

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE.....	9
1.1 Analyse des circuits non linéaires : méthodes temporelles.....	9
1.1.1 Méthode nodale modifiée .....	9
1.1.2 Méthode de compensation .....	13
1.2 Analyse des circuits non linéaires : méthodes hybrides temporelles-fréquentielles....	16
1.2.1 Séries de Volterra et méthode multilinéaire de Schetzen .....	16
1.2.2 Méthode de balance des harmoniques .....	20
1.2.3 Méthode fréquentielle de compensation .....	23
1.3 Modélisation analytique de l'onde de choc induite par la foudre.....	27
1.3.1 La fonction double-exponentielle .....	27
1.3.2 Le modèle de Heidler.....	29
1.4 Conclusion .....	31
CHAPITRE 2 LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES SIMULTANÉES ET LEUR RÉOLUTION .....	33
2.1 Définitions.....	34
2.1.1 Les systèmes d'équations non linéaires .....	34
2.1.2 Convergence et vitesse de convergence.....	35
2.2 Méthode du Point-Fixe .....	36
2.3 Méthode de Newton-Raphson.....	38
2.4 Les Quasi-Newton : la méthode de Broyden .....	41
2.5 Méthode de Newton-Krylov .....	42
2.6 Conclusion .....	43
CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE : RÉOLUTION DU MODÈLE FRÉQUENTIEL DE COMPENSATION PAR RECUIT SIMULÉ .....	45
3.1 Particularités du système à résoudre .....	45
3.2 Énoncé du problème comme un problème d'optimisation globale .....	47
3.3 La méthode du Recuit Simulé.....	47
3.3.1 Une analogie avec la mécanique statistique.....	48
3.3.2 Algorithme et modèle mathématique.....	50
3.3.3 Convergence et vitesse de convergence.....	53
3.4 Application à la résolution du modèle fréquentiel de compensation .....	53
3.4.1 La fonction génératrice .....	54
3.4.2 La fonction de coût .....	56
3.4.3 La fonction d'acceptation .....	56
3.4.4 Le schéma de refroidissement.....	56
3.4.5 Initialisation de l'algorithme.....	57

3.5	Conclusion .....	57
CHAPITRE 4 ÉVALUATION DE LA MÉTHODE ET RÉSULTATS.....59		
4.1	Essais sur un modèle de ligne de transmission par quadripôles en cascade .....	59
4.1.1	Test de scalabilité.....	60
4.1.2	Comparaison avec ATP-EMTP .....	64
4.2	Essais de simulation d'une ligne de transmission réaliste .....	69
4.2.1	Résultats de convergence selon le coefficient de non-linéarité .....	70
4.3	Variation du paramètre algorithmique $k$ .....	73
4.3.1	Modèle d'onde de choc de Heidler .....	73
4.3.2	Modèle d'onde de choc en double exponentielle.....	76
4.4	Conclusion .....	78
CHAPITRE 5 INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES RÉSULTATS ET		
	DISCUSSION .....	81
5.1	Comparaison entre les méthodes de compensation temporelles et fréquentielles .....	81
5.1.1	Phénomène de réflexion.....	82
5.1.2	Dépendances en fréquence.....	84
5.2	Discussion.....	85
5.2.1	Paramètres algorithmiques : température et schéma de refroidissement ..	85
5.2.2	Paramètres algorithmiques : facteur $k$ .....	86
5.2.3	Implémentation de la méthode et améliorations .....	86
5.2.4	Méthodes numériques de résolution alternatives .....	87
5.3	Conclusion .....	88
CONCLUSION 89		
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....		93

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1	Modèles multilinéaires d'ordre 1 et k pour les composants R, L et C, dans le domaine de Laplace (Schetzen, 1985) .....18
Tableau 4.1	Paramètres de circuit du test de scalabilité .....61
Tableau 4.2	Paramètres algorithmiques du test de scalabilité .....61
Tableau 4.3	Paramètres de circuit du test de comparaison avec ATP-EMTP pour le circuit en quadripôles chaînables .....65
Tableau 4.4	Paramètres algorithmiques du test de comparaison avec ATP-EMTP pour le circuit en quadripôles chaînables .....65
Tableau 4.5	Paramètres de circuit du test de convergence selon le coefficient de non-linéarité .....71
Tableau 4.6	Paramètres algorithmiques du test de convergence selon le coefficient de non-linéarité .....71
Tableau 4.7	Paramètres de circuit du test de variation du paramètre algorithmique $k$ ..73
Tableau 4.8	Paramètres algorithmiques du test de variation du paramètre algorithmique $k$ .....74
Tableau 4.9	Paramètres de circuit du test de variation du paramètre algorithmique k (onde de choc en double exponentielle).....76
Tableau 4.10	Paramètres algorithmiques du test de variation du paramètre algorithmique k (onde de choc en double exponentielle).....76



## LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 0-1	Occurrences des impacts d'éclairs en flash/km <sup>2</sup> /année d'après des données recueillies entre 1995 et 2002 Tirée de NASA - NSSTC Lightning Team	1
Figure 0-2	Amorçages en retour par un éclair d'hiver sur une tour de transmission à double circuit de 500 kV Tirée de Hokuriku Electric Power Co. (1995) ...	3
Figure 0-3	Caractéristiques V-I de varistances à l'oxyde de zinc (bleu) et au carbure de silicium (rouge) Tirée de Wikipédia .....	5
Figure 1-1	Circuit simple pour illustration de la MNM Tirée de Schulz (2003).....	11
Figure 1-2	Méthode de compensation – simulation d'une branche contenant un élément non linéaire .....	15
Figure 1-3	Représentation d'un système non linéaire pour une série de Volterra convergente .....	17
Figure 1-4	Caractéristiques I-V pour différentes valeurs de $\alpha$ , avec $i_s = 700 A$ et $v_s = 15.000 V$ .....	24
Figure 1-5	Modèle d'onde de choc en double-exponentielle (1,2/20 $\mu s$ , pic à 25 kA; courbe générée avec le logiciel FFTSES <sup>©</sup> ).....	28
Figure 1-6	Vue rapprochée de la fonction double-exponentielle .....	28
Figure 1-7	Modèle d'onde de choc de Heidler (courbe générée avec le logiciel FFTSES <sup>©</sup> ) .....	29
Figure 1-8	Mise en évidence de la pente nulle à $t = 0$ pour la fonction de Heidler - comparaison sur 10 $\mu s$ des fonctions de Heidler (gauche) et double-exponentielle (droite).....	30
Figure 2-1	Interprétation géométrique de la méthode du Point-Fixe .....	37
Figure 2-2	Interprétation géométrique de la méthode de Newton-Raphson.....	39
Figure 3-1	Effet d'un minimum local sur l'algorithme de Newton-Raphson .....	46
Figure 3-2	Schéma de refroidissement géométrique pour différentes valeurs de $\psi$ .....	52
Figure 3-3	Schéma de refroidissement logarithmique .....	52
Figure 4-1	Modèle de ligne de transmission en quadripôles .....	60

Figure 4-2	Évolution du temps de calcul pour le modèle en quadripôles suivant le nombre d'éléments non linéaires inclus (de 2 à 20) .....62
Figure 4-3	Courbe de la complexité en temps moyen et valeurs moyennes réelles ....63
Figure 4-4	Circuit en quadripôles simulé avec ATP-EMTP .....64
Figure 4-5	Courants à travers les parafoudres - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP .....66
Figure 4-6	Tensions aux bornes des parafoudres - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP.....67
Figure 4-7	Courants à travers les parafoudres - circuit purement résistif - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP .....68
Figure 4-8	Tensions aux bornes des parafoudres - circuit purement résistif - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP .....68
Figure 4-9	Tranche de 7 pylônes modélisée Tiré de Fortin et al. (2002) .....70
Figure 4-10	Temps de calcul en fonction du coefficient de non-linéarité - Modèle HIFREQ .....71
Figure 4-11	À gauche, résultat de (Fortin et al, 2002); à droite, résultat obtenu par Recuit Simulé ( $\alpha = 2$ ).....72
Figure 4-12	Évolution de l'erreur - $k = 10^{-2}$ ( $\alpha = 25$ ).....74
Figure 4-13	Évolution de l'erreur - $k = 10^{-3}$ ( $\alpha = 25$ ).....75
Figure 4-14	Évolution de l'erreur - $k = 10^{-5}$ ( $\alpha = 25$ ).....75
Figure 4-15	Évolution de l'erreur - $k = 10^{-5}$ ( $\alpha = 25$ ).....77
Figure 4-16	Évolution de l'erreur pour les 2000 premières itérations - $k = 10^{-5}$ ( $\alpha = 25$ ) .....78
Figure 5-1	Tranche de 7 pylônes modélisée avec ATP-EMTP .....81
Figure 5-2	Courants à travers les parafoudres - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation - HIFREQ et ATP-EMTP ( $\alpha = 25$ ).....82
Figure 5-3	Phénomène de réflexion apparent sur les résultats des modèles temporels et fréquentiels (parafoudre 4, $\alpha = 25$ ) .....83

Figure 5-4	Spectre des amplitudes des courants à travers les parafoudres (Modèle HIFREQ – $\alpha = 25$ ) .....84
Figure 5-5	Impédance du pylône : résistance (à gauche) et réactance (à droite) en fonction de la fréquence, calculées avec HIFREQ .....85
Figure 5-6	Mise en évidence de la non-convexité de l'espace de recherche pour une onde de choc en double-exponentielle.....87

Rapport-Gratuit.com





## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

ATP-EMTP	Alternative Transient Program – ElectroMagnetic Transient Program
GMRES	Generalized Minimum RESidual
MBH	Méthode de Balance des Harmoniques
MFC	Méthode Fréquentielle de Compensation
MFC-RS	Méthode Fréquentielle de Compensation résolue par Recuit Simulé
MNM	Méthode Nodale Modifiée
MTC	Méthode Temporelle de Compensation
RS	Recuit Simulé
$N$	Nombre d'échantillons de paramétrisation
$M$	Nombre d'éléments (ou branches) non linéaires
$t$	Paramètre de temps
$\omega$	Paramètre de fréquence
$F(\cdot)$	Système d'équations à $M \times N$ variables
$f_i(\cdot)$	$i^{\text{ème}}$ équation à $N$ variables du système $F$
$\mathbf{v}$	Matrice des tensions dans le domaine du temps, de taille $M \times N$
$\mathbf{i}$	Matrice des courants dans le domaine du temps, de taille $M \times N$
$\mathbf{V}$	Matrice des tensions dans le domaine fréquentiel, de taille $M \times N$
$\mathbf{I}$	Matrice des courants dans le domaine fréquentiel, de taille $M \times N$
$\mathbf{v}^{(0)}$	Estimé initiale de la solution en tension
$\mathbf{i}^{(0)}$	Estimé initiale de la solution en courant
$n$	Variable d'itération de l'algorithme RS
$S$	Espace de recherche

$S^*$	Ensemble des solutions, $S^* \subset S$
$C(\cdot)$	Fonction objectif
$\tau(\cdot)$	Schéma de refroidissement de l'algorithme RS
$G(\cdot)$	Fonction génératrice de l'algorithme RS
$A(\cdot)$	Fonction probabiliste d'acceptation de solution de l'algorithme RS
$\lambda_V$	Facteur d'ajustement probabiliste de la fonction génératrice, pour les tensions
$\lambda_I$	Facteur d'ajustement probabiliste de la fonction génératrice, pour les courants
$k$	Facteur d'ajustement de l'écart-type variable de $\lambda_V$ et $\lambda_I$
$\tau_0$	Température initiale de l'algorithme RS

## LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

kV	kilovolt
V	volt
kA	kiloampère
A	ampère
$\mu$ s	microseconde
H	henry
mH	millihenry
F	farad
mF	millifarad
$\mu$ F	microfarad
$\Omega$	ohm



## INTRODUCTION

Selon la définition du *Larousse*, la foudre est (une) «*décharge électrique aérienne, accompagnée d'une vive lumière et d'une violente détonation, se produisant entre deux nuages ou entre un nuage et le sol.* ». La différence de potentiel électrique entre les deux points est de l'ordre de la dizaine de millions de volts. La foudre est un phénomène universel et permanent (figure 0-1); on recense en effet de 200 à 5000 orages en permanence à travers le monde. D'après les statistiques d'Environnement Canada, le nombre moyen d'éclairs nuage-sol détecté par année au Canada, d'après des données recueillies entre 1998 et 2013, est estimé à 2.263.800 (Environnement et Changement climatique Canada, 2014) (le réchauffement climatique mondial pourrait influencer ces chiffres à la hausse, les modèles climatiques suggérant une corrélation positive entre l'occurrence des impacts d'éclairs et les températures globales (Price, 2009)).

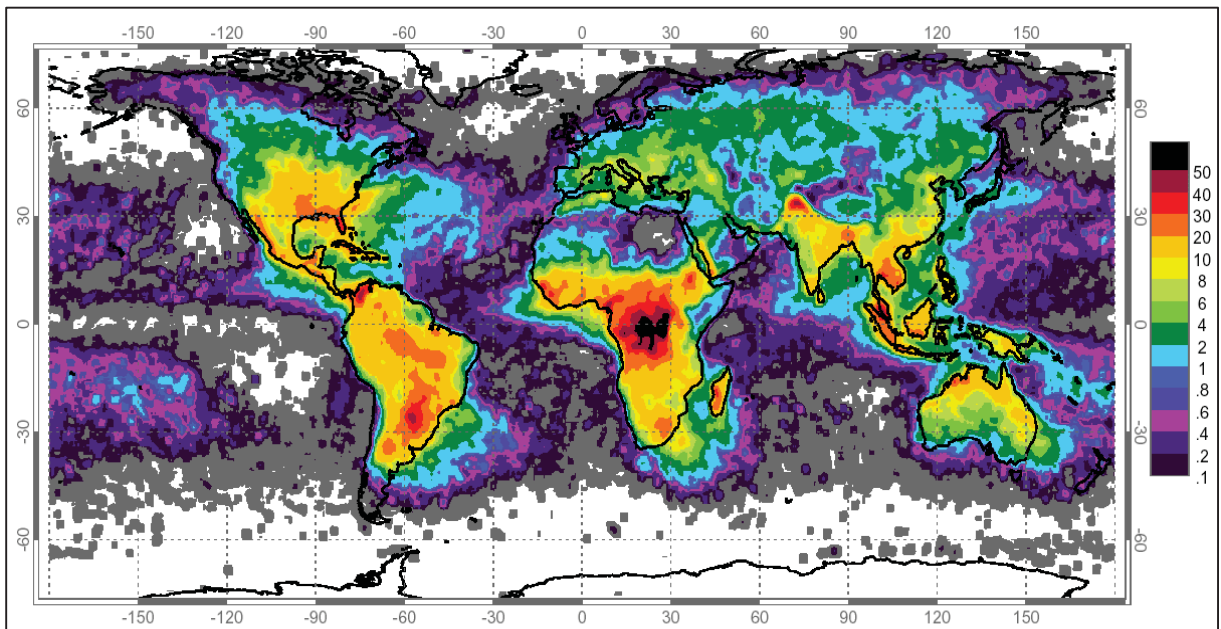


Figure 0-1 Occurrences des impacts d'éclairs en flash/km<sup>2</sup>/année d'après des données recueillies entre 1995 et 2002

Tirée de NASA - NSSTC Lightning Team

Les dangers liés à la foudre sont multiples : électrocution, déclenchement d'incendie, bris de matériel électrique, perturbations électromagnétiques. Ces dangers sont le résultat d'effets directs, les *effets thermoélectriques*, d'effets indirects, les *effets électromagnétiques*, et du phénomène de *conduction* (dissipation des charges électriques dans le sol, variable suivant la résistivité de celui-ci).

Les surtensions impliquées par les effets directs et indirects de la foudre sont une des principales causes d'interruption ou de perturbation sur les lignes de transmission et de distribution d'électricité (Koval, 1994). La foudre est à l'origine de pannes de courant très importantes, tel le célèbre « blackout » de la ville de New York en 1977. Plus communément, la foudre est une fréquente source d'interruptions ou de perturbations localisées. L'impact économique de ces pannes est loin d'être négligeable : ainsi, aux États-Unis, les coûts directs pour les installations électriques liés aux dégâts engendrés par la foudre sont de l'ordre du milliard de dollars annuel (Electric Power Research Institute, 2006). Toutes causes confondues, les interruptions d'alimentation électrique coûtent à l'économie américaine entre 15 et 24 milliards de dollars par année; il est estimé que les 2/3 de ces coûts sont dus à des interruptions brèves (moins de 5 minutes), généralement attribuables à la foudre. Toutes proportions gardées, on peut présumer que l'économie canadienne est similairement touchée (Mills et al., 2009).

Les coups de foudre sur les lignes de transmission sont de deux types : les *coups de foudre directs*, sur conducteurs de phase, et les *coups de foudre indirects*, sur conducteurs de garde ou pylônes, où le danger survient pour les câbles de phase lorsque le potentiel atteint dépasse la limite d'amorçage à l'onde de choc de la chaîne d'isolateurs; on parle alors de phénomène d'amorçage en retour, ou « back flashover » (figure 0-2).

Un objectif typique lors de la conception d'une ligne de transmission est d'atteindre une moyenne de moins de 0.5 interruption due à la foudre par année par 161 km de ligne (Glover et Sarma, 2001). Pour une ligne aérienne donnée, les facteurs suivants affectent cet objectif :

- Hauteur de tour
- Nombre et emplacement des câbles de garde
- Nombre de disques isolants par câble de phase
- Impédance de tour et impédance tour-sol



Figure 0-2 Amorçages en retour par un éclair d'hiver sur une tour de transmission à double circuit de 500 kV  
Tirée de Hokuriku Electric Power Co. (1995)

L'installation de câbles de garde est un des moyens privilégiés mis en œuvre pour protéger une ligne de transmission. Les études démontrent que les chances d'occurrence d'un coup de foudre direct sur un conducteur de phase situé à l'intérieur d'un arc de  $\pm 30^\circ$  sous les câbles de garde est réduite par un facteur 1000 (Glover et Sarma, 2001). Il est donc attendu que la foudre frappe les câbles de garde. Quand cela arrive, l'onde de choc tension/courant se propage dans

les deux directions le long du câble. Le câble de garde étant électriquement connecté aux tours, les ondes de choc sont guidées sur celles-ci puis dissipées dans le sol. Toutefois, si l'impédance de la tour ou l'impédance tour-sol sont trop élevées, menant à un potentiel excédant la limite d'amorçage, un phénomène d'amorçage en retour pourra se produire (figure 0-2). Les câbles de garde ne sont donc pas suffisants pour garantir la protection des installations de distribution face à la foudre; des équipements de protection additionnels doivent être ajoutés.

Selon (Glover et Sarma, 2001), ces équipements de protection, pour être effectifs, doivent satisfaire aux quatre exigences suivantes :

- Avoir une impédance très élevée sous tension nominale d'opération (idéalement l'équivalent d'un circuit ouvert).
- Avoir une impédance très faible pendant le passage d'une onde de choc, pour limiter la tension.
- Dissiper l'énergie du choc sans dommage.
- Retourner à la condition de circuit ouvert après le passage d'une onde de choc.

Dans les réseaux électriques, les parafoudres répondent à ces critères et sont utilisés pour protéger les installations électriques contre des surtensions d'origines variées, notamment atmosphérique, sur les conducteurs actifs des liaisons électriques. L'objectif des parafoudres est de dévier vers la terre des courants transitoires potentiellement dommageables, les impulsions parasites cheminant sur les liaisons électriques étant court-circuitées en dérivant la majeure partie de l'impulsion directement vers la terre. L'impédance d'un parafoudre doit être extrêmement élevée en régime permanent, et relativement faible lors d'une surtension transitoire; en d'autres termes, la caractéristique tension-courant du parafoudre (c.-à-d., sa caractéristique V-I) doit être non linéaire. Les types de parafoudres correspondant le mieux aux quatre critères énoncés ci-dessus sont composés de varistances à l'oxyde de zinc. Les varistances composant ces parafoudres, les plus communément utilisés aujourd'hui, possèdent ainsi une caractéristique V-I extrêmement non linéaire (figure 0-3).



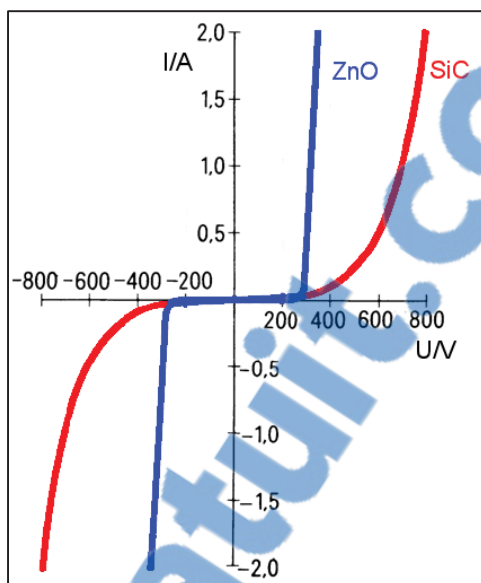


Figure 0-3 Caractéristiques V-I de varistances à l'oxyde de zinc (bleu) et au carbure de silicium (rouge)  
Tirée de Wikipédia

### Problématique

L'emplacement des parafoudres le long des lignes de transmission ou à proximité des installations de distribution électrique sensibles doit être judicieusement choisi pour garantir la fiabilité et la sécurité des installations. Des études de conception de la protection contre la foudre sont exécutées, afin notamment d'optimiser l'emplacement des parafoudres pour une protection maximale, en prenant en compte d'autres considérations, tels la qualité de la mise à la terre, mais aussi les coûts engendrés par l'installation et la maintenance des équipements de protection. De nos jours, ces études sont réalisées en utilisant des logiciels de simulation et de modélisation dédiés, qui doivent donc avoir la capacité de modéliser des circuits électriques contenant des dizaines de parafoudres, mais aussi d'autres éléments non linéaires tels que disjoncteurs, diodes ou encore thyristors. Prendre en compte ces non-linéarités dans les calculs est désormais une fonctionnalité incontournable pour tout logiciel de simulation, ces éléments jouant notamment un rôle clé dans la propagation des surtensions transitoires.

Modéliser puis résoudre des circuits contenant des éléments non linéaires, en régime transitoire ou permanent, est un problème complexe de mathématiques appliquées. Le modèle courant-tension d'un dipôle non linéaire est donné par une fonction non linéaire (figure 0-3); par conséquent, le circuit complet est lui-même modélisé par un système d'équations non linéaires.

Les systèmes d'équations non linéaires apparaissent fréquemment dans la modélisation mathématique de problèmes d'ingénierie. L'existence et l'unicité des solutions de tels systèmes ne sont pas garanties; ils peuvent en effet admettre un nombre fini, mais inconnu de solutions, ou encore une infinité, mais également, aucune. La résolution en forme close (c.-à-d., à l'aide d'une formule utilisant un nombre fini d'opérations pour arriver à une solution) de ces systèmes est dans la plupart des cas impossible. Par conséquent des méthodes de résolution numériques doivent être utilisées (Higham et Dennis, 2015); c'est notamment le cas pour la méthode de modélisation fréquentielle mise au point par (Fortin et al., 2002) : ces auteurs posent un système d'équations non linéaires comportant plusieurs milliers de variables, que nous nous proposons de résoudre dans le présent mémoire.

## **Contribution**

En prenant pour point de départ le modèle fréquentiel de compensation (MFC) proposé par (Fortin et al., 2002), les travaux présentés dans ce mémoire portent sur une alternative à l'algorithme de résolution numérique du système d'équations non linéaires formulé par les auteurs. L'objectif est de résoudre le MFC quels que soient les paramètres de simulation, permettant ainsi d'explorer des situations critiques d'intérêt. Ainsi, des solutions seront obtenues notamment en utilisant des paramètres de simulation réalistes, pour lesquels *aucune solution n'avait pu être trouvée précédemment*.

Le problème initial de résolution est transformé en un problème d'optimisation globale, grâce à la formulation d'une fonction objectif dont les minimums globaux représentent chacun une solution possible du système initial. L'algorithme choisi pour identifier l'un de ces minimums,

et donc résoudre le MFC, est une métaheuristique stochastique d'optimisation globale connue sous le nom de Recuit Simulé (Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi, 1983), (Cerny, 1985).

Ces travaux ouvrent la voie à l'implémentation dans les logiciels de la compagnie SES Technologies d'une nouvelle fonctionnalité essentielle. Celle-ci permettra l'inclusion d'éléments non linéaires dans l'analyse électromagnétique transitoire, dans le domaine fréquentiel, des circuits de transmission et de distribution. Ces travaux ont fait l'objet de présentations orales, à l'occasion des éditions américaines et chinoises de la conférence des utilisateurs des logiciels de SES Technologies, en 2015 et en 2016 :

1. Franiatte, S., Fortin, S., Lina, J-M., Joyal, M-A., April, A. et Dawalibi, F.P. 2015. « Treatment of Nonlinear Devices in the Frequency Domain ». In *Proceedings of the Annual SES Users Group Conference – North America*. (San Diego, Californie, États-Unis, 8 au 11 juin 2015).
2. Franiatte, S., Fortin, S., Lina, J-M., Joyal, M-A., April, A. et Dawalibi, F.P. 2015. « Treatment of Nonlinear Devices in the Frequency Domain ». In *Proceedings of the Annual SES Users Group Conference – China*. (Shenzhen, Guangzhou, Chine, 19 au 21 octobre 2015).
3. Franiatte, S., Fortin, S., Lina, J-M., Joyal, M-A., Ramos, O., April, A. et Dawalibi, F.P. 2016. « Advancements in the Treatment of Nonlinear Devices in the Frequency Domain ». In *Proceedings of the Annual SES Users Group Conference – North America*. (Boulder, Colorado, États-Unis, 21 au 24 juin 2016).
4. Franiatte, S., Fortin, S., Lina, J-M., Joyal, M-A., Ramos, O., April, A. et Dawalibi, F.P. 2016. « Advancements in the Treatment of Nonlinear Devices in the Frequency Domain ». In *Proceedings of the Annual SES Users Group Conference – China*. (Xi'an, Shaanxi, Chine, 24 au 26 octobre 2016).



