, en faisant le tendre vers 0 et on conclut le résultat souhaité. □

Théorème 4.18. *Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors ses intégrales indéfinies $x \to \int_a^x f$ sont continues sur $[a,b]$.*

Démonstration. Il s'agit de prouver que $\forall x$, $\int_x^{x+h} f(t)dt$ tend vers 0 avec le pas h. Soit $\varepsilon > 0$. Soit δ une jauge ε-adaptée à f. Prenant h tq $|h| < \delta(x)$. Notons K le segment joignant x à $x+h$. On a $K \subset]x-\delta(x), x+\delta(x)[$, et le lemme de Henstock appliqué à (x,K) ((x,K) sous-intervalle pointé δ-fine de $[a,b]$) montre que $\left|\int_x^{x+h} f - f(x)\,|h|\right| \leq \varepsilon$, d'où $\int_x^{x+h} f \leq \varepsilon + |f(x)h|$. Quitte à diminuer encore $|h|$ de façon à ce que $|f(x)h| \leq \varepsilon$, on aura $\int_x^{x+h} f \leq 2\varepsilon$. Ce qui démontre de le théorème. □

Nous présentons un théorème d'interversion limite-intégrale dans le cadre de l'intégrale de Henstock-Kurzweil, valable pour les limites simples de suites croissantes de fonctions. Ce type de résultat ne se rencontre pas dans le cadre de l'intégrale de Riemann vu dans la première section. Il est donc remarquable que la généralisation de cette intégrale par l'introduction de la notion de jauge permet d'obtenir un théorème de convergence monotone, qui est l'un des grands résultats de cette théorie d'intégration. C'est ce théorème de convergence monotone pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil qui nous permettra de montrer que les fonctions Lebesgue-intégrables sur $[a,b]$ sont HK-intégrables sur cet intervalle (voir le dernier paragraphe de ce mémoire).

Théorème 4.19 (Convergence monotone)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et Kurzweil-Henstock intégrables sur $[a,b]$. On suppose que pour tout x dans $[a,b]$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, convergente vers une limite notée $f(x)$, et que la suite des intégrales $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors f est Kurzweil-Henstock intégrable et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Démonstration. Posons $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$ avec $A_n = \int_a^b f_n$. on a par hypothèse $A < +\infty$. On se propose alors de montrer que f est HK-intégrable sur $[a,b]$ d'intégrale A. Fixons $\varepsilon > 0$. On peut choisir un entier n_0 tel que

$$A - \varepsilon \leq A_n \leq A$$

pour $n \geq n_0$. Pour chaque indice n, choisissons une jauge $\delta_n : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, $2^{-n}\varepsilon$-adaptée à f_n. D'autre part, pour tout x dans $[a,b]$, choisissons un indice $N(x) \geq n_0$ tel que

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x),$$

pour tout $n \geq N(x)$.

On définit une jauge δ sur $[a,b]$ par $\delta(x) = \delta_{N(x)}(x)$. Soit $D = ((x_i)_{0 \leq i \leq N}, (c_i)_{1 \leq i \leq N})$ une subdivision pointée δ-fine de $[a,b]$. On peut écrire

$$\begin{aligned}|S(D,f) - A| \leq &\left|\sum_{i=1}^{N}(f(c_i) - f_{N(c_i)}(c_i))(x_i - x_{i-1})\right| \\ &+ \left|\sum_{i=1}^{N} f_{N(c_i)}(c_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N(c_i)}(x)dx\right| \\ &+ \left|\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N(c_i)}(x)dx - A\right|.\end{aligned}$$

Par définition de $N(x)$, la première somme du membre de droite est majorée par $\varepsilon\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-1)$. Comme $N(c_i) \geq n_0$, on voit que la troisième somme est majorée par

$$\left|\int_a^b f_{n_0}(x)dx - A\right| \leq \varepsilon.$$

En effet, grâce à la monotonie de la suite (f_n), on a

$$\int_a^b f_p(x)dx \leq \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{N(c_i)}(x)dx \leq \int_a^b f_q(x)dx.$$

avec $p = \min(N(c_i))$, $q = \max(N(c_i))$ $q \geq p \geq n_0$. Reste la deuxième somme du membre de droite. Pour cela, on regroupe les indices j tels que $N(c_i)$ soit égal à un indice n donné. 4.17 implique

$$\left|\sum_{N(c_i)=n} f_n(c_i)(x_k - x_{k-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_n(x)dx)\right| \leq 2^{-n}\varepsilon.$$

