TABLE DES MATIÈRES

Introduction :

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.
L'objectif principal de ce mémoire est de présenter les conditions de Prüfer et traiter leur transfert aux différents modèles de constructions qui sont les localisation, l'image homomorphe, les extensions triviales, les produits fibrés, la duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal, et les sous-anneaux rétractés.

Ainsi, ce mémoire est divisé en sept chapitres :

Le premier chapitre :

Dans ce chapitre nous étudions l'article de S. Glaz **"Prüfer conditions in rings with zerodivisord "** dans le but d'introduire les conditions de Prüfer, et d'explorer les différents relations existant entre ces conditions, en présentant dans ce contexte des exemples et des contre-exemples.

Le deuxième chapitre :

Le second chapitre est consacré à l'article S. Bazzoni et S. Glaz **"Prüfer rings"**, dans lequel elles étudient la notion d'un domaine de Prüfer et les propriétés des anneaux de Prüfer apparaissent dans le livre de Robert Gilmer *Théorie des idéaux multiplicatifs* , ensuite elles traitent les extensions de ces propriétés aux anneaux contenant des diviseurs de zéro.

Le troisième chapitre :

Il s'agit de l'article de C. Bakkari **"Transfer of Prüfer-like conditions "**, dans lequel elle étudie la stabilité des conditions de Prüfer sous la localisation et l'image homomorphe d'un anneau , et elle présente une nouvelle famille d'exemples d'anneaux soumis aux conditions de Prüfer.

Le quatrième chapitre :

Dans ce chapitre nous abordons l'article de C. Bakkari et N. Mahdou **"Prüfer-like conditions in pull-backs "**,
dans lequel ils traitent le transfert des conditions de Prüfer au Produit fibré, ainsi ils introduisent une nouvelle famille d'anneaux avec des diviseurs de zéro soumis à certaines conditions de Prüfer .

Le cinquième chapitre :

Basé sur l'article de C. Bakkari, S. Kabbaj, N. Mahdou intitulé **"Trivial extensions defined by Prüfer conditions"**. Le but est de traiter le transfert des conditions de Prüfer aux extensions triviales afin de générer une nouvelle classe d'anneaux avec diviseurs de zéro soumis aux différentes conditions de Prüfer.

Le Sixième chapitre :

Consacré à l'article de M. Chhiti, M. Jarrar, S. Kabbaj, N.Mahdou **"Prüfer Conditions in an Amalgamated Duplication of a Ring Along an Ideal "**, qui examine les extensions idéales-théorétiques aussi bien qu'homologique du concept de domaine de Prüfer aux anneaux commutatifs contenant des diviseurs de zéro dans une duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal. Les nouveaux résultats rapportent une nouvelle famille originale d'exemples publiés de duplications amalgamées soumises aux conditions de Prüfer diverses.

Le Septième chapitre :

Dans ce chapitre, nous considérons l'article de, Chahrazade Bakkari, Najib Mahdou et Hakima Mouanis **"Prüfer-Like Conditions in Subring Retracts and Applications "**. Les auteurs de cet article traitent les extensions d'un domaine de Prüfer aux anneaux commutatifs contenant des diviseurs zéro et examinent leur transfert entre un anneau commutatif et son sous-anneau rétracté. Ainsi les résultats obtenaient produisent de nouvelles familles d'exemples d'anneaux soumis à certaines conditions de Prüfer données.

Perspectives : Nous terminons ce travail, par quelques perspectives de recherche que nous souhaitions aborder prochainement.

CHAPITRE 1

LES CONDITIONS DE PRÜFER DANS LES ANNEAUX CONTENANT DES DIVISEURS DE ZÉRO

S. Glaz, *Prüfer conditions in rings with zerodivisors.* CRC Press Series of Lectures in Pure Appl. Math 241, 272-282 (2005)

Introduction :

Tout le long de ce chapitre, R désigne un anneau commutatif et unitaire contenant des diviseurs de zéro sauf mention expresse du contraire. Un domaine R est un anneau commutatif unitaire et intègre.

1.1 Préliminaires

En 1932, H. Prüfer a introduit et étudie les anneaux intègres dont tout idéal non nul de type fini est inversible. Il a aussi démontrer que, pour vérifier cette condition, il suffit qu'il soit vrai pour tout idéal à deux générateurs. En 1936, Krull[55] s'est intéressé aux domaines de Prüfer, et il les a nommé en l'honneur de Prüfer et a prouvé d'autres définitions équivalentes à celle de domaine de Prüfer, dites **les conditions**

de Prüfer. Ces conditions ont été étendu à travers les années aux anneaux contenant des diviseurs de zéro.

Définition 1.1.1 (Prüfer [65],1932)
Soit D un domaine. On dit que D est un domaine de Prüfer si tout idéal non nul de type fini de D est inversible.

Nous considérons les extensions d'un domaine de Prüfer suivantes :

(1) R est un anneau semi-héréditaire.

(2) R a une dimension faible inférieure ou égal à 1 (w.dim(R) ≤ 1).

(3) R est un anneau arithmétique.

(4) R est un anneau Gaussien.

(5) R est un anneau de Prüfer.

Maintenant, nous adoptons les définitions suivantes :

Définition 1.1.2
Soient R un anneau et I un idéal de R. Alors :

(i) *I est dit régulier s'il contient un élément régulier, **i.e**, un non diviseur de zéro.*

(ii) *R est dit semi-héréditaire si tout idéal de type fini de R est projectif.*

(iii) *$w.dim(R) \leq 1$ si et seulement si tout idéal de type fini de R est plat si et seulement si tout idéal de R est plat.*

(iv) *R est un anneau arithmétique si tout idéal de type fini de R est localement principal.*

(v) *R est un anneau Gaussien si $c(fg) = c(f)c(g)$, pour tout f et $g \in R[x]$. où $c(h) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ est l'idéal de R engendré par les coefficients de h dans R.*

(vi) *(Griffin [48] 1970)R est un anneau de Prüfer si tout idéal régulier de type fini de R est inversible.*

Dans (Glaz [42]), il est montré que (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5).

Notons que dans le cas intègre toutes ces conditions coïncident et que la réciproque de chaque implication n'est pas vrai dans un anneau contenant des diviseurs de zéro.

En 1936, Krull [55] s'est intéressé aux domaines de Prüfer, et il les a nommé en l'honneur de Prüfer et a prouvé la première définition équivalente d'un tel domaine ; à savoir :

Théorème 1.1.3 (Krull[55])
D est un domaine de Prüfer si et seulement si toute localisation de D par un idéal premier (respectivement maximal) de D est un domaine de valuation ; c'est à dire que D_P est un domaine de valuation pour tout idéal premier (respectivement maximal) P de D .

On note, pour qu'un domaine D soit un domaine de valuation, il faut et il suffit que l'ensemble des idéaux de D soit totalement ordonné par la relation d'inclusion.
Soit R un anneau et soit f un polynôme dans $R[x]$. On note $c(f)$ le contenu de f, c'est l'idéal de R engendré par les coefficients de f dans R.
Pour deux polynômes f et g dans $R[x]$, on a toujours $c(fg) \subseteq (f)c(g)$.
$f \in R[x]$ est dit un polynôme de Gauss si $c(fg) = c(f)c(g)$ pour tout polynôme $g \in R[x]$.
Un anneau R est dit Gaussien si tout polynôme à coefficients dans R est Gaussien .
Les deux définitions sont donnée par Tsang [69]
En 1965, Tsang[69], et indépendamment en 1967 ,Gilmer[33], ont montré la caractérisation d'un domaine de Prüfer suivante.

Théorème 1.1.4 (Tsang[69], Gilmer[33])
D est un domaine de Prüfer si, et seulement si, D est un domaine Gaussien. Soit R un anneau commutatif, et désignons par $Q(R)$, l'anneau total des fractions de R . Un idéal fractionnaire I de R est inversible si $I^{-1}I = R$, où $I^{-1} = \{r \in Q(R)/rI \subset R\}$. Un idéal inversible est de type fini et contient un élément régulier.

Pour tout idéal I de R il y'a une relation forte entre inversibilité, projectivité, et la propriété d'être localement principal, à savoir :

Théorème 1.1.5
Soient R un anneau et I un idéal de R. Alors :

(1) *Si I est inversible, alors I est projectif.*

(2) *Si I est projective, alors I est localement principal.*

(3) *Si I est de type fini et régulier alors :*

I est inversible si, et seulement si, I est projectif si, et seulement si, I est localement principal.

En particulier, les trois conditions sont équivalentes pour tout idéal de type fini d'un domaine R.

Définition 1.1.6
Soit R un anneau commutatif.
On dit que R est un domaine semi-héréditaire si R un anneau semi-héréditaire intègre.

En vue du théorème ci-dessus, nous concluons le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.7
D est un domaine de Prüfer si et seulement si, D est un domaine semi-héréditaire.

1.2 Implication et contre-exemples

1.2.1 Relation entre les anneaux semi-héréditaire et les anneaux avec w.dim(R) $\leq$ 1

Théorème 1.2.1
Si R est un anneau semi-héréditaire alors w.dim(R)$\leq$ 1.

Preuve :
On sait que, tout idéal I d'un anneau semi-héréditaire R est projectif, on obtient alors, pour tout idéal premier P de R ; R_P est un domaine. De plus, les idéaux de type fini de R_P sont projectifs et donc libres . Ainsi R_P est un domaine de Bézout (**i.e** tout idéal de type fini est principal) et donc un domaine de valuation. Ceci implique que

$$w.dim(R) = \sup\{w.dim(R_P)/P \text{ parcourt tous les idéaux premiers de } R\} \leq 1$$

Exemple 1.2.2
***Anneau non semi-héréditaire** R **tel que** $w.dim(R) \leq 1$.*

Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, et soit $\mathbb{Q}[x]$ l'anneau des polynômes à une variable sur $\mathbb{Q}$. Soit R le sous-anneau de $\prod \mathbb{Q}[x]$, le produit infini de $\mathbb{Q}[x]$, formé par les suites $(x, 0, x^2, x^3, ...)$, qui deviennent constantes à partir d'un certain rang. Ce qui suit est une compilation des conditions connues dans [44, 63] sous lesquelles un anneau de $w.dim(R) \leq 1$ est semi-héréditaire .

Théorème 1.2.3 (Glaz[44], Marot[63])
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *R est un anneau semi-héréditaire.*

(2) *R est cohérent de $w.dim(R) \leq 1$.*

(3) *$w.dim(R) \leq 1$ et $Q(R)$, l'anneau total des fractions de R est régulier au sens de Von Neumann.*

Preuve :
L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) découle de [63] et indépendamment de Glaz[44]. L'implication (1) $\Longrightarrow$ (3) se déduit d'un résultat de Marot[63], qui dit qu'un anneau R est

semi-héréditaire si et seulement si $Q(R)$ est régulier au sens de Von Neumann et R_P est un domaine de valuation pour tout idéal premier P de R.

1.2.2 Relation entre les anneaux R de w.dim(R)$\leq$ 1 et les anneaux arithmétiques

Théorème 1.2.4 (Jensen[51])
Tout anneau R de dimension globale faible inférieur ou égal à 1 ($w.dim(R) \leq 1$) est un anneau arithmétique.

Preuve :
La preuve est dûe à Jensen[51]. Cette implication est évidente, d'après ce qui précède en regardant la nature des localisations des deux types d'anneaux.

Nous citons maintenant une caractérisation très utile d'anneaux arithmétiques dû à Jensen[51] ce qui permet de trouver un contre-exemple de la réciproque du théorème précédent.

Théorème 1.2.5 (Jensen[51])
R est un anneau arithmétique si, et seulement si, tout idéal de type fini de R est localement principal.

Exemple 1.2.6
Anneau arithmétique R tel que w.dim(R)$>$ 1.

Soit $R = \mathbb{Z}_4$, l'anneau des entiers modulo 4 comme $2\mathbb{Z}_4$, est l'unique idéal de $\mathbb{Z}_4$, alors $\mathbb{Z}_4$ est un anneau arithmétique. De plus $\mathbb{Z}_4$ n'est pas un anneau réduit car $2^2 = 0$, donc d'après le théorème ci-dessous, on déduit que $w.dim\mathbb{Z}_4 > 1$.

Théorème 1.2.7 (Jensen[51])
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *w.dim(R) ≤ 1.*

(2) *R est un anneau arithmétique réduit .*

1.2.3 Relation entre les anneaux arithmétiques et les anneaux Gaussiens

Théorème 1.2.8
Tout anneau arithmétique est Gaussien.

Preuve :
Soit f un polynôme à coefficients dans un anneau arithmétique R. Alors, d'après le

théorème 1.2.5 on a $c(f)$ est un idéal localement principal. Il est prouvé dans [69] qu'un tel polynôme est Gaussiens et donc R est un anneau Gaussien.

Exemple 1.2.9
Anneau Gaussien non-arithmétique.

Soit K un corps, et soit t et u deux indéterminées sur K. Soient T et U les images de t et u dans $K[t,u]/(t,u)^2$, et $R = k[T,U]_{(T,U)}$. R est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M} = (T,U)$ puisque $\mathcal{M}^2 = 0$, on peut vérifier facilement que R est Gaussien. Or $\mathcal{M}$ n'est pas principal donc R n'est pas arithmétique.

Définition et Théorème 1.2.10
*Un anneau R est dit un **(PF)-anneau**, si tout idéal principal de R est plat. Cette propriété est équivalente à R est un domaine local, Glaz[44].*
*Un anneau R est dit un **(PP)-anneau**, ou anneau de Baer faible, si tout idéal principal de R est projectif.*

Remarque 1.2.11
*La condition **(PP)** est plus forte que la condition **(PF)**. La relation exacte entre les deux conditions est donnée par les théorèmes ci-dessous.*

On désigne par $\mathbf{Min}(R)$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de R relativement à la topologie de Zariski induite par le $Spec(R)$, **i.e** la topologie dont les fermés sont les parties de $Spec(A)$ de la forme
$V(J) = \{I \in Spec(R) \mid J \subseteq I\}$ pour tout idéal J de A.

Théorème 1.2.12 (Glaz[44])
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *R est un **(PF)-anneau** et le $\mathbf{Min}(R)$ est compact.*
2. *R est un **(PP)-anneau**.*
3. *R est un **(PF)-anneau** et $Q(R)$, l'anneau total des fractions de R, est régulier au sens de Von Neumann.*

Théorème 1.2.13 (Glaz[46])
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$w.dim(R) \leq 1$.*
2. *R est un **(PF)-anneau** Gaussien.*
3. *R est un anneau Gaussien réduit.*

Théorème 1.2.14 (Glaz[46])
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *R est un anneau semi-héréditaire.*
2. *R est un* ***(PP)-anneau*** *Gaussien .*
3. *R est un anneau Gaussien et $Q(R)$ est régulier au sens de Von Neumann.*

Remarques 1.2.15

(1) *La condition* ***(PF)-anneau*** *implique qu'un anneau est réduit, mais la réciproque est en général fausse. On considère par exemple un anneau local réduit qui n'est pas un domaine. Le théorème 1.2.13 implique que ces deux conditions coïncident, pour les anneaux gaussiens.*

(2) *La condition* ***(PP)-anneau*** *implique que $Q(R)$ est régulier au sens de Von Neumann. Par contre la condition " $Q(R)$ est régulier au sens de Von Neumann " n'implique pas en général que les idéaux principaux de R sont projectifs. On considère par exemple un anneau Noethérien, local, réduit qui n'est pas un domaine. Un tel anneau n'est pas un* ***(PF)-anneau****. Car l'anneau est Noethérien, il a beaucoup d'idéaux premiers minimaux de type finis.*

(3) *$Q(R)$ est le produit de toutes les localisations de R par les idéaux premiers minimaux de R. Comme chaque localisation est un corps, $Q(R)$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann. Le théorème 1.2.14 implique que ces deux conditions sont équivalentes lorsque l'anneau est gaussien.*

1.2.4 Relation entre les anneaux Gaussiennes et les anneaux de Prüfer :

Théorème 1.2.16
Soit R un anneau Gaussien, alors R est un anneau de Prüfer.

Preuve :
Soient R un anneau, f un polynôme Gaussien dont le contenu $c(f)$ contient un élément régulier, alors $c(f)$ est un idéal inversible (Voir Lucas[58], sur le conjecture de kaplansky). Par conséquent tout idéal de type fini régulier d'un anneau Gaussien R est inversible.

On désigne par $\min R$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de R relativement à la topologie de Zariski induite par le $Spec\, R$.

Exemple 1.2.17
Anneau de Prüfer qui n'est pas Gaussien

Soit K un corps algébriquement clos, dénombrable, et soit J un ensemble infini. On désigne par K^J l'ensemble des applications de J dans K et $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels. Soit $L = J \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Quentel ([66]), a construit une algèbre, $R \subseteq K^L$, qui satisfait les propriétés suivantes :*

(1) *R est un anneau réduit.*

(2) *$R = Q(R)$.*

(3) ***Min***(R) *l'ensemble de tous les idéaux premiers minimaux de R est compact, relativement à la topologie de Zariski induite.*

(4) *R n'est pas un anneau régulier au sens de Von Neumann.*

Puisque $R = Q(R)$, alors tout élément de R est une unité ou bien un diviseur de zéro, et par conséquent, R n'a pas d'idéaux réguliers. Ainsi R est un anneau de Prüfer. Il est montré dans [46] que R n'est pas un anneau Gaussien.

CHAPITRE 2

LES ANNEAUX DE PRÜFER

S. Bazzoni et S. Glaz, *Prüfer rings*, Multiplicative Ideal theory in Commutative Algebra, 55-72 Springer U.S (2006).

2.1 Propriétés des anneaux de Prüfer

Le théorème ci-dessous collecte toutes les définitions équivalentes d'un domaine de Prüfer.

Théorème 2.1.1 (Gilmer [39, 33, 41])
Soit R un domaine. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *R est un domaine de Prüfer.*

(2) *Tout idéal de R à deux générateurs est inversible.*

(3) *R_P est un domaine de valuation, pour tout idéal premier P de R.*

(4) *R_P est un domaine de valuation, pour tout idéal maximal P de R.*

(5) *Tout idéal de type fini non nul I de R est un idéal d'annulation , c'est à dire que ; si $IJ = IK$ pour tous idéaux J et K de R, alors $J = K$.*

(6) *Si I, J et K sont des idéaux de type fini de R tel que $IJ = IK$, alors $J = K$.*

(7) *R est intégralement clos et il existe un entier $n > 1$ tel que, pour deux éléments a, b de R, on a : $(a, b)^n = (a^n, b^n)$.*

(8) *R est intégralement clos et il existe un entier $n > 1$ tel que, pour tous deux éléments a, b de R, on a : $a^{n-1}b \in (a^n, b^n)$.*

(9) *Tout idéal I de R est complet, c'est à dire que $I = \cap IV_\alpha$ où V parcourt tous les sur-anneaux de valuation de R.*

(10) *Tout idéal de type fini de R est une intersection des idéaux de valuation.*

(11) *Si I, J et K sont des idéaux non nuls de R, alors $I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$.*

(12) *Si I, J et K sont idéaux non nuls de R, alors $I(J \cap K) = IJ \cap IK$.*

(13) *Si I et J sont des idéaux non nuls de R, alors $(I + J)(I \cap J) = IJ$.*

(14) *Si I et J sont des idéaux non nuls de R et K est un idéal type fini non nul de R, alors $(I + J) : K = (I : K) + (J : K)$.*

(15) *Pour deux éléments a, b de R, on a : $(a : b) + (b : a) = R$.*

(16) *Si I et J sont deux idéaux de type fini non nuls de R et K est un idéal non nul de R, alors $K : (I \cap J) = (K : I) + (K : J)$.*

(17) *R est intégralement clos et tout sur-anneau de R est l'intersection des localisations de R.*

(18) *R est intégralement clos et tout sur-anneau de R est l'intersection des anneaux quotients de R.*

(19) *Tout sur-anneau de R est intégralement clos.*

(20) *R est intégralement clos et les idéaux premiers de tout sur-anneau de R sont extensions des idéaux premiers de R.*

(21) *R est intégralement clos et pour tout idéal premier P de R, et tout sur-anneau S de R, il existe au plus un idéal premier de S qui recouvre P.*

(22) *Pour tous polynômes f et g dans $R[x]$, nous avons $c(fg) = c(f)c(g)$.*

On rappelle qu'un sur-anneau de R est un sous-anneau de $Q(R)$ qui contient R.
Preuve :
Pour l'équivalence des conditions (1) et (2), (voir Prüfer[65]).
(3) et (4), (Voir Krull [55], 1936),(5),(6),(7) et (8) (Voir Jensen [52], 1963), et (Gilmer[35], 1965) ; (9) et (10) (Voir Gilmer et Ohm [34], 1965) ; (11) et (16), (Voir. Jensen [52], 1963) ; (17) et (21) (Voir Butts et Phillips[20], 1965), et (Gilmer [36, 37], 1966) ; (22)(Voir Tsang [69], 1965), et (Arnold et Gilmer[3, 38], 1967).

2.2 Extensions des anneaux multiplicatifs : anneaux arithmétiques et anneaux de Prüfer

La première extension, de la notion d'un domaine de Prüfer à des anneaux contenant des diviseurs de zéro, est la notion d'un anneau arithmétique, définie par Fuchs [28] en 1949.

Définition 2.2.1
Un anneau R est dit anneau arithmétique si ses idéaux forment un treillis distributif ; c'est à dire que $(I+J)\cap K = (I\cap K)+(J\cap K)$ pour tous idéaux I,J et K de R.

