

Table des matières

Remerciements	i
Nomenclature	i
Introduction Générale	1
1 GENERALITES	2
1.1 Etablissement des équations de Navier-Stokes	2
1.1.1 Conservation de la masse	2
1.1.2 Equation de conservation de la quantité du mouvement	3
1.1.3 Loi de comportement du fluide newtonien	3
1.2 Méthode des éléments finis	4
1.2.1 Problème variationnel	5
1.2.2 Méthode de Galerkin	6
1.3 Introduction à l'Optimisation	6
1.3.1 Extrema, points critiques et points selles	6
1.3.2 Lagrangien et point selle	7
1.4 Méthode de descente	8
1.5 Méthode du gradient conjugué	9
1.5.1 Introduction	9
1.5.2 Les méthodes du gradient	9
1.5.3 La méthode du gradient à pas fixe	11
1.5.4 La méthode du gradient à pas optimal	12
1.5.5 Description de la méthode du gradient conjugué : Cas des fonctionnelles quadratiques	13
1.5.6 Algorithme du gradient conjugué	14
2 Discrétisation du problème	16
2.1 Matériel	16
2.2 Discrétisation du problème	16
2.2.1 Repérage du domaine	16
2.2.2 Maillage	17
2.2.3 Adimensionnalisation	18
2.2.4 Remarque :	18
2.2.5 Discrétisation en temps	18
2.2.6 Formulation variationnelle	19
2.2.7 Existence et unicité de la solution	20

2.2.8	Définition des espaces V_h et M_h	22
2.2.9	Fonctions de base	23
2.2.10	Formulation discrète	24
3	Applications à la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires	27
3.1	Méthode de Lagrangien augmenté	27
3.2	Algorithme de calcul de point selle	28
3.3	Algorithme de base	28
3.4	Algorithme Uzawa et Algorithme de Gradient Conjugué	29
4	Résultats et Interprétation	31
4.1	Dimension du domaine	31
4.2	Etude du paramètre α	31
4.2.1	Nombre de Reynolds égal à 100	32
4.2.2	Nombre de Reynolds égal à 500	34
4.3	Variation du paramètre α avec la méthode de gradient conjugué . . .	35
4.3.1	Comparaison des deux méthodes	35
4.4	Conclusion générale	40
A	Algorithme de gradient conjugué préconditionné	41

Introduction Générale

La prévision du climat, la pollution atmosphérique, la conception de moyen de transport, avion, voiture, bateau,... La plupart de ces phénomènes sont gouvernés par les équations de Navier-Stokes.

Ces équations sont une partie très importante de la physique et difficiles à résoudre par la méthode analytique. Les progrès réalisés dans le domaine informatique permettent aujourd'hui leur résolution approchées en des temps de calculs acceptables. Ce qui fût une motivation pour la recherche des méthodes numériques de résolutions fiables.

Les méthodes numériques sont nombreuses : méthode des différences finis, volumes finis, éléments finis, ...

Dans ce mémoire on choisit la méthode des éléments finis avec la méthode d'Uzawa et gradient conjugué. Dans la méthode d'Uzawa, on calcule la pression par la méthode itérative $p_{n+1} = p_n + \alpha B u_n$ ce qui nous amène au problème d'optimisation ou comment trouver la valeur optimale de α ?

Par ailleurs pour optimiser la vitesse de convergence, on a utilisé la méthode du gradient conjugué dans le calcul du paramètre α .

La méthode du gradient conjugué est très intéressante pour la résolution des problèmes d'optimisation non linéaire, en particulier pour les problèmes de grande taille. Cette méthode a été découvert en 1952 par Magnus Hestenes et Eduard Steifel pour la minimisation de fonctionnelles quadratiques strictement convexes.

Notre objectif est de trouver la valeur optimale du paramètre α et mettre en relief la différence entre la méthode à pas variable et à pas fixe.

Ce mémoire a été organisé en quatre parties :

La première partie sera consacrée à l'exposé d'outils mathématiques et la méthode de gradient conjugué. Dans la deuxième partie, on fait la discrétisation du problème. L'objet de la troisième partie sera l'application de la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires à l'aide de la méthode du Lagrangien augmenté et du gradient conjugué. Finalement, on donne les résultats et on détermine les valeurs optimales du paramètre α .

Chapitre 1

GENERALITES

1.1 Etablissement des équations de Navier-Stokes

1.1.1 Conservation de la masse

On utilise la description eulérienne pour caractériser l'écoulement du fluide. Au cours du temps, la masse totale du fluide ne varie pas et on rappelle que cette masse correspond, en notant m la masse totale du fluide à :

$$m = \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

où Ω est un domaine matériel que l'on suit dans son mouvement
En d'autres termes, on a :

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Cette dernière équation permet d'exprimer la forme globale de la conservation de la masse

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} dm = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} dm &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot ds \text{ (dérivation d'une intégrale de volume)} \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) d\Omega \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) d\Omega = 0$$

et on déduit la forme locale du principe de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Proposition 1.1. *Si le milieu est incompressible alors $\text{div } \vec{v} = 0$*

Démonstration. On rappelle que :

$$\text{div}(a \vec{v}) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a + a \text{div}(\vec{v}) \quad (1.1)$$

$$\text{Et la dérivée particulière } \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \rho \quad (1.2)$$

La conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \rho \text{div } \vec{v} = 0 \quad (\text{d'après (1.1)})$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0 \quad (\text{d'après (1.2)})$$

Or l'incompressibilité du milieu signifie $\frac{d\rho}{dt} = 0$ d'où $\rho \text{div } \vec{v} = 0$ soit $\text{div } \vec{v} = 0$ \square

1.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} \rho \vec{g} d\Omega \quad \forall \Omega$$

$$\text{Ce qui se ramène à } \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div} \vec{\sigma} + \rho \vec{g}$$

Où le premier membre est la force du quantité de mouvement et le second membre est la somme des forces extérieures.

$\text{div} \vec{\sigma}$: action de la force de contact

$\rho \vec{g}$: force de la pesanteur

En utilisant la dérivée particulière, on a

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{g} \quad (1.3)$$

1.1.3 Loi de comportement du fluide newtonien

Elle s'écrit

$$\sigma = 2\mu D + (\lambda \text{tr}(D) - p) \mathcal{I} \quad (1.4)$$

μ : viscosité dynamique ou première coefficient de viscosité

λ : deuxième coefficient de viscosité

D : Tenseur de taux de déformation ou $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

\mathcal{I} : tenseur identité

Equation de Navier-Stokes

En utilisant la loi de comportement (1.4) dans l'équation (1.3) et on a

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\right) &= \rho g + \nabla \cdot (2\mu D + (\lambda \operatorname{tr}(D) - p)\mathcal{I}) \\ &= \rho g + 2\mu \nabla \cdot D + \lambda \nabla \cdot (\operatorname{tr}(D)) - \nabla \cdot (p\mathcal{I}) \\ &= \rho g + \mu \nabla \cdot (\nabla v + \nabla^T v) + \lambda \nabla (\nabla \cdot v) - \nabla p\end{aligned}$$

En tenant compte des identités $\nabla \cdot (\nabla^T v) = \nabla (\nabla \cdot v)$, et $\Delta v = \nabla \cdot (\nabla v)$. On obtient alors

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\right) = \rho g - \nabla p + \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot v)$$

Ici, nous étudions l'écoulement instationnaire d'un fluide Newtonien incompressible à travers un milieu horizontale face à un obstacle et on suppose que la force extérieure \vec{f} est nulle ($\vec{f} = 0$).

Alors on a

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\right) + \nabla p - \mu \Delta v = 0$$

Les équations de Navier-Stokes dans un ouvert Ω s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v\right) + \nabla p - \mu \Delta v = 0 \\ \nabla \cdot v = 0 \text{ (Conservation de la masse pour un fluide incompressible)} \end{cases} \quad (1.5)$$

avec :

- une condition aux limites $v(x, t) = 0$ sur les parois horizontales et le contour de l'obstacle
- une condition initiale $v(x, 0) = v_0(x)$ donné

1.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est un outil très puissant de discrétisation pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, telles que les équations de Navier Stokes. Comme son nom l'indique, cette méthode consiste à découper le domaine Ω en un nombre finis d'éléments, les plus souvent des "triangles" en $2D$ et en $3D$. Bien que cette étape soit essentielle, nous n'entrerons pas dans le sujet complexe de la fabrication de maillage. Il existe plusieurs logiciels pour créer de tels maillages en $2D$ et en $3D$ (par exemple : gmsh, freefem,...)

On construit un espace de dimension finie pour approcher l'espace de Hilbert dans lequel se trouve la solution exacte du problème. Les inconnues des équations discrètes sont les valeurs de la solution sur les nœuds de calcul (souvent les sommets des éléments ou encore les milieux des arêtes)

On obtient donc un grand système d'équations linéaires et parfois non linéaires qu'il faut résoudre à l'aide de méthode d'analyse numérique

Une fois le système résolu, on obtient la solution seulement aux nœuds de calcul des éléments. Ainsi plus le maillage contient d'élément, plus on obtient une solution précise.

1.2.1 Problème variationnel

D'une manière générale la formulation variationnelle d'un problème aux limites elliptiques se présente comme suit

Etant donné :

1. Un espace de Hilbert V de norme $\|\cdot\|$
2. Une forme bilinéaire $(u, v) \longrightarrow a(u, v)$ continue sur V . C'est à dire, $\forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$, M est une constante positif.
3. Une forme linéaire $v \longrightarrow L(v)$ continue sur V . C'est à dire que $L \in V'$ duale de V que l'on munit de la norme dual

$$\|L\|^* = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|L(v)|}{\|v\|}$$

On considère le problème variationnel général (P) :

Trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) = L(v) \forall v \in V$ (P)

Définition 1.2. On dit que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est V -elliptique s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $|a(v, v)| \geq \alpha\|v\|^2 \forall v \in V$.

Théorème 1.3. (Lax-Milgram)

Si la forme bilinéaire continue $a(.,.)$ est V -elliptique, alors le problème (P) admet une solution unique dans V , L étant continue sur V .

