

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Résumé</b>	i
<b>Abstract</b>	ii
<b>Remerciements</b>	iii
<b>Dédicaces</b>	iv
<b>Table des matières</b>	v
<b>Liste des tableaux</b>	xi
<b>Liste des figures</b>	xii
<b>Chapitre I- Introduction générale</b>	
1. Quelques travaux existants	2
2. Objectif et méthodologie	8
3. Structure du mémoire	10
<b>Chapitre II- Notions de base sur les lignes de production série</b>	
1. Lignes de production	12
1.1. Types de lignes de production	12
1.2. Indicateurs de performances	13
1.3. Propriétés des lignes de production et hypothèses générales	14

1.3.1. Caractéristiques d'une machine en isolation	14
1.3.2. Hypothèses de travail associées à une ligne de production	16
2. Les stocks intermédiaires	18
2.1. Utilisation des stocks intermédiaires dans les lignes de production	18
2.2. Stocks intermédiaires et accroissement de la productivité	20
3. Principaux modèles de lignes de production	21
3.1. Le modèle de référence	22
3.2. Le modèle déterministe	23
3.3. Le modèle exponentiel	24
3.4. Le modèle continu	24
3.5. Caractéristiques des différents modèles	24
4. Évaluation de performance de lignes de production comportant plusieurs machines	25
4.1. Les méthodes approximatives par décomposition	26
4.2. Les méthodes approximatives par agrégation	28
5. Conclusion	30
<b>Chapitre III- Évaluation des performances d'une ligne série de deux machines à un mode de défaillance et un stock intermédiaire</b>	
1. Lignes de transfert à deux machines et un stock intermédiaire de capacité finie	33
1.1. Représentation de l'état du système	33
1.2. Le modèle discret	33
1.3. Le modèle continu	47
2. Conclusion	60

## **Chapitre IV- Technique d'agrégation pour des lignes de production série avec machines à un seul mode de défaillance et stocks intermédiaires**

1. Caractérisation d'une machine en isolation	62
2. Caractérisation d'une ligne de deux machines et un stock intermédiaire	63
2.1. Graphe de transitions d'états du système synchrone	64
2.2. Graphe de transitions d'états du système poussé	66
2.3. Graphe de transitions d'états du système tiré	67
2.4. Probabilités des états	69
3. Machine équivalente	69
3.1. Système synchrone	69
3.2. Système poussé	73
3.3. Système tiré	75
4. Évaluation du taux de production de la ligne	77
5. Conclusion	78

## **Chapitre V- Évaluation des performances d'une ligne série de deux machines à deux modes de défaillance et un stock intermédiaire**

1. Modélisation d'une ligne de deux machines et d'un stock intermédiaire	80
1.1. Hypothèses de modélisation	81
1.2. Caractéristiques d'une machine en isolation	81
1.3. États du système	84
1.4. Développement du modèle	85

1.5. Mesures de performances	92
2. Résolution du modèle	94
2.1. Solution des équations de transitions internes	94
2.2. Solution des équations de transitions frontières	97
3. Évaluation des performances	105
3.1. Efficacités et taux de production	105
3.2. Niveau de stock moyen	107
3.3. Équation de normalisation	108
4. Algorithme	109
5. Conclusion	112

## **Chapitre VI- Technique d'agrégation pour des lignes de production série avec machines à deux modes de défaillances et stocks intermédiaires**

1. Agrégation de lignes comptant plus que deux machines	114
1.1. Caractérisation d'une machine	115
1.2. Caractérisation d'une ligne de deux machines et un stock intermédiaire	116
1.2.1. Graphe de transitions d'états du système synchrone	117
1.2.2. Graphe de transitions d'états du système poussé	119
1.2.3. Graphe de transitions d'états du système tiré	120
1.2.4. Probabilités des différents états	120
1.3. Machine équivalente	121
1.3.1. Système synchrone	121
1.3.2. Système poussé	124

1.3.3. Système tiré	128
1.4. Évaluation du taux de production de la ligne	131
2. Algorithmes	131
2.1. Algorithme pour le cas de l'agrégation amont	131
2.2. Algorithme pour le cas de l'agrégation aval	134
3. Conclusion	136
<b>Chapitre VII- Validation du modèle proposé par simulation</b>	
1. Simulation et comparaison	139
2. Conclusion	146
<b>Chapitre VIII- Conclusion générale</b>	147
<b>Références bibliographiques</b>	151
<b>Annexe 1- Chaînes de Markov</b>	
1. Temps discret, états discrets	155
1.1 La distribution géométrique	155
1.2. Chaînes de Markov	158
1.3. Régime stationnaire	162
1.4. Signification du régime stationnaire	163
2. Temps continu, états discrets	163
2.1. Équations de transitions	163
2.2. La distribution exponentielle	166
2.3. Chaîne de Markov (exemple d'une machine non fiable)	168

3. Comparaison entre chaîne de Markov à temps discret et chaîne  
de Markov à temps continu dans le cas d'états discrets

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 2.1-</b> Caractéristiques des différents modèles	25
<b>Tableau 4.1-</b> États du système synchrone	65
<b>Tableau 4.2-</b> États du système poussé	66
<b>Tableau 4.3-</b> États du système tiré	68
<b>Tableau 7.1-</b> Ratios utilisés pour la génération des paramètres	138
<b>Tableau 7.2-</b> Données pour une ligne à 5 machines et 4 stocks	139
<b>Tableau 7.3-</b> Données pour une ligne à 10 machines et 9 stocks	140
<b>Tableau 7.4-</b> Données pour des lignes à 15 machines et 4 stocks (exemple 1)	141
<b>Tableau 7.5-</b> Données pour des lignes à 15 machines et 4 stocks (exemple 2)	142
<b>Tableau 7.6-</b> Données pour des lignes à 15 machines et 4 stocks (exemple 3)	143
<b>Tableau 7.7-</b> Données pour des lignes à 20 machines et 19 stocks	144
<b>Tableau 7.8-</b> Résultats de simulation et comparaisons	145

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 2.1-</b> Ligne de production à $n$ machines	18
<b>Figure 2.2-</b> Ligne de production avec stocks intermédiaires	19
<b>Figure 2.3-</b> Décomposition d'une ligne de quatre machines	27
<b>Figure 2.4-</b> Agrégation de deux machines et un stock par une machine équivalente	29
<b>Figure 2.5-</b> Agrégation amont de quatre machines	30
<b>Figure 4.1-</b> États d'une machine $M_i$	63
<b>Figure 4.2-</b> Définition des machines équivalentes amont et aval	63
<b>Figure 4.3-</b> Graphe de transitions d'états du système synchrone	65
<b>Figure 4.4-</b> Graphe de transitions d'états du système poussé	67
<b>Figure 4.5-</b> Graphe de transitions d'états du système tiré	69
<b>Figure 4.6-</b> Transitions entre les macros états $A^u$ et $N^u$ (système synchrone)	71
<b>Figure 4.7-</b> Transitions entre les macros états $A^d$ et $N^d$ (système synchrone)	72
<b>Figure 4.8-</b> Transitions entre les macros états $A^u$ et $N^u$ (système poussé)	73
<b>Figure 4.9-</b> Transitions entre les macros états $A^d$ et $N^d$ (système poussé)	73
<b>Figure 4.10-</b> Transitions entre les macros états $A^u$ et $N^u$ (système tiré)	76
<b>Figure 4.11-</b> Transitions entre les macros états $A^d$ et $N^d$ (système tiré)	76
<b>Figure 5.1-</b> Ligne à deux machines et un stock intermédiaire	80



<b>Figure 5.2-</b> États d'une machine en isolation	82
<b>Figure 6.1-</b> États d'une machine $M_i$	116
<b>Figure 6.2-</b> Définition des machines équivalentes amont et aval	116
<b>Figure 6.3-</b> Graphe de transitions d'états du système synchrone	118
<b>Figure 6.4-</b> Graphe de transitions d'états du système poussé	119
<b>Figure 6.5-</b> Graphe de transitions d'états du système tiré	120
<b>Figure 6.6-</b> Transitions entre les macros états $A^u, N_1^u$ et $N_2^u$ (système synchrone)	122
<b>Figure 6.7-</b> Transitions entre les macros états $A^d, N_1^d$ et $N_2^d$ (système synchrone)	123
<b>Figure 6.8-</b> Transitions entre les macros états $A^u, N_1^u$ et $N_2^u$ (système poussé)	125
<b>Figure 6.9-</b> Transitions entre les macros états $A^d, N_1^d$ et $N_2^d$ (système poussé)	127
<b>Figure 6.10-</b> Transitions entre les macros états $A^u, N_1^u$ et $N_2^u$ (système tiré)	128
<b>Figure 6.11-</b> Transitions entre les macros états $A^d, N_1^d$ et $N_2^d$ (système tiré)	129
<b>Figure A.1-</b> Chaîne de Markov pour une machine à deux états avec réparation	159

## **CHAPITRE I**

### **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

Le changement technologique constant et la concurrence féroce que se livrent les entreprises font en sorte que ces dernières doivent s'ajuster rapidement aux mutations et transformations imposées par des marchés de plus en plus restreints et difficiles à pénétrer. Ainsi, pour demeurer compétitif, la préoccupation principale de chaque chef d'entreprise est de rentabiliser ses activités en visant le plus haut taux de rendement de son système de production en général, et de l'atelier de production en particulier.

Un atelier de production représente en général un investissement important dans un projet industriel. Il est donc nécessaire de respecter les prévisions de production et de rentabilité, car tout écart par rapport à ces prévisions se traduit par une augmentation du prix de revient des pièces produites. D'où l'importance d'utiliser des méthodes efficaces de diagnostic de pannes et d'analyse de performances des ateliers de production et des systèmes de production.

C'est dans ce contexte que, dans ce travail de maîtrise, nous nous intéressons au développement d'un modèle analytique et d'algorithmes de résolution pour évaluer les performances de lignes de production constituées de plusieurs machines (ou processeurs ou postes de travail) séparées par des stocks intermédiaires. Ces stocks sont généralement requis pour découpler les postes de travail et améliorer ainsi la disponibilité et le taux de production de la ligne. La majorité des publications portant sur l'évaluation analytique de performances des lignes de production considèrent que les machines ont un seul mode de défaillance. Il existe relativement très peu de travaux dans la littérature qui proposent des méthodes analytiques pour l'évaluation du taux de production d'une ligne de production dont les machines peuvent avoir plus qu'un mode de défaillance (ou panne). Bien que plus difficile à étudier analytiquement, le cas à plusieurs modes de défaillances est néanmoins plus proche de la réalité. Il devrait conduire à une évaluation plus précise que celle obtenue en considérant un seul mode de défaillance par machine. Nous allons chercher à évaluer le taux de production d'une ligne avec des machines à deux modes de défaillances. Dans ce qui suit, nous présenterons quelques travaux existants, les objectifs spécifiques de notre travail ainsi que la structure du mémoire.

### **1. Quelques travaux existants**

De nombreux travaux ont été publiés durant les deux dernières décennies sur la modélisation et l'analyse de lignes de production. Une revue complète et classique reste celle de (Dallery et Gershwin, 1992). La plus récente édition du livre de Gershwin, (Gershwin, 2002), présente une revue de la littérature mise à jour. Le but de cette section n'est pas de faire

une revue complète de la littérature; elle vise plutôt à présenter les travaux les plus marquants liés à la problématique étudiée dans ce travail.

Les premiers travaux sur l'analyse des stocks intermédiaires sont dus à des chercheurs soviétiques et français (Vladzievskii, 1953), (Zimmern, 1955), (Koeningsberg, 1959). Les travaux de (Vladzievskii, 1953) ont exploré le comportement d'une ligne de transfert automatique en utilisant la théorie des probabilités. En 1955, Zimmern proposa le premier modèle continu dans le cas de lignes à deux machines (Zimmern, 1955), où il a considéré le cas de machines ayant des taux de production différents et dont les pannes et les réparations suivent des distributions exponentielles. L'auteur a considéré le cas de pannes dépendant de l'opération. Le but d'un tel modèle continu était l'approximation du modèle discret de lignes de production (dont les machines ont des temps d'opération déterministes et dont les temps de pannes et de réparation suivent des distributions exponentielles). En effet, pour des lignes de transfert approximées selon un modèle discret, il n'est pas possible d'obtenir une solution analytique exacte (Dallery et Gershwin, 1992). Le modèle continu, par contre, fournit une meilleure approximation en permettant de tenir compte du cas de machines ayant des temps d'opération déterministes pouvant différer d'une machine à l'autre. Dans (Koeningsberg, 1959), l'auteur a élaboré la première technique analytique pour la modélisation des lignes de production avec stocks intermédiaires. Dans son travail, Koeningsberg a mis l'accent sur les cas limites : stocks intermédiaires à capacité nulle ou bien à capacité infinie.

Dans (Buzacott, 1967), le cas de trois machines et deux stocks intermédiaires est étudié en proposant une méthode approximative. L'auteur considère dans son étude le cas de lignes homogènes. Le temps d'opération représente une unité de temps. Le comportement de la ligne est approximé par une chaîne de Markov à temps discret. Les pannes et les réparations suivent des distributions géométriques de mêmes moyennes. L'auteur considère également que les machines sont synchrones, c'est-à-dire qu'elles commencent leurs opérations en même temps et qu'elles finissent leurs opérations en même temps aussi.

Dans (Gershwin et Schick, 1980), les auteurs ont repris le modèle de (Zimmern, 1955) en considérant que les pannes dépendent du temps. Dans (Gershwin et Berman, 1981), le modèle de (Buzacott, 1967) est étendu en levant certaines hypothèses simplificatrices. Ils considèrent le cas d'une ligne de deux machines et un stock intermédiaire. Dans ce travail, la ligne est approximée par un modèle discret.

Dans (Dubois et Forestier, 1982), les auteurs ont étudié une ligne de production constituée de deux machines et un stock intermédiaire en se basant sur le travail de (Forestier, 1980). Ils considèrent un modèle continu dans lequel les pannes dépendent de l'opération. Ils ont montré que dans le cas de machines synchronisées, le taux de production du système et le niveau moyen du stock s'expriment en fonction des caractéristiques des machines et de la taille du stock intermédiaire. Ils ont montré également que lorsque les machines ont des cadences différentes, le problème se résume à la résolution d'un système de deux équations différentielles du premier ordre.

Dans (Gershwin, 1987), l'auteur a mis au point la méthode de décomposition pour traiter le cas d'une ligne de transfert à  $n$  machines et  $(n-1)$  stocks intermédiaires. Cette méthode consiste à décomposer la ligne originale en plusieurs lignes fictives de deux machines et un stock intermédiaire. Dans (Dallery et al, 1988), les auteurs ont proposé un algorithme efficace pour la résolution des équations de décomposition de (Gershwin, 1987). Ils ont remplacé l'ensemble des équations de décomposition de Gershwin par un nouvel ensemble d'équations afin de rendre l'algorithme plus efficace. Cet algorithme est connu sous le nom d'algorithme DDX du nom de ses auteurs (Dallery, David et Xie).

Dans (Terracol et David, 1987), les auteurs ont proposé une méthode dite d'agrégation pour l'étude d'une ligne de transfert à plusieurs machines. Cette méthode consiste à remplacer un ensemble de deux machines et un stock intermédiaire par une machine équivalente, et à évaluer de proche en proche une machine équivalente à la ligne complète.

Dans (Dallery et al, 1989), les auteurs ont considéré dans un premier temps le cas de lignes homogènes (lignes dans lesquelles les machines ont le même temps d'opération) dont le comportement est approximé par un modèle continu. Ils évaluent ensuite les performances de ces lignes en utilisant la décomposition. En second lieu, ils considèrent le cas de lignes non homogènes et introduisent une transformation qui remplace la ligne non homogène par une ligne homogène. Dans (Burman, 1995), l'auteur a amélioré l'algorithme DDX de (Dallery et al, 1988). L'algorithme résultant de ce travail, qui porte le nom d'algorithme ADDX (Accelerated DDX), s'est révélé plus rapide et plus fiable que l'algorithme DDX initial.

Les travaux cités ci-dessus concernent des lignes où les machines possèdent un seul mode de défaillance et un seul mode de fonctionnement ; ces machines peuvent ainsi occuper deux états. On retrouve également dans la littérature quelques travaux traitant de lignes où les machines peuvent occuper plus que deux états. (Levantesi et al, 1999) ont étendu le modèle de (Gershwin et Schick, 1980) au cas de plusieurs modes de défaillances. Ce travail, qui traite le cas de lignes à deux machines et un stock intermédiaire, a servi de base pour l'élaboration de la nouvelle technique de décomposition décrite dans (Levantesi et al, 2003).

Dans (Tolio et al, 2002), les auteurs ont élaboré une méthode analytique pour l'évaluation des performances de lignes de production composées de deux machines ayant plusieurs modes de défaillances et d'un stock intermédiaire de taille finie. Cette méthode permet d'évaluer les probabilités que le système soit dans un état donné à partir de calculs dépendant uniquement du nombre de modes de défaillances considérés et non pas de la capacité du stock intermédiaire. Le modèle décrit dans cette étude est en fait une extension du modèle de (Gershwin, 1994) ; ce dernier étant une extension du modèle de (Buzacott, 1967). La ligne considérée dans (Tolio et al, 2002) est composée de deux machines et un stock intermédiaire. La motivation de départ pour cette étude était le fait que dans les lignes de production, chaque station est normalement composée de différents dispositifs coopérant entre eux afin d'accomplir une tâche désignée. La fiabilité de chacun de ces dispositifs est différente ainsi que la manière dont ils sont réparés une fois en panne. Les auteurs de (Tolio et al, 2002) ont motivé leur étude par le fait qu'une telle méthode considérant des machines à plusieurs

modes de défaillances, permet d'obtenir une meilleure évaluation du taux de production et du niveau moyen du stock intermédiaire de la ligne.

Dans (Levantesi et al, 2003), les auteurs ont présenté une méthode analytique approximative pour l'évaluation des performances des lignes de production asynchrones ayant des temps d'opération déterministes, des stocks intermédiaires de capacité finie et plusieurs modes de défaillances. Le modèle qui a été considéré dans ce travail est le modèle continu. Les défaillances ont été supposées dépendantes de l'opération (ce qui signifie qu'une machine ne peut pas tomber en panne pendant qu'elle est affamée ou bloquée). La méthode ainsi développée dans (Levantesi et al, 2003) est basée sur l'approximation d'une ligne de  $k$  machines en évaluant  $(k-1)$  lignes de deux machines et un stock intermédiaire. Cette méthode étend la technique de décomposition mise au point par (Gershwin, 1987) et ce, en modifiant les équations de décomposition afin de tenir compte des différents modes de défaillances. Cependant dans (Levantesi et al, 2003), seules les équations de décomposition sont spécifiées. Pour l'évaluation des paramètres d'une ligne à deux machines et un stock intermédiaire, les auteurs font référence à l'un de leurs précédents travaux, à savoir (Levantesi et al, 1999).

Dans (Jongyoon et Gershwin, 2003), les auteurs ont considéré le cas de lignes de production dont les machines ont deux modes de fonctionnement à savoir un mode de fonctionnement dit *nominal* et un mode de fonctionnement dit *dégradé*, ainsi qu'un mode de défaillance. Le mode dégradé se distingue du mode nominal par le fait que les pièces produites



sont de qualité inférieure. Le modèle considéré ici est le modèle continu et les défaillances sont supposées dépendantes de l'opération. Dans un premier temps, les auteurs modélisent une ligne composée de deux machines et un stock intermédiaire. Ensuite, ils utilisent la méthode de décomposition afin d'approximer des lignes plus longues.

## 2. Objectif et méthodologie

Une analyse des travaux existants montre clairement qu'il existe relativement peu de travaux sur l'évaluation analytique des lignes séries dans le cas où les machines peuvent avoir plusieurs modes de défaillances (modèles à plusieurs états : état de bon fonctionnement et plusieurs états de pannes). Ceci résulte de la complexité mathématique engendrée par le fait de prendre en compte un tel cas. Dans les modèles existants dans la littérature et qui considèrent un seul mode de défaillance (modèle à deux états : un état de bon fonctionnement et un état de panne), les différents modes de défaillances sont regroupés en un seul mode dont le taux représente la moyenne des taux de pannes des modes de défaillances réels, au moyen d'une approximation de premier ordre. Ces modèles sont toutefois moins réalistes et moins précis que les modèles à plusieurs états (Levantesi et al, 2003). Les seuls travaux existants qui utilisent une méthode analytique pour des lignes séries avec des machines à plusieurs modes de défaillances (i.e., (Levantesi et al, 1999), (Levantesi et al, 2003), (Tolio et al, 2002), (Jongyoon et Gershwin, 2003)) sont de type décomposition. La technique d'agrégation n'a pas été appliquée dans le cas de lignes où les machines ont plus d'un mode de défaillance. De façon générale, une méthode de type agrégation est plus simple à mettre en œuvre et est plus rapide qu'une méthode de type décomposition. En fait, le temps de calcul d'une méthode de

décomposition dépend de la convergence d'une procédure itérative que l'on ne retrouve pas dans une méthode d'agrégation.

Ainsi, l'objectif de ce travail consiste à développer une méthode analytique de type agrégation pour l'évaluation de performances d'une ligne de production série constituée de  $(n-1)$  stocks intermédiaires et de  $n$  machines *pouvant avoir deux modes de défaillances*.

Afin d'atteindre cet objectif, la méthodologie poursuivie va reposer sur les étapes suivantes :

- Étape 1 : Utiliser le modèle de (Levantesi et al, 1999) et l'appliquer au cas de lignes dont les machines peuvent avoir deux modes de défaillances pour l'évaluation de performances de lignes de production composées de deux machines et d'un stock intermédiaire.
- Étape 2 : Utiliser le modèle présenté à l'étape 1 pour étendre la technique d'agrégation initialement proposée par (Terracol et David, 1987) vers une prise en compte de deux modes de défaillances.
- Étape 3 : Valider par simulation la méthode développée, comparer les résultats obtenus avec le modèle à deux états dans lequel un seul mode de défaillance est considéré, et évaluer le gain en précision apporté par le fait de considérer deux modes de défaillances au lieu d'un seul.

### 3. Structure du mémoire

Le présent mémoire sera structuré de la manière suivante :

- Au chapitre II, nous présenterons quelques notions de base sur les lignes de production série. Nous y introduirons notamment les principaux modèles de lignes de production et les hypothèses d'études qui leur sont généralement associées. Nous présenterons également les deux techniques les plus utilisées pour l'évaluation des performances de longues lignes, à savoir la technique d'agrégation et la technique de décomposition.

- Le chapitre III sera consacré à la présentation de notions de base concernant l'évaluation des performances dans le cas de lignes de production série à deux machines à un mode de défaillance et un stock intermédiaire. Nous y considérerons les deux modèles les plus utilisés dans le cas de lignes série, à savoir le modèle déterministe et le modèle continu.

- Au chapitre IV, nous présenterons la technique d'agrégation telle que définie dans (Terracol et David, 1987). Cette technique sera étendue au chapitre VI dans le cas de machines à deux modes de défaillances.

- Au chapitre V, nous appliquons le modèle développé par (Levantesi et al, 1999), permettant l'évaluation des performances d'une ligne de production série composée d'un stock intermédiaire et de deux machines à plusieurs modes de défaillances, au cas de machines

pouvant avoir deux modes de défaillances. Ce modèle sert de base pour l'extension de la technique d'agrégation au chapitre suivant.

- Le chapitre VI présentera notre technique d'agrégation qui est une extension de la technique d'agrégation de (Terracol et David, 1987) vers la prise en compte de deux modes de défaillances.

- Au chapitre VII, nous validerons notre modèle par simulation. Nous montrerons que le modèle à deux modes de défaillances est plus précis que le modèle à un seul mode de défaillance. Nous allons évaluer le gain en précision apporté par le modèle proposé.

- Enfin, le dernier chapitre présentera une conclusion générale par rapport au travail réalisé.

Nous invitons le lecteur non averti à se reporter à l'annexe 1 pour se familiariser avec les chaînes de Markov.

## **CHAPITRE II**

### **NOTIONS DE BASE SUR LES LIGNES DE PRODUCTION SÉRIE**

Dans ce chapitre, nous allons définir ce qu'est une ligne de production, présenter quelques modèles de lignes de production série existants dans la littérature. Nous verrons également qu'il n'est pas possible de trouver une solution exacte pour ces modèles dans le cas de lignes de production à plusieurs machines et plusieurs stocks intermédiaires, et nous présenterons les deux méthodes les plus connues permettant d'approcher cette solution.

#### **1. Lignes de production**

On désigne par le terme « ligne de production » un ensemble de machines (ou processeurs) reliées entre elles et travaillant ensemble pour l'accomplissement d'une tâche, à savoir la production d'un produit donné.

##### **1.1. Types de lignes de production**

On trouve dans la littérature plusieurs types de lignes de production. Citons à titre d'exemple :

- *Les Lignes d'assemblage / désassemblage* : Ces lignes sont caractérisées par la présence d'une ou de plusieurs machines effectuant des opérations d'assemblage ou de désassemblage.
  
- *Les Lignes de transfert séries-parallèles* : Une ligne de transfert série-parallèle est une ligne de production composée de machines disposées en série et en parallèle.
  
- *Les Lignes de transfert fermées* : Dans ce type de lignes, on charge les pièces sur un support généralement appelé *palette*. Cette palette parcourt ensuite la ligne de poste de travail en poste de travail et revient au point de chargement/déchargement pour décharger la pièce finie et en charger une nouvelle et ainsi de suite.

## **1.2. Indicateurs de performances**

Dans le but de caractériser les performances d'une ligne de production, on a besoin de certains indicateurs. Les principaux indicateurs de performance d'une ligne de production sont le *taux de production* et le *niveau moyen des stocks* et sont définis comme suit :

**Le taux de production** : c'est le nombre moyen de pièces produites par unité de temps. Chaque machine hors ligne (donc sans famine et sans blocage) possède un taux de production appelé *taux de production en isolation*. Le taux de production de la ligne a pour borne supérieure le taux de production en isolation le plus faible des machines, et pour borne inférieure le taux de production d'une ligne identique sans stock intermédiaire (Dallery et Gershwin, 1992).

**Les stocks intermédiaires :** l'indicateur mesuré ici est le niveau moyen d'en-cours qui correspond à la somme des niveaux moyens des stocks intermédiaires. Ceci permet de déterminer les capacités des stocks intermédiaires de la ligne afin que le taux de production de cette dernière soit le meilleur possible. Nous reviendrons sur les stocks intermédiaires à la section 2 de ce même chapitre.

### **1.3. Propriétés des lignes de production et hypothèses générales**

Le comportement d'un système observé dans les moindres détails peut devenir rapidement complexe. Afin de pouvoir effectuer des calculs, il faut simplifier les choses de manière admissible, c'est-à-dire rendre accessible à l'esprit humain l'analyse d'une ligne de production. Dans cette partie, nous allons présenter les principales hypothèses de travail généralement considérées dans l'étude des lignes de production. Dans un premier temps, les caractéristiques d'une machine en isolation seront présentées. Cette machine, qui est ensuite plongée dans une ligne de production, subit l'effet de son environnement (stocks intermédiaires et machines amont et aval).

#### **1.3.1. Caractéristiques d'une machine en isolation**

Les principaux éléments de caractérisation d'une machine en isolation sont constitués de son *temps d'opération* et de sa *disponibilité propre*. Dans cette section, nous présentons les principales propriétés et hypothèses associées à ces éléments de caractérisation.

### **a. Le temps d'opération**

Le *temps d'opération* est le temps nécessaire pour une opération sur une machine isolée (Burman, 1995). Il peut être considéré comme *déterministe* s'il est connu à l'avance ou *stochastique* s'il est variable et aléatoire. Dans ce dernier cas, la distribution du temps de cycle est généralement supposée *exponentielle* si le modèle est à temps continu et *géométrique* s'il est à temps discret.

Le temps de travail des machines d'une ligne peut être utilisé comme un élément de classification des systèmes de production :

- Un système est dit *synchrone* si toutes les machines commencent leurs opérations en même temps et les finissent en même temps aussi. Il est dit *asynchrone* dans le cas contraire.
- Un système est dit *homogène* si les temps d'opérations des machines de la ligne sont identiques. Il est dit *non-homogène* dans le cas contraire.

### **b. Les pannes**

Dans la littérature, on trouve à la fois des méthodes consacrées à des lignes constituées de machines fiables (c'est-à-dire ne pouvant pas tomber en panne) et des méthodes consacrées à des lignes constituées de machines non fiables (c'est-à-dire pouvant tomber en panne). Si la machine était fiable, nous n'aurions besoin que d'un seul paramètre pour la caractériser : le temps d'opération. Mais cela n'est pas le cas des machines réelles qui peuvent tomber en panne.



La littérature traite également deux types de pannes : les pannes *dépendant du temps* et les pannes *dépendant de l'opération*. Pour le premier cas, une machine peut tomber en panne à tout instant, indépendamment du fait qu'elle soit en opération ou non. Dans le second cas, par contre, cette même machine ne peut tomber en panne que si elle est en opération.

### **1.3.2. Hypothèses de travail associées à une ligne de production**

Dans une ligne de production, les hypothèses de travail concernent essentiellement l'environnement de la ligne, la fonction des stocks ainsi que l'apparition des événements tels que les opérations, les pannes et les réparations.

#### **a. Système saturé**

Cette hypothèse considère que le flux de matière est toujours disponible et que la demande est illimitée. Ceci implique que la première machine n'est jamais affamée et que la dernière machine n'est jamais bloquée. (Burman, 1995) indique que les systèmes non-saturés peuvent être modélisés en rajoutant des machines aux extrémités de la ligne afin d'émuler l'arrivée et le départ de pièces.

#### **b. Indépendance des événements**

L'indépendance des événements signifie que tous les événements (pannes, réparations, etc.) futurs ne dépendent que de l'état présent du système (Gershwin, 1994). Ceci permet de modéliser les systèmes de production par des chaînes de Markov. Au niveau de la ligne de

production elle-même, l'indépendance des événements indique que les apparitions des pannes sont indépendantes les unes des autres au même titre que les réparations.

### **c. Stocks intermédiaires et mécanismes de blocage**

La présence des stocks intermédiaires dans une ligne permet de réduire la propagation des arrêts de production. Dans la littérature, le temps de transit des stocks est généralement considéré nul. Ce temps est défini comme le temps qui s'écoule entre l'entrée d'une pièce dans le stock et sa sortie, si ce stock n'est pas bloqué par une machine aval.

Aussi, on distingue deux mécanismes de blocage (Dallery et Gershwin, 1992) :

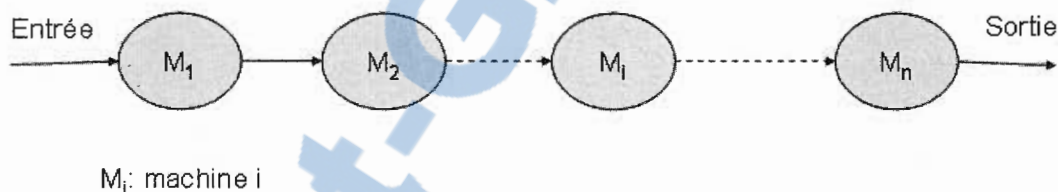
- Le *blocage après service* (ou *blocage de type 1*) : Ce type de blocage a lieu si à la fin de l'opération de la machine sur la pièce en cours, le stock aval est plein. Dans ce cas, la pièce reste sur la machine jusqu'à ce qu'une place soit disponible dans le stock aval.
- Le *blocage avant service* (ou *blocage de type 2*) : Pour ce type de blocage, la machine ne commence son opération que s'il y a de la place dans le stock aval, sinon elle attend qu'une place se libère.

Généralement, les systèmes manufacturiers fonctionnent en mode blocage après service. Par conséquent, la plupart des travaux utilisent cette hypothèse.

## 2. Les stocks intermédiaires

### 2.1. Utilisation des stocks intermédiaires dans les lignes de production

L'utilisation des stocks intermédiaires dans les lignes de production permet un accroissement du taux de production. Considérons la ligne de production présentée à la figure 2.1. Nous constatons que la sortie de la machine  $i$  constitue l'entrée de la machine  $(i+1)$ . Toutes ces machines sont sujettes à des défaillances aléatoires. Cependant, l'arrêt d'une machine entraîne l'arrêt complet de toute la ligne. Ceci affecte négativement la disponibilité de la ligne qui ne sera plus en mesure de produire de nouvelles pièces jusqu'à ce que la machine en panne soit réparée. (Zimmern, 1955) désigne cette ligne par le terme « ligne de production rigide ».

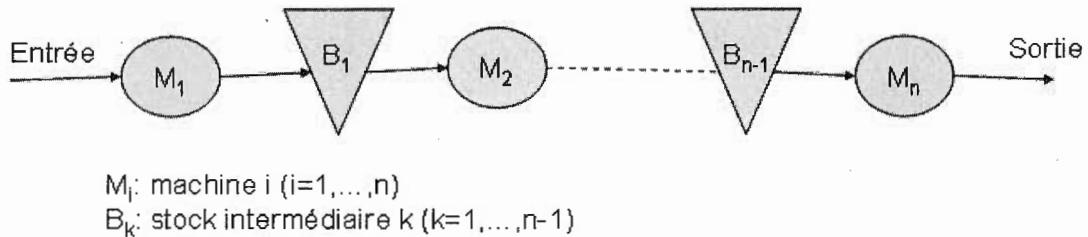


**Figure 2.1-** Ligne de production à  $n$  machines

Il est possible d'éviter de tels arrêts et d'améliorer la disponibilité de la ligne en introduisant des stocks intermédiaires entre les machines, afin de les découpler les unes des autres et ainsi leur fournir un certain degré de liberté dans leur fonctionnement.

Un stock intermédiaire est un espace entre deux machines consécutives permettant d'entreposer ou de retirer une quantité donnée de produits semi-finis (appelés aussi en-cours

de production). Le but recherché par ce moyen est de réduire ou d'éliminer un arrêt généralisé de la ligne de production suite à la défaillance d'une machine  $i$ . La figure 2.2 montre une ligne de production ayant des stocks intermédiaires entre ses machines.



**Figure 2.2-** Ligne de production avec stocks intermédiaires

En se référant à la figure ci-dessus, si la machine  $i$  tombe en panne, les machines  $(i-1), (i-2), \dots, 1$  peuvent continuer à opérer en déchargeant leur production dans les stocks intermédiaires situés en aval de chacune d'elles. Quant aux machines  $(i+1), (i+2), \dots, n$ , elles s'alimentent des stocks intermédiaires situés en amont d'elles. Si la machine  $i$  est réparée avant que le stock intermédiaire en amont d'elle ne soit plein (le cas échéant, la machine sera dite « *bloquée* ») ou que le stock intermédiaire en aval d'elle ne soit vide (le cas échéant, la machine sera dite « *affamée* »), alors la ligne n'arrêtera pas de produire. Il en résulte alors un gain de productivité, d'où le but recherché.