Ces anneaux représentent des extensions de la notion d'un domaine de Prüfer via la propriété (11) du théorème 2.1.1. Les premières études sur les propriétés des anneaux arithmétique, mettent en évidence plus de similitudes avec les propriétés des domaines de Prüfer. On va introduire un certain nombre de résultats , et pour plus de détails on peut consulter les références suivantes : Jensen [51, 53], Butts et Smith [21], et Griffin [48], Glaz [42].

Théorème 2.2.2
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- **(1)** *R est un anneau arithmétique.*
- **(2)** *Les idéaux de R_P sont totalement ordonnés par la relation d'inclusion pour tout idéal premier P de R.*
- **(3)** *Les idéaux de R_P sont totalement ordonnés par la relation d'inclusion pour tout idéal maximal P de R.*
- **(4)** *Tout idéal de type fini de R est localement principal.*
- **(5)** *Si I et J sont des idéaux de R et K un idéal de type fini de R, alors : $(I+J):K = (I:K)+(J:K)$.*
- **(6)** *Si I et J sont deux idéaux de type fini de R et K est un idéal de R, alors : $K:(I\cap J) = (K:I)+(K:J)$.*
- **(7)** *Soit L l'ensemble de tous les idéaux premiers P de R tel que les idéaux de R_P sont totalement ordonnés par inclusion. Pour tout idéal I de R, on a $I = \cap(IR_P\cap R)$, où P parcourt l'ensemble L.*
- **(8)** *Si I et J sont deux idéaux de R avec J de type fini et $I\subset J$, alors il existe un idéal K de R tel que $I = JK$.*

Proposition 2.2.3
Soit R un domaine. Alors, R est un domaine de valuation si et seulement si, les idéaux de R_P sont totalement ordonnés par la relation d'inclusion, pour tout idéal premier (respectivement maximal) P de R.

La seconde extension de la notion d'un domaine de Prüfer est celle de la notion d'un anneau de Prüfer.

Définition 2.2.4
Un anneau R est dit anneau de Prüfer si tout idéal de type fini de R contenant un élément régulier est inversible.

Pour étendre les caractérisations d'un domaine de Prüfer mentionnées dans le théorème 2.1.1 à un anneau de Prüfer, on va commencer par faire une extension de la notion d'un domaine de valuation à des anneaux contenant des diviseurs de zéro ; c'est la notion d'un anneau de valuation, en remplaçant les anneaux de localisations par des idéaux premiers par d'autres anneaux quotients associés à des idéaux premiers.

Définition et propriétés des anneaux de valuations :

Définition 2.2.5
Une valuation v est une application d'un anneau Q dans un groupe additif totalement ordonné $G \cup \{\infty\}$ où le symbole ∞, est le plus grand élément de G vérifiant les propriétés suivantes :
pour tout x et y dans G on a :

- **(1)** $v(xy) = v(x) + v(y)$.
- **(2)** $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.
- **(3)** $v(1) = 0$ *et* $v(0) = \infty$.

L'anneau $V = V_v = \{x \in Q : v(x) \geq 0\}$, et l'idéal $P = P_v = \{x \in Q : v(x) > 0\}$, noté (V, P) est appelés la paire de valuation de Q
V est appelé anneau de valuation de Q, G est le groupe de valuation de V.
(V, P) est une paire de valuation de Q, où V est un sous-anneau de l'anneau Q et P est un idéal premier de V si, et seulement si, pour tout $x \in Q - V$, il existe un $y \in P$ tel que $xy \in V - P$. Par analogie à la notion d'un domaine de valuation, il y a plusieurs cas importants dans lesquels les paires de valuation satisfont des propriétés similaires à des domaines de valuation. Par exemple, il existe des anneaux de valuation qui ne sont pas des anneaux de Prüfer. Et, si (V, P) est une paire de valuation, alors P n'est pas nécessairement l'unique idéal maximal régulier de V, et il peut arriver que P ne soit pas un idéal maximal de V.

Théorème 2.2.6 (Boisen et Larsen [14])
Soit R un anneau et soit P un idéal premier de R. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *(R, P) est une paire de valuation et R est un anneau de Prüfer.*

(2) *R est un anneau de Prüfer et P est l'unique idéal maximal régulier de R.*

(3) *R est un anneau de valuation et P est l'unique idéal maximal régulier de R.*

On donne ici un exemple important d'un anneau de valuation intégralement clos, qui n'est pas un anneau de Prüfer.

Exemple 2.2.7 (Gilmer[40])
Exemple d'anneau R dans lequel tout idéal engendré par un ensemble fini d'éléments réguliers est inversible, R est un anneau de valuation, mais R n'est pas un anneau de Prüfer.

Soit $D = K[x, y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées et à coefficients dans un corps K, et soit $\mathcal{M}_\lambda$ l'ensemble des idéaux maximaux de D ne contenant pas y. Soit $N = \bigoplus_\lambda (D/\mathcal{M}_\lambda)$ et soit $R = D + N$, l'idéalisation de D par N. Dans[40], il est montré que chaque idéal de R engendré par des éléments réguliers est principal et donc inversible, par ailleurs l'idéal régulier de R engendré par x et y n'est pas R-inversible, donc d'après les propriétés décrites dans le paragraphe précédent, on peut conclure que R est un anneau de valuation.

Théorème 2.2.8
Soit V un anneau dans lequel tout idéal régulier est engendré par son ensemble d'éléments réguliers (un tel anneau est appelé anneau de Marot). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *V est un anneau de valuation et de Prüfer.*

(2) *V est un anneau de valuation.*

(3) *Pour tout élément x régulier dans $Q(V)$, l'anneau total des fractions de V, on a x ou bien x^{-1} est dans V.*

Maintenant, on défini des anneaux de quotients d'un anneau R associés à un idéal premier P de R.

Définition 2.2.9
Soient R un anneau ,S une partie multiplicative de R.

i) *On appelle l'anneau des fractions régulier de R par rapport à S, notée $R_{(S)}$, la localisation de R par l'ensemble des éléments réguliers de S.*

ii) *On appelle le grand anneau des fractions de R par rapport à S, notée* $R_{[S]}$*, l'ensemble*

$$R[S] = \{z \in Q(R) : zs \in R \text{ pour un certain } s \in S\}$$

Remarque 2.2.10

Nous avons les inclusions suivantes : $R \subset R_{(S)} \subset R_{[S]} \subset Q(R)$. *Si P est un idéal premier de R et* $S = R - P$, *alors on note* $R_{(S)}$ *et* $R_{[S]}$ *par* $R_{(P)}$, *respectivement* $R_{[P]}$. *Un anneau R dans lequel les éléments réguliers qui ne sont pas des unités sont contenus dans un idéal premier P, avec* $R_{[P]}$ *un anneau de valuation, est appelé anneau de pré-valuation.*

Théorème 2.2.11 (Griffin[48])

Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *R est un anneau de Prüfer.*

(2) *Tout idéal régulier à deux générateurs est inversible.*

(3) $R_{[P]}$ *est un anneau de valuation pour tout idéal maximal P de R.*

(4) $R_{(P)}$ *est un manis anneau de pré-valuation pour tout idéal maximal P de R.*

(5) *Pour tout idéal maximal P de R, les idéaux réguliers de R qui sont contenus dans P sont totalement ordonnés par la relation d'inclusion.*

(6) *Si I est un idéal régulier de type fini de R et J et K sont des idéaux de R avec* $J = IK$, *alors :* $J = K$.

(7) *R est intégralement clos et pour tout a et b dans R avec a régulier, il existe un entier* $n > 1$ *tel que* $(a, b)^n = (a^n, b^n)$.

(8) *Si I est un idéal régulier de type fini de R et J est un idéal de R contenu dans I, alors il existe un idéal K de R tel que* $J = KI$.

(9) *Si J et K sont des idéaux de R, dont l'un est régulier, et I est un idéal de R, alors :* $I(J \cap K) = IJ \cap IK$.

(10) *Si I et J sont des idéaux de R, dont l'un est régulier, alors :* $(I+J)(I \cap J) = IJ$.

(11) *Si I, J et K sont des idéaux de R avec I régulier et K de type fini, alors :* $(I + J) : K = (I : K) + (J : K)$

(12) *Si I,J et K sont des idéaux de R avec K régulier et I et J sont de type fini, alors :* $I : (J \cap K) = (I : J) + (I : K)$.

(13) *Si I, J et K sont des idéaux de R dont l'un est régulier, alors :* $I \cap (J+K) = (I \cap J) + (I \cap K)$.

(14) *Tout sur-anneau de R est plat.*

(15) *Tout sur-anneau de R est intégralement clos.*

Définition 2.2.12
Soit R un anneau.

(i) *On dit que I est un zéro-idéal maximal, si I est un idéal (nécessairement premier) maximal ne contenant pas d'éléments réguliers.*

(ii) *R est dit de diviseurs de zéro arithmétique, si pour tout zéro-idéal maximal P, les idéaux de R_P sont totalement ordonnés par la relation d'inclusion.*

Théorème 2.2.13 (Griffin[48])
Soient R un anneau et $Q(R)$, l'anneau total des fractions de R. R est arithmétique si et seulement si R est un anneau de Prüfer et $Q(R)$ a des diviseurs de zéro arithmétique.

2.3 Extensions à l'algèbre homologique : anneaux de dimension globale faible inférieure ou égale à 1

Définition 2.3.1
Un anneau R est dit <u>semi-héréditaire</u> si tout idéal de type fini de R est projectif.

Théorème 2.3.2
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *R est régulier au sens de Von Neumann*

(2) *Tout R-module est plat.*

(3) *Pour tout $x \in R$, il existe $y \in R$ tel que $yx^2 = x$.*

(4) *Pour tout $x \in R$, il existe une unité $y \in R$ et il existe un idempotent $u \in R$ ($u^2 = u$) tels que $x = yu$.*

(5) *Tout idéal de type fini de R est principal engendré par un idempotent.*

(6) *R_P est un pour corps pour tout idéal maximal P de R.*

(7) *R est un anneau réduit auto-injectif .*

Un anneau R est dit <u>cohérent</u> si tout idéal de type fini de R est de présentation finie. Notamment,tout anneau régulier au sens de Von Neumann est <u>cohérent</u>. Tout anneau semi-héréditaire est de dimension globale faible inférieure ou égale à 1.

Théorème 2.3.3
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *R est un anneau semi-héréditaire.*

(2) *$w.gl.dimR \leq 1$ et R est cohérent.*

(3) *$Q(R)$, l'anneau total des fractions de R, est régulier au sens de Von Neumann et R_P est un domaine de valuation pour tout idéal maximal P de R.*

(4) *$w.gl.dimR \leq 1$ et $w.gl.dimQ(R) = 0$.*

(5) *Tout idéal de type fini de R est un facteur direct d'un idéal inversible de R.*

(6) *Tout sous-module de type fini d'un R-module projectif est projectif.*

(7) *Tout R-module sans torsion est plat.*

Théorème 2.3.4 ([44])
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *$w.gl.dimR \leq 1$.*

(2) *Tout idéal de R est plat.*

(3) *R_P est un domaine de valuation, pour tout idéal premier P de R.*

Théorème 2.3.5 (Jensen[53])
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *$w.gl.dimR \leq 1$.*

(2) *R est un anneau arithmétique réduit.*

2.4 Mise au point récente sur les anneaux Gaussiens

Théorème 2.4.1
Soient R un anneau, et f un polynôme Gaussien à coefficients dans R, alors :

(1) *Si $(0 : c(f)) = 0$, alors $c(f)$ est localement principal.*

(2) *Si $c(f)$ est un idéal régulier, alors $c(f)$ est inversible.*

(3) *En particulier, si R est un domaine, alors $c(f)$ est inversible.*

Le théorème suivant est un résumé des propriétés des anneaux Gaussiens qui se trouve dans :
Tsang [69], D.D. Anderson et Camillo [2], Glaz [43], et Lucas [60].

Théorème 2.4.2
Soit $(\mathbf{R}, \mathcal{M})$ *un anneau local d'idéal maximal* $\mathcal{M}$. *Le assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) R *est un anneau Gaussien.*

(2) *Pour tout idéal* I *de type fini de* R, $I/I \cap (0 : I)$ *est un* R*-module cyclique.*

(3) *Pour tout idéal* I *engendré par deux éléments,* $I/I \cap (0 : I)$ *est un* R*-module cyclique.*

(4) *Pour tout* a *et* $b \in R$, *on a :*

(i) $(a, b)^2 = (a^2)$ *ou* (b^2),

(ii) *Si* $(a, b)^2 = (a^2)$ *mboxet* $ab = 0$, *alors* $b^2 = 0$.

(5) *Toute image homomorphe de* R *est un anneau Armendariz. Un anneau* A *est dit Armendariz si, pour tout* $f, g \in A[x]$ *on a :* $c(fg) = 0$ *implique que* $c(f)c(g) = 0$.

Théorème 2.4.3 (Glaz[44])
. *Soit* R *un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) R *est* ***(PF)-anneau***.

(2) R_P *est un domaine pour tout idéal premier* P *de* R.

(3) R_P *est un domaine pour tout idéal maximal* P *de* R.

(4) R *est réduit et tout idéal premier de* R *contient un unique idéal premier minimal.*

(5) R *est réduit et tout idéal maximal* P *de* R *contient un unique idéal premier minimal* p. *Dans ce cas,* $p = \{r \in R : \exists u \in R - p \text{ tel que } ur = 0\}$ *et* $R_p = Q(R_P)$ *; le corps des fractions de* R_P.

Théorème 2.4.4 (Glaz[44])
Soit R *un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) R *est un* ***(PP)-anneau***.

(2) *Pour tout* $a \in R$, *l'idéal* $(0 : a)$ *est engendré par un idempotent.*

(3) *Tout élément de* R *est le produit d'un non diviseur de zéro et d'un idempotent.*

Définition 2.4.5
Un anneau R *est dit régulier si tout idéal de type fini de* R *est de dimension projectif fini.*

Exemple 2.4.6
*Si K est un corps alors l'anneau des polynômes $K[X_1, \ldots, X_n]$ est régulier.(**Théorème d'Hilbert-syzygy**)*
Si R est un anneau régulier alors $R[X]$ l'est aussi.
Tout domaine de Dedekind est régulier.
Tout localisation d'un anneau régulier est régulier.
Tout anneau régulier est réduit mais n'est pas nécessairement intègre, par exemple, le produit de deux domaines réguliers est régulier mais n'est pas un domaine.

Théorème 2.4.7 (Glaz[43])
Soit R un anneau Gaussien cohérent, alors :
$w.gl.dim(R) = 0, 1$ *ou bien* $w.gl.dim(R) = \infty$.
En particulier, si R est un anneau régulier, alors R est semi-héréditaire.

2.5 Les conditions de Prüfer sur l'anneau total des fractions

Rappelons que nous avons les inclusions strictes suivantes :

$$\{\text{Anneaux semi-héréditaires}\} \subsetneq \{\text{Anneaux de } w.gl.dim(R) \leq 1\} \subsetneq \{\text{Anneaux arithmétiques}\}$$

$$\subsetneq \{\text{Anneaux Gaussiennes}\} \subsetneq \{\text{Anneaux de Prüfer}\}.$$

Théorème 2.5.1 (Bazzoni et Glaz[10])
Soient R un anneau, et $Q(R)$, l'anneau total des fractions de R :
Si R satisfait l'une des conditions de Prüfer ci-dessus, alors $Q(R)$ satisfait la même condition.

Remarque 2.5.2
Pour la réciproque du théorème , nous notons d'abord que, les anneaux totaux des fractions n'ont pas d'idéaux propres réguliers, tout anneau qui est un anneau total des fractions est un anneau de Prüfer.
Comme il existe des anneaux qui ne sont pas des anneaux de Prüfer, nous conclure que la propriété anneau de Prüfer n'est pas une propriété qui descend de l'anneau total des fractions sur l'anneau lui-même.
Bien qu'il existe des anneaux totaux des fractions qui ne sont pas des anneaux Gaussiens (Voir exemple 2.5.4), la propriété Gaussien ne descend pas toujours de l'anneau total des fractions sur l'anneau lui-même (Voir exemple 2.5.3).

Exemple 2.5.3
Anneau R avec $Q(R)$ Gaussien, mais R n'est pas Gaussien.

Soit R un anneau local Noethérien réduit qui n'est pas un domaine. Un tel anneau ne peut pas être Gaussien. Puisque R est Noethérien, alors $Min\ R$ est un ensemble fini. Posons $Min\ R = \{P_1, ..., Pn\}$, nous avons $Q(R) = R_{P_1}\times, ..., \times R_{P_n}$, et chaque R_{P_i} est un corps. Il en résulte que $Q(R)$ est un produit direct de corps, régulier au sens de Von Neumann et par suite $Q(R)$ est Gaussien.

Exemple 2.5.4 (Quentel[66])
Anneau total des fractions qui n'est pas Gaussien.

Soit K un corps dénombrable, algébriquement clos et soit I un ensemble infini. Désignons par K^I l'ensemble des applications de I dans K, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Quentel[66] a construit une algèbre $R \subset K^I \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, qui est un anneau total des fractions réduit mais qui n'est pas régulier au sens de Von Neumann, de plus $Min\ R$ est compact pour la topologie de Zarisky induite. On montre par la suite que R n'est pas un anneau Gaussien.

Exemple 2.5.5
Anneau Gaussien R avec $Q(R)$ n'est pas régulier au sens de Von Neumann.

Soit R le sous-anneau du produit direct dénombrable $\prod \mathbb{Q}[x]$, où $\mathbb{Q}[x]$ est l'anneau des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{Q}$, formé par les suite $(x, 0, x^2, 0, x^3, 0, ...)$, et qui deviennent constante a partir d'un certain rang. On vérifie que $w.gl.dim\ R \leq 1$, R et donc $Q(R)$ sont Gaussiens. Mais $Q(R)$ n'est pas régulier au sens de Von Neumann, d'après le théorème 3.3.

Théorème 2.5.6 (S.Bazzoni et S.Glaz[10])
Soit R un anneau. Alors on a :
R est arithmétique si et seulement si R est Gaussien et $Q(R)$ est arithmétique.

Théorème 2.5.7 (S.Bazzoni et S.Glaz[10])
Soit R un anneau. Alors on a :
R est Gaussien si et seulement si R est un anneau de Prüfer et $Q(R)$ est Gaussien.

Théorème 2.5.8 (S.Bazzoni et S.Glaz[10])
Soit R un anneau et $Q(R)$, l'anneau total des fractions de R. Alors on a :

(1) *R est Gaussien si et seulement si R est un anneau de Prüfer et $Q(R)$ est Gaussien.*

(2) *R est un anneau arithmétique si et seulement si R est un anneau de Prüfer et $Q(R)$ est un anneau arithmétique.*

(3) *R est de w.gl.dim $R \leq 1$ si et seulement si R est un anneau de Prüfer et w.gl.dim $Q(R) \leq 1$.*

(4) *R est un anneau semi-héréditaire si et seulement si R est un anneau de Prüfer et $Q(R)$ est un anneau semi-héréditaire.*

(5) *Dans la suite des implications entre les conditions de Prüfer introduites au début de cette section, nous énumérons les conditions de Prüfer de gauche à droite, en commençant par 1 pour les anneaux semi-héréditaires , et on terminant par 5 pour les anneaux de Prüfer. Ensuite, R possède la condition de Prüfer $(\mathbf{n})$ si et seulement si R possède la condition de Prüfer $(\mathbf{n+1})$ et $Q(R)$ possède la condition de Prüfer $\mathbf{n}$, pour tout $1 \leq n \leq 4$.*

(6) *Si $Q(R)$ est régulier au sens de Von Neumann, alors les cinq conditions de Prüfer sur R sont toutes équivalentes.*

CHAPITRE 3

TRANSFERT DES CONDITIONS DE PRÜFER AUX LOCALISATIONS

`C. Bakkari,` *`Transfer of Prüfer-like condition.`* `Gulf Journal of Mathematics Vol 2 (2013) 17-24.`

Dans ce chapitre, on va étudier la stabilité des conditions de Prüfer, sous la localisation par une partie multiplicative S et sous l'image homomorphe.

3.1 Localisation des conditions de Prüfer

Théorème 3.1.1
Soient R un anneau de Prüfer et $S \subseteq R \setminus Z(R)$ une partie multiplicative de R. Alors, $S^{-1}R$ est un anneau de Prüfer.

La preuve du théorème va utiliser le lemme suivant.

Lemme 3.1.2
Soient R un anneau de Prüfer et $S \subseteq R \setminus Z(R)$ une partie multiplicative de R Alors : $Tot(R) = Tot(S^{-1}R)$.

Preuve :
Il est claire que $R \subseteq S^{-1}R$. En effet, soit $a \neq 0 \in R$ tel que $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$. Alors, il existe

$t \in S$ tel que $ta = 0$ et donc a $= 0$, car $t \in S \subseteq R \setminus Z(R)$, ce qui implique que $R \subset S^{-1}R$. Par conséquent, tout élément $a/b \in Tot(R)$, où $a \in R$ et $b \in R \setminus Z(R)$, peut s'écrire comme $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a/1}{b/1}$ avec $b \in S^{-1}R \setminus Z(S^{-1}R)$. Donc, $Tot(R) \subseteq Tot(S^{-1}R)$. Réciproquement, soit $x = \dfrac{a/s}{a'/s'} \in Tot(S^{-1}R))$, où $a/s \in S^{-1}R$ *et* $a'/s' \in S^{-1}R \setminus Z(S^{-1}R)$. On affirme que $a's \in R \setminus Z(R)$. En effet, soit $b \in R$ tel que $ba's = 0$. Alors, il existe $t \in S$ tel que $tbs = 0$ et donc $b = 0$, car $ts \in S \subseteq R \setminus Z(R)$. Par conséquent, x peut s'écrire comme $x = \dfrac{a/1}{a'/1}\dfrac{1/s}{1/s'} = \dfrac{(a/1)(1/s)(ss'/1)}{(a'/1)(1/s')(ss'/1)} = \dfrac{(as'/1)}{(a's/1)}$, car $ss' \in S^{-1}R \setminus Z(S^{-1}R)$. Par conséquent, $x = \dfrac{as'}{a's}$, car $a's \in R \setminus Z(R)$; c'est à dire que $x \in Tot(R)$. $\blacksquare$

Preuve du théorème :

L'une des caractérisations des anneaux de Prüfer est que, tout sur-anneau d'un anneau de Prüfer est intégralement clos. Il est clair, d'après le lemme 3.1.2, que $R \subseteq S^{-1}R \subseteq Tot(R)(= Tot(S^{-1}R))$, pour toute partie multiplicative $S \subseteq R \setminus Z(R)$. Donc, R est de Prüfer et par conséquent $S^{-1}R$ est de Prüfer.