En sommant sur toutes les valeurs de n, on voit que la deuxième somme est majorée par 2ε. Au total nous avons

$$|S(D,f) - A| \leq \varepsilon(b-a+3),$$

par conséquent f est Kurzweil-Henstock intégrable d'intégrale

$$A = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

$\square$

Lemme 4.20. *(lemme de Fatou) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+$ Kurzweil-Henstock intégrables sur $[a,b]$, convergeant simplement vers une fonction f, et telle que $\liminf_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$ soit finie. Alors f est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a,b]$ et :*

$$\int_a^b f \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b f_n.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'on a

$$\liminf_n \int_a^b f_n \geq \int_a^b \liminf_n f_n.$$

En effet, si on pose $f = \lim_n \inf f_n$ et $h_n = \inf_{k\geq n} f_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers f. Comme $h_n \leq f_k$ pour tout $k \geq n$, on a

$$\int_a^b h_n \leq \inf_{k\geq n} \int_a^b f_k.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\liminf_n \int_a^b f_n \geq \int_a^b \liminf_n f_n.$$

et de l'inégalité $h_n \leq f_n$ on déduit que la suite $\left(\int_a^b h_n\right)$ converge.

Le théorème de convergence monotone affirme alors que f est Kurzweil-Henstock intégrable et que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b h_n = \int_a^b f$.

On conclut alors le résultat souhaité. $\square$

Théorème 4.21 (Convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ Kurzweil-Henstock intégrables sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Kurzweil-Henstock intégrable telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b], |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Alors f est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a,b]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que $|f_n - f| \leq 2\varphi$ et on applique le lemme 4.20 à la suite $(2\varphi - |f_n - f|)$ de fonctions Kurzweil-Henstock intégrables. Il vient

$$\begin{aligned}
\int_a^b 2\varphi &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b 2\varphi - |f_n - f| \\
&\leq \int_a^b 2\varphi + \liminf_{n\to+\infty} \int_a^b -|f_n - f| \\
&\leq \int_a^b 2\varphi - \limsup_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n - f|.
\end{aligned}$$

On en déduit $\limsup_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0$ et les conclusions du théorème $\square$

4.5 Comparaison des trois théories d'intégrations

Théorème 4.22. *La fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est Kureweil-Henstock intégrable*

Démonstration. Soit f la fonction de Dirichlet et rangeons en une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les éléments de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit une fonction δ par

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}} & \text{si} \quad t = r_k \end{cases}$$

Soit alors $((x_i)_{0\leq i\leq n}, (c_i)_{1\leq i\leq n})$ une subdivision pointée de $[0,1]$ δ-fine. On note $I = \{1, \dots, n\}$ et J l'ensemble des indices $1 \leq i \leq n$ tel que $c_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, il vient

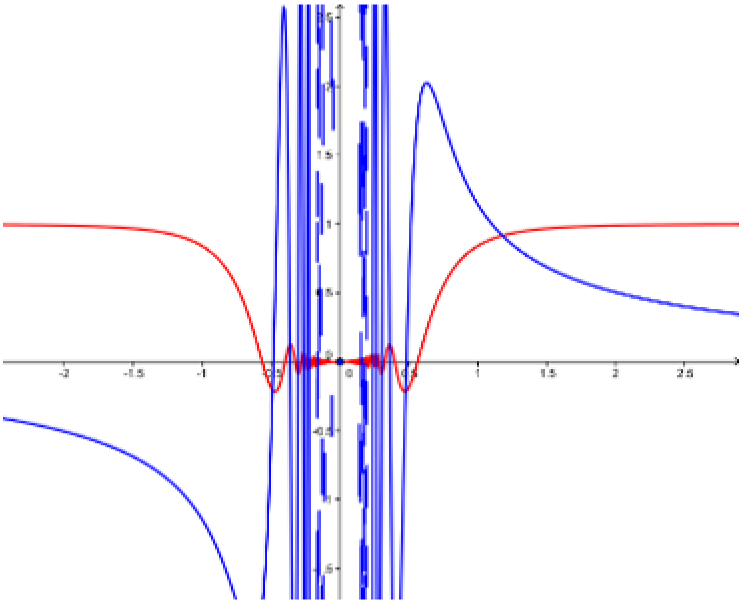
$$|S(D,f)| = \left| \sum_{i\in J} (x_i - x_{i-1}) \right| \leq 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} = \varepsilon.$$