## 2.2. Stocks intermédiaires et accroissement de la productivité

Soit une ligne de production constituée de deux machines  $M1$  et  $M2$  sans stock intermédiaire et disposant d'une durée de temps disponible  $T$  divisé en quatre tranches comme suit :

- $t_1$  : temps où  $M1$  est en panne et  $M2$  est forcée d'arrêter
- $t_2$  : temps où  $M2$  est en panne et  $M1$  est forcée d'arrêter
- $t_i$  : temps où toute la ligne est arrêtée
- $x$  : temps où toute la ligne est en opération

Ainsi,

$$x = T - (t_1 + t_2 + t_i) \quad (2.1)$$

L'efficacité ou la disponibilité ( $E$ ) de la ligne est mesurée par la proportion de temps où elle est en opération :

$$E = \frac{x}{T} = \frac{T - (t_1 + t_2 + t_i)}{T} \quad (2.2)$$

Si on ajoute un stock intermédiaire entre  $M1$  et  $M2$ , le temps où  $M1$  (respectivement  $M2$ ) est forcée d'arrêter sera plus petit que  $t_2$  (respectivement  $t_1$ ). Donc on aura deux autres nouveaux cas :

- $M1$  est en panne et  $M2$  en opération
- $M2$  est en panne et  $M1$  en opération

On aura donc une nouvelle expression de l'efficacité qu'on appelle «efficacité maximale» (Abdul-Kader, 1997) et qui est donnée par la relation suivante :

$$E_{\max} = \frac{T - (t_1 + \max(t_1, t_2))}{T} \quad (2.3)$$

Bien entendu, nous avons :  $E_{\max} > E$  (car  $\max(t_1, t_2) < (t_1 + t_2)$ )

La probabilité pour que toutes les machines de la ligne tombent en panne en même temps est souvent négligée. Cependant, selon (Hanifin, 1975), il existe un nombre significatif de pannes de ce genre. Parmi les événements pouvant entraîner un arrêt total de la ligne, mentionnons :

- Les pannes électriques et de contrôle.
- Les changements dans la production d'un type de produit.

### 3. Principaux modèles de lignes de production

Dans cette section nous présentons les principaux modèles utilisés dans la littérature. Dans un premier temps, nous énumérerons ces modèles puis nous résumerons leurs principales caractéristiques dans un tableau.

### 3.1. Le modèle de référence

Dans ce modèle, chaque machine a un temps d'opération déterministe. Les pannes des machines dépendent de l'opération. Lorsqu'une panne se produit, la machine devient non-opérationnelle jusqu'à ce qu'elle soit réparée. Elle redevient ainsi de nouveau opérationnelle et part du point où elle s'était arrêtée. Les blocages dans ce modèle sont de type après service.

Ce modèle décrit de manière exacte le flux discret de pièces dans une ligne de production. Il traduit le fait qu'aussi longtemps que les machines ne sont pas affamées ou bloquées, elles travaillent indépendamment les unes des autres. Ce modèle serait idéal pour l'analyse des lignes de production, mais il n'existe malheureusement aucune solution exacte pour ce modèle sauf pour le cas très restrictif d'une ligne sans stock intermédiaire (David et al, 1990). Par conséquent, on a recours aux modèles approchés. Certains d'entre eux utilisent un temps discret en forçant les événements à se produire à des intervalles de temps constants. Dans d'autres, le flux discret de pièces est remplacé par un flux continu.

(Gershwin, 1994) décrit trois types de modèles basés sur des processus Markoviens :

- *Le modèle déterministe* : toutes les machines de la ligne ont des temps d'opération déterministes. Le modèle Markovien associé est caractérisé par un temps et des états discrets.
- *Le modèle exponentiel* : il impose aux machines des temps d'opération aléatoires distribués de manière exponentielle. Le modèle Markovien associé est caractérisé par un temps continu et des états discrets.

- *Le modèle continu* : il approche le flux discret de pièces par un flux continu. Le modèle Markovien associé est caractérisé par un temps continu et des états mixtes : états frontières discrets et états internes continus.

### 3.2. Le modèle déterministe

Ce modèle se caractérise par un temps d'opération fixe, connu à l'avance et identique pour toutes les machines. Il ne peut représenter que des systèmes synchrones car toutes les machines commencent leurs opérations en même temps. La machine  $i$  tombe en panne sachant qu'elle fonctionne avec un taux  $\lambda_i$  (que l'on appelle *taux de panne*). Si elle est en panne, elle est réparée avec un taux  $\mu_i$  (que l'on appelle *taux de réparation*). Le blocage est de type après service. Les pannes sont dépendantes de l'opération. Dans ce modèle, les machines sont caractérisées par deux paramètres : le taux de panne ( $\lambda_i = 1/MTBF_i$ ) et le taux de réparation ( $\mu_i = 1/MTTR_i$ ) où :

- $MTBF_i$  est le temps moyen de bon fonctionnement, c'est-à-dire le temps moyen durant lequel la machine fonctionne jusqu'à ce qu'elle tombe en panne.
- $MTTR_i$  est le temps moyen de réparation ou la durée de temps qui s'écoule entre le moment où la machine tombe en panne et le moment où elle est réparée.



### 3.3. Le modèle exponentiel

Ce modèle se caractérise par un temps d'opération aléatoire avec distribution exponentielle de moyenne  $1/\mu_i$ . Il peut être utilisé pour représenter des lignes asynchrones et non-homogènes. Le blocage est de type après service. Les pannes sont dépendantes de l'opération. Les machines sont caractérisées par trois paramètres : la vitesse moyenne d'opération ( $u_i$ ), le taux de panne moyen ( $\lambda_i = 1/MTBF_i$ ) et le taux de réparation moyen ( $\mu_i = 1/MTTR_i$ ).

### 3.4. Le modèle continu

Dans ce modèle, le flux de matière est supposé continu et chaque machine a un temps d'opération déterministe. Ce modèle peut être utilisé pour des lignes asynchrones et non-homogènes. Les états du système sont mixtes : états frontières discrets et états internes continus. Le temps est également continu.

### 3.5. Caractéristiques des différents modèles

Le tableau suivant reprend les principales caractéristiques des différents modèles cités plus haut.

Modèle	États	Temps	Type de système	Temps d'opération	Temps de bon fonctionnement	Temps de réparation
Modèle de référence	Discrets	Continu	Asynchrone non-homogène	Déterministe : $T_i$	Distribution quelconque	Distribution quelconque
Modèle déterministe	Discrets	Discret	Synchrone Homogène	Déterministe : 1 unité de temps	Distribution géométrique de moyenne $\frac{1}{\lambda_i}$	Distribution géométrique de moyenne $\frac{1}{\mu_i}$
Modèle exponentiel	Discrets	Continu	Asynchrone non-homogène	Distribution exponentielle de moyenne $\frac{1}{\mu_i}$	Distribution exponentielle de moyenne $\frac{1}{\lambda_i}$	Distribution exponentielle de moyenne $\frac{1}{\mu_i}$
Modèle continu	Mixtes	Continu	Asynchrone non-homogène	Déterministe : $\frac{1}{\mu_i}$	Distribution exponentielle de moyenne $\frac{1}{\lambda_i}$	Distribution exponentielle de moyenne $\frac{1}{\mu_i}$

**Tableau 2.1-** Caractéristiques des différents modèles (Abdul-Kader, 1997)

#### 4. Évaluation de performances de lignes de production comportant plusieurs machines

L'utilisation du modèle de référence ne permet d'obtenir une solution exacte que dans le cas très restrictif d'une ligne sans stocks intermédiaires. Pour les autres modèles (déterministe, exponentiel et continu), les seules solutions exactes exploitables existantes sont celles des lignes composées de deux machines séparées par un stock intermédiaire.

Bien qu'il existe des solutions exactes pour des lignes composées de deux machines et un stock intermédiaire, il n'est pas possible de les exploiter pour construire des solutions exactes pour des lignes plus longues. Dans (Gershwin, 1994), on retrouve le terme

d'*indécomposabilité* qualifiant l'impossibilité de décomposer l'étude d'un système complexe en sous-systèmes dont les solutions sont connues. Face à cette impossibilité, des techniques approximatives ont été mises au point. Dans cette section, nous présentons les deux principales méthodes existantes : les méthodes approximatives par agrégation et les méthodes approximatives par décomposition.

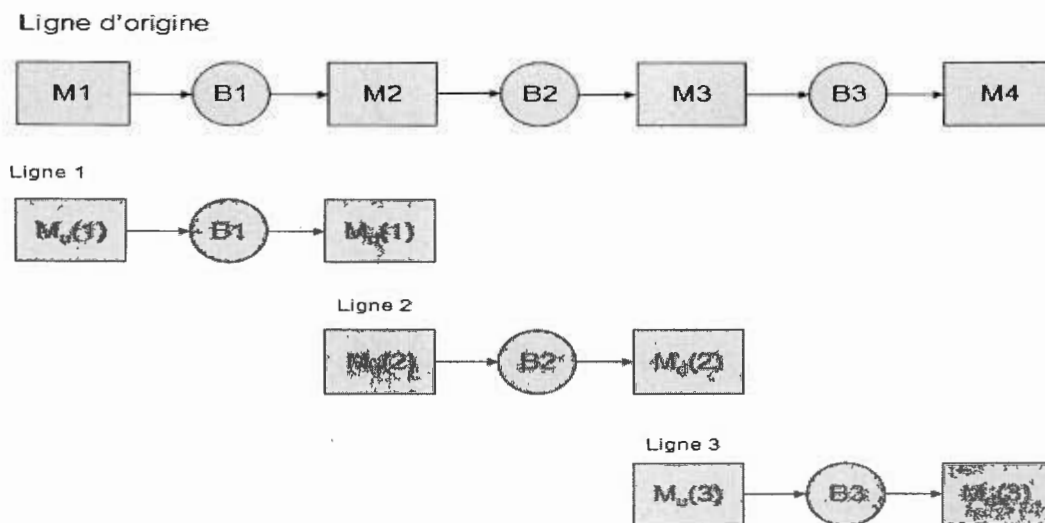
Le principe est de ramener l'étude d'une ligne à plusieurs machines et plusieurs stocks à une ligne de deux machines et un stock intermédiaire dont la solution exacte est connue. On constate donc que le modèle à deux machines et un stock intermédiaire est la brique de base permettant l'évaluation de performances de lignes plus longues.

#### **4.1. Les méthodes approximatives par décomposition**

La méthode de décomposition consiste à ramener l'analyse de la ligne à celle de sous-lignes plus petites et dont les solutions exactes sont connues. Dans la figure 2.3, les sous-lignes sont constituées de deux machines virtuelles  $M_u(i)$  et  $M_d(i)$  séparées par le stock intermédiaire  $B_i$ . Soulignons que les solutions exactes pour les cas de lignes de deux machines et un stock intermédiaire existent (Dubois et Forestier, 1982; Gershwin, 1994).

Plusieurs travaux utilisant cette méthode se retrouvent dans la littérature. Parmi les plus connus, citons l'algorithme DDX de (Dallery et al, 1988) ainsi que l'algorithme ADDX de (Burman, 1995).

La figure 2.3 représente la décomposition d'une ligne de production composée de quatre machines. Il s'agit ainsi de diviser la ligne de production originale en un ensemble de trois lignes virtuelles dont chacune est composée de deux machines et un stock intermédiaire dont les solutions exactes sont connues. Les deux machines virtuelles  $M_u(i)$  et  $M_d(i)$  de la ligne  $i$  modélisent les portions de la ligne se trouvant respectivement en amont et en aval du stock intermédiaire  $B_i$ .



**Figure 2.3-** Décomposition d'une ligne de quatre machines

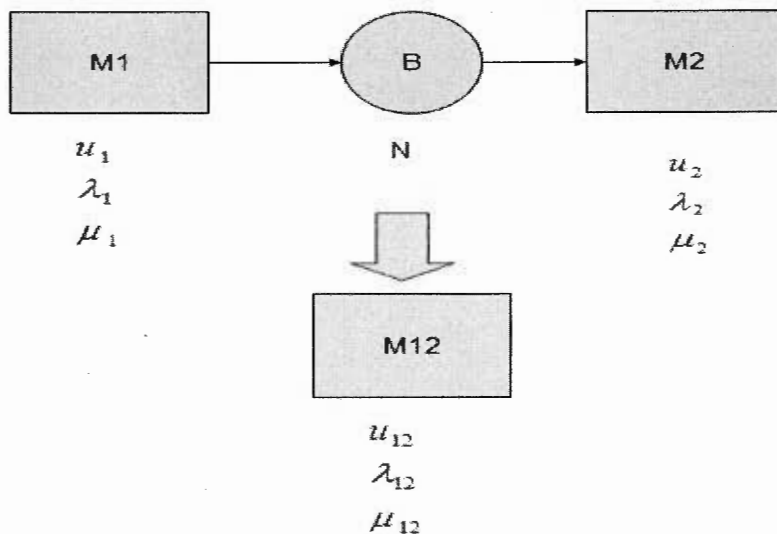
Comme toutes les techniques de type décomposition, la méthode DDX passe ainsi par les trois étapes suivantes :

- La caractérisation des sous-systèmes.
- La définition des équations reliant les paramètres inconnus des sous-systèmes décomposés.
- La mise au point d'un algorithme de résolution de ces équations.

L'élément important de la méthode DDX est que l'algorithme de calcul proposé par les auteurs (Dallery et al, 1988) est plus rapide et robuste que celui proposé par (Gershwin, 1987). En effet, contrairement à l'algorithme de Gershwin, celui-ci converge toujours. Il s'agit d'une procédure itérative qui comporte une phase d'initialisation au cours de laquelle les paramètres des machines virtuelles sont initialisés aux paramètres des machines originelles correspondantes. Il comporte aussi deux étapes de calcul itératif : une étape descente et une étape montée. Ces deux étapes sont exécutées jusqu'à la convergence de l'algorithme. L'équation de conservation du flux est utilisée pour faire converger l'algorithme. Cette équation traduit l'égalité des taux de production des sous-systèmes virtuels. Pour plus de détails sur l'algorithme DDX, le lecteur est référé à (Dallery et al, 1988).

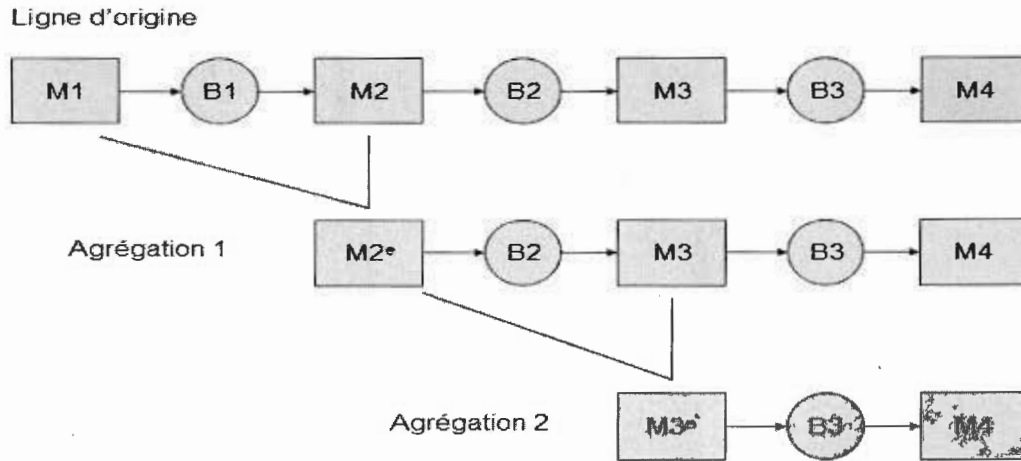
#### **4.2. Les méthodes approximatives par agrégation**

L'agrégation consiste à remplacer tour à tour les groupes de deux machines et un stock intermédiaire par une machine équivalente (comme le montre la figure 2.4). Cette technique est applicable à tous les types de lignes de production (homogènes, non-homogènes, synchrones, asynchrones). Cette méthode a été introduite par (Terracol et David, 1987).



**Figure 2.4-** Agrégation de deux machines et un stock par une machine équivalente

Considérons une ligne de production constituée de  $k$  machines et de  $(k-1)$  stocks intermédiaires. En suivant le principe énoncé ci-haut, on sera amené à effectuer  $(k-2)$  regroupements afin d'obtenir une ligne équivalente constituée de deux machines séparées par un stock intermédiaire comme montré à la figure 2.5. Nous faisons remarquer qu'il s'agit là d'une agrégation *amont* étant donné le sens dans lequel cette dernière est faite. On parle d'agrégation *aval* si l'agrégation est faite dans le sens inverse (Terracol et David, 1987).



**Figure 2.5-** Agrégation amont de quatre machines

En général, les méthodes de type agrégation sont moins précises mais plus rapides et plus simples à mettre en œuvre que les méthodes de type décomposition. Ces deux méthodes utilisent les solutions existantes d'une ligne de production constituée de deux machines séparées par un stock intermédiaire (2M1S pour 2 machines et 1 stock).

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les types de lignes de production les plus courants, les indicateurs de performances ainsi que les propriétés de ces lignes et des hypothèses générales de travail. Nous avons également introduit la notion de stocks intermédiaires et souligné leur rôle dans les lignes de production. Nous avons ensuite présenté les principaux modèles de lignes de production rencontrés dans la littérature ainsi que les caractéristiques propres à chacun d'eux. Étant donné que les solutions exactes de ces modèles

ne sont connus que pour le cas de ligne de type 2M1S, nous avons présenté les deux principales méthodes approximatives d'évaluation de performances de longues lignes, à savoir la méthode de décomposition et la méthode d'agrégation. Nous avons constaté que ces deux méthodes utilisent les solutions existantes d'une ligne de production de type 2M1S.

Ainsi, dans le chapitre suivant, nous présenterons les méthodes classiques d'évaluation de performances d'une ligne de type 2M1S dont les machines sont caractérisées par un seul mode de défaillance.



## CHAPITRE III

### ÉVALUATION DES PERFORMANCES D'UNE LIGNE SÉRIE DE DEUX MACHINES À UN MODE DE DÉFAILLANCE ET UN STOCK INTERMÉDIAIRE

Dans le présent chapitre, nous présenterons des modèles d'évaluation de performances des lignes de production série composée de deux machines non fiables à un mode de défaillance et un stock intermédiaire. Plus particulièrement, nous présenterons :

- le modèle déterministe, et
- le modèle continu.

Ces modèles utilisent les chaînes de Markov pour modéliser les machines de la ligne considérée. C'est pourquoi l'annexe 1 est consacrée à la présentation des chaînes de Markov dans les deux cas suivants :

- temps discret, états discrets;
- temps continu, états discrets.

Les concepts présentés ici sont d'une grande importance pour l'élaboration de nos modèles et extensions dans les chapitres suivants. Pour plus de détails sur ces concepts de base, le lecteur est référé à titre d'exemple à (Gershwin, 1994), (Dallery et Gershwin, 1992), (Dubois et Forestier, 1982), (Dallery et al, 1989) et (Gershwin, 1987).

## **1. Lignes de transfert à deux machines et un stock intermédiaire de capacité finie**

### **1.1. Représentation de l'état du système**

On représente l'état du système à un instant donné par le triplet  $(n, \alpha_1, \alpha_2)$  où :

- $n$  est le niveau du stock tampon ( $0 \leq n \leq N$ )
- $\alpha_1$  est l'état de la machine  $M1$  ( $\alpha_1 = 0$  ou  $1$ )
- $\alpha_2$  est l'état de la machine  $M2$  ( $\alpha_2 = 0$  ou  $1$ )

### **1.2. Le modèle déterministe**

La principale caractéristique du modèle déterministe est que la durée de temps nécessaire à une machine pour produire une pièce est fixe, connue d'avance et elle est la même pour toutes les machines de la ligne considérée. Généralement, on considère cette durée comme représentant une unité de temps.

On considère dans l'étude de ce modèle que les pannes dépendent de l'opération et non du temps. Ainsi, une machine oisive (bloquée ou affamée) ne peut pas tomber en panne.

### a. Équations de transitions internes

Les états internes sont les états pour lesquels  $2 \leq n \leq N-2$ . Les équations de transitions internes sont celles qui n'impliquent que les états internes. Elles sont au nombre de quatre :

$$P(n, 0, 0) = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2)P(n, 0, 0) + (1 - \mu_1)\lambda_2 P(n, 0, 1) + \lambda_1(1 - \mu_2)P(n, 1, 0) + \lambda_1\lambda_2 P(n, 1, 1) \quad (3.1)$$

$$P(n, 0, 1) = (1 - \mu_1)\mu_2 P(n+1, 0, 0) + (1 - \mu_1)(1 - \lambda_2)P(n+1, 0, 1) + \lambda_1\mu_2 P(n+1, 1, 0) + \lambda_1(1 - \lambda_2)P(n+1, 1, 1) \quad (3.2)$$

$$P(n, 1, 0) = \mu_1(1 - \mu_2)P(n-1, 0, 0) + \mu_1\lambda_2 P(n-1, 0, 1) + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)P(n-1, 1, 0) + (1 - \lambda_1)\lambda_2 P(n-1, 1, 1) \quad (3.3)$$

$$P(n, 1, 1) = \mu_1\mu_2 P(n, 0, 0) + \mu_1(1 - \lambda_2)P(n, 0, 1) + (1 - \lambda_1)\mu_2 P(n, 1, 0) + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)P(n, 1, 1) \quad (3.4)$$

### b. Équations de transitions frontières

Certains états du modèle sont transitoires et, ce faisant, leurs probabilités sont nulles :

- $(0,1,0)$  est transitoire car il ne peut être atteint par aucun état. En effet, si  $M1$  est opérationnelle et  $M2$  en panne à l'instant  $t+1$  (i.e.  $\alpha_1(t+1) = 1$  et  $\alpha_2(t+1) = 0$ ) alors le niveau du stock à l'instant  $t+1$  est égal au niveau du stock à l'instant  $t$  plus une unité (i.e.  $n(t+1) = n(t) + 1$ ).

- $(0,1,1)$  est transitoire car il ne peut être atteint par aucun état. Si  $n(t) = 0$  et  $\alpha_1(t+1) = \alpha_2(t+1) = 1$  alors  $n(t+1) = 1$  étant donné que  $M2$  est affamée et par conséquent non opérationnelle. Si par contre,  $n(t) > 0$  et  $\alpha_1(t+1) = \alpha_2(t+1) = 1$  alors  $n(t+1) = n(t)$ .
- $(0,0,0)$  est transitoire car il ne peut être atteint qu'à partir de  $(0,0,0)$  si aucune machine n'est réparée, ou à partir de  $(0,1,0)$  si  $M1$  tombe en panne. Cet état ne peut être atteint à partir de  $(0,0,1)$  ou de  $(0,1,1)$  étant donné que  $M2$  ne peut pas tomber en panne. Si  $n(t) > 0$  et  $\alpha_1(t+1) = \alpha_2(t+1) = 0$  alors  $n(t+1) = n(t)$ .
- $(1,0,0)$  est transitoire car il ne peut être atteint qu'à partir de  $(0,0,0)$  ou de  $(0,1,0)$ . Si  $\alpha_1(t+1) = 1$  et  $\alpha_2(t+1) = 0$  alors  $n(t+1) = n(t) + 1$ . Par conséquent,  $n(t) = 0$ . Cependant, cet état ne peut être atteint à partir de  $(0,0,1)$  car  $M2$  ne peut pas tomber en panne. Il ne peut non plus être atteint à partir de  $(0,1,1)$  pour la même raison.
- De façon similaire,  $(N,0,0)$ ,  $(N,0,1)$ ,  $(N,1,1)$  et  $(N-1,0,1)$  sont transitoires.

**Remarque :** Ne pas oublier qu'on a supposé qu'une machine inactive (affamée ou bloquée) ne peut pas tomber en panne. Dans le cas contraire, la liste des états transitoires aurait été différente.

### b.1. Équations frontières inférieures ( $n \leq 1$ )

Le système peut passer de (1,0,0) à (0,0,1) si  $M1$  n'est pas réparée alors que  $M2$  l'est. La transition de (1,0,1) vers (0,0,1) est possible à condition que  $M1$  ne soit pas réparée et que  $M2$  ne tombe pas en panne. La transition de (1,1,1) vers (0,0,1) est possible si  $M1$  tombe en panne et  $M2$  reste opérationnelle. Enfin, il peut rester à l'état (0,0,1) si  $M1$  n'est pas réparée (étant donné que  $M2$  est affamée, elle ne peut pas tomber en panne). Les autres transitions possibles se font à partir d'états transitoires. Ainsi, on obtient :

$$P(0,0,1) = (1 - \mu_1)P(0,0,1) + (1 - \mu_1)\mu_2P(1,0,0) + (1 - \mu_1)(1 - \lambda_2)P(1,0,1) + \lambda_1(1 - \lambda_2)P(1,1,1) \quad (3.5)$$

En suivant le même raisonnement, on trouve les autres équations frontières inférieures qui sont :

$$P(1,0,0) = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2)P(1,0,0) + (1 - \mu_1)\lambda_2P(1,0,1) + \lambda_1\lambda_2P(1,1,1) \quad (3.6)$$

$$P(1,0,1) = (1 - \mu_1)\mu_2P(2,0,0) + (1 - \mu_1)(1 - \lambda_2)P(2,0,1) + \lambda_1\mu_2P(2,1,0) + \lambda_1(1 - \lambda_2)P(2,1,1) \quad (3.7)$$

$$P(1,1,1) = \mu_1P(0,0,1) + \mu_1\mu_2P(1,0,0) + \mu_1(1 - \lambda_2)P(1,0,1) + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)P(1,1,1) \quad (3.8)$$

$$P(2,1,0) = \mu_1(1 - \mu_2)P(1,0,0) + \mu_1\lambda_2P(1,0,1) + (1 - \lambda_1)\lambda_2P(1,1,1) \quad (3.9)$$

### b.2. Équations frontières supérieures ( $n \geq N - 1$ )

En suivant le même raisonnement que pour les équations frontières inférieures, on obtient les équations frontières supérieures suivantes :

$$P(N-2,0,1) = (1-\mu_1)\mu_2P(N-1,0,0) + \lambda_1\mu_2P(N-1,1,0) + \lambda_1(1-\lambda_2)P(N-1,1,1) \quad (3.10)$$

$$P(N-1,0,0) = (1-\mu_1)(1-\mu_2)P(N-1,0,0) + \lambda_1(1-\mu_2)P(N-1,1,0) + \lambda_1\lambda_2P(N-1,1,1) \quad (3.11)$$

$$P(N-1,1,0) = \mu_1(1-\mu_2)P(N-2,0,0) + \mu_1\lambda_2P(N-2,0,1) + (1-\lambda_1)(1-\mu_2)P(N-2,1,0) + (1-\lambda_1)\lambda_2P(N-2,1,1) \quad (3.12)$$

$$P(N-1,1,1) = \mu_1\mu_2P(N-1,0,0) + (1-\lambda_1)\mu_2P(N-1,1,0) + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)P(N-1,1,1) + \mu_2P(N,1,0) \quad (3.13)$$

$$P(N,1,0) = \mu_1(1-\mu_2)P(N-1,0,0) + (1-\lambda_1)(1-\mu_2)P(N-1,1,0) + (1-\lambda_1)\lambda_2P(N-1,1,1) + (1-\mu_2)P(N,1,0) \quad (3.14)$$

### c. Équation de normalisation

$$\sum_{n=0}^N \sum_{\alpha_1=0}^1 \sum_{\alpha_2=0}^1 P(n, \alpha_1, \alpha_2) = 1 \quad (3.15)$$

### d. Mesures de performances (Gershwin, 2002)

On note par  $E_i$  l'efficacité (ou disponibilité) de la machine  $M_i$ . Les termes  $\lambda_s$  et  $\lambda_b$  représentent respectivement, les probabilités de famine et de blocage et  $\bar{n}$  représente le niveau moyen du stock. Ainsi :

$$E_1 = \sum_{n=0}^{N-1} (P(n,1,0) + P(n,1,1)) \quad (3.16)$$

$$E_2 = \sum_{n=1}^N (P(n,0,1) + P(n,1,1)) \quad (3.17)$$

$$\lambda_s = P(0,0,1) \quad (3.18)$$

$$\lambda_b = P(N,1,0) \quad (3.19)$$

$$\bar{n} = \sum_{\substack{n=0 \\ \alpha_1=0,1 \\ \alpha_2=0,1}}^N n \times P(n, \alpha_1, \alpha_2) \quad (3.20)$$

## e. Résolution du modèle

### e.1. Équations internes

Lorsqu'on est dans un état interne, cela implique qu'il n'y a ni blocage, ni famine. Le niveau du stock à l'instant  $t+1$  dépend donc de son niveau à l'instant  $t$  ainsi que de l'état des machines  $M1$  et  $M2$ , ce qui se traduit par :

$$n(t+1) = n(t) + \alpha_1(t+1) - \alpha_2(t+1) \quad (3.21)$$

À partir des équations internes, on constate que  $n$  apparaît à gauche tandis qu'à droite on voit apparaître  $n, n-1$  et  $n+1$ . On peut donc raisonnablement poser :

$$P(n, \alpha_1, \alpha_2) = X^n \phi(\alpha_1, \alpha_2) \quad (3.22)$$

En effectuant la substitution et en éliminant le facteur  $X^n$ , on obtient :

$$\phi(0, 0) = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2)\phi(0, 0) + (1 - \mu_1)\lambda_2\phi(0, 1) + \lambda_1(1 - \mu_2)\phi(1, 0) + \lambda_1\lambda_2\phi(1, 1) \quad (3.23)$$

$$X^{-1}\phi(0, 1) = (1 - \mu_1)\mu_2\phi(0, 0) + (1 - \mu_1)(1 - \lambda_2)\phi(0, 1) + \lambda_1\mu_2\phi(1, 0) + \lambda_1(1 - \lambda_2)\phi(1, 1) \quad (3.24)$$

$$X\phi(1, 0) = \mu_1(1 - \mu_2)\phi(0, 0) + \mu_1\lambda_2\phi(0, 1) + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)\phi(1, 0) + (1 - \lambda_1)\lambda_2\phi(1, 1) \quad (3.25)$$

$$\phi(1, 1) = \mu_1\mu_2\phi(0, 0) + \mu_1(1 - \lambda_2)\phi(0, 1) + (1 - \lambda_1)\mu_2\phi(1, 0) + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)\phi(1, 1) \quad (3.26)$$

On constate que lorsque le premier argument de  $\phi$  est 0, son coefficient a un facteur  $(1 - \mu_1)$  et lorsque cet argument est 1, son coefficient a un facteur  $\lambda_1$ . De même, lorsque le second argument de  $\phi$  est 0, son coefficient a un facteur  $(1 - \mu_2)$  et lorsque cet argument est 1, son coefficient a un facteur  $\lambda_2$ . On peut donc poser (Gershwin, 2002) :

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) = Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \quad (3.27)$$

En effectuant la substitution et après factorisation, on obtient :

$$1 = (1 - \mu_1 + Y_1\lambda_1)(1 - \mu_2 + Y_2\lambda_2) \quad (3.28)$$

$$X^{-1}Y_2 = (1 - \mu_1 + Y_1\lambda_1)(\mu_2 + Y_2(1 - \lambda_2)) \quad (3.29)$$

$$XY_1 = (\mu_1 + Y_1(1 - \lambda_1))(1 - \mu_2 + Y_2\lambda_2) \quad (3.30)$$

$$Y_1Y_2 = (\mu_1 + Y_1(1 - \lambda_1))(\mu_2 + Y_2(1 - \lambda_2)) \quad (3.31)$$

Étant donné que la dernière équation est le produit des trois premières, on a alors trois équations à trois inconnues qui, après simplification, donnent (Gershwin, 2002) :



$$1 = (1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1)(1 - \mu_2 + Y_2 \lambda_2) \quad (3.32)$$

$$XY_1 = \frac{\mu_1 + Y_1(1 - \lambda_1)}{1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1} \quad (3.33)$$

$$X^{-1}Y_2 = \frac{\mu_2 + Y_2(1 - \lambda_2)}{1 - \mu_2 + Y_2 \lambda_2} \quad (3.34)$$

Ces équations sont appelées *équations paramétriques*. Pour les résoudre, on commence par multiplier les deux dernières afin d'éliminer  $X$  et on simplifie avec la première pour avoir :

$$Y_1 Y_2 = (\mu_1 + Y_1(1 - \lambda_1))(\mu_2 + Y_2(1 - \lambda_2)) \quad (3.35)$$

À partir de l'équation (3.32), on obtient :

$$Y_2 = \frac{1}{\lambda_2} \left[ \frac{1}{1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1} - (1 - \mu_2) \right] \quad (3.36)$$

En remplaçant (3.36) dans (3.35), on obtient :

$$Y_1 \frac{1}{\lambda_2} \left[ \frac{1}{1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1} - (1 - \mu_2) \right] = (\mu_1 + Y_1(1 - \lambda_1)) \left( \mu_2 + \frac{1 - \lambda_2}{\lambda_2} \left[ \frac{1}{1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1} - (1 - \mu_2) \right] \right) \quad (3.37)$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par  $\lambda_2(1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1)$ , on a :

$$Y_1 [1 - (1 - \mu_2)(1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1)] = (\mu_1 + Y_1(1 - \lambda_1)) [\mu_2 \lambda_2 (1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1) + [1 - (1 - \mu_2)(1 - \mu_1 + Y_1 \lambda_1)(1 - \lambda_2)]] \quad (3.38)$$

Cette dernière est une équation quadratique en  $Y_1$ . Après certaines manipulations

(Gershwin, 1994), on trouve :

$$0 = Y_1^2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2) - Y_1(\mu_1(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2) + \lambda_1(\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)) + \mu_1(\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) \quad (3.39)$$

Cette équation a les deux solutions suivantes :

$$Y_{11} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \quad (3.40)$$

$$Y_{12} = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2}$$

En utilisant (3.32) et (3.34), on peut déterminer les  $X_j$  et  $Y_{2j}$  correspondant, à savoir :

$$\left. \begin{array}{l} Y_{11} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \\ Y_{21} = \frac{\mu_2}{\lambda_2} \\ X_1 = 1 \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

$$\left. \begin{array}{l} Y_{12} = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2} \\ Y_{22} = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\mu_1} \\ X_2 = \frac{Y_{22}}{Y_{12}} \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

Ainsi, la solution des états internes est (Gershwin, 2002) :

$$P(n, \alpha_1, \alpha_2) = C_1 X_1^n Y_{11}^{\alpha_1} Y_{21}^{\alpha_2} + C_2 X_2^n Y_{12}^{\alpha_1} Y_{22}^{\alpha_2} \quad (3.43)$$

À ce stade, il ne nous reste plus qu'à :

- 1) développer les  $P(n, \alpha_1, \alpha_2)$  pour  $n = 0, 1, N - 1$ .
- 2) trouver les  $C_j$ .

### e.2. Équations frontières

Tous les termes du membre droit de l'expression de  $P(1,0,1)$  représentent des états internes. On peut donc écrire :

$$P(1,0,1) = C_1 X_1 Y_{21} + C_2 X_2 Y_{22} \quad (3.44)$$

Rappelons que :  $P(2,1,0) = P(1,0,1)$

Alors :

$$\sum_{j=1}^2 C_j X_j^2 Y_{1j} = \sum_{j=1}^2 C_j X_j Y_{2j}$$

ou

$$\sum_{j=1}^2 C_j X_j [X_j Y_{1j} - Y_{2j}] = 0 \quad (3.45)$$

Notons que si  $j=2$  alors  $X_j Y_{1j} - Y_{2j} = 0$ . Si  $e_1 \neq e_2$  (où  $e_i$  est la disponibilité stationnaire de la machine  $M_i$  en isolation et défini par :  $e_i = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i}$ ) et  $j=1$  alors  $X_j Y_{1j} - Y_{2j} \neq 0$  et par conséquent  $C_1 = 0$ .

En ce qui concerne les équations frontières inférieures,  $P(0,0,1)$ ,  $P(1,0,0)$  et  $P(1,1,1)$  restent inconnues et doivent satisfaire leurs équations respectives. Le fait d'avoir quatre équations à trois inconnues n'est pas un problème compte tenu du fait qu'on a déjà considéré le cas de l'équation supplémentaire en les sommant et en exigeant que  $C_1 = 0$ .