L'exemple suivant montre que la condition $S \subseteq R \setminus Z(R)$ est nécessaire dans le théorème précédent.

Exemple 3.1.3
Soient $A = K[[X_1, X_2, X_3]] = K + \mathcal{M}$, l'anneau des séries formelles à trois indéterminées sur un corps K, et $\mathcal{M} := (X_1, X_2, X_3)$. Soient E un A-module tel que $\mathcal{M}E = 0$, et $R := A \propto E$ l'extension trivial de A par E. Soient S la partie multiplicative de R défini par $S := \{(X_1, 0)^n / n \in \mathbb{N}\}$, et S_0 la partie multiplicative défini par $S_0 := \{X_1^n \; n \in \mathbb{N}\}$. Alors :

- **(1)** *R est un anneau de Prüfer.*
- **(2)** *$S_0^{-1}A$ est un domaine qui n'est pas de Prüfer.*
- **(3)** *$S^{-1}R \cong S_0^{-1}A$. En particulier, $S^{-1}R$ n'est pas un anneau de Prüfer.*

Preuve :

- **(1)** On peut vérifier facilement que R est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M} \propto E$, et que tout élément de R est une unité ou bien un diviseur de zéro. Donc, $R = Tot(R)$ et par conséquent R est un anneau de Prüfer.
- **(2)** Nous avons clairement :
  $S_0^{-1}A = S_0^{-1}K[[X_1, X_2, X_3]] = (S_0^{-1}K[[X_1]])[[X_2, X_3]] \subseteq qf(K[[X1]])[[X_2, X_3]]$.

Puisque $S_0^{-1}K[[X1]]$ est anneau Noethérien, alors d'après [[44] théorème 8.1.1], $S_0^{-1}A$ est un domaine avec

$$w.dim(S_0^{-1}A) = w.dim(S_0^{-1}K[[X_1]])[[X_2, X_3]] = w.dim(S_0^{-1}K[[X1]]) + 2 \geq 2.$$

En particulier, $S_0^{-1}A$ n'est pas un domaine de Prüfer.

(3) Puisque $X_1E \subseteq \mathcal{M}E = 0$ et $X_1 \in S_0^{-1}A$, alors $S_0^{-1}E = 0$. Ainsi, $S^{-1}(0 \propto E) = 0$ et donc $S^{-1}R = \{\dfrac{(a,0)}{(s,0)} \ / \ a \in A \ et \ s \in S_0\}$. Maintenant, on peut vérifier facilement que l'application :

$$\begin{aligned} f : \ S_0^{-1}A &\longrightarrow S^{-1}R \\ \frac{a}{s} &\longmapsto \frac{(a,0)}{(s,0)} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. En particulier, R n'est pas un domaine de Prüfer, d'après 2). ■

Corollaire 3.1.4
Soient R un anneau et $S \subseteq R \setminus Z(R)$ une partie multiplicative de R. Alors :

(1) *Si R est Gaussien, alors $S^{-1}R$ est Gaussien.*

(2) *Si R est arithmétique, alors $S^{-1}R$ est arithmétique.*

(3) *Si $w.dim(R) \leq 1$, alors $w.dim(S^{-1}R) \leq 1$.*

(4) *Si R est semi-héréditaire, alors $S^{-1}R$ est semi-héréditaire.*

Preuve :
En effet, d'après [10, Théorème 3.12], si R satisfait l'une des conditions de Prüfer, alors $Tot(R)(= Tot(S^{-1}R))$ satisfait la même condition. En outre, R est dans tous les cas, de Prüfer et donc d'après le théorème 3.1.1 $S^{-1}R$ est de Prüfer . Par conséquent, $S^{-1}R$ satisfait la même condition de Prüfer que R. ■

Remarque 3.1.5
La localisation d'un anneau de Prüfer n'est pas toujours de Prüfer (voir l'exemple 3.1.3).

Théorème 3.1.6
Soient R un anneau et S une partie multiplicative de R. Alors :

(1) *Si R est Gaussien, alors $S^{-1}R$ est Gaussien.*

(2) *Si R est arithmétique, alors $S^{-1}R$ est arithmétique.*

(3) *Si $w.dim(R) \leq 1$, alors $w.dim(S^{-1}R) \leq 1$.*

(4) *Si R est semi-héréditaire, alors $S^{-1}R$ est semi-héréditaire.*

Preuve :

1. Supposons que R est un anneau Gaussien. Il s'agit de montrer que, pour tous $S^{-1}f$ et $S^{-1}g \in S^{-1}R[X]$, on a $C_{S^{-1}R}(S^{-1}fS^{-1}g) = C_{S^{-1}R}(S^{-1}f)C_{S^{-1}R}(S^{-1}g)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \in R[X]$.
   On a $C_R(fg) = C_R(f)C_R(g)$, car R est Gaussien, donc :
   $$\begin{aligned} C_{S^{-1}R}(S^{-1}f)C_{S^{-1}R}(S^{-1}g) &= S^{-1}(C_R(f))S^{-1}(C_R(g)) \\ &= S^{-1}[C_R(f)C_R(g)] \\ &= S^{-1}[C_R(fg)] \text{ (car R est Gaussien)} \\ &= C_{S^{-1}R}(S^{-1}fS^{-1}g) \end{aligned}$$
   Ce qui termine la preuve. ■

2. Soit J un idéal de type fini de $S^{-1}R$ et $\mathcal{M}$ un idéal maximal de $S^{-1}R$. Alors, il existe un idéal I de type fini de R et m un idéal premier de R tel que $J = S^{-1}I$ et $M = S^{-1}m$. Nous avons l'isomorphisme naturel suivante $S^{-1}R_M \cong R_m$, or comme R est arithmétique, alors IR_P est principal, pour tout idéal premier P. Il s'ensuit alors que $J_M \cong IR_m$ est localement principal.
   3) et 4) sont claires.
   Ce qui achève la preuve du théorème 3.1.6

Maintenant, on va donner un exemple d'un anneau de Prüfer qui n'est pas Gaussien.

Exemple 3.1.7
Soient R et S comme dans l'exemple 3.1.3. Alors :

(1) *R est un anneau de Prüfer.*

(2) *R n'est pas un anneau Gaussien.*

Preuve :

1. D'après l'exemple 3.1.3(1) ; R est un anneau de Prüfer.

2. R n'est pas un anneau Gaussien. En effet, d'après le théorème 3.1.6(1) on a, $S^{-1}R$ est un anneau Gaussien et donc d'après l'exemple 3.1.3 ; $S^{-1}R$ est un domaine de Prüfer , ce qui contredit (3) de l'exemple 3.1.3. Par conséquent, R n'est pas un anneau Gaussien.

3.2 L'image homomorphe des conditions de Prüfer

Théorème 3.2.1

(1) *L'image homomorphe d'un anneau Gaussien est Gaussienne.*

(2) *L'image homomorphe d'un anneau arithmétique est arithmétique.*

Preuve :
(1) voir [45] et (2) voir [16]. ■

▶ Maintenant, on donne un exemple qui montre que l'image homomorphe d'un anneau de Prüfer n'est pas, en général, de Prüfer. C'est aussi un exemple d'un anneau de Prüfer, qui n'est pas Gaussien

Exemple 3.2.2
Soient A un domaine local, qui n'est pas de valuation, M son idéal maximal, E un A-module tel que $ME = 0$, et $R := A \propto E$, l'extension trivial de A par E. Considérons l'homomorphisme d'anneaux suivants :

$$\begin{aligned} f \quad &: R \longrightarrow A \\ (a, e) &\longmapsto a \end{aligned}$$

Alors :

(1) *R est un anneau de Prüfer (car c'est un anneau total des fractions).*

(2) *D'après le théorème 3.2.1(1) ; R n'est pas un anneau Gaussien, car $h(R) = A$ n'est pas un domaine Gaussien.*

Remarque 3.2.3
L'exemple suivant montre que, l'image homomorphe d'un anneau semi-héréditaire (Respectivement, d'un anneau avec $w.dim(R) \leq 1$) n'est pas toujours un anneau semi-héréditaire (Respectivement, un anneau de dimension globale faible inférieur ou égal à 1).

Exemple 3.2.4
Soient $A = K[[X]]$ l'anneau des séries formelles sur un corps K, et $I = (X^n)$ l'idéal de A engendré par X^n, où $n \geq 2$. Soit $R := A/I$. Alors on a :

(1) *A est un domaine de valuation discrète.*

(2) *R est un anneau arithmétique Noethérien.*

(3) *$w.dim(R) = \infty$. En particulier, R n'est pas semi-héréditaire.*

Preuve :
(1)Évidente.
(2)D'après le théorème 3.2.1(2) puisque A est un domaine de Prüfer, R est un anneau arithmétique, de plus R est Noethérien car l'image homomorphe d'un anneau Noethérien est Noethérien. (3) Soit x^i l'image de X^i dans $R = A/I$. On note (x^i) l'idéal principal de R engendré par x^i. Il est facile de vérifier que les suites suivantes sont exactes :

$$0 \longrightarrow (x^{n-1}) \longrightarrow R \xrightarrow{u} (x) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (x) \longrightarrow R \xrightarrow{v} (x^{n-1}) \longrightarrow 0$$

où $u(r) = rx$ et $v(r) = rx^{n-1}$ pour chaque $r \in R$. Or, l'idéal principal (x) de R n'est pas projectif car $xx^{n-1}1 = 0$ et R est local. Donc, d'après les deux suites exactes de R ci-dessus, nous avons $Pd_R((x))(= fd_R((x)) = 1$ (car R est Noethérien) c'est à dire que $w.dim(R) = \infty$. En particulier, R n'est pas semi-héréditaire. ■

3.2.1 Cas particulier de l'image homomorphe : produit direct d'anneaux.

Théorème 3.2.5
Soit $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'anneaux. Alors on a :

(1) $\prod_{i=1}^{n} R_i$ *est de Prüfer si et seulement si R_i est de Prüfer, $\forall i = 1, ..., n$.*

(2) $\prod_{i=1}^{n} R_i$ *est Gaussien si et seulement si R_i est Gaussien, $\forall i = 1, ..., n$*

(3) $\prod_{i=1}^{n} R_i$ *est arithmétique si et seulement si R_i est arithmétique, $\forall i = 1, ..., n$.*

(4) $w.dim(\prod_{i=1}^{n} R_i) = \sup\{w.dim(R_i)/i = 1, ..., n\}$

(5) $\prod_{i=1}^{n} R_i$ *est semi-héréditaire si et seulement R_i est semi-héréditaire, $\forall i = 1, .., n$.*

Preuve :
La preuve des trois premières assertions se fait par récurrence sur n et il suffit de le

vérifier pour n = 2.
(1)voir [32].
(2) Si $R_1 \times R_2$ est Gaussien alors, d'après le théorème 3.2.1(1) ; R_i est Gaussien, pour chaque $i = 1, 2$, en tant que, image homomorphe d'un anneau Gaussien.
Réciproquement, on suppose que R_1 et R_2 sont Gaussiens. Soient $f = \sum_{i=0}^{n} (a_i, b_i)X^i$ et $g = \sum_{i=0}^{n} (c_i, d_i)X^i$ deux polynômes dans $(R_1 \times R_2)[X]$ et soient $f_1 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in R_1[X]$, $f_2 = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \in R_2[X]$, $g_1 = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in R_1[X]$ et $g_2 = \sum_{i=0}^{n} d_i X^i \in R_2[X]$. On va montrer que $C_{R_1\times R_2}(fg) = C_{R_1\times R_2}(f)C_{R_1\times R_2}(g)$, on note d'abord que $C_{R_1\times R_2}(f) = (C_{R_1}(f_1), C_{R_2}(f_2))$. Par conséquent, il est facile de voir (R_1 *et* R_2 étant Gaussiens) que :

$$\begin{aligned} C_{R_1\times R_2}(fg) &= (C_{R_1}(f_1g_1), C_{R_2}(f_2g_2)) = (C_{R_1}(f_1)C_{R_1}(g_1), C_{R_2}(f_2)C_{R_2}(g_2)) \\ &= (C_{R_1}(f_1), C_{R_2}(g_2))(C_{R_1}(g_1), C_{R_2}(f_2)) = C_{R_1\times R_2}(f)C_{R_1\times R_2}(g) \end{aligned}$$

(3) Si $R_1 \times R_2$ est arithmétique alors, d'après le théorème 3.2.1(2) ; R_i est arithmétique, pour chaque $i = 1, 2$, en tant que, image homomorphe d'un anneau arithmétique.

Réciproquement, on suppose que R_1 et R_2 sont arithmétiques. Soient J un idéal de type fini de $R_1 \times R_2$, et M un idéal maximal de $R_1 \times R_2$. On pose $J = I_1 \times I_2$, où I_i est un idéal de type fini de R_i, et M est soit $m_1 \times R_2$, ou bien $R_1 \times m_2$, avec $m_i \in Max(R_i)$, pour $i = 1, 2$. On peut supposer que $M = m_1 \times R_2$ (Le cas $M = R_1 \times m_2$ est similaire).
On va montrer que $J_M = (I_1 \times I_2)_{m_1\times R_2}$ est principal. Soit $\dfrac{(a_1, a_2)}{(s_1, s_2)} \in J_M$, où $a_i \in I_i$, pour i=1,2 et $(s_1, s_2) \in (R_1 \times R_2) - (m_1 \times R_2)$, d'où $\dfrac{(a_1, a_2)}{(s_1, s_2)} = \dfrac{(a_1, a_2)(1, 0)}{(s_1, s_2)(1, 0)} = \dfrac{(a_1, 0)}{(s_1, 0)}$ car $(1, 0) \in (R_1 \times R_2) - (m_1 \times R_2)$. Supposons que $I_{1_{m_1}} = aR_{1_{m_1}}$, où $a \in I_1$ car R_1 est supposé arithmétique. Par conséquent, $\dfrac{(a_1, a_2)}{(s_1, s_2)} = \dfrac{(a1, 0)}{(s_1, 0} \in (a, 0)(R_1 \times R_2)_{m_1\times R_2}$. D'autre part, $(a, 0) \in J$ ce qui implique que $(a, 0)(R_1 \times R_2)_{m_1\times R_2} \subseteq J_M = J(R_1 \times R2)_{m_1\times R_2}$. Finalement, $J_M = (a, 0)(R_1 \times R_2)_M$ est principal et donc $R_1 \times R_2$ est arithmétique.
(4) et (5) sont claires puisque, un anneau R est semi-héréditaire si et seulement si R est cohérent et w.dim(R)$\leq$ 1. Par ailleurs, le produit direct fini d'anneaux est

cohérent si et seulement si chaque composante est cohérent, et $w.dim(\prod_{i=1}^{n} R_i) = \sup\{w.dim(R_i)/i = 1, ..., n\}$ ■

Nous terminons ce chapitre par un exemple d'un anneau de Prüfer, qui n'est pas, ni total, ni Gaussien.

Exemple 3.2.6
Soient R comme dans l'exemple 3.1.3, T un domaine de Prüfer qui n'est un corps, et $L := R \times T$ le produit direct de R par T. Alors on a :

(1) *L n'est pas un anneau total des fractions, car l'élément $(1, a) \in L$ n'est pas, ni une unité, ni un diviseur de zéro, pour tout élément non inversible $a \in T$.*

(2) *Puisque, R et T sont des anneaux de Prüfer alors, d'après le théorème 3.2.5(1), on a L est un anneau de Prüfer.*

(3) *Puisque, R n'est pas un anneau Gaussien alors, d'après le théorème 3.2.5(2), on a L n'est pas un anneau Gaussien.*

CHAPITRE 4

LES CONDITIONS DE PRÜFER DANS LES PRODUITS FIBRÉS

C. Bakkari, N. Mahdou *Prüfer-like conditions in pull-backs.* Commutative Algebra and its Applications, 41-47 de Gruyter (2009)

Dans ce chapitre, on étudie le transfert des conditions de Prüfer aux produits fibrés, et on donne une nouvelle famille originale d'anneaux contenant des diviseurs de zéro soumis à certaines conditions de Prüfer.

4.1 Principaux résultats

Tout au long de ce chapitre, nous adoptons les hypothèses et les notations suivantes : (T, M) est un anneau local de la forme $T = K + M$ où K est un corps, $h: \ T \longrightarrow T/M$ est la surjection canonique, et D est un sous-anneau de K tel que $qf(D) = K$ et $R = D + M$.
Il est facile de voir que M est D-plat (car M est un K-espace vectoriel), $T = S^{-1}R$ où $S = D - \{0\}$ et $T = R_M$; en particulier, T est R-plat.

Théorème 4.1.1
Soient T, M, D, et R comme ci-dessus. Alors on a :

(1) *R est un anneau de Prüfer si et seulement si T et D sont des anneaux de Prüfer.*

(2) *R est un anneau Gaussien si et seulement si T et D sont des anneaux Gaussiens.*

(3) *R est un anneau arithmétique si et seulement si T et D sont arithmétiques.*

(4) *$w.dim(R) \leq 1$ si et seulement si* **w.dim(T)**$\leq$*1 et* **w.dim(D)** $\leq$*1.*

(5) *R est un anneau semi-héréditaire si et seulement si T et D sont semi-héréditaires.*

Pour démontrer ce théorème nous établissons le lemme suivant.

Lemme 4.1.2
Soient T, M, D, et R comme ci-dessus. Alors on a :
$Tot(R) = Tot(T)$; c'est à dire que R et T ont le même anneau total des fractions.

Preuve :
Soit $S_1 = R \setminus Z(R)$ /et $D - \{0\}$. Remarquons d'abord que, $S \subseteq S_1$ et $R \setminus Z(R) \subseteq T \setminus Z(T)$. En effet, soit $d + m \in R$ et $d' \neq 0 \in D$ tel que $d'(d + m) = 0$. D'où, $d'd + dm = 0$ ce qui implique que $d = 0$ et $m = 0$ car M, est un D-module plat, et donc sans torsion.

Considérons maintenant, $r \neq 0 \in R \setminus Z(R)$ *et* $r'/d \in T = S^{-1}R$ tels que $r'r/d = 0$ alors, il existe un élément $t' \in S \,(\subseteq R \setminus Z(R))$ tel que $t'rr = 0$, et donc $r'/d = 0$. Ensuite, $Tot(R) = S_1^{-1}R = S_1^{-1}S^{-1}R$ car $S \subseteq S_1$. Donc, $Tot(R) = S_1^{-1}T(car\ T = S^{-1}R)$ qui est contenu dans $Tot(T)$ car $S_1 = R \setminus Z(R) \subseteq T \setminus Z(T)$. Or on a $S^{-1}T$ est un anneau total des fractions ; c'est à dire que $S_1^{-1}T \,(= Tot(R) = Tot(T))$. ■

Preuve du théorème 4.1.1 :

(1) Supposons que R est un anneau de Prüfer. D'après la démonstration du lemme 4.1.2, $S = D - \{0\} \subseteq R - Z(R)$. Or T est une localisation de R, d'où d'après [7, Théorème 2.1], T est un anneau de Prüfer . En outre, à partir de la construction de $R = D + M$, on peut voir que D est un module rétracté de R, et donc, d'après [8, Théorème 2.2(1)], D est un anneau de Prüfer, car il est sans torsion.
Réciproquement, supposons que D est un domaine de Prüfer et T est un anneau de Prüfer. Il s'agit de montrer que R est un anneau de Prüfer. Pour cela, considérons un idéal régulier de type fini I de R et montrons qu'il est inversible. D'après [13, Théorème 2.5(3)], il suffit de montrer que I est R-projective ,et que, $I \otimes T$ est T-projectif et $I \otimes_R (R/M)$ est (R/M)-projectif, d'après [44, Théorème 5.1.1(1)]. Comme T est R-plat alors, $I \otimes_R T = IT$ qui est T -projectif, car il est aussi un idéal régulier de type fini de T . De plus IT est un idéal libre dans l'anneau local T, d'où $IT = xT$

pour un certain $x \in T$. D'autre part, $I \otimes_R (R/M) = I/IM \subseteq (IT)(IMT) = (IT) \otimes_T (T/M) = (xT) \otimes_T K \cong K$. D'où, $I \otimes_R (R/M)$ est un D-sous-module de $K(= qf(D))$ qui est inversible en tant qu'idéal fractionnaire de D, et donc, d'après [13, Théorème 2.5(1)], $I \otimes_R (R/M)$ est D-projective. Par conséquent, R est un anneau de Prüfer.
(2) Si R est Gaussien. Alors, d'après [7, Théorème 2,5(1)], T est Gaussien, comme localisation de R . En outre, R est Gaussien, donc R est de Prüfer, et d'après le théorème 4.1.1 (1), D est un anneau de Prüfer et donc Gaussien, car c'est un domaine. Inversement, on suppose que T et D sont des anneaux Gaussiens. Alors, T et D sont, en particulier, des anneaux de Prüfer d'où d'après (1), R est un anneau de Prüfer. Puisque T est anneau Gaussien alors, d'après [11, Théorème 3.12], $Tot(T)(= Tot(R))$ est un anneau Gaussien . Par conséquent, d'après [13, Théorème 5.7(1)], R est un anneau Gaussien.