Supercellule orageuse en fin de vie. Leoti, Kansas, 21 mai 2016.  
Crédit photo: Max Conrad Photography

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LITTÉRATURE

Il existe plusieurs méthodes numériques d'analyse de circuits électriques contenant des éléments non linéaires, que ce soit en régime transitoire ou permanent. Ces méthodes sont généralement classées selon deux groupes: il existe des méthodes d'analyse dans le domaine temporel et des méthodes dites hybrides ayant recours à la fois aux domaines temporel et fréquentiel. Chacune de ces méthodes a ses propres avantages et inconvénients, qui seront détaillés dans ce chapitre. Notons qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de méthodes purement fréquentielles applicables à l'analyse de phénomènes transitoires de circuits comportant des non-linéarités (la difficulté de modélisation d'éléments non linéaires directement dans le domaine fréquentiel en est une des raisons; les couplages entre fréquences requérant le calcul d'une solution simultanée pour toutes les fréquences en sont une autre).

#### 1.1 Analyse des circuits non linéaires : méthodes temporelles

##### 1.1.1 Méthode nodale modifiée

Les éléments dépendants en courant ne peuvent être modélisés par la méthode des nœuds où les inconnues sont les tensions et les courants des paramètres. La méthode nodale modifiée (MNM; en Anglais : *Modified Nodal Analysis*, MNA), également basée sur les lois de Kirchhoff (Chung-Wen, Ruehli et Brennan, 1975), permet de contourner cette limitation et se trouve ainsi souvent utilisé à titre de modèle de circuit le plus général, notamment dans les publications traitant de la simulation de circuits non linéaires : la résolution du système d'équations non linéaires posé par la MNM y constitue alors le problème à résoudre.

Le système d'équations formé par la MNM est un système d'équations différentielles algébriques non linéaires dont la solution vérifie la condition initiale  $\mathbf{x}_0$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{q}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{w}(t) = 0, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \mathbf{x}(t), \mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^N \quad (1.1)$$

Il s'agit d'un système de  $N$  équations, où  $\mathbf{f}(\cdot)$  et  $\mathbf{q}(\cdot)$  sont, en général, des fonctions non linéaires représentant respectivement la contribution des éléments non réactifs et réactifs du circuit,  $\mathbf{w}(t)$  est un vecteur contenant les sources indépendantes, et où  $N \in \mathbb{N}^*$  est le nombre de variables du circuit, somme du nombre de nœuds  $n - 1$  (on soustrait 1 pour prendre en compte le nœud de référence) et du nombre de branches  $m$  contenant des sources de tension indépendantes.

Le vecteur des inconnues  $\mathbf{x}(t)$ , de valeur initiale  $\mathbf{x}_0$ , contient le vecteur  $\mathbf{v}_{n-1}$  des tensions aux nœuds et les courants de branches  $\mathbf{i}_m$  ne pouvant être exprimés en termes de tensions nodales (soit les éléments incompatibles avec la méthode des nœuds) :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-1}(t) \\ \mathbf{i}_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

### Méthode nodale modifiée : exemple linéaire simple

Afin d'illustrer brièvement le fonctionnement de la MNM, considérons l'exemple suivant, issu de (Schulz, 2003). Soit un circuit (figure 1-1) composé d'une source de tension  $u_v = v(t)$ , d'une résistance de conductance  $G$ , et d'un condensateur de capacité électrique  $C$ . La topologie du circuit peut être décrite par la matrice :

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

où les colonnes correspondent respectivement aux branches tension, résistance et condensateur. Les rangées de  $A_a$  représentent les nœuds du circuit, les valeurs -1 et 1 indiquant quant à elles les nœuds connectés par les branches et leur polarité.

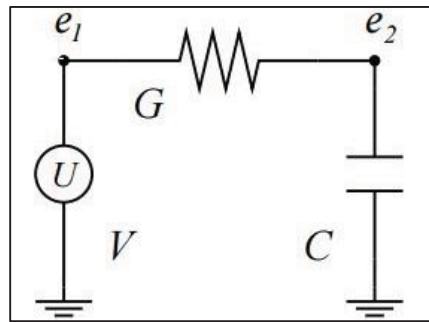


Figure 1-1 Circuit simple pour illustration de la MNM  
Tirée de Schulz (2003)

Les rangées de  $A_a$  sont linéairement dépendantes. Toutefois, après suppression de la rangée correspondant à la branche de masse électrique, les rangées restantes décrivent un ensemble d'équations linéairement indépendantes. La matrice  $A$  obtenue est appelée *matrice des incidences* :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Posons  $\mathbf{i}$  le vecteur des courants dans les branches,  $\mathbf{v}$  le vecteur des tensions et  $\mathbf{e}$  le vecteur des potentiels aux nœuds; on peut maintenant formuler les lois de Kirchhoff selon les termes de la topologie définie par  $A$  :

- Première loi de Kirchhoff (loi des nœuds) :  $A\mathbf{i} = 0$ , soit, pour le circuit 1-1 :

$$-i_V + i_G = 0, -i_G + i_C = 0 \quad (1.3)$$

- Deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles) :  $\mathbf{v} = A^T \mathbf{e}$ , soit, pour le circuit 1-1 :

$$v_V = -e_1, v_G = e_1 - e_2, v_C = e_2 \quad (1.4)$$

En présumant que la résistance et le condensateur sont tous deux des éléments linéaires idéaux, on les modélise respectivement par les équations suivantes :

$$i_G = G v_G, i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (1.5)$$

En exprimant les tensions en termes de potentiels aux nœuds, via (1.4), et les courants par les équations modèles des éléments du circuit (1.5), on obtient :

$$\begin{cases} -i_V + G(e_1 - e_2) = 0 \\ -G(e_1 - e_2) + C \frac{de_2}{dt} = 0 \\ -e_1 = v \end{cases} \quad (1.6)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ i_V \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} G & -G & -1 \\ -G & G & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ i_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) est l'équivalent de (1.1), pour un cas linéaire purement résistif, à coefficients constants, avec  $\mathbf{x}(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ i_V(t)]^T$ . Ces équations, dotées de conditions initiales, sont résolues numériquement par les méthodes d'Euler ou de Runge-Kutta-implicite.



### 1.1.2 Méthode de compensation

Selon le théorème de compensation, *toute impédance dans une branche d'un réseau électrique peut être remplacée par une source de courant dont la valeur à tout instant est égale au courant traversant l'impédance remplacée.* (Tinney, 1972) applique ce théorème en conjonction avec une factorisation par décomposition  $LU$  de la matrice des admittances nodales, afin de simuler les effets des variations dans les éléments passifs d'un réseau, sans avoir à recalculer la factorisation.

D'après la méthode des nœuds, on obtient le modèle de réseau suivant :

$$Y\mathbf{v} = \mathbf{i} \quad (1.8)$$

où  $Y$  est la matrice des admittances, de taille  $n \times n$  avec  $n$  le nombre de nœuds du réseau,  $\mathbf{v}$  est le vecteur des tensions instantanées aux nœuds et  $\mathbf{i}$  le vecteur des courants instantanés, tous deux de taille  $n$ . Par la suite, on calculera la variable  $\mathbf{v}$  en factorisant  $Y$  dans (1.8) par décomposition  $LU$  :

$$LU\mathbf{v} = \mathbf{i} \quad (1.9)$$

Soit une branche connectée entre les nœuds  $k$  et  $m$  du réseau, dont on désire simuler la variation des paramètres. On pose  $\mathbf{v}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  le vecteur des tensions aux nœuds lorsque la branche n'est pas connectée, que l'on calcule en résolvant (1.9). La tension à vide entre les nœuds  $k$  et  $m$  est trouvée :

$$v_{km}^{(0)} = v_k^{(0)} - v_m^{(0)} \quad (1.10)$$

où  $v_k^{(0)}$  et  $v_m^{(0)}$  sont des éléments de  $\mathbf{v}^{(0)}$ . On calcule ensuite  $z_T$  l'impédance de Thévenin du réseau observée entre les nœuds  $k$  et  $m$  : toujours à partir de l'équation (1.9), on calculera cette fois le vecteur  $\mathbf{v}^{(km)} \in \mathbb{R}^n$  constituant la réponse du réseau à un courant unitaire appliqué au

nœud  $k$ ; en d'autres termes,  $\mathbf{v}^{(km)}$  est calculé suivant la résolution de (1.9) pour un vecteur  $\mathbf{i}^{(km)}$  contenant 1 pour l'élément  $k$  et 0 pour tous les autres éléments. On a alors :

$$z_T = v_k^{(km)} - v_m^{(km)} \quad (1.11)$$

où  $v_k^{(km)}$  et  $v_m^{(km)}$  sont des éléments de  $\mathbf{v}^{(km)}$ .

Dans un effort pour réduire le nombre de calculs supplémentaires impliqués par la présence d'éléments non linéaires dans un circuit, (Dommel, 1971) utilise le théorème de compensation pour séparer la partie non linéaire de la partie linéaire du réseau considéré (figure 1-2), dans une méthode que nous nommerons dans ce mémoire *Méthode Temporelle de Compensation* (MTC). La contribution de l'élément non linéaire est calculée en résolvant le système formé par l'équation (1.12), équation du système linéaire obtenue à partir du modèle de Thévenin du réseau, et l'équation différentielle de premier ordre (1.13), relation décrivant la branche non linéaire:

$$v_{km} = v_{km}^{(0)} + z_T i_{km} \quad (1.12)$$

$$v_{km} = \gamma(i_{km}, \frac{di_{km}}{dt}, t) \quad (1.13)$$

où  $\gamma(\cdot)$  est la relation non linéaire de la branche considérée. Une méthode de résolution itérative, telle que la méthode Newton-Raphson, est utilisée afin de solutionner le système d'équations (1.12) et (1.13), qu'on résout pour  $i_{km}$ , à chaque échantillon de temps  $t$ . La contribution de la branche non linéaire est ajoutée en superposant sa réponse à la solution de la partie linéaire du réseau,  $\mathbf{v}^{(0)}$ ; on trouve ainsi la solution du système complet :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{i}_{km} \quad (1.14)$$

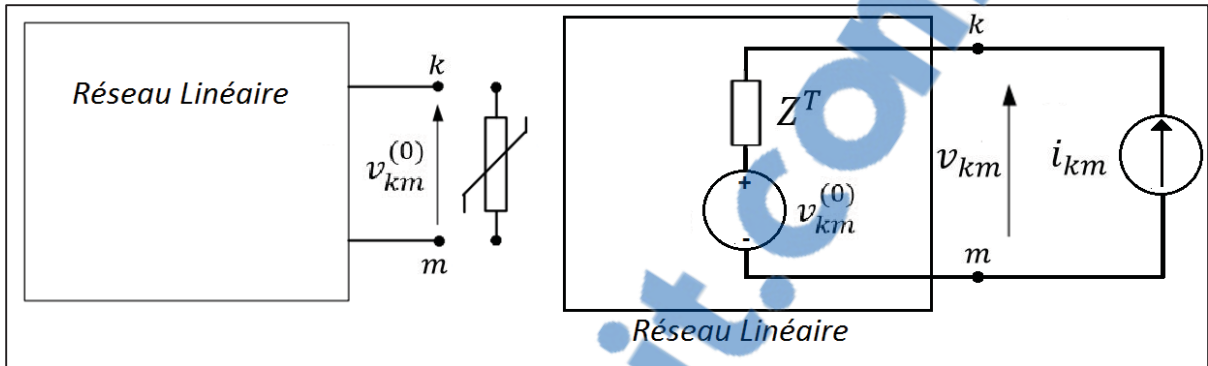


Figure 1-2 Méthode de compensation – simulation d'une branche contenant un élément non linéaire

La méthode de compensation est généralisable à des circuits contenant  $M$  branches non linéaires; selon le principe de superposition, on obtient :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \sum_{j=1}^M \mathbf{z}^{(j)} \cdot i^{(j)} \quad (1.15)$$

Le système contient dès lors  $M$  équations non linéaires devant être résolues simultanément; l'algorithme de Newton-Raphson est le procédé itératif de résolution suggéré par l'auteur pour parvenir à sa solution (Dommel, 1971).

## 1.2 Analyse des circuits non linéaires : méthodes hybrides temporelles-fréquentielles

### 1.2.1 Séries de Volterra et méthode multilinéaire de Schetzen

Les séries de Volterra, que nous devons au mathématicien italien Vito Volterra, ont été introduites pour la première fois en 1887 dans le cadre d'un effort pour une analyse systématique des systèmes non linéaires. Ce n'est toutefois que dans les années 1950, grâce au mathématicien américain Norbert Wiener (Wiener, 1958), ainsi qu'à la traduction anglaise des travaux de Volterra (Volterra, 1959), que les séries de Volterra seront appliquées à des problèmes pratiques, dont l'analyse des circuits non linéaires.

Wiener utilisa pour la première fois les séries de Volterra afin d'analyser la réponse d'un circuit R-L-C dans lequel la résistance était non linéaire. La tension aux bornes de la résistance était alors représentée par Wiener comme une série de puissance du courant à travers l'élément. Le succès de cette approche amena Wiener à considérer l'analyse en séries de Volterra comme une composante essentielle de la théorie des systèmes non linéaires (Schetzen, 2000).

La relation entrée/sortie d'un système non linéaire peut être approchée par une série de Volterra d'ordre  $N$ , avec  $N \in \mathbb{N}^*$  suffisamment grand:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) \quad (1.16)$$

avec:

$$x_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_k) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k \quad (1.17)$$

où  $x(\cdot)$  et  $u(\cdot)$  sont respectivement la sortie et l'entrée du système (figure 1-3). La fonction multidimensionnelle  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_k)$  est le noyau de Volterra d'ordre  $k$  et représente la réponse impulsionnelle d'un système d'ordre  $k$ .

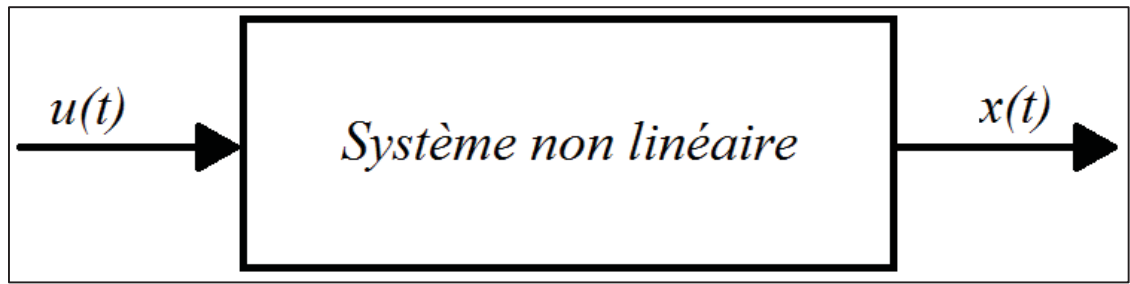


Figure 1-3 Représentation d'un système non linéaire pour une série de Volterra convergente


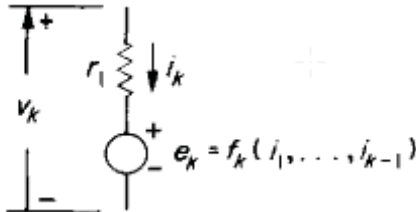
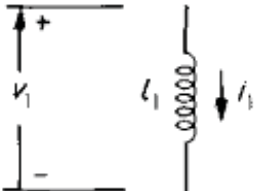
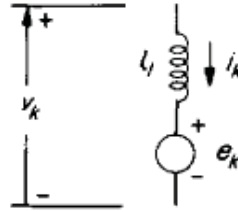
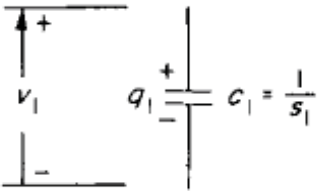
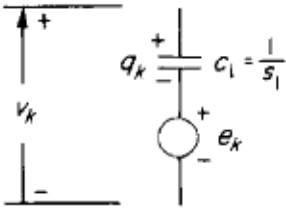
Dans le cas de l'analyse d'un circuit contenant des éléments non linéaires, on substitue tensions et courants par leurs expansions en séries de Volterra dans l'équation différentielle non linéaire originale du circuit. On obtient ainsi un ensemble de  $N$  équations différentielles linéaires, représentant chacune un circuit de Volterra d'ordre  $k$ ; *l'analyse complète du circuit non linéaire est alors réduite à l'analyse séquentielle de circuits linéaires*. La réponse du circuit original est constituée par la somme des réponses des circuits de Volterra.

Il a été démontré que  $N$  est fini pour la plupart des systèmes non linéaires (Boyd et Chua, 1985). L'estimation des noyaux  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_k)$  des séries de Volterra est cependant un problème complexe, requérant l'usage d'outils mathématiques sophistiqués (Diaz et Desrochers, 1988), (Schetzen, 1980).

La méthode multilinéaire proposée par Schetzen (Schetzen, 1985) est une simplification de l'analyse des réseaux faiblement non linéaires par les développements en séries de Volterra. Elle évite les multiples intégrales et noyaux de l'analyse de Volterra, qui ne sont plus explicitement déterminés.

Dans cette méthode, l'auteur détermine les circuits de Volterra à partir de modèles équivalents pouvant se décomposer en une série de puissances, pour chaque type de composants communément rencontrés dans un circuit électrique (voir tableau 1.1). Le circuit équivalent d'ordre  $k$  d'un circuit non linéaire donné est ensuite obtenu en remplaçant chaque élément par son modèle (Schetzen, 1985), la réponse du circuit original étant toujours calculée en faisant la somme des réponses des circuits de Volterra.

Tableau 1.1 Modèles multilinéaires d'ordre 1 et  $k$  pour les composants R, L et C, dans le domaine de Laplace  
Tiré de Schetzen (1985)

Équivalent d'ordre 1	Équivalent d'ordre $k$
	
	
	

La limitation fondamentale de l'analyse en séries de Volterra, et donc de la méthode de Schetzen qui en découle, est que le taux de convergence des séries obtenues lors de l'analyse dépend du niveau de non-linéarité. Une convergence rapide ne peut être atteinte qu'avec un faible signal d'entrée et une faible non-linéarité; par conséquent ces méthodes sont seulement utiles pour l'analyse de circuits quasi linéaires pour lesquels les séries convergent rapidement (Schetzen, 1985). Utiliser plus de termes dans cette série résulte en une complexification exponentielle des calculs; par ailleurs, la série peut diverger pour des termes d'ordre élevé lorsque des fonctions avec des non-linéarités exponentielles sont développées. Dans ce cas, la série n'est plus une représentation adéquate de la relation entrée/sortie du système non linéaire considéré.

### 1.2.2 Méthode de balance des harmoniques

La Méthode de Balance des Harmoniques (MBH) est une méthode hybride temporelle fréquentielle capable de modéliser des circuits fortement non linéaires en régime périodique permanent. La méthode se base sur la MNM pour décrire un circuit par  $N$  équations différentielles non linéaires (Nastov, 1999):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q}(\mathbf{v}(t)) + \mathbf{i}(\mathbf{v}(t)) - \mathbf{w}(t) = 0 \quad (1.18)$$

où  $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur des tensions aux nœuds (aucune source de tension indépendante n'est présente, c.-à-d.  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(t)$ , voir section 1.1.1),  $\mathbf{q}(\mathbf{v}(t)) \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur des charges (ou flux) aux nœuds,  $\mathbf{i}(\mathbf{v}(t)) \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur des courants aux nœuds,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur des sources indépendantes et  $N = n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  étant le nombre de nœuds du circuit (on soustrait 1 pour prendre en compte le nœud de référence).  $\mathbf{q}(\cdot)$  et  $\mathbf{i}(\cdot)$  peuvent toutes deux être des fonctions non linéaires.

Le circuit est alimenté par un signal périodique de période  $T$ . Trouver la solution du circuit en régime permanent revient à calculer les  $N$  signaux  $\mathbf{v}(t)$  pour  $t \in [0; T]$ . La solution doit par ailleurs satisfaire la contrainte  $\mathbf{v}(T) = \mathbf{v}(0)$ .

La MBH fait l'hypothèse que la solution  $\mathbf{v}(t)$  est la somme des  $K$  premières harmoniques d'une série de Fourier tronquée :

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=-K}^K V_k e^{j2\pi k f t}, V_k \in \mathbb{C} \quad (1.19)$$

où  $K \in \mathbb{N}$  est le nombre d'harmoniques considérées. La MBH résout ensuite pour  $V_k$ , les coefficients de la série de Fourier; en combinant (1.18) et (1.19), on obtient :



$$f(V, t) = \sum_{k=-K}^K j2\pi k f Q_k e^{j2\pi k f t} + i \left( \sum_{k=-K}^K V_k e^{j2\pi k f t} \right) - w(t) \quad (1.20)$$

L'équation (1.20) doit être minimisée sur  $[0; T]$ . L'équation est alors réécrite dans le domaine fréquentiel :

$$F(\mathbf{V}) = \boldsymbol{\Omega} \Gamma q(\Gamma^{-1} \mathbf{V}) + \Gamma i(\Gamma^{-1} \mathbf{V}) - \Gamma \mathbf{w} = 0, F: \mathbb{R}^{MN} \rightarrow \mathbb{R}^{MN} \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{V}$  est le spectre des tensions aux nœuds :  $\mathbf{V} = [V_{-K,1}, \dots, V_{-K,N}, V_{-K+1,1}, \dots, \dots, V_{K,N}]^T$  de taille  $MN$  avec  $M = 2K + 1$ ,  $\Gamma$  est un opérateur linéaire de taille  $NM \times NM$  avec  $\Gamma^{-1}$  son inverse, et  $\boldsymbol{\Omega}$  est la matrice diagonale de différentiation, également de taille  $NM \times NM$ .

Le système d'équations non linéaires (1.21) est résolu pour  $\mathbf{V}$  en appliquant la méthode de Newton-Raphson. Tel que nous le verrons au chapitre suivant, il faut alors résoudre une succession de systèmes linéaires, jusqu'à convergence :

$$\mathbf{J}^{(l)}(\mathbf{V}^{(l+1)} - \mathbf{V}^{(l)}) = -F(\mathbf{V}^{(l)}) \quad (1.22)$$

où  $l$  est la variable d'itération de la méthode et  $\mathbf{J}$  la matrice Jacobienne, de taille  $NM \times NM$ . À partir de (1.21) on trouve l'expression de  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{J}^{(l)} = \boldsymbol{\Omega} \Gamma \mathbf{C}^{(l)} \Gamma^{-1} + \Gamma \mathbf{G}^{(l)} \Gamma^{-1} \quad (1.23)$$

avec  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{G}$ , de taille  $NM \times NM$ , les matrices des capacités différentielles et des conductances différentielles, respectivement :

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{C}_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{G}_M \end{bmatrix}$$

Les blocs  $\mathbf{C}_m$  et  $\mathbf{G}_m$ , de taille  $N \times N$ , représentent les matrices des capacitances et des conductances du circuit, évaluées aux points de temps discrets  $t_m \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\}$  et sont constitués des éléments suivants :

$$\mathbf{C}_m(r, s) = \frac{dq(v_r(t_m))}{dv_s} \qquad \mathbf{G}_m(r, s) = \frac{di(v_r(t_m))}{dv_s}$$

où  $r, s$  sont les indices des nœuds du circuit, avec  $r, s = 1, 2, \dots, N$ .

Pour arriver à une solution, la méthode de balance des harmoniques requiert le calcul de transformées de Fourier directes et inverses de façon répétée, les réponses des éléments non linéaires étant évaluées dans le domaine du temps. Par ailleurs un grand nombre de coefficients harmoniques peuvent être requis par la méthode (suivant le nombre de nœuds dans le circuit et la précision de simulation désirée), ce qui se traduit en une augmentation substantielle de la taille du Jacobien  $\mathbf{J}$ , et par conséquent par une augmentation significative du temps de calcul (voir chapitre 2, section 2.3), l'inversion du Jacobien ayant une complexité de  $O(n^3)$ .

Certaines variantes de la MBH séparent explicitement les sous-circuits linéaires et non linéaires. Ainsi Ramirez (Ramirez, 2009), qui présente une méthodologie dont la résolution numérique est également basée sur l'algorithme de Newton-Raphson. Une approche similaire était déjà présentée par Ushida (Ushida et Chua, 1993), dans le cadre de l'analyse transitoire de lignes de transmissions terminées par des sous-réseaux non linéaires.

### 1.2.3 Méthode fréquentielle de compensation

Afin de prendre en compte les dépendances en fréquence des conducteurs du circuit (Fortin et al., 2002) proposent une variante de la méthode de (Dommel, 1971), que nous nommerons *modèle fréquentiel de compensation* (MFC), où le modèle mathématique du réseau est cette fois directement posé dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{V}_i(\omega) = \mathbf{V}_i^{(0)}(\omega) + \sum_{j=1}^M \mathbf{Z}^{(i,j)}(\omega) \cdot \mathbf{I}^{(j)}(\omega) \quad (1.24)$$

avec  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_i^{(0)} \in \mathbb{R}^N, M \in \mathbb{N}^*, i \in \{0, 1, \dots, M\}, N \in \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ , respectivement la solution du système à la  $i$ -ème branche non linéaire et la tension à vide associée (c.-à-d., lorsque l'élément non linéaire  $i$  n'est pas connecté), où  $M$  est le nombre de branches contenant un élément non linéaire et  $N$  est le nombre d'échantillons considérés pour la transformée de Fourier rapide.  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{V}_i^{(0)}$  sont des constantes, obtenues suivants des méthodes similaires à l'approche temporelle. Les auteurs définissent ensuite  $\gamma$ , équivalent à  $\gamma(\cdot)$  dans (1.13), comme modèle de l'élément non linéaire :

$$\mathbf{i}(t) = \gamma(\mathbf{v}(t), t) \leftrightarrow \mathbf{v}(t) = \gamma^{-1}(\mathbf{i}(t), t), \mathbf{i}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \quad (1.25)$$

Les auteurs utilisent le modèle non linéaire suivant pour la fonction  $\gamma(\cdot)$  :

$$\mathbf{i}(t) = \gamma(\mathbf{v}(t), t) = i_s \left( \frac{\mathbf{v}(t)}{v_s} \right)^\alpha, \mathbf{i}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \quad (1.26)$$

où le courant seuil  $i_s$  est le courant traversant l'élément non linéaire lorsque celui-ci est soumis à un potentiel égal à la tension seuil  $v_s$ ;  $i_s$  et  $v_s$  sont tous deux constants et déterminés par les caractéristiques physiques de l'élément non linéaire considéré. Le coefficient de non-linéarité

$\alpha$  détermine le taux de variation de  $\gamma$ ; plus celui-ci sera élevé, plus la transition sera rapide pour de faibles variations de  $v(t)$  à l'approche de la tension seuil  $v_s$  (figure 1-4).