Afin de déterminer les probabilités frontières inférieures, on constate que l'expression de  $P(0,0,1)$  peut être réécrite ainsi (Gershwin, 2002) :

$$\mu_1 P(0,0,1) = (1 - \mu_1) \mu_2 P(1,0,0) + (1 - \mu_1)(1 - \lambda_2) P(1,0,1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) P(1,1,1) \quad (3.46)$$

En la remplaçant dans l'expression de  $P(1,1,1)$ , on a :

$$\begin{aligned} P(1,1,1) &= \mu_2 P(1,0,0) + (1 - \lambda_2) CXY_2 + (1 - \lambda_2) P(1,1,1) \\ \text{ou} \\ \lambda_2 P(1,1,1) &= \lambda_2 P(1,0,0) + (1 - \lambda_2) CXY_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

L'expression de  $P(1,0,0)$  peut être réécrite ainsi :

$$(\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2)P(1,0,0) = (1 - \mu_1)\lambda_2 CXY_2 + \lambda_1\lambda_2 P(1,1,1) \quad (3.48)$$

Les deux dernières équations impliquent deux inconnues. En éliminant  $P(1,1,1)$  et après simplification, on a :

$$(\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2)P(1,0,0) = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\mu_1)CXY_2 \quad (3.49)$$

Cependant, l'expression de  $Y_2$  dans (3.42) implique que :

$$P(1,0,0) = CX \quad (3.50)$$

Ainsi, (3.47) devient :

$$\lambda_2 P(1,1,1) = CX(\mu_2 + (1 - \lambda_2)Y_2) \quad (3.51)$$

Ce qui implique que :

$$P(1,1,1) = \frac{CX}{\lambda_2} \times \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\lambda_2} \quad (3.52)$$

Enfin,  $P(0,0,1)$  est obtenue à partir de (3.46) :

$$P(0,0,1) = CX \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{\mu_1\lambda_2} \quad (3.53)$$

De la même manière, on traite les équations frontières supérieures.

### e.3. Liste des probabilités à l'état d'équilibre

La liste de toutes les probabilités à l'état d'équilibre est indiquée ci-dessous :

$$P(0,0,0) = 0$$

$$P(0,0,1) = CX \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{\mu_1\lambda_2}$$

$$P(0,1,0) = 0$$

$$P(0,1,1) = 0$$

$$P(1,0,0) = CX$$

$$P(1,0,1) = CXY_2$$

$$P(1,1,0) = 0$$

$$P(1,1,1) = \frac{CX}{\lambda_2} \times \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\lambda_2}$$

$$P(N-1,0,0) = CX^{N-1}$$

$$P(N-1,0,1) = 0$$

$$P(N-1,1,0) = CX^{N-1}Y_1$$

$$P(N-1,1,1) = \frac{CX^{N-1}}{\lambda_1} \times \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2}$$

$$P(N,0,0) = 0$$

$$P(N,0,1) = 0$$

$$P(N,1,0) = CX^{N-1} \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2}{\lambda_1\mu_2}$$

$$P(N,1,1) = 0$$

$$P(n, \alpha_1, \alpha_2) = CX^n Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2}; \quad 2 \leq n \leq N-2; \quad \alpha_1 = 0,1; \quad \alpha_2 = 0,1$$

où :

$$Y_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2}$$

$$Y_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\lambda_2}$$

$$X = \frac{Y_2}{Y_1}$$

et  $C$  est une constante de normalisation obtenue à partir de l'équation de normalité.

#### e.4. Remarque importante

Certaines probabilités d'états frontières sont de forme interne (sont exprimées uniquement à l'aide d'états internes). Pour des valeurs raisonnables des paramètres  $\lambda_i$  et  $\mu_i$ , les probabilités frontières non nulles qui ne sont pas de forme interne sont beaucoup plus grandes que les probabilités d'états internes. Ceci est dû au fait que le système tend à passer beaucoup plus de temps dans ces états que dans les états internes (Gershwin, 1994).

Il n'y a rien de spécial à mentionner au sujet des états internes. Quand le système est dans un état interne, il y reste si les états de machines sont identiques, ou il quitte cet état s'ils sont différents. Cependant, si la machine  $M1$  tombe en panne, le stock peut se vider. (Si  $M1$  est réparée avant que le stock ne se vide, le système reste dans un état interne). À chaque fois que le stock se vide, indépendamment de l'état que le système occupait avant panne, le système est dans l'état  $(0,0,1)$ . En outre, il reste dans cet état jusqu'à ce que  $M1$  soit réparée (étant donné que  $M2$  ne peut pas tomber en panne, et que le niveau du stock ne peut pas

changer). Après réparation, le système change d'état pour atteindre (1,1,1). C'est parce qu'une seule pièce arrive dans le stock et aucune n'en sort pendant cette unité de temps. Le système demeurera dans cet état jusqu'à ce que  $M1$  ou  $M2$  tombe en panne.

### 1.3. Le modèle continu

Dans cette section, on considère une ligne de transfert à temps continu et à états discrets. Plus concrètement, la matière traitée par cette ligne est supposée être un fluide continu.

#### a. Équations de transitions internes

Lorsque le stock n'est ni vide ni plein, son niveau varie en fonction des états des machines adjacentes. Étant donné qu'il ne peut varier que d'une petite quantité durant un court intervalle de temps, il est possible d'utiliser les équations différentielles afin de décrire son comportement (Levantesi et al, 2003).

Ainsi, la probabilité que les deux machines soient opérationnelles et que le niveau de stock soit entre  $x$  et  $x + \delta x$  à l'instant  $t + \delta t$  est donné par  $f(x,1,1,t + \delta t)\delta x$ , où :

$$f(x,1,1,t + \delta t) = (1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\delta t)f(x + (U_2 - U_1)\delta t, 1, 1, t) + \mu_1\delta t f(x + U_2\delta t, 0, 1, t) + \mu_2\delta t f(x - U_1\delta t, 1, 0, t) + o(\delta t) \quad (3.54)$$

Où  $U_1$  et  $U_2$  représentent le débit de production de  $M_1$  et  $M_2$ .



Ceci est dû au fait que si les deux machines sont opérationnelles à l'instant  $t$  et que le niveau du stock est entre  $x + (U_2 - U_1)\delta t$  et  $x + (U_2 - U_1)\delta t + \delta x$ , alors la probabilité qu'il n'y ait pas de panne avant  $t + \delta t$  est  $(1 - \lambda_1\delta t)(1 - \lambda_2\delta t)$  et à l'instant  $t + \delta t$ , le niveau de stock sera entre  $x$  et  $x + \delta x$ .

Si, à l'instant  $t$ , la machine  $M1$  est en réparation et la machine  $M2$  est opérationnelle, la probabilité pour que les deux machines soient opérationnelles à l'instant  $t + \delta t$  est  $\mu_1\delta t$  avec une approximation de premier ordre. Durant cet intervalle de temps, le niveau du stock diminue de  $U_2\delta t$ . On obtient l'expression du troisième terme de manière similaire. En faisant tendre  $\delta t$  vers zéro, cette équation devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 1, 1) = -(\lambda_1 + \lambda_2)f(x, 1, 1) + (U_2 - U_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x, 1, 1) + \mu_1 f(x, 0, 1) + \mu_2 f(x, 1, 0) \quad (3.55)$$

Les trois autres équations internes sont (Levantesi et al, 2003) :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0, 0) = -(\mu_1 + \mu_2)f(x, 0, 0) + \lambda_2 f(x, 0, 1) + \lambda_1 f(x, 1, 0) \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0, 1) = U_2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0, 1) - (\mu_1 + \lambda_2)f(x, 0, 1) + \lambda_1 f(x, 1, 1) + \mu_2 f(x, 0, 0) \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 1, 0) = -U_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, 1, 0) - (\lambda_1 + \mu_2)f(x, 1, 0) + \lambda_2 f(x, 1, 1) + \mu_1 f(x, 0, 0) \quad (3.58)$$

### b. Équations de transitions frontières

Alors que le comportement interne du système peut être décrit par des densités de probabilités, le système peut atteindre un état frontière donné avec une probabilité non nulle. Par exemple, si  $U_1 < U_2$  et que les deux machines sont opérationnelles, le niveau de stock tend à diminuer. Si la situation perdure assez longtemps, le stock sera vide ( $x = 0$ ). Lorsque le système atteint l'état  $(0,1,1)$ , il y reste jusqu'à ce qu'une des deux machines tombe en panne.

Il y a huit états frontières  $(x, \alpha_1, \alpha_2)$  où  $x = 0$  ou  $N$ ;  $\alpha_1 = 0$  ou  $1$  et  $\alpha_2 = 0$  ou  $1$  et autant d'équations de transitions. Il y a trois versions de ces équations selon que  $U_1 > U_2$ ,  $U_1 < U_2$  ou  $U_1 = U_2$ .

#### b.1. Équations frontières inférieures ( $x = 0$ )

Si le système se trouve à l'état  $(0,0,0)$  à l'instant  $t + \delta t$ , cela signifie qu'il ne pouvait se trouver, à l'instant  $t$ , que dans l'un des états  $(0,0,0)$  ou  $(0,1,0)$ . Ainsi :

$$P(0,0,0,t + \delta t) = (1 - (\mu_1 + \mu_2)\delta t)P(0,0,0,t) + \lambda_1\delta t P(0,1,0,t) + o(\delta t) \quad (3.59)$$

Lorsque  $\delta t$  tend vers zéro, on a :

$$\frac{dP(0,0,0)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2)P(0,0,0) + \lambda_1P(0,1,0) \quad (3.60)$$

Il est évident que si la machine  $M1$  est opérationnelle et la machine  $M2$  en panne, le stock ne peut pas être vide. Ce faisant :

$$P(0,1,0) = 0 \quad (3.61)$$

Afin d'atteindre l'état  $(0,0,1)$  à l'instant  $t + \delta t$ , le système ne pouvait se trouver à l'instant  $t$  que dans l'un des états suivants : à l'état  $(0,0,0)$  avec réparation de  $M2$  ou à l'état  $(0,0,1)$  sans réparation de  $M1$  ou à l'état  $(0,1,1)$  avec panne de  $M1$  ou encore à l'état  $(x,0,1)$  où  $0 < x \leq U_2 \delta t$  sans réparation de  $M1$  ni panne de  $M2$ . On obtient donc :

$$P(0,0,1,t + \delta t) = \mu_2 \delta t P(0,0,0,t) + (1 - \mu_1 \delta t) P(0,0,1,t) + \lambda_1 \delta t P(0,1,1,t) + \int_0^{U_2 \delta t} f(x,0,1) dx$$

(3.62)

ou

$$\frac{dP(0,0,1)}{dt} = \mu_2 P(0,0,0) - \mu_1 P(0,0,1) + \lambda_1 P(0,1,1) + U_2 f(0,0,1)$$

Si  $U_1 > U_2$ , la transition de  $(0,1,1)$  vers  $(0,1,1)$  est impossible car  $M1$  produit plus vite que  $M2$  ne consomme. Pour la même raison, la transition de  $(0,0,1)$  vers  $(0,1,1)$  est impossible. Enfin, si à l'instant  $t$  le système est à l'état  $(x,1,1)$  et aucune panne n'a lieu entre  $t$  et  $t + \delta t$  alors le système sera à l'instant  $t + \delta t$  à l'état  $(x',1,1)$  où  $x' > x$ . Donc :

$$P(0,1,1) = 0 \quad (3.63)$$

Afin d'être à l'état  $(x,1,1)$  à l'instant  $t + \delta t$  où  $0 < x < U_1 \delta t$ , le système pouvait être dans l'un des états  $(x,1,1)$  ou  $(x,0,0)$  mais leurs probabilités sont de second ordre. Au premier ordre, on a :

$$\int_0^{U_1 \delta t} f(x,1,0,t + \delta t) dx = \int_0^{t + \delta t} (\mu_1 P(0,0,0,s) + \lambda_2^b P(0,1,1,s)) ds + (1 - (\lambda_1 + \mu_2) \delta t) P(0,1,0,t) \quad (3.64)$$

On a vu plus haut que :

$$P(0,1,0,t) = 0$$

Donc l'équation précédente devient :

$$U_1 f(0,1,0) = \mu_1 P(0,0,0) + \lambda_2^b P(0,1,1) \quad (3.65)$$

Si  $U_1 > U_2$ , on peut atteindre l'état  $(x,1,1)$  où  $0 < x \leq (U_1 - U_2) \delta t$ . Ainsi :

$$\int_0^{(U_1 - U_2) \delta t} f(x,1,1,t + \delta t) dx = \mu_1 \int_t^{t + \delta t} P(0,0,1,s) ds$$

(3.66)

ou

$$(U_1 - U_2) f(0,1,1) = \mu_1 P(0,0,1)$$

### b.2. Équations frontières supérieures ( $x = N$ )

Ces équations sont obtenues de manière analogue aux équations frontières inférieures.

On obtient donc :

$$\frac{dP(N,0,0)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2)P(N,0,0) \quad (3.67)$$

$$\frac{dP(N,1,0)}{dt} = \mu_1 P(N,0,0) - \mu_2 P(N,1,0) + \lambda_2 P(N,1,1) + U_1 f(N,1,0) \quad (3.68)$$

$$\frac{dP(N,1,1)}{dt} = -(\lambda_1^b + \lambda_2)P(N,1,1) + (U_1 - U_2)f(N,1,1) + \mu_2 P(N,1,0) \quad (si \ U_1 \geq U_2) \quad (3.69)$$

$$\frac{dP(N,1,1)}{dt} = 0 \quad (si \ U_1 < U_2) \quad (3.70)$$

$$P(N,0,1) = 0 \quad (3.71)$$

$$U_2 f(N,0,1) = \mu_2 P(N,0,0) + \lambda_1^b P(N,1,1) \quad (3.72)$$

$$(U_2 - U_1)f(N,1,1) = \mu_2 P(N,1,0) \quad (si \ U_1 < U_2) \quad (3.73)$$

**Remarque :** Dans les équations ci-dessus, on constate la présence du paramètre  $\lambda_1^b$ . Ce paramètre est défini par l'expression suivante :

$$\lambda_1^b = \lambda_1 \times \frac{\min(U_1, U_2)}{U_1} = \lambda_1 \times \frac{U_2}{U_1} \quad (3.74)$$

Ce paramètre est dû au fait que si le stock tampon est plein (ce qui n'arrive que dans le cas où  $U_1 > U_2$ ), la machine  $M1$  est ralentie par la machine  $M2$  car elle ne peut produire qu'une fois que  $M2$  ait consommé et ce faisant,  $x < N$ .

### c. Équation de normalité

La somme de toutes les probabilités est toujours égale à 1.

D'où :

$$\sum_{\alpha_1=0,1} \sum_{\alpha_2=0,1} \left[ \int_0^N f(x, \alpha_1, \alpha_2) dx + P(0, \alpha_1, \alpha_2) + P(N, \alpha_1, \alpha_2) \right] = 1 \quad (3.75)$$

### d. Mesures de performance

#### d.1. Niveau moyen du stock

Cette mesure de performance est donnée par :

$$\bar{x} = \sum_{\alpha_1=0,1} \sum_{\alpha_2=0,1} \left[ \int_0^N x f(x, \alpha_1, \alpha_2) dx + N P(N, \alpha_1, \alpha_2) \right] \quad (3.76)$$

#### d.2. Taux de production

Le taux de production moyen  $P2$  représente le taux auquel la matière quitte  $M2$ .

Lorsque le stock n'est pas vide et que  $M2$  est opérationnelle, ce taux est  $U_2$ . Lorsque le stock est vide et que les deux machines sont opérationnelles, alors ce taux est  $U_1$ . Ainsi :

$$P2 = U_2 \left[ \int_0^N (f(x, 0, 1) + f(x, 1, 1)) dx + P(N, 1, 1) \right] + U_1 P(0, 1, 1) \quad (3.77)$$

De même,  $P1$  est le taux auquel la matière entre dans le système (et par conséquent entre dans  $M1$ ). Ainsi :

$$P1 = U_1 \left[ \int_0^N (f(x,1,0) + f(x,1,1)) dx + P(0,1,1) \right] + U_2 P(N,1,1) \quad (3.78)$$

L'équation suivante établit la conservation du flux :

$$(U_2 - U_1)f(x,1,1) + U_2 f(x,0,1) - U_1 f(x,1,0) = 0 \quad (0 \leq x \leq N) \quad (3.79)$$

Cela signifie que  $P1 = P2$ .

Les équations de transitions en régime permanent ont un état d'équilibre dans lequel toutes les dérivées temporelles disparaissent. On constate ainsi que :

$$P(0,0,0) = P(0,1,0) = P(N,0,0) = P(N,0,1) = 0$$

et

$$P(0,1,1) = 0 \quad (\text{si } U_1 > U_2)$$

$$P(N,1,1) = 0 \quad (\text{si } U_1 < U_2) \quad (3.80)$$

### e. Résolution du modèle

Il est naturel de considérer une forme exponentielle pour la solution des équations internes étant donné qu'elles représentent un ensemble d'équations différentielles linéaires ordinairement couplées (Gershwin, 1994), d'où :

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2) = C e^{\rho x} Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \quad (3.81)$$

où :  $C, Y_1, Y_2$  et  $\rho$  sont à déterminer.

Cette forme satisfait les équations internes à l'état d'équilibre si (Levantesi et al, 2003) :

$$\sum_{i=1}^2 (\lambda_i Y_i - \mu_i) = 0 \quad (3.82)$$

$$-U_1 \rho = (\lambda_1 Y_1 - \mu_1) \frac{1+Y_1}{Y_1} \quad (3.83)$$

$$U_2 \rho = (\lambda_2 Y_2 - \mu_2) \frac{1+Y_2}{Y_2} \quad (3.84)$$

On a donc trois équations à trois inconnues que l'on appelle *équations paramétriques*. Une solution possible est :

$$Y_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1}; Y_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_2}; \rho = 0 \quad (3.85)$$

En éliminant  $\rho$  et  $Y_2$  et en retirant le facteur  $(\lambda_1 Y_1 - \mu_1)$ , on obtient une équation quadratique en  $Y_1$  :

$$-(U_2 - U_1) \lambda_1 Y_1^2 + [(U_2 - U_1)(\mu_1 + \mu_2) - (U_2 \lambda_1 + U_1 \lambda_2)] Y_1 + U_2(\mu_1 + \mu_2) = 0 \quad (3.86)$$

**Cas où  $U_1 = U_2 = U$**  : dans ce cas, l'équation précédente se réduit à une équation linéaire. Ainsi :



$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
Y_2 &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
\rho &= \frac{1}{U} (\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1) \left( \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \right)
\end{aligned} \tag{3.87}$$

En ce qui concerne les équations frontières :

$$P(0, 0, 1) = C \frac{U}{\mu_1 \lambda_2} (\mu_1 + \mu_2) \tag{3.88}$$

$$P(0, 1, 1) = C \frac{U}{\lambda_2} \times \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{3.89}$$

$$P(N, 0, 1) = C \frac{U}{\lambda_1 \mu_2} e^{\rho N} (\mu_1 + \mu_2) \tag{3.90}$$

$$P(N, 1, 1) = C \frac{U}{\lambda_1} e^{\rho N} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{3.91}$$

où  $C$  est obtenue à partir de l'équation de normalité.

**Cas où  $U_1 \neq U_2$  :** étant donné que dans ce cas, l'équation quadratique précédente a deux solutions  $Y_{1j}$ , alors :

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{j=1}^2 C_j e^{\rho_j x} Y_{1j}^{\alpha_1} Y_{2j}^{\alpha_2} \tag{3.92}$$

où les  $Y_{ij}$  et  $\rho_i$  sont déterminées à partir des équations paramétriques.

En ce qui concerne les équations frontières, on distingue deux cas :  $U_1 > U_2$  et  $U_1 < U_2$ .

*Cas 1 :  $U_1 > U_2$*

$$P(0,1,1) = 0 \quad (3.93)$$

$$P(0,0,1) = \frac{U_1 - U_2}{\mu_1} \sum_{j=1}^2 C_j Y_{1j} Y_{2j} \quad (3.94)$$

$$P(N,1,0) = \frac{U_1}{\mu_2 \lambda_1} (\mu_1 + \mu_2) \sum_{j=1}^2 C_j e^{\rho_j N} \quad (3.95)$$

$$P(N,1,1) = \frac{U_1}{\lambda_1} \sum_{j=1}^2 C_j e^{\rho_j N} Y_{2j} \quad (3.96)$$

Pour obtenir les constantes  $C_1$  et  $C_2$ , on a besoin de deux équations linéaires. La première est :

$$C_1 Y_{11} + C_2 Y_{12} = 0 \quad (3.97)$$

et la seconde est l'équation de normalité. En effectuant toutes les intégrations et toutes les sommes, elle se réduit à une équation de la forme :

$$A_1 C_1 + A_2 C_2 = 1 \quad (3.98)$$

où  $A_1$  et  $A_2$  dépendent des données du problème.

**Cas 2 :**  $U_1 < U_2$

$$P(0,0,1) = \frac{U_2}{\mu_1 \lambda_2} (\mu_1 + \mu_2) \sum_{j=1}^2 C_j \quad (3.99)$$

$$P(0,1,1) = \frac{U_2}{\lambda_2} \sum_{j=1}^2 C_j Y_{1j} \quad (3.100)$$

$$P(N,1,0) = \frac{U_2 - U_1}{\mu_2} \sum_{j=1}^2 C_j e^{\rho_j N} Y_{1j} Y_{2j} \quad (3.101)$$

$$P(N,1,1) = 0 \quad (3.102)$$

Ici  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées à partir de  $A_1 C_1 + A_2 C_2 = 1$  et de  $P(N,1,0)$  tandis que  $A_1$  et  $A_2$  sont déterminées à partir de l'équation de normalisation, des probabilités ci-dessus ainsi que l'expression de  $f(x, \alpha_1, \alpha_2)$ .

### **Taux de production**

Il est possible de déterminer le taux de production à partir des équations précitées plus haut ou plus simplement à partir des équations suivantes :

$$P1 = U_1 e_1 (1 - \lambda_b) \quad (3.103)$$

$$P2 = U_2 e_2 (1 - \lambda_s) \quad (3.104)$$

où :

$e_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$ ;  $i = 1, 2$  représente l'efficacité de  $M_i$  en isolation,

$\lambda_b = P(N, 1, 0) + (1 - \frac{U_2}{U_1})P(N, 1, 1)$  représente la probabilité de blocage, et

$\lambda_s = P(0, 0, 1) + (1 - \frac{U_1}{U_2})P(0, 1, 1)$  représente la probabilité de famine.

### *Niveau moyen du stock*

On distingue plusieurs cas :

- Si  $U_1 = U_2$  et  $\rho \neq 0$  :

$$\bar{x} = C \left( \frac{1+Y}{Y} \right)^2 \left[ e^{\rho N} (\rho N - 1) + 1 \right] + N (P(N, 1, 0) + P(N, 1, 1)) \quad (3.105)$$

- Si  $U_1 = U_2$  et  $\rho = 0$  :

$$\bar{x} = \frac{C}{2} (N(1+Y))^2 + N (P(N, 1, 0) + P(N, 1, 1)) \quad (3.106)$$

- Si  $U_1 \neq U_2$  et  $\rho_1 \neq 0$  et  $\rho_2 \neq 0$  :

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^2 C_j \left( \frac{1+Y_{1j}}{\rho_j} \right) \left( \frac{1+Y_{2j}}{\rho_j} \right) \left[ e^{\rho N} (\rho N - 1) + 1 \right] + N (P(N, 1, 0) + P(N, 1, 1)) \quad (3.107)$$

- Si  $U_1 \neq U_2$  et  $\rho_1 = 0$  ou  $\rho_2 = 0$  : On remplace le terme correspondant par :

$$\frac{C_j}{2} N^2 (1+Y_{1j})(1+Y_{2j}) \quad (3.108)$$

## 2. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les concepts de base les plus courants en terme d'évaluation de performance des lignes de transfert. Nous avons ainsi présenté en détail le modèle déterministe et le modèle continu dans le cas de machines à un mode de défaillance. Ces modèles, qui servent à l'évaluation de performances de lignes de transfert composées d'un stock intermédiaire et de deux machines non fiables à un seul mode de défaillance sont à la base de l'évaluation de lignes plus longues soit par la technique de décomposition, ou bien par la technique d'agrégation. C'est à partir de ces modèles que (Levantesi et al, 2003) ont défini leur modèle d'évaluation de performances de lignes de production où les lignes ont plusieurs modes de défaillances. Au chapitre V nous utiliserons ce dernier modèle pour l'évaluation de performances de lignes de transfert composées d'un stock intermédiaire et de deux machines non fiables pouvant avoir deux modes de défaillances.

Au prochain chapitre, nous présentons la technique d'agrégation initialement introduite dans (Terracol et David, 1987).

## CHAPITRE IV

### TECHNIQUE D'AGRÉGATION POUR DES LIGNES DE PRODUCTION SÉRIE AVEC MACHINES À UN SEUL MODE DE DÉFAILLANCE ET STOCKS INTERMÉDIAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons la technique d'agrégation telle qu'initialement définie par (Terracol et David, 1987). Cette technique permet d'évaluer les performances de lignes de production composées de machines non fiables et de stocks intermédiaires de capacité finie. Les machines considérées ici ne peuvent avoir qu'un seul mode de défaillance.

Comme son nom l'indique, cette technique procède par agrégation de machines en associant, tour à tour, à chaque ensemble de deux machines et un stock intermédiaire de la ligne considérée une machine équivalente jusqu'à obtention d'une machine équivalente à la ligne complète. On évalue ensuite les performances de cette machine équivalente. On remarque deux types d'agrégation :

- L'agrégation dite « amont » : dans laquelle la machine équivalente est déterminée en parcourant la ligne de sa première machine jusqu'à la dernière.

- L'agrégation dite « aval » : dans laquelle la machine équivalente est déterminée en parcourant la ligne en sens inverse de la dernière machine jusqu'à la première.

Nous présenterons, dans un premier temps, les caractéristiques d'une machine en isolation, puis nous définirons une machine équivalente amont et une machine équivalente aval à un ensemble de deux machines et un stock intermédiaire. L'agrégation de lignes de production comptant plus que deux machines consiste simplement à itérer le précédent processus afin de définir pour chaque ensemble de deux machines et un stock intermédiaire de la ligne originale une machine équivalente (amont ou aval). Ainsi, de proche en proche on obtient une machine équivalente à la ligne complète.

### 1. Caractérisation d'une machine en isolation

Une machine  $M_i$  est caractérisée par le triplet  $C_i = (U_i, \lambda_i, \mu_i)$  où :

- $U_i$  : cadence de production
- $\lambda_i$  : taux de panne
- $\mu_i$  : taux de réparation

Cette machine peut occuper l'un des deux états suivants :

- Opération (état  $A^i$ ) avec cadence  $U_i$
- Panne (état  $N^i$ ) avec cadence 0

Les transitions entre ces deux états sont markoviennes de taux  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  tel que représenté par la figure 4.1.

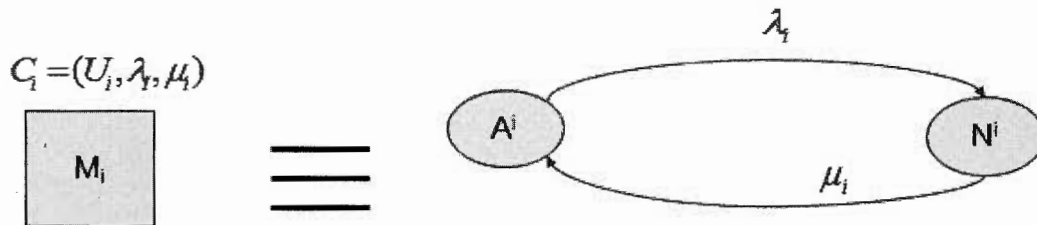


Figure 4.1- États d'une machine  $M_i$

## 2. Caractérisation d'une ligne de deux machines et un stock intermédiaire

Pour une ligne de deux machines et un stock intermédiaire, on définit une machine équivalente  $M_{12}^u$  vue de l'amont et caractérisée par  $C_{12}^u = (U_{12}^u, \lambda_{12}^u, \mu_{12}^u)$  et une machine équivalente  $M_{12}^d$  vue de l'aval et caractérisée par  $C_{12}^d = (U_{12}^d, \lambda_{12}^d, \mu_{12}^d)$ .

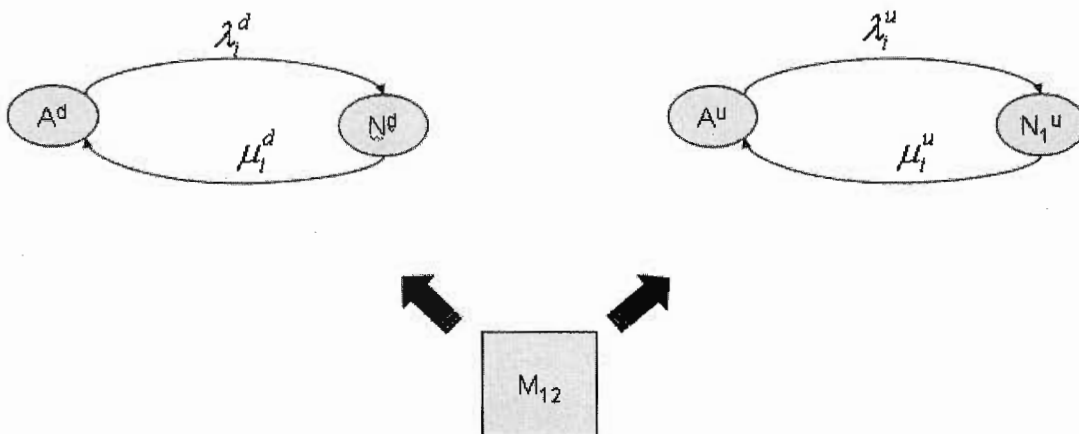


Figure 4.2- Définition des machines équivalentes amont et aval



L'état du système est défini par  $E = (x, \alpha_1, \alpha_2)$  où :

- $x$  représente le niveau du stock intermédiaire ( $0 \leq x \leq N$ )
- $\alpha_i = 1$  si  $M_i$  est opérationnelle
- $\alpha_i = 0$  si  $M_i$  est en panne

Le système est dit « synchrone » si  $U_1 = U_2 = U$ .

Le système est dit « poussé » si  $U_1 > U_2$

Le système est dit « tiré » si  $U_1 < U_2$

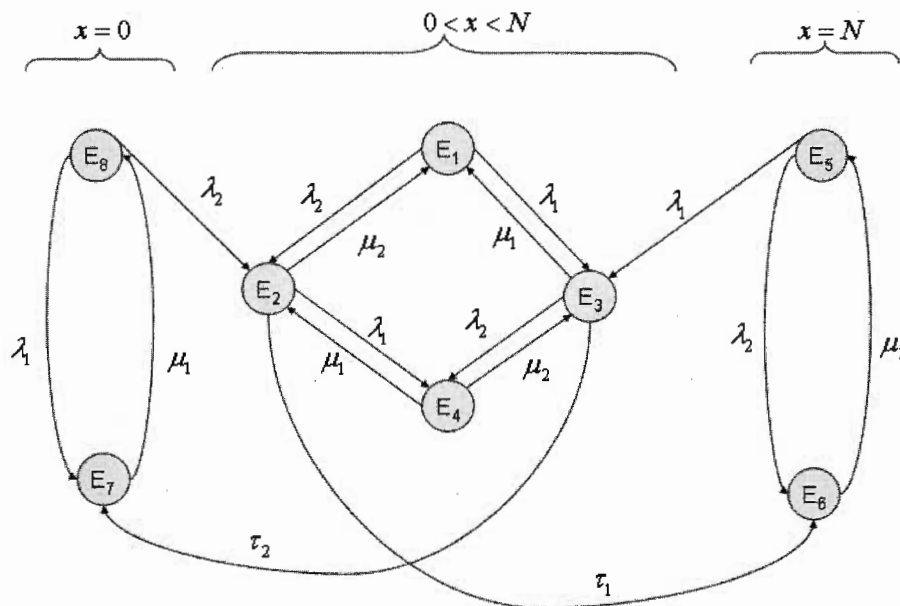
### 2.1. Graphe de transitions d'états du système synchrone

La figure ci-dessous représente toutes les transitions entre les états du système synchrone. À partir de cette figure nous allons identifier les macros états qui nous permettront de définir les paramètres des machines équivalentes. Les états représentés par les  $E_i$  sont indiqués dans le tableau suivant.

États	M1	M2	Stock
$E_1$	1	1	$x$
$E_2$	1	0	$x$
$E_3$	0	1	$x$
$E_4$	0	0	$x$
$E_5$	1	1	$N$
$E_6$	1 bloqué	0	$N$
$E_7$	0	1 affamé	0
$E_8$	1	1	0

**Tableau 4.1-** États du système synchrone

Les états  $E_1$  à  $E_4$  caractérisent les états internes du système tandis que les états  $E_5$  à  $E_8$  caractérisent les états frontières.



**Figure 4.3-** Graphe de transitions d'états du système synchrone (Terracol et David, 1987)

## 2.2. Graphe de transitions d'états du système poussé

La figure ci-dessous représente toutes les transitions entre les états du système poussé. À partir de la figure 4.4 nous allons identifier les macros états qui nous permettront de définir les paramètres des machines équivalentes. Les états représentés par les  $E_i$  sont indiqués dans le tableau suivant.

États	$M1$	$M2$	$Stock$
$E_1$	1	1	$x$
$E_2$	1	0	$x$
$E_3$	0	1	$x$
$E_4$	0	0	$x$
$E_5$	1 ralenti	1	$N$
$E_6$	1 bloqué	0	$N$
$E_7$	0	1 affamé	0
$E_8$	1	1	0

**Tableau 4.2-** États du système poussé

Dans le tableau ci-dessus, l'état  $E_8$  est grisé car impossible à atteindre. En effet, dans le cas du système poussé, la machine  $M1$  produit plus rapidement que  $M2$  ne consomme. Il est donc impossible que le stock se vide alors que les deux machines sont en opération.

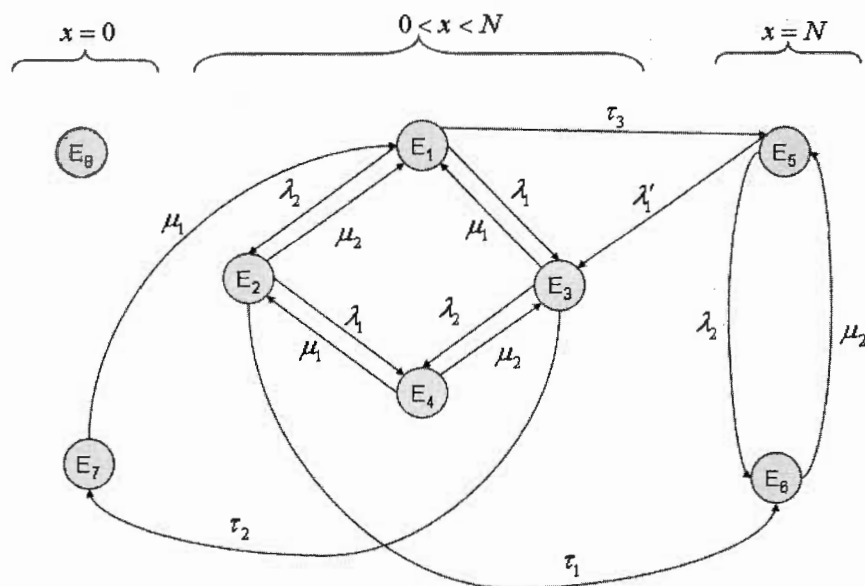


Figure 4.4- Graphe de transitions d'états du système poussé

### 2.3. Graphe de transitions d'états du système tiré

La figure ci-dessous représente toutes les transitions entre les états du système tiré. À partir de cette figure nous allons identifier les macros états qui nous permettront de définir les paramètres des machines équivalentes. Les états représentés par les  $E_i$  sont indiqués dans le tableau suivant.