Démonstration. Désignons par $(.,.)$ le produit scalaire sur V . Comme L est une application linéaire continue sur V , alors d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément $\mathcal{T}L \in V$ unique tel que $\forall v \in V, L(v) = (\mathcal{T}L, v)$

On remarque que l'application $\mathcal{T} : L \longrightarrow \mathcal{T}L$ de V' sur V est une bijection linéaire. De plus elle est une isométrie puisque

$$\|\mathcal{T}L\| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|(\mathcal{T}L, v)|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{L(v)}{\|v\|} = \|L\|^*$$

De même, u étant fixé, la forme linéaire $v \longrightarrow a(u, v)$ est continue sur V . D'après le théorème de Riesz il existe $\mathcal{A}u \in V$ tel que $a(u, v) = (\mathcal{A}u, v)$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(v, v)$ et de plus

$$\|\mathcal{A}u\| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|} \leq M\|u\|$$

Ainsi le problème (P) équivaut à chercher $u \in V, \mathcal{A}u = \mathcal{T}L$. Ainsi il suffit de montrer que \mathcal{A} est une bijection de V dans V .

Injectivité de \mathcal{A} : de la V -ellipticité, on tire

$$\forall v \in V, \alpha\|v\|^2 \leq |a(v, v)| = (\mathcal{A}v, v) \leq \|\mathcal{A}v\|\|v\|$$

Donc

$$\|\mathcal{A}v\| \|v\| \geq \alpha \|v\|^2; \forall v \in V$$

Si $\mathcal{A}v = 0$, $0 \geq \alpha \|v\|$ alors $v = 0$

Surjectivité de \mathcal{A} : On a donc à vérifier que $\mathcal{A}v$ est fermé et $(\mathcal{A}v)^\perp = \{0\}$. Soit $w \in \mathcal{A}v$ et soit une suite $\mathcal{A}v_m$ de $\mathcal{A}V$ qui converge vers w dans V .

On a $\|\mathcal{A}v_m - \mathcal{A}v_n\| \geq \alpha \|v_m - v_n\|$, $\{v_m\}$ étant une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V

Elle converge donc vers un élément $v \in V$ et donc $\mathcal{A}v_m \rightarrow \mathcal{A}v$ d'après la continuité de \mathcal{A} et donc $\mathcal{A}v = w \in \mathcal{A}v$ donc $\mathcal{A}v$ est fermé.

Soit maintenant $v^* \in (\mathcal{A}V)^\perp$ on a

$$\alpha \|v^*\|^2 \leq |a(v^*, v^*)| = |(\mathcal{A}v^*, v^*)| = 0$$

alors $v^* = 0$

D'où la surjectivité de \mathcal{A} .

□

1.2.2 Méthode de Galerkin

Elle consiste à chercher $U_m \in V_m$ de dimension finie m solution de $a(U_m, v) = L(v) \forall v \in V_m$ c'est à dire chercher U_m sous la forme

$$U_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i$$

$\{b_i\}$ étant une base de V_m

On a

$$a(U_m, v) = L(v), \forall v \in V_m$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i a(b_i, v) = L(v), \forall v \in V_m$$

$$\text{En choisissant } v = b_j; \sum_{i=1}^m a(b_i, b_j) \alpha_i = L(b_j), j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m A_{ji} \alpha_i = B_j, j = 1, \dots, m$$

Où $A_{ji} = a(b_j, b_i)$ et $B_j = L(b_j)$; $i, j = 1, \dots, m$

1.3 Introduction à l'Optimisation

1.3.1 Extrema, points critiques et points selles

Définition 1.4. (*Extremum d'une fonction*). Soit E un espace vectoriel normé et $f : \Omega \subset E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que \tilde{x} est un minimum local de f s'il existe un voisinage V de \tilde{x} tel que

$$f(\tilde{x}) \leq f(x), \forall x \in V$$

De même, on dit que \tilde{x} est un maximum local de f s'il existe un voisinage V de \tilde{x} tel que

$$f(\tilde{x}) \geq f(x), \forall x \in V$$

On dit que \tilde{x} est un extremum local de f si c'est un minimum local ou un maximum local.

On dit que \tilde{x} est un minimum global de f si

$$f(\tilde{x}) \leq f(x), \forall x \in E$$

De même, on dit que \tilde{x} est un maximum global de f si

$$f(\tilde{x}) \geq f(x), \forall x \in E$$

On dit que \tilde{x} est un extremum global de f si c'est un minimum global ou un maximum global.

Définition 1.5. (*Point critique*). Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On dit que $x \in E$ est un point critique de f si $\nabla f(x) = 0$.

Définition 1.6. (*Point selle*). Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que \tilde{x} est un point selle de f s'il existe F et G des sous espaces vectoriels de E tels que

$$E = F \oplus G$$

et un voisinage V de \tilde{x} tel que

$$f(\tilde{x} + z) \leq f(\tilde{x}), z \in F; \tilde{x} + z \in V,$$

$$f(\tilde{x} + z) \geq f(\tilde{x}), z \in G; \tilde{x} + z \in V.$$

1.3.2 Lagrangien et point selle

Définition 1.7. Soient V et M deux ensembles quelconques et le Lagrangien $L : V \times M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que le couple $(u, \lambda) \in V \times M$ est un point-selle de L si u est minimum de la fonction $L(\cdot, \lambda) : v \in V \rightarrow L(v, \lambda) \in \mathbb{R}$ et si λ est maximum de $L(u, \cdot) : \mu \in M \rightarrow L(u, \mu) \in \mathbb{R}$ autrement dit

$$\sup_{\mu \in M} L(u, \mu) \leq L(u, \lambda) \leq \inf_{v \in V} L(v, \lambda)$$

ou encore

$$L(u, \lambda) = \sup_{\mu \in M} \inf_{v \in V} L(v, \mu) = \inf_{v \in V} \sup_{\mu \in M} L(v, \mu)$$

1.4 Méthode de descente

Définition 1.8. (méthodes de descentes)

Soit $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une direction de descente en x s'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$f(x + \alpha w) \leq f(x), \forall \alpha \in [0; \alpha_0].$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une direction de descente stricte en x s'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que

$$f(x + \alpha w) < f(x), \forall \alpha \in [0; \alpha_0].$$

3. Une "méthode de descente" pour la recherche de \tilde{x} tel que $f(\tilde{x}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ consiste à construire une suite $(x^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$ de la manière suivante :

(a) Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$;

(b) Itération k : on suppose $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ connus ($k \geq 0$) ;

– (i). On cherche $w^{(k)}$ direction de descente stricte en $x^{(k)}$

– (ii). On prend $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k w^{(k)}$ avec $\alpha_k > 0$ "bien choisi".

Proposition 1.9. (Caractérisation des directions de descente). Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; alors

1. Si w est une direction de descente en x alors $w \cdot \nabla f(x) \leq 0$

2. Si $\nabla f(x) \neq 0$ alors $w = -\nabla f(x)$ est une direction de descente stricte en x .

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\alpha \mapsto \varphi(\alpha) = f(x + \alpha w), \text{ on a } \varphi' \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et}$$

$$\varphi'(\alpha) = \nabla f(x + \alpha w) \cdot w$$

1. Par définition, w est une direction de descente, $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors $\exists \alpha_0 > 0$ tel que

$$f(x + \alpha w) \leq f(x), \forall \alpha \in]0, \alpha_0]$$

$$\varphi(\alpha) \leq \varphi(0)$$

et donc

$$\frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha} \leq 0$$

En passant à la limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha} \leq 0$$

En déduit que $\varphi'(0) \leq 0$ c'est à dire $\nabla f(x).w \leq 0$.

2. On a $\varphi'(0) = \nabla f(x).w$ avec $w = -\nabla f(x)$
 $= -|\nabla f(x)|^2 < 0$

Comme φ' est continue alors $\exists \alpha_0 > 0$ tel que $\forall \alpha \in [0, \alpha_0]$ $\varphi'(\alpha) < 0$

$$\varphi(\alpha) - \varphi(0) = \int_0^\alpha \varphi'(t) dt < 0$$

On a donc $\varphi(\alpha) < \varphi(0) \forall \alpha \in]0, \alpha_0]$

D' où w est une direction de descente stricte en x . □

1.5 Méthode du gradient conjugué

1.5.1 Introduction

La méthode du gradient conjugué permet de résoudre les systèmes linéaires dont la matrice est symétrique définie positive.

Il s'agit d'une méthode qui consiste, à partir d'un vecteur donné x^0 , à déterminer à chaque étape un vecteur w^k et un scalaire α^k permettant de calculer x^{k+1} à partir de x^k par

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k w^k \tag{1.6}$$

l'objectif étant de minimiser une fonction (descendre un potentiel).

Avant d'introduire la méthode du gradient conjugué pour résoudre un système linéaire, il est utile d'aborder sommairement les méthodes du gradient.

1.5.2 Les méthodes du gradient

On considère le problème de minimisation d'une fonction suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \\ J(\tilde{x}) \leq J(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.7}$$

où J est une fonction donnée de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Dans ce paragraphe nous adopterons le gradient de la fonction à minimiser comme direction de descente :

$$w^k = \nabla J(x^k) \tag{1.8}$$

où $J : x \in \mathbb{R}^n \mapsto J(x) \in \mathbb{R}$ est la fonction à minimiser. Le paramètre α^k sera d'abord choisi constant, ensuite nous calculons sa valeur optimale.

Le but étant de résoudre le système linéaire :

$$Ax = b \tag{1.9}$$

où A est une matrice d'ordre n symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons la fonction J suivante

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \quad (1.10)$$

Ce choix est motivé par le résultat de la proposition suivante.

Proposition 1.10. *Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Alors $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ est solution du système linéaire (1.9) si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, J(\tilde{x}) \leq J(x) \quad (1.11)$$

où J est la fonction définie par (1.10).