la jauge δ est donc ε-adaptée à f et le résultat est établi. $\square$

Ce théorème montre l'intégrabilité de la fonction de Dirichlet au sens de l'intégrale de Kurweil-Henstock, qui n'est pas Riemann intégrable. En effet, si g et h sont des fonctions en escalier respectivement minorant et majorant f alors nécessairement $g \leq 0$ et $h \geq 1$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), donc on ne peut pas avoir $\int_0^1 (h-g)(x)dx$ qui tend vers 0 quand le pas d'une subdivision tend vers 0.

Dans la théorie d'intégration de Kurzweil-Hesnstock on a déjà signalé que les fonctions dérivées sont toutes intégrables, le résultat qui n'est assuré même dans la théorie de Lebesgue. Si on considère l'exemple suivant $x \rightarrow x^2 \sin(1/x^2) \star$ sur $[0,1]$. avec son prolongement par continuité en 0, on remarque que cette fonction est dérivable de dérivée non bornée donc non Lebesgue-intégrable.

La fonction est en rouge et sa dérivée en bleue.



En outre l'intégrale de Kurzweil-Henstock a élargit de plus la classe des fonctions intégrables

Notons λ la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$ et $\mathbb{1}_E$ la fonction indicatrice d'une partie E de $[a,b]$.

L'exemple qu'on noté $\star$ donné précédemment montre l'existence de fonctions Kurzweil-Henstock intégrable sans l'être au sens de Lebesgue. Nous allons maintenant montrer la stricte inclusion de La théorie Lebesgue dans celle de Kurzweil-Henstock.

Rappelons de la notion de la mesure extérieure λ^* définie par, pour $A \subset P(\mathbb{R})$

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} l(I_n) : (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E_A \right\}$$

avec

$$E_A = \left\{ (I_n)_{n \in \mathbb{N}} : I_n =]a_n, b_n[, -\infty < a_n \leq b_n < +\infty \quad \text{et} \quad A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right\}$$

et

$$l(I) = b - a \quad \text{si} \quad I =]a, b[, -\infty < a \leq b < +\infty.$$

Définition 4.23. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$, est dit Lebesgue-mesurable, ou plus simplement mesurable, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert O contenant E tq

$$\lambda^*(O \setminus E) \leq \varepsilon.$$

Définition 4.24. Si $E \subset \mathbb{R}$ est mesurable, on définit sa mesure de Lebesgue par

$$\lambda(E) = \lambda^*(E).$$

Proposition 4.25. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est mesurable, alors il existe G un une intersection dénombrable d'ouverts contenant E et N un ensemble de mesure nulle tels que $E = G \setminus N$.*

Démonstration. si E est mesurable, pour tout entier k, il existe un ouvert O_k contenant E et tel que $\lambda^*(O_k \setminus E) \leq \frac{1}{k}$. Alors $G = \cap_{k=1}^{+\infty} O_k$ est une intersection dénombrable d'ouverts contenant E et pour tout $k \geq 1$, $(G \setminus E) \subset (O_k \setminus E)$. Donc pour tout $k \geq 1$, $\lambda^*(G \setminus E) \leq \frac{1}{k}$ et donc $G \setminus E$ est de mesure extérieure nulle. Ainsi $N = G \setminus E$ est donc mesurable et de mesure nulle et $E = G \setminus N$. □

Proposition 4.26. *Une fonction nulle en dehors d'un ensemble négligeable, est nécessairement KH-intégrable et son intégrale est nulle. De plus, si deux fonctions $g, h : [a, b] \to E$ coïncident en dehors d'une partie dénombrable de $[a, b]$,alors g est KH-intégrable si et seulement si h est KH-intégrable et on a alors*