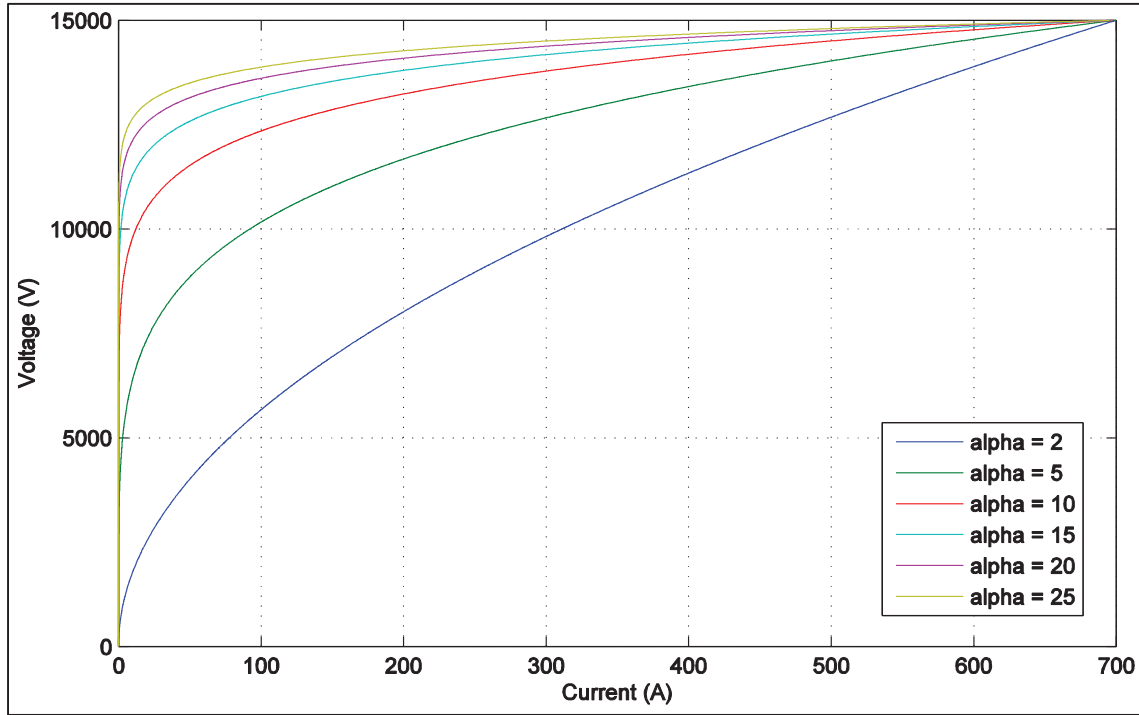


Figure 1-4 Caractéristiques I-V pour différentes valeurs de  $\alpha$ , avec  $i_s = 700 \text{ A}$  et  $v_s = 15.000 \text{ V}$

Une équation non linéaire autocohérente est formulée pour chaque élément non linéaire  $i \in [1, N]$  en combinant (1.25) et (1.26) :

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathbf{v}_i^{(0)}(\omega) + \sum_{j=1}^M \mathbf{z}^{(i,j)}(\omega) \cdot \mathcal{F}[\gamma^{(j)}(\mathbf{v}_j(t), t)] \right] \quad (1.27)$$

où  $\mathcal{F}$  représente la transformée de Fourier et  $\mathcal{F}^{-1}$  la transformée de Fourier inverse.

L'équivalent de (1.27) pour les courants s'écrit :

$$\mathbf{i}_i(t) = \gamma^{(i)} \left( \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathbf{v}_i^{(0)}(\omega) + \sum_{j=1}^M \mathbf{z}^{(i,j)}(\omega) \cdot \mathcal{F}[\mathbf{i}_j(t)] \right], t \right) \quad (1.28)$$

Ces combinaisons sont nommées par les auteurs *équations autocohérentes*. Elles établissent la relation pour le courant (1.27) ou la tension (1.28) auquel est soumis l'élément non linéaire  $i$  à l'instant  $t$  comme une fonction du courant (de la tension, respectivement) à travers l'ensemble des éléments non linéaires du circuit considérés sur la totalité de la fenêtre de temps, permettant ainsi la prise en compte des dépendances en fréquence des conducteurs du circuit.

Dans le cas où  $\gamma$  est inversible, c.-à-d., si  $\gamma^{-1}(\mathbf{i}(t), t)$  est définie sur  $\mathbb{R}^N$ , les auteurs proposent deux équations autocohérentes additionnelles, venant respectivement directement de (1.27) et (1.28), faisant usage de l'admittance  $\mathbf{Y}$  plutôt que de l'impédance  $\mathbf{Z}$  :

$$\mathbf{v}_i(t) = \gamma^{-1} \left( \mathcal{F}^{-1} \left[ \sum_{j=1}^M \mathbf{y}^{(i,j)}(\omega) \cdot (\mathcal{F}[\mathbf{v}_j(t)] - \mathbf{v}_j^{(0)}(\omega)) \right], t \right) \quad (1.29)$$

L'équivalent de (1.29) pour les courants s'écrit :

$$\mathbf{i}_i(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \sum_{j=1}^M \mathbf{y}^{(i,j)}(\omega) \cdot (\mathcal{F}[\gamma^{-1}(\mathbf{i}_j(t), t)] - \mathbf{v}_j^{(0)}(\omega)) \right] \quad (1.30)$$

La résolution de ces relations autocohérentes est itérative. Les travaux de (Fortin et al., 2002) se sont portés sur la résolution de (1.30). La taille du système à résoudre (on atteint plusieurs dizaines de milliers d'inconnues pour seulement quelques éléments non linéaires, lorsque le problème est paramétré par la transformée de Fourier rapide) a amené les auteurs à ne pas employer l'algorithme de Newton-Raphson, qui est souvent la méthode itérative de choix lorsqu'il s'agit de résoudre un système d'équations non linéaires; cette méthode, tel que nous

le verrons au chapitre suivant, peut en effet s'avérer difficile d'emploi pour les problèmes à dimensionnalité élevée. Une approche par point fixe a été préférée, où le courant à l'itération  $n + 1$  est lié au courant à l'étape  $n$  par la relation de récurrence :

$$\mathbf{i}_{n+1} = \mathbf{i}_n + \lambda(U(\mathbf{i}_n) - \mathbf{i}_n) \quad (1.31)$$

où  $U$  est donné par la partie droite de l'équation (1.30) et  $\lambda$  est calculé à partir d'une valeur initiale fixée arbitrairement, puis selon l'allure de la variation du courant à l'itération  $n$ .

### 1.3 Modélisation analytique de l'onde de choc induite par la foudre

Selon la norme internationale 60099-4 de la Commission Électrotechnique Internationale (CEI, 2014), dédiée aux parafoudres, un choc est une « onde de tension ou de courant unidirectionnelle qui, sans oscillations appréciables, croît rapidement jusqu'à une valeur maximale et tombe à zéro, habituellement moins rapidement ». D'après cette même norme, on caractérise alors l'onde de choc par sa valeur maximale, ou valeur pic, et par une combinaison de deux valeurs  $T1/T2$  exprimées en  $\mu s$  (le signe « / » n'ayant ici aucune signification mathématique).  $T1$  représente la durée conventionnelle du front, et  $T2$  la durée conventionnelle jusqu'à la mi-valeur sur la queue (c.-à-d., après le pic).

Les sections suivantes présentent deux modèles d'onde de choc parmi les plus répandus; la fonction double-exponentielle est notamment utilisée par (Fortin et al., 2002). Le modèle de Heidler (Heidler et Cvetic, 2002) est quant à lui l'un des modèles d'onde de choc les plus utilisés dans la littérature.

#### 1.3.1 La fonction double-exponentielle

La simplicité de la fonction double-exponentielle (figure 1-5) en fait un modèle d'onde de choc fréquemment rencontré dans la littérature. Elle est définie par l'expression analytique suivante :

$$i(t) = A(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) \quad (1.32)$$

où  $A$  est l'amplitude initiale, et  $\alpha_1, \alpha_2$  des constantes déterminant le temps de montée du signal et son temps de décroissance.

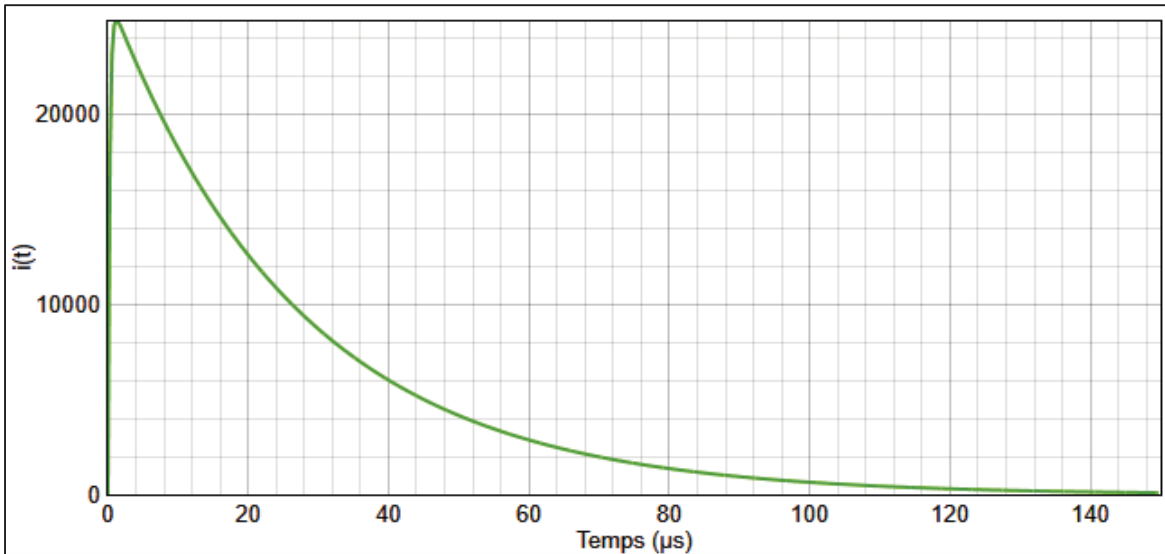


Figure 1-5 Modèle d'onde de choc en double-exponentielle (1,2/20  $\mu s$ , pic à 25 kA; courbe générée avec le logiciel FFTSES<sup>©</sup>)

L'inconvénient majeur de la fonction double-exponentielle réside dans sa dérivée non nulle à  $t = 0$  (figure 1-6), cette discontinuité est problématique, notamment parce qu'il peut être nécessaire de pouvoir calculer la dérivée seconde du courant au point d'impact, notamment lorsque l'évolution du champ est étudiée.

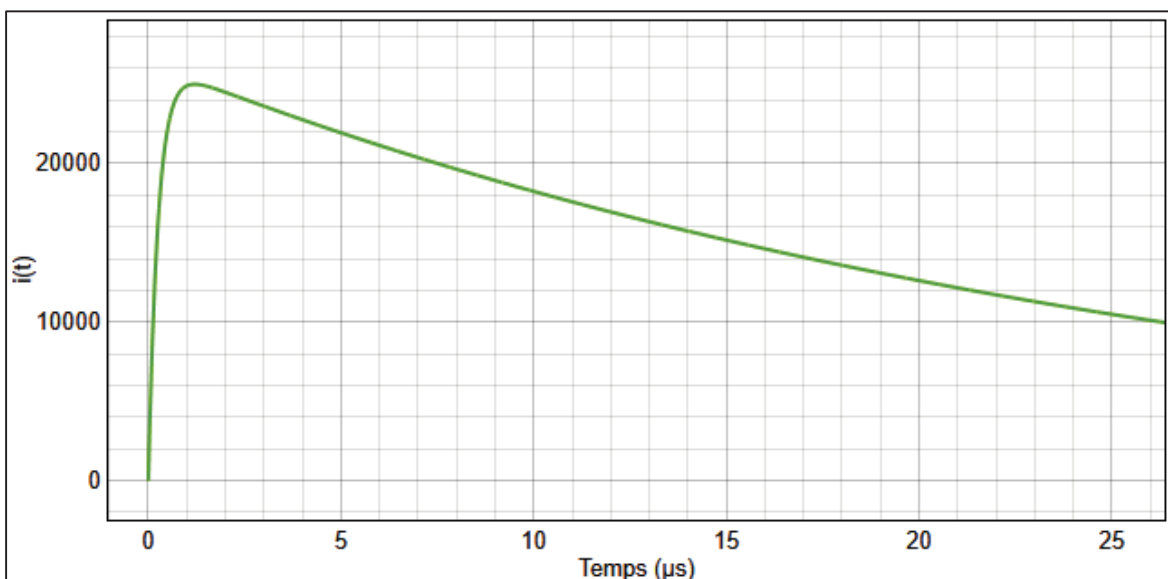


Figure 1-6 Vue rapprochée de la fonction double-exponentielle



### 1.3.2 Le modèle de Heidler

Depuis son introduction en 2002, le modèle de Heidler (Heidler et Cvetic, 2002) est devenu un modèle de référence dans la littérature.

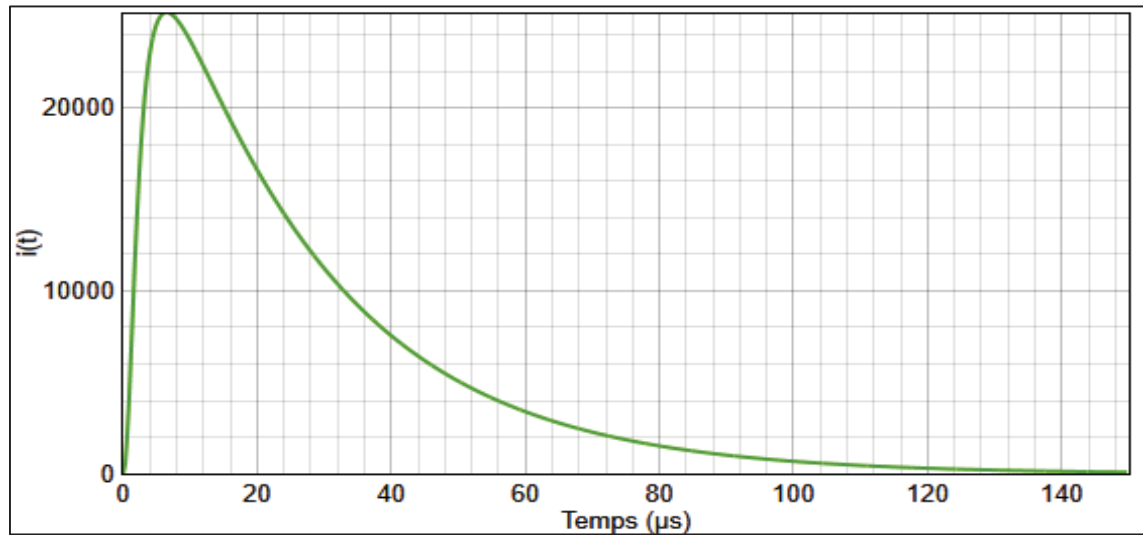


Figure 1-7 Modèle d'onde de choc de Heidler (courbe générée avec le logiciel FFTSES<sup>®</sup>)

L'objectif principal de Heidler est de proposer un modèle pour lequel la dérivée du courant est nulle à  $t = 0$ , éliminant de ce fait la discontinuité constatée pour la fonction double-exponentielle (figure 1-8). Afin de permettre une variation séparée de la charge totale, de la pente maximale du courant et du courant pic, la fonction du courant de Heidler est définie à partir d'une fonction de montée  $x(t)$  et d'une fonction de descente  $y(t)$  :

$$i(t) = i_{max} \cdot x(t) \cdot y(t) \quad (1.33)$$

Selon les auteurs, en raison des protections contre la foudre, la structure de la chute du courant est de moins d'intérêt que celle du front montant;  $y(t)$  est alors simplement exprimée selon une décroissance exponentielle :

$$y(t) = e^{(-t/\tau)}$$

La structure de la montée du courant est quant à elle modélisée de la façon suivante :

$$x(t) = \frac{c(t) + \left(\frac{t}{T}\right)^n}{d(t) + \left(\frac{t}{T}\right)^n}$$

Le terme  $\left(\frac{t}{T}\right)^n$  détermine le passage de la croissance du courant vers sa chute, à l'instant  $t \approx T$ . Dans (Heidler et Cvetic, 2002), des valeurs de  $n$  comprises entre 30 et 60 permettent un bon découplage entre croissance et décroissance du courant; cependant, une valeur moins élevée permet une transition moins abrupte entre les deux.  $c(t)$  et  $d(t)$  peuvent être des fonctions trigonométriques ou polynomiales de formes variées.

Le modèle de Heidler permet ainsi d'étudier l'influence de différents paramètres, tels que la dérivée du courant ou la charge totale, de façon indépendante. Enfin, la fonction analytique du courant permet de faire varier l'emplacement de la pente maximale sur une large plage de temps.

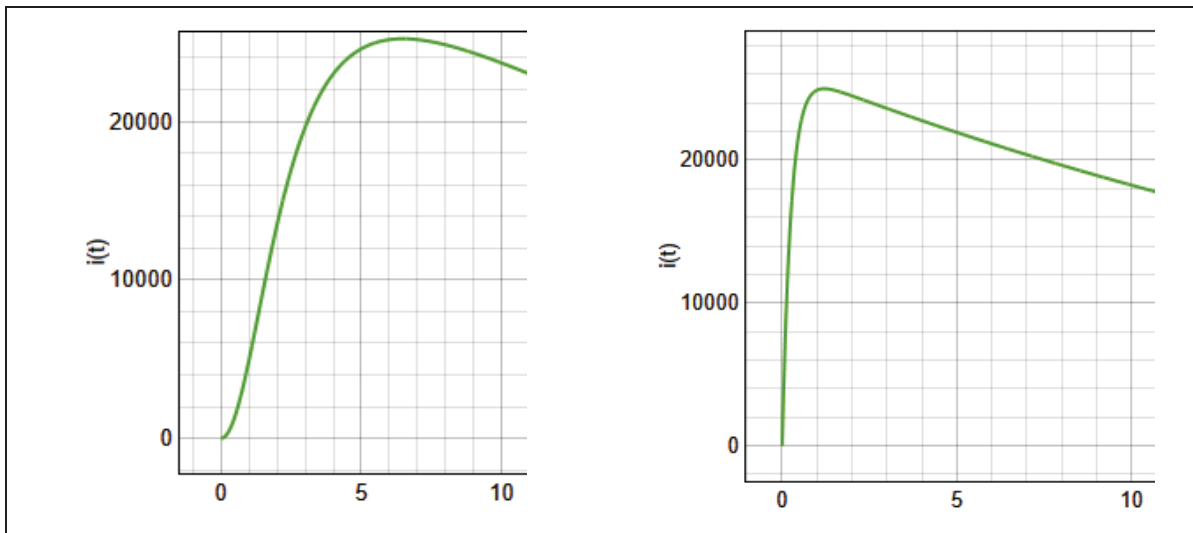


Figure 1-8 Mise en évidence de la pente nulle à  $t = 0$  pour la fonction de Heidler - Comparaison sur 10  $\mu\text{s}$  des fonctions de Heidler (gauche) et double-exponentielle (droite).

## 1.4 Conclusion

Plusieurs méthodes de résolution numérique de circuits contenant des éléments non linéaires ont été abordées dans ce chapitre. Ces méthodes sont classées suivant deux groupes : les méthodes temporelles d'une part et les méthodes hybrides temporelles/fréquentielles, d'autre part. Notons ici que ces méthodes hybrides sont souvent, dans la littérature, plus simplement appelées méthodes fréquentielles, elles ne font en effet habituellement qu'un bref passage dans le domaine du temps, afin par exemple de calculer la réponse de l'élément non linéaire à une itération donnée, dans le cas de la MFC et de la MBH.

L'inconvénient majeur des méthodes temporelles réside dans le fait que les dépendances en fréquence des propriétés des conducteurs ne sont pas prises en compte, ou seulement par approximation. Ce sont cependant des méthodes relativement aisées à résoudre numériquement, impliquant un nombre de variables généralement moindre que les méthodes fréquentielles.

Le chapitre suivant est dédié à une analyse détaillée des méthodes numériques employées pour résoudre les méthodes fréquentielles présentées dans ce chapitre.



## CHAPITRE 2

### LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES SIMULTANÉES ET LEUR RÉSOLUTION

La résolution d'un système d'équations en dimension finie ou infinie est souvent la dernière étape menant vers la solution de problèmes théoriques ou pratiques, en ingénierie ou en physique; c'est notamment le cas des méthodes numériques d'analyse de circuits non linéaires présentées dans la revue de littérature du chapitre précédent, dont les méthodes de *compensation* et de *balance des harmoniques*.

Même pour les systèmes d'équations unidimensionnels ( $N = 1$ , voir définition 2.2), la plupart des équations non linéaires n'ont pas de solution analytique, c.-à-d. qu'elles ne peuvent être obtenues en un nombre fini d'opérations. Des méthodes itératives doivent alors être utilisées afin d'approcher une solution de plus en plus précisément, d'une itération à l'autre. Il s'agit d'algorithmes générant une séquence  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de solutions approchées.

Suivant une brève section dédiée à quelques définitions utiles, deux algorithmes itératifs fréquemment utilisés pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires sont présentés dans ce chapitre. Il s'agit tout d'abord de la *méthode du point fixe*, employée dans les travaux de (Fortin et al., 2002), travaux sur lesquels est basé le présent mémoire, puis de la *méthode de Newton-Raphson*, largement la méthode itérative la plus souvent rencontrée pour ce type de problème.

Nous terminons ce chapitre par une introduction aux méthodes de Quasi-Newton, à travers la méthode de Broyden, et par une section dédiée à la méthode de Newton-Krylov. Ces méthodes permettent de pallier à certaines faiblesses de Newton-Raphson pour les systèmes non linéaires de grande taille tels que ceux générés par les modèles fréquentiels vus au chapitre précédent.

## 2.1 Définitions

PROBLÈME GÉNÉRAL. Étant donné une racine approchée d'une fonction quelconque  $\varphi$ , c.-à-d.,  $x_0$  tel que  $\varphi(x_0) \approx 0$ , définir une suite  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  qui converge vers une racine exacte  $x_*$  de  $\varphi$ , tel que  $\varphi(x_*) = 0$ .

### 2.1.1 Les systèmes d'équations non linéaires

Définition 2.1. Une fonction  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *non-linéaire* quand elle ne satisfait pas au principe de superposition; ce principe est défini par les propriétés d'*additivité* et d'*homogénéité* :

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_N) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_N) - \text{additivité}$$

$$f(ax) = af(x) - \text{homogénéité}$$

Définition 2.2. Un système d'équations non linéaires est composé de  $N$  équations, dont au moins une est non-linéaire, devant être résolues simultanément:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$$

Sous forme vectorielle :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

### 2.1.2 Convergence et vitesse de convergence

Définition 2.3. Convergence : propriété d'une série ou séquence infinie de tendre vers une limite à mesure que le nombre de termes de la série croît. On dit qu'une série converge si elle possède une limite.

Définition 2.4. La vitesse à laquelle une série convergente  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  approche sa limite  $x_*$  est appelée *vitesse de convergence*. Elle est fondée sur la comparaison de la norme de l'erreur  $x_n - x_*$  de deux éléments successifs, et est définie d'après la limite à l'infini du quotient :

$$\frac{\|x_{n+1} - x_*\|}{\|x_n - x_*\|^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}^*$$

avec  $\alpha$  l'ordre de convergence. La vitesse de convergence est d'une grande importance pratique pour les méthodes itératives; en effet, si la vitesse de convergence est grande, moins d'itérations seront requises pour obtenir une approximation de solution satisfaisante.

Définition 2.5. Une série  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  est linéairement convergente s'il existe un nombre  $\mu \in (0,1)$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x_*\|}{\|x_n - x_*\|} = \mu$$

$\mu$  est appelé le *facteur de convergence*. La convergence est dite super-linéaire si  $\mu = 0$ , et sous-linéaire lorsque  $\mu = 1$ .

Définition 2.6. Une série  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  est quadratiquement convergente s'il existe un nombre  $\mu > 0$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x_*\|}{\|x_n - x_*\|^2} = \mu$$

## 2.2 Méthode du Point-Fixe

*Théorème du point fixe de Picard-Banach* - Soit  $I$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et  $g: I \rightarrow I$  une application  $k$ -contractante (c.-à-d. qu'il existe  $k \in [0,1[$  tel que pour tout  $(x, y) \in I$ ,  $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ ). Alors  $g$  possède un unique point fixe  $a \in I$ . De plus, pour tout point initial  $x_0 \in I$ , la suite itérée  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ , avec  $x_0 \in I$  quelconque et  $x_{i+1} = g(x_i)$ , converge vers  $a$ .

On applique le théorème de Picard-Banach à la résolution de l'équation  $f(x) = 0$ , de classe  $C^1$ , dans une région où  $\frac{d}{dx}f(x) \neq 0$ . Suivant la méthode du point fixe, on réécrit l'équation de la façon suivante :

$$f(x) = x - g(x) \quad (2.1)$$

et on résout :

$$x = g(x) \quad (2.2)$$

Une solution de (2.2) est appelée un point fixe de  $g(\cdot)$ ; dans la figure 2-1, il s'agit du point d'intersection entre la droite d'équation  $y = x$  et (2.2). Suivant le théorème du point fixe de Picard-Banach, la valeur numérique de la solution  $x_*$  (le point fixe) est approchée itérativement en commençant par une valeur  $x_0$ , l'estimé initial, substitué dans  $g(x)$ . La valeur de  $g(x)$  devient alors le second estimé de solution, et ainsi de suite jusqu'à convergence. Ce processus itératif, illustré par la figure 2-1, est donné par l'équation de récurrence suivante :

$$x_{i+1} = g(x_i) \quad (2.3)$$



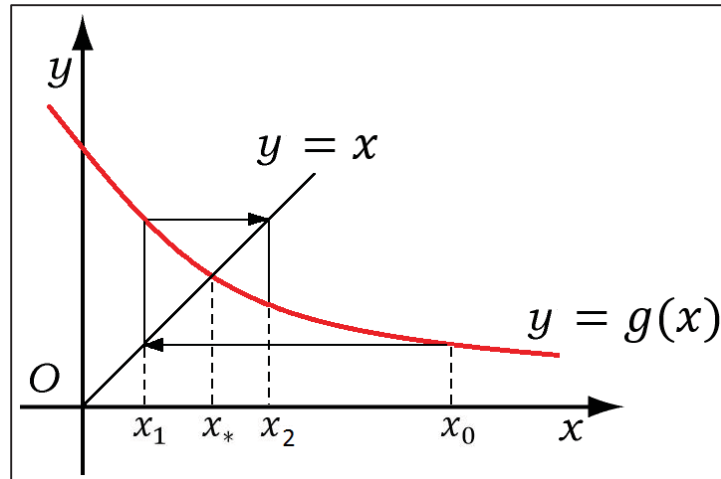


Figure 2-1 Interprétation géométrique de la méthode du Point-Fixe

Dans  $\mathbb{R}^N$ , l'équation d'itération devient :

$$\mathbf{x} = G(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \quad (2.4)$$

*Théorème d'Ostrowski* - Soit  $a$  un point fixe de  $g$ , fonction de classe  $C^1$  dans le voisinage de  $a$ . Si  $g'(a) < 1$ , alors il existe  $\delta > 0$  pour lequel  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $a$  pour tout  $x_0$  tel que  $|x_0 - a| < \delta$ . De plus, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - a\|}{\|x_n - a\|} = g'(a)$$

Selon le théorème d'Ostrowski, la méthode du point fixe est d'ordre 1, c.-à-d. que la méthode converge au moins linéairement, avec un facteur de convergence asymptotique  $\mu = g'(a)$  (voir définition 2.4 et 2.5). De plus, ce théorème montre que la méthode du point fixe est localement convergente, pourvu que l'estimé initial soit *suffisamment proche* de la solution.