Démonstration 1.11. *Supposons que \tilde{x} est solution de (1.9). On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} J(x) - J(\tilde{x}) &= \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) - \frac{1}{2}(A\tilde{x}, \tilde{x}) + (b, \tilde{x}) \\ &= \frac{1}{2}(Ax, x) - \frac{1}{2}(A\tilde{x}, \tilde{x}) - (b, x - \tilde{x}) \\ &= \frac{1}{2}(Ax, x) - \frac{1}{2}(A\tilde{x}, \tilde{x}) - (A\tilde{x}, x - \tilde{x}) \text{ car } A\tilde{x} = b \\ &= \frac{1}{2}(Ax, x) + \frac{1}{2}(A\tilde{x}, \tilde{x}) - (A\tilde{x}, x) \\ &= \frac{1}{2}(A(x - \tilde{x}), x - \tilde{x}) \geq 0 \text{ (car } A \text{ est positive et symétrique)} \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que (1.11) est vérifiée. On introduit pour z donné dans \mathbb{R}^n , la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = J(\tilde{x} + tz)$$

On a d'après (1.11) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(0) \leq f(t)$$

et par conséquent, zéro est un minimum de la fonction dérivable f , d'où

$$f'(0) = 0$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(A(\tilde{x} + tz), \tilde{x} + tz) - (b, \tilde{x} + tz) - \frac{1}{2}(A\tilde{x}, \tilde{x}) + (b, \tilde{x})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t((A\tilde{x}, z) - (b, z)) + \frac{1}{2}t^2(Az, z)}{t} \\ &= (A\tilde{x} - b, z) \end{aligned}$$

Cela entraîne que

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, (A\tilde{x} - b, z) = 0$$

c'est à dire que \tilde{x} est solution du système linéaire (1.9)

Remarque 1.12. On rappelle que le gradient d'une fonction $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ au point $x \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, (\nabla G(x), z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x + tz) - G(x)}{t}$$

Il en résulte, en considérant la fonction définie par (1.10), que

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, (\nabla J(x), z) = (Ax - b, z)$$

et que

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

1.5.3 La méthode du gradient à pas fixe

La méthode du gradient à pas fixe est définie par l'algorithme suivant

$$\begin{cases} x^0 \text{ donné} \\ x^{k+1} = x^k + \alpha \nabla J(x^k) = x^k + \alpha (Ax^k - b) \end{cases} \quad (1.12)$$

Théorème 1.13. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, alors la méthode du gradient à pas fixe α , converge pour

$$\alpha \in] -\frac{2}{\rho(A)}, 0[$$

où $\rho(A)$ est le rayon spectral de la matrice A . C'est-à-dire, que la suite générée par l'algorithme (1.12) converge, pour tout choix de x^0 , vers l'unique solution du système linéaire :

$$Ax = b$$

Démonstration 1.14. La matrice de la méthode itérative (1.12) est donnée par

$$B = I + \alpha A \quad (1.13)$$

On sait que la suite définie par (1.12) converge si et seulement si

$$\rho(B) < 1 \quad (1.14)$$

Cela entraîne que $\alpha \neq 0$. Par ailleurs, en désignant par $Sp(A)$ et $Sp(B)$, respectivement les ensembles de valeurs propres de A et de B , on a

$$\text{Si } \lambda \in Sp(A) \text{ alors } 1 + \alpha\lambda \in Sp(B) \quad (1.15)$$

En effet, il est clair que si $\lambda \in Sp(A)$ alors $1 + \alpha\lambda \in Sp(B)$. Inversement, si $\delta \in Sp(B)$ alors il existe $u \in \mathbb{R}^n (u \neq 0)$ tel que

$$(I + \alpha A)u = \delta u$$

d'où pour $\alpha \neq 0$

$$Au = \frac{\delta - 1}{\alpha} u$$

et $\delta = 1 + \alpha \frac{\delta-1}{\alpha}$ avec $\frac{\delta-1}{\alpha} \in Sp(A)$. On déduit de (1.15), que la condition de convergence (1.14) est satisfaite si et seulement si

$$\forall \lambda \in Sp(A) \quad 1 + \alpha \lambda \in]-1, 1[$$

On en déduit puisque A est définie positive et donc $Sp(A) \subset \mathbb{R}^*$, que

$$\forall \lambda \in Sp(A) \quad \alpha \in]-\frac{2}{\lambda}, 0[$$

où de manière équivalente

$$\alpha \in]-\frac{2}{\rho(A)}, 0[$$

1.5.4 La méthode du gradient à pas optimal

La méthode du gradient à pas optimal consiste à changer le paramètre α intervenant dans (1.12) à chaque itération k par un pas α^k , dit pas optimal, dont la construction est basée sur le résultat suivant.

Proposition 1.15. Soient J la fonction définie sur \mathbb{R}^n par (1.10), x un vecteur de \mathbb{R}^n et w un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . On considère le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \forall t \in \mathbb{R}, J(x + \alpha w) \leq J(x + tw) \end{cases} \quad (1.16)$$

Si la matrice A intervenant dans (1.10) est symétrique définie positive, alors (1.16) admet une solution unique donnée par

$$\alpha = -\frac{(Ax - b, w)}{(Aw, w)} \quad (1.17)$$

Démonstration 1.16. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = J(x + tw)$$

On a

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}(A(x + tw), x + tw) - (b, x + tw) \\ &= \frac{1}{2}[(Ax, x) + 2t(Ax, w) + t^2(Aw, w)] - (b, x) - t(b, w) \\ &= \frac{1}{2}t^2(Aw, w) + t(Ax - b, w) + \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \end{aligned}$$

Puisque $(Aw, w) > 0$ (car A est définie positive et $w \neq 0$ par hypothèse), on en déduit que la fonction f admet un minimum global au point $t = \alpha$ donné par

$$\alpha = -\frac{(Ax - b, w)}{(Aw, w)}$$

1.5.5 Description de la méthode du gradient conjugué : Cas des fonctionnelles quadratiques

La fonction est de la forme $f(x) = \frac{1}{2}Ax.x - b.x$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$

– Base de la méthode

- Construire n vecteurs $w^{(0)}, w^{(1)}, \dots, w^{(n-1)}$ libres et tels que $r^n.w^{(p)} = 0 \forall p < n$. Alors la famille libre $w^{(0)}, w^{(1)}, \dots, w^{(n-1)}$ engendre \mathbb{R}^n ; le vecteur r^n est alors orthogonal à tous les vecteurs d'un \mathbb{R}^n , et il est donc nul ou $r^n = 0$.

On part de $x^{(0)}$ dans \mathbb{R}^n donné; à l'itération k on suppose que $r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \neq 0$ (sinon on a $x^{(k)} = \tilde{x}$ et on a fini).

- On calcule le paramètre α_k par

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; \alpha \mapsto \varphi(\alpha) = f(x^k + \alpha w^k)$

Comme $\alpha_k > 0$ et $\varphi(\alpha_k) \leq \varphi(\alpha) \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$, on a nécessairement

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha_k) &= \nabla f(x^k + \alpha_k w^k).w^k = 0 \\ &= (Ax^k + \alpha_k Aw^k - b).w^k = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha_k = \frac{(b - Ax^{(k)}) . w^{(k)}}{Aw^{(k)} . w^{(k)}} = \frac{r^{(k)} . w^{(k)}}{Aw^{(k)} . w^{(k)}} \quad (1.18)$$

avec $r^k = b - Ax^{(k)}$ et $Aw^k . w^k \neq 0$ car A est symétrique définie positive

- On calcule ensuite le nouvel itéré

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k w^{(k)}$$

notons que

$$r^{k+1} = b - Ax^{(k+1)}$$

et donc

$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k Aw^{(k)} \quad (1.19)$$

De plus, par définition du paramètre α_k on a

$$\nabla f(x^{k+1}).w^{(k)} = 0 \text{ et donc}$$

$$r^{(k+1)}.w^k = 0 \quad (1.20)$$

- Choisir les vecteurs $w^{(k)}$ qui soient de direction de descente stricte et qui forment une famille libre

A l'étape 0 : Il est naturel de choisir la direction opposée du gradient

$$w^0 = -\nabla f(x^0) = r^0$$

A l'étape $k \geq 1$: On choisit la direction de descente $w^{(k)}$. Comme combinaison linéaire de $r^{(k)}$ et de $w^{(k-1)}$ de manière à ce que $w^{(k)}$ soit orthogonal à $w^{(k-1)}$ pour le produit scalaire associé à la matrice A .

$$w^0 = r^0$$

$$w^k = r^k + \lambda_k w^{k-1} \quad (1.21)$$

avec $w^k Aw^{(k-1)} = 0$ pour $k \geq 1$. Comme la contrainte d'orthogonalité s'écrit $Aw^{(k)}.w^{(k-1)} = 0$, alors (1.21) nous donne

$$\lambda_k = -\frac{r^k.Aw^{k-1}}{w^{(k-1)}.Aw^{k-1}}$$

Remarquons que si $r^{(k)} \neq 0$ alors $w^{(k)}.r^{(k)} > 0$ car $w^{(k)}.r^{(k)} = r^k.r^k$ en raison de la propriété (1.20). On a donc $w^{(k)}. \nabla f(x^{(k)}) < 0$, ce qui montre que $w^{(k)}$ est bien une direction de descente stricte.

Proposition 1.17. *On suppose que $r^{(k)} \neq 0$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$ et on a*

$$\begin{aligned} (i)_k \quad r^{(k)}.w^{(p)} &= 0 \text{ si } p < k \\ (ii)_k \quad r^{(k)}.r^{(p)} &= 0 \text{ si } p < k \\ (iii)_k \quad Aw^{(k)}.w^{(p)} &= 0 \text{ si } p < k \end{aligned}$$

Démonstration 1.18. *Ces relations sont vérifiées pour $k = 1$. Supposons qu'elles le sont jusqu'au rang k , et montrons qu'elles le sont au rang $k+1$.*

(i)_{k+1} : Pour $p = k$, la relation (i)_{k+1} est vérifiée au rang $k+1$ grâce à (1.20); pour $p \leq k$, on a

$$r^{(k+1)}.w^{(p)} = r^{(k)}.w^{(p)} - \alpha_k Aw^{(k)}.w^{(p)} = 0$$

par hypothèse de récurrence.

(ii)_{k+1} : Par les relations (1.21) et (i)_{k+1}, on a pour $p < k$,

$$r^{(k+1)}.r^{(p)} = r^{(k+1)}.(w^{(p)}p - \lambda_p w^{(p-1)}) = 0.$$

(iii)_{k+1} : Pour $p = k$ la relation (iii)_{k+1} est vérifiée grâce au choix de λ_{k+1} . Pour $p < k$, on remarque que, avec (1.21) et (iii)_k

$$w^{(k+1)}.Aw^{(p)} = (r^{(k+1)} + \lambda_{k+1}w^{(k)}).Aw^{(p)} = r^{(k+1)}.Aw^{(p)}$$

On utilise maintenant (1.19) et (i)_{k+1} pour obtenir

$$w^{(k+1)}.Aw^{(p)} = \frac{1}{\alpha_p} r^{(k+1)}.(r^{(p)} - r^{(p+1)}) = 0$$

On a ainsi démontré la convergence de la méthode du gradient conjugué.