États	M1	M2	Stock
$E_1$	1	1	$x$
$E_2$	1	0	$x$
$E_3$	0	1	$x$
$E_4$	0	0	$x$
$E_5$	1	1	$N$
$E_6$	1 bloqué	0	$N$
$E_7$	0	1 affamé	0
$E_8$	1	1 ralenti	0

**Tableau 4.3-** États du système tiré

Dans le tableau ci-dessus, l'état  $E_5$  est grisé car impossible à atteindre. En effet, dans le cas du système tiré, la machine  $M2$  consomme plus rapidement que  $M1$  ne produit. Il est donc impossible que le stock soit plein alors que les deux machines sont en opération.

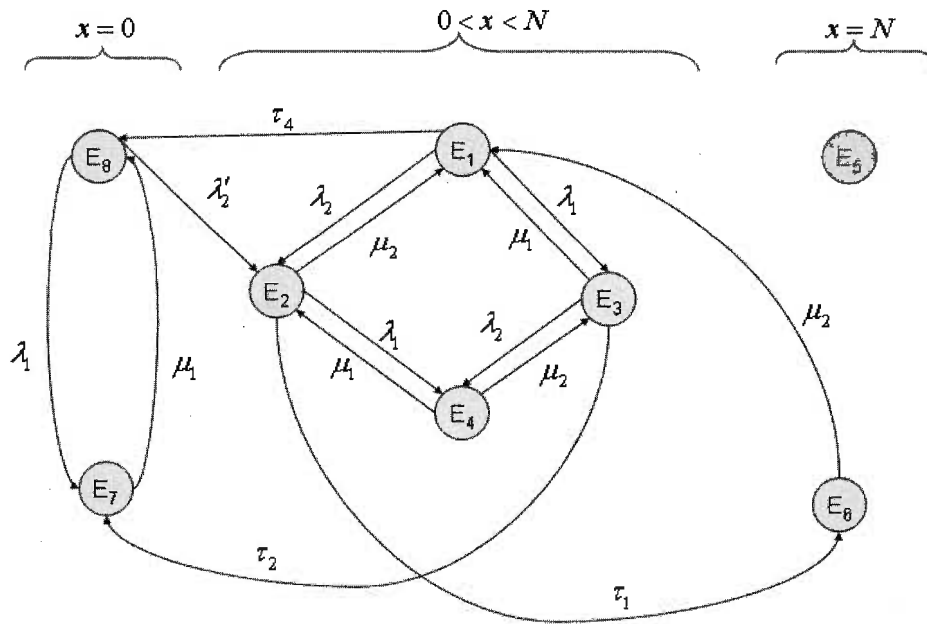


Figure 4.5- Graphe de transitions d'états du système tiré

#### 2.4. Probabilités des états

Dans les prochaines sections, on notera par  $prob_i$  la probabilité de l'état  $E_i$ . Ces probabilités sont calculées à l'aide des modèles présentés au chapitre précédent.

### 3. Machine équivalente

#### 3.1. Système synchrone

Vu de l'amont, le système est productif si  $M1$  est productive, c'est-à-dire dans l'un des états  $E_1, E_2, E_5$  ou  $E_8$ . On peut donc noter  $A^u = E_1 + E_2 + E_5 + E_8$ . On note par  $N^u$  le macro état où le système est panne, donc  $N^u = E_3 + E_4 + E_6 + E_7$ .

Vu de l'aval, le système est productif si  $M2$  l'est, soit  $A^d = E_1 + E_3 + E_5 + E_8$  et donc

$$N_1^d = E_2 + E_4 + E_6 + E_7.$$

Les macros états  $A^u$  et  $N^u$  (respectivement  $A^d$  et  $N^d$ ) sont représentés sur la Figure 4.6 (respectivement 4.7). Les taux de transitions entre ces macros états vont nous permettre de déterminer  $\lambda^u$  et  $\mu^u$  (respectivement  $\lambda^d$  et  $\mu^d$ ). Cependant,  $\tau_1$  (respectivement  $\tau_2$ ) ne sont pas connus. Pour connaître leurs valeurs, considérons l'état  $E_6$  (respectivement  $E_7$ ) de la Figure 4.3. On peut donc écrire :

$$prob_2\tau_1 + prob_3\lambda_2 = prob_6\mu_2 \quad (4.1)$$

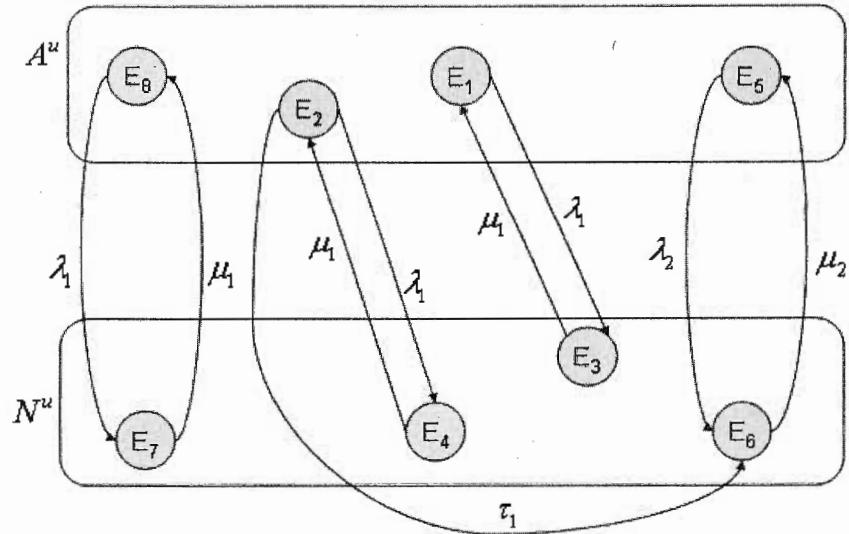
$$prob_3\tau_2 + prob_8\lambda_1 = prob_7\mu_1 \quad (4.2)$$

Étant donné que  $\tau_1$  (respectivement  $\tau_2$ ) sont les seuls inconnues de ces deux équations, on les détermine facilement :

$$\tau_1 = \frac{prob_6\mu_2 - prob_3\lambda_2}{prob_2} \quad (4.3)$$

$$\tau_2 = \frac{prob_7\mu_1 - prob_8\lambda_1}{prob_3} \quad (4.4)$$

De la même manière, on calcule les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  et  $\tau_4$  apparaissant dans les figures 4.4 et 4.5.



**Figure 4.6-** Transitions entre les macros états  $A^u$  et  $N^u$  (système synchrone)

À partir de la figure ci-dessus, on déduit les valeurs de  $\lambda^u$  et  $\mu^u$ . La probabilité du macro état  $A^u$  est la somme des probabilités qui le composent soit  $prob_1 + prob_2 + prob_5 + prob_8$ . On en déduit alors le taux de transition de  $A^u$  à  $N^u$  :

$$\lambda^u = \frac{prob_1 \lambda_1 + prob_2 (\lambda_1 + \tau_1) + prob_5 (\lambda_1 + \lambda_2) + prob_8 \lambda_1}{prob_1 + prob_2 + prob_5 + prob_8} \quad (4.5)$$

De façon analogue, on trouve :

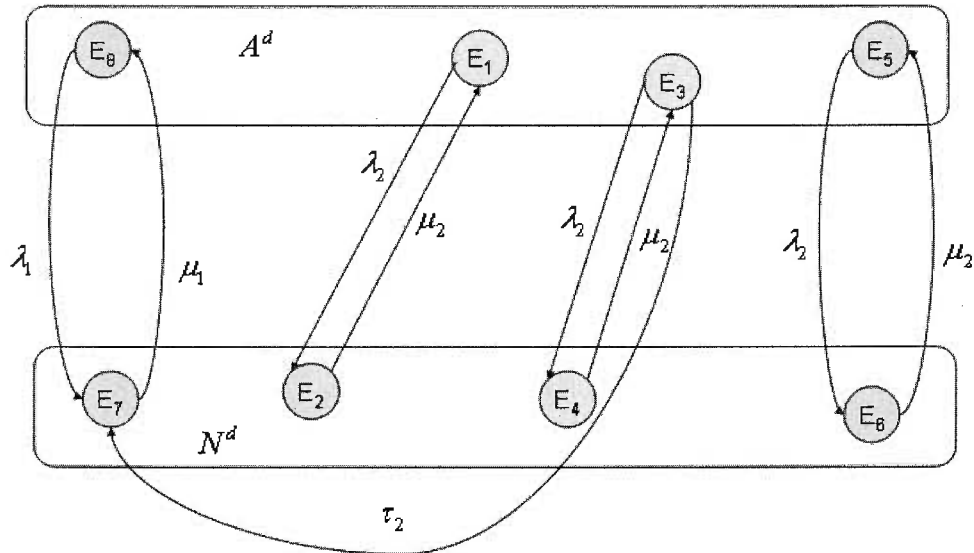
$$\mu^u = \frac{prob_3 \mu_1 + prob_4 \mu_1 + prob_6 \mu_2 + prob_7 \mu_1}{prob_3 + prob_4 + prob_6 + prob_7} \quad (4.6)$$



Étant donné que nous sommes dans le cas du système synchrone, on a :

$$U^u = U \quad (4.7)$$

$$U^d = U \quad (4.8)$$



**Figure 4.7-** Transitions entre les macros états  $A^d$  et  $N^d$  (système synchrone)

La figure 4.7 nous permet de déduire les valeurs de  $\lambda^d$  et  $\mu^d$ . En appliquant la même manière que pour le cas précédent, on trouve :

$$\lambda^d = \frac{\text{prob}_1 \lambda_2 + \text{prob}_3 (\lambda_2 + \tau_2) + \text{prob}_5 \lambda_2 + \text{prob}_8 (\lambda_1 + \lambda_2)}{\text{prob}_1 + \text{prob}_3 + \text{prob}_5 + \text{prob}_8} \quad (4.9)$$

$$\mu^d = \frac{\text{prob}_2 \mu_2 + \text{prob}_4 \mu_2 + \text{prob}_6 \mu_2 + \text{prob}_7 \mu_1}{\text{prob}_2 + \text{prob}_4 + \text{prob}_6 + \text{prob}_7} \quad (4.10)$$

### 3.2. Système poussé

La Figure 4.8 (respectivement 4.9) représente les transitions entre les macros états du système vu de l'amont (respectivement de l'aval).

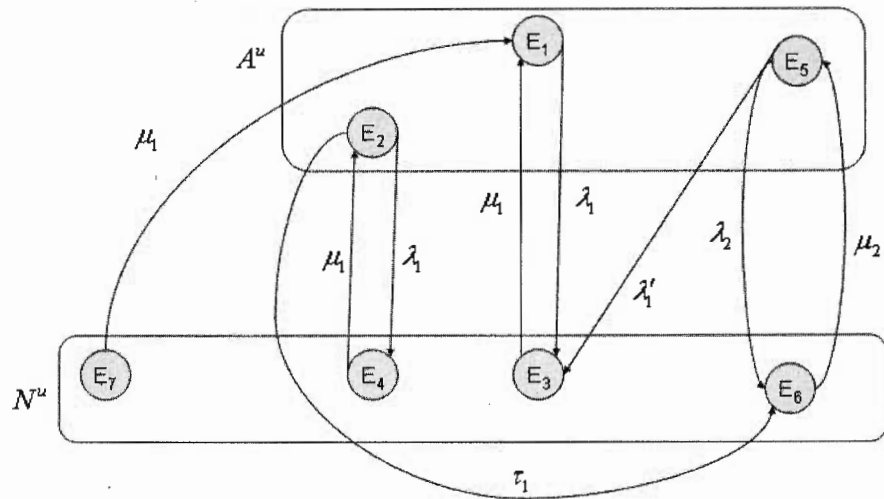


Figure 4.8- Transitions entre les macros états  $A^u$  et  $N^u$  (système poussé)

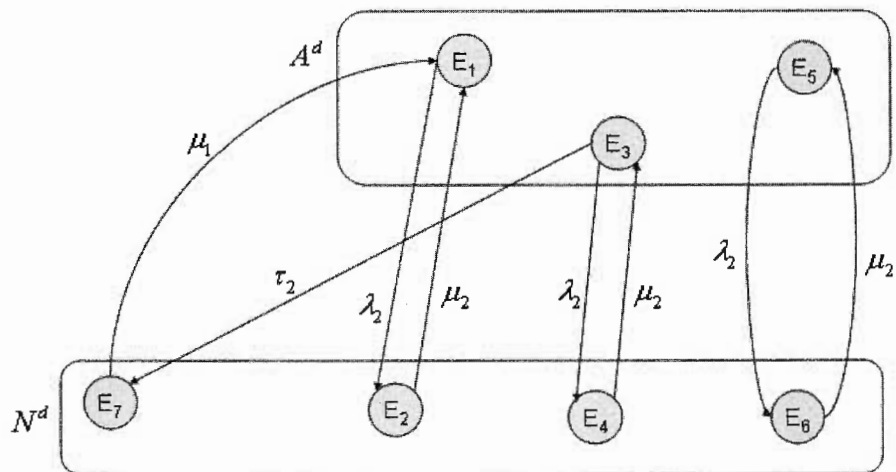


Figure 4.9- Transitions entre les macros états  $A^d$  et  $N^d$  (système poussé)

Dans le cas du système vu de l'aval, on déduit facilement, à partir de la figure (4.9), les paramètres de la machine équivalente :

$$U^d = U_2 \quad (4.11)$$

$$\lambda^d = \frac{\text{prob}_1 \lambda_2 + \text{prob}_3 (\lambda_2 + \tau_2) + \text{prob}_5 \lambda_2}{\text{prob}_1 + \text{prob}_3 + \text{prob}_5} \quad (4.12)$$

$$\mu^d = \frac{\text{prob}_2 \mu_2 + \text{prob}_4 \mu_2 + \text{prob}_6 \mu_2 + \text{prob}_7 \mu_1}{\text{prob}_2 + \text{prob}_4 + \text{prob}_6 + \text{prob}_7} \quad (4.13)$$

Pour le cas du système vu de l'amont, c'est un peu plus délicat, car ici le macro état  $A''$  est composé des trois états  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_5$  mais leurs cadences de production sont différentes. En effet,  $E_1$  et  $E_2$  sont des états internes tels que la machine  $M1$  produit à sa cadence  $U_1$ . En revanche, l'état  $E_5$  est un état frontière et  $M1$  fonctionne au ralenti au débit  $U_2$  parce que le stock intermédiaire est plein. Ainsi,  $U''$  est une moyenne pondérée de  $U_1$  et  $U_2$ . Ainsi, on obtient :

$$U'' = \frac{U_1 (\text{prob}_1 + \text{prob}_2) + U_2 \text{prob}_5}{\text{prob}_1 + \text{prob}_2 + \text{prob}_5} \quad (4.14)$$

$$\lambda'' = \frac{\text{prob}_1 \lambda_1 + \text{prob}_2 (\lambda_1 + \tau_1) + \text{prob}_5 (\lambda'_1 + \lambda_2)}{\text{prob}_1 + \text{prob}_2 + \text{prob}_5} \quad (4.15)$$

$$\mu'' = \frac{\text{prob}_3 \mu_1 + \text{prob}_4 \mu_1 + \text{prob}_6 \mu_2 + \text{prob}_7 \mu_1}{\text{prob}_3 + \text{prob}_4 + \text{prob}_6 + \text{prob}_7} \quad (4.16)$$

où  $\lambda'_1$  est déterminé comme ceci :

$$\lambda'_1 = \lambda_1 \times \frac{U_2}{U_1} \quad (4.17)$$

L'explication de ce taux réduit est la suivante : la machine  $M1$  ne peut produire plus d'une pièce par période de temps  $\frac{1}{U_2}$ . La durée de fonctionnement normal nécessaire à cette

production est  $\frac{1}{U_1}$  et la probabilité de panne pendant cette période est  $\frac{\lambda_1}{U_1}$ . Si on considère

que  $M1$  fonctionne au taux de production ralenti  $U_2$ , la probabilité de panne durant la période

$$\frac{1}{U_2} \text{ est donc : } \frac{\lambda'_1}{U_2} = \frac{\lambda_1}{U_1}.$$

### 3.3. Système tiré

La Figure 4.10 (respectivement 4.11) représente les transitions entre les macros états du système vu de l'amont (respectivement de l'aval).

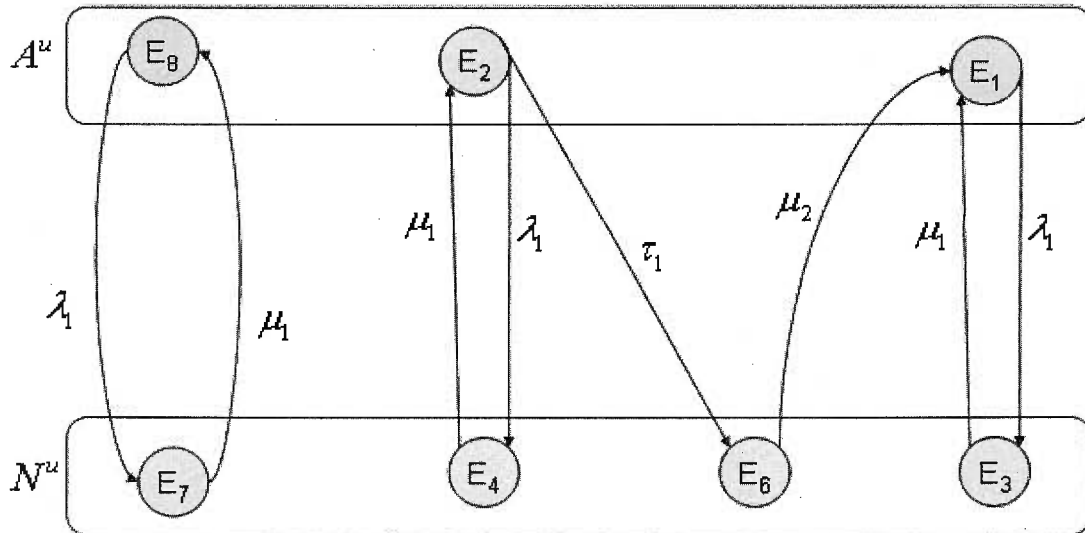


Figure 4.10- Transitions entre les macros états  $A''$  et  $N''$  (système tiré)

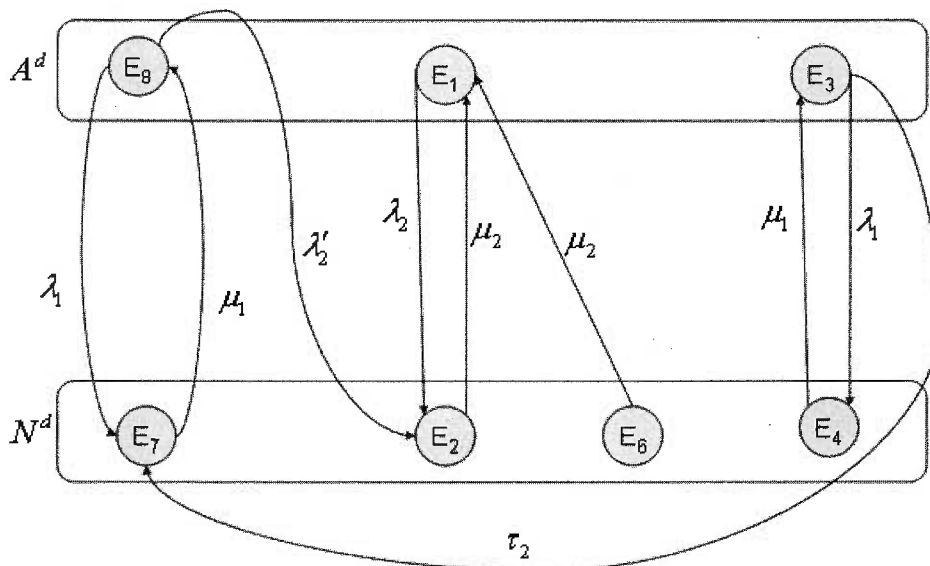


Figure 4.11- Transitions entre les macros états  $A^d$  et  $N^d$  (système tiré)

Les paramètres de la machine équivalente amont sont déduits à partir de la figure 4.10.

On obtient alors :

$$U^u = U_1 \quad (4.18)$$

$$\lambda^u = \frac{prob_1 \lambda_1 + prob_2 (\lambda_1 + \tau_1) + prob_8 \lambda_1}{prob_1 + prob_2 + prob_8} \quad (4.19)$$

$$\mu^u = \frac{prob_3 \mu_1 + prob_4 \mu_1 + prob_6 \mu_2 + prob_7 \mu_1}{prob_3 + prob_4 + prob_6 + prob_7} \quad (4.20)$$

Dans le cas amont, la cadence de production de la machine équivalente est déterminée de la même manière que la cadence de production de la machine équivalente aval dans le cas du système poussé. Ainsi, on trouve :

$$U^d = \frac{U_2 (prob_1 + prob_3) + U_1 prob_8}{prob_1 + prob_3 + prob_8} \quad (4.21)$$

$$\lambda^d = \frac{prob_1 \lambda_2 + prob_3 (\lambda_2 + \tau_2) + prob_8 (\lambda_1 + \lambda'_2)}{prob_1 + prob_3 + prob_8} \quad (4.22)$$

$$\mu^d = \frac{prob_2 \mu_2 + prob_4 \mu_2 + prob_6 \mu_2 + prob_7 \mu_1}{prob_2 + prob_4 + prob_6 + prob_7} \quad (4.23)$$

#### 4. Évaluation du taux de production de la ligne

Après agrégation de la ligne de production par une machine équivalente, on évalue le taux de production de la ligne comme ceci :

$$PR = U^{eq} P(A) = \frac{U^{eq}}{1 + \frac{\lambda_{eq}}{\mu_{eq}}} \quad (4.24)$$

où :  $U^{eq}$ ,  $\lambda_{eq}$  et  $\mu_{eq}$  représentent respectivement le débit, le taux de panne et le taux de réparation de la machine équivalente.

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la technique d'agrégation telle que définie dans (Terracol et David, 1987). Nous avons tout d'abord caractérisé une machine en isolation avant d'expliquer le processus de définition des machines équivalentes amont et aval pour un ensemble de deux machines et un stock intermédiaire et nous avons montré comment évaluer le taux de production de ces machines équivalentes. Nous avons également expliqué que la définition des machines équivalentes pour des lignes de production plus longues consiste simplement à itérer le processus jusqu'à parcourir toute la ligne.

Au chapitre VI, nous allons étendre cette technique afin de pouvoir évaluer les performances de lignes de production dont les machines peuvent avoir deux modes de défaillances. Mais avant cela nous allons, au prochain chapitre, utiliser le modèle de (Levantesi et al, 1999) et l'appliquer dans le cas de machines pouvant avoir deux modes de défaillances pour l'évaluation des performances de lignes de production série composées d'un stock intermédiaire et de deux machines. Ce modèle s'avère nécessaire puisqu'il va constituer la pierre angulaire pour notre méthode d'agrégation du chapitre VI.

## CHAPITRE V

### ÉVALUATION DES PERFORMANCES D'UNE LIGNE SÉRIE DE DEUX MACHINES À DEUX MODES DE DÉFAILLANCE ET UN STOCK INTERMÉDIAIRE

Dans ce chapitre, nous utilisons le modèle d'évaluation de performances développé par (Levantesi et al, 1999) et nous l'appliquons au cas d'une ligne de production série composée d'un stock intermédiaire et de deux machines pouvant avoir deux modes de défaillances. Ce modèle s'inspire des modèles présentés au chapitre III dans lesquels les machines ne peuvent avoir qu'un seul mode de défaillance. Le flux de matière dans ce modèle est supposé continu. Le fait de considérer distinctement les différents modes de défaillances est courant en pratique. En effet, les machines sont composées de composants qui tombent en pannes à des fréquences différentes les unes des autres, étant donné que leurs fiabilités sont différentes menant ainsi à des défaillances plus ou moins sévères. Tel que confirmé dans (Levantesi et al, 2003), la plupart des techniques existantes ne permettent pas de tenir compte explicitement de plusieurs modes de défaillances. Ce faisant, les différents modes de défaillances sont regroupés en un seul mode dont le taux représente la moyenne des taux de pannes des modes de défaillances réels au moyen d'une approximation de premier ordre. Cependant, le fait de considérer



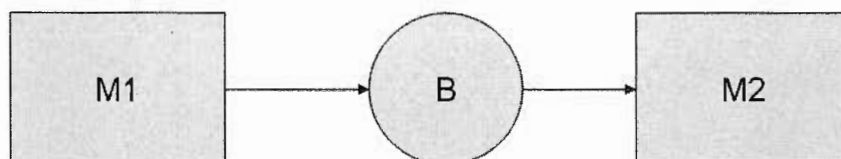
explicitement les différents modes de défaillances permet d'identifier les diverses raisons menant à l'interruption des opérations de la machine, ce qui permet d'estimer l'impact de chaque type de défaillance sur la disponibilité de la machine. L'estimation de la performance d'une ligne en distinguant entre les différents modes de défaillances en permettra une évaluation plus précise.

### 1. Modélisation d'une ligne de deux machines et d'un stock intermédiaire

Dans ce qui suit, nous allons appliquer le modèle de (Levantesi et al, 1999) pour l'évaluation des performances d'une ligne de production série avec deux machines non fiables et un stock intermédiaire.

Tel que mentionné plus haut, nous considérons le flux de matière comme continu car cette technique permet de supporter des temps d'opération déterministes mais différents.

La ligne considérée est représentée par la figure suivante :



**Figure 5.1-** Ligne à deux machines et un stock intermédiaire

Rappelons aussi que ce type de ligne constitue le modèle de base pour l'évaluation des performances de lignes comptant plus que deux machines. C'est pourquoi nous allons étudier ce modèle avant d'évaluer des lignes plus longues par la technique d'agrégation que nous présenterons au chapitre suivant.

### 1.1. Hypothèses de modélisation

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- Le stock intermédiaire est de capacité finie ( $0 \leq x \leq N$ ).
- Le flux de matière traversant la ligne est supposé continu.
- Le flux de matière entre dans le système par la machine  $M1$  puis transite par le stock, ensuite il passe par  $M2$  et finalement quitte le système.
- Lorsqu'une machine est en panne dans un mode donné, elle ne produit pas.
- La première machine n'est jamais affamée et la seconde n'est jamais bloquée.
- Les machines ont des cadences de production différentes.
- À l'état initial (i.e.  $t = 0$ ), les deux machines sont opérationnelles.
- Les pannes sont dépendantes de l'opération. Ainsi, une machine qui n'est pas en opération (bloquée ou affamée) ne peut pas tomber en panne.
- Une machine ne peut pas être dans plusieurs modes de pannes en même temps. De même, une machine qui est dans un mode de panne donné ne peut tomber en panne dans un autre mode avant d'être réparée.
- Les taux de pannes et de réparations suivent des distributions exponentielles.

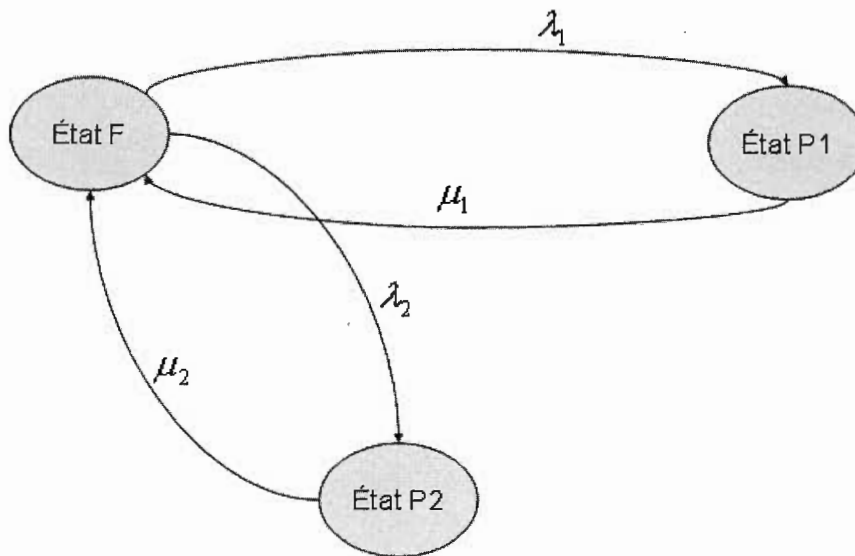
### 1.2. Caractéristiques d'une machine en isolation

On modélise une machine par une chaîne de Markov à états discrets et à temps continu.

Cette machine possède trois états :

- **État F** : la machine est en opération et produit à la cadence  $U$ .
- **État P1** : la machine est en panne en mode 1. Elle ne produit donc pas.
- **État P2** : la machine est en panne en mode 2. Elle ne produit donc pas.

La figure ci-dessous montre les transitions d'états possibles :



**Figure 5.2-** États d'une machine en isolation

Lorsque la machine est à l'état  $F$ , elle peut tomber en panne en mode 1 (respectivement en mode 2) avec un taux  $\lambda_1$  (respectivement  $\lambda_2$ ). Elle passe alors à l'état  $P1$  (respectivement  $P2$ ). Elle est ensuite réparée et ramenée à l'état  $F$  avec un taux  $\mu_1$  (respectivement  $\mu_2$ ).

Pour déterminer le taux de production de cette machine, on utilise le principe de balance de probabilité (qui n'est valable qu'en régime permanent) :

*« La probabilité de quitter un état est égale à la probabilité d'y accéder »*

Ceci nous permet d'écrire les équations de Chapman Kolmogorov suivantes :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)P(F) = \mu_1 P(P1) + \mu_2 P(P2) \quad (5.1)$$

$$\mu_1 P(P1) = \lambda_1 P(F) \quad (5.2)$$

$$\mu_2 P(P2) = \lambda_2 P(F) \quad (5.3)$$

Les probabilités doivent également satisfaire l'équation de normalité suivante :

$$P(F) + P(P1) + P(P2) = 1 \quad (5.4)$$

La résolution du système d'équations (5.1) à (5.4) donne :

$$P(F) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} \quad (5.5)$$

$$P(P1) = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} \quad (5.6)$$

$$P(P2) = \frac{\frac{\lambda_2}{\mu_2}}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} \quad (5.7)$$

Le taux de production de la machine est alors donné par :

$$TP = U \times P(F) = \frac{U}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}} \quad (5.8)$$

### 1.3. États du système

L'état du système à un instant donné est représenté par le triplet  $(x, \alpha_1, \alpha_2)$  où :

- $x$  est le niveau du stock intermédiaire ( $0 \leq x \leq N$ )
- $\alpha_1$  est l'état de la machine  $M1$  ( $\alpha_1 = F, P1, P2$ )
- $\alpha_2$  est l'état de la machine  $M2$  ( $\alpha_2 = F, P1, P2$ )

Les paramètres de la machine  $M_i$  sont :

- La cadence de production :  $U_i$
- Le taux de panne en mode 1 :  $\lambda_{1i}$
- Le taux de réparation du mode 1 :  $\mu_{1i}$
- Le taux de panne en mode 2 :  $\lambda_{2i}$
- Le taux de réparation du mode 2 :  $\mu_{2i}$

## 1.4. Développement du modèle

### a. Les équations de transitions internes

Lorsque le stock n'est ni vide ni plein (i.e.  $0 < x < N$ ), son niveau peut augmenter ou diminuer dépendamment des états des machines adjacentes.

Sachant qu'il ne peut varier que d'une petite quantité durant un court intervalle de temps, on peut donc étudier son comportement en utilisant une fonction de densité de probabilité  $f(x, \alpha_1, \alpha_2)$  ainsi que des équations différentielles.

La probabilité pour que les deux machines soient à l'état  $F$  avec un niveau de stock entre  $x$  et  $x + \delta x$  à l'instant  $t + \delta t$  est donnée par  $f(x + (U_2 - U_1)\delta t, F, F)\delta x$  où :

$$\begin{aligned} f(x, F, F, t + \delta t) = & (1 - (\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22})\delta t)f(x + (U_2 - U_1)\delta t, F, F) + \mu_{11}\delta t f(x + U_2\delta t, P1, F) \\ & + \mu_{12}\delta t f(x - U_1\delta t, F, P1) + \mu_{21}\delta t f(x + U_2\delta t, P2, F) + \mu_{22}\delta t f(x - U_1\delta t, F, P2) \\ & + o(\delta t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pour les autres probabilités, on obtient de manière similaire :

$$\begin{aligned} f(x, F, P1, t + \delta t) = & (1 - (\lambda_{11} + \lambda_{21} + \mu_{12})\delta t)f(x - U_1\delta t, F, P1) + \mu_{11}\delta t f(x, P1, P1) \\ & + \mu_{21}\delta t f(x, P2, P1) + \lambda_{12}\delta t f(x + (U_2 - U_1)\delta t, F, F) + o(\delta t) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} f(x, F, P2, t + \delta t) = & (1 - (\lambda_{11} + \lambda_{21} + \mu_{22})\delta t)f(x - U_1\delta t, F, P2) + \mu_{11}\delta t f(x, P1, P2) \\ & + \mu_{21}\delta t f(x, P2, P2) + \lambda_{22}\delta t f(x + (U_2 - U_1)\delta t, F, F) + o(\delta t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} f(x, P1, F, t + \delta t) = & (1 - (\mu_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{22})\delta t)f(x + U_2\delta t, P1, F) + \mu_{12}\delta t f(x, P1, P1) \\ & + \mu_{22}\delta t f(x, P1, P2) + \lambda_{11}\delta t f(x + (U_2 - U_1)\delta t, F, F) + o(\delta t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} f(x, P2, F, t + \delta t) = & (1 - (\mu_{21} + \lambda_{12} + \lambda_{22})\delta t)f(x + U_2\delta t, P2, F) + \mu_{12}\delta t f(x, P2, P1) \\ & + \mu_{22}\delta t f(x, P2, P2) + \lambda_{21}\delta t f(x + (U_2 - U_1)\delta t, F, F) + o(\delta t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$f(x, P1, P1, t + \delta t) = (1 - (\mu_{11} + \mu_{12})\delta t)f(x, P1, P1) + \lambda_{11}\delta t f(x - U_1\delta t, F, P1) \\ + \lambda_{12}\delta t f(x + U_2\delta t, P1, F) + o(\delta t) \quad (5.14)$$

$$f(x, P2, P2, t + \delta t) = (1 - (\mu_{21} + \mu_{22})\delta t)f(x, P2, P2) + \lambda_{21}\delta t f(x - U_1\delta t, F, P2) \\ + \lambda_{22}\delta t f(x + U_2\delta t, P2, F) + o(\delta t) \quad (5.15)$$

$$f(x, P1, P2, t + \delta t) = (1 - (\mu_{11} + \mu_{22})\delta t)f(x, P1, P2) + \lambda_{11}\delta t f(x - U_1\delta t, F, P2) \\ + \lambda_{22}\delta t f(x + U_2\delta t, P1, F) + o(\delta t) \quad (5.16)$$

$$f(x, P2, P1, t + \delta t) = (1 - (\mu_{21} + \mu_{12})\delta t)f(x, P2, P1) + \lambda_{21}\delta t f(x - U_1\delta t, F, P1) \\ + \lambda_{12}\delta t f(x + U_2\delta t, P2, F) + o(\delta t) \quad (5.17)$$

Pour l'équation (5.9) (de même que pour les autres d'ailleurs), le premier terme représente la probabilité de transition de  $(x + (U_2 - U_1)\delta t, F, F)$  à  $(x + (U_2 - U_1)\delta t + \delta x, F, F)$  à l'instant  $t$  vers entre  $(x, F, F)$  et  $(x + \delta x, F, F)$  à l'instant  $t + \delta t$ . Ceci est dû au fait que s'il n'y a pas de panne entre  $t$  et  $t + \delta t$  et que le niveau du stock tampon est entre  $x$  et  $x + \delta x$  à l'instant  $t + \delta t$  alors il ne pouvait qu'être entre  $x + (U_2 - U_1)\delta t$  et  $x + (U_2 - U_1)\delta t + \delta x$  à l'instant  $t$ . En négligeant les termes d'ordre 2, la probabilité pour qu'il n'y ait pas de panne entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$  est alors :

$$(1 - (\lambda_{11} + \lambda_{21})\delta t)(1 - (\lambda_{12} + \lambda_{22})\delta t) \approx (1 - (\lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{12} + \lambda_{22})\delta t) \quad (5.18)$$

De manière similaire on trouve les probabilités de transitions des états  $(x - U_1\delta t, F, P1)$ ,  $(x - U_1\delta t, F, P2)$ ,  $(x + U_2\delta t, P1, F)$  et  $(x + U_2\delta t, P2, F)$  vers l'état  $(x, F, F)$ .