### 2.3 Méthode de Newton-Raphson

L'algorithme de Newton-Raphson que nous présentons ici est certainement la plus connue des méthodes itératives utilisées dans la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Il repose sur la méthode du point fixe, avec une fonction  $g$  particulière qui dépend de la dérivée de  $f$ .

On cherche à résoudre l'équation  $f(x) = 0$ , de classe  $C^2$ , dans une région où  $\frac{d}{dx}f(x) \neq 0$ . En suivant la méthode itérative de Newton-Raphson, on part d'une estimation initiale  $x_0$  *suffisamment proche* de la racine recherchée  $x_*$ . À chaque itération, on résout ensuite pour  $x_{n+1}$  l'équation :

$$T_{x_n}f(x_{n+1}) = 0 \quad (2.5)$$

où  $T_{x_n}$  est l'application tangente de  $f(\cdot)$  au point  $x_n$ . Il s'agit donc de linéariser  $f$  au point  $x_n$  et d'utiliser la solution de cette linéarisation comme point de départ de l'itération suivante, et ce jusqu'à convergence : partant d'une solution approchée  $x_0$ , on définit  $x_1$  comme la solution de l'équation linéarisée en  $x_0$ ; puis  $x_2$  comme la solution de l'équation linéarisée en  $x_1$ , et ainsi de suite.

$T_{x_n}$  correspond au développement en série de Taylor de degré 1 de  $f$  autour de  $x_n$  ( $x_{n+1}$  étant présumé très proche de  $x_n$ , les termes de plus haut degré sont ignorés); on peut alors écrire (2.5) explicitement :

$$f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (2.6)$$

De (2.6) on dérive la fonction d'itération :

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.7)$$

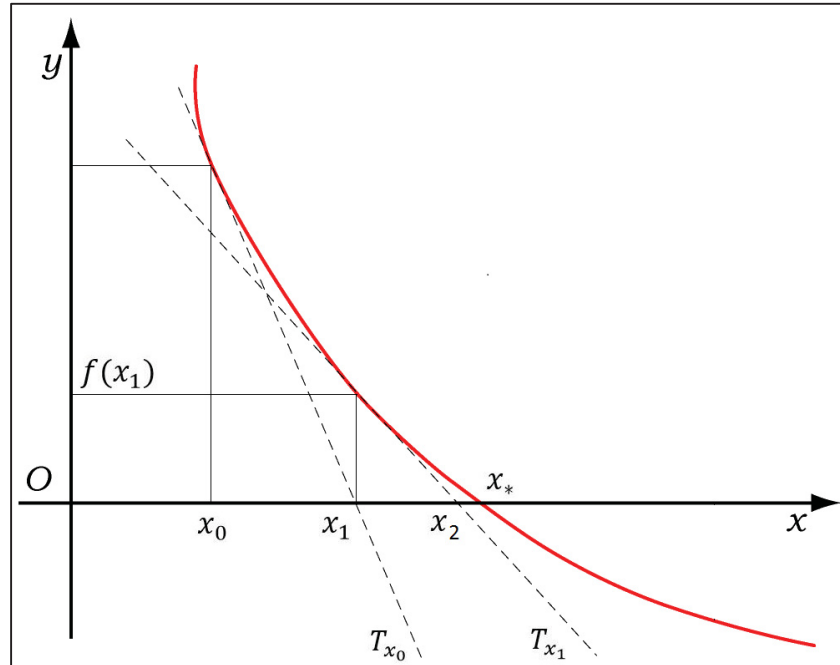


Figure 2-2 Interprétation géométrique de la méthode de Newton-Raphson

Dans  $\mathbb{R}^N$ , chaque fonction  $f_i$  de  $\mathbf{F}$  peut également être linéarisée et exprimée sous la forme d'un développement en série de Taylor de degré 1:

$$f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j = 0 \quad (2.8)$$

où  $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$ . Afin d'alléger la notation, on pose  $\mathbf{J}$  la matrice des dérivées partielles, appelée matrice Jacobienne, avec :

$$\mathbf{J}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

L'équation (2.6) devient alors:

$$\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F} \quad (2.9)$$

et nous obtenons un système d'équations linéaires, d'inconnue  $\delta\mathbf{x}$ , qu'on résout généralement par décomposition LU, à chaque itération de Newton-Raphson. On obtient enfin la formule de récurrence :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta\mathbf{x} \quad (2.10)$$

La méthode de Newton-Raphson, à l'instar de la méthode du point fixe, est localement convergente; sa convergence est quadratique (voir définition 2.6). Pour des problèmes de dimensionnalité élevée, la méthode peut atteindre les limitations suivantes, liées à la matrice Jacobienne :

- Une formulation analytique des dérivées n'est pas disponible, et la dimension  $N$  du système à résoudre est telle que le coût de calcul de la matrice Jacobienne par différence finie, à chaque itération, devient prohibitif.
- La dimension  $N$  du système à résoudre est telle que le coût de résolution du système linéaire  $\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}$ , à chaque itération, devient prohibitif (calcul de l'inverse du Jacobien).

En outre, Newton-Raphson ne s'applique que pour des problèmes convexes (elle n'est pas globale). L'objectif des prochaines sections est d'explorer les techniques de globalisation de la méthode, ainsi que des variantes permettant de s'affranchir des inconvénients liés à la taille de la matrice Jacobienne.

## 2.4 Les Quasi-Newton : la méthode de Broyden

La méthode de Broyden est, selon (Press et al., 2007), probablement la meilleure des méthodes de Quasi-Newton. On cherche là encore à résoudre l'équation  $\mathbf{F} = 0$ , de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^N$ , à l'intérieur d'une région où sa dérivée ne s'annule pas.

Il s'agit de trouver une approximation  $\mathbf{B}$  de la matrice Jacobienne suffisamment aisée à calculer afin de circonvenir les problèmes posés par la méthode de Newton-Raphson pour une dimensionnalité élevée.

La valeur de  $\delta\mathbf{x}$  à l'itération  $n$  est alors calculée en résolvant :

$$\mathbf{B}_n \cdot \delta\mathbf{x}_n = -\mathbf{F}_n \quad (2.11)$$

avec  $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$ . Selon la relation de Quasi-Newton,  $\mathbf{B}_{n+1}$  doit satisfaire l'équation suivante :

$$\mathbf{B}_{n+1} \cdot \delta\mathbf{x}_n = \delta\mathbf{F}_n \quad (2.12)$$

où  $\delta\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n$ . En dimension  $N$ ,  $\mathbf{B}_{n+1}$  est un hyperplan passant par les points  $\mathbf{F}_{n+1}$  et  $\mathbf{F}_n$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Il existe évidemment une infinité de plans passant par deux points dans un espace de dimension  $N > 2$  : la méthode de Broyden consiste alors à déterminer complètement et adéquatement  $\mathbf{B}_{n+1}$  pour un changement minimal par rapport à  $\mathbf{B}_n$  en tenant compte de (2.12).

La relation de récurrence de Broyden s'écrit :

$$\mathbf{B}_{n+1} = \mathbf{B}_n + (\delta \mathbf{F}_n - \mathbf{B}_n \delta \mathbf{x}_n) \frac{\delta \mathbf{x}_n^T}{\delta \mathbf{x}_n^T \delta \mathbf{x}_n} \quad (2.13)$$

À la première itération,  $\mathbf{B}_0$  est initialisé avec le Jacobien  $\mathbf{J}$ , qui peut être calculé par différence finie; si cette initialisation n'est pas possible, la matrice identité est utilisée, au prix d'un impact important sur la convergence (Sauer, 2006).

La convergence de la méthode de Broyden est super-linéaire (voir définition 2.5).

## 2.5 Méthode de Newton-Krylov

La méthode de Newton-Krylov est une variante de la méthode de Newton dans laquelle une technique basée sur les sous-espaces de Krylov est utilisée pour résoudre approximativement l'équation linéaire (2.9) en évitant de formuler explicitement le Jacobien. Elle est notamment utilisée par (Nastov et White, 1999) pour diminuer le temps de calcul de la Méthode de Balance des Harmoniques.

La variation de la méthode de Newton-Krylov la plus communément rencontrée est basée sur la résolution pour  $\delta \mathbf{x}_n$  de la condition de Newton inexacte (Knoll et Keyes, 2004) :

$$\|\mathbf{F}_n + \mathbf{J} \delta \mathbf{x}_n\| \leq \tau_n \|\mathbf{F}_n\| \quad (2.14)$$

Dans le contexte de la méthode de Newton-Krylov, pour chaque itération de Newton  $n$ , le « terme de forçage »  $\tau_n \in ]0,1]$  est choisi, puis une méthode de Krylov, le plus souvent la méthode itérative de minimisation du résidu généralisée (plus connue sous l'acronyme GMRES, issu de l'Anglais *Generalized Minimum RESidual*), est appliquée pour trouver un  $\delta \mathbf{x}_n$  satisfaisant (2.14).

Le choix adéquat de  $\tau_n$  est de première importance pour le succès de Newton-Krylov : en effet, plus sa valeur est petite, plus il faut d'itérations de la méthode de Krylov à chaque itération de Newton; inversement, plus sa valeur est grande et moins la méthode de Krylov nécessite d'itérations pour satisfaire (2.14), provoquant toutefois une convergence plus lente de Newton sur un plus grand nombre d'itérations. Un compromis doit donc être trouvé entre l'effort requis pour résoudre le système linéaire selon une faible tolérance et le nombre d'itérations non linéaires en résultant, tout en évitant une sur-résolution inutile du système linéaire. Il existe dans la littérature plusieurs schémas pour trouver un  $\tau_n$  adéquat, de façon adaptative (Eisenstat et Walker, 1996), (Knoll et Keyes, 2004).

La convergence de la méthode de Newton-Krylov est approximativement linéaire (Smirnov et Sá, 2009), et devient asymptotiquement quadratiquement convergente lorsque  $\tau_n \rightarrow 0$ .

## 2.6 Conclusion

Ce chapitre était dédié à une analyse détaillée des méthodes numériques employées pour résoudre les modèles fréquentiels d'analyse de circuits non linéaires présentés dans le chapitre précédent. Nous avons ainsi présenté les méthodes du Point Fixe et de Newton-Raphson, en plus d'une introduction de quelques définitions utiles relatives aux systèmes d'équations non linéaires et à la convergence des méthodes numériques de résolution.

Nous avons également abordé deux variantes de la méthode de Newton-Raphson, qui permettent d'éviter une formulation explicite du Jacobien et s'affranchissent ainsi notamment du calcul de l'inverse de celui-ci à chaque itération, l'un des principaux défauts de la méthode de Newton, particulièrement lorsqu'elle est appliquée à la résolution de systèmes de grande taille tels que ceux formés par les modèles fréquentiels.

Le chapitre suivant est consacré à l'exposé de notre méthodologie de résolution du système d'équations proposé par (Fortin et al., 2002). Cette méthodologie repose sur l'utilisation de l'algorithme de Recuit Simulé. Après avoir analysé en quoi les méthodes de Point Fixe ou de

Newton-Raphson pourraient se montrer inadéquates pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires formés par la MFC, nous faisons dans le chapitre 3 l'hypothèse que l'algorithme de Recuit Simulé pourrait représenter une bonne alternative notamment parce qu'il est global et qu'il n'implique aucun calcul de dérivées ni inversion de matrices.



## CHAPITRE 3

### MÉTHODOLOGIE : RÉOLUTION DU MODÈLE FRÉQUENTIEL DE COMPENSATION PAR RECUIT SIMULÉ

Il s'agit ici de résoudre le modèle formulé par (Fortin et al., 2002), afin de trouver la réponse temporelle  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$  de chaque élément non linéaire, que le système étudié se situe en régime transitoire ou en régime permanent. Selon la définition (1.1), on écrit l'équation à résoudre à partir de (1.24) pour chaque élément non linéaire  $i$  de la manière suivante :

$$f_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{*,i} - \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathbf{V}_{*,i}^{(0)}(\omega) + \sum_{j=1}^M \mathbf{Z}^{(i,j)}(\omega) \cdot \mathcal{F}[\gamma^{(j)}(\mathbf{v}_{*,j})] \right] = 0, \quad (3.1)$$

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N \times M}$

Le système d'équations non linéaires pour  $M$  branches s'écrit alors :

$$F(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{v}) \\ f_2(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ f_M(\mathbf{v}) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

#### 3.1 Particularités du système à résoudre

À la différence des méthodes de compensation dans le domaine temporel, où un système d'équations est résolu à chaque échantillon de temps discret  $t$ , l'équation (3.2) doit être résolue simultanément sur un ensemble de  $N$  échantillons de temps répartis sur une fenêtre d'observation de durée  $T$ , avec  $N \in \{2^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ . Dans le domaine fréquentiel, on considère alors  $N$  fréquences pour  $M$  branches non linéaires, formant un système d'équations à  $N \times M$  variables. Il est évident que le nombre de variables de ce système peut aisément devenir très

important : on s'en convainc rapidement en considérant un exemple numérique où  $M = 10$  et  $N = 4096$  (pour un exposant d'échantillonnage  $k = 12$ ); on obtient alors un système à résoudre contenant 40960 variables. En prenant en compte le fait que les réseaux électriques typiquement simulés peuvent comprendre plusieurs dizaines de composants non linéaires, nous concluons que des méthodes numériques itératives, telles que l'algorithme de Newton-Raphson, fondées sur des calculs de dérivées et des inversions de matrices, à chaque itération, auront un coût prohibitif en termes de temps et de puissance de calcul, et doivent par conséquent être évitées pour la résolution de (3.2), tel que l'avaient déjà souligné (Fortin et al., 2002).

Par ailleurs, l'algorithme de Newton-Raphson est globalement convergent seulement sur les fonctions ou espaces de recherche convexes (on parle plutôt de convergence locale). Cela signifie que la convergence n'est pas garantie dans le cas d'un système d'équations non linéaires si l'estimé initial de solution  $\mathbf{v}^{(0)}$  n'est pas *suffisamment bon*, puisque ce type de système peut, et va presque certainement, posséder des minimums locaux (Press et al., 2007); il est alors possible que l'algorithme ne puisse s'extraire du bassin d'attraction d'un minimum local, en cas de mauvais estimé initial (voir l'exemple simplifié à une dimension de la figure 3-1).

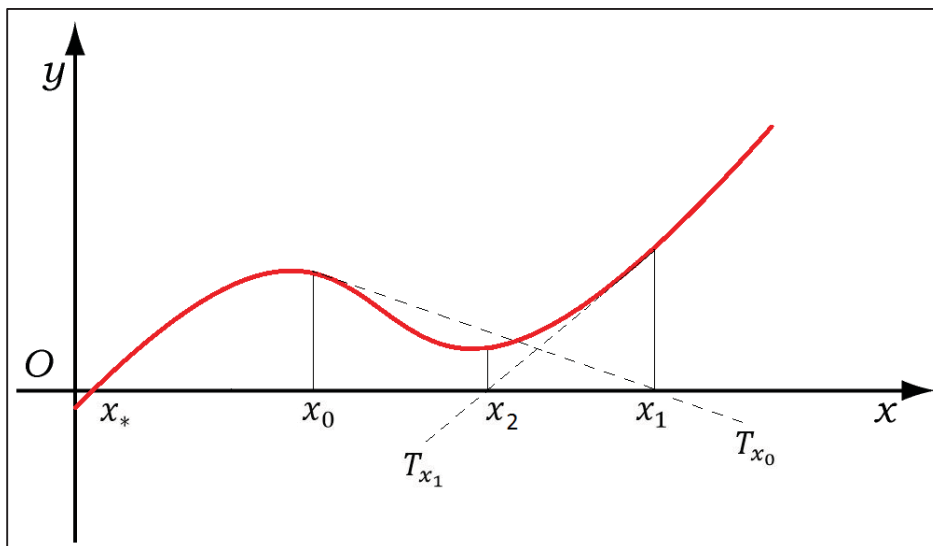


Figure 3-1 Effet d'un minimum local sur l'algorithme de Newton-Raphson

### 3.2 Énoncé du problème comme un problème d'optimisation globale

Dans le but de résoudre (3.2) en considérant les particularités du système, nous reformulons le problème de résolution du système comme un problème d'optimisation globale. Selon cette formulation, l'optimisation multiobjectif de chaque équation du système est réduite à la minimisation d'une fonction unique, la fonction objectif, mesurant la qualité d'une solution sélectionnée parmi un ensemble de solutions possibles faisant partie d'un espace appelé *espace de recherche*.

Formuler le problème sous cette forme offre l'avantage de pouvoir utiliser des algorithmes conçus pour l'optimisation non linéaire, possédant des attributs répondants aux particularités du système (3.2), notamment des algorithmes à convergence globale et à recherche directe, utilisant exclusivement les valeurs de fonctions (sans dérivées).

On pose alors une fonction objectif principale  $C: \mathbb{R}^{N \times M} \rightarrow \mathbb{R}$  comme étant la somme des carrés des fonctions composantes  $f_i(\mathbf{v})$  de  $F(\mathbf{v})$  :

$$C(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^M f_i(\mathbf{v})^2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N \times M} \quad (3.3)$$

Définie positivement, cette fonction possède un minimum global, nul, pour chaque solution de l'ensemble d'équations non linéaires original (Press et al., 2007). Nous nous proposons de la minimiser en utilisant la méthode du Recuit Simulé.

### 3.3 La méthode du Recuit Simulé

Le Recuit Simulé (RS; en Anglais : Simulated Annealing, SA) est une méthode probabiliste itérative proposée indépendamment par (Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi, 1983) et (Cerny, 1985) qui permet de trouver le minimum global d'une fonction de coût pouvant avoir plusieurs

minimums locaux. Initialement conçue pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire, la méthode sera par la suite étendue aux problèmes d'optimisation continue.

### 3.3.1 Une analogie avec la mécanique statistique

En mécanique statistique, le recuit est un processus thermique consistant à réchauffer puis refroidir très lentement un solide, lui permettant ainsi d'atteindre un état *minimisant son énergie interne*, correspondant à une structure stable de la matière. Kirkpatrick et Cerny mettent en évidence le lien entre recuit physique et optimisation, où il s'agit cette fois de trouver la configuration globalement optimale d'un système donné. En détaillant cette analogie avec le recuit physique, les auteurs proposent un cadre théorique pour l'optimisation des propriétés de systèmes complexes de très grande taille, donnant naissance à la théorie du Recuit-Simulé.

L'origine du Recuit Simulé peut être retracée jusqu'aux travaux dirigés par Nicholas Metropolis au Los Alamos National Laboratory (Metropolis et al., 1953). Ces travaux sont dédiés à la simulation informatique par la méthode de Monte-Carlo de l'état d'un ensemble canonique, ensemble statistique d'atomes à l'équilibre soumis à une température donnée, fixe. La méthode de Monte-Carlo, également mise au point à Los Alamos par Enrico Fermi, Roger Eckhardt, John Von Neumann, Stan Ulam et Nicholas Metropolis (Metropolis et Ulam, 1949), permet dans ce cas un échantillonnage statistique réduit de quelques centaines de particules qui fournit une représentation fiable de l'ensemble étudié et de sa distribution réelle (ici, une distribution de Boltzmann).

Suivant l'algorithme de Metropolis (algorithme 3.1), un état donné du système, à un niveau d'énergie  $E_1$ , est comparé à un état obtenu en déplaçant légèrement l'une des particules du système. Ce nouvel état, d'énergie  $E_2$ , est accepté si  $E_2 - E_1 = \Delta_E < 0$ , c.-à-d. si ce changement entraîne le système vers un état d'énergie plus faible que le précédent. Ce nouvel état n'est cependant pas nécessairement rejeté lorsque  $\Delta_E \geq 0$ ; il peut être accepté avec une probabilité  $p(\Delta_E) = e^{-(\Delta_E)/k\tau}$  (critère de Metropolis), où  $k$  est la constante de Boltzmann et  $\tau$  la température à laquelle le système est soumis.

En répétant ce processus à de nombreuses reprises, générant une séquence d'états, l'algorithme de Metropolis fait tendre l'ensemble vers une distribution de Boltzmann correspondant à un niveau d'énergie minimale pour la température donnée. L'algorithme sera généralisé par Hastings, pour devenir l'algorithme de Metropolis-Hastings, aujourd'hui classé comme étant une *méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov à marche aléatoire* (voir Annexe I).

Par analogie avec le recuit physique, la méthode de Kirkpatrick-Cerny utilise l'algorithme de Metropolis-Hastings afin de reproduire le processus de recherche d'un état non plus d'énergie minimale, mais de coût minimal, à chaque palier de température. Les états du système physique sont assimilés à un ensemble de solutions possibles à un problème d'optimisation combinatoire; la température est quant à elle réduite selon un schéma de refroidissement également inspiré par le recuit physique, jusqu'à convergence.

Metropolis-Hastings est essentiel au Recuit Simulé, notamment parce qu'il permet d'éviter de rester piégé dans des minimums locaux, *la sélection d'un état d'énergie supérieur étant toujours possible*, et ce tant que la température n'est pas nulle; l'exploration de l'espace de recherche est réalisée avec une probabilité  $p(\Delta_E) = e^{-(\Delta_E)/k\tau}$  de choisir une configuration de coût supérieur.

### 3.3.2 Algorithme et modèle mathématique

Un problème de minimisation tel que celui posé en 3.2 est formalisé comme une paire  $(S, C)$ , où  $S \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble fermé sur  $\mathbb{R}^n$  appelé espace de recherche, ou espace des solutions, et  $C$  une fonction de coût à valeur réelle définie sur  $S$ . De plus, l'algorithme RS possède les éléments suivants :

- Une fonction strictement décroissante  $\tau: n \rightarrow (0, \infty)$ , appelée schéma de refroidissement, ayant la propriété suivante :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau = 0$
- Une fonction probabiliste d'acceptation  $A$ , issue de l'algorithme de Metropolis.
- Une fonction génératrice  $G$ , qui, pour l'état courant  $x(n) \in S$ , va générer un état candidat  $x(n+1) \in S$ .  $n$  est une variable d'itération.
- Un état initial  $x(0) \in S$ .

L'algorithme consiste à faire évoluer une chaîne de Markov  $x(n)$  à partir de l'état initial  $x(0)$ , afin de la faire tendre vers les états les plus probables, qui sont également, selon Metropolis-Hastings, les états d'énergie minimale; l'ensemble de ces états solutions est noté  $S^*$ , et nous avons  $S^* \subset S$ . On pose  $i = x(n)$ , et  $j$  un voisin de  $i$  choisi aléatoirement par la fonction génératrice  $G$ ; on détermine alors le prochain état  $x(n+1)$  d'après  $j$ , sous les conditions suivantes (fonction d'acceptation  $A$ ) :

#### Algorithme 3.1 Algorithme de Metropolis

Si  $C(j) \leq C(i)$ , alors  $x(n+1) = j$

Si  $C(j) > C(i)$ , alors

$x(n+1) = j$  sous la probabilité  $e^{-(C(j)-C(i))/k\tau}$  (critère de Metropolis)

$x(n+1) = i$  sinon.

Ce processus est répété pour chaque palier de température jusqu'à l'atteinte d'un nombre maximum d'itérations, ou lorsque l'énergie ne varie plus; la température est alors diminuée selon le schéma de refroidissement  $\tau: n \rightarrow (0, \infty)$ ). Celui-ci prend typiquement la forme suivante :

$$\tau(n) = \psi \cdot \tau(n - 1), \psi \in ]0,1[$$

Avec une valeur de  $\psi$  généralement fixée entre 0.9 et 0.99, assurant un refroidissement suffisamment lent (figure 3-2). On parle ici de schéma de refroidissement *géométrique*. Un schéma de refroidissement souvent rencontré dans la littérature implique la fonction logarithme (figure 3-3) :

$$\tau(n) = \frac{c}{\log(n + d)}$$

où  $c$  est une constante dépendant du problème à résoudre,  $n$  la variable d'itération et  $d$  généralement égal à 1. Rencontré notamment dans les preuves de convergence asymptotique de l'algorithme RS, ce schéma est cependant inefficace en *temps fini* et par conséquent peu utile dans un problème pratique, pour lesquels les schémas géométriques sont préférés.