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b h(t)dt.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $A = \{t \in [a, b] : f(t) \neq 0\}$. Par hypothèse, A est mesurable de mesure nulle. Posons ensuite $A_n = \{t \in [a, b] : n < |f(t)| \leq n + 1\}$. On a $A_n \subset A$, donc A_n est mesurable et de mesure nulle. Il existe donc une famille dénombrable $(I_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que $A_n \subset \cup_{k=0}^{\infty} I_{n,k}$

et $\sum_{k=0}^{\infty} \mid I_{n,k} \mid \leq \frac{\varepsilon}{2^n(n+1)}$. Définissons maintenant une jauge $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$. Si $t \in [a, b] \setminus A$, posons $\delta(t) = 1$, si $t \in A$, il existe un unique $n(t) \in \mathbb{N}$ tel que $t \in A_{n(t)}$. Soit alors $k(t)$ le plus petit entier k tel que $t \in I_{n(t),k}$; choisissons $\delta(t) > 0$ assez petit pour avoir $[t - \delta(t), t + \delta(t)] \subset I_{n(t),k(t)}$. Soit alors $D = (x, c)$ une subdivision pointée δ-fine de $[a, b]$ et $S(D, f) = \sum_{k=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(c_i)$ la somme de Riemann associée. Si i est tel que $c_i \in [a, b] \setminus A$, alors $f(c_i) = 0$ et les termes correspondants dans $S(D, f)$ sont nuls. Considérons alors les indices i tels que $c_i \in A = \cup_{n=0}^{\infty} A_n$. Pour i fixé il existe un unique n tel que $c_i \in A_n$. Par définition de $\delta(c_i)$ et puisque D est δ-fine, on a nécessairement $[x_{i-1}, x_i] \subset I_{n,k}$ pour un certain k et donc $(x_i - x_{i-1}) |f(c_i)| \leq |I_{n,k}| (n+1)$. Par suite $\sum_{i|c_i \in A_n} (x_i - x_{i-1}) |f(c_i)| \leq (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} |I_{n,k}| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ donc $\sum_{i|c_i \in A_n} (x_i - x_{i-1}) |f(c_i)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$. On a donc $|S(D,f)| \leq 2\varepsilon$. pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui montre que f est KH-intégrable d'intégrale nulle. Le reste de la démonstration se déduit de ce qui précède en considérant la fonction $f = g - h$. □

Proposition 4.27. *λ la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$. Si $A \subset [a,b]$ est Lebesgue mesurable, alors $\mathbb{1}_A$ est Kurzweil-Henstock intégrable et*

$$\int_a^b \mathbb{1}_A(x)dx = \lambda(A).$$

Démonstration. Soit $A \subset [a,b]$ Lebesgue mesurable. Alors d'après la proposition 4.25 il existe une suite décroissante $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de $[a,b]$ telle que $A \subset O_n$ pour tout n, et $N = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n \setminus A$ est de mesure de Lebesgue nulle. Dans la suite, nous poserons $G = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Puisque $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_G$ coïncident en dehors de l'ensemble de mesure nulle N, $\mathbb{1}_A$ est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si $\mathbb{1}_G$ est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a,b]$ et, dans ce cas, leurs intégrales coïncident (4.26). Chaque O_n est un ouvert de $[a,b]$,donc $O_n = \cup_{k\in\mathbb{N}} I_{n,k}$ où $I_{n,k}$ est un intervalle ouvert contenu dans $[a,b]$ et les $I_{n,k}$ sont deux à deux disjoints, alors $\mathbb{1}_{I_{n,k}}$ est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b \mathbb{1}_{I_{n,k}}(t)dt = \lambda(I_{n,k})$. En posant $g_{n,l} = \sum_{k=0}^{l} \mathbb{1}_{I_{n,k}}$ et en appliquant le théorème de convergence monotone 4.19 à la suite croissante $(g_{n,l})_{l\in\mathbb{N}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathbb{1}_{O_n}(t)dt &= \int_a^b \left(\lim_{l\to\infty} g_{n,l}(t)\right) dt \\
&= \lim_{l\to\infty} \int_a^b g_{n,l}(t)dt \\
&= \lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{l} \int_a^b \mathbb{1}_{I_{n,k}}(t)dt \\
&= \lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{l} \lambda(I_{n,k}) \\
&= \lim_{l\to\infty} \lambda(\cup_{k=0}^{l} I_{n,k}) \\
&= \lambda(\cup_{k=0}^{+\infty} I_{n,k}) \\
&= \lambda(O_n) \leq (b-a) < +\infty.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\mathbb{1}_{O_n}$ est Kurweil-Henstock intégrable et que $\int_a^b \mathbb{1}_{O_n}(t)dt = \lambda(O_n)$. Par conséquent, la fonction $\mathbb{1}_{[a,b]\setminus O_n} = \mathbb{1}_{[a,b]} - \mathbb{1}_{O_n}$ est également Kurweil-Henstock intégrable. En appliquant de nouveau le théorème de convergence monotone, cette fois à la suite croissante $\mathbb{1}_{[a,b]\setminus O_n}$, on obtient donc que $\mathbb{1}_G = \mathbb{1}_{[a,b]} - \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[a,b]\setminus O_n}$ est Kurzweil-Henstock intégrable et que $\int_a^b \mathbb{1}_G(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbb{1}_{O_n}(t)dt$ soit d'après ce qui précède, $\lim_{n\to\infty} \lambda(O_n) = \int_a^b \mathbb{1}_G(t)dt = \int_a^b \mathbb{1}_A(t)dt$. La suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite décroissante de parties de mesure de Lebesgue finie, on a $\lim_{n\to\infty}(O_n) = \lambda(G) = \lambda(A)$. □