Après avoir linéarisé l'équation et en faisant tendre  $\delta t$  vers zéro, l'équation (5.9) devient (Levantesi et al, 1999) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, F, F)}{\partial t} = & (U_2 - U_1) \frac{\partial f(x, F, F)}{\partial x} - (\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22}) f(x, F, F) + \mu_{11} f(x, P1, F) \\ & + \mu_{12} f(x, F, P1) + \mu_{21} f(x, P2, F) + \mu_{22} f(x, F, P2) \end{aligned} \quad (5.19)$$

En régime permanent,  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} (U_2 - U_1) \frac{\partial f(x, F, F)}{\partial x} - (\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22}) f(x, F, F) + \mu_{11} f(x, P1, F) \\ + \mu_{12} f(x, F, P1) + \mu_{21} f(x, P2, F) + \mu_{22} f(x, F, P2) = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

De la même façon, les huit autres équations de transitions internes sont :

$$\begin{aligned} -U_1 \frac{\partial f(x, F, P1)}{\partial x} - (\lambda_{11} + \lambda_{21} + \mu_{12}) f(x, F, P1) + \mu_{11} f(x, P1, P1) \\ + \mu_{21} f(x, P2, P1) + \lambda_{12} f(x, F, F) = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} -U_1 \frac{\partial f(x, F, P2)}{\partial x} - (\lambda_{11} + \lambda_{21} + \mu_{22}) f(x, F, P2) + \mu_{11} f(x, P1, P2) \\ + \mu_{21} f(x, P2, P2) + \lambda_{22} f(x, F, F) = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} U_2 \frac{\partial f(x, P1, F)}{\partial x} - (\mu_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{22}) f(x, P1, F) + \mu_{12} f(x, P1, P1) \\ + \mu_{22} f(x, P1, P2) + \lambda_{11} f(x, F, F) = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} U_2 \frac{\partial f(x, P2, F)}{\partial x} - (\mu_{21} + \lambda_{12} + \lambda_{22}) f(x, P2, F) + \mu_{12} f(x, P2, P1) \\ + \mu_{22} f(x, P2, P2) + \lambda_{21} f(x, F, F) = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{12}) f(x, P1, P1) + \lambda_{11} f(x, F, P1) + \lambda_{12} f(x, P1, F) = 0 \quad (5.25)$$



$$-(\mu_{21} + \mu_{22})f(x, P2, P2) + \lambda_{21}f(x, F, P2) + \lambda_{22}f(x, P2, F) = 0 \quad (5.26)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{22})f(x, P1, P2) + \lambda_{11}f(x, F, P2) + \lambda_{22}f(x, P1, F) = 0 \quad (5.27)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{12})f(x, P2, P1) + \lambda_{21}f(x, F, P1) + \lambda_{12}f(x, P2, F) = 0 \quad (5.28)$$

### b. Les équations de transitions frontières

Les états frontières sont ceux pour lesquels le stock tampon est soit vide ( $x = 0$ ) soit plein ( $x = N$ ) et ce, quelque soit l'état des deux machines ( $\alpha_i = F, P1, P2$  pour  $i = 1, 2$ ).

On distingue trois cas :  $U_1 = U_2$ ;  $U_1 > U_2$ ;  $U_1 < U_2$  du fait qu'on doit considérer le ralentissement d'une machine par l'autre. Pour chaque cas on a un ensemble spécifique d'équations de transitions.

#### b.1. Cas où $U_1 = U_2$

Les équations de transitions frontières pour le cas synchrone sont :

$$-(\mu_{11} + \mu_{12})P(0, P1, P1) + \lambda_{11}P(0, F, P1) = 0 \quad (5.29)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{22})P(0, P1, P2) + \lambda_{11}P(0, F, P2) = 0 \quad (5.30)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{12})P(0, P2, P1) + \lambda_{21}P(0, F, P1) = 0 \quad (5.31)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{22})P(0, P2, P2) + \lambda_{21}P(0, F, P2) = 0 \quad (5.32)$$

$$P(0, F, P1) = 0 \quad (5.33)$$

$$P(0, F, P2) = 0 \quad (5.34)$$

$$-\mu_{11}P(0, P1, F) + \mu_{12}P(0, P1, P1) + \mu_{22}P(0, P1, P2) + \lambda_{11}P(0, F, F) + U_2f(0, P1, F) = 0 \quad (5.35)$$

$$-\mu_{21}P(0, P2, F) + \mu_{12}P(0, P2, P1) + \mu_{22}P(0, P2, P2) + \lambda_{21}P(0, F, F) + U_2f(0, P2, F) = 0 \quad (5.36)$$

$$-(\lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{12} + \lambda_{22})P(0, F, F) + \mu_{11}P(0, P1, F) + \mu_{21}P(0, P2, F) = 0 \quad (5.37)$$

$$U_1 f(0, F, P1) = \mu_{11} P(0, P1, P1) + \mu_{21} P(0, P2, P1) + \lambda_{12} P(0, F, F) \quad (5.38)$$

$$U_1 f(0, F, P2) = \mu_{11} P(0, P1, P2) + \mu_{21} P(0, P2, P2) + \lambda_{22} P(0, F, F) \quad (5.39)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{12}) P(N, P1, P1) + \lambda_{12} P(N, P1, F) = 0 \quad (5.40)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{22}) P(N, P1, P2) + \lambda_{22} P(N, P1, F) = 0 \quad (5.41)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{12}) P(N, P2, P1) + \lambda_{12} P(N, P2, F) = 0 \quad (5.42)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{22}) P(N, P2, P2) + \lambda_{22} P(N, P2, F) = 0 \quad (5.43)$$

$$P(N, P1, F) = 0 \quad (5.44)$$

$$P(N, P2, F) = 0 \quad (5.45)$$

$$-\mu_{12} P(N, F, P1) + \mu_{11} P(N, P1, P1) + \mu_{21} P(N, P2, P1) + \lambda_{12} P(N, F, F) + U_1 f(N, F, P1) = 0 \quad (5.46)$$

$$-\mu_{22} P(N, F, P2) + \mu_{11} P(N, P1, P2) + \mu_{21} P(N, P2, P2) + \lambda_{22} P(N, F, F) + U_1 f(N, F, P2) = 0 \quad (5.47)$$

$$-(\lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{12} + \lambda_{22}) P(N, F, F) + \mu_{12} P(N, F, P1) + \mu_{22} P(N, F, P2) = 0 \quad (5.48)$$

$$U_2 f(N, P1, F) = \mu_{12} P(N, P1, P1) + \mu_{22} P(N, P1, P2) + \lambda_{11} P(N, F, F) \quad (5.49)$$

$$U_2 f(N, P2, F) = \mu_{12} P(N, P2, P1) + \mu_{22} P(N, P2, P2) + \lambda_{21} P(N, F, F) \quad (5.50)$$

### **b.2. Cas où $U_1 < U_2$**

Les équations de transitions frontières pour le cas tiré sont :

$$-(\mu_{11} + \mu_{12}) P(0, P1, P1) + \lambda_{11} P(0, F, P1) = 0 \quad (5.51)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{22}) P(0, P1, P2) + \lambda_{11} P(0, F, P2) = 0 \quad (5.52)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{12}) P(0, P2, P1) + \lambda_{21} P(0, F, P1) = 0 \quad (5.53)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{22}) P(0, P2, P2) + \lambda_{21} P(0, F, P2) = 0 \quad (5.54)$$

$$P(0, F, P1) = 0 \quad (5.55)$$

$$P(0, F, P2) = 0 \quad (5.56)$$

$$-\mu_{11}P(0, P1, F) + \mu_{12}P(0, P1, P1) + \mu_{22}P(0, P1, P2) + \lambda_{11}P(0, F, F) + U_2 f(0, P1, F) = 0 \quad (5.57)$$

$$-\mu_{21}P(0, P2, F) + \mu_{12}P(0, P2, P1) + \mu_{22}P(0, P2, P2) + \lambda_{21}P(0, F, F) + U_2 f(0, P2, F) = 0 \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} & -(\lambda_{11} + \lambda_{21} + \frac{U_1}{U_2}(\lambda_{12} + \lambda_{22}))P(0, F, F) + \mu_{11}P(0, P1, F) + \mu_{21}P(0, P2, F) \\ & + (U_2 - U_1)f(0, F, F) = 0 \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$U_1 f(0, F, P1) = \mu_{11}P(0, P1, P1) + \mu_{21}P(0, P2, P1) + \frac{\min(U_1, U_2)}{U_2} \lambda_{12}P(0, F, F) \quad (5.60)$$

$$U_1 f(0, F, P2) = \mu_{11}P(0, P1, P2) + \mu_{21}P(0, P2, P2) + \frac{\min(U_1, U_2)}{U_2} \lambda_{22}P(0, F, F) \quad (5.61)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{12})P(N, P1, P1) + \lambda_{12}P(N, P1, F) = 0 \quad (5.62)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{22})P(N, P1, P2) + \lambda_{22}P(N, P1, F) = 0 \quad (5.63)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{12})P(N, P2, P1) + \lambda_{12}P(N, P2, F) = 0 \quad (5.64)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{22})P(N, P2, P2) + \lambda_{22}P(N, P2, F) = 0 \quad (5.65)$$

$$P(N, P1, F) = 0 \quad (5.66)$$

$$P(N, P2, F) = 0 \quad (5.67)$$

$$-\mu_{12}P(N, F, P1) + \mu_{11}P(N, P1, P1) + \mu_{21}P(N, P2, P1) + \lambda_{12}P(N, F, F) + U_1 f(N, F, P1) = 0 \quad (5.68)$$

$$-\mu_{22}P(N, F, P2) + \mu_{11}P(N, P1, P2) + \mu_{21}P(N, P2, P2) + \lambda_{22}P(N, F, F) + U_1 f(N, F, P2) = 0 \quad (5.69)$$

$$P(N, F, F) = 0 \quad (5.70)$$

$$U_2 f(N, P1, F) = \mu_{12}P(N, P1, P1) + \mu_{22}P(N, P1, P2) + \frac{\min(U_1, U_2)}{U_1} \lambda_{11}P(N, F, F) \quad (5.71)$$

$$U_2 f(N, P2, F) = \mu_{12}P(N, P2, P1) + \mu_{22}P(N, P2, P2) + \frac{\min(U_1, U_2)}{U_1} \lambda_{21}P(N, F, F) \quad (5.72)$$

$$(U_2 - U_1)f(N, F, F) = \mu_{12}P(N, F, P1) + \mu_{22}P(N, F, P2) \quad (5.73)$$

**b.3. Cas où  $U_1 > U_2$**

Les équations de transitions frontières pour le cas poussé sont :

$$-(\mu_{11} + \mu_{12})P(0, P1, P1) + \lambda_{11}P(0, F, P1) = 0 \quad (5.74)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{22})P(0, P1, P2) + \lambda_{11}P(0, F, P2) = 0 \quad (5.75)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{12})P(0, P2, P1) + \lambda_{21}P(0, F, P1) = 0 \quad (5.76)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{22})P(0, P2, P2) + \lambda_{21}P(0, F, P2) = 0 \quad (5.77)$$

$$P(0, F, P1) = 0 \quad (5.78)$$

$$P(0, F, P2) = 0 \quad (5.79)$$

$$-\mu_{11}P(0, P1, F) + \mu_{12}P(0, P1, P1) + \mu_{22}P(0, P1, P2) + \lambda_{11}P(0, F, F) + U_2f(0, P1, F) = 0 \quad (5.80)$$

$$-\mu_{21}P(0, P2, F) + \mu_{12}P(0, P2, P1) + \mu_{22}P(0, P2, P2) + \lambda_{21}P(0, F, F) + U_2f(0, P2, F) = 0 \quad (5.81)$$

$$P(0, F, F) = 0 \quad (5.82)$$

$$U_1f(0, F, P1) = \mu_{11}P(0, P1, P1) + \mu_{21}P(0, P2, P1) + \frac{\min(U_1, U_2)}{U_2} \lambda_{12}P(0, F, F) \quad (5.83)$$

$$U_1f(0, F, P2) = \mu_{11}P(0, P1, P2) + \mu_{21}P(0, P2, P2) + \frac{\min(U_1, U_2)}{U_2} \lambda_{22}P(0, F, F) \quad (5.84)$$

$$(U_1 - U_2)f(0, F, F) = \mu_{11}P(0, P1, F) + \mu_{21}P(0, P2, F) \quad (5.85)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{12})P(N, P1, P1) + \lambda_{12}P(N, P1, F) = 0 \quad (5.86)$$

$$-(\mu_{11} + \mu_{22})P(N, P1, P2) + \lambda_{22}P(N, P1, F) = 0 \quad (5.87)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{12})P(N, P2, P1) + \lambda_{12}P(N, P2, F) = 0 \quad (5.88)$$

$$-(\mu_{21} + \mu_{22})P(N, P2, P2) + \lambda_{22}P(N, P2, F) = 0 \quad (5.89)$$

$$P(N, P1, F) = 0 \quad (5.90)$$

$$P(N, P2, F) = 0 \quad (5.91)$$

$$-\mu_{12}P(N, F, P1) + \mu_{11}P(N, P1, P1) + \mu_{21}P(N, P2, P1) + \lambda_{12}P(N, F, F) + U_1f(N, F, P1) = 0 \quad (5.92)$$

$$-\mu_{22}P(N, F, P2) + \mu_{41}P(N, P1, P2) + \mu_{21}P(N, P2, P2) + \lambda_{22}P(N, F, F) + U_1f(N, F, P2) = 0 \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{U_2}{U_1}(\lambda_{11} + \lambda_{21}) + \lambda_{12} + \lambda_{22}\right)P(N, F, F) + \mu_{12}P(N, F, P1) + \mu_{22}P(N, F, P2) \\ & + (U_1 - U_2)f(N, F, F) = 0 \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$U_2f(N, P1, F) = \mu_{12}P(N, P1, P1) + \mu_{22}P(N, P1, P2) + \frac{\min(U_1, U_2)}{U_1} \lambda_{11}P(N, F, F) \quad (5.95)$$

$$U_2f(N, P2, F) = \mu_{12}P(N, P2, P1) + \mu_{22}P(N, P2, P2) + \frac{\min(U_1, U_2)}{U_1} \lambda_{21}P(N, F, F) \quad (5.96)$$

### c. L'équation de normalité

L'ensemble des densités de probabilités ainsi que les masses de probabilités doivent également satisfaire l'équation de normalité suivante (Levantesi et al, 1999) :

$$\sum_{\alpha_1=F, P1, P2} \sum_{\alpha_2=F, P1, P2} \left[ \int_0^N f(x, \alpha_1, \alpha_2) dx + P(0, \alpha_1, \alpha_2) + P(N, \alpha_1, \alpha_2) \right] = 1 \quad (5.97)$$

### 1.5. Mesures de performances

Les mesures de performances peuvent être trouvées après calcul des densités et des masses de probabilités.

Le niveau de stock moyen peut alors être déterminé à partir de l'équation suivante :

$$\bar{x} = \sum_{\alpha_1=F, P1, P2} \sum_{\alpha_2=F, P1, P2} \left[ \int_0^N x \times f(x, \alpha_1, \alpha_2) dx + N \times P(N, \alpha_1, \alpha_2) \right] \quad (5.98)$$

L'efficacité de la machine  $M1$  peut être mesurée à l'aide de l'équation suivante (Levantesi et al, 1999) :

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \text{prob}[\alpha_1 = F \text{ et } x < N] + \frac{U_2}{U_1} \text{prob}[\alpha_1 = \alpha_2 = F \text{ et } x = N] \\
 &= \sum_{\alpha_2=F, P1, P2} \left[ \int_0^N f(x, F, \alpha_2) dx + P(0, F, F) \right] + \frac{U_2}{U_1} P(N, F, F) \quad (5.99)
 \end{aligned}$$

où le second terme est nul lorsque  $U_2 > U_1$ .

Ceci est dû au fait que pour le modèle continu, si  $U_1 > U_2$  alors le stock peut être plein et les deux machines peuvent être en opération mais dans ce cas  $M1$  sera ralentie par  $M2$ . C'est pourquoi on inclut dans l'expression de l'efficacité de  $M1$  le terme  $P(N, F, F)$  avec un facteur correcteur  $\frac{U_2}{U_1}$ .

Le taux de production de la machine  $M1$  est alors donné par :

$$PR_1 = U_1 E_1 = \sum_{\alpha_2=F, P1, P2} U_1 \left[ \int_0^N f(x, F, \alpha_2) dx + P(0, F, F) \right] + U_2 P(N, F, F) \quad (5.100)$$

De même, l'efficacité de la machine  $M2$  est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \text{prob}[\alpha_2 = F \text{ et } x > 0] + \frac{U_1}{U_2} \text{prob}[\alpha_1 = \alpha_2 = F \text{ et } x = 0] \\
 &= \sum_{\alpha_1=F, P1, P2} \left[ \int_0^N f(x, \alpha_1, F) dx + P(N, F, F) \right] + \frac{U_1}{U_2} P(0, F, F) \quad (5.101)
 \end{aligned}$$

où le second terme est nul lorsque  $U_1 > U_2$ .

De même, lorsque  $U_2 > U_1$  le stock peut être vide et les deux machines peuvent être en opération mais dans ce cas c'est  $M2$  qui sera ralentie par  $M1$ . C'est pourquoi on inclut dans l'expression de l'efficacité de  $M2$  le terme  $P(0, F, F)$  avec un facteur correcteur  $\frac{U_1}{U_2}$ .

Le taux de production de la machine  $M2$  est donné par :

$$PR_2 = U_2 E_2 = \sum_{\alpha_i = F, P1, P2} U_2 \left[ \int_0^N f(x, \alpha_1, F) dx + P(N, F, F) \right] + U_1 P(0, F, F) \quad (5.102)$$

## 2. Résolution du modèle

### 2.1. Solution des équations de transitions internes

Étant donné que les transitions d'états suivent des distributions exponentielles, on peut donc utiliser une forme exponentielle pour la résolution des équations internes et ainsi trouver les densités de probabilités. Pour cela, nous allons poser (Levantesi et al, 1999) :

$$f(x, \alpha_1, \alpha_2) = C e^{-\lambda x} G_1(\alpha_1) G_2(\alpha_2) \quad (5.103)$$

où  $G_i(\alpha_i)$  peut prendre l'une des valeurs suivantes :

- 1 si  $\alpha_i = F$
- $G_i(P1)$  si  $\alpha_i = P1$
- $G_i(P2)$  si  $\alpha_i = P2$

Notons que cette forme a été employée avec succès dans (Gershwin, 1994) dans le cas d'une ligne à deux machines non fiables à un mode de panne avec un flux de matière continu.

En substituant (5.103) dans les équations internes et en effectuant quelques manipulations, on obtient :

$$\frac{\lambda_{11}}{G_1(P1)} - \mu_{11} = - \left( \frac{\lambda_{12}}{G_2(P1)} - \mu_{12} \right) \quad (5.104)$$

$$\frac{\lambda_{21}}{G_1(P2)} - \mu_{21} = - \left( \frac{\lambda_{22}}{G_2(P2)} - \mu_{22} \right) \quad (5.105)$$

$$U_2 \times \rho + \left( \frac{\lambda_{11}}{G_1(P1)} - \mu_{11} \right) + (G_2(P2) \times \mu_{22} - \lambda_{22}) + (G_2(P1) \times \mu_{12} - \lambda_{12}) = 0 \quad (5.106)$$

$$U_2 \times \rho + \left( \frac{\lambda_{21}}{G_1(P2)} - \mu_{21} \right) + (G_2(P2) \times \mu_{22} - \lambda_{22}) + (G_2(P1) \times \mu_{12} - \lambda_{12}) = 0 \quad (5.107)$$

$$-U_1 \times \rho + \left( \frac{\lambda_{12}}{G_2(P1)} - \mu_{12} \right) + (G_1(P1) \times \mu_{11} - \lambda_{11}) + (G_1(P2) \times \mu_{21} - \lambda_{21}) = 0 \quad (5.108)$$

$$-U_1 \times \rho + \left( \frac{\lambda_{22}}{G_2(P2)} - \mu_{22} \right) + (G_1(P1) \times \mu_{11} - \lambda_{11}) + (G_1(P2) \times \mu_{21} - \lambda_{21}) = 0 \quad (5.109)$$

$$(U_2 - U_1) \times \rho + \left[ (G_1(P1) \times \mu_{11} - \lambda_{11}) + (G_1(P2) \times \mu_{21} - \lambda_{21}) \right] + \left[ (G_2(P2) \times \mu_{22} - \lambda_{22}) + (G_2(P1) \times \mu_{12} - \lambda_{12}) \right] = 0 \quad (5.110)$$

On constate que (5.104) et (5.105) sont en combinaison linéaire de (5.106) à (5.110). Ainsi, le système formé des équations (5.106) à (5.110) constitue un système de 5 équations à 5 inconnues qui sont  $\rho$ ,  $G_1(P1)$ ,  $G_1(P2)$ ,  $G_2(P1)$  et  $G_2(P2)$ . À partir des équations (5.104) et (5.105), on peut écrire :



$$\frac{\lambda_{11}}{G_1(P1)} - \mu_{11} = - \left( \frac{\lambda_{12}}{G_2(P1)} - \mu_{12} \right) = K \quad (5.111)$$

$$\frac{\lambda_{21}}{G_1(P2)} - \mu_{21} = - \left( \frac{\lambda_{22}}{G_2(P2)} - \mu_{22} \right) = K \quad (5.112)$$

où  $K$  ne dépend ni de  $M1$  ni de  $M2$ .

Ainsi, à partir de (5.111), on a :

$$G_1(P1) = \frac{\lambda_{11}}{K + \mu_{11}} \quad ; \quad G_2(P1) = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{12} - K} \quad (5.113)$$

et à partir de (5.112), on a :

$$G_1(P2) = \frac{\lambda_{21}}{K + \mu_{21}} \quad ; \quad G_2(P2) = \frac{\lambda_{22}}{\mu_{22} - K} \quad (5.114)$$

En dérivant  $\rho$  à partir des équations (5.106) à (5.109) et après certaines manipulations, on obtient un polynôme de degré 5 en  $K$  :

$$U_1 \times K \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_{12}}{\mu_{12} - K} \right) + \left( \frac{\lambda_{22}}{\mu_{22} - K} \right) \right] = U_2 \times K \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11} + K} \right) + \left( \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21} + K} \right) \right] \quad (5.115)$$

Si l'on désigne par  $K_m$  ( $m=1, \dots, 5$ ) la  $m^e$  racine de ce polynôme, on peut trouver les valeurs de  $G_{1m}(P1)$ ,  $G_{1m}(P2)$ ,  $G_{2m}(P1)$ ,  $G_{2m}(P2)$  et  $\rho_m$  en réécrivant (5.112), (5.113) et (5.114) comme ceci :

$$G_{1m}(P1) = \frac{\lambda_{11}}{K_m + \mu_{11}} \quad ; \quad G_{2m}(P1) = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{12} - K_m} \quad (5.116)$$

$$G_{1m}(P2) = \frac{\lambda_{21}}{K_m + \mu_{21}} \quad ; \quad G_{2m}(P2) = \frac{\lambda_{22}}{\mu_{22} - K_m} \quad (5.117)$$

$$\rho_m = \frac{-K_m}{U_2} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_{12}}{\mu_{12} - K_m} \right) + \left( \frac{\lambda_{22}}{\mu_{22} - K_m} \right) \right] \quad (5.118)$$

Étant donné que l'on peut trouver plusieurs valeurs pour les inconnues, on peut donc écrire :

$$f(x, G_1(\alpha_j), G_2(\alpha_j)) = \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m x} G_{1m}(\alpha_j) G_{2m}(\alpha_j) \quad i=1,2; j=1,2 \quad (5.119)$$

L'étape suivante consiste à déterminer s'il est possible de trouver les valeurs des constantes  $C_m$  de sorte que les équations frontières soient également satisfaites.

## 2.2. Solution des équations de transitions frontières

Les hypothèses de notre modèle impliquent que certains états frontières sont transitoires et ce faisant, ont des probabilités nulles :

$$P(0, F, P1) = P(0, F, P2) = P(0, P1, P1) = P(0, P1, P2) = P(0, P2, P1) = P(0, P2, P2) = 0$$

$$P(N, P1, F) = P(N, P2, F) = P(N, P1, P1) = P(N, P1, P2) = P(N, P2, P1) = P(N, P2, P2) = 0$$

En ce qui concerne les états frontières non transitoires, on distingue trois cas dépendamment des cadences des machines.

a. Cas où  $U_1 > U_2$

a.1. Probabilités des états non transitoires

De (5.82), on a :  $P(0, F, F) = 0$

En introduisant les probabilités nulles dans les équations (5.80) et (5.81), on obtient :

$$P(0, P1, F) = \frac{U_2}{\mu_{11}} f(0, P1, F) = \frac{U_2}{\mu_{11}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P1) \quad (5.120)$$

$$P(0, P2, F) = \frac{U_2}{\mu_{21}} f(0, P2, F) = \frac{U_2}{\mu_{21}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P2) \quad (5.121)$$

De (5.95) et (5.96), on a :

$$P(N, F, F) = \frac{U_1}{\lambda_{11}} f(N, P1, F) = \frac{U_1}{\lambda_{11}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P1) \quad (5.122)$$

$$P(N, F, F) = \frac{U_1}{\lambda_{21}} f(N, P2, F) = \frac{U_1}{\lambda_{21}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P2) \quad (5.123)$$

Enfin, en remplaçant (5.122) dans (5.92) et en introduisant les probabilités nulles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(N, F, P1) &= \frac{U_1}{\mu_{12}} \left[ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} f(N, P1, F) + f(N, F, P1) \right] \\ &= \frac{U_1}{\mu_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} \left[ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} G_{1m}(P1) + G_{2m}(P1) \right] \end{aligned} \quad (5.124)$$

De manière similaire, en remplaçant (5.123) dans (5.93) et en introduisant les probabilités nulles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(N, F, P2) &= \frac{U_1}{\mu_{22}} \left[ \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{21}} f(N, P2, F) + f(N, F, P2) \right] \\ &= \frac{U_1}{\mu_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} \left[ \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{21}} G_{1m}(P2) + G_{2m}(P2) \right] \end{aligned} \quad (5.125)$$

Ainsi, nous venons d'exprimer les probabilités des états frontières non transitoires en fonction des paramètres de  $M1$  et  $M2$ , des solutions des équations internes ainsi que des constantes  $C_m$  qui sont les seules inconnues à évaluer.

### a.2. Évaluation des constantes $C_m$

Étant donné que  $P(0, F, F) = 0$ , les équations (5.83) et (5.84) impliquent que  $f(0, F, P1) = f(0, F, P2) = 0$  et donc que :

$$\sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) = 0 \quad (5.126)$$

$$\sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) = 0 \quad (5.127)$$

En substituant ensuite (5.122), (5.124) et (5.126) dans (5.94) et en simplifiant tout ce qui peut l'être, on arrive à :

$$\sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} \left[ U_1 \times (1 + G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2)) - U_2 \times \left( 1 + \frac{(\lambda_{11} + \lambda_{21})}{\lambda_{11}} G_{1m}(P1) \right) \right] = 0 \quad (5.128)$$

De même, en substituant (5.123), (5.125) et (5.127) dans (5.94) et en simplifiant tout ce qui peut l'être, on arrive à :

$$\sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} \left[ U_1 \times (1 + G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2)) - U_2 \times \left( 1 + \frac{(\lambda_{11} + \lambda_{21})}{\lambda_{21}} G_{1m}(P2) \right) \right] = 0 \quad (5.129)$$

Ainsi, les équations (5.126) à (5.129) ainsi que l'équation de normalité représentent un système linéaire de 5 équations à 5 inconnues qui sont les  $C_m$  à trouver.

## b. Cas où $U_1 < U_2$

### b.1. Probabilités des états non transitoires

De (5.60) et (5.61), on a :

$$P(0, F, F) = \frac{U_2}{\lambda_{12}} f(0, F, P1) = \frac{U_2}{\lambda_{12}} \left[ \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) \right] \quad (5.130)$$

$$P(0, F, F) = \frac{U_2}{\lambda_{22}} f(0, F, P2) = \frac{U_2}{\lambda_{22}} \left[ \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) \right] \quad (5.131)$$

De (5.57) et (5.58), on a :

$$\begin{aligned} P(0, P1, F) &= \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} P(0, F, F) + \frac{U_2}{\mu_{11}} f(0, P1, F) \\ &= \frac{U_2}{\mu_{11}} \left[ \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) + \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P1) \right] \end{aligned} \quad (5.132)$$

$$= \frac{U_2}{\mu_{11}} \left[ \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) + \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P1) \right] \quad (5.133)$$

$$\begin{aligned}
P(0, P2, F) &= \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}} P(0, F, F) + \frac{U_2}{\mu_{21}} f(0, P2, F) \\
&= \frac{U_2}{\mu_{21}} \left[ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) + \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P2) \right]
\end{aligned} \tag{5.134}$$

$$= \frac{U_2}{\mu_{21}} \left[ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) + \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P2) \right] \tag{5.135}$$

De (5.70), on a :

$$P(N, F, F) = 0 \tag{5.136}$$

De (5.68) et (5.69), on a :

$$P(N, F, P1) = \frac{U_1}{\mu_{12}} f(N, F, P1) = \frac{U_1}{\mu_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{2m}(P1) \tag{5.137}$$

$$P(N, F, P2) = \frac{U_1}{\mu_{22}} f(N, F, P2) = \frac{U_1}{\mu_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{2m}(P2) \tag{5.138}$$

Nous venons ainsi d'exprimer les probabilités des états frontières non transitoires en fonction des paramètres de  $M1$  et  $M2$ , des solutions des équations internes ainsi que des constantes  $C_m$  qui sont les seules inconnues à évaluer.

## b.2. Évaluation des constantes $C_m$

Étant donné que  $P(N, F, F) = 0$ , les équations (5.71) et (5.72) impliquent que  $f(N, P1, F) = f(N, P2, F) = 0$  et donc que :

$$\sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P1) = 0 \quad (5.139)$$

$$\sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P2) = 0 \quad (5.140)$$

En substituant (5.130), (5.132) et (5.134) dans (5.59) et en simplifiant ce qui peut l'être, on arrive à :

$$-U_1 \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{22})}{\lambda_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) + U_2 \sum_{m=1}^5 C_m [G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2)] = 0 \quad (5.141)$$

De même, en substituant (5.131), (5.133) et (5.135) dans (5.59) et en simplifiant ce qui peut l'être, on arrive à :

$$-U_1 \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{22})}{\lambda_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) + U_2 \sum_{m=1}^5 C_m [G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2)] = 0 \quad (5.142)$$

Ainsi, les équations (5.139) à (5.142) ainsi que l'équation de normalité représentent un système linéaire de 5 équations à 5 inconnues qui sont les  $C_m$  à trouver.

### c. Cas où $U_1 = U_2$

#### c.1. Probabilités des états non transitoires

De (5.38) et (5.39), on a :

$$P(0, F, F) = \frac{U_1}{\lambda_{12}} f(0, P1, F) = \frac{U_1}{\lambda_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) \quad (5.143)$$

$$P(0, F, F) = \frac{U_1}{\lambda_{22}} f(0, P2, F) = \frac{U_1}{\lambda_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) \quad (5.144)$$

De (5.35) et (5.36), on a :

$$\begin{aligned}
 P(0, P1, F) &= \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} P(0, F, F) + \frac{U_2}{\mu_{11}} f(0, P1, F) \\
 &= \frac{U_2}{\mu_{11}} \left[ \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) + \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P1) \right]
 \end{aligned} \tag{5.145}$$

$$= \frac{U_2}{\mu_{11}} \left[ \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) + \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P1) \right] \tag{5.146}$$

$$\begin{aligned}
 P(0, P2, F) &= \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}} P(0, F, F) + \frac{U_2}{\mu_{21}} f(0, P2, F) \\
 &= \frac{U_2}{\mu_{21}} \left[ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) + \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P2) \right]
 \end{aligned} \tag{5.147}$$

$$= \frac{U_2}{\mu_{21}} \left[ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) + \sum_{m=1}^5 C_m G_{1m}(P2) \right] \tag{5.148}$$

De (5.49) et (5.50), on a :

$$P(N, F, F) = \frac{U_2}{\lambda_{11}} f(N, P1, F) = \frac{U_2}{\lambda_{11}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P1) \tag{5.149}$$

$$P(N, F, F) = \frac{U_2}{\lambda_{21}} f(N, P2, F) = \frac{U_2}{\lambda_{21}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P2) \tag{5.150}$$



De (5.46) et (5.47), on a :

$$P(N, F, P1) = \frac{1}{\mu_{12}} [\lambda_{12} P(N, F, F) + U_1 f(N, F, P1)]$$

$$= \frac{U_2}{\mu_{12}} \left[ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P1) + \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{2m}(P1) \right] \quad (5.151)$$

$$= \frac{U_2}{\mu_{12}} \left[ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P2) + \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{2m}(P1) \right] \quad (5.152)$$

$$P(N, F, P2) = \frac{1}{\mu_{22}} [\lambda_{22} P(N, F, F) + U_1 f(N, F, P2)]$$

$$= \frac{U_2}{\mu_{22}} \left[ \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P1) + \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{2m}(P2) \right] \quad (5.153)$$

$$= \frac{U_2}{\mu_{22}} \left[ \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{21}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P2) + \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{2m}(P2) \right] \quad (5.154)$$

Nous venons ainsi d'exprimer les probabilités des états frontières non transitoires en fonction des paramètres de  $M1$  et  $M2$ , des solutions des équations internes ainsi que des constantes  $C_m$  qui sont les seules inconnues à évaluer.

### c.2. Évaluation des constantes $C_m$

En substituant (5.143), (5.145) et (5.147) dans (5.37) et en simplifiant ce qui peut l'être, on trouve :

$$-\frac{(\lambda_{12} + \lambda_{22})}{\lambda_{12}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P1) + \sum_{m=1}^5 C_m [G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2)] = 0 \quad (5.155)$$

En substituant (5.144), (5.146) et (5.148) dans (5.37) et en simplifiant ce qui peut l'être, on trouve :

$$-\frac{(\lambda_{12} + \lambda_{22})}{\lambda_{22}} \sum_{m=1}^5 C_m G_{2m}(P2) + \sum_{m=1}^5 C_m [G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2)] = 0 \quad (5.156)$$

En substituant (5.149), (5.151) et (5.153) dans (5.48) et en simplifiant ce qui peut l'être, on trouve :

$$-\frac{(\lambda_{11} + \lambda_{21})}{\lambda_{11}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P1) + \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} [G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2)] = 0 \quad (5.157)$$

En substituant (5.150), (5.152) et (5.154) dans (5.48) et en simplifiant ce qui peut l'être, on trouve :

$$-\frac{(\lambda_{11} + \lambda_{21})}{\lambda_{21}} \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} G_{1m}(P2) + \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m N} [G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2)] = 0 \quad (5.158)$$

Ainsi, les équations (5.155) à (5.158) ainsi que l'équation de normalité représentent un système linéaire de 5 équations à 5 inconnues qui sont les  $C_m$  à trouver.