La preuve des assertions (3), (4) et (5) est similaire à (2), ce qui termine le preuve du théorème 4.1.1. ■

L'exemple suivant montre que la condition "$qf(D) = T/M$" imposée dans le théorème 4.1.1 est nécessaire .

Exemple 4.1.3
Soit $T = K[[X]] = K+M$, l'anneau des séries formelles sur un corps K, où $M := XT$ est l'idéal maximal du domaine de valuation T, D un sous-anneau de K tel que $qf(D) \neq K$ et $R := D + M$. Alors R est un domaine de Prüfer qui n'est pas Gaussien.

Preuve :
D'après [44, Théorème 5.2.10] ■

Maintenant, on peut construire un nouvel exemple d'anneau R arithmétique avec $w.dim(R) > 1$.

Exemple 4.1.4
Soient D un domaine de valuation, $K = qf(D)$, $T = K[[X]]/(X^n) = K + M$ un anneau local d'idéal maximal $M = XT$ et $n > 2$ un entier positif. Posons $R = D+M$. Alors :

(1) *R est arithmétique.*

(2) $w.dim(R) > 1$.

Preuve :
(1) D'après le théorème 4.1.2 (3).
(2) Désignons par x l'image de X dans T. Nous affirmons que l'idéal xR n'est pas plat

(car sinon, on a R est local donc xR est libre, ce qui est absurde, car $x \cdot x^{n-1} = x^n = 0$). D'où xR n'est pas plat et donc $w.dim(R) > 1$.

Le théorème suivant étudie le transfert de la propriété Gaussien aux produits fibré généraux et fournit des exemples satisfaisant cette propriété.

Théorème 4.1.5
Soient (T, M) un anneau local, $h: T \longrightarrow T/M$ D un sous-anneau de T/M tel que $qf(D) = T/M$, et soit $R := h^{-1}(D)$. On suppose que $M^2 = 0$ ou T est principal. Alors D est Gaussien si et seulement si R est Gaussien.

Avant de démontrer le théorème 4.1.5, nous établissons le lemme suivant.

Lemme 4.1.6
Soient (T, M), D, et R comme dans le théorème 4.1.5, f un polynôme de $R[X]$ tel que $c(f)T = xT$, pour un certain $x \in M$. Alors il existe $x' \in M$ et $g \in R[X]$ tels que :

(1) $f = x'g$ *et* $c(f) = x'c(g)$.

(2) $c(g)T = T$.

Preuve :
Soit $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme de $R[X]$ tel que $c(f)T = xT$ pour un certain $x \in M$. Il s'agit de trouver un polynôme $g \in R[X]$ et un élément $x' \in M$ tels que $f = x'g$ et $c(f) = x'c(g)$.
(1) Nous avons $a_i \in c(f) \subseteq c(f)T = xT$, pour tout $i = 0, ..., n$. D'où il existe $b_i \in R$ et $s_i \in S$ tels que $a_i = x(bi/si)$. Ainsi, pour $x' = x / \left(\prod_{i=0}^{n} s_i\right) \in M$. On a $a_i = x'a'_i$, où $a'_i = \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} s_j\right) b_i \in R$. Pour $g = \sum_{i=0}^{n} a'_i X^i \in R[X]$, nous avons $f = x'g$ et donc $c(f) = x'c(g)$.
(2) On a $f = x'getx' \in M$. Notre objectif est de montrer que $c(g)T = T$.
On a $x \in xT = c(f)T = x'c(g)T = xc(g)T = xS^{-1}c(g)$ car $xT = x'T$.
Par conséquent, $x = xa/s$ pour un certain $a \in c(g)$ 2 et $s \in S$ et donc $x((a/s) - 1) = 0$. D'où $(a/s) - 1 \in Ann_T(x) \subseteq M$ (*car* (T, M) *est local*) et alors $(a/s) \ni M$. Cela veut dire que a/s est inversible dans T car (T, M) est local et donc $c(g)T = T$ car $(a/s) \in c(g)T$. ■

Preuve du théorème 4.1.5 :
Si R est Gaussien, alors d'après [7, Théorème 3.1(1)], D l'est aussi, vu comme image homomorphe de R.

Inversement, supposons que D est un domaine Gaussien (donc de Prüfer) et soient f et g deux polynômes dans $R[X]$. Il s'agit de montrer que $c(fg) = c(f)c(g)$. Il y a donc deux cas possibles à discuter :

<u>Cas 1 :</u> $c(f) \subsetneqq M$ ou $c(g) \subsetneqq M$.

Supposons par exemple que $c(f) \subsetneqq M$. Alors, il suffit de montrer que $c(f)$ est localement principal dans R (parce que dans ce cas, f est Gaussien et donc $c(fg) = c(f)c(g)$). Par conséquent, il suffit de montrer que $c(f)$ est R-projectif, $c(f) \otimes_R T$ est T -projectif, et que $c(f) \otimes_R (R/M)$ est R/M-projectif, d'après [44, Théorème 5.1.1 (1)]. Or $c(f) \otimes_R T = c(f)T$(car T est R-plat)$=T$ est T-projectif. D'autre part, $c(f) \otimes_R (R/M) = c(f)/Mc(f) = c(f)/MTc(f) = c(f)/MT = c(f)/M$ qui est un idéal de type fini de $R/M(= D)$, qui est supposé un domaine de Prüfer, par conséquent $c(f) \otimes_R (R/M)$ est R/M-inversible et donc projectif. D'où $c(f)$ est R-projectif et donc $c(fg) = c(f)c(g)$. ■

Si $c(g) \subsetneqq M$, le même argument montre que $c(fg) = c(f)c(g)$.

<u>Cas 2 :</u> $c(f) \subseteq M$ et $c(g) \subseteq M$.

Si $M^2 = 0$, alors $c(fg) \subseteq c(f)c(g) \subseteq M^2 = 0$, et donc $c(fg) = c(f)c(g)(= 0)$.

Si T est principal, il existe $x \in M$ tel que $c(f)T = xT$. D'après le lemme 4.1.6, il existe $f' \in R[X]$ et $x' \in M$ tels que $c(f) = x'c(f')$ et $c(f')T = T$. D'où, d'après le **<u>Cas 1</u>**, $c(f')$ est localement principal, et donc c(f) est localement principal. Par conséquent f est Gaussien et donc $c(fg) = c(f)c(g)$. ■

Notons que l'exemple 4.1.3, prouve la nécessité de la condition $K = qf(D) = T/M$ imposé dans le théorème 4.1.5.

Maintenant, nous sommes en mesure de construire un anneau Gaussien, qui n'est pas arithmétique, et un anneau arithmétique ayant $w.dim(R) > 1$.

Corollaire 4.1.7

Soient D un domaine de Prüfer, $K = qf(D)$, et E un K-espace vectoriel non nul et $R = D \propto E$. Alors :

(1) *R est un anneau Gaussien.*

(2) *R est un anneau arithmétique si et seulement si $dim_K E = 1$.*

(3) $w.dim(R) > 1$.

Preuve :

(1) D'après le théorème 4.1.5.

(2) On suppose que $dim_K(E) = 1$, dans ce cas $E = K$. Posons $T = K \propto K$. Vu que $M := 0 \propto K$ est l'unique idéal propre de T, l'anneau T est arithmétique. Par conséquent R est arithmétique, grâce au théorème 4.1.5 et le fait que D est un domaine de Prüfer.

Réciproquement, on suppose que $dim_K(E) \neq 1$. On peut montrer, de la même manière que dans [6, Exemple 2,3], que T n'est pas arithmétique, et donc d'après le théorème 4.1.1, R l'est aussi. En effet $M := 0 \propto E$ est un idéal commun entre R et S.

(3) Découle du théorème 4.1.1, puisque $w.dim(T) > 1$ ($T(0,1) = 0 \propto K$ n'est pas plat) (car T est local et $(0,1)T(0,1) = (0,0)$). Maintenant, on va donner, en utilisant le corollaire 4.1.7, une nouvelle classe d'anneaux Gaussiens non arithmétiques.

Exemple 4.1.8
Soient D un domaine de Prüfer, $K = qf(D)$, E un K-espace vectoriel non nul tel que $dim_K(E) \neq 1$, et $R := D \propto E$. Alors on a :

(1) *R est un anneau Gaussien.*

(2) *R n'est pas un anneau arithmétique.*

Maintenant, nous sommes en mesure, en utilisant le corollaire 4.1.7, de donner une nouvelle classe d'anneaux arithmétiques ayant $w.dim(R) > 1$.

Exemple 4.1.9
Soient D un domaine de Prüfer qui n'est pas un corps, $K = qf(D)$ et $R := D \propto K$. Alors on a :

(1) *R est un anneau arithmétique.*

(2) $w.dim(R) > 1$.

Nous terminons ce chapitre par la construction d'un exemple d'anneau Gaussien non arithmétique.

Exemple 4.1.10
Soient $T = \mathbb{Q}[[X]] \propto (\mathbb{Q}[[X]]/(X)) = (\mathbb{Q} + X\mathbb{Q}[[X]]) \propto (\mathbb{Q}[[X]]/(X))$ et $R = (\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[[X]]) \propto (\mathbb{Q}[[X]]/(X))$. Alors on a :

(1) *T est un anneau Gaussien non arithmétique.*

(2) *R est un anneau Gaussien non arithmétique.*

Preuve :
(1) Découle du [8, Théorème 4.1.1 (2) et exemple 2.6(2)].
(2) découle du théorème 4.1.1 et (1).

CHAPITRE 5

EXTENSIONS TRIVIALES DÉFINIES PAR DES CONDITIONS DE PRÜFER

C. Bakkari, S. Kabbaj, N. Mahdou *Trivial extensions defined by Prüfer conditions*. Journal of Pure and Applied Algebra 214 (2010), 53-60

5.1 Extensions triviales

Définition 5.1.1
Soient A un anneau commutatif et E un A-module. On appelle, l'anneau extension triviale de A par E, l'ensemble $R := A \propto E := \{(a, e)/\ a \in A \text{ et } e \in E\}$ (également appelé idéalisation de A par E), muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par : $(a, e)(b, f) = (ab, af + be)$.

Remarque 5.1.2
Lorsque I est un idéal de A et E' est un sous-module de E tel que $IE \subseteq E'$, alors $J := I \propto E'$ est un idéal de R, cependant ; les idéaux de R ne sont pas forcément de cette forme, [54, Exemple 2.5]. Néanmoins, les idéaux premiers (respectivement, maximaux) de R sont de la forme $p \propto E$, où p est un idéal premier (respectivement, maximal) de A [50, Théorème 25.1 (3)]. Pour plus de détails sur l'extension triviale d'un anneau commutatif on peut consulter les ouvrages [44, 50].

5.2 Extensions de domaines

Dans cette section, on étudie le transfert des conditions de Prüfer aux extensions triviales de la forme $R := A \propto B$ où B est une extension du domaine A ($A \subseteq B$). On note qu'un élément $(a, b) \in R$ est régulier si et seulement si $a \neq 0$.

Théorème 5.2.1
Soient $A \subseteq B$ une extension du domaine A, $K := qf(A)$ et $R := A \propto B$, l'extension triviale de A par B. Alors on a :

(1) *R est Gaussien, si et seulement si R est de Prüfer , si et seulement si A est de Prüfer et $K \subseteq B$.*

(2) *R est arithmétique si et seulement si A est de Prüfer et $K = B$.*

(3) *$w.gl.dim(R) = \infty$.*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin des lemmes d'intérêts indépendants suivants.

Lemme 5.2.2
Soient A un anneau, E un A-module non nul et $R := A \propto E$. Si R est Gaussien (respectivement, arithmétique), alors A l'est aussi.

Preuve :
Ceci est évident, puisque les propriétés arithmétiques et Gaussiennes sont stables par quotient. (ici on a $A \cong \frac{R}{0 \propto E}$). Notons que le lemme 5.2.2 n'est pas vrai pour la propriété anneau de Prüfer, comme le montre l'exemple 5.2.8.

Lemme 5.2.3
Soient K un corps, E un K-espace vectoriel non nul, et $R := K \propto E$. Alors on a : $w.gl.dim(R) = \infty$.

Preuve :
Soient $\{f_i\}_{i \in I}$ une base du K-espace vectoriel E et $J := 0 \propto E$. Considérons le R-application $u : \ R^{(I)} \longrightarrow J$ définie par $u((a_i, e_i)_{i \in I}) = (0, \sum_{i \in I} a_i f_i)$. Clairement, $Ker(u) = 0 \propto E^{(I)}$. Ici, nous identifions $R^{(I)}$ avec $A^{(I)} \propto E^{(I)}$ comme R-modules. Nous avons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \longrightarrow 0 \propto E^{(I)} \longrightarrow R^{(I)} \xrightarrow{u} J \longrightarrow 0.$$

Nous affirmons que J n'est pas plat, car sinon d'après [68, Théorème 3.55], nous obtenons :

$$0 \propto E^{(I)} = J^{(I)} = JR^{(I)} = (0 \propto E^{(I)}) \cap JR^{(I)} = (0 \propto E^{(I)})J = 0,$$

ce qui est absurde. Par conséquent, la suite exacte ci-dessus donne :

$$fd(J) = fd(J^{(I)}) \leq fd(J) - 1.$$

Cela force la dimension plate de J, et par conséquent, la dimension globale faible de R, d'être infinie.

Preuve du théorème :

(1) Nous avons besoin seulement de prouver les implications suivantes :

R de Prüfer $\Longrightarrow A$ de Prüfer et $K \subseteq B \Longrightarrow R$ Gaussien.

Supposons que R est un anneau de Prüfer. On va montrer d'abord que $K \subseteq B$ dans le cas où A est local. Soit $x \neq 0 \in A$, on pose $I := ((x,0),(x,1))R$, un idéal régulier de type fini de R. Puisque, dans ce cas R est aussi local, alors I est inversible et donc principal. D'où $I = (a,b)R$ pour certains $a \in A$ et $b \in B$. Clairement, $a = ux$ pour un certain élément inversible $u \in A$, donc $I = (ux,b)R = (x,u^{-1}b)R$.
Or, on a $(x,0) \in I$, donc il existe $b' \in B$ tel que $u^{-1}b = b'x$. Il s'ensuit alors que $I = (x,b'x)R = (x,0)(1,b')R = (x,0)R$ car $(1,b')$ est inversible. Mais $(x,1) \in I$ donc $1 = xb$" pour un certain b" $\in B$. Par conséquent $K \subseteq B$.

Supposons maintenant que A n'est pas nécessairement local et soient $q \in Spec(B)$ et $p := q \cap A$. Clairement, $S := (A \setminus P) \times 0$ est une partie multiplicative de R avec la caractérisation $\frac{r}{1}$ est régulier dans $S^{-1}R$ si et seulement si r est régulier dans R. Donc les idéaux réguliers de type fini de $S^{-1}R$ proviennent nécessairement des idéaux réguliers de type fini de R. Donc $A_p \propto B_p = S^{-1}R$ est un anneau de Prüfer où $K = qf(A_p) \subseteq B_p \subseteq B_q$. Il en résulte que $K \subseteq B = \cap B_q$ où q parcourt $Spec(B)$. Maintenant, on vérifie facilement que $K \subseteq B$ implique que $K \propto B = Q(R)$, où $Q(R)$ est l'anneau total des fractions de R. Par ailleurs, soient $f = \displaystyle\sum_i (k_i,b_i)x^i$et $g = \displaystyle\sum_j (k'_j,b'_j)x^j$ deux polynômes dans $Q(R)[x]$. S'il existe i ou j tel que $k_i \neq 0$ ou $k'_j \neq 0$,alors (k_i,b_i) ou (k'_j,b'_j) est inversible, donc $c(f) = Q(R)$ ou $c(g) = Q(R)$, d'où $c(fg) = c(f)c(g)$(ceci d'après le lemme de Gauss qui affirme qu'un polynôme dont le contenu contient un élément inversible est Gaussien). Si $k_i = k_j = 0$ pour tout i et j. Alors $c(fg) = 0 = c(f)c(g)$ par conséquent $Q(R)$ est Gaussien et donc R l'est aussi, d'après [11, Théorème 3.3] et par suite le lemme 5.2.2, implique que A est un domaine de Prüfer, d'où la première implication est prouvé.
Supposons que, A est un domaine de Prüfer et $K \subseteq B$. Soit I un idéal non nul de type fini de R engendré par une famille génératrice minimale $(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)$. Pour tout $a \neq 0 \in A$ et pour tout $b,b' \in B$, on a $(0,b') = (a,b)(0,a^{-1}b')$. Donc, la condition de minimalité force $a_i = 0$ pour chaque i ou bien $a_i \neq 0$ pour chaque i. Dans le premier cas, $I^2 = 0$ et donc I n'est pas un idéal régulier. Nous supposons

par la suite que $a_i \neq 0$ pour chaque i. Il en résulte que $I = (\sum_i Aa_i) \propto B$, puisque $(a_i, b) = (a_i, b_i)(1, a_i^{-1}(b - b_i))$, pour tout i et tout $b \in B$. Puisque A est un domaine de Prüfer, alors $J := \sum_i Aa_i$ est inversible et aJ^{-1} est un idéal de A pour un certain $a \neq\in A$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}(a,0)^{-1}(aJ^{-1} \propto B)I &= (a,0)^{-1}(aJ^{-1} \propto B)(J \propto B)\\ &= (a,0)^{-1}(aJ^{-1}J \propto B)\\ &= (a,0)^{-1}(aA \propto B)\\ &= R.\end{aligned}$$

Par conséquent, R est un anneau de Prüfer et donc Gaussien, d'après [11, Théorème 3.3], ce qui achève la preuve de (1).
(2) Supposons que R est un anneau arithmétique. On a d'après (1), A est de Prüfer et $K \subseteq B$. Donc $K \propto B = Q(R)$ est arithmétique puisqu'il est une localisation de R. Soit $b \neq 0 \in B$. Alors $I := ((0,1),(0,b))Q(R)$ est principal et donc $I := (0,b')Q(R)$ pour un certain $a \neq 0 \in B$. En outre $(0,b) \in I$ donne $b = kb'$ pour un certain $k \neq 0 \in K$, et par suite $I := (0, k^{-1}b')Q(R)$. De plus $(0,1) \in I$ implique que $1 = k'k^{-1}b$ pour un certain $k' \in K$. Il en résulte que $b \in K$ et donc $K = B$.
Inversement, supposons que A est de Prüfer avec $K = B$ (1), $R = A \propto K$ est Gaussien. De plus $Q(R) = K \propto K$ est un anneau principal (à fortiori arithmétique) puisque il n'a qu'un seul idéal propre non nul $M := 0 \propto K = T(1,0)$. D'après [11, Théorème 3.5],R est arithmétique, ce qui achève la preuve de(2).
(3) Posons $S := A \setminus 0$. Alors $T := S \times 0$ est une partie multiplicative de R. D'après le lemme 5.2.3, $w.gl.dim(T^{-1}R) = \infty$. Donc $w.gl.dim(R) = \infty$.

Ceci termine la démonstration du théorème.

Corollaire 5.2.4
Soient D un domaine, $K := qf(D)$, et $R := D \propto K$. les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *D est un domaine de Prüfer.*

(2) *R est un anneau arithmétique.*

(3) *R est un anneau Gaussien.*

(4) *R est un anneau de Prüfer.*

Le théorème 5.2.1 enrichit la littérature par de nouveaux exemples d'anneaux Gaussiens non-arithmétiques, comme indiqué ci-dessous.
Nous rappelons qu'un anneau R est dit de conducteur fini si les idéaux $aR \cap bR$ et

$(0 : c)$ sont de type fini pour tous $a, b, c \in R$ [47]. La classe des anneaux de conducteurs finis contient bien la classe des anneaux cohérents (à fortiori, les anneaux Noethérien et par conséquent, les anneaux principaux)[47, 54].

Exemple 5.2.5
Soient D un domaine de Prüfer qui n'est pas un corps et $K := qf(D)$. Alors $R := D \propto K$ est un anneau arithmétique et $w.gl.dim(R) = \infty$. De plus, R n'est pas de conducteur fini, d'après [54, Théorème2.8] et donc n'est pas un anneau cohérent.

Exemple 5.2.6
Soit $K \subsetneqq L$ une extension de corps. Alors $R := K \propto L$ est un anneau Gaussien qui n'est pas arithmétique.

L'exemple suivant montre que le théorème 5.2.1 élargit le champ de validité de la conjecture de **Bazzoni-Glaz** au-delà de la classe des anneaux Gaussiens cohérents.