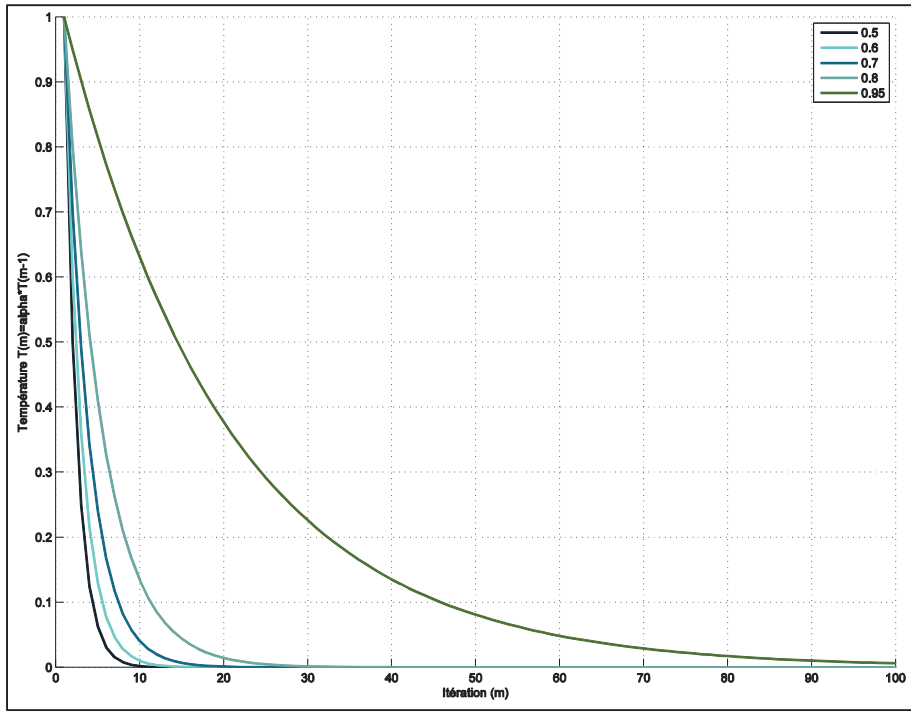


Figure 3-2 Schéma de refroidissement géométrique pour différentes valeurs de  $\psi$

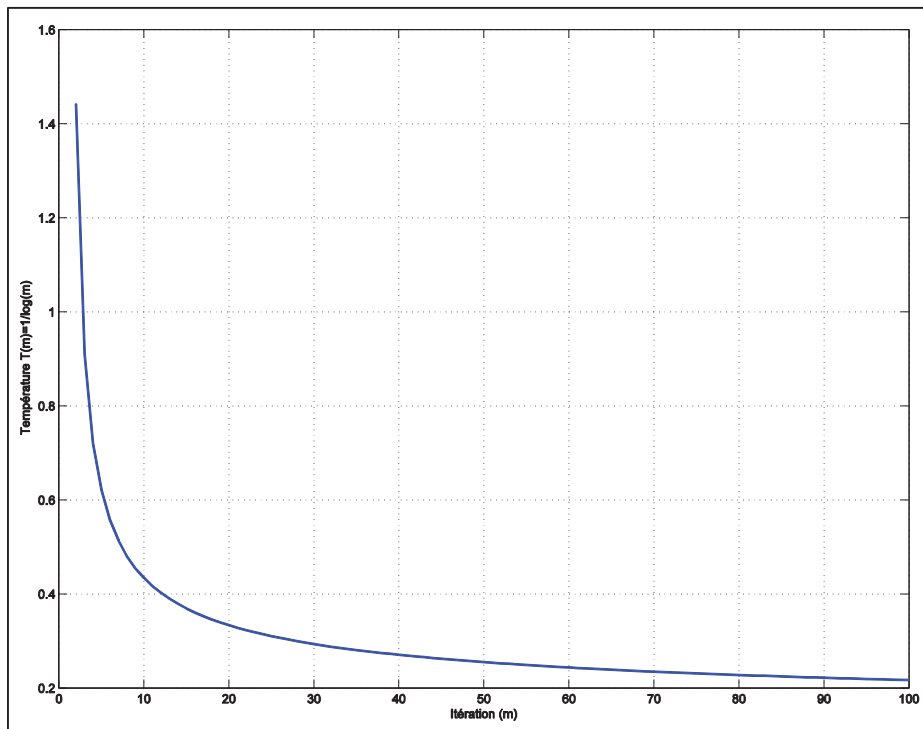


Figure 3-3 Schéma de refroidissement logarithmique



### 3.3.3 Convergence et vitesse de convergence

De par sa nature stochastique, l'algorithme RS ne peut être défini suivant des taux de convergences déterministes et un facteur de convergence, comme c'est le cas par exemple pour la méthode de Newton-Raphson; on parlera plutôt de convergence en probabilité, et l'algorithme est convergent si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x(n) \in S^*) = 1 \quad (3.4)$$

La convergence asymptotique du Recuit Simulé a été démontrée (voir (Geman et Geman, 1984) pour le cas combinatoire et (Bélisle, 1992) pour le cas continu); bien qu'importantes d'un point de vue théorique, ces démonstrations n'ont cependant qu'un intérêt limité en pratique, où l'on préférera atteindre des solutions approchées en *temps fini*.

Une implémentation en temps fini du Recuit Simulé est réalisée en générant une séquence de chaînes de Markov de longueur finie pour chaque valeur décroissante de température. La convergence de l'algorithme est alors permise par un choix judicieux du schéma de refroidissement, mais également par une fonction génératrice adéquate.

### 3.4 Application à la résolution du modèle fréquentiel de compensation

L'objectif est de minimiser (3.3). Les différentes fonctions constitutives de l'algorithme de Recuit Simulé sont construites pour un problème d'optimisation continue et selon une adaptation des éléments de la méthode du point fixe conçus par (Fortin et al., 2002). L'équation de récurrence (1.31) se retrouve ainsi au cœur de la fonction génératrice.

### 3.4.1 La fonction génératrice

L'algorithme RS a été conçu pour des problèmes d'optimisation combinatoire, où la proposition aléatoire d'un candidat de solution  $\mathbf{x}(n+1)$  se fait nécessairement dans le voisinage immédiat du point courant  $\mathbf{x}(n)$  (ce voisinage étant de dimension finie).

L'optimisation de fonctions continues impose quant à elle de donner localement une direction à l'algorithme dans l'espace de recherche, suivant la pente au point courant  $\mathbf{x}(n)$ , afin de définir adéquatement une nouvelle solution potentielle  $\mathbf{x}(n+1)$  à l'intérieur d'une infinité de possibilités (le concept de direction n'a pas d'équivalent dans l'espace des configurations de l'optimisation combinatoire). Négliger ce concept de direction en appliquant des variations aléatoires  $\Delta_{n+1}$  à  $\mathbf{x}(n)$  serait extrêmement inefficace : des variations dégradant la solution seraient en effet *presque toujours* proposées à l'algorithme de Metropolis.

La notion de pente repose sur l'hypothèse que la fonction optimisée est au moins localement continue dans le voisinage du minimum global; nous considérons cette hypothèse comme étant vraie dans le cas de (3.3) pour la suite de notre développement.

(Corana et al., 1987) proposent une recherche de solution aléatoire progressant suivant chaque axe du vecteur solution  $\mathbf{x}$ ; nous préférons une approche adaptative considérant la pente au point courant  $\mathbf{x}(n)$  inspirée de (Bohachevsky, Johnson et Stein, 1986); cette approche *dépend directement du problème à résoudre dans la formulation même du candidat potentiel*. Notre mécanisme de recherche est ainsi régulé suivant la valeur courante de la fonction de coût : la variation  $\Delta_{n+1}^i$  est en effet progressivement restreinte à mesure que l'algorithme s'approche du minimum global, et inversement si l'on s'en éloigne.

D'après l'équation de récurrence (1.31), nous posons la fonction génératrice  $G$ , pour l'élément non linéaire  $i$ , à l'itération  $n$  :

$$\mathbf{x}_i(n+1) = G_i(\mathbf{x}_i(n)) = \mathbf{x}_i(n) + \Delta_{n+1}^i \quad (3.5)$$

où :

$$\mathbf{x}_i(n) = \mathbf{i}_{n,i}(t) = \gamma(\mathbf{v}_{n,i}(t), t) \quad (3.6)$$

et :

$$\Delta_{n+1}^i = \text{Min}(\lambda_V \cdot \mathbf{x}_i(n) \frac{\delta_V}{V}, \lambda_I \delta_I, \Delta_{MAX}) \quad (3.7)$$

avec  $\delta_V$  et  $\delta_I$  les deltas entre les solutions proposées en tension et en courant et les valeurs obtenues lorsque ces solutions sont appliquées à la partie linéaire du circuit, suivant les équations autocohérentes (1.27) et (1.28). Ces variables ont pour effet de limiter les variations à l'approche du minimum global de (3.3).

$\lambda_V$  et  $\lambda_I$ , valeurs déterminées par l'utilisateur dans les travaux de (Fortin et al., 2002) et pouvant être modifiées par celui-ci afin de guider périodiquement la convergence de l'algorithme, sont désormais mises à jour automatiquement, suivant une loi normale :

$$\lambda_{V,n} \sim N\left(\lambda_{V,n-1}, \frac{k}{\log(n)}\right), \lambda_{I,n} \sim N\left(\lambda_{I,n-1}, \frac{k}{\log(n)}\right) \quad (3.8)$$

L'écart-type dynamique de (3.8), dépendant de l'itération courante  $n$ , permet une exploration large de l'espace des solutions dans les premières itérations de l'algorithme. En d'autres termes, là où l'équation (3.7) détermine la direction que prend l'algorithme, (3.8) permet d'en spécifier la portée. L'ajout de cet élément stochastique supplémentaire permet par ailleurs d'atténuer l'importance de la sélection, a priori arbitraire, de la valeur initiale de  $\lambda$ . La précision de l'exploration de l'espace de recherche est déterminée par le facteur  $k$ ; plus celui-ci sera petit et plus l'exploration de l'espace sera précise.

### 3.4.2 La fonction de coût

La fonction de coût  $C$  issue de l'équation (3.3) est pondérée pour donner  $C_p$ :

$$C_p(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^M \omega_i \cdot f_i(\mathbf{v})^2 \quad (3.9)$$

avec  $\omega_i \in ]0,1]$  un poids appliqué à la contribution de l'élément non linéaire  $i$  au coût global. Il est ainsi possible de faire varier la contribution de chaque élément non linéaire, suivant la valeur prise par certains paramètres (par exemple, la distance entre l'élément non linéaire et le point d'impact).

### 3.4.3 La fonction d'acceptation

La fonction probabiliste d'acceptation,  $A$  est une application directe de l'algorithme de Metropolis :

$$A(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_p(\mathbf{v}_{n+1}) < C_p(\mathbf{v}_n) \\ e^{(C_p(\mathbf{v}_{n+1}) - C_p(\mathbf{v}_n))/\tau} & \end{cases} \quad (3.10)$$

### 3.4.4 Le schéma de refroidissement

Un schéma de refroidissement  $\tau$  géométrique est défini; nous l'avons vu dans la section 3.3.2, le schéma géométrique doit être préféré lorsqu'il s'agit de trouver une solution approchée en temps fini :

$$\tau(n) = \psi \cdot \tau(n - 1), \psi \in ]0,1[ \quad (3.11)$$

### 3.4.5 Initialisation de l'algorithme

En tant qu'algorithme d'optimisation globale, l'algorithme RS est moins dépendant de l'approximation initiale de solution que ne peuvent l'être les méthodes du Point-Fixe ou de Newton-Raphson. Une bonne approximation initiale pourrait néanmoins réduire fortement le temps de calcul, et n'est donc pas à négliger.

L'approche suivante a été adoptée : pour la valeur initiale en tension, nous utilisons la tension en circuit ouvert aux bornes de chaque élément non linéaire :

$$\mathbf{v}_i^{(0)}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{V}_i^{(0)}(\omega))$$

Pour la valeur initiale en courant, nous utilisons la réponse de l'élément non linéaire à cette tension, d'après l'équation suivante :

$$\mathbf{i}_i^{(0)}(t) = \gamma^{-1}(\mathbf{v}_i^{(0)}(t))$$

### 3.5 Conclusion

Issu de la mécanique statistique, le Recuit Simulé est un algorithme d'optimisation global, que nous employons dans ce mémoire pour résoudre le système d'équations non linéaires de la MFC. Nous reformulons le problème de résolution du système comme un problème d'optimisation où il s'agit de minimiser la somme du carré des erreurs de chaque équation composant le système original. Résoudre ce problème d'optimisation revient alors à trouver une solution au système d'équations de la MFC.

Nous estimons que l'algorithme RS peut répondre à certains inconvénients posés par les méthodes de Point Fixe et de Newton-Raphson; il s'agit notamment d'un algorithme qui est moins contraignant relativement à la topologie de l'espace de recherche. Celui-ci peut être

discontinu ou fortement non linéaire sans que cela n'affecte la capacité du Recuit Simulé à trouver une solution, s'il en existe.

L'algorithme RS reste néanmoins une méthode stochastique, dont la convergence dépend de plusieurs paramètres algorithmiques propres, dont une formulation adéquate de la fonction génératrice. Le chapitre suivant est dédié à l'évaluation de notre méthode de résolution de la MFC; nous y évaluons notamment la capacité de l'algorithme à converger sur des systèmes issus de modèles réalistes.

## CHAPITRE 4

### ÉVALUATION DE LA MÉTHODE ET RÉSULTATS

Il s'agit dans ce chapitre d'évaluer, sous différents aspects, notre méthode de résolution du problème de modélisation de la propagation d'une onde de choc sur une ligne de transmission protégée par des parafoudres, lorsque le problème est posé suivant les termes du *modèle fréquentiel de compensation* proposé par (Fortin et al., 2002).

Nous évaluons dans une première partie la propriété de scalabilité de l'algorithme en fonction du nombre d'éléments non linéaires ajoutés sur la ligne. La deuxième partie est dédiée à l'étude du cas présenté par (Fortin et al., 2002); nous y évaluons la capacité de l'algorithme à converger pour des valeurs réalistes du coefficient de non-linéarité des parafoudres, à partir de données de circuit obtenues avec le logiciel HIFREQ.

Dans la première partie, nous comparons nos résultats avec ceux obtenus en employant ATP-EMTP, un logiciel d'usage répandu dans l'industrie. Bien que l'idéal aurait été de comparer nos résultats avec des données réelles, cette comparaison avec un logiciel largement accepté dans la communauté scientifique offre un point de repère important relativement à la validité de la méthode fréquentielle proposée. L'algorithme de résolution du modèle, ainsi que le modèle fréquentiel lui-même, sont codés sous forme de prototype, en langage Matlab.

#### 4.1 Essais sur un modèle de ligne de transmission par quadripôles en cascade

Le modèle de section en quadripôle est un modèle simple qui permet d'ajouter aisément de nombreuses sections en cascades à la ligne de transmission modélisée, selon le principe des quadripôles chaînables. Chaque section du modèle comprend un élément non linéaire. Il s'agit d'une approche « circuit », où les phénomènes électromagnétiques tels que réflexions ou couplage sont négligés. Bien que manquant de réalisme, ce modèle permet notamment de tester facilement la scalabilité de l'algorithme proposé lorsque le nombre d'éléments non linéaires augmente.

Le système est constitué de  $n$  sections (ou quadripôles), qui comportent chacune deux branches (supérieure et inférieure), liées par une troisième branche contenant un parafoudre. Chaque section, à l'exception de la première et de la dernière, est composée d'une impédance  $Z_{(n)}^S$  sur la branche supérieure, d'une impédance  $Z_{(n)}^L$  sur la branche inférieure et d'un élément non linéaire  $P_n$  fermant la boucle. La première section n'est constituée que d'une source de tension; la dernière contient, en plus des impédances  $Z^S$  et  $Z^L$ , une impédance  $Z^R$  représentant un récepteur (voir figure 4-1).

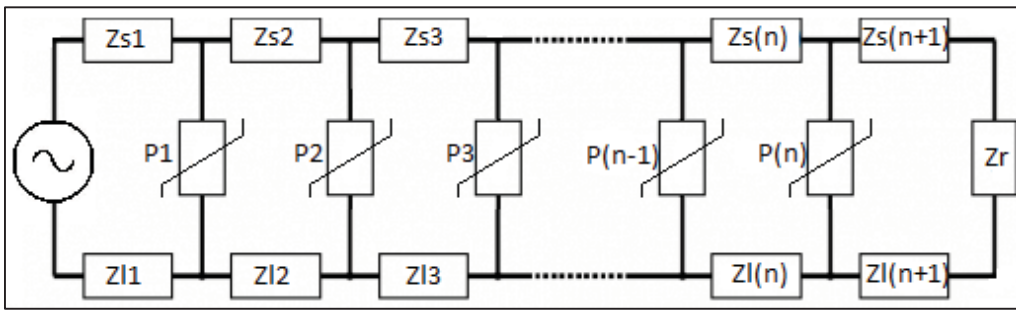


Figure 4-1 Modèle de ligne de transmission en quadripôles

#### 4.1.1 Test de scalabilité

Nous testons la scalabilité de l'algorithme pour des paramètres algorithmiques fixes; seul le nombre d'éléments non linéaires inclus est varié, de 2 à 20 éléments. Un total de 30 essais est réalisé pour chaque nombre d'éléments : le Recuit Simulé étant un algorithme stochastique, procéder ainsi nous permet de calculer moyennes et mesures de dispersion, et d'en déduire une complexité algorithmique approximative.

La foudre est caractérisée par une onde de choc de 1,2/20  $\mu$ s, avec un pic à 25 kV, modélisée par une fonction double-exponentielle; le point d'impact est situé sur la branche supérieure de la première section du modèle. La durée de simulation est fixée à 150  $\mu$ s. Le parafoudre installé sur le circuit est une varistance à oxyde métallique modélisée suivant l'équation (1.26), avec  $i_s = 700$  A et  $v_s = 15.000$  V. Les paramètres de circuit et les paramètres algorithmiques sont décrits dans les tableaux 4.1 et 4.2, respectivement.



Tableau 4.1 Paramètres de circuit du test de scalabilité

<b>Modèle</b>		Quadripôles
<b>Nombre d'éléments non linéaires</b>		De 2 à 20
<b>Coefficient <math>\alpha</math></b>		2
<b>Temps de simulation (<math>\mu s</math>)</b>		150
<b>Nombre d'échantillons</b>		4096
<b>Modèle de choc</b>		Exponentielle double 1,2/20 $\mu s$ , 25kV
<b>Impédance branche supérieure</b>	R	10 $\Omega$
	L	0.01 mH
	C	10 $\mu F$
<b>Impédance branche inférieure</b>	R	10 $\Omega$
	L	0.01 mH
	C	10 $\mu F$

Tableau 4.2 Paramètres algorithmiques du test de scalabilité

<b>Température initiale</b>	1
<b>Schéma de refroidissement</b>	Géométrique
<b>Initialisation</b>	$V^{(0)}$ limité
<b>Facteur d'ajustement <math>k</math></b>	$10^{-2}$
<b>Variation maximale du courant <math>\Delta_{MAX}</math></b>	500 A

Notons ici que les éléments R-L-C des impédances des branches supérieures et inférieures sont connectés en série. La figure 4-2 ci-dessous représente les temps de calculs pour chacun des 30 essais effectués pour chaque nombre d'éléments non linéaires inclus dans le modèle. On peut constater par analyse visuelle que plus le nombre de parafoudres inclus est grand, plus le temps de calcul de l'algorithme aura tendance à augmenter, en moyenne.

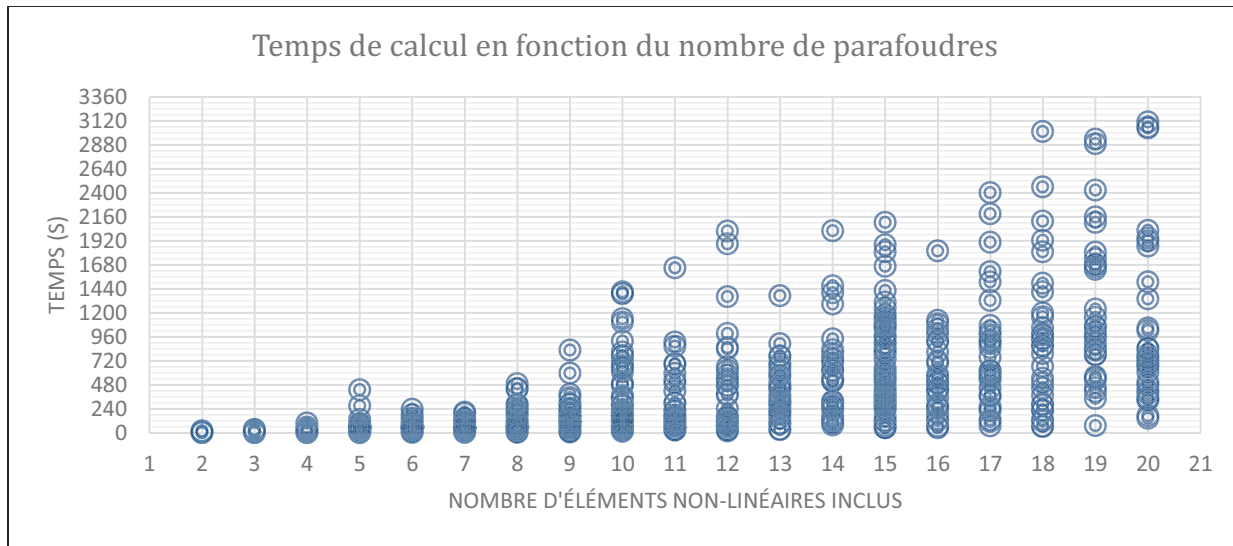


Figure 4-2 Évolution du temps de calcul pour le modèle en quadripôles suivant le nombre d'éléments non linéaires inclus (de 2 à 20)

On peut déduire des valeurs moyennes calculées (figure 4-3, courbe bleue) dans cet essai une complexité en temps approximatif de notre algorithme, valide *au moins* pour l'ensemble de paramètres algorithmes présentés dans le tableau 4.1. Le temps de calcul est en effet directement lié au nombre d'itérations effectuées par le Recuit Simulé, nombre d'itérations que l'on peut assimiler au nombre d'étapes de calculs nécessaires avant d'arriver à un résultat.

Le Recuit Simulé, au cœur de notre méthode, étant un algorithme stochastique, nous parlerons plutôt de complexité en temps *en moyenne*. D'après les données obtenues dans cet essai, nous déduisons empiriquement une complexité en temps moyen à mi-chemin entre complexité quadratique et cubique d'approximativement  $\Theta(n^{2.4})$ ; cette déduction est évidemment approximative, et devra faire l'objet d'une validation plus poussée dans le cadre de futurs travaux. La figure 4-3 ci-dessous fait la comparaison entre cette estimation (en rouge) et les valeurs moyennes réelles (en bleu).

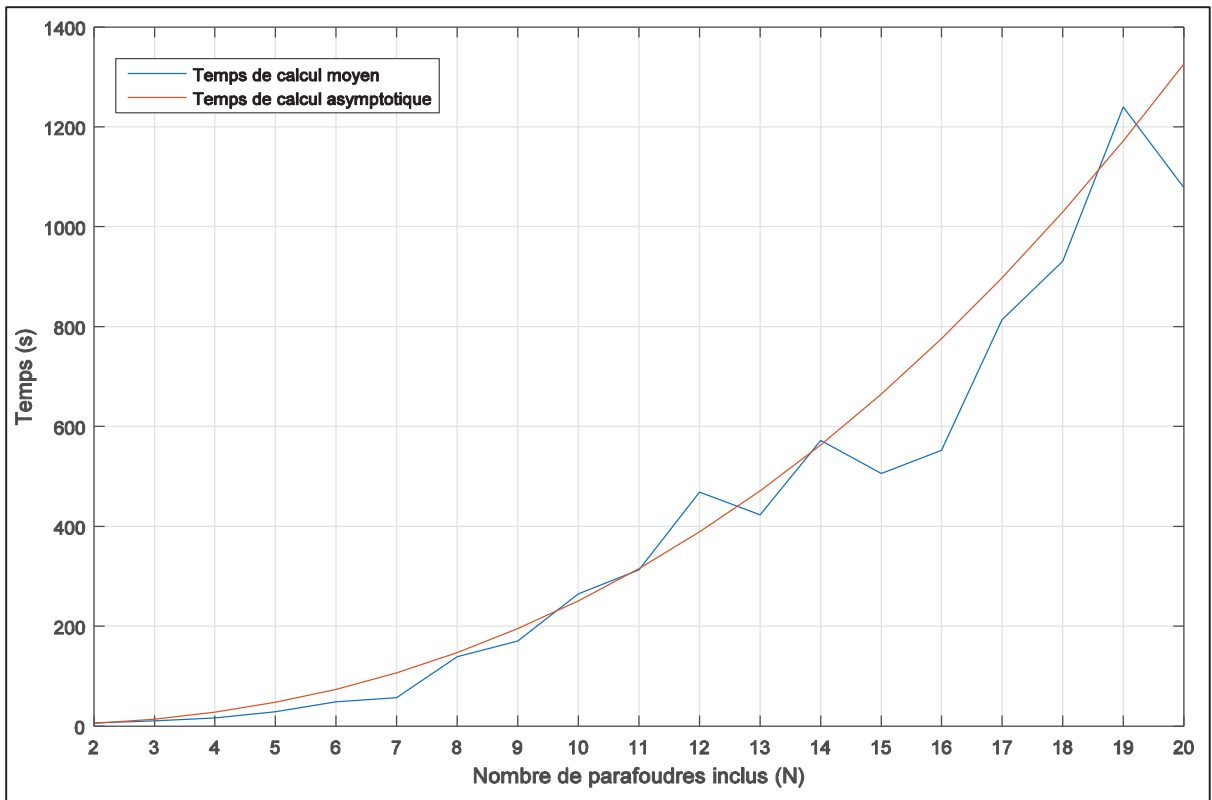


Figure 4-3 Courbe de la complexité en temps moyen et valeurs moyennes réelles

Une valeur maximale de 20 parafoudres inclus dans le circuit est un nombre raisonnable; nous faisons ici l'hypothèse que seuls les parafoudres situés dans le voisinage immédiat du point d'impact auront un effet important sur la modélisation, puisqu'ils dissiperont à eux seuls vers la terre la quasi-totalité de l'énergie de l'onde de choc, à raison d'un parafoudre par phase et par pylône.

#### 4.1.2 Comparaison avec ATP-EMTP

ATP-EMTP (acronyme de Alternative Transient Program – ElectroMagnetic Transient Program) est un logiciel dédié à l'étude et à la simulation numérique des phénomènes électromagnétiques transitoires; il est utilisé principalement lors de la conception d'installations électriques de puissance.

La Méthode Temporelle de Compensation (Dommel, 1971), exposée au chapitre 1 du présent mémoire, est la méthode de modélisation de circuits contenant des éléments non linéaires utilisée par ATP-EMTP (*Electro-Magnetic Transients Program (EMTP) Theory Book*, 1995). La figure 4-4 ci-dessous représente un modèle en quadripôles conçu avec ATP-EMTP. Il s'agit d'un modèle à 5 sections; ce sont les résultats de simulation de ce système que nous comparons avec les résultats obtenus avec notre prototype.

L'objectif est de comparer les résultats des deux méthodes sur un modèle extrêmement simplifié, où *les différences entre les méthodes numériques de résolution utilisées devraient avoir le moins de conséquences sur les résultats de simulation*; nous nous intéressons en particulier aux courants traversant les parafoudres et aux tensions à leurs bornes.