### 3. Évaluation des performances

#### 3.1. Efficacités et Taux de production

Dans l'expression de l'efficacité et du taux de production de  $M1$ , on a le terme :

$$\sum_{\alpha_2 = F, P1, P2} \int_0^N f(x, F, \alpha_2) dx$$

que l'on peut réécrire comme ceci :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_2=F,P1,P2} \int_0^N f(x, F, \alpha_2) dx &= \sum_{\alpha_2=F,P1,P2} \int_0^N \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m x} G_{2m}(\alpha_2) dx \\ &= \sum_{m=1}^5 \frac{(C_m e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} \sum_{\alpha_2=F,P1,P2} G_{2m}(\alpha_2) = \sum_{m=1}^5 \frac{(C_m e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} (G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2) + 1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E_1 = \left[ \sum_{m=1}^5 \frac{(C_m e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} (G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2) + 1) + P(0, F, F) \right] + \frac{U_2}{U_1} P(N, F, F) \quad (5.159)$$

$$PR_1 = U_1 E_1 = U_1 \left[ \sum_{m=1}^5 \frac{(C_m e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} (G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2) + 1) + P(0, F, F) \right] + U_2 P(N, F, F) \quad (5.160)$$

De manière similaire, dans l'expression de l'efficacité et du taux de production de  $M2$ , on a le terme :

$$\sum_{\alpha_1=F,P1,P2} \int_0^N f(x, \alpha_1, F) dx$$

que l'on peut réécrire comme ceci :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1=F,P1,P2} \int_0^N f(x, \alpha_1, F) dx &= \sum_{\alpha_1=F,P1,P2} \int_0^N \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m x} G_{1m}(\alpha_1) dx \\ &= \sum_{m=1}^5 \frac{(C_m e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} \sum_{\alpha_1=F,P1,P2} G_{1m}(\alpha_1) = \sum_{m=1}^5 \frac{(C_m e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} (G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2) + 1) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E_2 = \left[ \sum_{m=1}^5 \frac{(C_m e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} (G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2) + 1) + P(N, F, F) \right] + \frac{U_1}{U_2} P(0, F, F) \quad (5.161)$$

$$PR_2 = U_2 E_2 = U_2 \left[ \sum_{m=1}^5 \frac{(C_m e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} (G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2) + 1) + P(N, F, F) \right] + U_1 P(0, F, F) \quad (5.162)$$

### 3.2. Niveau moyen du stock

Dans l'expression du niveau de stock moyen, on a le terme :

$$\sum_{\alpha_1=F, P1, P2} \sum_{\alpha_2=F, P1, P2} \int_0^N x \times f(x, \alpha_1, \alpha_2) dx$$

que l'on réécrit comme ceci :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1=F, P1, P2} \sum_{\alpha_2=F, P1, P2} \int_0^N x \times f(x, \alpha_1, \alpha_2) dx &= \sum_{\alpha_1=F, P1, P2} \sum_{\alpha_2=F, P1, P2} \int_0^N \left[ x \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m x} G_{1m}(\alpha_1) G_{2m}(\alpha_2) \right] dx \\ &= \sum_{m=1}^5 \left[ C_m (G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2) + 1) (G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2) + 1) \int_0^N x e^{\rho_m x} dx \right] \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties :  $\int f' \times g = f \times g - \int f \times g'$

On pose :  $f' = e^{\rho_m x}$  et  $g = x$

On a ainsi :

$$\int_0^N x e^{\rho_m x} dx = \left[ \frac{x}{\rho_m} e^{\rho_m x} \right]_0^N - \int_0^N \frac{1}{\rho_m} e^{\rho_m x} dx$$

Ainsi, l'expression du niveau de stock moyen devient :

$$\bar{x} = \sum_{m=1}^5 \left[ C_m (G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2) + 1) (G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2) + 1) \left( \frac{N}{\rho_m} e^{\rho_m N} - \frac{e^{\rho_m N} - 1}{\rho_m^2} \right) \right] + N \sum_{\alpha_1=F,P1,P2} \sum_{\alpha_2=F,P1,P2} P(N, \alpha_1, \alpha_2) \quad (5.163)$$

### 3.3. Équation de normalité

L'équation de normalité est la suivante :

$$\sum_{\alpha_1=F,P1,P2} \sum_{\alpha_2=F,P1,P2} \left[ \int_0^N f(x, \alpha_1, \alpha_2) dx + P(0, \alpha_1, \alpha_2) + P(N, \alpha_1, \alpha_2) \right] = 1$$

Sachant que (Levantesi et al, 1999) :  $f(x, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m=1}^5 C_m e^{\rho_m x} G_{1m}(\alpha_1) G_{2m}(\alpha_2)$

$$\text{Donc : } \int_0^N f(x, \alpha_1, \alpha_2) dx = \sum_{m=1}^5 \frac{C_m}{\rho_m} (e^{\rho_m N} - 1) G_{1m}(\alpha_1) G_{2m}(\alpha_2)$$

Ainsi, l'équation de normalité peut être réécrite comme suit :

$$\sum_{m=1}^5 \frac{C_m (e^{\rho_m N} - 1)}{\rho_m} (G_{1m}(P1) + G_{1m}(P2) + 1)(G_{2m}(P1) + G_{2m}(P2) + 1) + \sum_{\alpha_1=F,P1,P2} \sum_{\alpha_2=F,P1,P2} [P(0, \alpha_1, \alpha_2) + P(N, \alpha_1, \alpha_2)] = 1 \quad (5.164)$$

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires à la résolution de notre modèle. Nous présentons dans la section suivante l'algorithme suivant lequel on résout le modèle.

#### 4. Algorithme

L'idée ici est d'utiliser les équations de résolutions présentées plus haut afin de trouver les probabilités de chacun des états de notre modèle.

##### Étape 1

Entrer les paramètres du système, à savoir :

- La capacité du stock intermédiaire :  $N$
- Les taux de pannes et de réparation de chaque machine :  $\lambda_{11}, \mu_{11}, \lambda_{21}, \mu_{21}$   
 $\lambda_{12}, \mu_{12}, \lambda_{22}, \mu_{22}$
- Les cadences de production de chaque machine :  $U_1$  et  $U_2$

##### Étape 2

Trouver la solution des équations internes.

Étape 2.1 Déterminer les  $K_m$  à partir des expressions suivantes :

$$K_1 = 0$$

On détermine  $K_2, K_3, K_4$  et  $K_5$  en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} & (U_1 - U_2)[(\mu_{12} - K)(\mu_{22} - K)(\mu_{11} + K)(\mu_{21} + K)] + U_1 \lambda_{12} [(\mu_{22} - K)(\mu_{11} + K)(\mu_{21} + K)] + \\ & U_1 \lambda_{22} [(\mu_{12} - K)(\mu_{11} + K)(\mu_{21} + K)] - U_2 \lambda_{11} [(\mu_{12} - K)(\mu_{22} - K)(\mu_{21} + K)] \\ & - U_2 \lambda_{21} [(\mu_{12} - K)(\mu_{22} - K)(\mu_{11} + K)] = 0 \end{aligned}$$

Étape 2.2 Déterminer  $\rho_m$  à partir de l'équation (5.117).

Étape 2.3 Déterminer les  $G_{im}(\alpha_i)$  de la manière suivante :

Pour  $m=1$  à  $5$

- Déterminer  $G_{1m}(P1)$  et  $G_{2m}(P1)$  à partir de l'équation (5.115).
- Déterminer  $G_{1m}(P2)$  et  $G_{2m}(P2)$  à partir de l'équation (5.116).

Fin

$$\text{Poser : } G_{1m}(F) = G_{2m}(F) = 1$$

Étape 3

Trouver les solutions des états frontières

Étape 3.1 On pose :

$$P(0, F, P1) = P(0, F, P2) = P(0, P1, P1) = P(0, P1, P2) = P(0, P2, P1) = P(0, P2, P2) = 0$$

$$P(N, P1, F) = P(N, P2, F) = P(N, P1, P1) = P(N, P1, P2) = P(N, P2, P1) = P(N, P2, P2) = 0$$

Étape 3.2Si  $U_1 > U_2$  alorsDébut

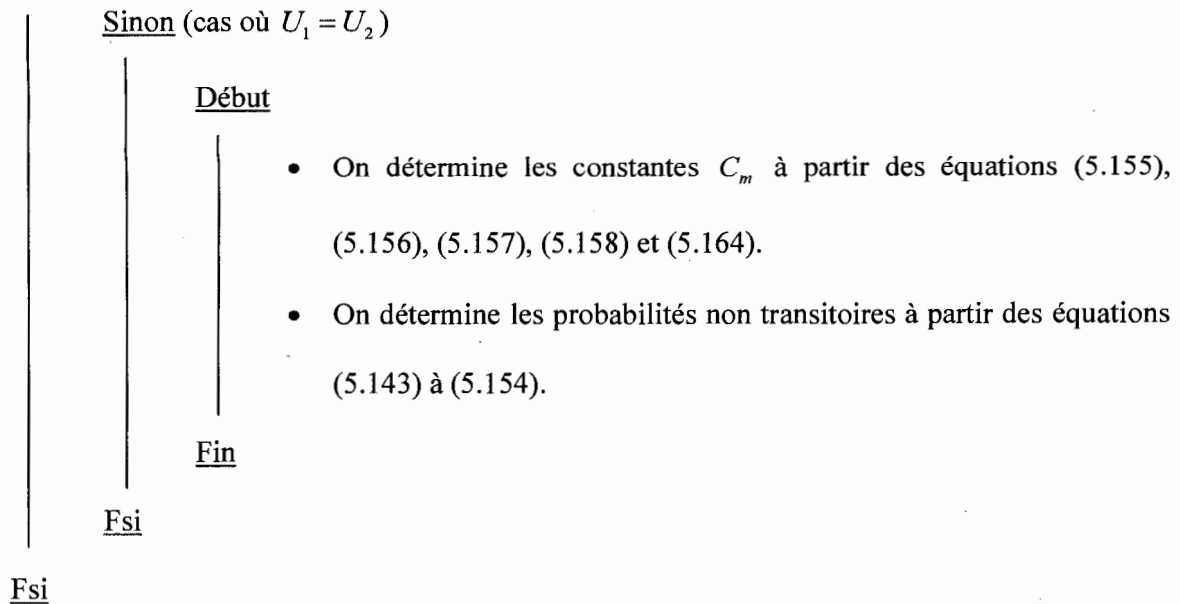
- On pose :  $P(0, F, F) = 0$
- On détermine les constantes  $C_m$  à partir des équations (5.125), (5.126), (5.127), (5.128) et (5.163).
- On détermine les probabilités non transitoires à partir des équations (5.119) à (5.124).

FinSinonSi  $U_1 < U_2$  alorsDébut

- On pose :  $P(N, F, F) = 0$
- On détermine les constantes  $C_m$  à partir des équations (5.139), (5.140), (5.141), (5.142) et (5.164).
- On détermine les probabilités non transitoires à partir des équations (5.130) à (5.138).

Fin





#### Étape 4

Évaluer les performances du système à partir des équations (5.159), (5.160), (5.161), (5.162) et (5.163).

### **5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de (Levantesi et al, 1999) pour l'évaluation des performances de lignes de production série avec un stock intermédiaire et deux machines pouvant avoir deux modes de défaillances. Le développement de cette méthode a été motivé par le fait que considérer explicitement les différents modes de défaillances des machines de la ligne permet d'obtenir une évaluation de performances plus précise que le fait de les grouper en un seul mode.

Cette méthode sera utilisée au prochain chapitre pour étendre la technique d'agrégation initialement proposée par (Terracol et David, 1987), afin de tenir compte du fait que les machines peuvent avoir deux modes de défaillances.

## **CHAPITRE VI**

### **TECHNIQUE D'AGRÉGATION POUR DES LIGNES DE PRODUCTION SÉRIE AVEC MACHINES À DEUX MODES DE DÉFAILLANCES ET STOCKS INTERMÉDIAIRES**

La technique d'agrégation développée par (Terracol et David, 1987) permet d'évaluer les performances de lignes de production comptant plus que deux machines. Cette technique ne considère que des machines ayant un seul mode de défaillance. Le fait de considérer explicitement les différents modes de défaillances de la ligne permet une évaluation plus précise de ses performances. Nous allons donc dans ce chapitre utiliser la méthode développée au chapitre précédent (permettant d'évaluer les performances d'une ligne avec un stock et deux machines pouvant avoir deux modes de défaillances) pour étendre la technique d'agrégation initiale afin de tenir compte de ces deux modes de défaillances.

#### **1. Agrégation de lignes comptant plus que deux machines**

Rappelons que l'agrégation consiste à remplacer chaque ensemble de deux machines et un stock intermédiaire par une machine équivalente et ainsi, de proche en proche, on obtient une machine équivalente à la ligne entière. Il y a deux types d'agrégation selon que l'on

parcourt la ligne de la première machine jusqu'à la dernière ou inversement. On parlera ainsi respectivement d'agrégation *amont* ou *aval*.

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord présenter les caractéristiques d'une machine en isolation, puis nous montrerons comment définir les machines équivalentes amont et aval dans le cas d'une ligne à deux machines sujettes à deux modes de défaillances et un stock intermédiaire. Nous montrerons ensuite comment définir ces mêmes machines équivalentes dans le cas de lignes plus longues. Enfin, nous présenterons les algorithmes associés.

### 1.1. Caractérisation d'une machine

Une machine  $M_i$  est caractérisée par  $C_i = (U_i, \lambda_{1i}, \mu_{1i}, \lambda_{2i}, \mu_{2i})$  où :

- $U_i$  : cadence de production
- $\lambda_{1i}$  : taux de panne en mode 1
- $\mu_{1i}$  : taux de réparation en mode 1
- $\lambda_{2i}$  : taux de panne en mode 2
- $\mu_{2i}$  : taux de réparation en mode 2

$M_i$  a trois états :

- Opérationnelle (état  $A^i$ ) avec cadence  $U_i$
- En panne en mode 1 (état  $N_1^i$ ) avec cadence 0
- En panne en mode 2 (état  $N_2^i$ ) avec cadence 0

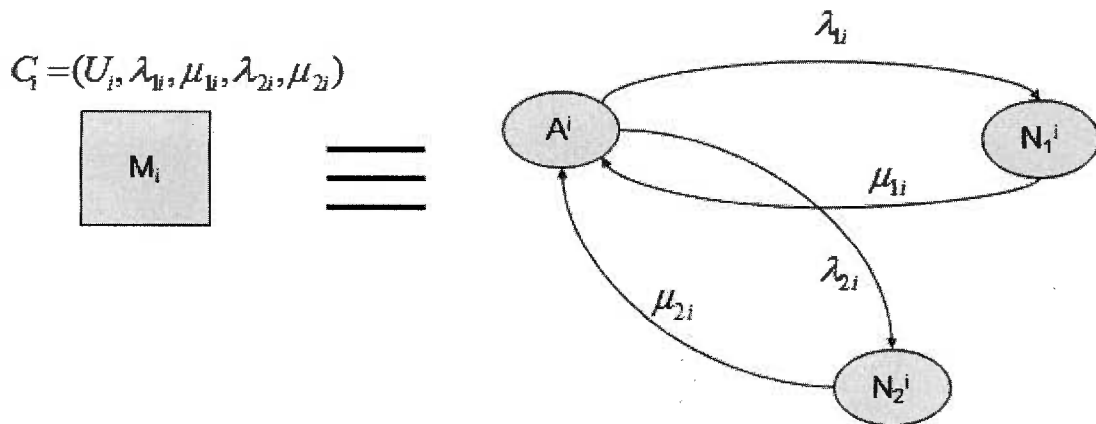


Figure 6.1- États d'une machine  $M_i$

## 1.2. Caractérisation d'une ligne à deux machines et un stock intermédiaire

Pour une ligne à deux machines et un stock intermédiaire de capacité finie, on définit une machine équivalente  $M_{12}^u$  vue de l'amont et caractérisée par  $C_{12}^u = (U_{12}^u, \lambda_{112}^u, \mu_{112}^u, \lambda_{212}^u, \mu_{212}^u)$  et une machine équivalente  $M_{12}^d$  vue de l'aval et caractérisée par  $C_{12}^d = (U_{12}^d, \lambda_{112}^d, \mu_{112}^d, \lambda_{212}^d, \mu_{212}^d)$ .

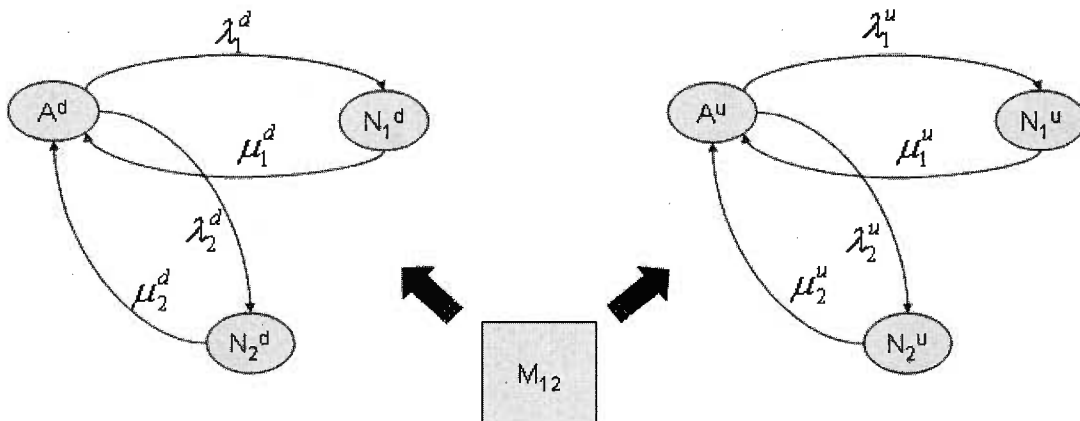


Figure 6.2- Définition des machines équivalentes amont et aval

L'état du système est défini par  $E = (x, \alpha_1, \alpha_2)$  où :

- $x$  représente le niveau du stock intermédiaire et varie entre 0 et  $N$
- $\alpha_i = F$  si  $M_i$  est opérationnelle
- $\alpha_i = P1$  si  $M_i$  est en panne en mode 1
- $\alpha_i = P2$  si  $M_i$  est en panne en mode 2

Le système est dit « synchrone » si  $U_1 = U_2 = U$ .

Le système est dit « poussé » si  $U_1 > U_2$

Le système est dit « tiré » si  $U_1 < U_2$

### 1.2.1. Graphe des transitions du système synchrone

La figure ci-dessous représente toutes les transitions entre les états du système. À partir de cette figure nous allons identifier les macros états qui nous permettront de définir les paramètres des machines équivalentes. Les états représentés par les  $E_i$  sont indiqués ci-dessous. Les notations sont les mêmes pour les systèmes poussé et tiré.

$$\begin{array}{ll}
 E_1 = (x, F, F) & E_8 = (x, P1, P2) \\
 E_2 = (x, F, P1) & E_9 = (x, P2, P1) \\
 E_3 = (x, F, P2) & E_{10} = (0, F, F) \\
 E_4 = (x, P1, F) & E_{11} = (0, P1, F) \\
 E_5 = (x, P2, F) & E_{12} = (0, P2, F) \\
 E_6 = (x, P1, P1) & E_{13} = (N, F, F) \\
 E_7 = (x, P2, P2) & E_{14} = (N, F, P1) \\
 & E_{15} = (N, F, P2)
 \end{array}$$

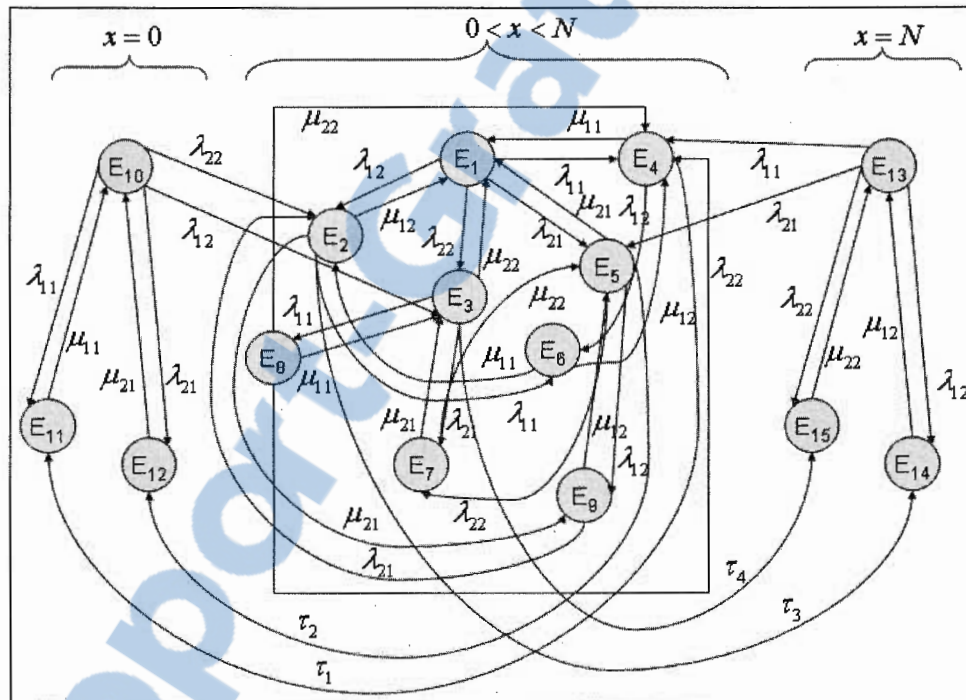


Figure 6.3- Graphe des transitions d'états du système synchrone

## 1.2.2. Graphe des transitions du système poussé

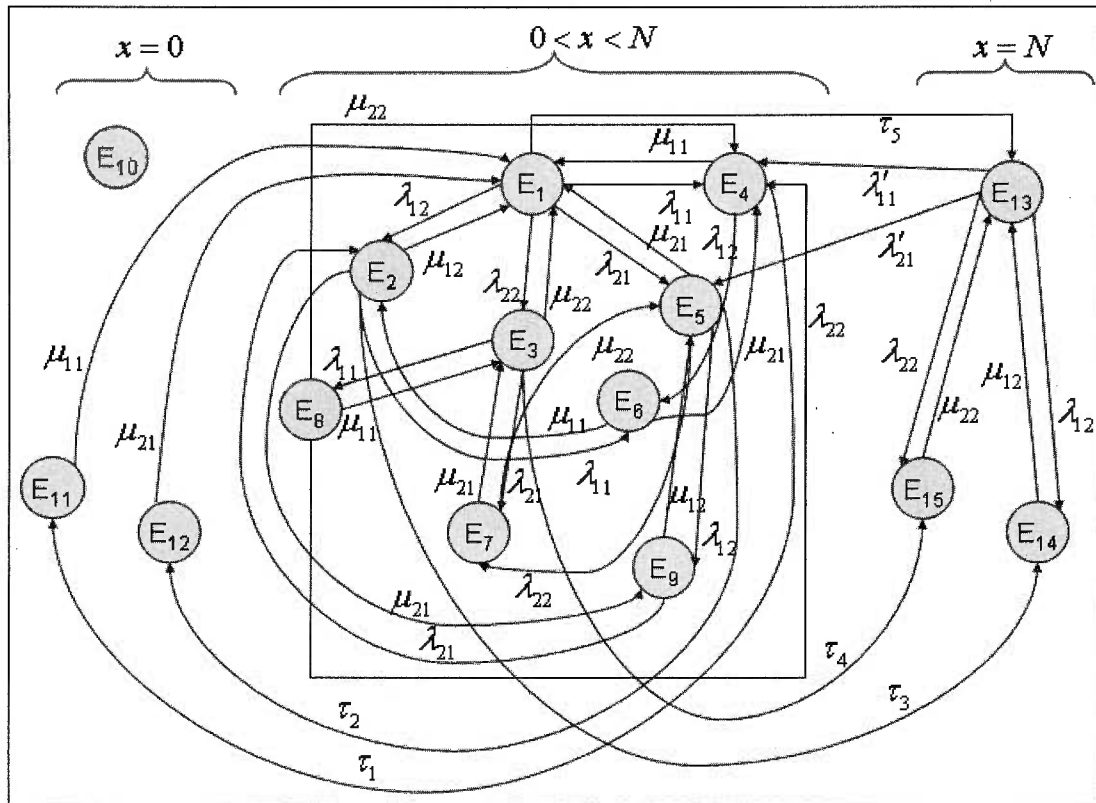


Figure 6.4- Graphe des transitions d'états du système poussé



### 1.2.3. Graphe des transitions du système tiré

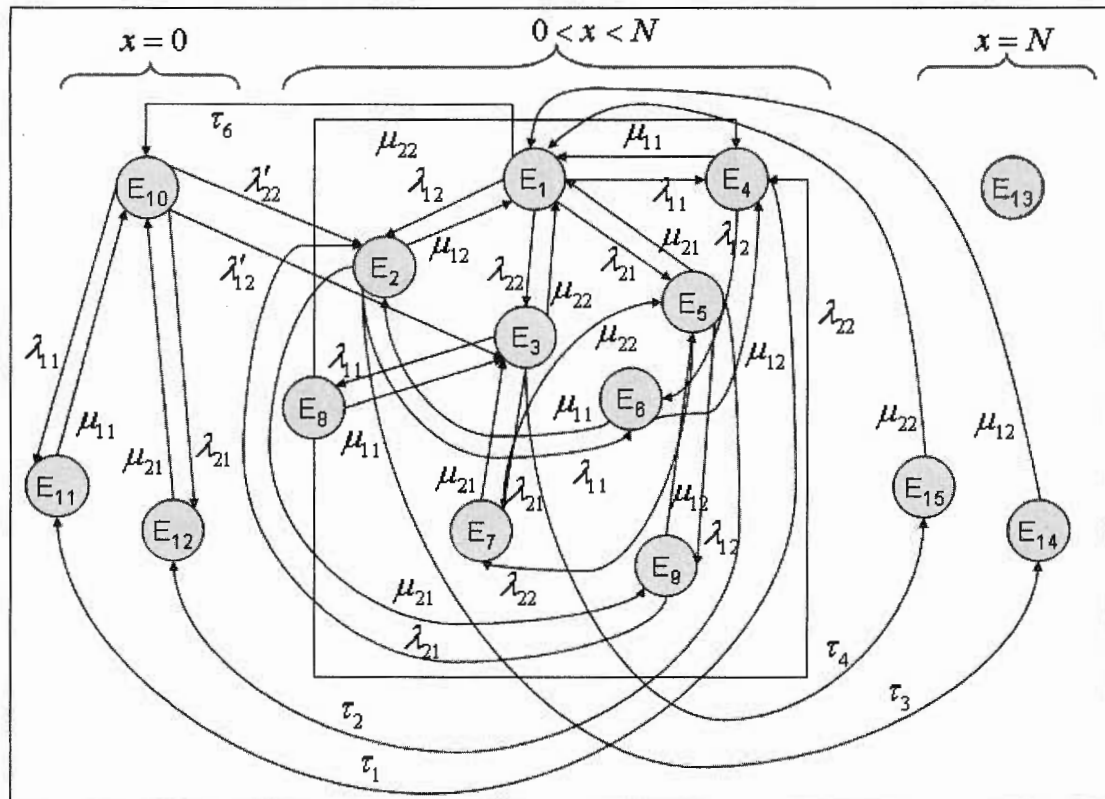


Figure 6.5- Graphe des transitions d'états du système tiré

### 1.2.4. Probabilités des différents états

On note par  $prob_i$  la probabilité d'être dans l'état  $E_i$  ( $prob_i = prob[E_i]$ ). Ces probabilités sont supposées connues dans cette partie et sont calculées à l'aide de la méthode décrite dans le chapitre précédent. Cependant, on considère les fonctions de répartition au lieu des fonctions de densités.

### 1.3. Machine équivalente

#### 1.3.1. Système synchrone

Vu de l'amont, le système est productif si  $M1$  est productive, c'est-à-dire dans l'un des états  $E_1, E_2, E_3$  ou  $E_{10}$ . On peut donc noter  $A^u = E_1 + E_2 + E_3 + E_{10}$ . On note par  $N_1^u$  le macro état où le système est en mode de panne 1, donc  $N_1^u = E_4 + E_6 + E_8 + E_{11} + E_{14}$ . De même, on note par  $N_2^u$  le macro état où le système est en mode de panne 2, donc  $N_2^u = E_5 + E_7 + E_9 + E_{12} + E_{15}$ .

Vu de l'aval, le système est productif si  $M2$  l'est, soit  $A^d = E_1 + E_4 + E_5 + E_{10} + E_{13}$  et donc  $N_1^d = E_2 + E_6 + E_9 + E_{11} + E_{14}$  et  $N_2^d = E_3 + E_7 + E_8 + E_{12} + E_{15}$ .

Les macros états  $A^u, N_1^u$  et  $N_2^u$  (respectivement  $A^d, N_1^d$  et  $N_2^d$ ) sont représentés sur la Figure 6.6 (respectivement 6.7). Les taux de transitions entre ces macros états vont nous permettre de déterminer  $\lambda_1^u, \lambda_2^u, \mu_1^u$  et  $\mu_2^u$  (respectivement  $\lambda_1^d, \lambda_2^d, \mu_1^d$  et  $\mu_2^d$ ). Cependant,  $\tau_3$  et  $\tau_4$  (respectivement  $\tau_1$  et  $\tau_2$ ) ne sont pas connus. Pour connaître leurs valeurs, considérons les états  $E_{14}$  et  $E_{15}$  de la Figure 6.3 (respectivement  $E_{11}$  et  $E_{12}$ ). On peut donc écrire :

$$prob_2 \tau_3 + prob_{13} \lambda_{12} = prob_{14} \mu_{12} \Rightarrow \tau_3 = \frac{prob_{14} \mu_{12} - prob_{13} \lambda_{12}}{prob_2} \quad (6.1)$$

$$prob_3 \tau_4 + prob_{13} \lambda_{22} = prob_{15} \mu_{22} \Rightarrow \tau_4 = \frac{prob_{15} \mu_{22} - prob_{13} \lambda_{22}}{prob_3} \quad (6.2)$$

$$prob_4 \tau_1 + prob_{10} \lambda_{11} = prob_{11} \mu_{11} \Rightarrow \tau_1 = \frac{prob_{11} \mu_{11} - prob_{10} \lambda_{11}}{prob_4} \quad (6.3)$$

$$prob_5 \tau_2 + prob_{10} \lambda_{21} = prob_{12} \mu_{21} \Rightarrow \tau_2 = \frac{prob_{12} \mu_{21} - prob_{10} \lambda_{21}}{prob_5} \quad (6.4)$$

On détermine  $\tau_5$  et  $\tau_6$  de manière similaire.