1.5.6 Algorithme du gradient conjugué

1. Initialisation

Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, et soit $r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$

Si $r^{(0)} = 0$, alors $Ax^{(0)} = b$ et donc $x^{(0)} = \tilde{x}$, au quel cas l'algorithme s'arrête.

Sinon, On pose $w^{(0)} = r^{(0)}$ et on choisit α_0 optimal dans la direction $w^{(0)}$.
On pose alors

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 w^{(0)}$$

2. Itération k , $1 \leq k \leq n - 1$;

on suppose $x^{(0)}, \dots, x^{(k)}$ et $w^{(0)}, \dots, w^{(k-1)}$ connus et on pose $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

Si $r^{(k)} = 0$, alors $Ax^{(k)} = b$ et donc $x^{(k)} = \tilde{0}$, au quel cas l'algorithme s'arrête

Sinon, on pose $w^{(k)} = r^{(k)} + \lambda_{k-1}$, avec λ_{k-1} tel que $w^{(k)} \cdot Aw^{(k-1)} = 0$ et on choisit α_k optimal dans la direction $w^{(k)}$ donné par (1.18), on pose alors

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k w^{(k)}$$

Rapport-gratuit.com 
LE NUMERO 1 MONDIAL DU MÉMOIRES

Chapitre 2

Discrétisation du problème

2.1 Matériel

Freefem++

Freefem++ est un logiciel destiné à la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, posées en dimension deux ou trois d'espace par la méthode des éléments finis. Comme son nom l'indique, il combine les trois définitions suivantes :

Free : signifie que le logiciel est un logiciel libre, c'est à dire qu'il est à la disponibilité de tous et peut être téléchargé sur internet

FEM (Finit Element Methode) : il peut résoudre l'équation aux dérivés partielles par la méthode des éléments finis.

++ : indique que le langage du logiciel est inspirée par le langage C++

Il permet aussi de générer la création de domaines géométriques, son maillage et rapidement implémenter et tester de nouveaux algorithmes. Il s'inscrit dans la continuité des logiciels du type Matlab ou Scillab. Le logiciel demande un minimum de connaissances mathématiques qui tendent à la résolution du problème

2.2 Discrétisation du problème

Dans un domaine rectangulaire, on considère l'écoulement d'un fluide incompressible de vitesse $u \in [H^1(\Omega)]^2$ et de pression $p \in L^2(\Omega)$ autour d'un obstacle de section circulaire.

2.2.1 Repérage du domaine

On trace la zone d'écoulement par les fonction suivantes :

Frontière s1 : $Y = 0$ et $0 \leq X \leq L$

Frontière s2 : $X = L$ et $0 \leq Y \leq H$

Frontière s3 : $Y = H$ et $L \geq X \geq 0$

Frontière s4 : $X = 0$ et $H \geq Y \geq 0$

Frontière s5 : $X = x_c + D \sin \frac{t}{2}$ et $Y = y_c + D \cos \frac{t}{2}$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$

Où

C : Centre du cylindre de coordonnées (x_c, y_c)

L : Longueur du rectangle

H : Hauteur du rectangle



FIGURE 2.1 – Domaine d'écoulement fluide

2.2.2 Maillage

On construit la triangulation en fonction de N où N est un nombre entier donné

$$\text{meshTh} = \text{buildmesh}(s1(5 * N) + s2(N) + s3(5 * N) + s4(N) + s5(-3 * N))$$

ou

mesh Th : Le maillage du domaine porte le nom Th

buildmesh : commande qui construit le nombre de subdivision de chaque frontière

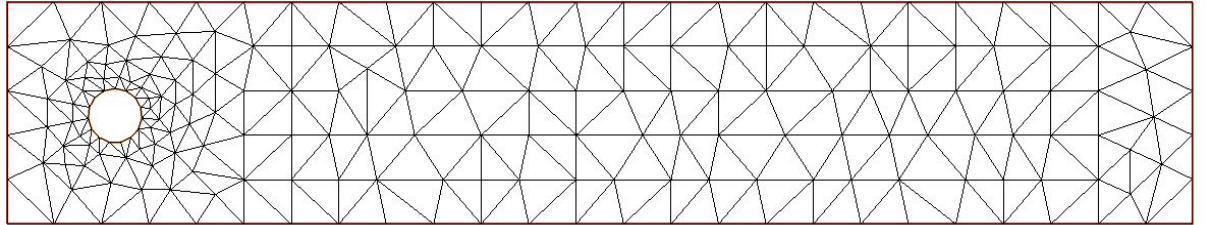


FIGURE 2.2 – Maillage du domaine Ω pour $N=5$

u et p vérifient les équations de Navier Stokes instationnaires avec les conditions aux limites :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) + \nabla p - \mu \Delta u = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$u_{s1} = u_{s3} = u_{s5} = 0$$

$$u_{s4} = U(x)$$

avec

$$\begin{aligned}
s_1 & : \text{bord inférieur} \\
s_2 & : \text{bord de sortie} \\
s_3 & : \text{bord supérieure} \\
s_4 & : \text{bord d'entrée} \\
s_5 & : \text{bord de l'obstacle} \\
U(x) & : \text{vitesse à l'entrée}
\end{aligned}$$

2.2.3 Adimensionnalisation

On pose u^* , x^* , t^* et p^* les grandeurs adimensionnelles tel que

$$\begin{aligned}
u^* &= \frac{u}{V} & x^* &= \frac{x}{L} & t^* &= \frac{t}{T} & p^* &= \frac{p}{\rho V^2} \\
\text{avec } T &= \frac{L}{V} & p &= \rho V^2 & \mu &= \nu \rho & \text{et } R_e &= \frac{VL}{\nu}
\end{aligned}$$

L'équation (2.1) devient

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{V}{T} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + V^2 \frac{(u^* \cdot \nabla^*) u^*}{L} \right) + \rho \frac{V^2 \nabla^* p^*}{L} - \mu \frac{V^2 \Delta^* u^*}{L^2} &= 0 \\
\rho \left(\frac{V^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + V^2 \frac{(u^* \cdot \nabla^*) u^*}{L} \right) + \rho \frac{V^2 \nabla^* p^*}{L} - \rho \nu \frac{V \Delta^* u^*}{L^2} &= 0 \\
\rho \frac{V^2}{L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (u^* \cdot \nabla^*) u^* + \nabla^* p^* - \nu \frac{\Delta^* u^*}{LV} \right) &= 0 \\
\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (u^* \cdot \nabla^*) u^* + \nabla^* p^* - \frac{1}{R_e} \Delta^* u^* &= 0 \tag{2.2}
\end{aligned}$$

2.2.4 Remarque :

Pour faciliter les notations on a enlevé les $*$ dans les équations (2.2). Alors le système à résoudre devient

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \frac{1}{R_e} \Delta u = 0 \\
\nabla \cdot u = 0 \\
u_{s_1} = u_{s_3} = u_{s_5} = 0 \\
u_{s_4} = U(x)
\end{array} \right. \tag{2.3}$$

2.2.5 Discrétisation en temps

Soit $\Omega = s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup s_4 \cup s_5$, pour $x \in \bar{\Omega}$ et $t \in [0, T]$, on définit la caractéristique $X = X(\tau; t, x)$ associé au champ de vitesse u , vérifiant

$$\frac{dX}{d\tau}(\tau; t, x) = u(X(\tau; t, x), \tau), \tau \in [0, T] \tag{2.4}$$

$$X(\tau; t, x) = x \tag{2.5}$$

La caractéristique $X(\tau; t, x)$ représente la position à l'instant τ d'une particule se trouvant en x à l'instant t .

$$\frac{d}{d\tau}[X(\tau; t, x), \tau] = \left(\frac{dX}{d\tau}(\tau; t, x) \cdot \nabla\right) + \frac{\partial u}{\partial \tau}(X(\tau; t, x), \tau)$$

En utilisant (2.4) et (2.5) on a

$$\frac{d}{d\tau}[u(X(\tau; t, x), \tau)]_{|\tau=t} = (u \cdot \nabla)u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, t)$$

où $(u \cdot \nabla)u$ est la dérivée advective de la vitesse et $\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, t)$ est la dérivée instantanée de la vitesse

Et on a

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \simeq \frac{u^{n+1} - u^n \circ X^n}{\Delta t} \quad (2.6)$$

avec $u^n \circ X^n(x) \simeq u^n(x - u^n(x)\Delta t)$.

D'après les relations (2.6) et (2.3), au temps de $n \Delta t$, on a à résoudre les problèmes de la forme

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}}{\Delta t} - \frac{1}{R_e} \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \frac{u^n \circ X^n}{\Delta t} \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \\ u_{s_1}^{n+1} = u_{s_3}^{n+1} = u_{s_5}^{n+1} = 0 \\ u_{s_4}^{n+1} = U((n+1)\Delta t) \end{cases}$$

En posant $k = \Delta t$ et $F = \frac{u^n \circ X^n}{\Delta t}$ on a

$$\frac{u^{n+1}}{k} - \frac{1}{R_e} \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = F \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0 \quad (2.8)$$

$$u_{s_1}^{n+1} = u_{s_3}^{n+1} = u_{s_5}^{n+1} = 0 \quad (2.9)$$

$$u_{s_4}^{n+1} = U((n+1)\Delta t) \quad (2.10)$$

2.2.6 Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On définit l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \right\}$$

Ainsi que les espaces

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega), u_\Gamma = 0 \}$$

$$V(\Omega) = \{ u \in (H_0^1(\Omega))^2, \text{div } u = 0 \}$$

$$M(\Omega) = \left\{ q \in \mathcal{L}^2(\Omega), \int_\Omega q = 0 \right\}$$

On obtient la formulation variationnelle du problème de Navier Stokes en multipliant l'équation (2.7) par une fonction test v et en intégrant sur Ω .