Exemple 5.2.7
Soient $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Alors $R := \mathbb{Z}_{(2)} \propto \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

- **(1)** *R est un anneau Gaussien.*
- **(2)** *R n'est pas un anneau arithmétique.*
- **(3)** *R n'est pas un anneau cohérent.*
- **(4)** *$w.gl.dim(R) = \infty$.*

Preuve :
Les propriétés (1),(2) et (4) découlent du théorème 5.2.1. Il reste à prouver (3), pour cela, considérons la suite exacte sur R suivante :

$$0 \longrightarrow 0 \propto \mathbb{R} \longrightarrow R \xrightarrow{u} R(0,1) = 0 \propto \mathbb{Z}_{(2)} \longrightarrow 0$$

où u est défini par $u(a, b) = (a, b)(0, 1)$. Maintenant, on a $0 \propto \mathbb{R}$ n'est pas un idéal de type fini en tant que R-module (car sinon $\mathbb{R}$ serait un $\mathbb{Z}_{(2)}-$module de type fini). Donc $0 \propto \mathbb{Z}_{(2)}$ est un idéal de type fini de R qui n'est pas de présentation finie, d'où R n'est pas un anneau cohérent. L'exemple suivant montre que le théorème 5.2.1 ne reste plus valable, en général, au-delà du contexte de l'extension de domaine.

Exemple 5.2.8
Soient (A, M) un domaine local qui n'est pas de valuation, E un A-module non nul tel que $ME = 0$, et $B := A \propto E$. Alors on a : $R := A \propto B$ est un anneau de Prüfer

qui n'est pas Gaussien.

Preuve :

On vérifie facilement que R est un anneau total des fractions et donc c'est un anneau de Prüfer. D'après le lemme 5.2.3, R n'est pas Gaussien.

5.3 Une classe d'anneaux total des fractions

Théorème 5.3.1

Soient (A, M) un anneau local et E un $\frac{A}{M}$-espace vectoriel non nul. Soit $R := A \propto E$ l'anneau extension triviale de A par E. Alors on a :

(1) *R est un anneau total des fractions et donc R est un anneau de Prüfer.*

(2) *R est Gaussien si et seulement si A est Gaussien.*

(3) *R est arithmétique si et seulement si $A := K$ est un corps et $dim_K E = 1$.*

(4) *$w.dim(R) \gneqq 1$. Si M admet une partie génératrice minimale alors $w.dim(R) = \infty$.*

Preuve :

(1) Évidente.

(2) D'après le lemme 5.2.3, seulement la condition suffisante doit être démontrée. Supposons que A est un anneau Gaussien et soit $F = \sum\limits_i (a_i, e_i)x^i$ un polynôme dans $R[x]$. Si $a_i \notin M$ pour un certain i, alors (a_i, e_i) est inversible dans R, donc F est Gaussien.

Supposons maintenant que $a_i \in M$ pour chaque i et soit $G = \sum\limits_j (a'_j, e'_j)x^j \in R[x]$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a'_j \in M$ pour chaque j. Soient $f = \sum\limits_i a_i x^i, g = \sum\limits_j a'_j x^j \in A[x]$. On peut facilement vérifier que $ME = 0$ ce qui donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} c(FG) &= c(fg) \propto c(fg)E \\ &= c(fg) \propto 0 \\ &= c(f)c(g) \propto 0 \\ &= c(F)c(G). \end{aligned}$$

Par conséquent, F est Gaussien. (3) La condition suffisante est claire puisque $K \propto K$ est un anneau principal. On Suppose par la suite que R est un anneau arithmétique. Nous affirmons que A est un corps, et nous supposons le contraire. Soient $a \neq 0 \in M$ et $e \neq 0 \in E$, alors $I := R(a, 0) + R(0, e)$ est un idéal principal dans R (car R est

local). D'où $I = R(a', e')$ pour un certain $(a', e') \in R$. Clairement, $(a, 0) \in I$ implique que $a' \neq 0$ et $a' \in M$. De plus $(0, e) \in I$ implique que $ba' = 0$ et $e = be'$ pour un certain $b \in A$. Nécessairement, $b \in M$ car $a' \neq 0$. Il en résulte que $e = be' = 0$, ce qui est une contradiction, d'où le résultat.
Considérons maintenant $e, e' \in E \backslash \{0\}$, alors $I = R(0, e) + R(0, e')$ est un idéal principal de R, d'où par le même argument utilisé dans la preuve du théorème 5.2.1(2), on obtient $e = ke'$ pour un certain $k \in K$ et donc $dim_K E = 1$.
(4) Soient $J := 0 \propto E$, et $\{(f_i)\}_{i \in I}$ une base du (A/M)-espace vectoriel E. Considérons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \longrightarrow Ker(u) \longrightarrow R^{(I)} \xrightarrow{u} J \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

où $u((a_i, e_i)_{i \in I}) = (0, \sum_{i \in I} a_i f_i)$. Donc, $Ker(u) = (M \propto E)^{(I)}$. Comme dans la preuve du lemme 5.2.3, nous identifions $R^{(I)}$ avec $A^{(I)} \propto E^{(I)}$ comme R-modules. Nous affirmons que J n'est pas plat. Dans le cas contraire, d'après [68, Théorème 3.55], on obtient $J^{(I)} = (M \propto E)^{(I)} \cap JR^{(I)} = J(M \propto E)^{(I)} = 0$, ce qui est absurde, d'où J est plat. D'après [68, Théorème 2.4], $w.gl.dim(R) \gneqq 1$. Ensuite, supposons que M admet une partie génératrice minimale. Alors, on peut facilement vérifier que $M \propto E$ est admet aussi une partie génératrice minimale. Soit alors $(b_i, g_i)_{i \in L}$ un famille génératrice minimale de $M \propto E$. considérons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \longrightarrow Ker(v) \longrightarrow R^{(L)} \xrightarrow{v} M \propto E \longrightarrow 0$$

où $v((a_i, e_i)_{i \in L}) = \sum_{i \in L} (a_i, e_i)(b_i, g_i)$. L'hypothèse de minimalité (voir la preuve de [68, Lemme 4.43]) donne $Ker(v) \subseteq (M \propto E)^{(L)}$. Il s'ensuit alors que $Ker(v) = V \propto E^{(L)} = (V \propto 0) \oplus J^{(L)}$, où

$$V := \left\{ (a_i)_{i \in L} \in M^{(L)} \;\middle|\; \sum_{i \in L} a_i b_i = 0 \right\}$$

On obtient :

$$fd((V \propto 0) \oplus J^{(L)}) \leq fd(M \propto E) \qquad (2)$$

D'autre part, de la suite exacte (1), nous obtenons

$$fd(M \propto E) = fd(M \propto E)^{(I)} \leq fd(J) - 1 \qquad (3)$$

Par une combinaison de (2) et (3) on obtient $fd(J) \leq fd(J) - 1$. Par conséquent, la dimension plate de J (à fortiori la dimension globale faible de R) doit être infinie , ce qui achève la preuve du théorème. le théorème 5.3.1 génère de nouveaux exemples d'anneaux avec des diviseurs de zéro soumis aux conditions de Prüfer comme indiqué ci-dessous.

Exemple 5.3.2
Soit V un domaine de valuation non trivial. Alors $R := V \propto \dfrac{V}{M}$ est un anneau total des fractions Gaussien, qui n'est pas arithmétique.

Exemple 5.3.3
Soient K un corps et E un K-espace vectoriel tel que $dim_K(E) \geq 2$. Alors $R := K \propto E$ est un anneau total des fractions Gaussien non arithmétique.

Exemple 5.3.4
Soit (A, M) un domaine local qui n'est pas de valuation. Alors $R := A \propto \dfrac{A}{M}$ est un anneau total des fractions, qui n'est pas Gaussien.

Exemple 5.3.5
Soit $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et x une indéterminée sur $\mathbb{R}$. Alors $R := \mathbb{R} \propto \mathbb{R}[x]$ satisfait les assertions suivantes :

(1) *R est un anneau Gaussien.*

(2) *R n'est pas un anneau arithmétique.*

(3) *R n'est pas un anneau cohérent.*

(4) *R est local d'idéal maximal nilpotent non nul.*

(5) *$w.gl.dim(R) = \infty$.*

Preuve :
Les assertions (1) et (2) découlent du théorème 5.3.1. Pour l'assertion (3), voir [54, Théorème 2.6(2)].
(4) est clair, puisque l'idéal maximal de R est $M := 0 \propto R[x]$ (D'après [50, Théorème 25.1(3)]) avec $M^2 = 0$. Finalement, (5) est satisfaits par le théorème 5.3.1(4), [11, Proposition 6.3], ou [11, Théorème 6.4].

5.4 Conjecture de Kaplansky-Tsang-Glaz-Vasconcelos

Conjecture 5.4.1
Tout polynôme non nul Gaussien est de contenu localement principal

Définition 5.4.2
Un anneau R est dit pseudo-arithmétique si tout polynôme Gaussien sur R est de contenu localement principal.

Théorème 5.4.3
Soient A un domaine qui n'est pas un corps et K son corps des fractions.

(1) *Soit $R := A \propto K$, l'extension triviale de A par K. Alors R est un anneau pseudo-arithmétique.*

(2) *Soit $A \subseteq B$ une extension d'anneaux. Si R est pseudo-arithmétique, alors A l'est aussi.*

Preuve :
(1) Soit $F := \sum\limits_i (a_i, k_i)x^i$ un polynôme Gaussien non nul dans $R[x]$. Supposons que $a_i \neq 0$ pour un certain i . Alors (a_i, k_i) est régulier dans R et donc $c(F)$ l'est dans R. D'où, la propriété Gaussien force F d'être régulier dans $R[x]$. Donc $c(F)$ est localement principal, d'après [59, Théorème 6]. Supposons maintenant que $a_i = 0$ pour chaque i. Soit $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $ak_i \in A$ pour chaque i et soit $F' := (a, 0)F = \sum\limits_i (0, ak_i)x^i \in A[x]$. Nous affirmons que $f' = \sum\limits_i ak_i x^i$ est un polynôme Gaussien(non nul) de $A[x]$. En effet, considérons $g = \sum\limits_i a'_i x^i \in A[x]$ et posons $G := \sum\limits_i (a'_i, 0)x^i \in R[x]$. Alors $0 \propto c(f'g) = c(F'G) = c(F')c(G)$. De plus $c(F') = \sum\limits_i R(0, ak_i) = 0 \propto c(f')$ et $c(G) = c(g) \propto K$ (voir la preuve du lemme 5.2.3). Il s'ensuit alors que $0 \propto c(f'g) = 0 \propto c(f')c(g)$ et donc $c(f'g) = c(f')c(g)$ D'où $c(f)$ est localement principal, car A est un domaine [57]. Soit $P := p \propto K \in Max(R)$ pour un certain idéal maximal p de A, on pose $S := (A \setminus p) \times 0 \subseteq R \setminus P$ puisque $c(f')A_p = a'A_p$ pour un certain $a' \in A$ on obtient :

$$\begin{aligned}
(a, 0)c(F)R_p &= c(F')R_p \\
&= (0 \propto c(f'))R_p \\
&= (S^{-1}(0 \propto c(f')))R_p \\
&= (0 \propto c(f')A_p)R_p \\
&= (0 \propto a'A_p)R_p \\
&= (0, a')R_p = (a, 0)(0, \frac{a'}{a})R_p
\end{aligned}$$

$C(F)R_p = (0, \frac{a'}{a})R_p$ puisque $(a, 0)$ est régulier dans R. Ainsi $c(F)$ est localement principal et donc R est un anneau pseudo-arithmétique

(2) Soit $f = \sum_i a_i x^i$ un polynôme Gaussien sur A et posons $F := \sum_i (0, a_i)x^i \in R[x]$. Soit $G = \sum_i (a'_i, b_i)x^i \in R[x]$ et posons $g := \sum_i a'_i x^i \in A[x]$. Puisque f est Gaussien, on a $c(F)c(G) = (0 \propto c(f))c(G) = 0 \propto c(f)c(g) = 0 \propto c(fg)$. D'autre part, on peut vérifier facilement que $c(FG) = 0 \propto c(fg)$. Par conséquent, $c(FG) = c(F)c(G)$, donc F est un polynôme Gaussien sur R. D'où $c(F) = 0 \propto I$ est un idéal localement principal de R . Donc $C(F) = 0 \propto I$ est un idéal de R localement principal où $I := c(f)$. Maintenant, pour obtenir que I est localement principal, nous adaptons la preuve du lemme 5.2.3 dans le cas arithmétique. Évidemment, un anneau est arithmétique si et seulement s'il est Gaussien et pseudo-arithmétique. Dans ce contexte, notons que les exemples 5.2.6 et 5.3.3, illustrent l'échec du théorème 5.4.3(1) pour les anneaux extensions triviales $R := A \propto E$ avec $E \neq qf(A)$.

Exemple 5.4.4
Soient (A, M) un anneau local qui n'est pas un corps et E un $\frac{A}{M}$-espace vectoriel non nul. Alors $R := A \propto E$ est un anneau de Prüfer qui n'est pas pseudo-arithmétique. En effet le théorème 5.3.1 assure que R est un anneau total des fractions (donc de Prüfer) mais qui n'est pas arithmétique. Nous affirmons que $f := (a, 0) + (0, e)x$, où $a \neq 0 \in M$ et $e \neq 0 \in E$, est Gaussien mais $c(f)$ n'est pas principal dans R. Pour voir ceci, considérons $g \in R[x]$. Si $g \notin (M \times E)[x]$, alors le lemme de Gauss assure que $c(fg) = c(f)c(g)$ puisque R est local d'idéal maximal $M \propto E$. On suppose que $g \in (M \times E)[x]$. Alors, le fait que $ME = 0$ donne :

$$c(f)c(g) = (a, 0)c(g) = c((a, 0)g) = c(fg).$$

Maintenant, adaptons la démonstration du théorème 5.3.1(3), pour obtenir que $c(f)$ n'est pas principal, et donc R n'est pas pseudo-arithmétique.

Remarque 5.4.5
(1) *Soient A un domaine qui n'est pas de Prüfer et $K := qf(A)$. Cconsidérons $R := A \propto K$, l'anneau extension triviale de A par K. Alors, d'après le Corollaire 5.2.4, R n'est pas un anneau de Prüfer (à fortiori, R n'est pas arithmétique). Par ailleurs, il y a beaucoup de polynômes Gaussiens non régulier sur R, par exemple, $f := \sum_i (0, k_i)x^i$. Cependant, le théorème 5.4.3 assure que tout polynôme Gaussien sur R est d'idéal contenu localement principal (i.e, R est pseudo-arithmétique).*
(2) *Ensuite, nous examinons le cas Noethérien. Dans [49], un anneau local (R, M) est dit approximativement de Gorenstein si R est Noethérien et pour tout entier $n > 0$, il existe un idéal $I \subseteq M^n$ tel que R/I est Gorenstein (par exemple, tout anneau Noethérien local (R, M) avec le M-adique complétion $\widehat{R}$ réduit est approximativement*

de Gorenstein). Heinzer et Huneke ont montré que tout anneau approximativement de Gorenstein est pseudo-arithmétique [49, Théorème 1.5]. Ce résultat combiné avec [49, Remarque 1.6] affirme que la Noethérieniti n'a aucun effet direct sur la notion de pseudo-arithmétique même en dimension faible, dans le sens que les anneaux locaux non-Gorenstein Artinian ne sont pas pseudo-arithmétiques. Enfin, notons que l'exemple ci-dessus $R := A \propto K$ n'est pas Noethérien car il n'est pas cohérent d'après [54, Théorème 2.8].

(3) *À partir de [43], un anneau R est dit un* **(PF)-anneau** *si tout idéal principal de R est plat, ou, de façon équivalente, si R est un domaine local [44, Théorème 4.2.2(3)]. Un anneau R est dit un* **(PP)-anneau** *ou de anneau de Baer faible si tout idéal principal de R est projectif. Dans la classe des anneaux Gaussiens, les propriétés (PP) et (PF) coïncident, respectivement, avec la notion de semi-héréditaire et de dimension globale faible inférieure ou égal 1. Clairement, notons que l'exemple ci-dessus $R := A \propto K$ n'est pas un domaine local. Compte tenu de l'exemple 5.4.4 et de la Remarque 5.4.5, la (Fig.1) résume les relations entre toutes ces classes d'anneaux où les implications sont irréversibles en général. De la discussion ci-dessus, il se trouve que la notion de pseudo-arithmétique doit avoir une caractérisation accueille les trois classes hétérogènes ; arithmétiques, domaines locaux, et localement approximativement de Gorenstein (voir Fig.1). Cette nouvelle caractérisation offrira une fin heureuse à la conjecture de* ***Kaplansky-Tsang-Glaz-Vasconcelos*** *.*
Dans cette veine, on conjecture ce qui suit :

Conjecture 5.4.6
Un anneau R est pseudo-arithmétique si et seulement si l'idéal nul est localement irréductible.

Remarque 5.4.7
(1) *Fuchs, Heinzer et Olberding ont récemment étudié l'irréductibilité dans les anneaux commutatifs [29, 30] et ils ont observé qu'il est facile de voir qu'un anneau R est arithmétique si et seulement si pour tout idéal I de R, I_M est un idéal irréductible de R_M, pour tout idéal maximal M de R contenant I [29].*

(2) *Supposons que le conjecture 5.4.6 est vrai. Si R est un domaine local ou localement approximativement de Gorenstein, alors un polynôme sur R est Gaussien si et seulement si son contenu est localement principal [57, Théorème 4] et [49, Théorème 1.5]. En particulier, tout polynôme non nul sur un domaine est Gaussien si et seulement si son contenu est inversible. En effet, la propriété domaine local découle du fait que l'idéal nul dans un domaine est irréductible. Ensuite, supposons*

que R est localement approximativement de Gorenstein. Rappelons qu'un polynôme Gaussien $f := \sum_i a_i x^i$ sur un anneau R force son image $\overline{f} := \sum_i \overline{a_i} x^i$ d'être Gaussien sur R/I, pour tout idéal I de R. En utilisant ce fait et le fait que la condition Gaussien est une propriété locale, en combinaison avec le définition d'un anneau localement approximativement de Gorenstein , Heinzer et Huneke ont montré que la preuve se réduit au cas où R est un anneau de Gorenstein local de dimension zéro (voir le début de la preuve de [49, Théorème 1.5]). Mais dans ce cadre l'idéal nul est irréductible.

CHAPITRE 6

LES CONDITIONS DE PRÜFER DANS LA DUPLICATION AMALGAMÉE D'UN ANNEAU LE LONG D'UN IDÉAL

M. Chhiti, M. Jarrar, S. Kabbaj, N. Mahdou; *Prüfer Conditions in an Amalgamated Duplication of a Ring Along an Ideal* .Communications in Algebra, 43 : 249-261, (2015)

6.1 Définitions et notations

Définition 6.1.1
Un anneau R est dit un ***(fqp)-anneau****, si tout idéal de type fini de R est quasi-projectif [1].*

Soit R un anneau, alors le schéma suivant résume les relations entre les conditions de Prüfer où les implications ne peuvent pas être inversées en général, [1, 12, 11, 43, 42]

$$\begin{gathered}\text{R est semi-héréditaire}\\ \Downarrow\\ w.gl.dim(R) \leq 1\\ \Downarrow\\ \text{R est arithmétique}\\ \Downarrow\\ \text{R est un } \textbf{fqp}\text{-anneau}\\ \Downarrow\\ \text{R est Gaussien}\\ \Downarrow\\ \text{R est de Prüfer.}\end{gathered}$$

Définition 6.1.2
Soient A un anneau, I un idéal de A, et $\pi : A \to \frac{A}{I}$ la surjection canonique. La duplication amalgamée de A le long de I, notée $A \bowtie I$, est le produit fibré de π et π ; c'est le sous-anneau de $A \times A$, définie par :

$$A \bowtie I := \{(a, a+i) \mid a \in A,\, i \in I\}$$

Tout le long de ce qui suit , $A \bowtie I$ désigne la duplication amalgamée d'un anneau A le long d'un idéal I. Si J est un idéal de A, alors $J \bowtie I := \{(j, j+i) \mid j \in J,\, i \in I\}$ est un idéal de $A \bowtie I$ avec $\dfrac{A \bowtie I}{J \bowtie I} \cong \dfrac{A}{J}$ [25, Proposition 5.1]. Sous l'injection naturelle $i :\ A \hookrightarrow A \bowtie I$ défini par $i(a) = (a, a)$, nous identifions A avec son image dans $A \bowtie I$; et la surjection naturelle $A \bowtie I \twoheadrightarrow A$ donne l'isomorphisme $\dfrac{A \bowtie I}{(0) \bowtie I} \cong A$ [24, Remarque 1].
En outre, pour un anneau R On note :
$Q(R)$:={l'anneau total des fractions de R},
$Z(R)$:={l'ensemble des diviseurs de zéro de R},
$U(R)$:={ l'ensemble des éléments inversibles},
$Nil(R)$:={Le Nilradical de R},
$J(R)$:={Le radical de Jacobson},
$Max(R)$:={L'ensemble des idéaux maximaux de R},
$Max(R, I)$:={$m \in Max(R) \mid I \subseteq m$},
$Ann(I)$:={L'annulateur d'un idéal I de R}.

6.2 Transfert de la condition anneau de Prüfer

Remarque 6.2.1
Soient A un anneau, I un idéal de A, et P un idéal premier de A. Dans [24, Propositions 5 et 7] D'Anna a prouvé que si $I \subsetneq P$, alors $\widetilde{P} := \{(p+i,p) | \ p \in P, i \in I\}$ et $P \bowtie I$ sont les seuls idéaux premiers de $A \bowtie I$ couché sur P, et nous avons :

$$\frac{A \bowtie I}{\widetilde{P}} \cong \frac{A \bowtie I}{P \bowtie I} \cong \frac{A}{P} \ \text{ et } \ (A \bowtie I)_{\widetilde{P}} \cong (A \bowtie I)_{P \bowtie I} \cong A_P.$$

Notons que $P \bowtie I$ et $\widetilde{P}$ sont incomparables. Cependant, si $I \subseteq P$ alors $P \bowtie I = \widetilde{P}$ est l'unique idéal premier de $A \bowtie I$ couché sur P, et nous avons :

$$\frac{A \bowtie I}{P \bowtie I} \cong \frac{A}{P} \ \text{ et } \ (A \bowtie I)_{P \bowtie I} \cong A_P \bowtie I_P$$

.
En conséquence :
(A, m) est local avec $I \subseteq \mathrm{m}$ si et seulement si $A \bowtie I$ est local d'idéal maximal $\mathrm{m} \bowtie I$.