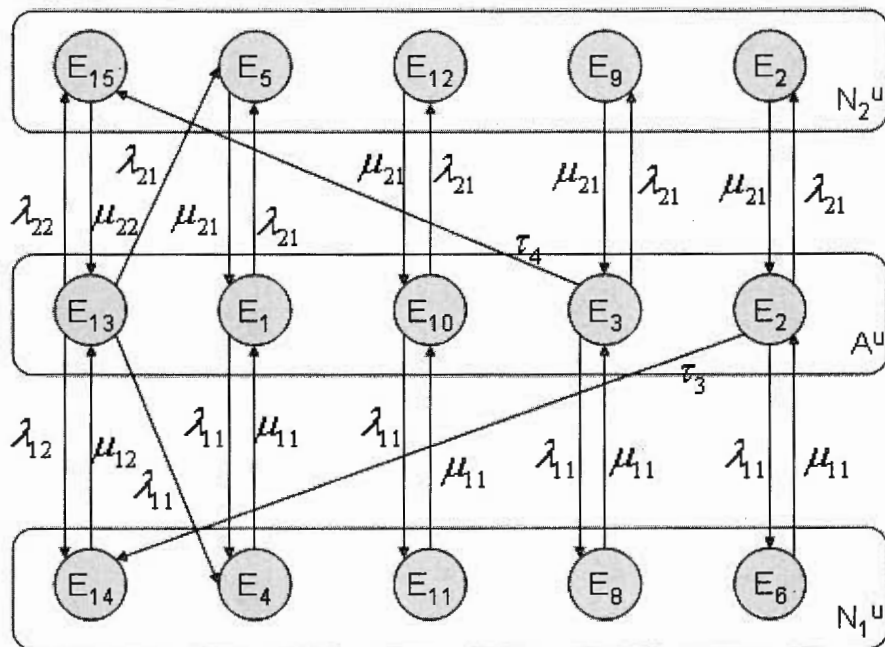


Figure 6.6- Transitions entre les macros états  $A^u$ ,  $N_1^u$  et  $N_2^u$  (système synchrone)

$$U^u = U$$

$$\lambda_1^u = \frac{\text{prob}_1 \times \lambda_{11} + \text{prob}_2 \times (\tau_3 + \lambda_{11}) + \text{prob}_3 \times \lambda_{11} + \text{prob}_{10} \times \lambda_{11} + \text{prob}_{13} \times (\lambda_{11} + \lambda_{12})}{\text{prob}_1 + \text{prob}_2 + \text{prob}_3 + \text{prob}_{10} + \text{prob}_{13}}$$

$$\lambda_2^u = \frac{\text{prob}_1 \times \lambda_{21} + \text{prob}_2 \times \lambda_{21} + \text{prob}_3 \times (\tau_4 + \lambda_{21}) + \text{prob}_{10} \times \lambda_{21} + \text{prob}_{13} \times (\lambda_{22} + \lambda_{21})}{\text{prob}_1 + \text{prob}_2 + \text{prob}_3 + \text{prob}_{10} + \text{prob}_{13}} \quad (6.5)$$

$$\mu_1^u = \frac{\text{prob}_4 \times \mu_{11} + \text{prob}_6 \times \mu_{11} + \text{prob}_8 \times \mu_{11} + \text{prob}_{10} \times \mu_{11} + \text{prob}_{14} \times \mu_{12}}{\text{prob}_4 + \text{prob}_6 + \text{prob}_8 + \text{prob}_{10} + \text{prob}_{14}}$$

$$\mu_2^u = \frac{\text{prob}_5 \times \mu_{21} + \text{prob}_7 \times \mu_{21} + \text{prob}_9 \times \mu_{21} + \text{prob}_{12} \times \mu_{21} + \text{prob}_{15} \times \mu_{22}}{\text{prob}_5 + \text{prob}_7 + \text{prob}_9 + \text{prob}_{12} + \text{prob}_{15}}$$

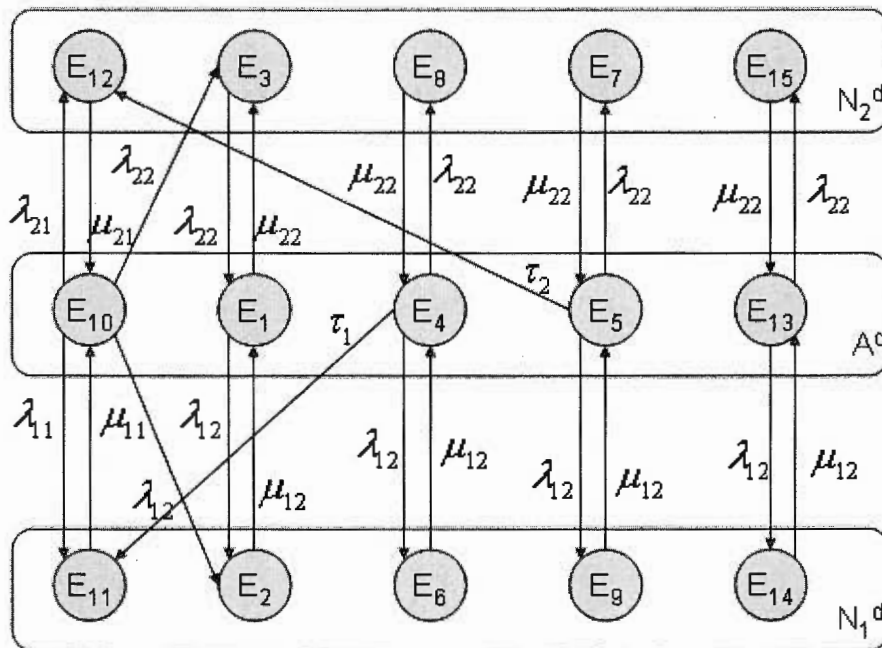


Figure 6.7- Transitions entre les macros états  $A^d$ ,  $N_1^d$  et  $N_2^d$  (système synchrone)

$$U^d = U$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^d &= \frac{\text{prob}_1 \times \lambda_{12} + \text{prob}_4 \times (\lambda_{12} + \tau_1) + \text{prob}_5 \times \lambda_{12} + \text{prob}_{10} \times (\lambda_{11} + \lambda_{12}) + \text{prob}_{13} \times \lambda_{12}}{\text{prob}_1 + \text{prob}_4 + \text{prob}_5 + \text{prob}_{10} + \text{prob}_{13}} \\ \lambda_2^d &= \frac{\text{prob}_1 \times \lambda_{22} + \text{prob}_4 \times \lambda_{22} + \text{prob}_5 \times (\lambda_{22} + \tau_2) + \text{prob}_{10} \times (\lambda_{21} + \lambda_{22}) + \text{prob}_{13} \times \lambda_{22}}{\text{prob}_1 + \text{prob}_4 + \text{prob}_5 + \text{prob}_{10} + \text{prob}_{13}} \\ \mu_1^d &= \frac{\text{prob}_2 \times \mu_{12} + \text{prob}_6 \times \mu_{12} + \text{prob}_9 \times \mu_{12} + \text{prob}_{11} \times \mu_{11} + \text{prob}_{14} \times \mu_{12}}{\text{prob}_2 + \text{prob}_6 + \text{prob}_9 + \text{prob}_{11} + \text{prob}_{14}} \\ \mu_2^d &= \frac{\text{prob}_3 \times \mu_{22} + \text{prob}_7 \times \mu_{22} + \text{prob}_8 \times \mu_{22} + \text{prob}_{12} \times \mu_{21} + \text{prob}_{15} \times \mu_{22}}{\text{prob}_3 + \text{prob}_7 + \text{prob}_8 + \text{prob}_{12} + \text{prob}_{15}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

### 1.3.2. Système poussé

La Figure 6.8 (respectivement 6.9) représente les transitions entre les macros états du système vu de l'amont (respectivement de l'aval). La valeur de  $\tau_5$  est calculée en considérant l'état  $E_{13}$ . On obtient :

$$\tau_5 = \frac{\text{prob}_{13} \times (\lambda_{12} + \lambda_{22}) - \text{prob}_{15} \times \mu_{22} - \text{prob}_{14} \times \mu_{12}}{\text{prob}_1} \quad (6.7)$$

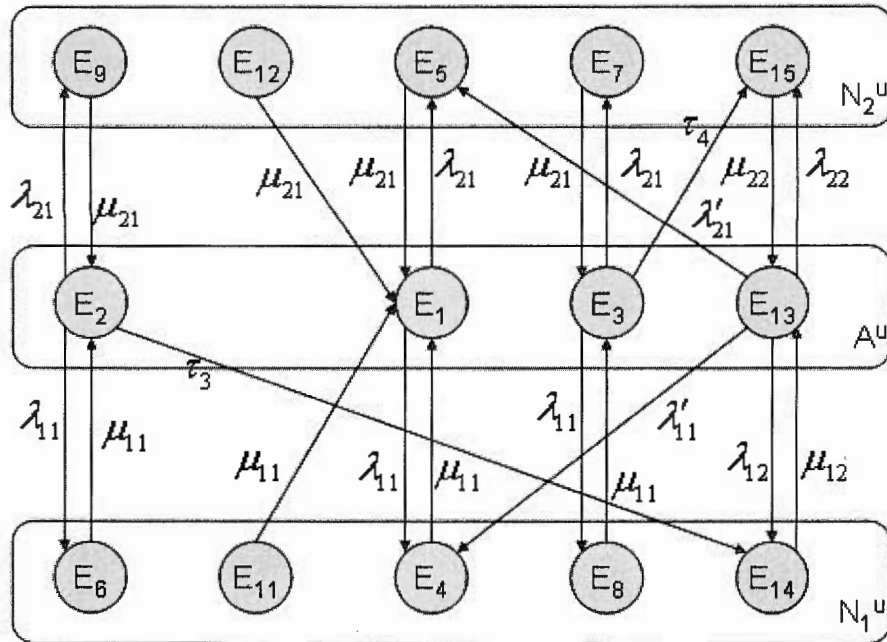


Figure 6.8- Transitions entre les macros états  $A^u$ ,  $N_1^u$  et  $N_2^u$  (système poussé)

On remarque que le macro état  $A^u$  regroupe les quatre états  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_{13}$  mais la cadence de production n'est pas la même pour ces quatre états. Dans le cas de  $E_1, E_2$  et  $E_3$  elle est de  $U_1$  et dans  $E_{13}$  elle est de  $U_2$  car  $M1$  est ralenti par  $M2$ . La cadence  $U^u$  est donc une moyenne pondérée de  $U_1$  et  $U_2$ .

$$\begin{aligned}
U^u &= \frac{(prob_1 + prob_2 + prob_3) \times U_1 + prob_{13} \times U_2}{prob_1 + prob_2 + prob_3 + prob_{13}} \\
\lambda_1^u &= \frac{prob_1 \times \lambda_{11} + prob_2 \times (\lambda_{11} + \tau_3) + prob_3 \times \lambda_{11} + prob_{13} \times (\lambda'_{11} + \lambda_{12})}{prob_1 + prob_2 + prob_3 + prob_{13}} \\
\lambda_2^u &= \frac{prob_1 \times \lambda_{21} + prob_2 \times \lambda_{21} + prob_3 \times (\lambda_{21} + \tau_4) + prob_{13} \times (\lambda'_{21} + \lambda_{22})}{prob_1 + prob_2 + prob_3 + prob_{13}} \\
\mu_1^u &= \frac{prob_4 \times \mu_{11} + prob_6 \times \mu_{11} + prob_8 \times \mu_{11} + prob_{11} \times \mu_{11} + prob_{14} \times \mu_{12}}{prob_4 + prob_6 + prob_8 + prob_{11} + prob_{14}} \\
\mu_2^u &= \frac{prob_5 \times \mu_{21} + prob_7 \times \mu_{21} + prob_9 \times \mu_{21} + prob_{12} \times \mu_{21} + prob_{15} \times \mu_{22}}{prob_5 + prob_7 + prob_9 + prob_{12} + prob_{15}}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\lambda'_{11} &= \lambda_{11} \times \frac{U_2}{U_1} \\
\lambda'_{21} &= \lambda_{21} \times \frac{U_2}{U_1}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

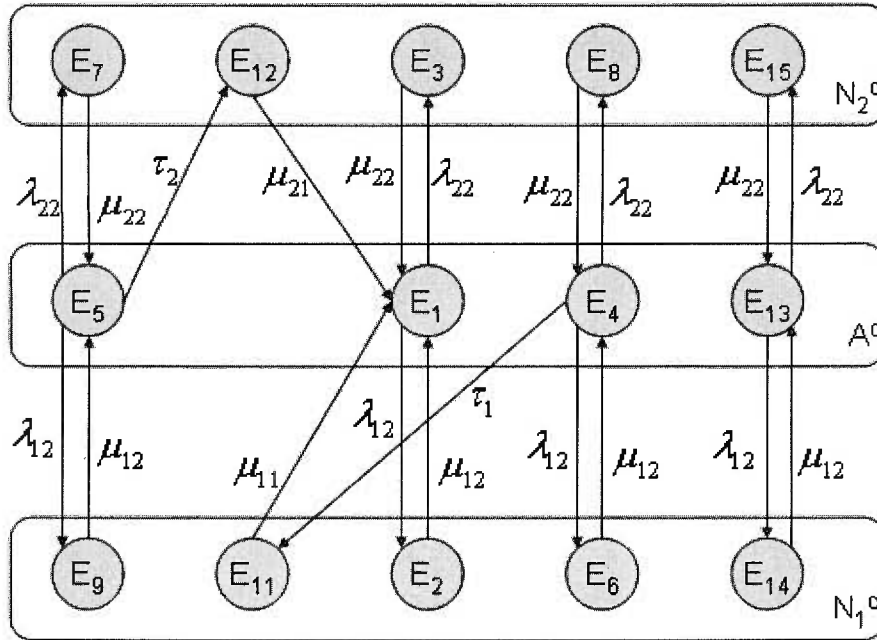


Figure 6.9- Transitions entre les macros états  $A^d$ ,  $N_1^d$  et  $N_2^d$  (système poussé)

$$U^d = U_2$$

$$\lambda_1^d = \frac{\text{prob}_1 \times \lambda_{12} + \text{prob}_4 \times (\lambda_{12} + \tau_1) + \text{prob}_5 \times \lambda_{12} + \text{prob}_{13} \times \lambda_{12}}{\text{prob}_1 + \text{prob}_4 + \text{prob}_5 + \text{prob}_{13}}$$

$$\lambda_2^d = \frac{\text{prob}_1 \times \lambda_{22} + \text{prob}_4 \times \lambda_{22} + \text{prob}_5 \times (\lambda_{22} + \tau_2) + \text{prob}_{13} \times \lambda_{22}}{\text{prob}_1 + \text{prob}_4 + \text{prob}_5 + \text{prob}_{13}}$$

(6.10)

$$\mu_1^d = \frac{\text{prob}_2 \times \mu_{12} + \text{prob}_6 \times \mu_{12} + \text{prob}_9 \times \mu_{12} + \text{prob}_{11} \times \mu_{11} + \text{prob}_{14} \times \mu_{12}}{\text{prob}_2 + \text{prob}_6 + \text{prob}_9 + \text{prob}_{11} + \text{prob}_{14}}$$

$$\mu_2^d = \frac{\text{prob}_3 \times \mu_{22} + \text{prob}_7 \times \mu_{22} + \text{prob}_8 \times \mu_{22} + \text{prob}_{12} \times \mu_{21} + \text{prob}_{15} \times \mu_{22}}{\text{prob}_3 + \text{prob}_7 + \text{prob}_8 + \text{prob}_{12} + \text{prob}_{15}}$$



### 1.3.3. Système tiré

La Figure 6.10 (respectivement 6.11) représente les transitions entre les macros états du système vu de l'amont (respectivement de l'aval). La valeur de  $\tau_6$  est calculée en considérant l'état  $E_{10}$ . On obtient :

$$\tau_6 = \frac{prob_{10} \times (\lambda_{12} + \lambda_{21}) - prob_{12} \times \mu_{21} - prob_{11} \times \mu_{11}}{prob_1} \quad (6.11)$$

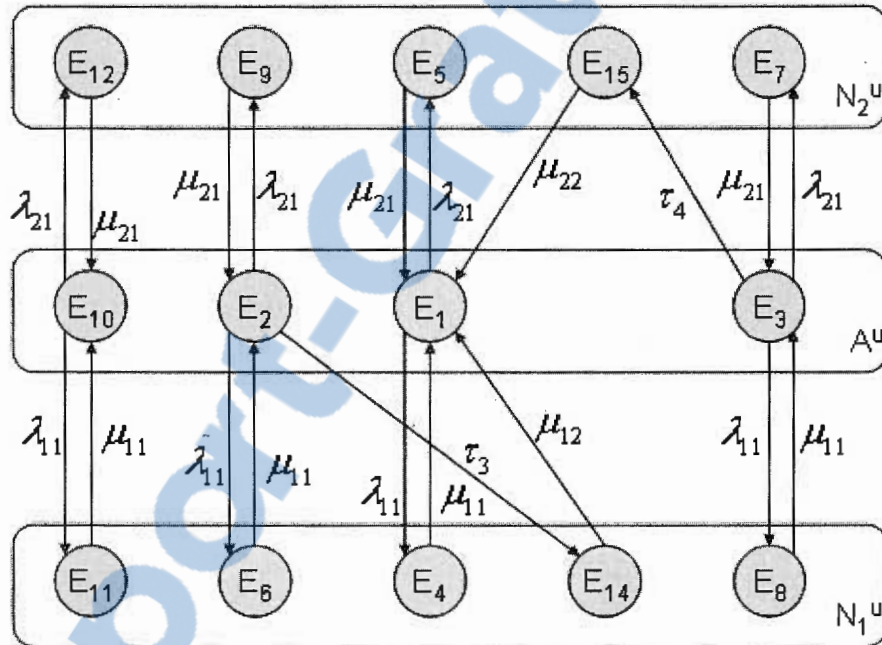


Figure 6.10- Transitions entre les macros états  $A^u$ ,  $N_1^u$  et  $N_2^u$  (système tiré)

$$U^u = U_1$$

$$\lambda_1^u = \frac{\text{prob}_1 \times \lambda_{11} + \text{prob}_2 \times (\lambda_{11} + \tau_3) + \text{prob}_3 \times \lambda_{11} + \text{prob}_{10} \times \lambda_{11}}{\text{prob}_1 + \text{prob}_2 + \text{prob}_3 + \text{prob}_{10}}$$

$$\lambda_2^u = \frac{\text{prob}_1 \times \lambda_{21} + \text{prob}_2 \times \lambda_{21} + \text{prob}_3 \times (\lambda_{21} + \tau_4) + \text{prob}_{10} \times \lambda_{21}}{\text{prob}_1 + \text{prob}_2 + \text{prob}_3 + \text{prob}_{10}} \quad (6.12)$$

$$\mu_1^u = \frac{\text{prob}_4 \times \mu_{11} + \text{prob}_6 \times \mu_{11} + \text{prob}_9 \times \mu_{11} + \text{prob}_{11} \times \mu_{11} + \text{prob}_{14} \times \mu_{12}}{\text{prob}_4 + \text{prob}_6 + \text{prob}_9 + \text{prob}_{11} + \text{prob}_{14}}$$

$$\mu_2^u = \frac{\text{prob}_5 \times \mu_{21} + \text{prob}_7 \times \mu_{21} + \text{prob}_8 \times \mu_{21} + \text{prob}_{12} \times \mu_{21} + \text{prob}_{15} \times \mu_{22}}{\text{prob}_5 + \text{prob}_7 + \text{prob}_8 + \text{prob}_{12} + \text{prob}_{15}}$$

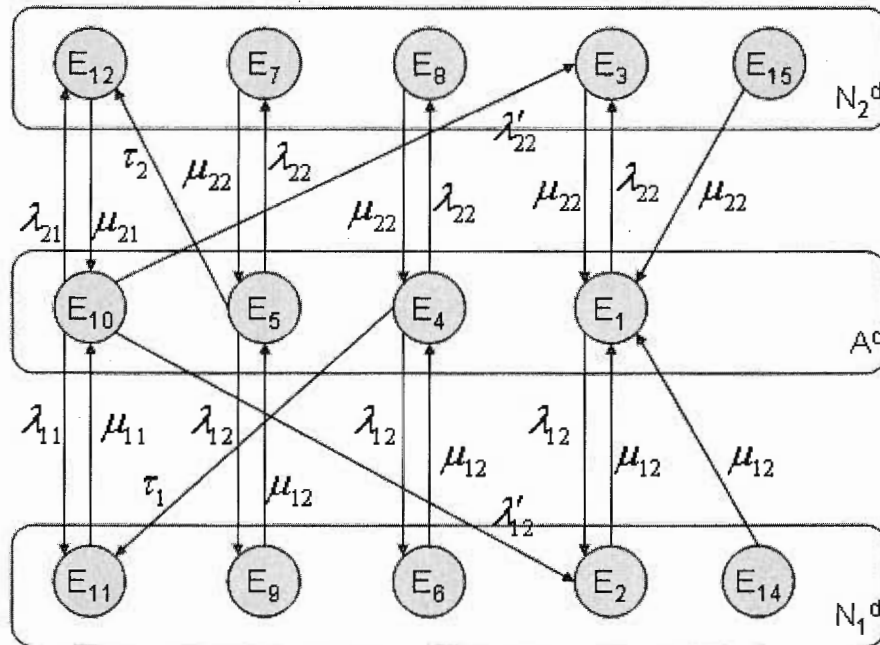


Figure 6.11- Transitions entre les macros états \$A^d\$, \$N\_1^d\$ et \$N\_2^d\$ (système tiré)

On remarque que le macro état  $A^d$  regroupe les quatre états  $E_1, E_4, E_5$  et  $E_{10}$  mais la cadence de production n'est pas la même pour ces quatre états. Dans le cas de  $E_1, E_4$  et  $E_5$  elle est de  $U_2$  et dans  $E_{10}$  elle est de  $U_1$  car  $M2$  est ralentie par  $M1$ . La cadence  $U^d$  est donc une moyenne pondérée de  $U_1$  et  $U_2$ .

$$\begin{aligned}
 U^d &= \frac{U_1 \times (prob_1 + prob_4 + prob_5) + U_2 \times prob_{10}}{prob_1 + prob_4 + prob_5 + prob_{10}} \\
 \lambda_1^d &= \frac{prob_1 \times \lambda_{12} + prob_4 \times (\lambda_{12} + \tau_1) + prob_5 \times \lambda_{12} + prob_{10} \times (\lambda_{11} + \lambda'_{12})}{prob_1 + prob_4 + prob_5 + prob_{10}} \\
 \lambda_2^d &= \frac{prob_1 \times \lambda_{22} + prob_4 \times \lambda_{22} + prob_5 \times (\lambda_{22} + \tau_2) + prob_{10} \times (\lambda_{21} + \lambda'_{22})}{prob_1 + prob_4 + prob_5 + prob_{10}} \\
 \mu_1^d &= \frac{prob_2 \times \mu_{12} + prob_6 \times \mu_{12} + prob_9 \times \mu_{12} + prob_{11} \times \mu_{11} + prob_{14} \times \mu_{12}}{prob_2 + prob_6 + prob_9 + prob_{11} + prob_{14}} \\
 \mu_2^d &= \frac{prob_3 \times \mu_{22} + prob_7 \times \mu_{22} + prob_8 \times \mu_{22} + prob_{12} \times \mu_{21} + prob_{15} \times \mu_{22}}{prob_3 + prob_7 + prob_8 + prob_{12} + prob_{15}}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \lambda'_{12} &= \lambda_{12} \times \frac{U_1}{U_2} \\
 \lambda'_{22} &= \lambda_{22} \times \frac{U_1}{U_2}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

#### 1.4. Évaluation du taux de production de la ligne

Après agrégation de la ligne de production par une machine équivalente, on utilise les résultats de la partie « Caractérisation d'une machine en isolation » du chapitre précédent pour évaluer le taux de production de la ligne, ce qui nous donne :

$$PR = U^{eq} P(A) = \frac{U^{eq}}{1 + \frac{\lambda_1^{eq}}{\mu_1^{eq}} + \frac{\lambda_2^{eq}}{\mu_2^{eq}}} \quad (6.15)$$

où :  $U^{eq}$ ,  $\lambda_1^{eq}$ ,  $\mu_1^{eq}$ ,  $\lambda_2^{eq}$  et  $\mu_2^{eq}$  représentent respectivement le débit, les taux de panne et de réparation en mode 1 et les taux de panne et de réparation en mode 2 de la machine équivalente.

## 2. Algorithmes

### 2.1. Algorithme pour le cas de l'agrégation amont

#### Étape 1

Entrer les paramètres de la ligne de production, à savoir :

- Les capacités des stocks intermédiaires :  $N_i (i=1, \dots, NbStocks)$  où  $NbStocks$  désigne le nombre de stocks de la ligne considérée).
- Pour chaque machine  $M_j$  ( $j=1, \dots, NbMachines$  où  $NbMachines$  désigne le nombre de machines de la ligne considérée) :

1. Les taux de pannes et de réparation :  $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \mu_{1j}, \mu_{2j}$
2. La cadence de production :  $U_j$

### Étape 2

Poser :  $M_{eq} = M_1$

Pour  $i = 1$  à  $NbMachines - 1$

#### Faire

- Déterminer les probabilités des états  $E_1$  à  $E_{15}$  pour le système composé de

$M_{eq}, M_{i+1}$  et  $B_i$

- Déterminer  $\tau_3$  et  $\tau_4$  à partir de (6.1) et (6.2).

- Si  $U_1 = U_2$  alors

#### Début

- Déterminer les paramètres de la machine équivalente à partir de (6.5).

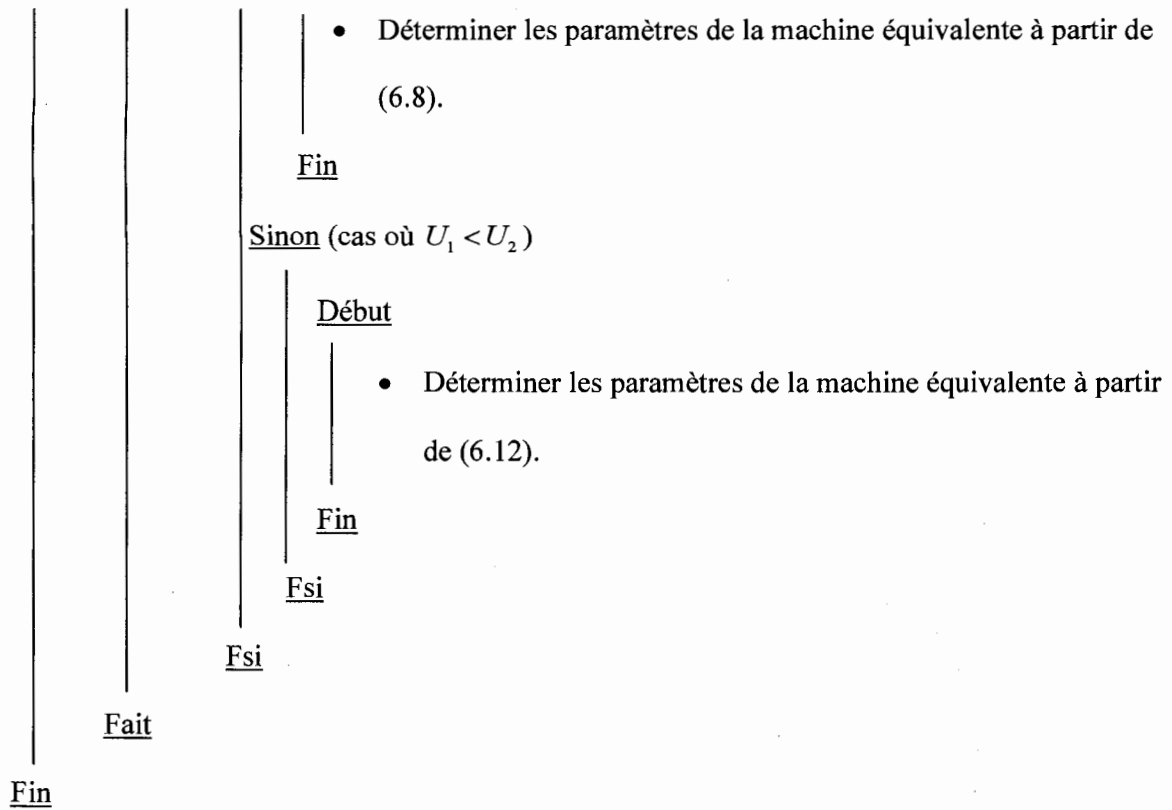
#### Fin

#### Sinon

- Si  $U_1 > U_2$  alors

#### Début

- Déterminer  $\lambda'_{11}$  et  $\lambda'_{21}$  à partir de (6.9).



### Étape 3

Évaluer le taux de production à partir de l'équation (6.15).

## 2.2. Algorithme pour le cas de l'agrégation aval

### Étape 1

Entrer les paramètres de la ligne de production, à savoir :

- Les capacités des stocks intermédiaires :  $N_i (i=1, \dots, NbStocks$  où  $NbStocks$  désigne le nombre de stocks de la ligne considérée).
- Pour chaque machine  $M_j$  ( $j=1, \dots, NbMachines$  où  $NbMachines$  désigne le nombre de machines de la ligne considérée) :
  1. Les taux de pannes et de réparation :  $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \mu_{1j}, \mu_{2j}$
  2. La cadence de production :  $U_j$

### Étape 2

Poser :  $M_{eq} = M_{NbMachines}$

Pour  $i = NbMachines$  à 2

Faire

- Déterminer les probabilités des états  $E_1$  à  $E_{15}$  pour le système composé de  $M_{eq}, M_{i-1}$  et  $B_{i-1}$

- Déterminer  $\tau_1$  et  $\tau_2$  à partir de (6.3) et (6.4).
- Si  $U_1 = U_2$  alors

Début

- Déterminer les paramètres de la machine équivalente à partir de (6.6).

Fin

Sinon

Si  $U_1 > U_2$  alors

Début

- Déterminer les paramètres de la machine équivalente à partir de (6.10).

Fin

Sinon (cas où  $U_1 < U_2$ )

Début

- Déterminer  $\lambda'_{12}$  et  $\lambda'_{22}$  à partir de (6.9).
- Déterminer les paramètres de la machine équivalente à partir de (6.13).

Fin

Fsi

Fsi

Fait



|  
Fin

### Étape 3

Évaluer le taux de production à partir de l'équation (6.15).

### **3. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons détaillé notre extension de la technique d'agrégation pour l'évaluation de performance de lignes de production série où les machines peuvent avoir deux modes de défaillances. Nous avons montré comment caractériser une machine en isolation, puis comment définir les machines équivalentes amont et aval dans le cas d'une ligne de deux machines et un stock intermédiaire avant de généraliser cette technique à des lignes plus longues. Enfin, nous avons proposé des algorithmes d'agrégation dans les deux cas : amont et aval.

Au prochain chapitre, nous validerons le modèle proposé par simulation et nous ferons une comparaison entre les résultats obtenus dans le cas de l'agrégation de lignes ayant des machines à un seul mode de défaillance et dans le cas de l'agrégation de lignes ayant des machines à deux modes de défaillances.

## CHAPITRE VII

### VALIDATION DU MODÈLE PROPOSÉ PAR SIMULATION

Dans le présent chapitre, nous présentons les résultats de simulation obtenus avec le logiciel ProModel. Ces résultats, présentés à la section 1, nous permettent de valider le modèle que nous avons proposé au chapitre précédent. Les paramètres utilisés pour les machines ont été générés aléatoirement et proviennent de (Levantesi et al., 2003) et de (Nahas et al., 2006). Ces paramètres caractérisent un seul mode de défaillance. Afin de générer, à partir de ces derniers, les paramètres caractérisant deux modes de défaillances, nous utiliserons la démarche suivante :

À partir d'une machine à deux modes de défaillances, on arrive à définir une machine ayant la même efficacité en isolation que la précédente mais qui a un seul mode de défaillance au moyen des équations ci-dessous (Levantesi et al, 2002) :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \frac{1}{\mu_1} \right) + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \frac{1}{\mu_2} \right) \end{cases} \quad (7.2)$$

En refaisant le chemin inverse, on souhaite déterminer les paramètres d'une machine à deux modes de défaillances à partir des paramètres d'une machine à un seul mode de défaillance sous réserve, toutefois, que les deux machines doivent être de même efficacité en isolation. Ainsi, à partir des équations précédentes, on peut écrire :

$$\begin{cases} \lambda_1 = v_1 \times \lambda \\ \lambda_2 = v_2 \times \lambda \\ \mu_1 = \frac{\mu \times \lambda_1}{\lambda \times v_3} \\ \mu_2 = \frac{\mu \times \lambda_2}{\lambda \times v_4} \end{cases} \quad (7.3)$$

où :

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 1 \\ v_3 + v_4 = 1 \end{cases}$$

Le système ci-dessus possède une infinité de solutions. On optera pour la solution suivante :

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\mu_1$	$\mu_2$
M1	0.7059	0.2941	0.3039	0.6961
M2	0.1111	0.8889	0.3192	0.6808
M3	0.7143	0.2857	0.5293	0.4707
M4	0.0794	0.9206	0.2274	0.7726
M5	0.6667	0.3333	0.3901	0.6099

**Tableau 7.1-** Ratios utilisés pour la génération des paramètres

Cette solution fait en sorte que pour  $M4$ , les taux de pannes ont des ordres de magnitude différents. L'idée étant d'avoir au moins une machine de la ligne dont les taux de pannes ont des ordres de magnitude différents. Chaque exemple est simulé par 10 exécutions d'une durée de 6000 heures chacune.

### 1. Simulation et comparaison

Nous allons tout d'abord commencer par présenter, aux tableaux 7.2 à 7.7, les données utilisées lors des simulations. Nous présenterons ensuite, au tableau 7.8, les résultats de ces simulations.

$M$	1 Mode de panne				2 Modes de pannes				
	$U$	$\lambda$	$\mu$	$N$	$U$	$\lambda_1$	$\mu_1$	$\lambda_2$	$\mu_2$
Exemple									
1									
1	1.030	0.01	0.10	20	1.030	0.0071	0.2323	0.0029	0.0422
2	1.103	0.02	0.20	20	1.103	0.0022	0.0696	0.0178	0.2611
3	1.178	0.01	0.15	20	1.178	0.0071	0.2024	0.0029	0.0910
4	1.041	0.04	0.20	20	1.041	0.0032	0.0698	0.0368	0.2383
5	0.956	0.03	0.25		0.956	0.0200	0.4273	0.0100	0.1366

**Tableau 7.2-** Données pour une ligne à 5 machines et 4 stocks

<i>M</i>	1 Mode de panne				2 Modes de pannes				
	<i>U</i>	$\lambda$	$\mu$	<i>N</i>	<i>U</i>	$\lambda_1$	$\mu_1$	$\lambda_2$	$\mu_2$
Exemple									
2									
1	3.3977	0.0269	0.1593	80	3.3977	0.0190	0.3700	0.0079	0.0673
2	3.5041	0.0315	0.195	65	3.5041	0.0035	0.0679	0.0280	0.2546
3	3.07	0.0484	0.2192	60	3.07	0.0346	0.2958	0.0138	0.1330
4	3.3826	0.0798	0.3878	70	3.3826	0.0063	0.1354	0.0735	0.4621
5	3.4279	0.021	0.1982	70	3.4279	0.0140	0.3387	0.0070	0.1083
6	3.5796	0.0148	0.218	70	3.5796	0.0104	0.5064	0.0044	0.0921
7	3.6137	0.0172	0.1552	85	3.6137	0.0019	0.0540	0.0153	0.2026
8	3.8469	0.0088	0.2565	80	3.8469	0.0063	0.3462	0.0025	0.1557
9	3.7465	0.0113	0.1941	45	3.7465	0.0009	0.0678	0.0104	0.2313
10	3.828	0.0051	0.1863		3.828	0.0034	0.3184	0.0017	0.1018

**Tableau 7.3-** Données pour une ligne à 10 machines et 9 stocks

<i>M</i>	1 Mode de panne				2 Modes de pannes				
	<i>U</i>	$\lambda$	$\mu$	<i>N</i>	<i>U</i>	$\lambda_1$	$\mu_1$	$\lambda_2$	$\mu_2$
Exemple									
3									
1	2.676	0.0972	0.1973	55	2.676	0.0686	0.4583	0.0286	0.0834
2	3.5717	0.0205	0.0923	40	3.5717	0.0023	0.0321	0.0182	0.1205
3	3.4336	0.0118	0.0788	40	3.4336	0.0084	0.1063	0.0034	0.0478
4	2.9181	0.0222	0.0682	55	2.9181	0.0018	0.0238	0.0204	0.0813
5	3.4678	0.0352	0.2216	50	3.4678	0.0235	0.3787	0.0117	0.1211
6	3.6115	0.0073	0.0719	50	3.6115	0.0052	0.1670	0.0021	0.0304
7	4.1087	0.0134	0.1379	65	4.1087	0.0015	0.0480	0.0119	0.1801
8	3.5102	0.0206	0.1803	55	3.5102	0.0147	0.2433	0.0059	0.1094
9	3.8792	0.0112	0.158	35	3.8792	0.0009	0.0552	0.0103	0.1883
10	4.1199	0.0083	0.0918	40	4.1199	0.0055	0.1569	0.0028	0.0502
11	3.8245	0.0095	0.1402	55	3.8245	0.0067	0.3257	0.0028	0.0592
12	4.019	0.0023	0.0952	40	4.019	0.0003	0.0331	0.0020	0.1243
13	2.0227	0.1309	0.1309	50	2.0227	0.0935	0.1767	0.0374	0.0795
14	4.1152	0.0035	0.0854	55	4.1152	0.0003	0.0298	0.0032	0.1018
15	3.7954	0.0053	0.0904		3.7954	0.0035	0.1545	0.0018	0.0494

**Tableau 7.4-** Données pour des lignes à 15 machines et 14 stocks (exemple 1)

<i>M</i>	1 Mode de panne				2 Modes de pannes				
	<i>U</i>	$\lambda$	$\mu$	<i>N</i>	<i>U</i>	$\lambda_1$	$\mu_1$	$\lambda_2$	$\mu_2$
Exemple									
4									
1	2.7256	0.1336	0.2139	70	2.7256	0.0943	0.4968	0.0393	0.0904
2	3.7054	0.0344	0.1508	50	3.7054	0.0038	0.0525	0.0306	0.1969
3	3.5206	0.0327	0.2261	45	3.5206	0.0234	0.3051	0.0093	0.1372
4	3.0724	0.0444	0.1566	60	3.0724	0.0035	0.0547	0.0409	0.1866
5	3.6719	0.0309	0.1866	67	3.6719	0.0206	0.3189	0.0103	0.1020
6	3.652	0.0127	0.1238	65	3.652	0.0090	0.2876	0.0037	0.0523
7	4.2079	0.0156	0.1587	75	4.2079	0.0017	0.0552	0.0139	0.2072
8	3.6295	0.0188	0.1389	65	3.6295	0.0134	0.1874	0.0054	0.0843
9	4.006	0.0094	0.1185	40	4.006	0.0007	0.0414	0.0087	0.1412
10	4.1955	0.0082	0.0975	45	4.1955	0.0055	0.1666	0.0027	0.0533
11	3.9554	0.0059	0.087	60	3.9554	0.0042	0.2021	0.0017	0.0368
12	4.2889	0.0047	0.2368	67	4.2889	0.0005	0.0824	0.0042	0.3092
13	2.1252	0.1779	0.1779	65	2.1252	0.1271	0.2401	0.0508	0.1080
14	4.1519	0.0034	0.0791	65	4.1519	0.0003	0.0276	0.0031	0.0943
15	4.0276	0.008	0.1232		4.0276	0.0053	0.2106	0.0027	0.0673

**Tableau 7.5-** Données pour des lignes à 15 machines et 14 stocks (exemple 2)

<i>M</i>	1 Mode de panne				2 Modes de pannes				
	<i>U</i>	$\lambda$	$\mu$	<i>N</i>	<i>U</i>	$\lambda_1$	$\mu_1$	$\lambda_2$	$\mu_2$
Exemple									
5									
1	2.8628	0.0447	0.0714	80	2.8628	0.0316	0.1658	0.0131	0.0302
2	3.7109	0.0204	0.0792	65	3.7109	0.0023	0.0276	0.0181	0.1034
3	3.8141	0.0087	0.0609	60	3.8141	0.0062	0.0822	0.0025	0.0370
4	3.4688	0.0562	0.1804	70	3.4688	0.0045	0.0630	0.0517	0.2150
5	3.9665	0.0113	0.0751	70	3.9665	0.0075	0.1283	0.0038	0.0410
6	3.6843	0.0085	0.0806	70	3.6843	0.0060	0.1872	0.0025	0.0341
7	4.212	0.0143	0.1497	85	4.212	0.0016	0.0521	0.0127	0.1955
8	3.7977	0.0089	0.0767	80	3.7977	0.0064	0.1035	0.0025	0.0466
9	4.1912	0.0077	0.0979	45	4.1912	0.0006	0.0342	0.0071	0.1167
10	4.2948	0.0086	0.0949	60	4.2948	0.0057	0.1622	0.0029	0.0519
11	3.9678	0.0045	0.0641	70	3.9678	0.0032	0.1489	0.0013	0.0271
12	4.5438	0.0044	0.1972	70	4.5438	0.0005	0.0686	0.0039	0.2575
13	2.149	0.0762	0.0762	70	2.149	0.0544	0.1028	0.0218	0.0463
14	4.1718	0.0032	0.0972	85	4.1718	0.0003	0.0339	0.0029	0.1158
15	4.2929	0.0039	0.0637		4.2929	0.0026	0.1089	0.0013	0.0348

**Tableau 7.6-** Données pour des lignes à 15 machines et 14 stocks (exemple 3)



<i>M</i>	1 Mode de panne				2 Modes de pannes				
	<i>U</i>	$\lambda$	$\mu$	<i>N</i>	<i>U</i>	$\lambda_1$	$\mu_1$	$\lambda_2$	$\mu_2$
Exemple									
6									
1	1.000	0.0170	0.0947	55	1.000	0.0120	0.2200	0.0050	0.0400
2	1.200	0.0900	0.1149	40	1.200	0.0100	0.0400	0.0800	0.1500
3	1.100	0.1400	0.1482	40	1.100	0.1000	0.2000	0.0400	0.0900
4	1.400	0.1260	0.2493	55	1.400	0.0100	0.0870	0.1160	0.2971
5	1.200	0.1500	0.1463	50	1.200	0.1000	0.2500	0.0500	0.0800
6	1.000	0.0200	0.1000	50	1.000	0.0141	0.2323	0.0059	0.0422
7	1.200	0.0100	0.1000	65	1.200	0.0011	0.0348	0.0089	0.1306
8	1.100	0.0200	0.1000	55	1.100	0.0143	0.1350	0.0057	0.0607
9	1.400	0.0100	0.1000	35	1.400	0.0008	0.0349	0.0092	0.1192
10	1.200	0.0200	0.1000	40	1.200	0.0133	0.1709	0.0067	0.0546
11	1.000	0.0420	0.1000	55	1.000	0.0296	0.2323	0.0124	0.0422
12	1.200	0.0670	0.2000	40	1.200	0.0074	0.0696	0.0596	0.2611
13	1.100	0.0600	0.1500	50	1.100	0.0429	0.2024	0.0171	0.0910
14	1.400	0.0460	0.2000	55	1.400	0.0037	0.0698	0.0423	0.2383
15	1.200	0.0120	0.2500	65	1.200	0.0080	0.4273	0.0040	0.1366
16	1.030	0.0100	0.1000	55	1.030	0.0071	0.2323	0.0029	0.0422
17	1.103	0.0200	0.2000	35	1.103	0.0022	0.0696	0.0178	0.2611
18	1.178	0.0100	0.1500	40	1.178	0.0071	0.2024	0.0029	0.0910
19	1.041	0.0400	0.2000	55	1.041	0.0032	0.0698	0.0368	0.2383
20	0.956	0.0300	0.2500		0.956	0.0200	0.4273	0.0100	0.1366

**Tableau 7.7-** Données pour des lignes à 20 machines et 19 stocks

Le tableau suivant illustre les résultats obtenus lors des simulations. Les notations utilisées dans ce tableau sont expliquées ci-dessous :

- *Exemple* : indique le numéro de l'exemple. Chacun des tableaux de données ci-dessus (tableaux 7.2 à 7.7) est associé à un numéro d'exemple et c'est ce numéro qui est utilisé pour identifier l'exemple.
- *Mont 1MdP* : représente la valeur analytique trouvée par la technique d'agrégation à un mode de défaillance.
- *Mont 2MdP* : représente la valeur analytique trouvée par la technique d'agrégation à deux modes de défaillances.
- *Simulation* : la simulation se fait toujours dans le cas de deux modes de fonctionnement car ce cas est celui qui reflète au mieux la réalité.