$\forall v \in V(\Omega)$,

$$\frac{1}{k} \int_\Omega u^{n+1} \cdot v \, d\Omega - \int_\Omega \frac{1}{R_e} \Delta u^{n+1} \cdot v \, d\Omega + \int_\Omega \nabla p^{n+1} \cdot v \, d\Omega = \int_\Omega F \cdot v \, d\Omega$$

On rappelle que

$$\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot (a\vec{v}) = \nabla a \cdot \vec{v} + a \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u^{n+1} \cdot v \, d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u^{n+1}) \cdot v \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u^{n+1} v) \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \nabla v \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \nabla u^{n+1} v \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \nabla v \, d\Omega \quad (\text{Théorème de Green}) \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \nabla v \, d\Omega \quad (\text{car } v \in V(\Omega)). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p^{n+1} \cdot v \, d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla (p^{n+1} v) \, d\Omega - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v \\ &= \int_{\Gamma} p^{n+1} v \cdot \vec{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v \, d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v \, d\Omega \end{aligned}$$

En définissant le forme bilinéaire $a : V(\Omega) \times V(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : V(\Omega) \times M(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$a(u^{n+1}, v) = \frac{1}{k} \int_{\Omega} u^{n+1} \cdot v \, d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \nabla v \, d\Omega$$

$$b(v, p^{n+1}) = \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot v \, d\Omega$$

$$\text{Ainsi que la forme linéaire } l(v) = \int_{\Omega} (u^n \circ X^n) \cdot v \, d\Omega$$

les problèmes (2.7)-(2.10) reviennent à chercher un couple $(u^{n+1}, p^{n+1}) \in V \times M$ tel que

$$\begin{cases} a(u^{n+1}, v) - b(v, p^{n+1}) = l(v) & \forall v \in V(\Omega) \\ b(u^{n+1}, q) = 0 & \forall q \in M(\Omega) \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2.7 Existence et unicité de la solution

Pour s'assurer que le problème ci-dessus soit bien posé, on vérifie les hypothèses suivantes :

1. La forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue sur V

Remarque : Si u_i est un champ scalaire dans l'espace $H^1(\Omega)$,

$$\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\delta u_i}{\delta x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u_i\|_{H^1(\Omega)}$$

En utilisant successivement les inégalités de Hölder et Cauchy Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &= \left| \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega + \frac{1}{k} \int_{\Omega} uv d\Omega \right| \\
&\leq \frac{1}{R_e} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\delta u_i}{\delta x_j} \right| d\Omega + \frac{1}{k} \left| \int_{\Omega} uv d\Omega \right| \\
&\leq \frac{1}{R_e} \sum_{i,j=1}^2 \|u_i\|_{H^1(\Omega)} \|v_i\|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{k} \|u\|_{V(\Omega)} \|v\|_{V(\Omega)} \\
&\leq \max\left(\frac{1}{R_e}, \frac{1}{k}\right) \|u\|_{V(\Omega)} \|v\|_{V(\Omega)}
\end{aligned}$$

Et donc on peut choisir $\max(\frac{1}{R_e}, \frac{1}{k})$ comme constante de continuité.

2. La forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive sur V

$\forall u \in V(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \nabla u \nabla u d\Omega + \frac{1}{k} \int_{\Omega} u u d\Omega \\
&= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \nabla u_j \nabla u_j d\Omega + \frac{1}{k} \int_{\Omega} u_j u_j d\Omega \right)
\end{aligned}$$

Vérifions dans un premier temps que la forme bilinéaire $\frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \nabla u_j \nabla u_j d\Omega + \frac{1}{k} \int_{\Omega} u_j u_j d\Omega$ est coercive.

En effet, grâce à l'inégalité de Poincaré, il existe $C_{\Omega} > 0$ ou C_{Ω} est la constante de Poincaré, tel que

$$\|u_j\|_{V(\Omega)}^2 = \|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\Omega}^2 (\|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
a_j(u, u) &= \int_{\Omega} (\nabla u_j)^2 d\Omega + \int_{\Omega} (u_j)^2 d\Omega \\
&= (\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
&\geq \frac{1}{C_{\Omega}^2} \|u_j\|_{V(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Et donc la coercivité de a_j est satisfaite pour la constante $\alpha = \frac{1}{C_{\Omega}^2} > 0$

3. La forme bilinéaire $b(v, q)$ est continue

En effet par les inégalités de Hölder (dans $L^2(\Omega)$) et de Cauchy-Schwarz (dans \mathbb{R}^2)

$$\begin{aligned}
|b(u, q)| &= \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} u q d\Omega \right| \leq \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\delta u_k}{\delta x_k} q \right| d\Omega \\
&\leq \sum_{k=1}^2 \left\| \frac{\delta u_k}{\delta x_k} \right\|_{L^2(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{V(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \|q\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \gamma \|u\|_V \|q\|_M
\end{aligned}$$

On choisit donc $\gamma = \sqrt{2}$ comme constante de continuité.

4. On peut finalement montrer que les espaces V et M vérifient les propriétés suivantes :

$$\exists B^* > 0 \text{ tel que } \forall q \in M, \exists v \in V, v \neq 0; b(v, q) \geq B^* \|v\|_V \|q\|_M$$

On appelle cette condition la condition de l'inf-sup.

2.2.8 Définition des espaces V_h et M_h

On commence par introduire une "triangulation T_h " de Ω , à l'aide des triangles fermés K de diamètre h . On a donc

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$$

avec les conditions suivantes : Si k_1 et k_2 sont deux triangles quelconques, on a

$$K_1 \cap K_2 = \begin{cases} \text{soit } \phi \\ \text{soit un sommet commun} \\ \text{soit un côté commun} \end{cases}$$

On introduit également les espaces discrets

$$\begin{aligned} V_h &= \{v_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}); \forall K \in T_h, v_{h/K} \in P_2\} \\ M_h &= \{p_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}); \forall K \in T_h, p_{h/K} \in P_1\} \end{aligned}$$

De façon générale, P_k désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k . Le choix de V_h pour v_h et M_h pour p_h vise à garantir leurs continuités aux interfaces de chaque triangle K .

coordonnées barycentriques :

Soit K un triangle non dégénéré dont les sommets sont $a_1(a_{11}, a_{12}), a_2(a_{21}, a_{22})$ et $a_3(a_{31}, a_{32})$; les coordonnées barycentriques $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq 3}$ du point $x \in \mathbb{R}^2$ par rapport au triangle K sont données par :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x) a_{ji} = x_i, 1 \leq i \leq 2 \\ \sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + a_{31}\lambda_3 = x_1 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{32}\lambda_3 = x_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Ce système linéaire admet une solution unique car K est non dégénéré et donc $\det(A) \neq 0$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$A^{-1} = \frac{1}{2\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} - a_{32} & a_{31} - a_{21} & a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \\ a_{32} - a_{12} & a_{11} - a_{31} & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} \\ a_{12} - a_{22} & a_{21} - a_{11} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2\Delta} [(a_{22} - a_{32})x_1 + (a_{31} - a_{12})x_2 + a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2\Delta} [(a_{32} - a_{12})x_1 + (a_{11} - a_{31})x_2 + a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}] \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2\Delta} [(a_{12} - a_{22})x_1 + (a_{21} - a_{11})x_2 + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}] \end{aligned}$$

$$\text{avec } 2\Delta = 2\text{aire}(K) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2.9 Fonctions de base

On rappelle que les coordonnées barycentriques d'un point x du triangle K des sommets a_1 , a_2 et a_3 sont les réels λ_1 , λ_2 et λ_3 tel que $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$. Les fonctions de bases locales sont définies à partir de coordonnées barycentriques.

Dans le cas du triangle de référence \bar{K} de sommet $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$, les coordonnées barycentriques d'un point de coordonnées cartésiennes x et y sont donc

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - x - y \\ \lambda_2 &= x \\ \lambda_3 &= y \end{aligned}$$

On peut déterminer les fonctions de base en fonction des coordonnées barycentriques des six nœuds de \bar{K} exprimés par leurs coordonnées barycentriques

$$a_1 = (1, 0, 0), a_2 = (0, 1, 0), a_3 = (0, 0, 1), a_4 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), a_5 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \text{ et } a_6 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

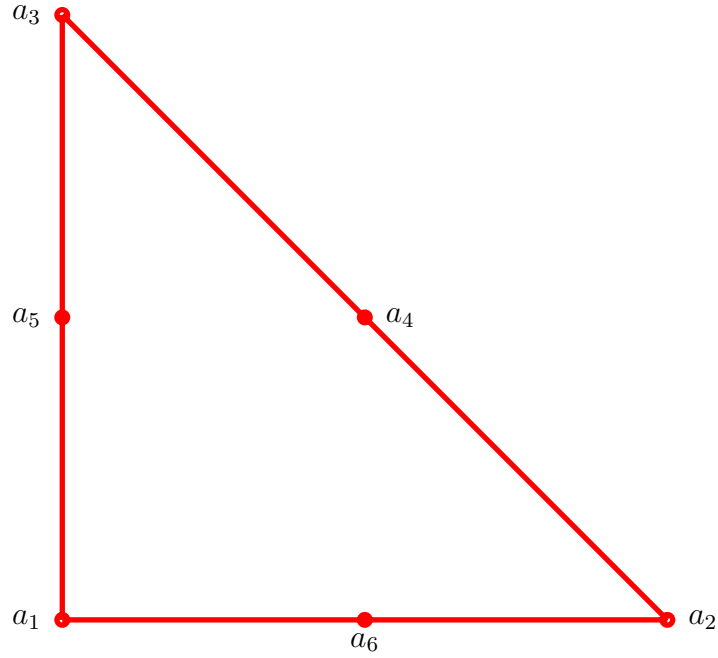


FIGURE 2.3 – Elément de référence pour les éléments finis P_2
 Les fonctions de bases sont déterminés par $\phi_i \in P_2$ et $\phi_i(a_j) = \delta_{ij}$, $(i, j) \in (1, \dots, 6) \times (1, \dots, 6)$

$$\text{On veut } \begin{cases} \phi_1(a_1) = 1 \\ \phi_1(a_i) = 0 \quad \forall i = 2, \dots, 6 \end{cases}$$

Donc $\phi_1(x, y) = 2\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{2})$

Par symétrie on définit $\phi_2(x, y) = 2\lambda_2(\lambda_2 - \frac{1}{2})$ et $\phi_3(x, y) = 2\lambda_3(\lambda_3 - \frac{1}{2})$

Pour les nœuds a_4, a_5, a_6 les fonctions de bases sont

$$\begin{aligned} \phi_4(x, y) &= 4\lambda_2\lambda_3 \\ \phi_5(x, y) &= 4\lambda_1\lambda_3 \\ \phi_6(x, y) &= 4\lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