Théorème 6.2.2
Soient (A,m) un anneau local et I un idéal propre de A. Alors $A \bowtie I$ est un anneau de Prüfer si et seulement si A est un anneau de Prüfer et $I = aI$ pour tout $a \in \mathrm{m} \backslash \mathrm{Z(A)}$.

Remarque 6.2.3
(1) *Soit (A,m) un anneau de Prüfer local. On peut facilement vérifier que :*

$$\begin{gathered} aI = a^2 I, \forall a \in \mathrm{m} \ (\text{i.e, } \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}) \\ \Downarrow \\ aI = I, \forall a \in \mathrm{m} \setminus \mathrm{Z(A)} \ (\text{i.e, } \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{Z(A)}) \\ \Downarrow \\ I \subseteq Z(A) \subseteq \mathrm{m}. \end{gathered}$$

*Par conséquent, d'après le théorème 6.2.2, si I est un idéal régulier propre de A (i.e, $I \nsubseteq Z(A)$), alors l'amalgamation $A \bowtie I$ n'est jamais un anneau de Prüfer. La première hypothèse "$aI = a^2I, \ \forall a \in \mathrm{m}$" sera utilisé plus tard dans le théorème 6.3.3 pour caractériser les amalgamations soumis aux conditions Gaussien et **fqp**.*

(2) *Notons que, dans le cas $(0) \neq I \subseteq Z(A)$, l'hypothèse "$I = aI, \forall a \in \mathrm{m} \backslash \mathrm{Z(A)}$" n'est pas nécessairement intégré dans le condition anneau de Prüfer local. Par exemple, posons $A := \mathbb{Z}_{(2)} \propto \mathbb{Q}$ et $I := 0 \propto \mathbb{Z}_{(2)}$. Alors A est un anneau on a* *enchaîné [7, Théorème 2.1(2)] d'idéal maximal $2\mathbb{Z}_{(2)} \propto \mathbb{Q}$ et $I^2 = 0$, alors que $I \neq (4,0)I$.. Donc, d'après le théorème 6.2.2, $A \bowtie I = A \propto I$ n'est pas un anneau de Prüfer.*

La preuve du théorème repose sur les lemmes suivants qui sont d'intérêts indépendants. On rappel que $f \in R[x]$ est dit un polynôme de Gauss si $c(fg) = c(f)c(g)$, pour tout $g \in R[x]$ [69].

Lemme 6.2.4
Soient A un anneau et I un idéal de A. Si le polynôme $F(x) := \sum_{i=0}^{n}(a_i, a_i)x^i$ est Gaussien sur $A \bowtie I$, alors $f := \sum_{i=0}^{i} a_i x^i$ est Gaussien sur A.

Preuve :
Évidente. ■

Lemme 6.2.5
Soient A un anneau et I un idéal de A. Si $A \bowtie I$ est de Prüfer, alors A l'est aussi.

Preuve :
Supposons que $A \bowtie I$ est un anneau de Prüfer. Soit $J := \sum_{i=0}^{n} a_i A$ un idéal de type fini régulier de A et a un élément régulier de J. Il est clair que, $G := \sum_{i=0}^{n}(a_i, a_i)A \bowtie I$ est un idéal de type fini régulier de $A \bowtie I$ car $(a, a) \in G$. Donc G est inversible, et par suite le polynôme $F(x) := \sum_{i=0}^{n}(a_i, a_i)x^i$ est Gaussien sur $A \bowtie I$. D'après le lemme 6.2.4, $f := \sum_{i=0}^{i} a_i x^i$ est Gaussien sur A. Par conséquent, d'après [12, Théorème 4.2], $J = c(f)$ est inversible dans A et donc A est de Prüfer.

Nous rappelons un résultat important de Maimani et Yassemi qui fournit une description de l'ensemble des diviseurs de zéro de $A \bowtie I$ pour un anneau commutatif quelconque. Dans ce qui suit, le sous-ensemble $\{ (a, a+i) | a \in Z(A), i \in I \}$ de $A \bowtie I$ sera noté par $Z(A) \bowtie I$.

Lemme 6.2.6
Soient A un anneau et I un idéal de A. Alors

$$Z(A \bowtie I) = Z(A) \bowtie I \cup \{(i,0) \mid i \in I\} \cup \{(a, a+i) \bigm| a \in A \setminus Z(A) \text{ et } \exists j \neq 0 \in I,\ j(a+i) = 0 \}$$

Lemme 6.2.7
Soient R un anneau de Prüfer, local et x un élément régulier de R. Alors, xR est comparable avec tout idéal principal de R.

Preuve :
La preuve découle immédiatement de [1, lemme 3.8].

Lemme 6.2.8
Soient A un anneau de Prüfer local et I un idéal de A. Alors

$$I \subseteq Z(A) \Leftrightarrow Z(A \bowtie I) = Z(A) \bowtie I.$$

Preuve :
Supposons que $I \subseteq Z(A)$. Soit a un élément régulier de A et soit $i \in I$. Nous affirmons que $a+i$ est régulier dans A. En effet, les idéaux aA et iA sont comparables par le lemme 6.2.7. Il en résulte que $i = ka$ pour un certain $k \in A$ non unitaire puisque $I \subseteq Z(A)$. Ainsi, un $a + i = (1 + k)a \in A \setminus Z(A)$ d'où l'affirmation. Par conséquent, l'ensemble $\{(a, a + i) \mid \ a$ est *r*égulier et $j(a + i) = 0$ pour un certain $j \neq 0 \in I\}$ est vide. Donc, à partir de la description de $Z(A \bowtie I)$ dans le lemme 6.2.6, nous obtenons le résultat voulu. L'inverse est trivial par le même lemme.
Preuve du Théorème 6.2.2 :
(1) (A, m) est supposé local et $I \subseteq \mathrm{m}$; c'est équivaut à dire que $A \bowtie I$ est local. Supposons que $A \bowtie I$ est de Prüfer. D'après le lemme 6.2.5, A est de Prüfer. Notons que $Z(A) \subseteq \mathrm{m}$. Nous affirmons que $I \subseteq Z(A)$. En effet, soit $i \in I \setminus Z(A)$. Il est clair que (i, i) est régulier dans $A \bowtie I$. D'après le lemme 6.2.7, les idéaux $((0, i))$et $((i, i))$ sont comparables dans $A \bowtie I$ et nécessairement, $(0, i) = (i, i)(b, b + j)$ pour certains $b \in A$ et $j \in I$. Alors $b = 0$ et $i = ij$, où $j = 1$, ce qui est absurde. Ensuite, soit $a \in A \setminus Z(A)$ et $i \in I$. Par le lemme 6.2.8,$(a, a + i)$ est régulier dans $A \bowtie I$. Comme ci-dessus, via le lemme 6.2.7, nous obtenons $(0, i) = (a, a + i)(b, b + j)$ pour certains $b \in A$ et $j \in I \subseteq \mathrm{m}$. Par conséquent, $b = 0$ et donc $i = aj(1 - j)^{-1} \in aI$, comme désiré.

Inversement, supposons que A est un anneau de Prüfer (local) avec $I = aI$ pour tout $a \in m \setminus Z(A)$ (i.e, pour tout $a \in A \setminus Z(A)$). Soit $F := ((a, a + i)(b, b + j))$ un idéal régulier de $A \bowtie I$. Supposons que l'un, au moins, des deux générateurs de F est régulier. D'après le lemme 6.2.5, a ou b est régulier dans A. Donc, d'après le lemme 6.2.7, (a) et (b) sont comparables dans A ; disons que , a est régulier dans A et $b = ac$ avec $c \in A$. Par hypothèse, il existe $k \in I$ tel que $j - ic = (a + i)k$. Donc, on peut facilement vérifier que $(b, b + j) = (a, a + i)(c, c + k)$ c'est à dire que $F := ((a, a + i))$. Maintenant, supposons que les deux générateurs de F sont diviseurs de zéro et soit $(r, r + h)$ un élément régulier de F. Donc, comme ci-dessus on obtient $a = ra'$, $i - ha' = (r+h)k_1$, $b = rb'$, et $j - hb' = (r+h)k_2$, pour certains $a', b' \in A$ et $k_1, k_2 \in I$ ce qui donne $F := ((r, r+h))$. Donc, dans les deux cas F est principal (et à fortiori inversible) et par suite $A \bowtie I$ est un anneau de Prüfer [13, Théorème 2.13(2)].

Comme application du théorème 6.2.2 (combiné avec le théorème 6.3.3), on peut construire un nouvel exemple d'anneau de Prüfer qui n'est pas Gaussien.

Exemple 6.2.9
Soit $R := \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \bowtie \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$. On a $Z\left(\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}\right) = \frac{2\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ et donc d'après, le théorème 6.2.2, R est un anneau de Prüfer local (qui n'est pas Gaussien par le théorème 6.3.3 (2)). En outre, R n'est pas, ni une extension triviale d'un anneau ni un produit fibré de type étudié dans [18, 19].

► Les anneaux totaux des fractions sont une source importante d'anneaux de Prüfer. Ensuite, nous étudions le transfert de cette notion à une amalgamation.

Proposition 6.2.10
Soient A un anneau et I un idéal de A tel que $I \subseteq J(A)$. Alors $A \bowtie I$ est un anneau total des fractions si et seulement si A l'est aussi.

Preuve :
Supposons que A est un anneau total des fractions et posons $(x, x+i) \in A \bowtie I$. Si x est un diviseur de zéro dans A, alors $(x, x+i)$ l'est aussi dans $A \bowtie I$ puisque nous avons toujours $Z(A) \bowtie I \subseteq Z(A \bowtie I)$. Supposons maintenant que x est inversible dans A et posons $y := x^{-1}$ et $j := -iy^2(1+yi)^{-1}$. Comme $I \subseteq J(A)$ alors $j \in I$. De plus, nous avons $(x, x+i)(y, y+i) = (1, 1)$. Donc $(x, x+i)$ est inversible dans $A \bowtie I$. Inversement, on suppose que $A \bowtie I$ est un anneau total des fractions. Soit $x \in A$ alors (x, x) est un diviseur de zéro ou bien inversible dans $A \bowtie I$. Clairement, on a x est un diviseur de zéro ou inversible dans A, ce qui termine la preuve.

Soit (A, m) un anneau local, et soit n un entier ≥ 2. D'après la proposition 6.2.10, $\frac{A}{\mathrm{m}^n} \bowtie \frac{\mathrm{m}^{n-1}}{\mathrm{m}^n} \left(= \frac{A}{\mathrm{m}^n} \propto \frac{\mathrm{m}^{n-1}}{\mathrm{m}^n}\right)$ est un anneau total des fractions local et à fortiori anneau de Prüfer local.

Rappelons que la notion d'un anneau de Prüfer n'est pas stable par quotient [15, Exemple 3.3] (aussi [61, Exemple 3,6] et [5, Exemple 2,8]). Un anneau R est localement de Prüfer si R_p est de Prüfer $\forall p \in Spec(R)$ [19, Définition 2.1]. Lucas a prouvé que si R_m est de Prüfer, pour tout $m \in Max(R)$ (à fortiori, si R est localement de Prüfer), alors R est de Prüfer [61, Proposition 2.10] ; et construit un anneau de Prüfer qui n'est pas local et non localement de Prüfer [61, Exemple 2.11].

Récemment, Boynton a donné un exemple d'un anneau de Prüfer local qui n'est pas localement de Prüfer [19, Exemple 2.4]

6.3 Transfert des conditions, arithmétique, Gaussien, et fqp

Nous rappelons la caractérisation importante suivante des anneaux Gaussiens. Pour tout a et b dans un anneau Gaussien, nous avons $(a,b)^2 = (a^2)$ ou (b^2) ; de plus si $ab = 0$ et par exemple $(a,b)^2 = (a^2)$, alors $b^2 = 0$, [11, Théorème 2.2]
Notons que les notions arithmétique et Gaussien sont stables par quotient.

Définition 6.3.1
Soient R un anneau et I un idéal de R. On dit que I est quasi-projectif si l'application naturelle $Hom_R(I,I) \to Hom_R(I,I/J)$ définie par $f \mapsto \overline{f}$ est surjective pour tout sous-idéal J de I.
*R est dit un **fqp**-anneau si tout idéal de type fini de R est quasi-projectif [1].*

Remarque 6.3.2
*La propriété **fqp**-anneau est stable par produit fini. En effet :*

*Soient R_1 et R_2 deux **fqp**-anneau, $R := R_1 \times R_2$ et $I := I_1 \times I_2$, où I_i est un idéal de type fini de R_i pour chaque i = 1,2. Soit f :$I \to I/K$ une R-application, où K est un sous-idéal de I, et posons $K = K_1 \times K_2$ et $f = f_1 \times f_2$, où K_i est un sous-idéal de I_i et $f_i \in Hom_R(I_i, I_i/K_i)$ définie par $f_1(x) := a$ telle que $f(x,0) = (a,b)$ et de même pour f_2. Par conséquent, il existe $g_i \in Hom_R(I_i, I_i)$ tel que $\overline{g_i} = f_i$. Il est clair que $\overline{g} = \overline{g_1} \times \overline{g_2} = f$. Il s'ensuit alors que R est un **fqp**-anneau. La réciproque est triviale.*

Théorème 6.3.3
Soient (A, m) un anneau local et I un idéal propre de A.

- **(1)** *$A \bowtie I$ est arithmétique si et seulement si A est arithmétique et I =(0).*
- **(2)** *$A \bowtie I$ est Gaussien si et seulement si A est Gaussien, $I^2 = (0)$, et $\forall a \in \mathrm{m}$, $aI = a^2 I$.*
- **(3)** *$A \bowtie I$ est un **fqp**-anneau si et seulement si A est un **fqp**-anneau (respectivement, anneau de Prüfer), $(Z(A))^2 = 0$, et $\forall a \in \mathrm{m}$, $aI = a^2 I$.*

Pour prouver ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 6.3.4
Soient A un anneau et I un idéal propre de A. Soient J un idéal de A et K un sous-idéal de I. Alors $J \bowtie K$ est un idéal $A \bowtie I$ si et seulement si $JI \subseteq K$.

Lemme 6.3.5
Soient A un anneau et I un idéal propre de A. Si $A \bowtie I$ est un ***fqp****-anneau, alors A est un* ***fqp****-anneau.*

Preuve :
Supposons que $A \bowtie I$ est un **fqp**-anneau, et soit $J := (a_1, ..., a_n)$ un idéal de type fini de A, K un sous-idéal de J, et $f \in Hom_A(J, J/K)$. Il s'agit de montrer qu'il existe $g \in Hom_A(J, J)$ tel que $f = \overline{g} \pmod K$. Pour cela, considérons l'idéal de $A \bowtie I$, $U := J \bowtie JI$ (lemme 6.3.4). Nous affirmons que $U := ((a_1, a_1), ..., (a_n, a_n))$. Évidemment, $(a_i, a_i) \in U \; \forall i = 1, ..., n$. Ensuite, soit $(x, x+h) \in U$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
(x, x+h) &= (x, x) + (0, \sum_j e_j f_j) \; (avec,\ x \in J \; et \; (e_j, f_j) \in J \times I,\ 1 \leq j \leq m) \\
&= \sum_i (r_i, r_i)(a_i, a_i) + (0, \sum_j (\sum_i s_{ij} a_i) f_j) \; (avec,\ r_i, s_{ij} \in A,\ 1 \leq i \leq n) \\
&= \sum_i (r_i, r_i)(a_i, a_i) + \sum_j (\sum_i s_{ij} a_i, \sum s_{ij} a_i)(0, f_j) \\
&= \sum_i (r_i, r_i)(a_i, a_i) + \sum_j (0, f_j) \sum_i (s_{ij}, s_{ij})(a_i, a_i) \\
&= \sum_i (r_i, r_i + \sum_j f_j s_{ij})(a_i, a_i),
\end{aligned}$$

D'où l'affirmation.

Soit $V := K \bowtie KI$, un sous-idéal de U par le lemme 6.3.4, et considérons la fonction

$$\begin{aligned}
f:\ S_0^{-1}A &\longrightarrow S^{-1}R \\
\frac{a}{s} &\longmapsto \frac{(a,0)}{(s,0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F:\qquad U &\longrightarrow U/V \cong J/K \bowtie JI/KI \\
\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (a_i, a_i) &\longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (f(a_i), f(a_i)).
\end{aligned}$$

On peut vérifier que F est bien définie et donc un $A \bowtie I$-application. Puisque U est quasi-projective, alors il existe $G \in Hom_{A \bowtie I}(U, U)$ tel que $F = \overline{G} \pmod V$.

Maintenant, considérons $a \in J$ et $g(a)$ égal à la première coordonnée de $G(a,a)$. Il est clair que, $g \in Hom_A(J,J)$. En outre, $\overline{G(a,a)} = F(a,a) = (f(a), f(a))$ implique que $f = \overline{g}$.

Lemme 6.3.6 ([69], Théorème 2)
*Soit R un **fqp**-anneau local qui n'est pas un anneau enchaîné. Alors*

$$(Nil(R))^2 = 0$$

.

Lemme 6.3.7 ([1], Lemme 4.5)
*Soit R un **fqp**-anneau local qui n'est pas un anneau enchaîné. Alors*

$$Z(R) = Nil(R)$$

.

Preuve du Théorème 6.3.3 :
(1) Supposons que $A \bowtie I$ est un anneau arithmétique local (i.e anneau enchaîné), alors A l'est aussi car la propriété arithmétique est stable par quotient. De plus, pour chaque $i \in I$, les idéaux $(i,0)A \bowtie I$ et $(0,i)A \bowtie I$ sont comparables. Dans le cas $(i,0) \in (0,i)A \bowtie I$, il existe un élément $(a,j) \in A \times I$ tel que $(0,i) = (a, a+j)(i,0) = (ai, 0)$, d'où $i = 0$. De même, l'autre cas donne $i = 0$. Donc, nous concluons que $I = 0$. La réciproque est triviale, en effet $A \bowtie (0) \cong A$

(2) Supposons que $A \bowtie I$ est Gaussien local. Alors A l'est aussi, puisque la propriété Gaussien est stable par quotient. Ensuite, il faut montrer que $I^2 = 0$. Soit $a, b \in I$, alors nous avons $((a,a),(0,a)) = ((0,a))$ ou $((a,a)^2)$. Les deux cas donnent, respectivement, $a^2 = 0$ ou $a^2(1-i) = 0$ pour un certain $i \in I \subseteq$ m. Il s'ensuit alors que $a^2 = 0$. De même on a $b^2 = 0$. Maintenant, puisque A est Gaussien alors $ab = 0$. Pour prouver la dernière assertions, considérons $a \in A$ et $i \in I$. Dans $A \bowtie I$, nous avons $((a,a),(0,i))^2 = ((a,a))^2$ car $I^2 = 0$. Il en résulte que $ai = a^2 j$ avec $j \in I$, donc $aI = a^2 I$, d'où le résultat.

Inversement, soit $(a, a+i), (b, b+i) \in A \bowtie I$. Puisque A est local Gaussien , et si par exemple $(a,b)^2 = (a)^2$ alors $b^2 = a^2 x$ et $ab = a^2 y$ avec $x, y \in A$. Par ailleurs, $ab = 0$ implique que $b^2 = 0$. Par hypothèse, il existe $i_1, i_2, i_3, j_1, j_2 \in I$ tels que $2bj = a^2 x j_1$, $2axi = a^2 i_1$, $aj = a^2 j_2$, $bi = a^2 x i_2$, et $2ayi = a^2 i_3$. En utilisant le fait que $I^2 = 0$, et par un calcul simple on obtient $(b, b+j)^2 = (a, a+i)^2(x, x + xj_1 - i_1)$ et $(a, a+i)(b, b+j) = (a, a+i)^2(y, y + xi_2 + j_2 - i_3)$. En outre, supposons $(a, a+i)(b, b+j) = 0$. Ainsi $ab = 0$, d'où $b^2 = 0$ et $2bj = 0$ car $bI = 0$. De sorte que $(b, b+j)^2 = 0$. Par

conséquent $A \bowtie I$ est Gaussien local.
Cela termine la preuve de (2).

(3) Sans perte de généralité, nous supposons que $A \bowtie I$ est un **fqp**-anneau local qui n'est pas un anneau enchaîné (i.e,$I \neq 0$). D'après le lemme 6.3.5, A est un **fqp**-anneau (et donc un anneau de Prüfer). Donc $Z(A)$ est un idéal (premier) de A. De plus, par (2), $aI = a^2I$ pour chaque $a \in A$. En particulier, $I = aI$ pour tout élément régulier $a \in A$ et donc par la remarque 6.2.3, $I \subseteq Z(A)$. Ainsi, par le lemme 6.2.8, $Z(A \bowtie I) = Z(A) \bowtie I$. Enfin, le (1) combiné avec les lemmes 6.3.6 et 6.3.7 permettent de conclure que $(Z(A))^2 = 0$

Réciproquement, supposons que A est un anneau de Prüfer,$(Z(A))^2 = 0$, et $aI = a^2I$ pour tout élément $a \in A$. Il s'agit de montrer que $A \bowtie I$ est un fqp-anneau. Tout le long de la preuve, nous utiliserons les résultats suivants $I \subseteq Z(A)$,$I^2 = 0$, et $I = aI \forall a \in A \setminus Z(A)$.