Numéro d'exemple	Agrégation		Simulation	Erreur par rapport à la simulation	
	Mont 1MdP	Mont 2MdP		Mont 1MdP	Mont 2MdP
1	0.804	0.797	0.794	1.25 %	0.37 %
2	2.361	2.298	2.315	1.98 %	-0.73 %
3	0.991	0.968	0.959	3.33 %	0.93 %
4	1.059	1.048	1.029	2.91 %	1.84 %
5	1.040	1.017	1.018	2.16 %	-0.09 %
6	0.493	0.511	0.523	-5.73 %	2.29 %

**Tableau 7.8-** Résultats de simulation et comparaisons

À partir du tableau 7.8, nous constatons d'une part que le fait de considérer explicitement les différents modes de défaillances de la ligne permet d'obtenir une évaluation plus précise de son taux de production; et d'autre part que l'erreur entre les valeurs d'agrégation et la simulation augmente avec l'augmentation de la longueur de la ligne, ce qui est tout à fait conforme étant donné l'erreur d'approximation effectuée sur chaque machine et qui se répercute sur la valeur du taux de production.

## 2. Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la validation par simulation du modèle que nous avons développé. À partir des résultats obtenus, il apparaît clairement que le fait de considérer explicitement les deux modes de défaillances permet d'obtenir des résultats plus précis concernant le taux de production que le fait de grouper les taux de pannes en un *taux moyen* par le biais des équations (7.1) et (7.2).

Ainsi, le modèle proposé dans ce travail permet d'améliorer l'évaluation du taux de production de lignes de transfert comparativement aux modèles à un seul mode de défaillance.

Au chapitre suivant, nous présentons une conclusion générale sur le travail effectué dans ce mémoire.

## **CHAPITRE VIII**

### **CONCLUSION GÉNÉRALE**

Nous avons abordé, dans ce mémoire, le problème de l'évaluation de performances de lignes de production avec stocks intermédiaires et machines pouvant avoir deux modes de défaillances. L'utilisation de stocks intermédiaires permet de découpler les processeurs de la ligne de production et ce, afin d'éviter que la défaillance d'un processeur n'entraîne l'arrêt complet de toute la ligne et par conséquent, ils permettent d'améliorer la disponibilité et le taux de production de la ligne.

Le fait de considérer des machines à plusieurs modes de défaillances nous permet de développer des modèles plus réalistes, et ainsi obtenir une évaluation de performances plus précise que si l'on regroupe ces modes en un seul, dont le taux de panne représente une moyenne des taux de pannes des différents modes, au moyen d'une approximation de premier ordre. En effet, dans la réalité les machines peuvent tomber en panne de différentes façons et pour différentes raisons, et chacune de ces pannes est caractérisée par son propre taux de panne et son propre taux de réparation.

La prise en compte des différents modes de défaillances des machines mène à une évaluation plus précise des performances de la ligne. Cela génère toutefois une plus grande complexité mathématique lors de l'écriture des équations du modèle et surtout lors de leur résolution. L'écriture de ces équations de transitions, et notamment les équations frontières, représente une difficulté majeure dans le développement de ces modèles. À titre d'exemple, pour le cas d'un seul mode de défaillance on a 4 équations de transitions internes et 8 équations de transitions frontières alors que pour le cas de deux modes de défaillances on obtient 9 équations de transitions internes et 23 équations de transitions frontières, ces dernières étant très difficiles à transcrire. La majorité des travaux que l'on retrouve dans la littérature considèrent le cas de machines à un seul mode de défaillance afin de simplifier les calculs mais les modèles obtenus sont moins précis.

Dans le présent mémoire, nous nous sommes intéressés au développement d'un modèle analytique pour l'évaluation du taux de production de lignes de production série, comportant plusieurs machines et plusieurs stocks intermédiaires de capacité finie, basé sur la technique d'agrégation. Nous avons tout d'abord commencé par faire une revue de la littérature concernant les principaux travaux traitant de l'évaluation de performances de lignes de production avec machines non fiables et stocks intermédiaires.

Une attention toute particulière a toutefois été accordée aux travaux dans lesquels les machines peuvent occuper plus que deux états. Nous avons également présenté, au chapitre II, quelques notions de base sur les lignes de production série et nous avons introduit les

principaux modèles de lignes de production ainsi que les hypothèses de travail qui leurs sont généralement associées. Nous avons également présenté la technique de décomposition et la technique d'agrégation qui sont les deux principales méthodes approximatives pour l'évaluation de performances de ces lignes de production. Au chapitre III, nous avons présenté les deux modèles les plus utilisés (à savoir le modèle déterministe et le modèle continu) pour l'évaluation de performances de lignes de production série à deux machines à un mode de défaillance et un stock intermédiaire. Au chapitre IV, nous avons présenté la technique d'agrégation telle que définie dans (Terracol et David, 1987). C'est cette technique que nous avons étendue au chapitre VI vers la prise en compte de deux modes de défaillances. Pour ce faire, nous avons repris au chapitre V le modèle proposé par (Levantesi et al, 1999) permettant l'évaluation de performances de lignes composées d'un stock intermédiaire et de deux machines à plusieurs modes de défaillances et nous l'avons appliqué au cas de deux modes de défaillances. Les algorithmes associés à ces modèles sont présentés dans leurs chapitres respectifs. Nous avons ensuite validé notre modèle par une simulation effectuée à l'aide du logiciel ProModel où chaque exemple a été simulé par 10 exécutions d'une durée de 6 000 heures chacune. Les résultats, présentés au chapitre VII, nous ont permis de constater que le fait de considérer explicitement les deux modes de défaillances pour les machines de la ligne étudiée se répercute sur l'évaluation du taux de production, et nous permet d'obtenir des résultats plus précis que le fait de grouper ces modes en un seul mode de défaillance (dont le taux de panne représente la moyenne des taux de pannes des deux précédents modes). Cette précision est notamment remarquable lorsque les taux de pannes des deux modes de défaillances ont différents ordres de magnitudes.

En perspective de ce travail, et en continuant sur la même lancée, nous comptons étendre notre modèle au cas de machines à plusieurs modes de défaillances. Pour cela, nous utiliserons le modèle de (Levantesi et al, 1999) pour évaluer les performances de lignes de production constituées d'un stock intermédiaire et de deux machines non fiables à  $n$  modes de défaillances comme base de notre extension de la technique d'agrégation vers la prise en compte de  $n$  modes de défaillances. La difficulté qui apparaît, de prime abord, est de pouvoir identifier les différents états du système ainsi que les transitions entre ces états. Rappelons que pour le cas d'un seul mode de défaillance, le système se compose de 8 états alors que dans le cas de deux modes de défaillances, on passe à 15 états augmentant ainsi la complexité du modèle mathématique associé. Une comparaison entre les graphes de transitions d'états de ces deux cas permet de constater cette croissance de complexité. Nous commencerons donc par développer les modèles pour des valeurs particulières de  $n$  avant de généraliser le modèle. Évidemment, comme dans le cas à deux modes de défaillances ayant fait l'objet de cette étude, le défi majeur reste dans l'écriture des équations frontières dans le cas de  $n$  modes de défaillances.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

(Abdul-Kader, 1997) Abdul-Kader W., Modélisation du déploiement du stock-tampon dans une ligne de production, Thèse de Doctorat, Université Laval, Québec, Canada, 1997.

(Burman, 1995) Burman H., New Results in flow line analysis, Ph.D. Dissertation, MIT, Cambridge MA, 1995.

(Buzacot, 1967) Buzacott J.A., Markov chains analysis of automatic transfer line with buffer stock, Ph.D. thesis, University of Birmingham, 1967.

(Buzacott et Hanifin, 1978) Buzacott J.A., Hanifin L.E., Models of automatic transfer lines with inventory banks – a review and comparison, IIE Transactions, 10, 197-207, 1978.

(Dallery et al, 1988) Dallery Y., David R., Xie X.L., An efficient algorithm for analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers, IIE Transactions, 20 (3), 280-283, 1988.



(Dallery et al, 1989) Dallery Y., David R., Xie X.L., Approximate analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers, IEEE Transactions on Automatic Control, 34 (9), 943-953, 1989.

(Dallery et Gershwin, 1992) Dallery Y., Gershwin S.B., Manufacturing flow lines systems: A review of models and analytic results, Queueing Systems: theory and applications, 12 (1-2), 3-94, 1992.

(David et al, 1990) David R., Xie X.L., Dallery Y., Properties of continuous model of transfer lines with unreliable machines and finite buffers. IMA J. Math. Bus. Ind., 6, 281-308, 1990.

(Dubois et Forestier, 1982) Dubois D., Forestier J.P., Productivité et en-cours moyens d'un ensemble de deux machines séparées par une zone de stockage, RAIRO automatique, 16 (2), 105-132, 1982.

(Forestier, 1980) Forestier J.P., Modélisation stochastique et comportement asymptotique d'un système automatisé de production, RAIRO automatique, 14 (2), 127-143, 1980.

(Gershwin et Schick, 1980) Gershwin S.B., Schick I.C., continuous model of an unreliable two-stage material flow system with a finite interstage buffer, MIT, LIDSR-1039, September 1980.

(Gershwin, 1987) Gershwin S.B, An efficient decomposition method for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking, Operations Research, March 1987.

(Gershwin, 1994) Gershwin S.B., Manufacturing systems engineering, Prentice Hall, 1994.

(Gershwin, 2002) Gershwin S.B., Manufacturing systems engineering, MIT Cambridge MA, 2002.

(Hanifin, 1975) Hanifin L.E., Increased transfer line productivity using systems simulation, Ph.D. thesis, University of Detroit, 1975.

(Jongyoon et Gershwin, 2003) Jongyoon K., Gershwin S. B., Integrated Quality and Quantity Modeling of a Production Line, 2003.

(Levantesi et al, 1999) Levantesi R., Matta A., Tolio T., continuous two-machine line with multiple failure modes and finite buffer capacity, Atti IV CONVEGNO AITEM, Brescia, Italy, Settembre 13-15, 1999.

(Levantesi et al, 2002) Levantesi R., Matta A., Tolio T., Performance evaluation of production lines with random processing times, multiple failure modes and finite buffer capacity. Part I: the building block, preprint submitted to Elsevier, 5 march 2002.

(Levantesi et al, 2003) Levantesi R., Matta A., Tolio T., Performance evaluation of continuous production lines with machines having different processing times and multiple failure modes, *Performance Evaluation*, 51, 247-268, 2003.

(Nahas et al., 2006) Nahas N., Nourelfath M., Aït-Kadi Daoud, Selecting machines and buffers in unreliable series-parallel production lines, *International Journal of Production Research*, 2006 (soumis).

(Ross, 2003) Ross S.M., *Introduction to probability models*, eighth edition, Academic press, 2003.

(Terracol et David, 1987) Terracol C., David R., Performances d'une ligne composée de machines et de stocks intermédiaires, *R.A.I.R.O APII*, 21 (3), 239-262, 1987.

(Tolio et al, 2002) Tolio T., Matta A., Gershwin S.B., Analysis of two-machine lines with multiple failure modes, *IIE Transactions*, 34, 51-62, 2002.

(Zimmern, 1955) Zimmern B., Étude de la propagation des arrêts aléatoires dans les chaînes de production, *Revue de Statistiques Appliquées*, 4, 73-83, 1955.

## ANNEXE 1

### CHAÎNES DE MARKOV

Nous présentons, dans cette annexe, quelques notions de base sur les chaînes de Markov. Ces notions s'avèrent indispensables à la bonne compréhension de ce mémoire.

#### 1. Temps discret, états discrets

##### 1.1 La distribution géométrique

Dans le cas d'une chaîne de Markov à temps discret et à états discrets, on utilise une distribution géométrique. Dans cette sous-section, nous allons justifier cette distribution en considérant le cas simple d'un système non réparable. Mais commençons tout d'abord par définir ce qu'est une distribution géométrique.

Considérons une expérience consistant en un ensemble d'essais ayant pour résultat un succès ou un échec. Chaque essai a une probabilité  $p$  de succès et par conséquent une probabilité  $q = 1 - p$  d'échec. On s'intéresse au nombre d'essais réalisés avant l'obtention du premier succès. Ce nombre peut être représenté par une variable aléatoire  $X$ . La probabilité d'obtenir un succès au premier essai est  $P(X = 1) = p$ , la probabilité d'obtenir un succès au second essai est la probabilité que le premier essai aboutisse à un échec et que le second

aboutisse à un succès et qui s'exprime par  $P(X = 2) = (1 - p)p$ , etc. De manière générale, la probabilité d'avoir un succès au  $n^{\text{e}}$  essai est donnée par  $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$  pour  $n=1,2,\dots$ . Une telle distribution est dite *distribution géométrique* de paramètre  $p$  (Ross, 2003).

Soit un système pouvant être dans l'un des deux états : 1 (opération) ou 0 (panne). Notons par  $P(\alpha, t)$  la probabilité que le système soit à l'état  $\alpha$  (0 ou 1) à l'instant  $t$ . Nous émettons l'hypothèse que  $P(1, 0) = 1$ . Supposons également que le système puisse transiter de l'état 1 vers l'état 0 mais pas de l'état 0 vers l'état 1 (système non réparable).

Soit  $\lambda$  la probabilité conditionnelle que le système soit à l'état 0 à l'instant  $t+1$  sachant qu'il était à l'état 1 à l'instant  $t$ . On peut alors écrire :

$$\lambda = \text{prob}[\alpha(t+1) = 0 | \alpha(t) = 1] \quad (A.1)$$

Étant donné que :

$$\begin{aligned} P(0, t+1) &= \text{prob}[\alpha(t+1) = 0 | \alpha(t) = 1] \times \text{prob}[\alpha(t) = 1] \\ &\quad + \text{prob}[\alpha(t+1) = 0 | \alpha(t) = 0] \times \text{prob}[\alpha(t) = 0] \end{aligned} \quad (A.2)$$

On a :

$$P(0, t+1) = \lambda \times P(1, t) + P(0, t) \quad (A.3)$$

$$P(1, t+1) = (1 - \lambda) \times P(1, t) \quad (A.4)$$

L'équation de normalité nous donne :

$$P(1,t) + P(0,t) = 1 \quad (A.5)$$

Ce qui nous permet de trouver :

$$P(0,t) = 1 - (1 - \lambda)^t \quad (A.6)$$

$$P(1,t) = (1 - \lambda)^t$$

Nous avons considéré que le système peut transiter de l'état 1 vers l'état 0 mais pas de l'état 0 vers l'état 1. La probabilité pour que cette transition se fasse à l'instant  $t$  est :

$$\text{prob}[\alpha(t) = 0 \text{ et } \alpha(t-1) = 1] = (1 - \lambda)^{t-1} \times \lambda \quad (A.7)$$

Le temps de transition de l'état 1 vers l'état 0 est dit *géométriquement distribué avec un paramètre  $\lambda$* . Le temps de transition associé est  $\frac{1}{\lambda}$ .

Dans ce mémoire, nous supposons que le temps moyen de bon fonctionnement d'une machine est *géométriquement distribué avec un paramètre  $\lambda$*  et que le temps moyen de réparation est *géométriquement distribué avec un paramètre  $\mu$* .

## 1.2. Chaînes de Markov

L'hypothèse de base dans une chaîne de Markov est que le système dépend uniquement de son passé immédiat, ce qui veut dire que : la probabilité pour que le système soit dans un état donné à l'instant  $t+1$  sachant dans quel état il était aux instants  $t, t-1, t-2$ , etc. est égale à la probabilité que le système soit dans ce même état sachant dans quel état il était à l'instant  $t$ , d'où l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} & \text{prob}[X(t+1) = x(t+1) | X(t) = x(t), X(t-1) = x(t-1), X(t-2) = x(t-2), \dots] \\ &= \text{prob}[X(t+1) = x(t+1) | X(t) = x(t)] \end{aligned} \quad (A.8)$$

Dans ce qui suit, nous poserons :

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \text{prob}[X(t+1) = i | X(t) = j] \\ \text{et} \\ \lambda_i(t) &= \text{prob}[X(t) = i] \end{aligned} \quad (A.9)$$

$P_{ij}$  représente la probabilité de transition de l'état  $j$  vers l'état  $i$ .

Nous pouvons donc exprimer la probabilité que le système soit dans l'état  $i$  à l'instant  $t+1$  en fonction de toutes les transitions possibles du système vers cet état à l'instant  $t$  :

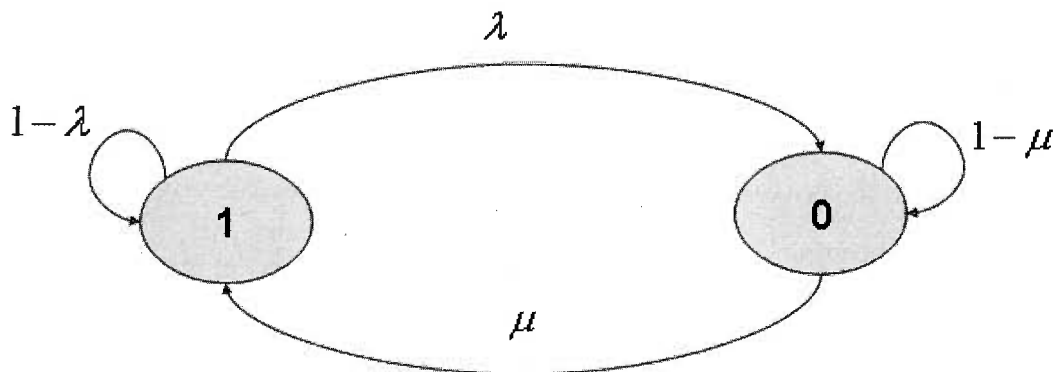
$$\lambda_i(t+1) = \sum_j P_{ij} \times \lambda_j(t) \quad (A.10)$$

L'équation de normalité assure que la somme de toutes les probabilités d'états du système à un instant donné est égale à 1 :

$$\sum_i \lambda_i(t) = 1; \forall t \quad (A.11)$$

Nous allons dans ce qui suit appliquer ce principe pour l'étude de la disponibilité d'une machine. Considérons le cas d'une machine pouvant être dans l'un des deux états : panne ou opération. Cette machine a un taux d'opération déterministe (c'est-à-dire qu'elle réalise une opération en une période de temps fixée) correspondant à une unité de temps. La probabilité qu'elle tombe en panne durant une opération est  $\lambda$ . Lorsqu'elle est en panne, la probabilité pour qu'elle soit réparée durant une unité de temps est  $\mu$ . Le but est de connaître le taux de production moyen de cette machine.

La chaîne de Markov représentant cette machine est illustrée par la figure suivante :



**Figure A.1-** Chaîne de Markov pour une machine à deux états avec réparation



À partir de la figure ci-dessus, on peut écrire :

$$P(0, t+1) = P(0, t) \times (1 - \mu) + P(1, t) \times \lambda \quad (A.12)$$

$$P(1, t+1) = P(0, t) \times \mu + P(1, t) \times (1 - \lambda)$$

Nous constatons que ces deux équations forment un système d'équations linéaires.

Ainsi, leur solution est de la forme :

$$P(t) = aX^t \quad (A.13)$$

où  $X$  est un scalaire et :  $P(t) = \begin{pmatrix} P(0, t) \\ P(1, t) \end{pmatrix}$  ;  $a = \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \end{pmatrix}$

Ceci, après substitution, nous donne :

$$a(0)X^{t+1} = a(0)X^t(1 - \mu) + a(1)X^t \lambda \quad (A.14)$$

$$a(1)X^{t+1} = a(0)X^t \mu + a(1)X^t(1 - \lambda)$$

Nous supposons que  $X \neq 0$ . Ainsi, en divisant les deux équations par  $X^t$  nous avons :

$$a(0)X = a(0) \times (1 - \mu) + a(1) \times \lambda \quad (A.15)$$

$$a(1)X = a(0) \times \mu + a(1) \times (1 - \lambda)$$

Ce qui nous donne :

$$X = 1 - \mu + \frac{a(1)}{a(0)} \times \lambda \quad (A.16)$$

$$X = \frac{a(0)}{a(1)} \times \mu + 1 - \lambda$$

En éliminant le terme  $\frac{a(1)}{a(0)}$  de ces équations, on obtient :

$$X = 1 - \mu + \frac{\mu \times \lambda}{X - 1 + \lambda} \quad (A.17)$$

Ce qui implique que :

$$(X - 1 + \mu) \times (X - 1 + \lambda) = \mu \times \lambda \quad (A.18)$$

L'équation (A.18) est une équation quadratique à deux solutions :  $X = 1$  et  $X = 1 - r - p$ . Étant donné qu'il y a deux valeurs de  $X$ , on distingue alors deux solutions :

- Si  $X = 1$  alors  $\frac{a(1)}{a(0)} = \frac{\mu}{\lambda}$
- Si  $X = 1 - \mu - \lambda$  alors  $\frac{a(1)}{a(0)} = -1$

Nous obtenons ainsi (après simplification) :

$$P(0,t) = P(0,0) \times (1 - \mu - \lambda)^t + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} [1 - (1 - \mu - \lambda)^t] \quad (A.19)$$

$$P(1,t) = P(1,0) \times (1 - \mu - \lambda)^t + \frac{\mu}{\mu + \lambda} [1 - (1 - \mu - \lambda)^t]$$

### 1.3. Régime stationnaire

La limite des deux équations précédentes lorsque  $t \rightarrow \infty$  donne :

$$P(0) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \quad (A.20)$$

$$P(1) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

Ceci représente la solution de :

$$P(0) = P(0) \times (1 - \mu) + P(1) \times \lambda \quad (A.21)$$

$$P(1) = P(0) \times \mu + P(1) \times (1 - \lambda)$$

La distribution de probabilité en régime stationnaire doit satisfaire l'équation :

$$\lambda_i(t+1) = \sum_j P_{ij} \times \lambda_j(t) \quad (A.22)$$

En posant :

$$\lambda_j = \lambda_j(t+1) = \lambda_j(t) \quad (A.23)$$

Si la distribution en régime stationnaire existe et est unique, elle est ergodique et satisfait :

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_j(t) \quad (A.24)$$

L'unicité signifie que la distribution limite  $\lambda_j$  est indépendante de la distribution initiale  $\lambda_j(0)$ .

#### 1.4. Signification du régime stationnaire

Le concept de *régime stationnaire* signifie qu'au fur et à mesure que  $t$  augmente,  $P(0,t)$  et  $P(1,t)$  tendent vers une valeur constante. Dans l'exemple énoncé plus haut,  $P(1,t)$  représente la disponibilité de la machine. Ainsi,  $P(1,t)$  est essentiellement le taux de production puisque le taux d'opération est d'une unité de temps. Dans ce cas, on dit que le système a atteint un régime stationnaire lorsque cette mesure de performance approche une certaine limite et par conséquent, devient constante.

## 2. Temps continu, états discrets

### 2.1. Équations de transitions

La théorie des probabilités nous permet d'écrire :

$$\text{prob}[X(t) = i] = \sum_j \text{prob}[X(t) = i | X(\tau) = j] \times \text{prob}[X(\tau) = j] \quad (\tau < t) \quad (A.25)$$

En remplaçant  $t$  par  $t + \delta t$  et  $\tau$  par  $t$ , on obtient :

$$\text{prob}[X(t + \delta t) = i] = \sum_j \text{prob}[X(t + \delta t) = i | X(t) = j] \times \text{prob}[X(t) = j] \quad (\text{A.26})$$

Nous supposons que  $\delta t$  est petit et que  $P_{ij}$  existe pour tout  $i \neq j$  de sorte que :

$$\text{prob}[X(t + \delta t) = i | X(t) = j] = P_{ij} \delta t + o(\delta t) \quad (\text{A.27})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{prob}[X(t + \delta t) = i] &= \sum_{j \neq i} P_{ij} \delta t \times \text{prob}[X(t) = j] \\ &\quad + \text{prob}[X(t + \delta t) = i | X(t) = i] \times \text{prob}[X(t) = i] + o(\delta t) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

On pose :

$$\lambda_i(t) = \text{prob}[X(t) = i] \quad (\text{A.29})$$

Ce qui permet de réécrire l'équation (A.28) sous la forme suivante :

$$\lambda_i(t + \delta t) = \sum_{j \neq i} P_{ij} \delta t \times \lambda_j(t) + \text{prob}[X(t + \delta t) = i | X(t) = i] \times \lambda_i(t) + o(\delta t) \quad (\text{A.30})$$

L'équation de normalité nous donne :

$$\sum_j \text{prob}[X(t + \delta t) = j | X(t) = i] = 1 \quad (\text{A.31})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{prob}[X(t+\delta t) = i | X(t) = i] &= 1 - \sum_{j \neq i} \text{prob}[X(t+\delta t) = j | X(t) = i] \\ &= 1 - \sum_{j \neq i} P_{ji} \delta t + o(\delta t) \end{aligned} \quad (A.32)$$

D'où :

$$\lambda_i(t+\delta t) = \sum_{j \neq i} P_{ij} \lambda_j(t) \delta t + \left[ 1 - \sum_{j \neq i} P_{ji} \delta t \right] \lambda_i(t) + o(\delta t) \quad (A.33)$$

Il est pratique de définir :

$$P_{ii} = - \sum_{j \neq i} P_{ji} \quad (A.34)$$

De sorte que :

$$\lambda_i(t+\delta t) = \sum_j P_{ij} \lambda_j(t) \delta t + [1 + P_{ii} \delta t] \lambda_i(t) + o(\delta t) \quad (A.35)$$

Ou encore :

$$\lambda_i(t+\delta t) = \sum_j P_{ij} \lambda_j(t) \delta t + \lambda_i(t) + o(\delta t) \quad (A.36)$$

**Remarque :** Notons que  $P_{ii}$  n'est rien d'autre qu'une définition « pratique ». Ce terme n'a pas de sens et il ne représente certainement pas une probabilité car il est négatif.

En exprimant  $\lambda_i(t+\delta t)$  sous forme d'une série de Taylor d'ordre un, l'équation précédente devient :

$$\lambda_i(t) + \frac{d\lambda_i(t)}{dt} \delta t = \sum_j P_{ij} \lambda_j(t) \delta t + \lambda_i(t) + o(\delta t) \quad (A.37)$$

Ce qui implique :

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = \sum_j P_{ij} \lambda_j(t); \quad \forall i \quad (A.38)$$

La distribution de probabilité à l'état d'équilibre  $p_i(t)$  doit satisfaire la condition :

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = 0; \quad \forall i \quad (A.39)$$

D'où :

$$\sum_j P_{ij} \lambda_j(t) = 0; \quad \forall i \quad (A.40)$$

## 2.2. La distribution exponentielle

La distribution exponentielle est l'équivalent de la distribution géométrique dans le cas continu.

Soit un système pouvant être dans l'un des deux états : 1 (opération) ou 0 (panne). Notons par  $P(\alpha, t)$  la probabilité que le système soit à l'état  $\alpha$  (0 ou 1) à l'instant  $t$ . Nous émettons l'hypothèse que  $P(1, 0) = 1$  (système opérationnel initialement). Supposons également que le système puisse transiter de l'état 1 vers l'état 0 mais pas de l'état 0 vers l'état 1 (système non réparable).

Soit  $\lambda\delta t$  la probabilité conditionnelle que le système soit à l'état 0 à l'instant  $t + \delta t$  sachant qu'il était à l'état 1 à l'instant  $t$ . On obtient :

$$\lambda\delta t = \text{prob}[\alpha(t + \delta t) = 0 | \alpha(t) = 1] + o(\delta t) \quad (A.41)$$

Étant donné que :

$$\begin{aligned} P(0, t + \delta t) &= \text{prob}[\alpha(t + \delta t) = 0 | \alpha(t) = 1] \times \text{prob}[\alpha(t) = 1] \\ &\quad + \text{prob}[\alpha(t + \delta t) = 0 | \alpha(t) = 0] \times \text{prob}[\alpha(t) = 0] \end{aligned} \quad (A.42)$$

Ainsi :

$$P(0, t + \delta t) = \lambda\delta t \times P(1, t) + P(0, t) + o(\delta t) \quad (A.43)$$

D'où :

$$\frac{dP(0, t)}{dt} = \lambda \times P(1, t) \quad (A.44)$$

De manière similaire :

$$\begin{aligned} P(1, t + \delta t) &= \text{prob}[\alpha(t + \delta t) = 1 | \alpha(t) = 1] \times \text{prob}[\alpha(t) = 1] \\ &\quad + \text{prob}[\alpha(t + \delta t) = 1 | \alpha(t) = 0] \times \text{prob}[\alpha(t) = 0] \end{aligned} \quad (A.45)$$

Donc :

$$P(1, t + \delta t) = (1 - \lambda)\delta t \times P(1, t) + (0) \times P(0, t) + o(\delta t) \quad (A.46)$$

Le coefficient de  $P(0, t)$  est 0 car dans le système considéré, il n'y a pas moyen de transiter de l'état 0 vers l'état 1.



Ainsi :

$$\frac{dP(1,t)}{dt} = -\lambda \times P(1,t) \quad (A.47)$$

La solution pour le système considéré est donc la suivante :

$$P(0,t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (A.48)$$

$$P(1,t) = e^{-\lambda t}$$

Nous avons considéré que le système peut transiter de l'état 1 vers l'état 0 mais pas de l'état 0 vers l'état 1. La probabilité pour que cette transition se fasse entre les instants  $t$  et  $t + \delta t$  est :

$$\text{prob}[\alpha(t + \delta t) = 0 \text{ et } \alpha(t) = 1] = e^{-\lambda t} \times \lambda \delta t \quad (A.49)$$

Le temps de transition de l'état 1 vers l'état 0 est dit *exponentiellement distribué de taux  $\lambda$* . Le temps de transition associé est  $\frac{1}{\lambda}$ . Nous supposons que le temps moyen de bon fonctionnement d'une machine est *exponentiellement distribué de taux  $\lambda$*  et que le temps moyen de réparation est *exponentiellement distribué de taux  $\mu$* .

### 2.3. Chaîne de Markov (exemple d'une machine non fiable)

Considérons le cas d'une machine pouvant être dans l'un des deux états : panne ou opération. Le taux de production de cette machine dans l'intervalle  $[t, t + \delta t]$  est  $U \times \delta t$ . La

probabilité pour que la machine tombe en panne dans l'intervalle  $[t, t + \delta t]$  est  $\lambda \times \delta t$ . La probabilité pour que la machine soit réparée dans l'intervalle  $[t, t + \delta t]$  est  $\mu \times \delta t$ . Le but est de connaître le taux de production moyen de cette machine.

La chaîne de Markov représentant cette machine a été illustrée plus haut par la Figure A.1.

La figure nous permet d'écrire :

$$P(0, t + \delta t) = P(0, t) \times (1 - \mu \delta t) + P(1, t) \times \lambda \delta t + o(\delta t) \quad (A.50)$$

$$P(1, t + \delta t) = P(0, t) \times \mu \delta t + P(1, t) \times (1 - \lambda \delta t) + o(\delta t)$$

D'où :

$$\frac{dP(0, t)}{dt} = -P(0, t) \times \mu + P(1, t) \times \lambda \quad (A.51)$$

$$\frac{dP(1, t)}{dt} = P(0, t) \times \mu - P(1, t) \times \lambda$$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on a :

$$P(0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (A.52)$$

$$P(1) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Le taux de production moyen est donné par  $U \times P(1)$  et par conséquent :

$$TP = \frac{U \times \mu}{\mu + \lambda} \quad (A.53)$$

### 3. Comparaison entre chaîne de Markov à temps discret et chaîne de Markov à temps continu dans le cas d'états discrets

La différence réside dans le fait que pour le premier cas (temps discret),  $P_{ij}$  représente une *probabilité* tandis que dans le second (temps continu), il représente un *taux* d'unité  $\frac{1}{\text{temps}}$ .

De même, dans le premier cas  $\lambda$  et  $\mu$  représentent des *probabilités* alors que dans le second ils représentent des *taux*.