2.2.10 Formulation discrète

Considérons le problème discret

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) - b(v_h, p_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ b(u_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h \end{cases} \quad (2.14)$$

prenons $v_h = \phi_j$ avec ϕ_j la fonction de base dans l'espace V_h défini dans le paragraphe précédent et posons

$$u_h = \sum_{i=1}^{nbv+nbe} u_i \phi_i(x), \quad p_h = \sum_{i=1}^{nbv} p_i \lambda_i(x) \text{ et } q_h = \lambda_i(x)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
a(u_h, v_h) &= \sum_{k=1}^{nbt} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{T_k} u_h \cdot v_h + \frac{1}{R_e} \int_{T_k} \nabla u_h \nabla v_h \right) \\
&= \sum_{k=1}^{nbt} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{T_k} \sum_{i,j} u_i \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) + \frac{1}{R_e} \int_{T_k} \sum_{i,j} u_i \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{nbt} \left(\sum_{i,j} u_i \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{T_k} \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) + \frac{1}{R_e} \int_{T_k} \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) \right) \right) \\
&= A_{ij} U_i \\
b(v_h, p_h) &= \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} (p_h \nabla \cdot v_h) \\
&= \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \sum_{i,j} p_i \lambda_i(x) \nabla \cdot (\phi_j(x)) \\
&= B_{ij}^T P_i \\
b(u_h, q_h) &= \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \nabla \cdot (u_h) q_h \\
&= \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \sum_{i,j} u_i \nabla \cdot \phi_i(x) \lambda_j(x) \\
&= B_{ij} U_i \\
l(v_h) &= \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \frac{u^n \circ X^n}{\Delta t} \\
&= \sum_{k=1}^{nbt} \int_{T_k} \sum_{i,j} \frac{u^i \phi_i(x) \circ X \phi_j(x)}{\Delta t} \\
&= f_{ij}
\end{aligned}$$

Donc le système 2.14 devient

$$A_{ij} U_i + B_{ij}^T P_i = f_{ij} \quad (2.15)$$

$$B_{ij} U_i = 0 \quad (2.16)$$

Sous forme matricielle on a

$$\begin{pmatrix} A_{ij} & B_{ij}^T \\ B_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ P_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Pour que ce problème soit bien défini, il faut que la matrice carré $C = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$ soit inversible.

Proposition 2.1. *Si $\text{Ker } B^T = 0$, alors la matrice C est inversible*

Démonstration 2.2. *A est une matrice carrée symétrique et définie positive par définition de la forme bilinéaire $a(u, v)$ donc A est inversible et l'équation 2.15 peut se réécrire :*

$$U = A^{-1}(f - B^T P) \quad (2.18)$$

$$BA^{-1}B^T P = BA^{-1}f \quad (2.19)$$

Notons que l'équation (2.19) ne dépend que de l'inconnue P. On pose $R = BA^{-1}B^T$ et

$$\begin{aligned} R^T &= (BA^{-1}B^T)^T \\ &= BA^{-1}B^T = R \end{aligned}$$

ainsi R est symétrique et si $\text{Ker} B^T = 0$, pour tout $p \in P_h$ non nul

$$p^T BA^{-1}B^T p > 0$$

car A^{-1} est symétrique et définie positive puisque A l'est. Donc la matrice R est inversible et dans ce cas le problème 2.19 est bien posé et il admet une unique solution P. En reconsidérant l'équation 2.18, puisque A est inversible, U est donc unique car P l'est aussi.

Par conséquent, le problème ci dessus est bien posé et la matrice C inversible.

Chapitre 3

Applications à la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires

3.1 Méthode de Lagrangien augmenté

On considère le problème de minimisation

$$\begin{cases} J(u) \leq J(v) & \forall v \in \text{Ker}B = \{v \in \mathbb{R}^n, Bv = 0\} \\ u \in \text{Ker}B \end{cases} \quad (3.1)$$

On introduit un multiplicateur de Lagrange $p \in \mathbb{R}^n$ qui transforme (3.1) en un problème sans contrainte soit

$$J(u) = \min_{v \in \mathbb{R}^N} (J(v) + (p, Bv))$$

Le multiplicateur de Lagrange p apparaît comme une inconnue supplémentaire qui peut-être par exemple, obtenue moyennant la résolution d'un problème de point selle. De façon plus précise on définit $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L(v, q) = J(v) + (q, Bv)$$

On introduit le lagrangien augmenté L_r défini, pour $r > 0$, par

$$L_r(v, q) = L(v, q) + \frac{r}{2}|Bv|^2$$

$|\cdot|$ désigne la norme euclidienne canonique de \mathbb{R}^M

Remarque 3.1. – *Tout point selle de L_r est point selle de L .*

– *Le fait d'ajouter le terme quadratique $\frac{r}{2}|Bv|^2$ au lagrangien L améliorera les propriétés de convergence des algorithmes de dualités décrits dans la suite.*

3.2 Algorithme de calcul de point selle

1. $p^0 \in \mathbb{R}^M$ arbitrairement donné
2. p^n étant connu, on calcule u^n puis p^{n+1}

$$\begin{cases} L_r(u^n, p^n) \leq L_r(v, p^n) \quad \forall v \in \mathbb{R}^N \\ u^n \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.2)$$

$$p^{n+1} = p^n + \alpha_n B u^n, \alpha_n > 0$$

3.3 Algorithme de base

Considérons l'algorithme de résolution suivant

1. on se donne u^0 arbitrairement
2. $\forall n \geq 0$, u^n étant connue, on recherche $u^{n+\frac{1}{2}}$ et p^{n+1} solution dans Ω de

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}}}{k} - \frac{1}{Re} \Delta u^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+1} &= F \\ \nabla \cdot u^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ u_{s_1}^{n+\frac{1}{2}} = u_{s_3}^{n+\frac{1}{2}} = u_{s_5}^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ u_{s_4}^{n+\frac{1}{2}} &= U((n + \frac{1}{2})\Delta t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le problème (3.3) consiste en la recherche du point-selle du Lagrangien $L : H_0(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $L(u, p) = \frac{1}{2}(A(u^n)u, u) + (p, \nabla \cdot u) - (F, u) = 0$ où l'opérateur $A(u^n) = -\frac{I}{k} - \frac{1}{Re} \Delta + u^n \cdot \nabla$ est linéaire et coercive.

Alors le Lagrangien augmenté est défini par $L_r(u, p) = L(u, p) + \frac{r}{2} \|\nabla \cdot u\|^2$

Notons $A_r(u^n) = A(u^n) - r \nabla(\nabla \cdot)$

Donc on cherche $u^{n+\frac{1}{2}}$ et p^{n+1} solution dans Ω de

$$\begin{aligned} A_r(u^n)u^{n+\frac{1}{2}} + \nabla p^{n+1} &= F \\ \nabla \cdot u^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ u_{s_1}^{n+\frac{1}{2}} = u_{s_3}^{n+\frac{1}{2}} = u_{s_5}^{n+\frac{1}{2}} &= 0 \\ u_{s_4}^{n+\frac{1}{2}} &= U((n + \frac{1}{2})\Delta t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pour la résolution de (3.4) on utilise l'algorithme d'Uzawa suivant :

1. $p^{n+1,0}$ arbitrairement donné
2. pour $s \geq 0$, $p^{n+1,s}$ étant connu, on calcule $u^{n+\frac{1}{2},s}$ et $p^{n+1,s+1}$ solution de

$$\begin{aligned} A_r(u^n)u^{n+\frac{1}{2},s} + \nabla p^{n+1,s} &= F \\ \nabla \cdot u^{n+\frac{1}{2},s} &= 0 \\ u_{s_1}^{n+\frac{1}{2},s} = u_{s_3}^{n+\frac{1}{2},s} = u_{s_5}^{n+\frac{1}{2},s} &= 0 \\ u_{s_4}^{n+\frac{1}{2},s} &= U((n + \frac{1}{2})\Delta t) \\ p^{n+1,s+1} &= p^{n+1,s} + \alpha_n \nabla \cdot u^{n+\frac{1}{2},s} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ensuite on calcul u^{n+1} par la relation suivant :

$$u^{n+1} = wu^{n+\frac{1}{2}} + (1-w)u^n$$

où w est un paramètre de relaxation. Dans le cas $w = 1$, on a $u^{n+1} = T(u^n)$.

Nous avons montré (dans le chapitre 2) que le problème de Navier-Stokes peut être ramené aux problème suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Avec le rajout d' un terme visqueux, on a :

$$\begin{pmatrix} A_r & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

3.4 Algorithme Uzawa et Algorithme de Gradient Conjugué

La méthode d'"Uzawa", du nom de l' économiste Japonais utilise la méthode de Gradient Conjugué. Nous avons ramené le problème matricielle de Navier Stokes sous la forme d'un système d'équation

Trouver $u \in V_h, p \in M_h$, tels que

$$A_r u = F - B^T p \quad (3.8)$$

$$BA_r^{-1} B^T p = BA_r^{-1} F \quad (3.9)$$

L'idée de la méthode d'Uzawa est de trouver , pour un p_0 donné, p et u , de manière à ce que le résidu Bu soit minimal pour satisfaire la condition $Bu = 0$. Plus précisément, pour toute itération $n \in \mathbb{N}$, si p_n est donné et $\alpha_n \in \mathbb{R}$ est une constante déterminé par la méthode de gradient conjugué, alors on trouve p_{n+1} de la manière suivante :

1. $u_n = A_r^{-1}(F - B^T p_n)$
2. $p_{n+1} = p_n + \alpha_n B u_n$

On continue ainsi jusqu'à la convergence de la méthode, c'est à dire le résidu que $\frac{\|p_{n+1} - p_n\|}{p_n} = \|\alpha B u_n\|$ soit suffisamment petit.