Soient $(a, a+i)$ et $(b, b+j)$ deux éléments non nuls incomparables de $A \bowtie I$.

Affirmations (1) : $a, b \in Z(A)$.

En effet, par l'absurde, supposons que a est régulier dans A. Par le lemme 6.2.7, on a (a) et (b) sont comparables. On suppose que $b = ac$ pour un certain $c \in A$. Il existe $k \in I(= aI)$ tel que $j - ci = ak$ ceci implique que $(b, b+j) = (a, a+i)(c, c+k)$, ce qui est une contradiction. Maintenant, si $a = bc$ pour un certain $c \in A$, nécessairement, b est régulier et donc par le même argument on aboutit à la même contradiction, d'où l'affirmation (1).

Affirmations (2) : $Ann(a, a+i) = Ann(b, b+j)$ et $((a, a+i)) \cap ((b, b+j)) = 0$.

Il est clair que $Ann(a, a+i) \subseteq Z(A \bowtie I) = Z(A) \bowtie I = Ann(b, b+j)$ par le lemme 6.2.8. L'autre inclusion découle directement de l'affirmation (1). Donc $Ann(a, a+i) = Z(A) \bowtie I = Ann(b, b+j)$. Il reste à montrer que $((a, a+i)) \cap ((b, b+j)) = 0$. Pour cela, considérons $(x, x+h)$ et $(y, y+k) \in A \bowtie I$ tels que

$$(a, a+i)(x, x+h) = (b, b+j)(y, y+k)$$

Nous obtenons par l'affirmation (1)

$$ax = by \text{ et } xi = yj$$

Nous affirmons que x ou $y \in Z(A)$. En effet, par l'absurde , nous supposons que x et y ne sont pas réguliers dans A. D'où, d'après le lemme 6.2.7 xA et yA sont comparables ; disons que $x = ry$ pour un certain $r \in A$. Alors $ary = by$ et $ryi = yj$ d'où $b = ra$ et $j = ri$, il s'ensuit alors que $(b, b+j) = (a, a+i)(r, r)$, ce qui est absurde. Par conséquent, x ou $y \in Z(A)$ d'où $ax = by = xi = yj = 0$, ce qui achève la preuve de l'affirmation(2).

Finalement, soit J un idéal de type fini de $A \bowtie I$ de générateur minimal $\{(a_1, a_1 + i_1), ..., (a_n, a_n + i_n)\}$. Par l'affirmation (2), nous obtenons

$$Ann(a_h, a_h + i_h) = Ann(a_k, a_k + i_k), \quad \forall h \neq k \in \{1, ..., n\};$$
$$J = ((a_1, a_1 + i_1) \oplus ((a_2, a_2 + i_2)) \oplus \ldots \oplus ((a_n, a_n + i_n)).$$

Par conséquent, $((a_h, a_h + i_h)) \cong ((a_k, a_k + i_k))$ et donc $((a_h, a_h + i_h))$ est $((a_k, a_k + i_k))$-projectif, pour tout h, k. D'où d'après [31, Corollaire 1.2], J est quasi-projectif. ce qui termine la preuve du théorème. ■

Remarque 6.3.8

Il est intéressant de noter que, dans le théorème 6.3.3(2-3), les deux hypothèses $I^2 = 0$ *et* $(Z(A))^2 = 0$ *sont indépendants avec l'hypothèse "*$aI = a^2 I$, $\forall a \in A$.*" Par exemple, si A est un anneau enchaîné et I est l'idéal donné dans la remarque 6.2.3(2), alors on a bien* $I^2 = Z((A))^2 = 0$ *car* $I \subsetneq Z(A) = 0 \propto \mathbb{Q}$. *Réciproquement, soit* $A := \dfrac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$ *et* $I := \dfrac{4\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$, *on peut vérifier que* $Z((A))^2 = I \neq 0$ *et* $aI = a^2 I = 0$, $\forall a \in A := \dfrac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$.

Le corollaire suivant traite le cas général.

Corollaire 6.3.9

Soient A un anneau et I un idéal propre de A.

(1) *$A \bowtie I$ est arithmétique si et seulement si A est arithmétique et* $I_m = 0, \forall m \in Max(A)$.

(2) *$A \bowtie I$ est localement un **fqp**-anneau si et seulement si A est localement un **fqp**-anneau,* $(Z(A_m))^2 = 0$, *et* $aI_m = a^2 I_m$, $\forall m \in Max(A, I)$, *et* $\forall a \in m$.

(3) *$A \bowtie I$ est Gaussien si et seulement si A est Gaussien,* $I_m^2 = 0$, *et* $aI_m = a^2 I_m$, $\forall m \in Max(A, I)$, *et* $\forall a \in m$.

Preuve :

Soit $m \in Max(A)$. D'après la remarque 6.2.1, on a $(A \bowtie I)_{m \bowtie I} \cong A_m \bowtie I_m$ si $I \subseteq m$ et $(A \bowtie I)_{m \bowtie I} \cong A_m$ si $I \nsubseteq m$. Donc, le théorème 6.3.3 et le fait que les propriétés arithmétiques et Gaussiens sont locaux conduit à la conclusion.

Comme application du Corollaire 6.3.9, on peut construire un exemple d'un anneau localement un **fqp**-anneau qui n'est pas arithmétique.

Exemple 6.3.10

Soient $A := \dfrac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$, $_1 := 2\mathrm{A}$, $\mathrm{m}_2 = 3\mathrm{A}$, *et* $I := \mathrm{m}_1\mathrm{m}_2$. *Alors $A \bowtie I$ est localement un **fqp**-anneau qui n'est pas un anneau arithmétique. En effet :*

$(Z(A_{\mathrm{m_i}}))^2 = \mathrm{m_i^2 A m_i} = 0$ *(pour i=1,2) ;* $\mathrm{I_{m_1}} = 6A_{\mathrm{m_1}} \neq 0$*;* $\mathrm{I_{m_2}} = 0$ *; et facilement* $aI_{\mathrm{m_1}} = a^2 I_{\mathrm{m_1}}, \forall a \in \mathrm{m_1}$

6.4 Dimension globale faible et transfert de la condition semi-héréditaire

Théorème 6.4.1
Soient A un anneau et I un idéal propre de A.

- **(1)** *$w.gl.dim(A \bowtie I) \leq 1$ si et seulement si $w.gl.dim(A) \leq 1$ et $I_m = 0$, $\forall m \in Max(A, I)$.*
- **(2)** *On suppose que I est de type fini , alors $A \bowtie I$ est semi-héréditaire si et seulement si A est semi-héréditaire et $I_m = 0$, $\forall m \in Max(A, I)$.*

Avant de prouver le théorème 6.4.1, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 6.4.2
Soient A un anneau et I un idéal propre de A. Si $A \bowtie I$ est cohérent, alors A l'est aussi. La réciproque est vraie lorsque I est de type fini.

Preuve :
Si $A \bowtie I$ est cohérent, alors A l'est aussi, par [44, Théorème 4.1.5], puisque A est un sous-anneau rétracté de $A \bowtie I$ à travers l'application $\psi : A \bowtie I \to A$ définie par $\psi(a, a+i) = a$. Inversement, supposons que A est cohérent et I de type fini. Rappelons que $I \times 0$ est un idéal de $A \bowtie I$ et $\dfrac{A \bowtie I}{I \times 0} \cong A$ [24, Remarque 1(b)]. Nous affirmons que $I \times 0$ est $A \bowtie I$-cohérent. En effet, soit H un sous idéal de type fini de $I \times 0$. On va montrer que H est de présentation finie. Il est clair que, $H := \sum_{i=1}^{n} A \bowtie I(a_i, 0)$, pour certains $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in I$. Considérons la suite exacte de $A \bowtie I$-modules :

$$0 \longrightarrow Ker(u) \bowtie (A \bowtie I)^n \xrightarrow{u} H \longrightarrow 0,$$

où $u(r_i, r_i + e_i)_{1 \leq i \leq n} = \sum_{i=1}^{n} (r_i, r_i + e_i)(a_i, 0) = (\sum_{i=1}^{n} r_i a_i, 0)$.

$$\text{D'où : } Ker(u) = \{(r_i, r_i + e_i)_{1 \leq i \leq n} \in (A \bowtie I)^n \mid \sum_{i=1}^{n} r_i a_i = 0\}$$

. Maintenant, posons $J := \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ un sous idéal de type fini de I, et considérons la suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow Ker(v) \longrightarrow A^n \xrightarrow{v} J \longrightarrow 0,$$

où $v(b_i)_{1\leq i\leq n} = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i$. Donc, sous l'identification de $A \bowtie I$-modules $(A \bowtie I)^n = A^n \bowtie I^n$. Nous avons $Ker(u) = Ker(v) \bowtie I$. Or, A est cohérent donc J est de présentation finie. Par conséquent, $Ker(v)$ est un A-module de type fini .D'où $Ker(u)$ est un $A \bowtie I$-module de type fini (I est de type fini). Il s'ensuit alors que H est de présentation finie et donc $I \times 0$ est $A \bowtie I$-cohérent D'après [44, Théorème 2.4.1 (2)], $A \bowtie I$ est cohérent, ce qui prouve le lemme.

Preuve du théorème 6.4.1 :

(1) Si $I_m = 0$, pour tout $m \in Max(A, I)$, alors la remarque 6.2.1 donne $(A \bowtie I)_{\widetilde{m}} \cong (A \bowtie I)_{m \bowtie I} \cong A_m, \forall m \in Max(A), \widetilde{m} = \{(x + i, x) \mid x \in m, i \in I\}$, ensuite le corollaire 6.3.9 (1) conduit à la conclusion.

(2) En combinant le lemme 6.4.2 et (1) et le fait qu'un anneau est semi-héréditaire si et seulement s'il est cohérent et de dimension globale faible au plus égale 1 [13, Théorème 3.3] **Preuve :**

Exemple 6.4.3

D'après le théorème 6.4.1, $\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \bowtie \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \propto \frac{4\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}$ *est un anneau semi-héréditaire puisque* $\left(\frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}\right)_{\frac{2\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}} = 0$..

On rappelle que la dimension globale faible d'un anneau arithmétique (respectivement Gaussien cohérent) est soit 0,1 ou ∞ [64] (respectivement.,[64, Théorème 3.3]) Maintenant, on utilise l'amalgamation pour construire de nouveaux exemples d'anneaux Gaussiens non-cohérents, non-arithmétiques avec dimension globale faible infinie.

Exemple 6.4.4

Soient A un anneau Gaussien, non-cohérent,local et $I \neq 0$ un idéal propre de$A$ avec $I^2 = 0$ et $aI = a^2 I \forall a \in A$. Supposons que $0 \times I$ n'est pas plat dans $A \bowtie I$ (en particulier, si I est de type fini ou non plat sur A). Ensuite, l'amalgamation $R := A \bowtie I$ est un anneau Gaussien non-cohérent, non-arithmétique, local avec $w.gl.dim(R) = \infty$.

Pour un exemple explicite, on peut prendre $A := \mathbb{Z}_2 \propto \mathbb{Q}$ et $I := 0 \propto \mathbb{Q}$.

Preuve :
D'après le théorème 6.3.3, le théorème 6.4.1, et le lemme 6.4.2, R est un anneau Gaussien non cohérent, non arithmétique et local avec $w.gl.dim(R) \geq 2$. Ensuite, supposons que $0 \times I$ n'est pas $A \bowtie I$-plat. Soit $\{f_i\}_{i\in\Delta}$ un ensemble de générateurs de I, et considérons la R-application $u : \quad R^{(\Delta)} \longrightarrow 0 \times I$ définie par $u(a_i, e_i)_{i\in\Delta} = \sum_{i\in\Delta}(a_i, e_i)(0, f_i) = (0, \sum_{i\in\Delta} a_i f_i)$. Clairement, $Ker(u) = V \bowtie I^{(\Delta)}$, où $V := \{(a_i)_{i\in\Delta} / \sum_{i\in\Delta} a_i f_i = 0\}$. Ici nous identifions R^{Δ} avec $A^{\Delta} \bowtie I^{\Delta}$ comme des R-modules. Nous avons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \to V \bowtie I^{(\Delta)} \to R^{(\Delta)} \xrightarrow{u} 0 \times I \to 0$$

D'autre part, $V \bowtie I^{(\Delta)} = V^* \oplus (0 \times I)^{(\Delta)}$,où $V^* = \{(a, a)/a \in V\}$. Puisque $0 \times I$ est n'est pas plat, la suite exacte ci-dessous donne :

$$fd(0 \times I) \leq fd(V^* \oplus (0 \times I)^{\Delta}) \leq fd(0 \times I) - 1$$

Par conséquent, $fd(0 \times I) = w.gl.dim(R) = \infty$, d'où le résultat.

Maintenant, si I est de type fini, alors $0 \times I$ n'est pas R-plat car R est local et $(a, 0)(0 \times I) = 0\ \forall a \neq 0$. De plus, en utilisant l'interprétation de la platitude en termes de relations [17, Ch. I,§2, Corollaire 1], on peut facilement vérifier que, si $0 \times I$ est R-plat, alors I est A-plat.

Pour l'exemple explicite, il est facile de voir que $I^2 = 0$ et $aI = a^2 I\ \forall a \in 2\mathbb{Z} \propto \mathbb{Q}$. Par ailleurs, A est arithmétique (et donc Gaussien) par [5, Théorème 2.1] et non cohérent par [54, Théorème 2.8]. Finalement, nous affirmons que $I := 0 \propto \mathbb{Q}$ n'est pas plat dans $A := \mathbb{Z}_{(2)} \propto \mathbb{Q}$ puisqu'il n'est pas plat dans $\mathbb{Q} \propto \mathbb{Q}$. Pour la démonstration, voir la preuve de [5, Lemme 2.3].

CHAPITRE 7

CONDITIONS DE PRÜFER DANS LES SOUS-ANNEAUX RÉTRACTÉS ET QUELQUES APPLICATIONS

C. Bakkari,N. Mahdou et H. Mouanis, *Prüfer-Like Conditions in Subring Retracts and Applications*. Communications in Algebra, 37:47-55, (2009)

Dans ce chapitre on va étudier le transfert des conditions de Prüfer entre un anneau commutatif et son sous-anneau rétracté.

Définition 7.0.1
Soient B un anneau et A un sous-anneau de B. On dit que A est un module rétracté de B (ou sous-anneau rétracté de B) s'il existe un homomorphisme de A-module $\phi : \ A \longrightarrow B$ tel que $\phi\mid_A = id\mid_A$. L'homomorphisme ϕ est appelé l'application de rétraction de module. Si une telle application existe, alors A est un facteur direct de B ; c'est à dire que $B = A \oplus I$ où I est un idéal de B.

7.1 Transfert des conditions de Prüfer aux sous-anneaux rétractés

7.1.1 Transfert des propriétés Gaussien, Prüfer, et arithmétique

Théorème 7.1.1
Soient R un anneau et A un sous-anneau rétracté de R.

(1) *Si R est Gaussien, alors A l'est aussi.*

(2) *On suppose que $(A, \mathcal{M})$ est local. Soit $R := A \propto (A/\mathcal{M})$ l'anneau extension triviale de A par $(A/\mathcal{M})$. Alors R est Gaussien si et seulement si A est Gaussien.*

Preuve :
(1) On suppose que R est un anneau Gaussien, et soit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in A[x]$, où n et m sont deux entiers positifs. Il s'agit de montrer que $C_A(f)C_A(g) \subseteq C_A(fg)$. Soit $\alpha \in C_A(f)C_A(g)$, on a $\alpha \in C_R(f)C_R(g)$, de plus R est Gaussien donc, $\alpha \in C_R(fg)$, **i.e** $\alpha = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i b_j) r_k$ où $r_k \in R, \ \forall k, \ 1 \leq k \leq nm$.
Donc $\alpha = \phi(\alpha) = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i b_j) \phi(r_k)$ où ϕ est l'application de rétraction de module, ce qui prouve que $\alpha \in C_A(fg)$ et par conséquent A est un anneau Gaussien.
(2) On suppose que $(A, \mathcal{M})$ est un anneau local et soit $R := A \propto A/\mathcal{M}$ l'extension triviale de A par $A/\mathcal{M}$. Si R est Gaussien, alors A l'est aussi d'après (1).
Réciproquement, si A est Gaussien alors R est Gaussien d'après la caractérisation des anneaux Gaussiens locaux donnés par Tsang (1965) : un anneau local $(R, \mathcal{M})$ est Gaussien si et seulement si pour tout $a, b \in \mathcal{M}$ les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$(1)\ (a,b)^2 = (a^2) \text{ ou } (b^2)\ ;\ (2) \text{ Si } (a,b)^2 = (a^2) \text{ et } ab = 0, \text{ alors } b^2 = 0.$$

Définition 7.1.2
Soient A un anneau, $Tot(A)$ l'anneau total des fractions de A, et E un A-module.

(1) *A est appelé un anneau total des fractions si $A := Tot(A)$, **i.e** tout élément de A est une unité ou bien un diviseur de zéro.*

(2) *E est dit sans torsion si $\forall a \in A \setminus Z(A)$ et $\forall e \in E$: $ae = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $e = 0$.*

Théorème 7.1.3
Soient R un anneau, A un sous-anneau rétracté de R, et $Nil(R)$ l'ensemble des éléments nilpotent de R.

(1) *On suppose que l'application de rétraction de module ϕ $R :\longrightarrow A$ vérifie $Ker(\phi)$ est sans torsion. Si R est de Prüfer, alors A l'est aussi.*

(2) *On suppose que $(A, \mathcal{M})$ est un anneau total des fractions, local d'idéal maximal $\mathcal{M}$, et que l'application de rétraction de module ϕ vérifie $\mathcal{M}\, Ker(\phi) = 0$ et $Ker(\phi) \subseteq Nil(R)$. Alors R est un anneau total des fractions ; en particulier, R est de Prüfer.*

Preuve :
(1) On suppose que $Ker(\phi)$ est sans torsion, où $\phi\ :\ R \longrightarrow A$ est l'application de rétraction de module , et R est un anneau de Prüfer. Soient $I = \sum_{i=0}^{n} a_i A$ un idéal de type fini régulier de A et a un élément régulier de I. Il s'agit de prouver que I est inversible. Soit b un élément de R tel que $ba = 0$, on a $\phi(b)a = 0$ d'où $\phi(b) = 0$ car a est régulier dans A, de sorte que $b \in Ker(\phi)$. D'autre part, en posant $b = a' + v \in R$, où $a' \in A$ et $v \in Ker(\phi)$, ($Ker(\phi)$ est un facteur direct de R,) on obtient que $a'a + va = 0$ et par suite $a' = 0$ et $v = 0$ puisque a est régulier dans A et $Ker(\phi)$ est sans torsion ; ce qui prouve que a est un élément régulier de R et donc l'idéal $J = \sum_{i=0}^{n} a_i R$ est un idéal de type fini régulier de R. Donc, puisque R est de Prüfer, alors J est inversible dans R et donc le polynôme $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ est Gaussien dans R (car $J = C_R(f)$). En utilisant la preuve du théorème 7.1.1 (1), on trouve que f est Gaussien sur A ; donc, comme $I = C_A(f)$ est un idéal régulier de A, alors il est inversible dans A (d'après Bazzoni et Glaz [12], 2006, Théorème 4.2 (2)). Ainsi, A est un anneau de Prüfer.
(2) On suppose que $(A, \mathcal{M})$ est un anneau total des fractions, local d'idéal maximal $\mathcal{M}$, et que $\mathcal{M}\, ker(\phi) = 0$ et $Ker(\phi) \subseteq Nil(R)$. On pose $V = Ker(\phi)$.

Pour montrer que R est un anneau total des fractions, il faut montrer que tout élément $a + v \in R$ est inversible ou bien un diviseur de zéro. En effet :
a) Si $a \in \mathcal{M}$, alors a n'est pas inversible dans A et donc a est un diviseur de zéro dans A. (car A est un anneau total des fractions). D'où il existe $b \neq 0 \in \mathcal{M}$ tel que $ab = 0$. Donc $b(a + v) = 0$ puisque $\mathcal{M}V = 0$; c'est à dire que $a + v$ est un diviseur

de zéro dans R .
b) Si $a \notin M$, alors a est inversible dans A et donc dans R. D'où, $a+v$ est inversible dans R en tant que somme d'un élément inversible et d'un nilpotent. Par conséquent, R est un anneau total des fractions.

L'exemple suivant, montre que la rétraction n'est pas une condition suffisante pour transférer la propriété anneau de Prüfer.

Exemple 7.1.4
Soient $(A, \mathcal{M})$ un anneau local qui n'est pas de Prüfer et E un A-module non nul tel que $\mathcal{M}E = 0$. Soit $R := A \propto E$ l'anneau extension triviale de A par E. Alors on a :

- **(1)** *R est un anneau total des fractions (car R est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M} \propto E$ et $(\mathcal{M} \propto E)(0, e) = 0$, pour tout $e \in E$). En particulier, R est de Prüfer.*
- **(2)** *A est un sous-anneau rétracté de R qui n'est pas de Prüfer.*

L'exemple suivant, montre que les conditions imposées dans les théorèmes 7.1.1(2) et 7.1.3(2) sont nécessaires.

Exemple 7.1.5
Soit $(V, \mathcal{M})$ un domaine de valuation discrète de rang 1 telle que $2 \in \mathcal{M}$ (par exemple $V := \mathbb{Z}_{(2)}$). Alors $R := V \propto V$ n'est pas de Prüfer. En particulier R n'est pas Gaussien.