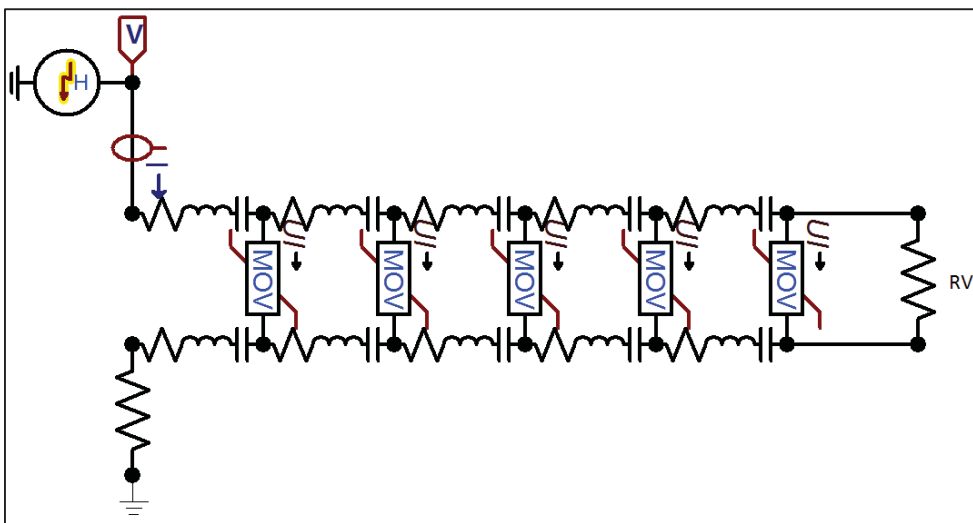


Figure 4-4 Circuit en quadripôles simulé avec ATP-EMTP

La foudre est caractérisée par une onde de choc de 1,2/20  $\mu\text{s}$ , avec un pic à 25 kV, modélisée par le modèle de Heidler; le point d'impact est situé sur la branche supérieure de la première section du modèle (figure 4-4). La durée de simulation est fixée à 150  $\mu\text{s}$ . Le parafoudre installé sur le circuit est une varistance à oxyde métallique modélisée suivant l'équation (1.26), avec  $i_s = 700 \text{ A}$  et  $v_s = 15.000 \text{ V}$ . Les tableaux 4.3 et 4.4 décrivent les paramètres de circuit et les paramètres algorithmiques, respectivement.

Tableau 4.3 Paramètres de circuit du test de comparaison avec ATP-EMTP pour le circuit en quadripôles chaînables

<b>Modèle</b>		Quadripôles
<b>Nombre d'éléments non linéaires</b>		5
<b>Coefficient <math>\alpha</math></b>		25
<b>Temps de simulation (<math>\mu\text{s}</math>)</b>		150
<b>Nombre d'échantillons</b>		4096
<b>Modèle de choc</b>		Heidler 1,2/20 $\mu\text{s}$ , 25kV
<b>Impédance branche supérieure</b>	R	10 $\Omega$
	L	0.01 mH
	C	10 $\mu\text{F}$
<b>Impédance branche inférieure</b>	R	10 $\Omega$
	L	0.01 mH
	C	10 $\mu\text{F}$

Tableau 4.4 Paramètres algorithmiques du test de comparaison avec ATP-EMTP pour le circuit en quadripôles chaînables

<b>Température initiale</b>	1
<b>Schéma de refroidissement</b>	Géométrique
<b>Initialisation</b>	$V^{(0)}$ limité
<b>Facteur d'ajustement <math>k</math></b>	$10^{-4}$
<b>Variation maximale du courant <math>\Delta_{MAX}</math></b>	500 A

Les figures 4-5 et 4-6 permettent une appréciation visuelle des différences entre la méthode fréquentielle de compensation et la méthode temporelle de compensation d'ATP-EMTP, pour les courants et tensions qui s'appliquent aux parafoudres lors du passage de l'onde de choc. L'erreur relative intégrée sur le temps de la méthode fréquentielle par rapport à la méthode temporelle est de 7.43% sur les courants et de 29.26% sur les tensions.

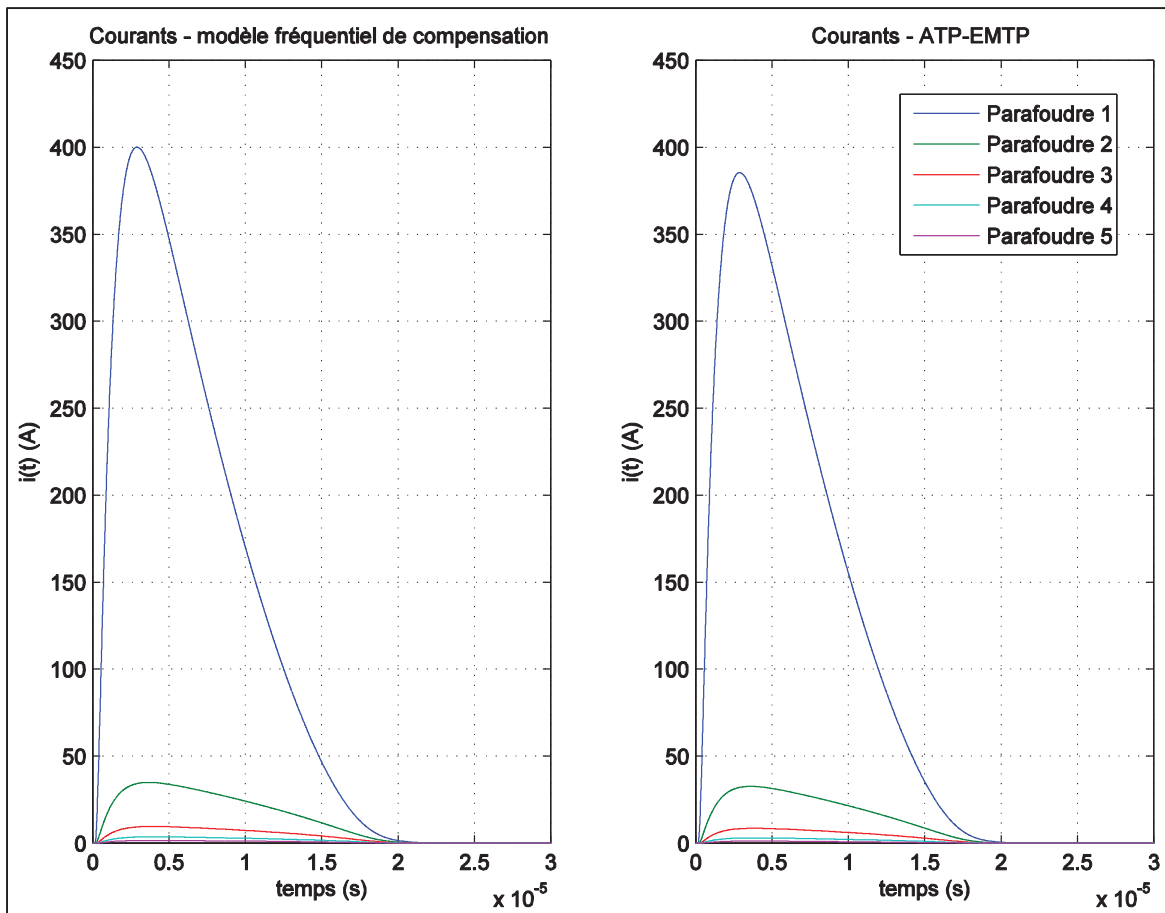


Figure 4-5 Courants à travers les parafoudres - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP

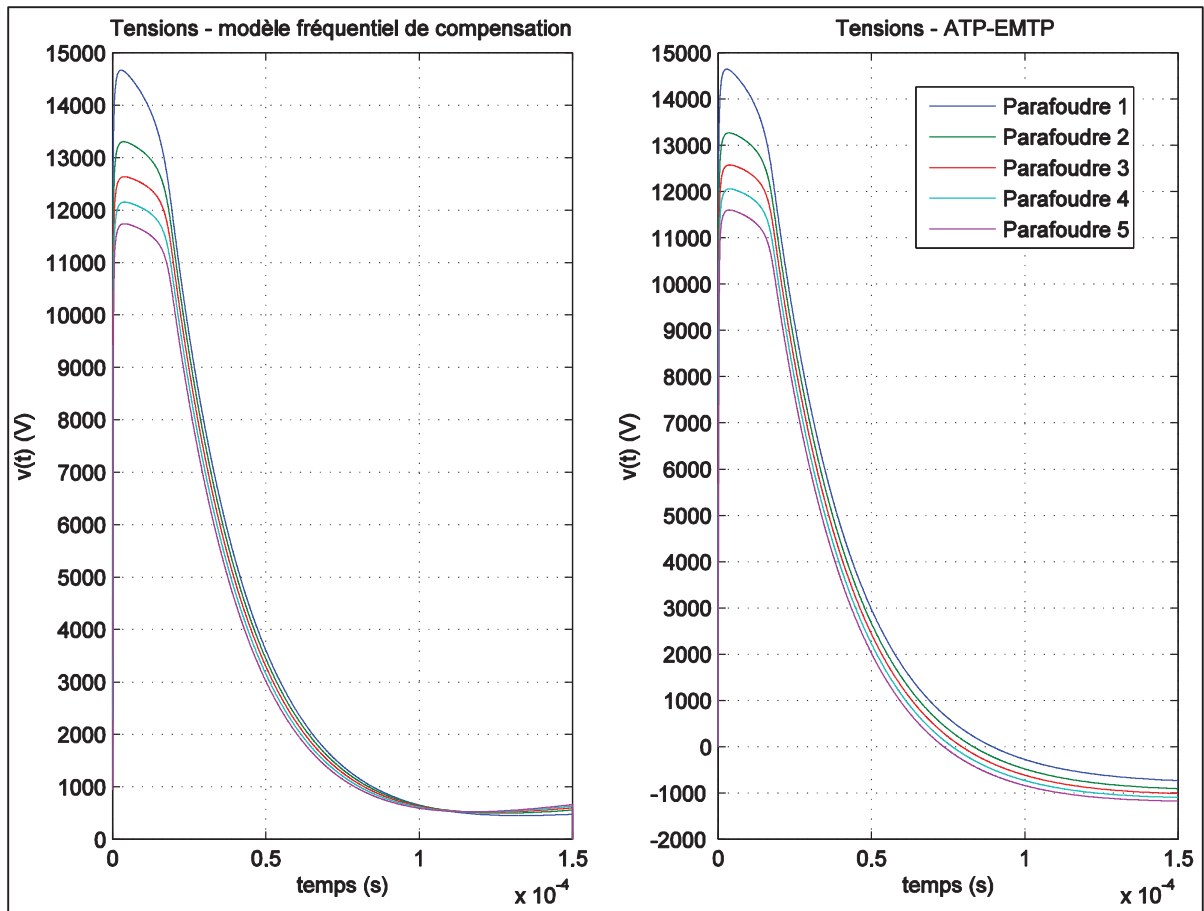


Figure 4-6 Tensions aux bornes des parafoudres - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP

L'erreur relative importante, notamment sur les tensions (figure 4-6), s'explique par le fait que le modèle par quadripôle chaînable, tel qu'implémenté par prototypage Matlab, ne tient pas compte des variations des capacitances et des inductances du circuit en fonction du temps; en d'autres termes, l'impédance est constante, contrairement à ATP-EMTP (*Electro-Magnetic Transients Program (EMTP) Theory Book, 1995*). Si on prend en compte ce désavantage en simulant cette fois un circuit purement résistif, soit avec  $L = 0$  et  $C = 0$  pour les branches inférieures et supérieures de chaque section, l'erreur relative entre MFC et MTC devient quasi-nulle, aussi bien sur les courants que sur les tensions (figures 4-7 et 4-8).

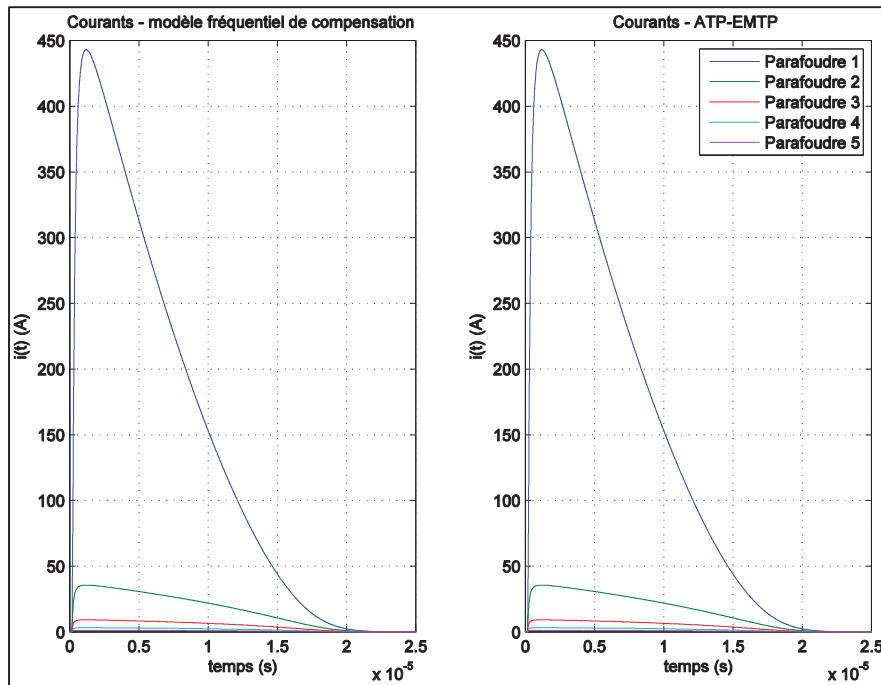


Figure 4-7 Courants à travers les parafoudres - circuit purement résistif - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP

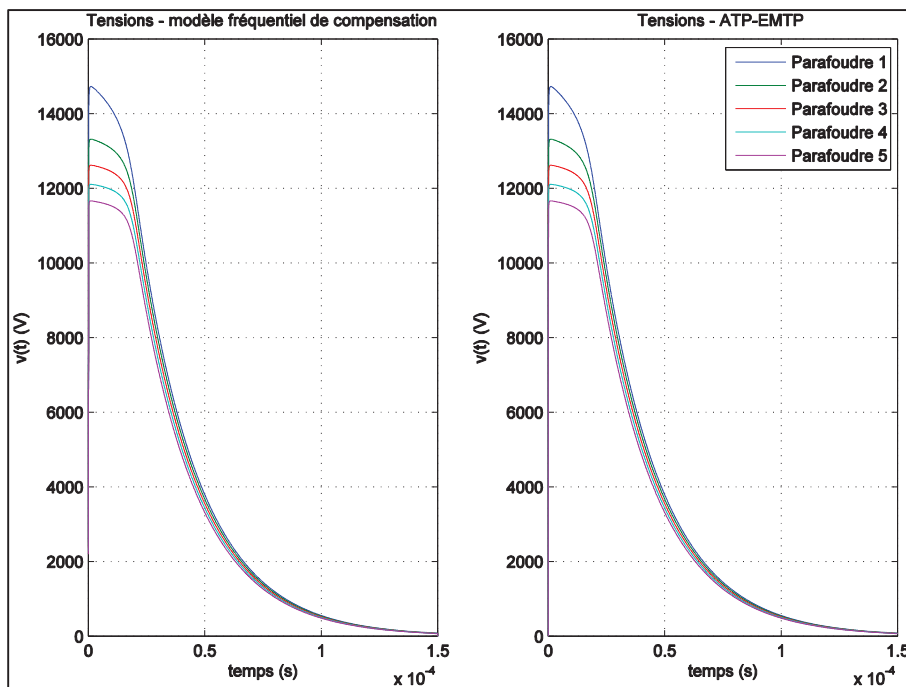


Figure 4-8 Tensions aux bornes des parafoudres - circuit purement résistif - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP



## 4.2 Essais de simulation d'une ligne de transmission réaliste

Dans le cadre des tests suivants, le système d'équations à résoudre par la MFC est monté à l'aide du logiciel HIFREQ<sup>®</sup>. Il s'agit d'un logiciel d'ingénierie développé par la compagnie SES, qui permet de résoudre des problèmes électromagnétiques complexes impliquant notamment des réseaux de conducteurs (qu'ils soient enterrés ou en surface), des transformateurs, des résistances, inductances et capacités regroupées. HIFREQ calcule le champ électromagnétique dans l'air et le sol et donne les potentiels et les distributions de courant dans les conducteurs et le sol. L'atout majeur de ce logiciel est d'être capable de résoudre autant des problèmes d'effets transitoires que des problèmes à l'équilibre, et ce, dans une gamme de fréquences allant de quelques Hz à plusieurs dizaines de MHz.

HIFREQ utilise la méthode des moments pour obtenir la distribution du courant dans les structures d'un réseau. Une fois le courant obtenu, les champs électromagnétiques et les potentiels sont calculés aux points d'observation par la résolution numérique des équations de Maxwell. Pour plus de détails à ce sujet, les bases théoriques du logiciel sont posées dans (Grcev et Dawalibi, 1990).

Le cas à l'étude dans cette section, issu de (Fortin et al., 2002), est une ligne de distribution de 24.94 kV. Une tranche contenant 7 pylônes est modélisée, la foudre frappant la phase C entre les pylônes 4 et 5 (figure 4-9). Les voltages aux bornes des parafoudres sont obtenus en calculant l'élévation du potentiel de terre sur le conducteur et le neutre avec HIFREQ.

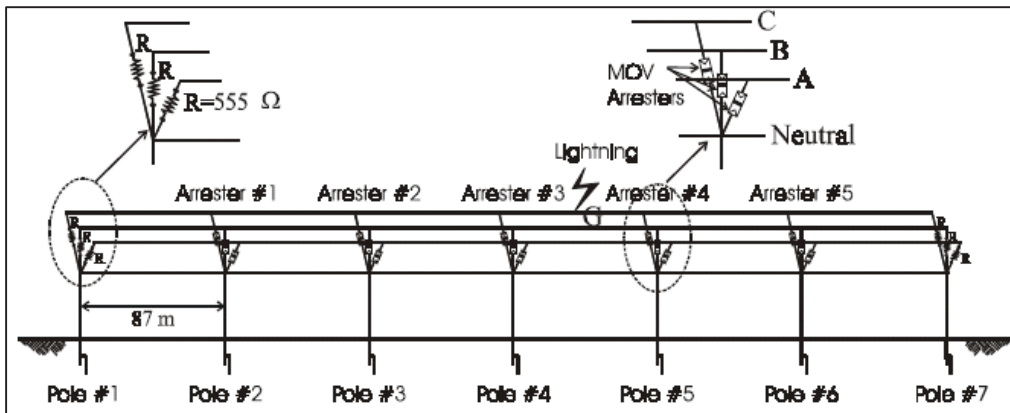


Figure 4-9 Tranche de 7 pylônes modélisée  
Tiré de Fortin et al. (2002)

#### 4.2.1 Résultats de convergence selon le coefficient de non-linéarité

L'objectif principal de la recherche présentée dans ce mémoire est l'amélioration de la méthode numérique de résolution des équations du modèle fréquentiel de compensation proposée par (Fortin et al., 2002). Avec cette méthode, la convergence était particulièrement difficile à atteindre dès lors que le coefficient de non-linéarité atteignait des valeurs « réalistes », soit supérieures à 15, et requérait une intervention périodique de la part de l'utilisateur, pendant l'exécution du programme, pour ajuster le facteur  $\lambda$  de l'équation de récurrence (1.31). Le Recuit Simulé, par l'intermédiaire des équations (3.5) à (3.8), permet de s'affranchir de ces limitations.

Dans le test suivant, la foudre est caractérisée par une onde de choc de  $1,2/20 \mu\text{s}$ , avec un pic à 25 kA, modélisée par une fonction double-exponentielle; le point d'impact est situé sur la phase C à mi-chemin entre les pylônes 4 et 5 (figure 4-9). La durée de simulation est fixée à  $150 \mu\text{s}$ . Le parafoudre installé sur le circuit est une varistance à oxyde métallique modélisée suivant l'équation (1.26), avec  $i_s = 700 \text{ A}$  et  $v_s = 15.000 \text{ V}$ . Les tableaux 4.5 et 4.6 décrivent les paramètres de circuit et les paramètres algorithmiques, respectivement.

Tableau 4.5 Paramètres de circuit du test de convergence selon le coefficient de non-linéarité

<b>Modèle</b>	HIFREQ
<b>Nombre d'éléments non linéaires</b>	5
<b>Coefficient <math>\alpha</math></b>	5 à 35
<b>Temps de simulation (<math>\mu s</math>)</b>	150
<b>Nombre d'échantillons</b>	4096
<b>Modèle de choc</b>	Double-exponentielle 1,2/20 $\mu s$ , 25kA

Tableau 4.6 Paramètres algorithmiques du test de convergence selon le coefficient de non-linéarité

<b>Température initiale</b>	1
<b>Schéma de refroidissement</b>	Géométrique
<b>Initialisation</b>	$V^{(0)}$ limité
<b>Facteur d'ajustement <math>k</math></b>	$10^{-4}$
<b>Variation maximale du courant <math>\Delta_{MAX}</math></b>	500 A

La figure 4-10 ci-dessous présente les temps de calcul en fonction du coefficient de non-linéarité  $\alpha$ . 30 essais ont été effectués pour chaque valeur de  $\alpha$ . Nous constatons que la valeur du coefficient de non-linéarité ne semble pas avoir d'incidence sur le temps de calcul.

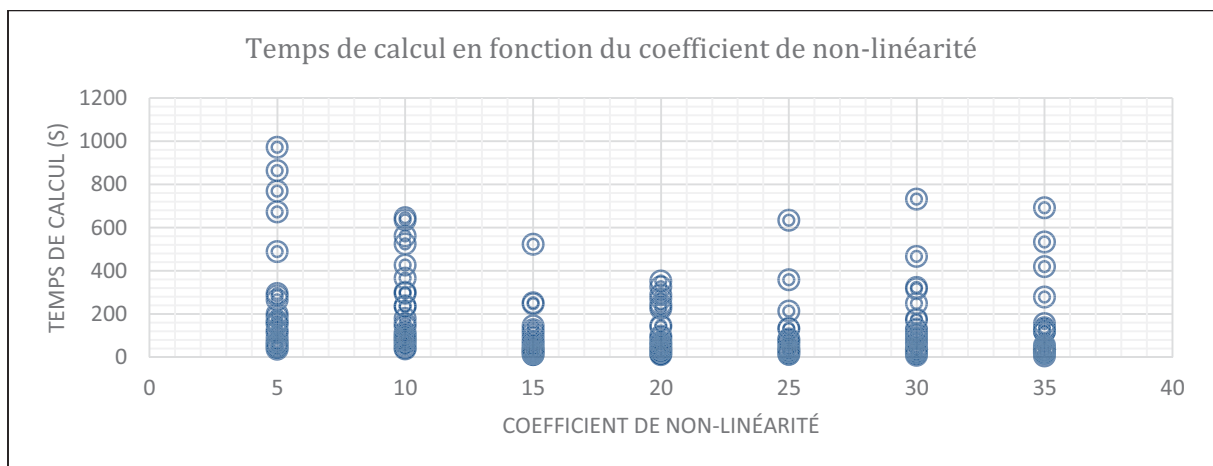


Figure 4-10 Temps de calcul en fonction du coefficient de non-linéarité - Modèle HIFREQ

Les résultats obtenus avec la résolution par Recuit Simulé sont visuellement très proches de ceux obtenus par (Fortin et al., 2002); les équations du modèle étant les mêmes, parvenir à un résultat semblable était attendu (figure 4-11); seule la méthode de résolution a été modifiée. Celle-ci permet toutefois d'atteindre des valeurs du coefficient de non-linéarité qui n'avaient pu être atteintes précédemment.

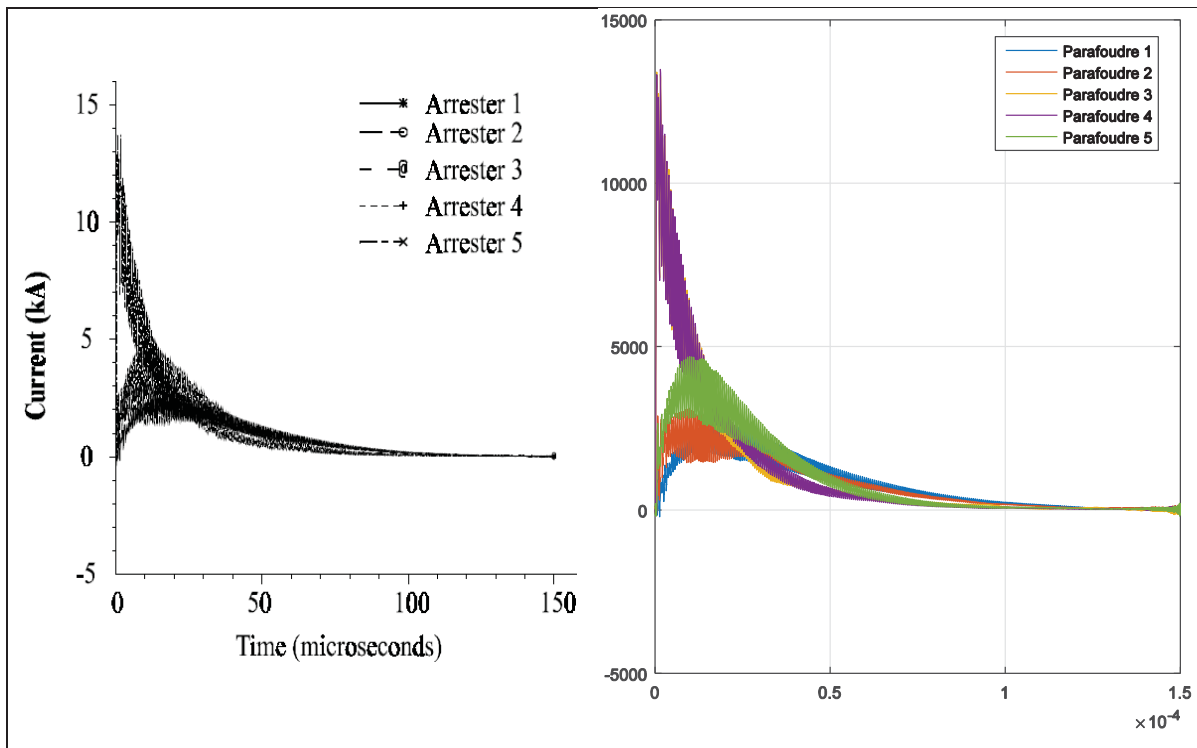


Figure 4-11 À gauche, résultat de (Fortin et al, 2002); à droite, résultat obtenu par Recuit Simulé ( $\alpha = 2$ )

### 4.3 Variation du paramètre algorithmique $k$

La fonction de récurrence (3.5) dépend des variables  $\lambda_V$  et  $\lambda_I$ , dont la valeur est calculée à chaque itération de l'algorithme selon la formule (3.8). La précision de l'exploration de l'espace de recherche est déterminée par le facteur  $k$ ; il s'agit donc d'un élément important, dont la valeur initiale pourrait avoir une grande influence sur la convergence. Nous faisons dans cette section varier cette valeur, et observons le comportement subséquent du Recuit Simulé en considérant la variation de l'erreur à chaque itération, pour différents modèles de choc.