Proposition 4.28. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$,alors f est Kurzweil-Henstock intégrable sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Démonstration. La proposition 4.27 montre que ceci est vrai si $f = 1_A$ est la fonction caractéristique d'une partie Lebesgue mesurable.

En écrivant $f = f^+ - f^-$ et en utilisant la linéarité des intégrales de Henstock-Kurzweil et de Lebesgue, on constate qu'il suffit de démontrer le résultat pour $f : [a,b] \to [0,\infty]$ Lebesgue-intégrable. Or, dans ce cas, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de fonctions étagées Lebesgue-intégrables. Puisque ces fonctions sont des combinaisons linéaires (finies) de fonctions caractéristiques de parties Lebesgue-mesurables, on a bien, par linéarité, f_n HK-intégrable et $\int_a^b f_n(x)dx = \int_{[a,b]} f_n d\lambda$. En appliquant les théorèmes de convergence monotone 4.19 à ces deux suites d'intégrales, on obtient bien que f est HK-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda$$

. □

Il en résulte que toute fonction Lebesgue intégrable est Kurzweil-Henstock intégrable et que les intégrales coïncident.

Conclusion : Le choix de l'intégrale de Kurzweil-Henstock présente l'avantage de fournir des définitions assez simples, peut-être plus simples que celle de Riemann puisque les encadrements de fonctions ne sont plus nécessaires. Toute fonction Riemann-intégrable ou Lebesgue-intégrable est KH-intégrable avec la même intégrale ; en particulier, la fonction de Dirichlet valant 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels, n'est pas Riemann-intégrable, mais est KH-intégrable d'intégrale nulle. Par rapport à l'intégrale de Lebesgue, l'intégrale de Kurzweil-Henstock présente l'avantage que toute fonction dérivée est intégrable, ce qui fournit une version plus puissante du théorème fondamental de l'analyse. Le théorème de convergence monotone et le théorème de convergence dominée qui caractérisent l'intégrale de Lebesgue sont vrais avec l'intégrale de Kurzweil-Henstock. Contrairement aux fonctions Lebesgue intégrables, une fonction peut être KH-intégrable sans que sa valeur absolue le soit.

Bibliographie :

[1] : J. P. Demailly, . *Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Henstock-Kurzweil*,version du 17 novembre 2007. http://users.aims.ac.za/~faniry/probability/henstock

[2] : J. Ch. Feauveau, *Introduction à l'intégrale de Kurzweil-Henstock*,.

[3] : J. JACOD, *Théorie d'intégration* ,. 2000-2001, www.proba.jussieu.fr/users/lma/enseignement/integration/Chap3.PDF

[4] : Ch. Suquet, *Intégrale de Riemann 2005-06.* math.univ-lille1.fr/~suquet/ens/IntRiem/IntRiem06Comm.pdf

[5] : H. Ziat *Mesure et Intégration, Licence de Mathématiques et applications, FST Fès, 2014-2015.*