Méthode du gradient conjugué et calcul de la constante α_n

En reprenant l'équation (3.9), on obtient une équation qui ne contient que p comme inconnue :

$$Sp = g$$

où $S = BA_r^{-1} B^T$ est symétrique et définie positive et $g = BA_r^{-1} F$. On peut appliquer l'algorithme du gradient conjugué pour trouver α_n . L'algorithme s'écrit de la manière suivante : Soit donné les matrices A_r et B , la fonction F ainsi qu'un vecteur initial p_0

1. Résoudre $A_r z = B^T p_0$
2. $Sx_0 = Bz$
3. Résoudre $A_r e = F$
4. $g = Be$
5. $r_0 = g - Sp_0$
6. $w_1 = r_0$
7. $\rho_1 = r_0^T w_1$
8. $p_1 = p_0 + \alpha_1 w_1$
9. Résoudre $A_r z = B^T w_1$
10. $Sw_1 = Bz$
11. Répéter pour $j = 1, 2, \dots$ jusqu'à convergence
12. $r_j = r_{j-1} - \rho_j Sw_j$
13. $\beta_j = -\frac{r_j^T Sw_j}{w_j^T Sw_j}$
14. $w_{j+1} = r_j + \beta_j w_j$
15. Résoudre $A_r z = B^T w_{j+1}$
16. $Sw_{j+1} = Bz$
17. $\alpha_{j+1} = \frac{r_j^T w_{j+1}}{w_{j+1}^T Sw_{j+1}}$

Chapitre 4

Résultats et Interprétation

4.1 Dimension du domaine

On réalise l'écoulement autour d'un obstacle de section circulaire de centre gravité $C(0.2, 0.2)$ et de diamètre $D = 0.1$ dans un domaine rectangulaire de :

- longueur $L = 2.2$
- hauteur $H = 0.41$

Le profil de vitesse d'entrée est définie par

$$U_1 = \frac{4 \times U_m \times Y(H - Y)}{H \times H}$$

avec $U_m = 0.15$ (vitesse d'entrée)

Le domaine est divisé en 347 triangles pour une approximation quadratique. Le pas de temps égal à $\Delta = 0.5$ s

4.2 Etude du paramètre α

Nous allons nous intéresser maintenant à l'importance de la constante α dans l'algorithme d'Uzawa pour quelques valeurs de r et de nombres de reynolds fixés. Nous allons estimer la valeur du α optimale permettant un nombre d'itération le plus petit possible. Pour r valant respectivement 0 et 100, voici les tableaux nous donnant le nombre d'itération de la méthode d'Uzawa pour quelques valeurs de α

4.2.1 Nombre de Reynolds égal à 100

α	temps	r=0	r=100
10e-4	0.5	81	54
	1	80	54
	1.5	80	54
	2	80	55
10e-1	0.5	81	52
	1	80	53
	1.5	80	53
	2	80	54
10e5	0.5	81	52
	1	80	53
	1.5	80	53
	2	80	53
10e9	0.5	81	52
	1	80	53
	1.5	80	53
	2	80	53
10e10	0.5	81	52
	1	81	53
	1.5	81	53
	2	80	53
10e12	0.5	81	54
	1	81	54
	1.5	81	54
	2	81	54
10e13	0.5	81	53
	1	81	54
	1.5	81	54
	2	81	54
10e15	0.5	97	55
	1	99	55
	1.5	99	55
	2	98	54
10e17	0.5	287	56
	1	103	57
	1.5	105	57
	2	106	57
10e20	0.5	287	307
	1	103	275
	1.5	105	273
	2	106	272

TABLE 4.1 – Nombre d'itérations en fonction de α pour $Re = 100$

On remarque que la valeur optimale de α dépend de la valeur du paramètre r . Pour $r = 0$ et la méthode de Lagrange augmenté n'étant pas utilisée, les nombres d'itérations sont très grands et ne varient pas en fonction du paramètre α pour $10^{-4} \leq \alpha \leq 10^9$. Si $\alpha = 10^{17}$ on a un grand saut sur le nombre d'itérations. On déduit que l'intervalle $[10^{-4}, 10^9]$ est une valeur optimale du paramètre α . Pour $r = 100$, le nombre d'itérations est invariable et minimal pour $10^5 \leq \alpha \leq 10^8$. Ils sont aussi plus petits en comparaison avec $r = 0$ pour chaque valeur de α .

4.2.2 Nombre de Reynolds égal à 500

α	temps	r=0	r=100
10e-4	0.5	70	54
	1	73	55
	1.5	73	55
	2	73	55
10e-1	0.5	70	54
	1	73	54
	1.5	73	54
	2	73	54
10e5	0.5	70	52
	1	73	53
	1.5	73	53
	2	73	53
10e7	0.5	70	52
	1	73	53
	1.5	73	53
	2	73	53
10e8	0.5	70	52
	1	74	53
	1.5	74	53
	2	73	53
10e10	0.5	70	52
	1	74	54
	1.5	74	53
	2	74	53
10e11	0.5	70	53
	1	74	54
	1.5	74	54
	2	74	54
10e15	0.5	94	54
	1	82	56
	1.5	80	55
	2	80	55
10e17	0.5	225	56
	1	122	57
	1.5	94	58
	2	94	56
10e20	0.5	225	327
	1	122	286
	1.5	94	280
	2	94	277

TABLE 4.2 – Nombre d'itérations en fonction de α pour $Re = 500$

Pour $r = 0$, on voit que le nombre d'itération ne varie pas en fonction du paramètre α pour $10^{-4} \leq \alpha \leq 10^7$ et on a un grand saut pour $\alpha = 10^{15}$. On déduit que l'intervalle $[10^{-4}, 10^7]$ est une valeur optimale du paramètre α .

Pour $r = 100$, le nombre d'itérations ne change pas en fonction du paramètre α et est minimal pour $10^5 \leq \alpha \leq 10^8$ et sa valeur est plus petite par rapport $r = 0$ pour chaque valeur de α .

4.3 Variation du paramètre α avec la méthode de gradient conjugué

Pour $0 \leq t \leq 2$ s et pour un pas de temps $\Delta t = 0.5$ s, on a les résultats suivants :

- Nombre de Reynolds égale à 100

Temps	$r = 0$	$r = 100$
0.5	81	52
1	80	52
1.5	78	52
2	79	52

TABLE 4.3 – Nombre d'itérations pour α variable avec $Re = 100$

- Nombre de Reynolds égal à 500

Temps	$r = 0$	$r = 100$
0.5	70	52
1	72	52
1.5	69	53
2	68	52

TABLE 4.4 – Nombre d'itérations pour α varié avec $Re = 500$

On voit que le nombre d'itérations dépend de la valeur du paramètre r et du temps pour $r = 0$. En effet si on augmente le valeur de r le nombre d'itération diminue et on remarque qu'il y a une grande différence sur les nombres d'itérations entre les deux valeurs de r .

4.3.1 Comparaison des deux méthodes

Soit m_k la valeur moyenne de nombre d'itérations pour la k -ème méthode telle que

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^4 n_i}{4}$$

avec n_i les nombres d'itérations pour le i -ème temps.

On calcule m_1 pour α optimal. En effet pour $Re = 100$:

si $r = 0$: on a $m_1 = 80,25$ et $m_2 = 79,5$

si $r = 100$: on a $m_1 = 52,75$ et $m_2 = 52$

De même pour $Re = 500$, on a toujours $m_1 \geq m_2$. Donc les nombres d'itérations pour α variable sont inférieurs aux nombres d'itérations pour α fixé et optimal.