#### 4.3.1 Modèle d'onde de choc de Heidler

Dans le test suivant, la foudre est caractérisée par une onde de choc de 4/24  $\mu\text{s}$ , avec un pic à 26.65 kA, modélisée par le modèle de Heidler; le système est celui de la figure 4-9. La durée de simulation est fixée à 150  $\mu\text{s}$ . Le parafoudre installé sur le circuit est une varistance à oxyde métallique modélisée suivant l'équation (1.26), avec  $i_s = 700 \text{ A}$  et  $v_s = 15.000 \text{ V}$ . Les tableaux 4.7 et 4.8 décrivent les paramètres de circuit et les paramètres algorithmiques, respectivement.

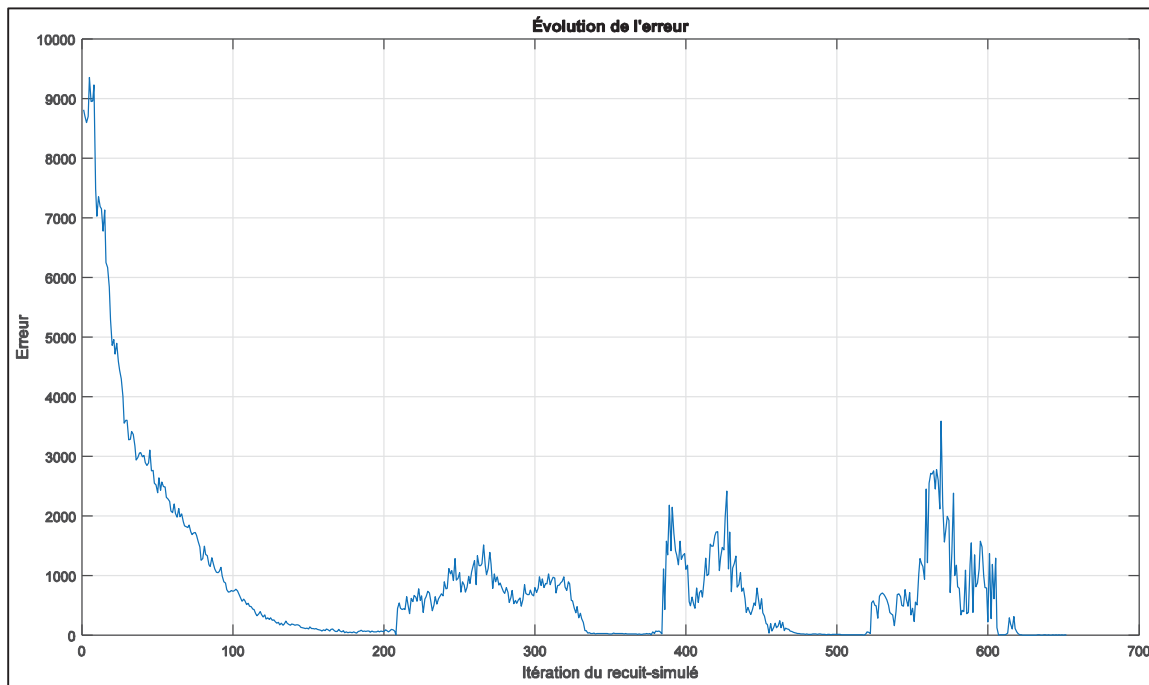
Tableau 4.7 Paramètres de circuit du test de variation du paramètre algorithmique  $k$

<b>Modèle</b>	HIFREQ
<b>Nombre d'éléments non linéaires</b>	5
<b>Coefficient <math>\alpha</math></b>	25
<b>Temps de simulation (<math>\mu\text{s}</math>)</b>	150
<b>Nombre d'échantillons</b>	512
<b>Modèle de choc</b>	Heidler 4/24 $\mu\text{s}$ , 26.65 kA

Tableau 4.8 Paramètres algorithmiques du test de variation du paramètre algorithmique  $k$ 

<b>Température initiale</b>	1
<b>Schéma de refroidissement</b>	Géométrique
<b>Initialisation</b>	$V^{(0)}$ limité
<b>Facteur d'ajustement <math>k</math></b>	De $10^{-2}$ à $10^{-5}$
<b>Variation maximale du courant <math>\Delta_{MAX}</math></b>	500 A

La figure 4-12 ci-dessous présente l'évolution de l'erreur pour  $k = 10^{-2}$ ; il s'agit d'une valeur élevée, qui permet une exploration assez large de l'espace de recherche dans le voisinage du point courant. 650 appels à la fonction génératrice ont été nécessaires pour atteindre une estimation de solution acceptable.

Figure 4-12 Évolution de l'erreur -  $k = 10^{-2}$  ( $\alpha = 25$ )

Une exploration plus minutieuse de l'espace de recherche, permise avec  $k = 10^{-3}$ , assure une descente plus régulière vers la solution, au détriment toutefois de la vitesse de convergence;

ainsi plus de 1450 appels à la fonction génératrice ont cette fois été requis dans l'exemple de la figure 4-13, et plus de 40.000 pour  $k = 10^{-5}$  (figure 4-14).

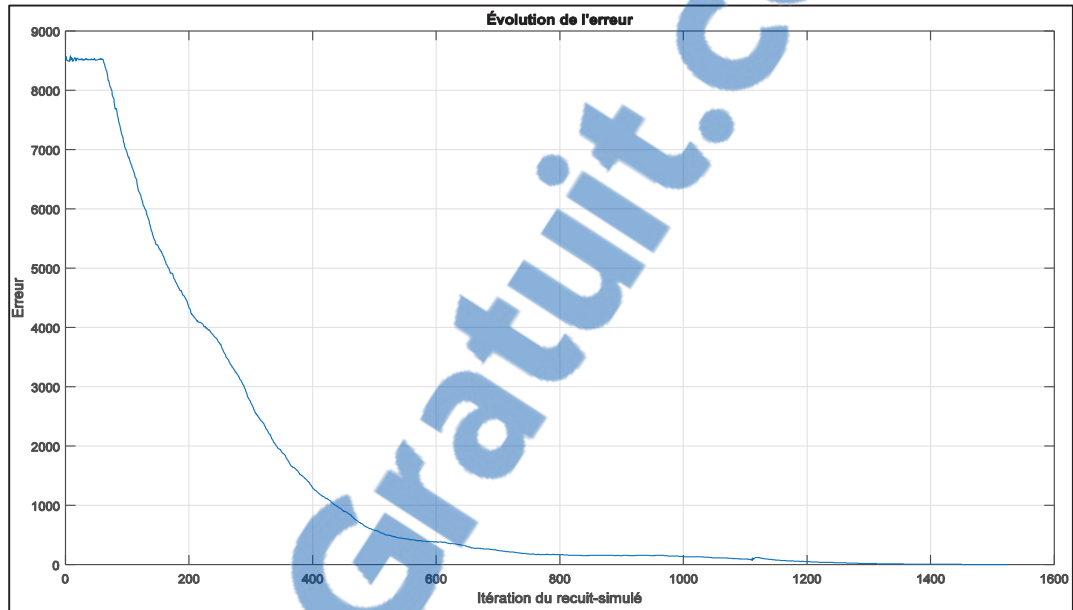


Figure 4-13 Évolution de l'erreur -  $k = 10^{-3}$  ( $\alpha = 25$ )

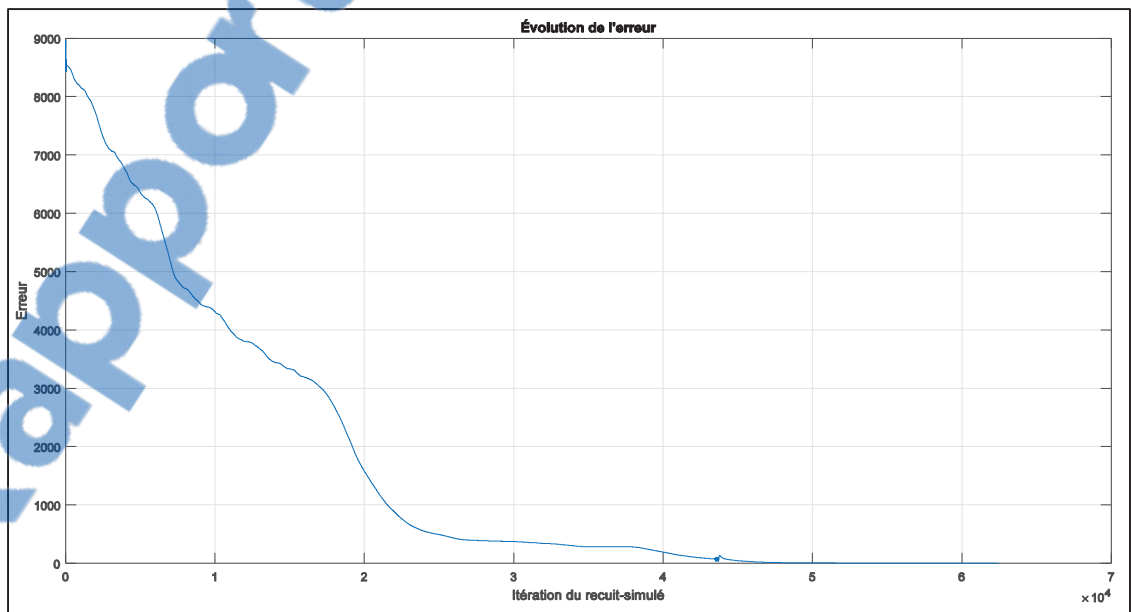


Figure 4-14 Évolution de l'erreur -  $k = 10^{-5}$  ( $\alpha = 25$ )

### 4.3.2 Modèle d'onde de choc en double exponentielle

Dans le test suivant, la foudre est caractérisée par une onde de choc de 1.2/20  $\mu\text{s}$ , avec un pic à 25 kA, modélisée par une fonction en double exponentielle; le système est celui de la figure 4-9. La durée de simulation est fixée à 150  $\mu\text{s}$ . Le parafoudre installé sur le circuit est une varistance à oxyde métallique modélisée suivant l'équation (1.26), avec  $i_s = 700 \text{ A}$  et  $v_s = 15.000 \text{ V}$ . Les tableaux 4.9 et 4.10 décrivent les paramètres de circuit et les paramètres algorithmiques, respectivement.

Tableau 4.9 Paramètres de circuit du test de variation du paramètre algorithmique k (onde de choc en double exponentielle)

<b>Modèle</b>	HIFREQ
<b>Nombre d'éléments non linéaires</b>	5
<b>Coefficient <math>\alpha</math></b>	25
<b>Temps de simulation (<math>\mu\text{s}</math>)</b>	150
<b>Nombre d'échantillons</b>	4096
<b>Modèle de choc</b>	Double-exponentielle 1,2/20 $\mu\text{s}$ , 25kA

Tableau 4.10 Paramètres algorithmiques du test de variation du paramètre algorithmique k (onde de choc en double exponentielle)

<b>Température initiale</b>	1
<b>Schéma de refroidissement</b>	Géométrique
<b>Initialisation</b>	$V^{(0)}$ limité
<b>Facteur d'ajustement <math>k</math></b>	$10^{-5}$
<b>Variation maximale du courant <math>\Delta_{MAX}</math></b>	500 A

L'onde de choc de 1.2/20  $\mu\text{s}$  est plus raide que celle de la section précédente; de plus, la dérivée de la fonction double exponentielle est non-nulle à  $t = 0$ ; cette discontinuité est susceptible d'ajouter des fréquences artificielles dans le spectre des signaux de courants et tensions des parafoudres, rendant le système plus difficile à résoudre. Nous testons ici



uniquement le cas  $k = 10^{-5}$ , cette valeur s'étant avérée dans la section précédente celle qui permettait une convergence quasi-monotone vers la solution. Malgré une valeur de  $k$  favorable à la convergence de l'algorithme, plusieurs minimums locaux semblent avoir été cette fois rencontrés, notamment lors des premières itérations (figure 4-15).

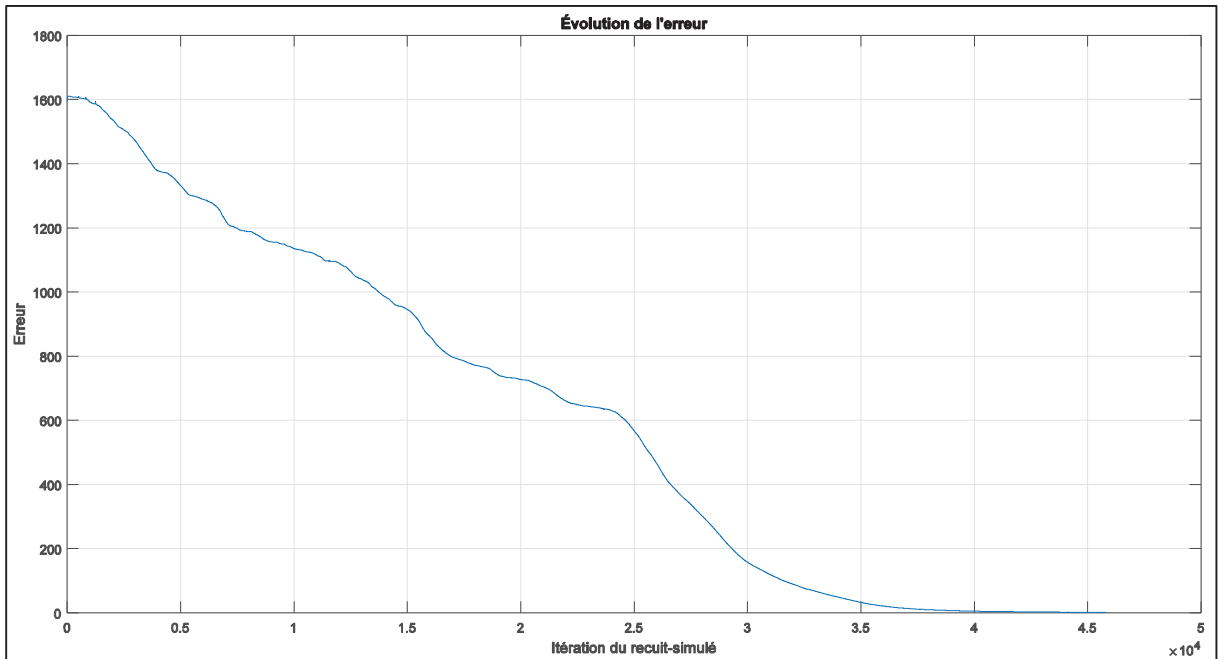


Figure 4-15 Évolution de l'erreur -  $k = 10^{-5}$  ( $\alpha = 25$ )

L'estimé initial semble ici relativement médiocre, l'algorithme étant contraint d'accepter des candidats de solution dégradant l'erreur sur les 100 premières itérations (figure 4-16).

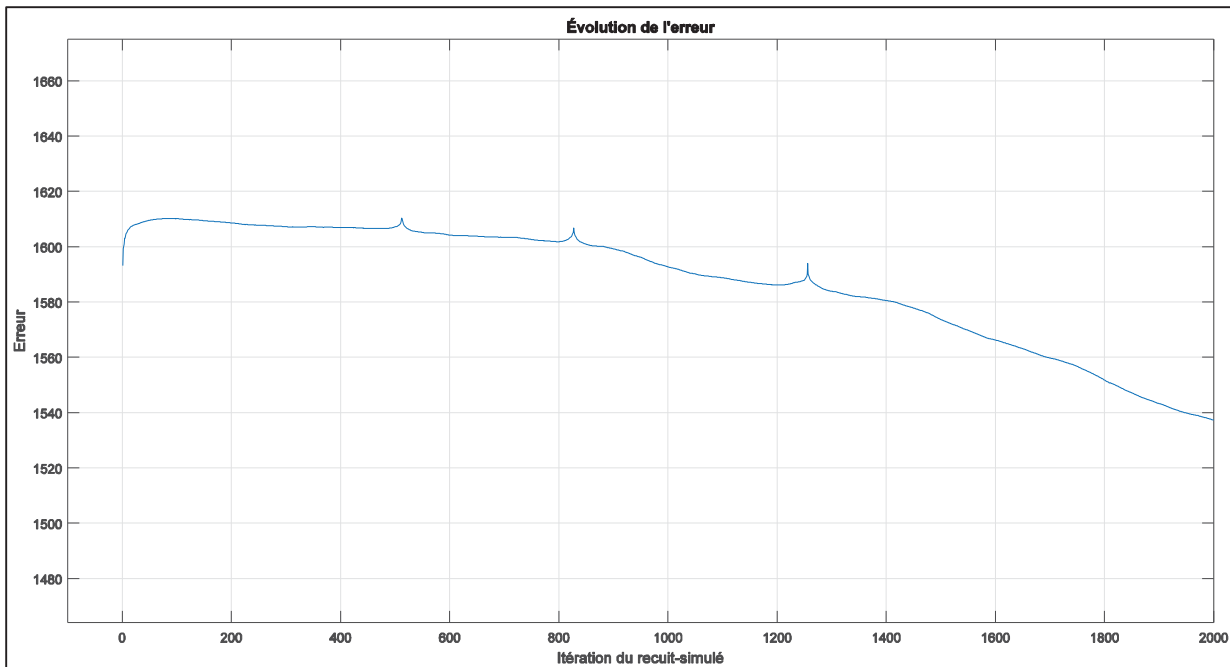


Figure 4-16 Évolution de l'erreur pour les 2000 premières itérations -  $k = 10^{-5}$  ( $\alpha = 25$ )

#### 4.4 Conclusion

Il s'agissait dans ce chapitre d'évaluer la méthode MFC-RS, sous différents aspects. Nous avons dans une première partie évalué la propriété d'extensibilité de l'algorithme en fonction du nombre d'éléments non linéaires ajoutés sur la ligne et en avons déduit une complexité en temps moyen qui se situe approximativement entre une complexité quadratique et cubique. La deuxième partie était dédiée à l'évaluation de la capacité de l'algorithme à converger pour des valeurs réalistes du coefficient de non-linéarité des parafoudres, à travers l'étude du cas présenté par (Fortin et al., 2002). Nous avons par la même occasion validé l'approche MFC-RS en reproduisant des résultats exactement identiques à ceux obtenus par les auteurs.

Dans la première partie, nous avons également comparé nos résultats acquis sur un modèle en quadripôles chaînables avec ceux obtenus en employant ATP-EMTP, un logiciel d'usage répandu dans l'industrie, pour un modèle similaire. Cette comparaison s'est révélée concluante, obtenant des résultats parfaitement identiques dans le cas d'un circuit purement résistif. Bien que l'idéal aurait été de comparer nos résultats avec des données réelles, cette

comparaison avec un logiciel largement accepté dans la communauté scientifique offre un point de repère important relativement à la validité de la MFC-RS.

Le chapitre suivant fait la même comparaison, mais cette fois pour la simulation du circuit réaliste présenté dans (Fortin et al., 2002). Les résultats obtenus seront à nouveau comparés avec ATP-EMTP, et feront cette fois également l'objet d'une interprétation physique. Nous discuterons dans ce chapitre de l'importance des paramètres algorithmiques de la MFC-RS, et aborderons enfin certaines pistes d'améliorations possibles.



## CHAPITRE 5

### INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES RÉSULTATS ET DISCUSSION

#### 5.1 Comparaison entre les méthodes de compensation temporelles et fréquentielles

Nous comparons ici les méthodes fréquentielles (MFC) et temporelles (MTC) de compensation, et évaluons leurs points de concordance et de divergence par une interprétation physique des solutions. Nous analysons notamment les phénomènes de réflexion et de dépendance en fréquence. ATP-EMTP est utilisé pour reproduire l'expérimentation réalisée dans le chapitre précédent, section 4.2.

Le modèle de circuit ATP-EMTP est présenté à la figure 5-1. Les lignes de transmission ont été modélisées par le modèle de Marti, un modèle prenant en compte les dépendances en fréquences des propriétés des conducteurs (notons ici que dans cette simulation ATP-EMTP, seules les lignes de transmission bénéficient d'un modèle dépendant en fréquence; il n'en va pas de même pour les pylônes et le système de mise à la terre). La gamme de fréquences du modèle s'étend de 0.01 Hz à 100 MHz.

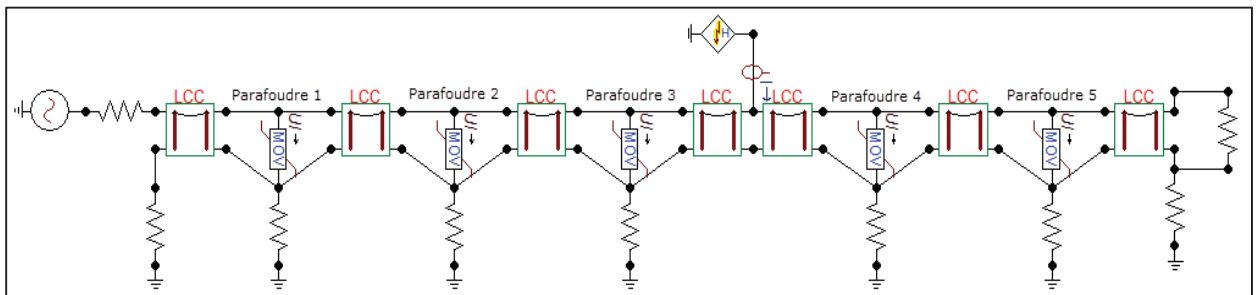


Figure 5-1 Tranche de 7 pylônes modélisée avec ATP-EMTP

La figure 5-2 ci-dessous présente les résultats des courants à travers les parafoudres, obtenus avec le modèle fréquentiel de compensation et ATP-EMTP. L'erreur relative intégrée sur le temps de la méthode fréquentielle par rapport à la méthode temporelle, sur les courants, est de 2.76%.

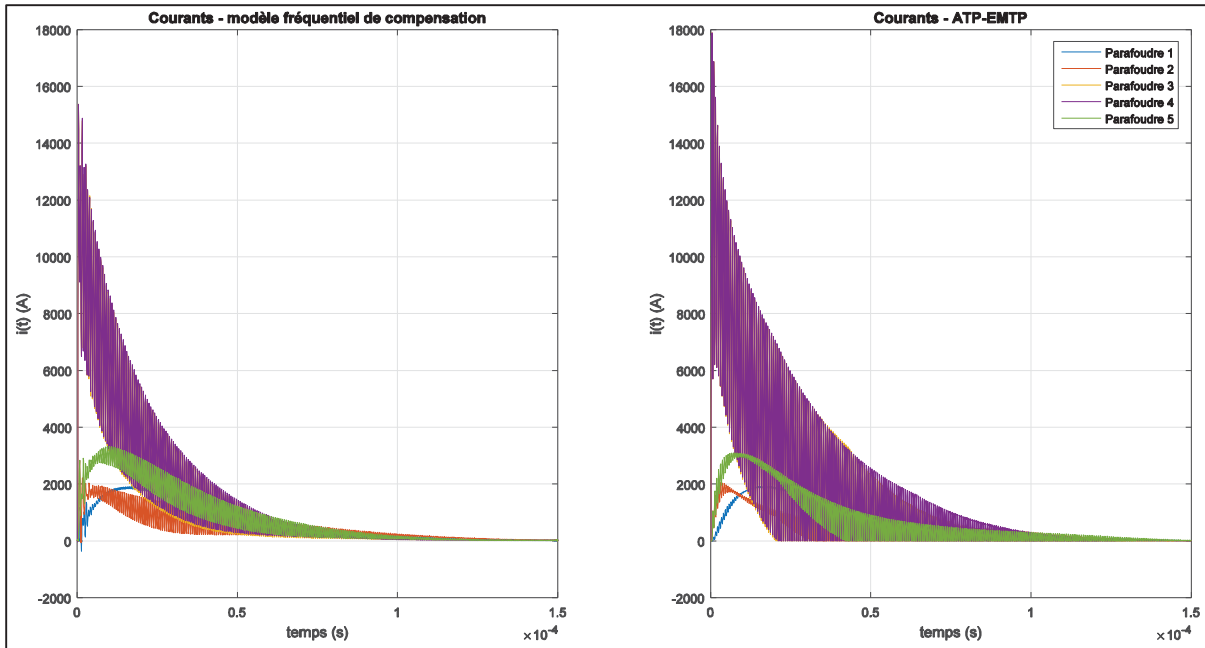


Figure 5-2 Courants à travers les parafoudres - comparaison entre le modèle fréquentiel de compensation - HIFREQ et ATP-EMTP ( $\alpha = 25$ )

### 5.1.1 Phénomène de réflexion

L'onde de choc provoquée par la foudre se propage à une vitesse proche de celle de la lumière, le long de la ligne de transmission. Des phénomènes de réflexion auront lieu partout où l'impédance de ligne varie, notamment au niveau des parafoudres, ceux-ci se comportant comme des isolants jusqu'à l'atteinte de la tension de flash.

Les signaux obtenus avec HIFREQ et ATP-EMTP présentent une fréquence d'oscillation similaire (figure 5-3) de 1.72 MHz, bien visible sur le spectre de la figure 5-4. Cette fréquence peut s'expliquer par un phénomène de résonance provoqué par la réflexion de l'onde de choc au niveau des parafoudres. On peut en effet retrouver cette valeur par calcul :

$$T = \frac{d}{c}$$

$$T = 2 \cdot \frac{87}{3 \cdot 10^8} = 5.8 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 1.72 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

avec  $d$  la distance aller-retour parcourue par l'onde (onde directe et réfléchie) sur une section de la ligne de transmission modélisée, soit  $2 \cdot 87 \text{ m}$  (figure 4-10);  $c$  la vitesse de la lumière,  $T$  la période, et  $f$  la fréquence correspondante.