Preuve :
Il suffit de montrer que R n'est pas de Prüfer. Soit $I := R(2, 0) + R(2, 1)$ un idéal de R à deux générateurs. Il est clair que I est régulier (car $(2, 0)$ est régulier). Puisque R est local, alors I est inversible si et seulement s'il est principal. On a R est local donc, I est principal si et seulement s'il est engendré par l'un des deux générateurs. Ce qui est impossible, d'où le résultat.

Nous étudions maintenant le transfert de la propriété anneau arithmétique.

Théorème 7.1.6
Soient R un anneau et A un sous-anneau rétracté de R. Si R est un anneau arithmétique alors A l'est aussi.

Preuve :
D'après Jensen[51] (1966, Théorème 2), il suffit de montrer que pour tout couple d'idéaux I et J de A tel que $I \subseteq J$ et J de type fini , il existait un idéal H de A tel que $I = HJ$.

Nous avons $IR \subseteq JR$ et JR est un idéal de type fini de R. Donc, comme R est arithmétique, alors il existe un idéal L de R tel que $RI = LJR$ c'est à dire que $IR = LJ$. Par conséquent, $I = \phi(IR) = \phi(LJ) = \phi(L)J$ et donc A est arithmétique.

Dans l'exemple suivant, on montrer que, sous les mêmes conditions que dans le théorème 7.1.1(2), on ne peut pas transférer la propriété arithmétique de A à R.

Exemple 7.1.7
Soit $(A, \mathcal{M})$ un domaine de valuation qui n'est pas un corps, où $\mathcal{M}$ est son idéal maximal. Soit $R = A \propto (A/\mathcal{M})$ l'extension triviale de A par $(A/\mathcal{M})$. Alors :

(1) *A est un sous-anneau rétracté arithmétique de l'anneau local R.*

(2) *R n'est pas arithmétique.*

Preuve :
(1) Évidente.
(2) Nous affirmons que R n'est pas arithmétique. En effet, dans le cas contraire, soit $I := R(a, 0) + R(0, e)$ un idéal de R à deux générateurs, où $a \neq 0 \in \mathcal{M}$ et $e \neq 0 \in A/\mathcal{M}$. Puisque R est local, alors I est principal si et seulement s'il est engendré par l'un des deux générateurs, ce qui est impossible, d'où le résultat.

L'exemple suivant prouve que la condition <<A est un sous-anneau rétracté de R >> ne peut pas être éliminé dans la preuve des théorèmes 7.1.1(1) et 7.1.6.

Exemple 7.1.8
Soient K un corps ,$K[X, Y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées X et Y, et soit $Q(K[X])$ le corps des fractions de $K[X]$. Alors $Q(K[X])[Y]$ est un domaine de Prüfer contenant le sous-anneau $K[X, Y]$ qui n'est un domaine de Prüfer.

7.2 Application sur des anneaux particuliers

7.2.1 Première Application : Extensions triviales

Soient A un anneau, E un A-module et $R := A \propto E$ l'anneau extension triviale de A par E.
Nous avons A est un sous-anneau rétracté de R où l'application de rétraction de module ϕ est défini par $\phi(x, e) = e$ et $Ker(\phi) = 0 \propto E$

Proposition 7.2.1
Soient A un anneau, E un A-module et $R := A \propto E$ l'anneau extension triviale de A par E. Alors :

(1) a) *On suppose que $Ker(\phi) = 0 \propto E$ est sans torsion. Si R est un anneau de Prüfer, alors A l'est aussi.*

b) *On suppose que $(A, \mathcal{M})$ est un anneau local, où $\mathcal{M}$ est son idéal maximal tel que $\mathcal{M}E = 0$. Alors R est un anneau total des fractions. En particulier, R est un anneau de Prüfer ;*

(2) a) *Si R est Gaussien, alors A l'est aussi.*

b) *On suppose que $E := A/\mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de A. Alors R est anneau Gaussien si et seulement si A l'est aussi.*

(3) *Si R est un anneau arithmétique, alors A l'est aussi.*

(4) $w.dim(R) > 1$.

Preuve :
Remarquons d'abord que $R := A \propto E$, où $(A, \mathcal{M})$ est un anneau local et $\mathcal{M}E = 0$, est un anneau total des fractions (puisque R est local d'idéal maximal $\mathcal{M} \propto E$ et $(\mathcal{M} \propto E)(0, 1) = 0_R$) Par la section 2, il reste à montrer que $w.dim(R) > 1$.

Soient $f \in E - \{0\}$ et $J := R(0, f) = 0 \propto (Af)$. Considérons la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \longrightarrow Ker(u) \longrightarrow R \xrightarrow{u} J \longrightarrow 0$$

où $u(a, e) = (a, e)(0, f) = (0, af)$. Par conséquent, $Ker(u) = Ann(f) \propto E$. L'idéal J n'est pas plat car sinon, d'après Rotman[68] (1979, Théorème 3.55), $J = J \cap Ker(u) = JKer(u) = (0 \propto Af)(Ann(f) \propto E) = 0 \propto (Ann(f)f) = 0$ donc $J = 0$, ce qui est absurde, d'où J n'est pas plat et par suite $W.dim(R) > 1$.

▶ Maintenant, on donne une famille d'exemples d'anneaux de Prüfer qui ne sont pas Gaussiens.

Exemple 7.2.2
Soit $(A, \mathcal{M})$ un domaine local qui n'est pas de Prüfer, où $\mathcal{M}$ est son idéal maximal, et soit E un A-module non nul tel que $\mathcal{M}E = 0$. Soit $R := A \propto E$, l'anneau extension triviale de A par E. Alors :

(1) *R est de Prüfer, d'après la proposition 7.2.1 (1.b).*

(2) *R n'est pas Gaussien, d'après la proposition 7.2.1 (2.a) puisque A n'est pas Gaussien (car A est par hypothèse n'est pas un domaine de Prüfer).*

$\mathcal{M}$

▶ Maintenant. On donne des exemples d'anneaux Gaussiens non arithmétiques.

Exemple 7.2.3
Soit $(A, \mathcal{M})$ *un domaine de valuation, où* $\mathcal{M}$ *est son idéal maximal, et soit* $R := A \propto (A/\mathcal{M})$ *l'anneau extension triviale de* A *par* $A/\mathcal{M}$*. Alors :*

(1) R *est Gaussien, d'après la proposition 7.2.1 (2.*b*), puisque* A *est un domaine de valuation.*

(2) R *n'est pas un anneau arithmétique, d'après l'exemple 7.1.7 (3).*

▶ Maintenant, on construit un anneau arithmétique R tel que $w.dim(R) > 1$.

Exemple 7.2.4
Soit k *un sous-corps propre d'un corps* K*, et soit* $R := k \propto K$ *l'extension triviale de* k *par* K*. Alors on a :*

(1) R *est Gaussien d'après [6, Exemple 2.3 (2.b)].*

(2) R *n'est pas arithmétique d'après [6, Exemple 2.3 (2.c)]. puisque* R *est local.*

Exemple 7.2.5
Soient K *un corps et* $R := K \propto K$ *l'extension triviale de* K *par* K*.*

(1) R *est un anneau arithmétique.*

(2) $w.dim(R) = \infty$*.*

Preuve :
(1) R est arithmétique, d'après "Bakkari et Mahdou [6] (2006, Exemple 2.3 (1.a))".
(2) D'après la preuve de la proposition 7.2.1 (4), l'idéal $I := R(0, 1)$ n'est pas plat. D'autre part, la suite exacte de R-modules suivante :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \xrightarrow{u} I \longrightarrow 0$$

où $u(a, e) = (a, e)(0, 1) = (0, a)$ montre que $fd_R(I) = \infty$. Donc, $w.dim(R) = \infty$
Ce qui termine la preuve.

Remarque 7.2.6
On note que dans cette exemple, si on remplace le corps K*, par un anneau total des fractions principal* A*, on n'a pas en général* $R = A \propto A$ *est Gaussien ; en particulier, il n'est pas arithmétique.*

Exemple 7.2.7
Soit $A := \mathbb{Z}/(2^i\mathbb{Z})$*, où* $i \geq 2$ *est un entier, et soit* $R = A \propto A$ *l'anneau extension triviale de* A *par* A*. Alors on a :*

(1) A *est un anneau total des fractions, principal et local d'idéal maximal* $\mathcal{M} = 2A$*.*

(2) *R est un anneau total des fractions local. En particulier, R est un anneau de Prüfer.*

(3) *R n'est pas Gaussien. En particulier, R n'est pas arithmétique.*

Preuve :
(1) et (2) sont claires car R est local d'idéal maximal $\mathcal{M} \propto A$ et $(\mathcal{M} \propto A)(0, \overline{2^{i-1}}) = 0_R$.

Il reste à montrer que R n'est pas Gaussien. Soit $f := (\overline{2^{i-1}}, 0) + (\overline{2^{i-1}}, 1)X \in R[X]$. On a $f^2 = 0$ donc $C_R(f) = 0$ et $(C_R(f))^2 = R(0, \overline{2^{i-1}}) \neq 0$. Par conséquent, R n'est pas un anneau Gaussien et cela achève la preuve de cet l'exemple.

7.2.2 Deuxième Application : Anneau de Nagata

Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A, et $R := A(X) = S^{-1}A[X]$ la localisation de $A[X]$ par S, formé par l'ensemble des polynômes $f(X)$ tel que $C(f) = A$. Par construction, nous avons $A(X) = A + XA[X] + C$ où $C = \{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in A[X] \, et \, d^\circ f(x) < d^\circ g(x) \, et \, C(g(x)) = A\}$ (voir, Lam [56], 1978, chapitre IV, Proposition 1.4 (1)) c'est à dire que A est un module rétracté de $A(X)$. L'anneau $R := A(X)$ est appelé l'anneau de Nagata (voir, Huckaba[50] (1988) et Lam[56] (1978)).

Proposition 7.2.8
Soient A un anneau, $R := A(X)$ l'anneau de Nagata.

(1) *On suppose que $E = Ker(\phi)$ est sans torsion. Si R est un anneau de Prüfer, alors A l'est aussi.*

(2) *Si $R := A(X)$ est Gaussien, alors A l'est aussi.*

(3) *Si $R := A(X)$ est arithmétique, alors A l'est aussi.*

Définition 7.2.9
Soient R un anneau et S un sous-ensemble de R.

(1) *On dit que S est dense dans R si $Ann(S) = 0$.*

(2) *On dit que R est fortement de Prüfer si tout idéal de type fini dense I dans R est localement principal.*

(3) *On dit que R vérifie la **(CH)-propriété** si tout idéal propre de R de type fini. admet un annulateur non nul* ***i.e***, *$Ann(I) \neq 0$.*

Remarques 7.2.10

(1) *Tout anneau fortement de Prüfer est de Prüfer (Huckaba [50] 1988, Lemme 18.1).*

(2) *L'anneau de Nagata $A(X)$ est de Prüfer si et seulement si A est fortement de Prüfer (Huckaba [50] 1988, Théorème 18.10).*

(3) *Tout **(CH)-anneau** est fortement de Prüfer.*

Exemple 7.2.11
*Soient $(A, \mathcal{M})$ un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$ et E un $A-$module tel que $\mathcal{M}E = 0$. Alors $R := A \propto E$ l'extension triviale de A par E, est un **(CH)-anneau** et donc fortement de Prüfer.*

▶ Maintenant, on donne un exemple d'anneau de Prüfer qui n'est pas Gaussien.

Exemple 7.2.12
Soient A un (CH)-anneau qui n'est pas Gaussien, $R := A(X)$ l'anneau de Nagata. Alors on a :

(1) *R est anneau de Prüfer.*

(2) *R n'est pas un anneau Gaussien.*

Preuve :

(1) Puisque A est un (CH)-anneau, alors A est fortement de Prüfer. D'où, d'après [50, 1988, Théorème 18.10], R est un anneau de Prüfer.

(2) Puisque A n'est pas Gaussien, alors d'après la proposition 7.2.8(2), R n'est pas Gaussien.

Perspectives

Au terme de ce travail, nous présentons les perspectives de notre recherche.

Premier question ouverte :

Soit f un polynôme Gaussien sur un anneau arbitraire R, tel que $(0 : c(f)) \neq 0$, qu'elles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $c(f)$ soit localement principal ou inversible ?

Deuxième question ouverte :

Soit R un anneau total des fractions. Dans quelles conditions, R est Gaussien ?

Troisième question ouverte :

Soit R un anneau total des fractions, est-ce-que. $w.dim(R) = 0, 1$ ou ∞

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Abuihlail, M. Jarrar, S. Kabbaj, (2011), *Commutative rings in which every finitely generated ideal is quasi-projective,* J. Pure Appl. Algebra 215 : 2504-2511.

[2] D.D. Anderson and V. Camillo, *Armendariz rings and Gaussian rings,* Commtatif Algebra, **26**(1998), 2265-2272.

[3] J. T. Arnold and R. Gilmer, *On the contents of polynomials,* Proc. Amer. Math. Soc. **24**(1970) 556-562.

[4] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra,* Addison-Wesley, Reading, 1969.

[5] C. Bakkari,S. Kabbaj and N. Mahdou, *Trivial extensions defined by Prüfer conditions,* J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 53-60.

[6] C. Bakkari and N. Mahdou, *Gaussian polynomials and content ideal in pull-backs,* Comm. Algebra **34** (8) (2006), 2727-2732.

[7] C. Bakkari, *On Prüfer-like conditions,* to appear in J. Commut. Algebra.

[8] C. Bakkari, N. Mahdou and H. Mouanis, *Prüfer-Like conditions in subring retracts and applications,* to appear in Commutatif Algebra.

[9] V. Barucci, S. Gabelli, (1987), *How far is a Mori domain from being a Krull domain ?* J. Pure Appl. Algebra 45 : 101-112.

[10] S. Bazzoni and S. Glaz, *Gaussian properties of total rings of quotients,* preprint.

[11] S. Bazzoni, S. Glaz, *Gaussian properties of total rings of quotients,* J. Algebra 310 (2007) 180-193.

[12] S. Bazzoni and S. Glaz, *Prüfer rings in Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra,* Eds : J. W. Brewer, S. Glaz, W.J. Heinzer, and B. Olberding , Springer, (2006), 263-277.

[13] S. Bazzoni and S. Glaz, *Prüfer rings in Multiplicative Ideal Theory in Commutative Rings,* pp. 55–72, Springer-Verlag, New York, **2006**.

[14] M.Jr. Boisen and M. Larsen, *Prüfer and valuation rings with zero divisors,* Pac.J. Math.**40** (1972), 7-12

[15] M.Jr. Boisen, P. Sheldon, (1975), *Pre-Prüfer rings,* Pacific J. Math. **58** : 331-344.

[16] M.Jr. Boisen and P. Sheldon, *A note on pre-arithmetical rings,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 28 (1976), 257-259.

[17] N. Bourbaki, (1972), *Commutative Algebra,* Paris : Hermann.

[18] J.G. Boynton, (2007), *pull-backs of arithmetical rings,* Comm. Algebra 35 : 2671-2684.

[19] J.G. Boynton, (2011), *Prüfer conditions and the total quotient ring,* Comm. Algebra **39**(5) : 1624-1630.

[20] H.S. Butts and R.C. Phillips, *Almost multiplication rings,* Canad.J.Math. **17** (1965), 267-277.

[21] H.S. Butts and W. Smith, *Prüfer rings,* Math.Z **95** (1967), 196-211.

[22] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra,* Princeton Universit Press, 1956.

[23] M. D'Anna, C.A. Finocchiaro, M. Fontana, *Algebraic and topological properties of an amalgamated algebra along an ideal* (in preparation).

[24] M. D'Anna, (2006), *A construction of Gorenstein rings,* J. Algebra 306 (6) : 507-519.

[25] M. D'Anna, C. Finocchiaro, M. Fontana, (2009), *Amalgamated algebras along an ideal,* M. Fontana, S. Kabbaj, B. Olberding, I. Swanson, eds. Commutative Algebra and its Applications. Berlin : Walter de Gruyter, pp. 155-172.

[26] M. Fontana, *Topologically defined classes of commutative rings,* Ann. Math. Pura Appl.**123** (1980), no.**4**, 331-355. [59]

[27] M. Fontana, S. Gabelli,(1996), *On the class group and the local class group of a pull-back,* J. Algebra 181 :803-835.

[28] L. Fuchs, *Über die ideale arithmetischer ringe,* Math.Helv.**23** (1949), 334-341.

[29] L. Fuchs, W. Heinzer, B. Olberding, *Commutative ideal theory without finiteness conditions : Primal ideals,* Trans. Amer. Math. Soc.**357** (2005) 2771-2798.

[30] L. Fuchs, W. Heinzer, B. Olberding, *Commutative ideal theory without finiteness conditions : Completely irreducible ideals,* Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006) 3113-3131.

[31] K.R. Fuller, D.A. Hill, (1970), *On quasi-projective modules via relative projectivity,* Arch. Math. (Basel) 21 :369-373.

[32] R. Gilmer and J. Huckaba, Δ*-rings,* J. Algebra **28**(1974), 414-432.

[33] R. Gilmer ,*Multiplicative ideal theory,* Marcel Dekker, 1972.

[34] R. Gilmer and J. Ohm, *Primary ideals and valuation ideals,* Trans. Amer. Math. Soc.**117** (1965), 237-250

[35] R. Gilmer, *The cancellation law for ideals in a commutative ring,* Canad.J. Math **17**(1965), 281-287

[36] R. Gilmer, *Overrings of Prüfer domains,* J. Algebra**4**(1966), 331-340

[37] R. Gilmer, *Domains in which valuation ideals are prime powers,* Arch. Math. (Basil)**17** (1966), 210-215

[38] R. Gilmer, *Some applications of the Hilfssatz von Dedekind-Mertens,* Math. Scand.**20** (1967), 240-244

[39] R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory,* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, Queen's University Press, 1968

[40] R. Gilmer, *On Prüfer rings,* Bull. Amer. Math. Soc.**78** (1972), 223-224

[41] R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory,* Queen's University Press, 1992

[42] S. Glaz, *Prüfer conditions in rings with zero-divisors,* CRC Press Series of Lectures in Pure Appl. Math.**241,** (2005), 272-282

[43] S. Glaz, *The weak dimension of Gaussian rings,* Proc. Amer. Math. Soc.**133** (2005), 2507-2513 (electronic)

[44] S. Glaz, *Commutative coherent rings,* Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics **1371**, 1989.

[45] S. Glaz and W.V. Vasconcelos, *The content of Gaussian polynomials,* J. Algebra **202**(1998), 1-9.

[46] S. Glaz, *The weak dimension of Gaussian rings,* submitted.

[47] S. Glaz, *Finite conductor rings,* Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2000) 2833-2843.

[48] M. Griffin, *Prüfer rings with zero-divisors* J. Reine Angew Math. **239/240**(1970), 55-67.

[49] W. Heinzer and C. Huneke, *Gaussian polynomials and content ideals,* Proc. Amer. Math. Soc.**125** (1997), 739-745.

[50] J.A. Huckaba, *Commutative rings with zero-divisors,* Marcel Dekker, 1988

[51] C.U. Jensen, *Arithmetical rings,* Acta Math. Hungr.**17**(1966), 115-123.

[52] C.U. Jensen, *On characterizations of Prüfer rings,* Math. Scand. **13** (1963), 90-98

[53] C.U. Jensen, *A remark on arithmetical rings,* Proc. Amer. Math. Soc.**15** (1964), 951-954

[54] S. Kabbaj and N. Mahdou, *Trivial extensions defined by coherent-like conditions,* Comm.Algebra **32** (10) (2004), 3937-3953.

[55] W. Krull, *Beiträge zur arithmetik kommutativer integritätsbereiche,* Math. Z.**41** (1936), 545-577.

[56] T.Y. Lam, (1978), *Serre's Conjecture. Lecture Notes in Mathematics,* Vol.**635**, Berlin : Springer-Verlag.

[57] K.A. Loper and M. Roitman, *The content of a Gaussian polynomial is invertible,* Proc. Amer. Math. Soc.**133** (2005), 1267-1271 (electronic)

[58] T.G Lucas, *Gaussian polynomials and invertibility,* preprint

[59] T.G. Lucas, *Gaussian polynomials and invertibility,* Proc. Amer. Math. Soc. **133** (7) (2005), 1881-1886 (electronic)

[60] T.G. Lucas, *The Gaussian property for rings and polynomials,* preprint

[61] T.G. Lucas, (1986), *Some results of Prüfer rings. Pacific* J. Math. **124** (2) : 333-343.

[62] M.E. Manis, *Extension of valuation theory,* Bull. Amer. Math. Soc.**73** (1967), 735-736

[63] J. Marot, *Sur les anneaux universellement Japonais,* **Ph.D.** Thesis, Universite de Paris-Sud, 1977.

[64] B. Osofsky, (1969), *Global dimension of commutative rings with linearly ordered ideals,* J. London Math. Soc. **44** : 183-185.

[65] H. Prüfer, *Untersuchungen uber teilbarkeitseigenschaften in korpern,* J. Reine Angew. Math.**168**(1932), 1-36 [135]

[66] Y. Quentel, *Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau,* Bull. Soc. Math. France **99** (1971), 265-272.

[67] J.E. Roos, (1981), *Finiteness Conditions in Commutative Algebra and Solution of a Problem of Vasconcelos,* Lectures Notes in Mathematics, **72**. London Math. Soc, pp. 179-204.

[68] J.J. Rotman, *An introduction to homological algebra,* Academic Press, New York, 1979.

[69] H. Tsang, *Gauss's Lemma,* Ph.D. Thesis, University of Chicago, 1965.

[70] W.V. Vasconcelos, (1976), *The Rings of Dimension Two,* New York : Marcel Dekker.