Champ de vitesse et de pression pour $Re = 500$



FIGURE 4.1 – Champ de vitesse pour $t = 0.5$ s

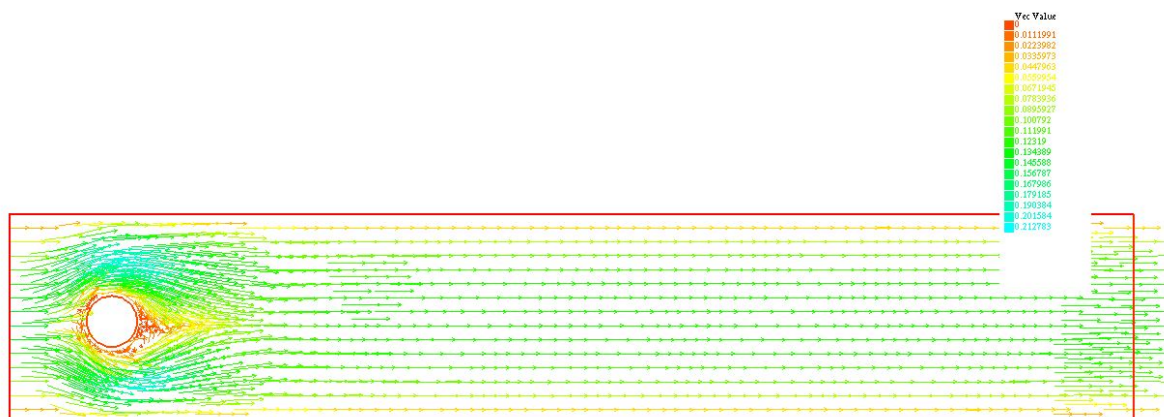


FIGURE 4.2 – Champ de vitesse pour $t = 1$ s

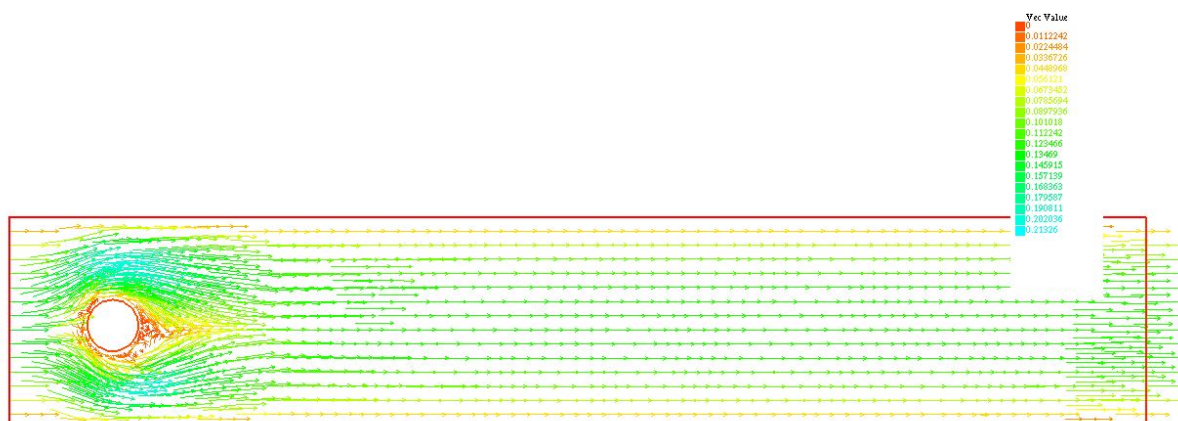


FIGURE 4.3 – Champ de vitesse pour $t = 1.5$ s



FIGURE 4.4 – Champ de vitesse pour $t = 2$ s

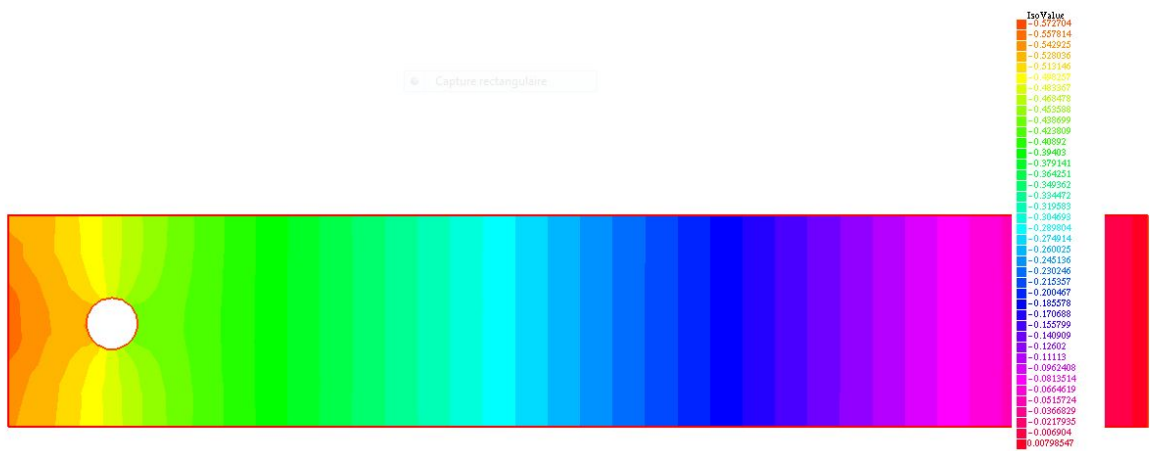


FIGURE 4.5 – Champ de pression pour $t = 0.5$ s

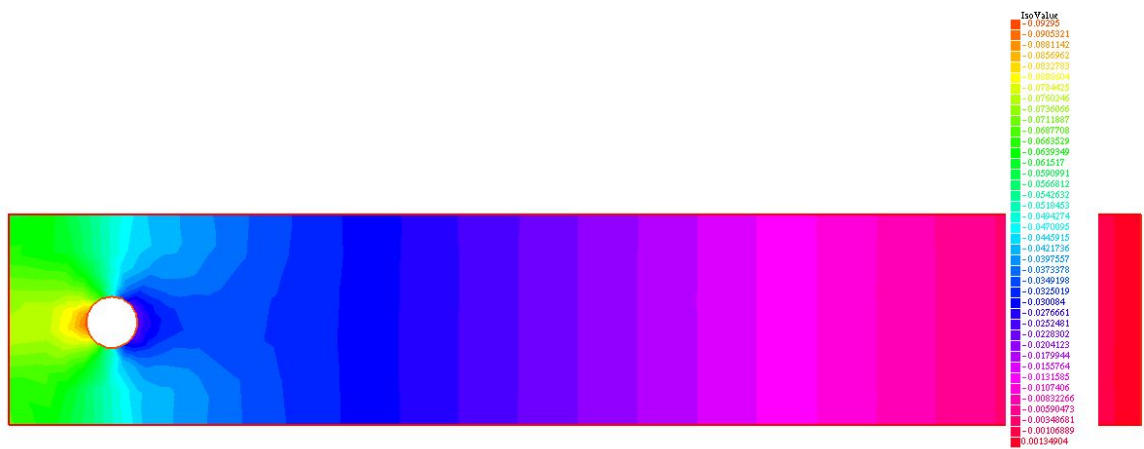


FIGURE 4.6 – Champ de pression pour $t = 1$ s

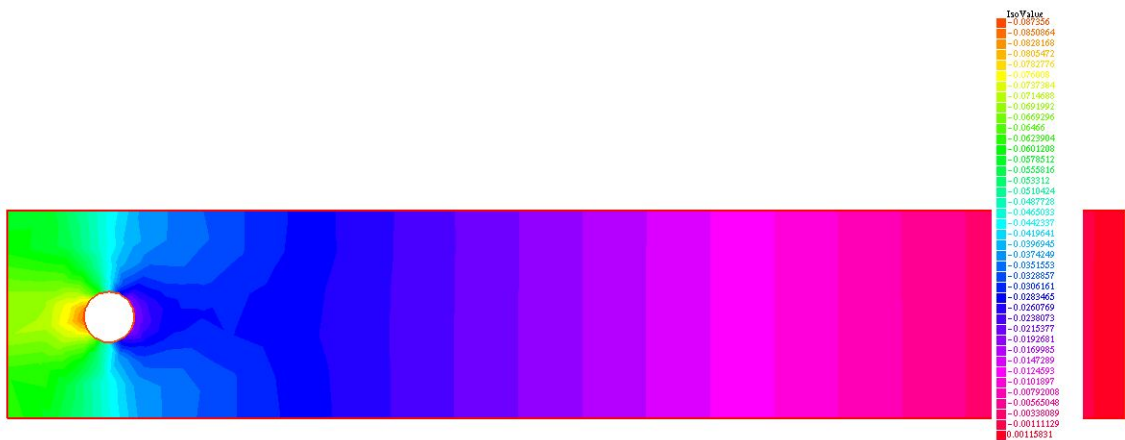


FIGURE 4.7 – Champ de pression pour $t = 1.5$ s

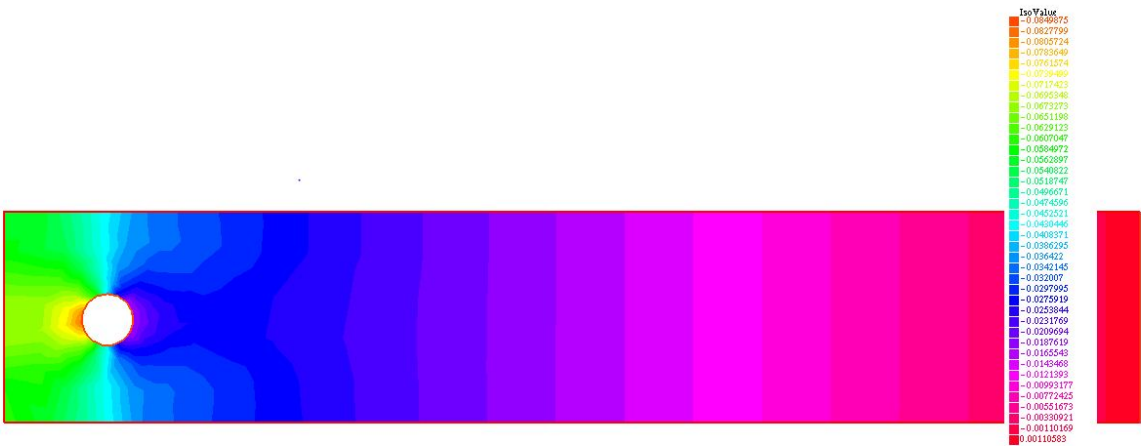


FIGURE 4.8 – Champ de pression pour $t = 2$ s

4.4 Conclusion générale

Cet ouvrage montre une excellente méthode pour la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires dans un écoulement face à un obstacle cylindrique. Dans la méthode d'Uzawa, la vitesse de convergence dépend de nombreux paramètres tels que le pas de temps k , le nombre de Reynolds Re , le paramètre r caractérisant le Lagrangien augmenté et surtout le paramètre α qui est le fruit de ce mémoire. Il faut prendre k assez petit pour avoir une meilleure convergence. Ici nous avons pris $k = 0.5$. Nous avons choisi les valeurs de Re successivement $Re = 100$ et $Re = 500$. Le nombre d'itérations diminue quand le nombre de Reynolds augmente.

Deux études ont été menées : l'une où le paramètre α est fixé et l'autre où le paramètre α est variable.

Il existe une valeur de α pour laquelle la vitesse de convergence est optimale lorsque α est fixe. On note que le calcul de cette valeur optimale est possible à l'aide de calcul de spectral.

Lorsque α est variable, le calcul de la variation de α est effectué avec la méthode du gradient conjugué.

On constate alors une nette amélioration de la vitesse de convergence en comparaison avec le calcul où α est fixe.

L'utilisation de la méthode du Lagrangien augmenté a également été prouvée afin d'optimiser encore plus cette vitesse de convergence grâce au rajout d'un terme visqueux pénalisateur.

Ces différentes méthodes ont été utilisées pour la résolution des équations de Navier-Stokes avec comme logiciel de support `freefem++`. Leur efficacité a été avérée. On peut aussi preconditionner le système linéaire, pour accélérer la vitesse de convergence. L'idée ici est de multiplier le système initial par une matrice C , dite de preconditionnement qui est facilement inversible. C approche suffisamment A afin que $C^{-1}A = I$.

Annexe A

Algorithme de gradient conjugué préconditionné

On note $(a, b)_C = (Ca, b)$ le produit scalaire induit par C sur \mathbb{R}^n . Le gradient conjugué préconditionné par une matrice C , symétrique définie positive :
Soient $x^0 \in \mathbb{R}^n$, ϵ , C donnés

$$G^0 = Ax^0 - b$$

$$H^0 = -CG^0$$

-Pour $i=0$ à n

$$\alpha = -\frac{(G^i, H^i)}{(H^i, AH^i)}$$

$$x^{i+1} = x^i + \alpha H^i$$

$$G^{i+1} = G^i + \alpha AH^i$$

$$\gamma = \frac{(G^{i+1}, G^{i+1})_C}{(G^i, G^i)_C}$$

$$H^{i+1} = -CG^{i+1} + \gamma H^i$$

$$\text{Si } (G^{i+1}, G^{i+1})_C < \epsilon \text{ stop}$$

Bibliographie

- [1] Raphaèle Herbin. Cours d'analyse numérique, Janvier 2017.
- [2] Jonathan ROCHAT Sous la direction des professeurs J. Rappaz et M. Picasso, MATHICSE-ASN. Résolution numérique du problème de Stokes en 3D avec élément fini $\mathbb{P}2 - \mathbb{P}1$.
- [3] F. Hecht, Freefem++. Third Edition, Version 3.58-1. <http://www.freefem.org/ff++>
- [4] M. Fortin et R. Glowinski. Méthode de lagrangien augmenté. Dunod, second edition, 1982.
- [5] Atsushi Suzuki. Introduction to finite element computation by FreeFem++ , towards numerical simulation of fluid flow problems. Workshop on Mathematical Analysis for Nonlinear Phenomena, 15-16, October 2015.
- [6] Nadia MHIOUAH et Eric DALISSIER. Cours DEA C++ et éléments finis. Présenté à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).