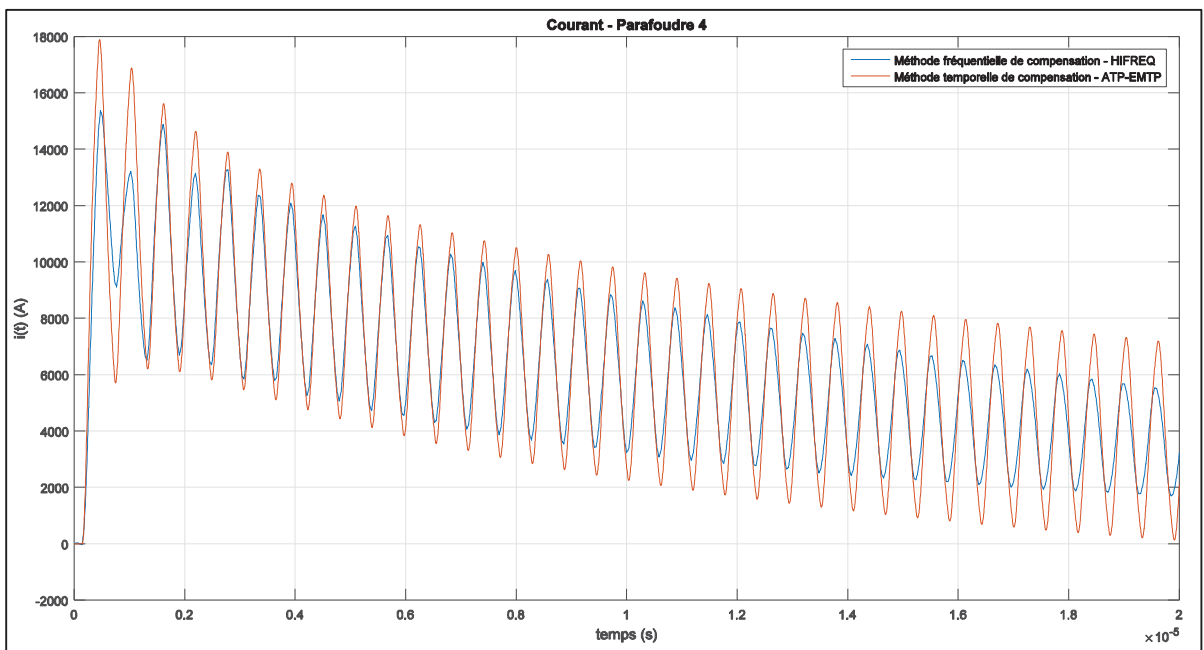


Figure 5-3 Phénomène de réflexion apparent sur les résultats des modèles temporels et fréquentiels (parafoudre 4,  $\alpha = 25$ )

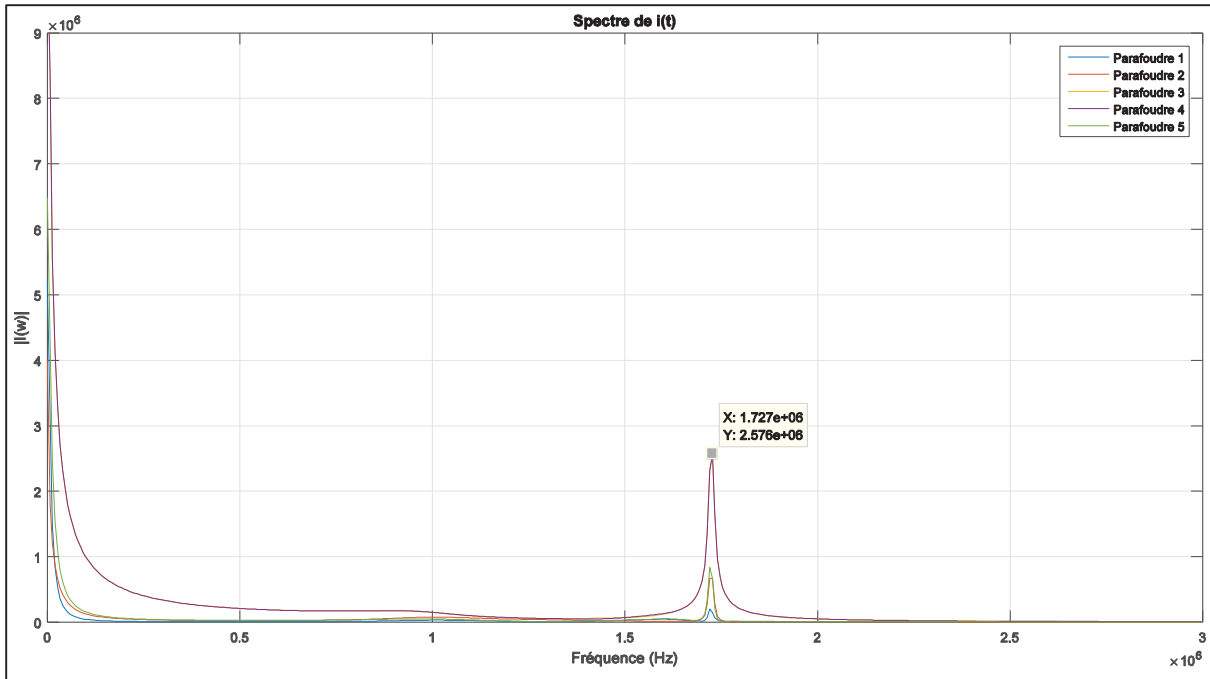


Figure 5-4 Spectre des amplitudes des courants à travers les parafoudres (Modèle HIFREQ –  $\alpha = 25$ )

### 5.1.2 Dépendances en fréquence

L'une des hypothèses possibles pour expliquer les différences entre les résultats obtenus avec la méthode fréquentielle de compensation et la méthode temporelle est la capacité de la méthode fréquentielle à prendre en compte les dépendances en fréquence du circuit, ce qui est plus difficile à réaliser avec les méthodes temporelles. Ainsi, l'impédance des pylônes dans ATP-EMTP a été définie à la valeur constante de  $24 \Omega$ , ce logiciel ne possédant pas de modèle dédié capable de représenter les structures de mise à la terre pour une large gamme de fréquences, contrairement à HIFREQ.

La figure 5-5 ci-dessous montre la variation de la résistance et de la réactance du pylône, en fonction de la fréquence. Pour des très basses fréquences, l'impédance du pylône est identique à celle utilisée dans ATP-EMTP; cependant pour des fréquences plus élevées les différences sont plus prononcées. La fréquence de résonance à 1.72 MHz étudiée à la section précédente est notamment une fréquence importante à prendre en considération. À cette fréquence,



l'amplitude des oscillations est fortement dépendante du coefficient de réflexion aux parafoudres, qui est déterminée par l'impédance du pylône si l'on présume que l'impédance des parafoudres eux-mêmes est négligeable au passage de l'onde de choc. En analysant les courbes d'impédance du pylône, à la fréquence de résonance de 1.72 MHz, on trouve une résistance de  $84.4 \Omega$  pour une réactance de  $261j \Omega$ , très éloigné de l'impédance de pylône d'ATP-EMTP ( $24 \Omega$ ). Des observations similaires pourraient être faites pour tous les composants du circuit, démontrant le manque de précision potentiel des méthodes dans le domaine du temps, comparées aux méthodes fréquentielles.

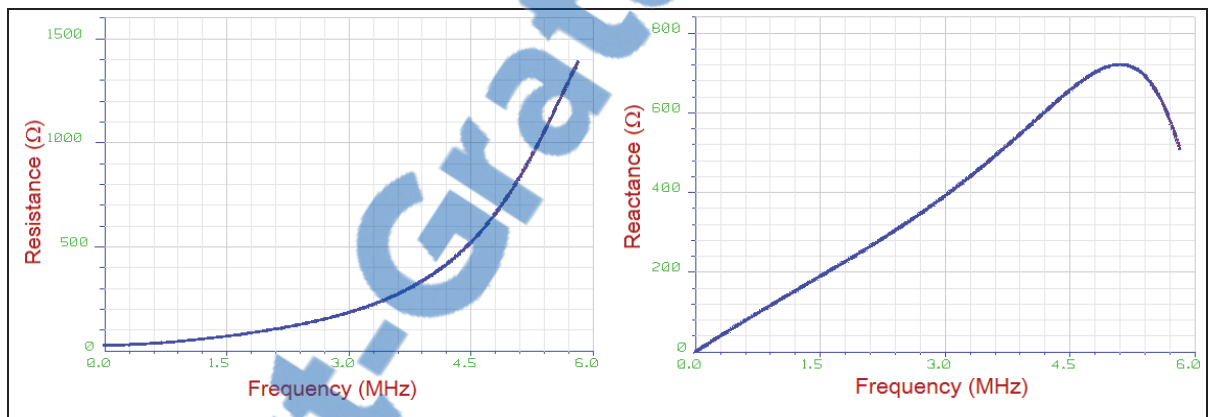


Figure 5-5 Impédance du pylône : résistance (à gauche) et réactance (à droite) en fonction de la fréquence, calculées avec HIFREQ

## 5.2 Discussion

### 5.2.1 Paramètres algorithmiques : température et schéma de refroidissement

La température initiale  $\tau_0$  de l'algorithme RS ne devrait habituellement pas être supérieure à 1; des valeurs plus grandes augmentent la probabilité d'accepter des candidats de solution dégradant fortement le niveau d'erreur, utilisant de la puissance de calcul en pure perte. Au contraire, un choix de température trop faible pourrait limiter l'algorithme à une région sous-optimale de l'espace de recherche. Il n'existe pas de règle établie pour définir adéquatement la valeur initiale de la température; dans le cas de la minimisation de la fonction de coût 3.9, afin de résoudre le système d'équations conçu par (Fortin et al., 2002), la production d'un plus

grand nombre de résultats expérimentaux devrait pouvoir mener à une définition empirique d'une gamme adéquate de valeurs de températures initiales.

### **5.2.2 Paramètres algorithmiques : facteur $k$**

La précision de l'exploration de l'espace de recherche est déterminée par le facteur  $k$ ; il s'agit d'un paramètre important, tel que l'ont démontré les essais de variation de sa valeur réalisés dans le chapitre 4. La valeur de  $k$  peut en effet avoir une grande influence sur la convergence. Nous constatons cependant, dans les expérimentations réalisées à ce jour, qu'une valeur de  $10^{-3}$  est favorable à une bonne convergence de la méthode RS, dans la plupart des cas. Une valeur supérieure peut toutefois se révéler souhaitable lorsque le signal transitoire possède un front montant très rapide et est modélisé par une fonction en double exponentielle.

### **5.2.3 Implémentation de la méthode et améliorations**

Les résultats de performance et d'extensibilité de l'algorithme RS, présentés au chapitre 4, ont été obtenus via une implémentation prototypale de la méthode, en langage Matlab. L'optimisation du code en tant que tel n'a pas été une priorité lors de l'implémentation de l'algorithme, celui-ci étant appelé à être porté en FORTRAN dans les mois à venir, suivant la publication de ce mémoire. La réalisation du code en FORTRAN pourrait permettre à la méthode MFC-RS de rivaliser avec les méthodes actuelles de résolution de circuit contenant des éléments non linéaires; nous nous attendons en effet à ce qu'un code optimisé produise de meilleurs résultats, en termes de temps de convergence.

La méthode pourrait également être parallélisée, chaque fil d'exécution pouvant se charger de la résolution de l'équation correspondant à un élément non linéaire donné. Enfin, les larges matrices du système pourraient se prêter efficacement à un traitement par GPU.

### 5.2.4 Méthodes numériques de résolution alternatives

Dans le cas d'une onde de choc définie par le modèle de Heidler, la régularité quasi-monotone de la descente de l'erreur en fonction de l'itération pour des valeurs du facteur  $k$  de l'ordre de  $10^{-4}$  semble indiquer, dans les expériences réalisées, que l'espace de recherche est localement convexe dans le voisinage de l'estimé initial, et que l'estimé est suffisamment précis afin de permettre à l'algorithme de converger vers une solution approchée satisfaisante. La force de la méthode de résolution par Recuit Simulé résiderait alors, *au minimum*, dans le fait que la convergence ne serait pas nécessairement dépendante d'un ajustement précis de paramètres algorithmes pouvant paraître ésotériques à l'ingénieur électricien utilisateur de la méthode, l'algorithme RS faisant preuve d'une bonne tolérance face à des paramètres mal ajustés.

Le cas de l'onde de choc définie par une fonction double-exponentielle nous paraît plus problématique. L'estimé initiale, en particulier, semble relativement médiocre, l'algorithme étant contraint d'accepter des candidats de solution dégradant l'erreur sur les 100 premières itérations, *justifiant alors pleinement l'emploi de méthodes de résolution globales* tel que le Recuit Simulé (figure 5-6).

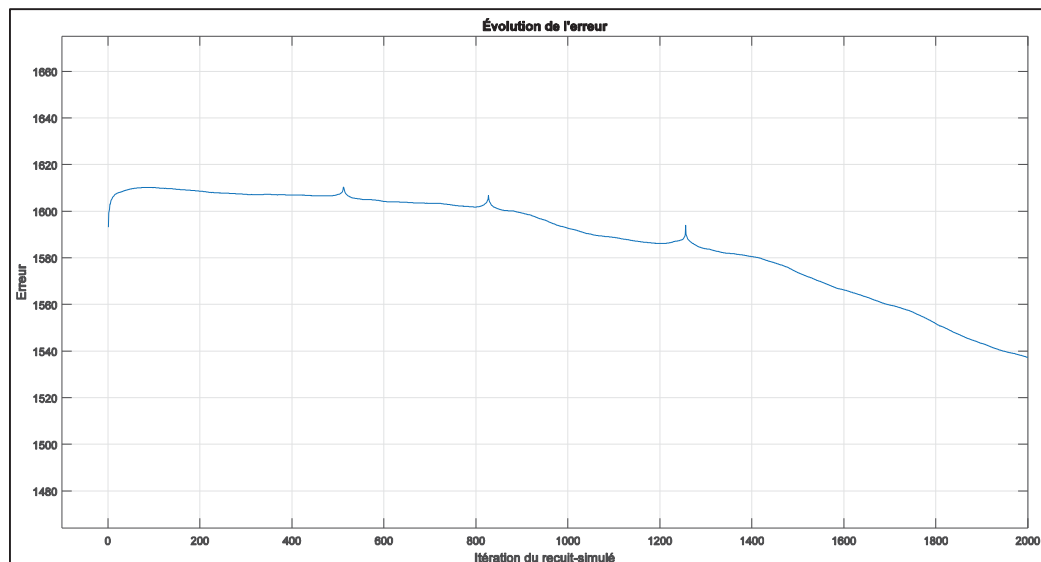


Figure 5-6 Mise en évidence de la non-convexité de l'espace de recherche pour une onde de choc en double-exponentielle

Le Recuit Simulé, bien que global, est néanmoins dépendant d'une équation de récurrence pouvant s'avérer inadéquate dans sa formulation même. Il pourrait alors être plus avantageux, en considérant l'aspect relativement régulier de l'espace de recherche et les bonnes performances de ces méthodes (y compris pour de larges systèmes), d'employer une méthode de Newton sans dérivée et généralisée, soit une méthode de Quasi-Newton ou la méthode de Newton-Krylov, généralisée par la méthode de recherche en ligne ou par celle des intervalles de confiance (Knoll et Keyes, 2004).

### **5.3 Conclusion**

Nous avons comparé dans ce chapitre les méthodes fréquentielles (MFC-RS) et temporelles (MTC) de compensation. Par l'intermédiaire d'une interprétation physique de leurs solutions, nous avons montré les différences entre les deux approches. Ainsi, les phénomènes de réflexion et de dépendance en fréquences des propriétés des conducteurs mettent en évidence l'intérêt de la méthode MFC-RS pour la simulation de circuits non linéaires, celle-ci prenant intégralement en compte la dépendance en fréquences.

Nous avons ensuite discuté de l'importance de certains paramètres algorithmiques de la MFC-RS, et exploré certaines pistes d'améliorations possibles; bien que l'algorithme RS n'ait pas nécessité de réglages fins et très différents suivant les cas de circuit à résoudre (démontrant une bonne robustesse de l'algorithme et l'intérêt des approches stochastiques), tester ces améliorations nous paraît cependant nécessaire, afin notamment de réduire la complexité en temps moyen de l'algorithme. L'algorithme RS pourrait aussi être remplacé par un algorithme de Newton généralisé et sans dérivées tel que Newton-Krylov.

## CONCLUSION

L'analyse transitoire d'un circuit contenant des parafoudres est habituellement réalisée dans le domaine temporel, les parafoudres étant le plus souvent représentés via des fonctions linéaires par morceaux. Les dépendances en fréquence des éléments du circuit (résistances, inductances, impédances de pylônes, impédances des systèmes de mise à la terre, etc.) doivent toutefois être obtenues par d'autres méthodes; des approximations sont alors nécessaires dans le calcul des impédances équivalentes du circuit.

(Fortin et al., 2002) ont mis au point une approche alternative, où l'étude de la performance des parafoudres et la résolution du circuit sont effectués dans le domaine fréquentiel. Les réponses du circuit incluant les parafoudres sont calculées, puis la tension et le courant à travers les parafoudres dans le domaine temporel sont obtenus en utilisant la transformée de Fourier inverse. Cette approche a l'avantage de permettre une totale prise en compte des dépendances en fréquence des conducteurs.

Le but du travail présenté dans ce mémoire était de proposer une méthode de résolution numérique alternative, permettant de résoudre efficacement le système d'équations non linéaires conçu par (Fortin et al., 2002). Le problème est transformé en un problème d'optimisation globale, en formulant une fonction objectif à partir du système à résoudre; les minimums globaux de cette fonction sont alors également des solutions du système d'origine. La tâche d'optimisation globale est réalisée par la méthode stochastique du Recuit Simulé.

La Méthode Fréquentielle de Compensation, résolue par Recuit Simulé (MFC-RS), a été mise en œuvre et comparée à une méthode dans le domaine temporel (la Méthode Temporelle de Compensation), via l'usage d'un logiciel largement accepté dans l'industrie, à savoir ATP-EMTP. La comparaison des résultats obtenus avec les deux méthodes sur un modèle de ligne de transmission réaliste indiquent que les réponses de la méthode proposée correspondent au comportement général de celles de l'outil dans le domaine temporel, et sont explicables d'un point de vue physique. Bien sûr, la prochaine étape de validation devrait consister à acquérir

des données réelles et à les comparer aux résultats de notre approche, pour un système identique.

Il est prévu d'affiner et d'améliorer dans les mois et années à venir la méthode présentée dans ce mémoire, autant du point de vue algorithmique que de celui de l'implémentation. La méthode de résolution par Recuit Simulé représente une étape importante, base d'un travail plus approfondi sur les méthodes numériques de résolution applicables, devant mener, à terme, vers la solution optimale de circuits comprenant des éléments non linéaires suivant l'approche fréquentielle de compensation, un objectif qui demeure ambitieux.

## ANNEXE I

### ALGORITHME DE METROPOLIS-HASTINGS

Issu de la mécanique statistique, l'algorithme de Metropolis-Hastings permet d'obtenir une séquence d'échantillons aléatoires d'une distribution de probabilité pour laquelle un échantillonnage direct est difficile à obtenir.

Soit  $f(x)$  la densité de probabilité cible,  $x^{(j)}$  la valeur à l'itération  $j$ ,  $N$  une constante définissant le nombre maximal d'itérations, et  $q(x|x^{(j)})$  une proposition de distribution. L'algorithme de Metropolis-Hastings s'énonce comme suit:

#### Algorithme de Metropolis-Hastings

1. Initialiser  $x^{(0)}$
2. De  $j = 0$  à  $N - 1$ 
  - Obtenir l'échantillon  $u \sim U_{[0,1]}$
  - Obtenir l'échantillon  $x^* \sim q(x|x^{(j)})$
  - Si  $u < \rho(x^{(j)}, x^*) = \min \left\{ 1, \frac{f(x^*)}{f(x^{(j)})} \frac{q(x^{(j)}|x^*)}{q(x^*|x^{(j)})} \right\}$ , alors :
    - $x^{(j+1)} = x^*$
  - Sinon :
    - $x^{(j+1)} = x^{(j)}$





## LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bélisle, Claude J. P. 1992. « Convergence Theorems for a Class of Simulated Annealing Algorithms on  $\mathbb{R}^d$  ». *Journal of Applied Probability*, vol. 29, n° 4, p. 885-895.
- Bohachevsky, I. O., M. E. Johnson et M. L. Stein. 1986. « Generalized Simulated Annealing for Function Optimization ». *Technometrics*, vol. 28, n° 3, p. 209-217.
- Boyd, S., et L. O. Chua. 1985. « Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series ». *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 32, n° 11, p. 1150-1161.
- CEI. 2014. *CEI 60099 Parafoudres, 2<sup>nd</sup> Edition*, Commission Electrotechnique Internationale.
- Cerny, V. 1985. « Thermodynamical Approach to the Traveling Salesman Problem: An Efficient Simulation Algorithm ». *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, n° 1, p. 41-51.
- Chung-Wen, Ho, Albert E. Ruehli et Pierce A. Brennan. 1975. « The modified nodal approach to network analysis ». *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 22, n° 6, p. 504-509.
- Corana, Angelo, M. Marchesi, C. Martini et S. Ridella. 1987. « Minimizing Multimodal Functions of Continuous Variables with the "Simulated Annealing" Algorithm ». *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 13, n° 3, p. 262-280.
- Diaz, Hernando, et Alan A. Desrochers. 1988. « Modeling of nonlinear discrete-time systems from input-output data ». *Automatica*, vol. 24, n° 5, p. 629-641.
- Dommel, H. W. 1971. « Nonlinear and Time-Varying Elements in Digital Simulation of Electromagnetic Transients ». *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, vol. PAS-90, n° 6, p. 2561-2567.
- Eisenstat, Stanley C., et Homer F. Walker. 1996. « Choosing the Forcing Terms in an Inexact Newton Method ». *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 17, n° 1, p. 16-32.
- Electric Power Research Institute. 2006. *Outline of Guide for Application of Transmission Line Surge Arresters—42 to 765 kV: Extended Outline*. EPRI, Palo Alto, CA.
- Electro-Magnetic Transients Program (EMTP) Theory Book*. 1995. Bonneville Power Administration.

- Environnement et Changement climatique Canada. 2014. « Cartes et statistiques de la foudre au Canada (1999-2013) ». < <https://www.ec.gc.ca/foudre-lightning/default.asp?lang=Fr&n=C4E86962-1> >. Consulté le 7 novembre 2016.
- Fortin, Simon, Winston Ruan, Farid Paul Dawalibi et Jinxi Ma. 2002. « Optimum and Economical Deployment Method of Surge Arresters on Distribution Lines for Insulation Failure due to Lightning - An Electromagnetic Field Computation Analysis ». In *SES Users Group Conference*. (Los Angeles, California, USA), sous la dir. de SES Technologies.
- Geman, Stuart, et Donald Geman. 1984. « Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, n° 6, p. 721-741.
- Glover, J. Duncan Duncan, et Mulukutla S. Sarma. 2001. *Power System Analysis and Design*. Brooks/Cole Publishing Co., 608 p.
- Grcev, L., et F. Dawalibi. 1990. « An electromagnetic model for transients in grounding systems ». *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 5, n° 4, p. 1773-1781.
- Heidler, F., et J. Cvetic. 2002. « A Class of Analytical Functions to Study the Lightning Effects Associated With the Current Front ». *European Transactions on Electrical Power*, vol. 12, n° 2, p. 141-150.
- Higham, N.J., et M.R. Dennis. 2015. *Princeton Companion to Applied Mathematics*. Princeton University Press.
- Kirkpatrick, S., C. D. Gelatt et M. P. Vecchi. 1983. « Optimization by Simulated Annealing ». *Science*, vol. 220, n° 4598, p. 671-680.
- Knoll, Dana A., et David E. Keyes. 2004. « Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications ». *Journal of Computational Physics*, vol. 193, n° 2, p. 357-397.
- Koval, D. O. 1994. « Frequency of transmission line outages in Canada ». In *Industry Applications Society Annual Meeting, 1994., Conference Record of the 1994 IEEE*. (2-6 Oct 1994), p. 2201-2208 vol.3.
- Metropolis, N., A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller et E. Teller. 1953. « Equation of State Calculations by Fast Computing Machines ». *The Journal of Chemical Physics*, vol. 21, n° 6, p. 1087-1092.
- Metropolis, Nicholas, et S. Ulam. 1949. « The Monte Carlo Method ». *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, n° 247, p. 335-341.

- Mills, Brian, Daniel Unrau, Laurel Pentelow et Kelsey Spring. 2009. *Flash Back: a Review of Lightning-Related Damage and Disruption Literature*. Coll. « Occasional Paper »: Environnement Canada.
- Nastov, Ognen J. 1999. « Spectral Methods for Circuit Analysis ». Massachusetts Institute of Technology.
- Nastov, Ognen J., et Jacob K. White. 1999. « Time-Mapped Harmonic Balance ». In *Proceedings of the 36th annual ACM/IEEE Design Automation Conference*. (New Orleans, Louisiana, USA), p. 641-646. ACM.
- Press, William H., Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling et Brian P. Flannery. 2007. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1256 p.
- Price, Colin. 2009. « Thunderstorms, Lightning and Climate Change ». In *Lightning: Principles, Instruments and Applications: Review of Modern Lightning Research*, sous la dir. de Betz, Hans Dieter, Ulrich Schumann et Pierre Laroche. Price2009. p. 521-535. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Ramirez, Abner. 2009. « Frequency-Domain Computation of Steady and Dynamic States Including Nonlinear Elements ». *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 24, n° 3, p. 1609-1615.
- Sauer, Timothy. 2006. *Numerical Analysis*. Boston, MA: Addison-Wesley.
- Schetzen, Martin. 1980. *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. Wiley.
- Schetzen, Martin. 1985. « Multilinear Theory of Nonlinear Networks ». *Journal of the Franklin Institute*, vol. 320, n° 5, p. 221-247.
- Schetzen, Martin. 2000. « Retrospective of Vito Volterra and his influence on Nonlinear System Theory ». In *Volterra Equations and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers.
- Schulz, Steffen. 2003. *Four lectures on differential-algebraic equations*. The University of Auckland.
- Smirnov, Georgi V., et Vera Sá. 2009. « On the linear convergence of Newton–Krylov methods ». *Optimization Methods and Software*, vol. 24, n° 2, p. 271-283.
- Tinney, W. F. 1972. « Compensation Methods for Network Solutions by Optimally Ordered Triangular Factorization ». *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-91, n° 1, p. 123-127.

Ushida, A., et L. O. Chua. 1993. « Transient analysis of nonlinear transmission lines by hybrid harmonic balance method ». In *Circuits and Systems, 1993., ISCAS '93, 1993 IEEE International Symposium on.* (3-6 May 1993), p. 2636-2639 vol.4.

Volterra, Vito. 1959. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations.* Mineola, New York.

Wiener, Norbert. 1958. *Nonlinear Problems in Random Theory.* Technology Press of Massachusetts Institute of Technology.



